Correction des exercices du 03/02/2025 (Espaces euclidiens)

Ex 1 : Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 + 4I_2 = 0$ et $M^T M = M M^T$ $(*)$.

1. Soit $A = M^T M$. Montrer que $A^2 = 16I_2$, puis donner le spectre de A et en déduire que $A = 4I_2$.

2. Montrer que la matrice $\dfrac{M}{2}$ est orthogonale.

3. En déduire toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient les conditions $(*)$.

Correction :

1. On a : $A^2 = M^T M M^T M \underset{M^T M = M M^T}{=} M^2 (M^2)^T \underset{M^2 = -4I_2}{=} (-4I_2)(-4I_2) = 16I_2$.

$X^2 - 16$ est un polynôme annulateur de A, donc le spectre de A est inclus dans les racines de ce polynôme : $Sp(A) \subset \{-4, 4\}$.
A est une matrice symétrique réelle $A^T = (M^T M)^T = M^T (M^T)^T = M^T M = A$ et positive, car : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T A X = X^T M^T M X = (MX)^T (MX) = \|MX\|^2 \geq 0$. Ainsi A est dans $S_2^+(\mathbb{R})$ donc elle est diagonalisable et à valeurs propres positives. Ainsi $Sp(A) = \{4\}$.
Ainsi il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1} = 4 P I_2 P^{-1} = 4 P P^{-1} = 4I_2$.

2. $\left(\dfrac{M}{2}\right)^T \dfrac{M}{2} = \dfrac{M^T M}{4} = \dfrac{A}{4} = I_2$, donc $\dfrac{M}{2}$ est orthogonale.

3. Analyse : Soit M une telle matrice. Ainsi $M/2$ est dans $O_2(\mathbb{R})$, grâce aux questions précédentes.
Premier cas : $M/2$ est dans $O_2(\mathbb{R}) \setminus SO_2(\mathbb{R})$.
L'endomorphiusme canoniquement associé est donc une symétrie vectorielle, donc $(M/2)^2 = I_2$, soit $M^2 = 4I_2$, ce qui est contradictoire avec $M^2 = -4I_2$ de $(*)$.
Deuxième cas : $M/2$ est dans $SO_2(\mathbb{R})$. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $M/2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Ainsi $M^2 = 4 \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$ et $M^2 + 4I_2 = 4 \begin{pmatrix} 1 + \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & 1 + \cos(2\theta) \end{pmatrix}$. On veut donc $\cos(2\theta) = -1$ et $\sin(2\theta) = 0$, soit $2\theta \equiv \pi[2\pi]$, soit $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, soit $\theta \equiv \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ ou $\theta \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. Ainsi $M = 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ou $M = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
Examen : On vérifie réciproquement que $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ vérifient $(*)$.

Ex 2 : Montrer que f, canoniquement associé à $A \in S_n(\mathbb{R})$, vérifiant $A^4 = A$ et $trA = n - 1$, est un projecteur orthogonal dont on précisera le rang.

Correction :
$X^4 - X = X(X^3 - 1) = X(X - 1)(X^2 + X + 1)$ est un polynôme annulateur de A. Comme A est symétrique réelle, alors elle est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles. Comme $X^2 + X + 1$ n'a pas de valeurs propres réelles, alors $Sp(A) \subset \{0, 1\}$. Soient m_0 et $m - 1$ les multiplicités respectives des valeurs propres 0 et 1. On a $m_0 + m_1 = n$ (A est diagonalisable) et
$n - 1 = tr(A) = m_0 \times 0 + m_1 \times 1 = m_1$ et donc $m_0 = 1$.

Comme A est diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$. On constante que $A^2 = P \begin{pmatrix} 1^2 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1^2 & \\ (0) & & & 0^2 \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = A$ et donc $f^2 = f$ et donc f est un projecteur. Comme la base canonique est une base orthonormée (pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$) et que la matrice de f dans cette base est A qui est symétrique, alors f est autoadjoint. Un projecteur autodjoint est une projection orthogonale.

On a aussi $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} = n-1.$

Fin de la correction des exercices de TD

<u>Ex 3</u> : Soit E un espace euclidien de dimension n.

1. Soit $v \in S(E)$ tel que : $\forall x \in E,\ (v(x)|x) = 0$. Montrer que $v = 0$.

2. Soient $u_1, ..., u_p \in S(E)$ tels que $rg(u_1) + ... + rg(u_p) = n$ et : $\forall x \in E,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} (u_i(x)|x) = (x|x)$.

