PROBLÈME 2

Notations et définitions

- **N** désigne l'ensemble des entiers naturels, **R** désigne celui des nombres réels.
- Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que* X. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note :

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée ($\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge presque-sûrement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q31. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

Q32. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

Q33. En déduire que pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbf{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

Q34. Montrer que pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}\left(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}\right) \leq \frac{\left(\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)\right)^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}\left(e^{tX}\right)$

Q35. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g_a(x) = \frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que la fonction g_a' est décroissante sur $\mathbf{R}$.
En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

Q36. En déduire que pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in [-1, 1]$ on a :

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^{t}.$$

Q37. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leq \operatorname{ch}(t).$$

Q38. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q39. Montrer que la fonction

$$t \in \mathbf{R} \mapsto e^{-nt\varepsilon + n\frac{t^2}{2}}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q40. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}$, puis que :

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

Conclusion

Q41. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q42. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega \ ; \ |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, B_n est un événement et que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n\right) = 0.$$

Q43. Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\Omega_k = \left\{\omega \in \Omega \ ; \ \exists n \in \mathbf{N}^*, \ \forall m \geq n, \ |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k}\right\}.$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, Ω_k est un événement.
Écrire l'ensemble $A = \left\{\omega \in \Omega \ ; \ \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(\omega) = 0\right\}$ à l'aide des événements Ω_k, $k \in \mathbf{N}^*$.
En déduire que A est un événement.

Q44. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 18 1062 – D'après documents fournis

Calculatrices interdites

On note $\mathbb{R}[X]$ la $\mathbb{R}-$ algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme P, on note P′ son polynôme dérivé.

Étant donné un entier naturel n, $[\![0,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n.

Partie I.

Soit φ l'application :

$$\varphi \ : \ \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow \quad \mathbb{R}[X] \\ \quad P & \longmapsto \quad P - P' \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.
2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ_n. L'endomorphisme φ_n est-il diagonalisable ?
4. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
5. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \dots, s_n$ telle que :
   (a) $\forall i \in [\![0,n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \frac{X^i}{i!}$,
   (b) $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
6. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :
$$(\mathrm{Id} - \delta) \circ (\mathrm{Id} + \delta + \cdots + \delta^n) = \mathrm{Id}$$
7. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0,n]\!]$.

Dans le reste du problème, on considère les deux familles de polynômes $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots \frac{X^n}{n!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$$

$$T_n(X) = S_n(nx)$$

Dans les parties II, III et IV, on admettra le résultat suivant qui est démontré indépendamment dans la partie V :
Soit n un entier naturel $\geqslant 2$. Toutes les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

Partie II.

8. Donner le tableau de variations de S_3. Représenter sur un même graphique les courbes des fonctions S_1, S_3 ainsi que la fonction exponentielle $(x \mapsto e^x)$ en s'attachant à respecter la position relative de ces trois courbes.
9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle simple si n est impair. (*Indication : On pourra faire une démonstration par récurrence.*)

Dans la suite du problème, on note α_n l'unique racine réelle de S_n, pour tout entier naturel **impair** n.

10. On se propose d'étudier le comportement de la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
    (a) Justifier que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. (*Indication : On pourra étudier le signe de* $\mathrm{S}_{2n+1}(\alpha_{2n-1})$.)
    (b) Soit $(v_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers un nombre réel ℓ.
        i. Soit ε un nombre réel > 0. Justifier qu'il existe un entier naturel M tel que :

$$\forall m \in \mathbb{N},\ m > \mathrm{M} \Rightarrow |\mathrm{S}_m(v_m) - \mathrm{e}^{v_m}| < \varepsilon.$$

        ii. En déduire que la suite $(\mathrm{S}_m(v_m))_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers e^{ℓ}.
    (c) En déduire que la suite $(\alpha_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.

Partie III.

