Correction des exercices du 03/03/2025 (Calcul différentiel)

Ex 1 : Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathscr{C}^1$, définies sur $D = \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ solutions de $-y\dfrac{\partial f}{\partial x} + x\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$

Correction : On passe en coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.
Soit $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi/2, \pi/2[$.
Nous avons :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

On a : $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -r\sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \dfrac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ r\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial r} \\ \dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = & \cos(\theta)\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{\sin(\theta)}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = & \sin(\theta)\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\cos(\theta)}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta} \end{array} \right.$.

L'équation est équivalente :
$-r\sin(\theta)\left(\cos(\theta)\dfrac{\partial g}{\partial r} - \dfrac{\sin(\theta)}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right) + r\cos(\theta)\left(\sin(\theta)\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{\cos(\theta)}{r}\dfrac{\partial g}{\partial \theta}\right) = r \Leftrightarrow \dfrac{\partial g}{\partial \theta} = r$, soit
$g(r,\theta) = r\theta + c(r)$, avec $c : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.
De plus : $\forall r \in \mathbb{R}_+^*,\ c(r) = g(r,0)$, donc c est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, par opérations.
Par ailleurs, on a $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\tan(\theta) = \dfrac{r\sin(\theta)}{r\cos(\theta)} = \dfrac{y}{x}$. Comme θ est dans $]-\pi/2, \pi/2[$, alors $\theta = \operatorname{Arctan}(y/x)$.
Ainsi $S = \{(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}\operatorname{Arctan}(y/x) + c(\sqrt{x^2+y^2}),\ c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})\}$.

Ex 2 : Étudier les extrema de $f : (x,y) \mapsto \exp(axy)$ sur $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^3+y^3+x+y = 4\}$, avec $a > 0$.

Correction : Soit $g : (x,y) \mapsto x^3+y^3+x+y-4$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x,y) \in G$ tel que f ait un maximum en (x,y). On a $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2+1 \\ 3y^2+1 \end{pmatrix}$ qui n'est jamais nul.
Grâce au théorème d'optimisation sous contrainte, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$, soit
$\left\{ \begin{array}{l} aye^{axy} = \lambda(3x^2+1) \\ axe^{axy} = \lambda(3y^2+1) \end{array} \right.$.
λ est non nul, car sinon $x = y = 0$ et (x,y) n'est pas dans G.
On a donc : $\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{axye^{axy}}{\lambda} = 3x^3+x \\ \dfrac{axye^{axy}}{\lambda} = 3y^3+y \end{array} \right.$.
On a donc $3x^3+x = 3y^3+y$. Or la fonction $t \mapsto 3t^3+t$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (somme

somme de deux fonctions l'étant),donc cette fonction est injective, puis $x = y$.
Comme (x, y) est dans G, alors $2x^3+2x = 4$, puis $x^3+x = 2$, et par stricte croissance et donc injectivité de $t \mapsto t^3 + t$, on a $x = 1$. Ainsi le seul extremum potentiel de f sur G est atteint en $(1, 1)$.
Il reste à vérifier que f a bien un extremum sur G.
Montrons que f peut s'approcher de 0 sans l'atteindre.
On remarque que pour $(x, y) \in G$, on a $(x + y)(x^2 - xy + y^2) + x + y = 4$, soit
$(x + y)\left((x - y/2)^2 + 3y^2/4 + 1\right) = 4$, puis $0 \leq x + y \leq 4$. On a donc $-x \leq y \leq 4 - x$. Donc si x tend vers $+\infty$, alors y tend vers $-\infty$ et comme pour x fixé, l'équation $y^3 + y = 4 - x^3 - x$ admet toujours une solution (la fonction $t \mapsto t^3 + t$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, car elle est continue strictement croissante et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont $+\infty$ et $-\infty$), donc en prenant par exemple $\|(x, y)\| = |x| + |y|$, quand x tend vers ∞ et (x, y) est dans G, alors y tend vers $-\infty$.
De même si x tend vers $-\infty$, alors y tend vers $+\infty$.
On peut aussi inverser les rôles de x et y.
Ainsi pour de tels (x, y) dans G, quand x tend vers $+\infty$, alors xy tend vers $-\infty$, puis $f(x, y)$ tend vers 0, on a donc $\displaystyle\lim_{\substack{\|(x,y)\|\to+\infty \\ (x,y)\in G}} f(x, y) = 0$. Ainsi f s'approche de 0 sans jamais l'atteindre et 0 minore f, donc $\inf f = 0$ qui n'est jamais atteint. Ainsi f n'admet pas de minimum sur G.
Montrons que f a un maximum.
Par définition de la limite, il existe $R > 0$, tel que : $\|(x, y)\| > R$ et $(x, y) \in G \Rightarrow f(x, y) < f(1, 1)$.
Sur le compact $\overline{B}(0, R) \cap G$, f est continue et admet un maximum (G est fermé car $G = h^{-1}(\{4\})$, avec $h : (x, y) \mapsto x^3 + x + y^3 + y$ qui est continue et $\overline{B}(0, R)$ est compact en tant que fermé borné d'un espace vectoriel de dimension finie).
Vu l'inégalité précédente, $(1, 1)$ est dans ce compact. Ainsi f admet un maximum sur
$G = \overline{B}(0, R) \cap G \cup \{(x, y) \in G,\ \|(x, y)\| > R\}$.
Ainsi f a bien un maximum, et grâce au théorème d'optimisation sous contrainte, celui-ci ne peut être atteint qu'en $(1, 1)$. Ainsi $f(1, 1) = e^a$ est le maximum de f sur G.