- ***a.*** Montrer que $u_1 + ... + u_p = Id_E$.
- ***b.*** Montrer que $\operatorname{Im}(u_1) \oplus ... \oplus \operatorname{Im}(u_p) = E$.
- ***c.*** Montrer que pour tout i de $[\![1, p]\!]$, u_i est la projection sur $\operatorname{Im}(u_i)$ parallèlement à $\operatorname{Im}(u_1) \oplus ... \oplus \operatorname{Im}(u_{i-1}) \oplus \operatorname{Im}(u_{i+1}) \oplus ... \oplus \operatorname{Im}(u_p)$.
- ***d.*** Montrer que les $\operatorname{Im}(u_i)$ sont orthogonaux entre eux deux à deux.

Correction :

1. Fait en TD

2.
- ***a.*** Fait en TD
- ***b.*** Soit $x \in E$, alors grâce à la question précédente, on a : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i(x) \in \sum_{i=1}^{p} \operatorname{Im}(u_i)$ et donc $E = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \operatorname{Im}(u_i)$.

  La somme est directe, car $\dim \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \operatorname{Im}(u_i) \right) = \dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(\operatorname{Im}(u_i))$, grâce à l'hypothèse : $rg(u_1) + ... + rg(u_p) = n$.
  On a donc : $\operatorname{Im}(u_1) \oplus ... \oplus \operatorname{Im}(u_p) = E$.
- ***c.*** Pour $x \in E$, on a : $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} u_k(x) = u_i(x) + \sum_{k \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}} u_k(x)$, comme

  $E = \operatorname{Im}(u_i) \oplus \left(\displaystyle\bigoplus_{k \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}} \operatorname{Im}(u_k) \right)$, alors $u_i(x)$ le la composante de x dans cette décomposition.
- ***d.*** Si v est autoadjoint, alors $\operatorname{Im}(v)$ et $\operatorname{Ker}(v)$ sont orthogonaux.
  En effet pour $x \in \operatorname{Ker}(v)$ et $y \in E$, on a $(x|u(y)) = (u(x)|y) = (0|y) = 0$.
  Comme u_i est autoajoint, alors $\operatorname{Im}(u_i)$ est orthogonal à $\operatorname{Ker}(u_i) = \displaystyle\bigoplus_{k \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}} \operatorname{Im}(u_k)$ (car u_i est la projection sur $\operatorname{Im}(u_i)$ parallèlement à $\displaystyle\bigoplus_{k \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}} \operatorname{Im}(u_k)$).
  Donc les $\operatorname{Im}(u_j)$ sont orthogonaux entre eux.

Ex 4 : Soit $n > 1$ et $A \in O_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe un réel α vérifiant $(A - \alpha I_n)^2 = 0$.

1. Quelles sont les valeurs possibles pour α ?

2. Si $\alpha = 1$. Simplifier $A^T(A - I_n)^2$, puis en déduire $(A - I_n)^T(A - I_n) = 0$. En déduire A.

3. Donner toutes les solutions de l'équation.

Correction :

Ex 5 :

1. On a donc $\det(A - \alpha I_n)^2 = 0$, puis $\det(A - \alpha I_n) = 0$. Donc α est valeur propre de A. Nous avons vu dans le cours que les seules valeurs propres réelles possible pour une matrice orthogonales sont 1 et -1, ainsi : $\alpha \in \{-1, 1\}$.

2. $0 = A^T \underbrace{(A - I_n)^2}_{=0} = A^T(A^2 - 2A + I_n) = A - 2I_n + A^T$, car $A^T A = I_n$.

Par ailleurs $(A - I_n)^T(A - I_n) = (A^T - I_n)(A - I_n) = A^T A - A^T - A + I_n = -A^T - A + 2I_n = 0$, grâce au calcul précédent.

On rappelle que sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a le produit scalaire $(M|N) = tr(M^T N)$.

On a donc $\|A - I_n\|^2 = tr((A - I_n)^T(A - I_n)) = 0$, puis $A = I_n$.

3. Reste à traiter le cas $\alpha = -1$. Mais on a : $(A + I_n)^2 = 0 \Leftrightarrow (-A - I_n)^2 = 0$. Comme $-A$ est aussi dans $O_n(\mathbb{R})$ (car $(-A)^T(-A) = A^T A = I_n$), alors on peut reprendre le résultat de la question précédente pour $-A$ au lieu de A. On a donc $-A = I_n$, puis $A = -I_n$.

Réciproquement, si $A = I_n$ et $\alpha = 1$, on a : $(A - I_n)^2 = 0$ et de même pour $A = -I_n$ et $\alpha = -1$.