Soit h la fonction de la variable réelle x définie par :

$$h(x) = x\mathrm{e}^{1-x}.$$

11. Étudier la fonction h. Représenter son graphe sur $\mathbb{R}$.
12. Démontrer qu'il existe une fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $]-\infty, 1[$ dans $]-\infty, 1[$ telle que :

$$\forall x \in]-\infty, 1[,\ h(g(x)) = x.$$

    Représenter le graphe de g. L'étude précise de g n'est pas demandée.
13. Démontrer qu'il existe un unique nombre réel ρ tel que $h(\rho) = -1$.
14. Démontrer que ρ est dans l'intervalle $]-1/2, -1/4[$. *Indication : on pourra utiliser le fait que* $\ln 2 \geqslant \frac{13}{20}$.
15. Soit z un nombre complexe tel que : $|z| \leqslant 1$ et $|z\mathrm{e}^{1-z}| \leqslant 1$. Soit n un entier naturel.
    (a) Justifier l'égalité :

$$1 - \mathrm{e}^{-nz}\mathrm{T}_n(z) = (z\mathrm{e}^{1-z})^n \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k}{k!} z^{k-n}.$$

    (b) En déduire que :

$$\left|1 - \mathrm{e}^{-nz}\mathrm{T}_n(z)\right| \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-n}\mathrm{T}_n(1).$$

    (c) En déduire que $\mathrm{T}_n(z) \neq 0$.
16. Soit n un entier naturel impair $\geqslant 3$. Démontrer que α_n est dans l'intervalle $]-n, n\rho[$.

Partie IV.

Pour tout entier naturel m, on pose $\gamma_{2m+1} = \alpha_{2m+1}/(2m+1)$.

17. Démontrer que pour tout nombre réel u et tout entier naturel n, on a :

$$\mathrm{e}^{-u}\mathrm{S}_n(u) = 1 + \frac{1}{n!}\int_u^0 t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t.$$

18. Soit m une entier naturel. On note $n = 2m+1$. Justifier l'égalité :

$$\int_{\gamma_n}^0 h(t)^n \mathrm{d}t = -\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}.$$

19. En déduire que la suite $\left(\int_{\gamma_{2m+1}}^{0} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.
20. Démontrer que $\left(\int_{\gamma_{2m+1}}^{\rho} h(t)^{2m+1}\mathrm{d}t\right)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente et expliciter sa limite.
21. Déterminer un équivalent de α_{2m+1}.

Partie V.

Cette partie a pour but de démontrer le résultat admis dans les parties précédentes : Si n est un entier naturel $\geqslant 2$, les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.

22. Soit p un entier naturel non nul. Soient $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ des nombres complexes de module $\leqslant 1$. Soient $\theta_1,\dots,\theta_p$ des nombres réels > 0. On suppose que $\left|\sum_{i=1}^{p}\theta_i\alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{p}\theta_i$.
    (a) Démontrer que $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1.
    (b) On suppose dans cette question seulement $p=2$ et $\alpha_1 = 1$. Soit t un nombre réel tel que $\alpha_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$. En développant $\left|\theta_1+\theta_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.
    (c) Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_p$.
23. Soit P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré $n\geqslant 2$. On note $a_0,\dots,a_n$ ses coefficients :
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+a_1\mathrm{X}+a_0.$$
On suppose que $a_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$.
    (a) Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P.
    (b) Déterminer les coefficients du polynôme $(\mathrm{X}-1)\mathrm{P}(\mathrm{X})$.
    (c) Démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question 22c.*
24. Soit Q dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré $n\geqslant 2$. Soient $a_0,\dots,a_n$ ses coefficients :
$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1}+\cdots+a_1\mathrm{X}+a_0.$$
On suppose que $0 < a_0 < a_1 < \cdots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$. Justifier que les racines complexes de Q ont un module < 1.
25. Conclure.

EXERCICE I

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2 y'' + (x^2 - x) y' + 2y = 0$.

I.1. Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ $(r > 0)$ de $\mathbb{R}$?

EXERCICE II

II.1. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

II.2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe du couple (X,Y) vérifie :

$$\text{pour tout } (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \mathrm{P}(X = i, Y = j) = P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

II.2.a. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

II.2.b. Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.

