Correction des exercices du 10/02/2025 (Équations différentielles)

Ex 1 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $xy' - 2y = x$ sur $\mathbb{R}$.

Correction : Résolvons d'abord l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$: $y' - \dfrac{2}{x}y = 1$ (équation normalisée). Nous ferons ensuite un recollement.

• Équation homogène : $y' - \dfrac{2}{x}y = 0$. Une primite de $x \mapsto -\dfrac{2}{x}$ est $x \mapsto -2\ln|x| = -\ln(|x|^2) = -\ln(x^2)$. Les solutions homogènes sont $\{x \mapsto \lambda e^{\ln(x^2)},\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto \lambda x^2,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• Recherche d'une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda(x)x^2$ à l'aide de la méthode de la variation de la constante. On doit avoir : $\lambda'(x)x^2 = 1$, soit $\lambda'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et donc $\lambda(x) = -\dfrac{1}{x}$ convient et donc $x \mapsto -x$ est une solution particulière (on aurait pu le voir directement...).

• Les solutions de l'équation différentielle de départ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont $\{x \mapsto \lambda x^2 - x,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

• Recherche des solutions sur $\mathbb{R}$.
<u>Analyse :</u> Soit y une solution sur $\mathbb{R}$. Il existe donc $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $y(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^2 - x & \text{si} \quad x > 0 \\ \lambda_2 x^2 - x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$.
Comme y est dérivable sur $\mathbb{R}$, elle y est donc continue, donc $y(0) = \lim\limits_{0^+} y = \lim\limits_{0^-} y = 0$.

<u>Examen :</u> Soit $y : x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 x^2 - x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \lambda_2 x^2 - x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$, avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.
Reste à montrer que y est dérivable en 0. On a $\dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \begin{cases} \lambda_1 x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ \lambda_2 x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ et donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{y(x) - y(0)}{x - 0} = -1$. Ainsi y est dérivable en 0 et $y'(0) = -1$.
On vérifie maintenant que l'équation est valide en 0 : $0 \times y'(0) - 2y(0) = 0$.

Ainsi les solutions sur $\mathbb{R}$ sont $\left\{ x \mapsto \begin{cases} \lambda_1 x^2 - x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \lambda_2 x^2 - x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases},\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Ex 2 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2t}}{1 + t^2}$.

Correction :
• Équation homogène : $y'' + 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2$, qui admet une solution double à savoir -2.
Les solutions homogènes sont donc $\{t \mapsto \lambda e^{-2t} + \mu t e^{-2t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

• Cherchons une solution particulière de la forme $t \mapsto \lambda(t)e^{-2t} + \mu(t)te^{-2t}$ à l'aide de la méthode de la variation des constante. On doit avoir :
$$\begin{cases} \lambda'(t)e^{-2t} + \mu'(t)te^{-2t} & = 0 \\ -2\lambda'(t)e^{-2t} + \mu'(t)(1 - 2t)e^{-2t} & = \dfrac{e^{-2t}}{1 + t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda'(t) + \mu'(t)t & = 0 \\ -2\lambda'(t) + \mu'(t)(1 - 2t) & = \dfrac{1}{1 + t^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & 1 - 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1 + t^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -2 & 1 - 2t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{1 + t^2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix}\lambda'(t)\\ \mu'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-2t & -t\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{1}{1+t^2}\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda'(t) &= -\dfrac{t}{1+t^2}\\ \mu'(t) &= \dfrac{1}{1+t^2}\end{cases}$$

Ainsi $\lambda(t) = -\dfrac{1}{2}\ln(\underbrace{1+t^2}_{>0})$ et $\mu(t) = \text{Arctan}\,(t)$ conviennent et donc $t \mapsto e^{-2t}\left(-\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + t\,\text{Arctan}\,(t)\right)$ est une solution particulière de notre équation.

- L'ensemble des solutions est $\left\{t \mapsto \lambda e^{-2t} + \mu t e^{-2t} + e^{-2t}\left(-\dfrac{1}{2}\ln(1+t^2) + t\,\text{Arctan}\,(t)\right),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}$.