Correction des exercices du 27/01/2025 (Espaces euclidiens)

Ex 1 : Soit E un espace euclidien de dimension 4, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_4)$ une base orthonormée de E, et F le sous-espace vectoriel d'équations dans $\mathcal{B}$: $\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x+2y+3z+4t &= 0 \end{cases}$.

1. Trouver une base orthonormée de F.

2. Donner la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur F.

3. Calculer $d(e_1, F)$.

Correction :

1. $\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x+2y+3z+4t &= 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ y+2z+3t &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ y &= -2z-3t \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x &= z+2t \\ y &= -2z-3t \end{cases}$. Ainsi $F = \{(z+2t)e_1 - (2z+3t)e_2 + ze_3 + te_4,\ z,t \in \mathbb{R}\} =$ $\{z(e_1 - 2e_2 + e_3) + t(2e_1 - 3e_2 + e_4), z, t \in \mathbb{R}\} = vect(g,h)$, avec $g = e_1 - 2e_2 + e_3$ et $h = 2e_1 - 3e_2 + e_4$. (g,h) est donc une famille génératrice de F et c'est une famille libre aussi (<u>deux</u> vecteurs indépendants), c'est donc une base de F.

Nous allons l'orthonormaliser grâce au procédé de Gram-Schmidt.

- On a $\|g\| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$, on pose donc $u_1 = \dfrac{g}{\|g\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3)$.
- On pose $v_2 = h - (h|u_1)u_1 = 2e_1 - 3e_2 + e_4 - \left(\dfrac{8}{\sqrt{6}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3) =$

$2e_1 - 3e_2 + e_4 - \dfrac{4}{3}(e_1 - 2e_2 + e_3) = \dfrac{2}{3}e_1 - \dfrac{1}{3}e_2 - \dfrac{4}{3}e_3 + e_4$.

On a $\|v_2\| = \sqrt{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 + (1)^2} = \sqrt{\dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{9} + \dfrac{16}{9} + \dfrac{9}{9}} = \sqrt{\dfrac{30}{9}} = \dfrac{\sqrt{30}}{3}$.

On pose $u_2 = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{30}}(2e_1 - e_2 - 4e_3 + 3e_4)$.

Ainsi (u_1, u_2) est une base orthonormée de F.

2. Soit p la projection orthogonale sur F. On a : $\forall x \in E,\ p(x) = (x|u_1)u_1 + (x|u_2)u_2$.

On a : • $p(e_1) = (e_1|u_1)u_1 + (e_1|u_2)u_2 =$

$\dfrac{1}{\sqrt{6}}u_1 + \dfrac{2}{\sqrt{30}}u_2 = \dfrac{1}{6}(e_1 - 2e_2 + e_3) + \dfrac{2}{30}(2e_1 - e_2 - 4e_3 + 3e_4) =$

$\dfrac{1}{30}(5e_1 - 10e_2 + 5e_3) + \dfrac{1}{30}(4e_1 - 2e_2 - 8e_3 + 6e_4) = \dfrac{1}{30}(9e_1 - 12e_2 - 3e_3 + 6e_4)$.

• $p(e_2) = (e_2|u_1)u_1 + (e_2|u_2)u_2 =$

$\dfrac{-2}{\sqrt{6}}u_1 - \dfrac{1}{\sqrt{30}}u_2 = \dfrac{-2}{6}(e_1 - 2e_2 + e_3) - \dfrac{1}{30}(2e_1 - e_2 - 4e_3 + 3e_4) =$

$\dfrac{1}{30}(-10e_1 + 20e_2 - 10e_3) - \dfrac{1}{30}(2e_1 - e_2 - 4e_3 + 3e_4) = \dfrac{1}{30}(-12e_1 + 21e_2 - 6e_3 - 3e_4)$.

• $p(e_3) = (e_3|u_1)u_1 + (e_3|u_2)u_2 =$

$\dfrac{1}{\sqrt{6}}u_1 - \dfrac{4}{\sqrt{30}}u_2 = \dfrac{1}{6}(e_1 - 2e_2 + e_3) - \dfrac{4}{30}(2e_1 - e_2 - 4e_3 + 3e_4) =$

$\dfrac{1}{30}(5e_1 - 10e_2 + 5e_3) - \dfrac{1}{30}(8e_1 - 4e_2 - 16e_3 + 12e_4) = \dfrac{1}{30}(-3e_1 - 6e_2 + 21e_3 - 12e_4)$.

• $p(e_4) = (e_4|u_1)u_1 + (e_4|u_2)u_2 = 0.u_1 + \dfrac{3}{\sqrt{30}}u_2 = \dfrac{1}{30}(2e_1 - e_2 - 4e_3 + 3e_4) =$

$\dfrac{1}{30}(6e_1 - 3e_2 - 12e_3 + 9e_4)$.

On a donc $Mat_{\mathcal{B}}(p) = \dfrac{1}{30}\begin{pmatrix} 9 & -12 & -3 & 6 \\ -12 & 21 & -6 & -3 \\ -3 & -6 & 21 & -12 \\ 6 & -3 & -12 & 9 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 & 2 \\ -4 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

3. On a $d(e_1, F) = \|e_1 - p(e_1)\| = \left\| \dfrac{1}{10}.10e_1 - \dfrac{1}{10}(3e_1 - 4e_2 - e_3 + 2e_4) \right\| =$
$\left\| \dfrac{1}{10}(7e_1 + 4e_2 + e_3 - 2e_4) \right\| = \dfrac{1}{10}\|7e_1 + 4e_2 + e_3 - 2e_4\| =$
$\dfrac{1}{10}\sqrt{7^2 + 4^2 + 1^2 + 2^2} = \dfrac{\sqrt{70}}{10} = \dfrac{\sqrt{7} \times \sqrt{10}}{10} = \sqrt{\dfrac{7}{10}}$.