II.2.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

PROBLÈME : Fonction Digamma

Partie préliminaire

III.1.

III.1.a. Soit $x \in]0, +\infty[$, démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.1.b. On note, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t$ (fonction Gamma d'Euler).

Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) > 0$.

III.1.c. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

III.2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t} \mathrm{d}t - \frac{1}{n}$.

III.2.a. Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} u_n$ converge.

III.2.b. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Démontrer que la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n\geq 1}$ sera notée γ *dans tout le sujet* (γ est appelée la constante d'Euler). Dans la suite de ce problème, on définit pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

III.3. Pour $x \in]0,+\infty[$ et pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0,+\infty[$ telle que :

$$\text{pour tout } t \in]0,n],\ f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ et pour tout } t \in]n,+\infty[,\ f_n(t) = 0.$$

III.3.a. Démontrer que pour tout $x < 1$, $\ln(1-x) \leq -x$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $t \in]0,+\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t}t^{x-1}$.

III.3.b. En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

III.4. On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$, $I_n(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n u^{x-1}\mathrm{d}u$.

III.4.a. Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

III.4.b. En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0,+\infty[$ une expression de $I_n(x)$.

III.4.c. Démontrer que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!\,n^x}{\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(x+k)}$ (formule de Gauss).

III.5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note toujours $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

En remarquant que pour $n \geq 1$ et $x \in]0,+\infty[$, $\dfrac{1}{n^x}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{x}{k}\right) = e^{xH_n}\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-x}{k}}\right]$, démontrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{x}{k}\right)e^{\frac{-x}{k}}\right]$ (formule de Weierstrass).

III.6.

III.6.a. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

III.6.b. On pose, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)-\frac{x}{k}\right]$. Démontrer que l'application g est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

III.6.c. En déduire que, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{-1}{x} - \gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+x}\right)$. On rappelle que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.7.

III.7.a. Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

III.7.b. Calculer, pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\psi(x+1)-\psi(x)$ puis démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\psi(n) = -\gamma + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$.

III.7.c. On pose, pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$ et k entier naturel, $j_k(y) = \dfrac{1}{k+y+1} - \dfrac{1}{k+y+x}$.

Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} j_k$ converge uniformément sur $]0,+\infty[$.

En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(\psi(x+n)-\psi(1+n))$.

III.8. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0,+\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

- $f(1) = -\gamma$,
- pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f(x+1) = f(x) + \dfrac{1}{x}$,
- pour tout $x \in]0,+\infty[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(f(x+n)-f(1+n)) = 0$.

Autour de la fonction Digamma

III.9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.

On effectue un premier tirage d'un boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :

si on a tiré la boule numéro k, on la remet alors dans l'urne
avec k nouvelles boules toutes numérotées k.

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

III.9.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $E(X)$.

III.9.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout entier naturel non nul k, $P(Y=k) = \dfrac{1}{n}\left(\psi(2n+1)-\psi(n+1)+\dfrac{k}{n+k}\right)$.

III.9.c. Calculer l'espérance $E(Y)$. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n\,(\psi(2n+1)-\psi(n+1)).$$

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1213 – D'après documents fournis

~~EXERCICE II~~

~~Pour tout entier naturel non nul~~ n, ~~on note~~ $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ~~l'algèbre des matrices carrées d'ordre~~ n ~~à coefficients dans le corps~~ $\mathbb{K}$.

~~Dans cet exercice,~~ A ~~est une matrice de~~ $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ~~telle que~~ $A^3 + A^2 + A = 0$.

~~**II.1.** Démontrer que les valeurs propres complexes de~~ A ~~prennent au maximum trois valeurs distinctes que l'on précisera.~~

~~**II.2.** Justifier que~~ A ~~est diagonalisable dans~~ $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

~~**II.3.** Démontrer que si~~ A ~~est inversible alors~~ $\det(A) = 1$.