Fin de la correction des exercices de TD

Ex 3 : Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et on pose $E = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soit $\phi : f \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x} - af$.

1. Montrer que ϕ est une application linéaire de E dans F.
2. Soit $G = \{(x, y) \mapsto \alpha(y) \exp(ax),\ \alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$. Montrer que $G \subset \operatorname{Ker}(\phi)$.
3. Soit $A \in E$. Soit : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \exp(ax) \displaystyle\int_0^x A(t, y)e^{-at}dt$. Montrer que f admet des dérivés partielles sur $\mathbb{R}^2$ et les calculer. Montrer que $\phi(f) = A$.
4. Montrer que $G = \operatorname{Ker}(\phi)$.
5. Trouver toutes les fonctions $f \in E$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - af(x, y) = 2x - 3y$.

Correction :

1. Fait en TD.
2. Fait en TD.
3. Fait en TD.
4. Fait en TD.
5. Trouvons d'abord une solution particulière de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) - af(x, y) = 2x - 3y$.
   On va s'aider de la question 3, avec $A(x, y) = 2x - 3y$, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi si on pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f_0(x, y) = \exp(ax) \displaystyle\int_0^x A(t, y)e^{-at}dt$, alors f_0 est bien une solution particulière.

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a :
$f_0(x,y) = \exp(ax)\displaystyle\int_0^x (2t-3y)e^{-at}dt = 2\exp(ax)\int_0^x te^{-at}dt - 3\exp(ax)y\int_0^x e^{-at}dt =$
$2\exp(ax)\left(\left[-t\dfrac{e^{-at}}{a}\right]_0^x + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x e^{-at}dt\right) - 3\exp(ax)y\left[-\dfrac{e^{-ax}}{a}+\dfrac{1}{a}\right] =$
$2\exp(ax)\left(-x\dfrac{e^{-ax}}{a} + \dfrac{1}{a}\left[-\dfrac{e^{-ax}}{a}+\dfrac{1}{a}\right]\right) + \dfrac{3y}{a} - \dfrac{3e^{ax}y}{a} = -\dfrac{2x}{a} - \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2e^{ax}}{a^2} + \dfrac{3y}{a} - \dfrac{3e^{ax}y}{a}.$
Pour se rassurer, on peut vérifier que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) - af_0(x,y) = 2x - 3y.$
Soit $f \in E$.
f est solution si et seulement si : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - af(x,y) = 2x - 3y = \dfrac{\partial f_0}{\partial x}(x,y) - af_0(x,y)$ si et seulement si : $\dfrac{\partial (f-f_0)}{\partial x} - a(f-f_0) = 0$ si et seulement si $f - f_0 \in \mathrm{Ker}\,(\phi)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) - f_0(x,y) = \alpha(y)e^{ax}$.
Ainsi l'ensemble des solutions est $\left\{(x,y) \mapsto -\dfrac{2x}{a} - \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{2e^{ax}}{a^2} + \dfrac{3y}{a} - \dfrac{3e^{ax}y}{a} + \alpha(y)e^{ax},\ \alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}.$