PROBLÈME III

Les deux premières parties du problème sont indépendantes. La deuxième partie étudie un exemple d'interpolation de Hermite et la troisième partie quelques propriétés d'une famille de polynômes qui portent le nom de ce même mathématicien.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier naturel n, $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On note $\mathbb{R}(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients réels.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on note P' le polynôme dérivé de P et, pour tout entier naturel n, on note $P^{(n)}$ le n-ième polynôme dérivé de P. Pour tout entier naturel non nul n, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Première partie : questions préliminaires

Soit n un entier naturel non nul.

III.1. Soit P et Q deux polynômes non nuls à coefficients complexes.

III.1.a. Démontrer que si P et Q n'ont aucune racine complexe commune, alors P et Q sont premiers entre eux (on pourra raisonner par l'absurde).

III.1.b. On suppose que P et Q sont premiers entre eux. En utilisant le théorème de Gauss, démontrer que si P et Q divisent un troisième polynôme R à coefficients complexes, alors il en est de même du polynôme PQ.

III.2. Soit $(P_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}[X]$. On considère le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et la fraction rationnelle $Q \in \mathbb{R}(X)$ définis par $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$ et $Q = \frac{P'}{P}$.

Démontrer par récurrence que $Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_i'}{P_i}$.

Deuxième partie : interpolation de Hermite

Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, p un entier naturel non nul, $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille d'éléments de I distincts deux à deux et $(a_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq p}$ deux familles de réels quelconques.

III.3. Définition du polynôme interpolateur de Hermite

III.3.a. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. En utilisant la formule de Taylor, démontrer que :

si $P(a) = P'(a) = 0$ alors $(X-a)^2$ divise P.

III.3.b. En utilisant la question préliminaire **III.1**, démontrer que l'application φ de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ vers $\mathbb{R}^{2p}$ définie par

$$\varphi(P) = \big(P(x_1),P(x_2),\dots,P(x_p),P'(x_1),P'(x_2),\dots,P'(x_p)\big)$$

est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}_{2p-1}[X]$ sur $\mathbb{R}^{2p}$.

III.3.c. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P_H \in \mathbb{R}_{2p-1}[X]$ tel que, pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq p$, on a $P_H(x_i) = a_i$ et $P'_H(x_i) = b_i$.
Le polynôme P_H est appelé polynôme d'interpolation de Hermite.

III.4. Étude d'un exemple

Déterminer le polynôme d'interpolation de Hermite (défini à la question **III.3**) lorsque $p=2$, $x_1=-1$, $x_2=1$, $a_1=1$, $a_2=0$, $b_1=-1$ et $b_2=2$ (si, au cours de ses calculs, le candidat a besoin d'inverser une matrice, il pourra le faire sans justification à l'aide de sa calculatrice).

III.5. Une formule explicite

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq p$, on considère le polynôme $Q_i = \displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} \left(\frac{X-x_j}{x_i-x_j}\right)^2$.

III.5.a. Soit i un entier vérifiant $1 \leq i \leq p$. Calculer $Q_i(x_k)$ pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$ et démontrer qu'on a

$$Q'_i(x_k) = 0 \text{ si } k \neq i \ \text{ et } \ Q'_i(x_i) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} \frac{2}{x_i - x_j}$$

On pourra utiliser la question préliminaire **III.2**.

III.5.b. Démontrer que le polynôme P défini par la formule

$$P = \sum_{i=1}^{p} \left[\Big(1 - Q'_i(x_i)(X-x_i)\Big)a_i + (X-x_i)b_i\right] Q_i$$

est le polynôme d'interpolation de Hermite défini à la question **III.3**.

III.5.c. Retrouver le polynôme de la question **III.4** en utilisant cette formule.

Troisième partie : polynômes de Hermite

Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1} = XH_n - H_n'$.

III.6. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_n est un polynôme unitaire de degré n.

III.7. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H_{n+1}' = (n+1)H_n$.

Pour tous polynômes P et Q à coefficients réels, on pose

$$\langle P \mid Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

la fonction f étant définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$. On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$.

III.8. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

III.8.a. Justifier, pour tous polynômes P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, l'existence de l'intégrale qui définit $\langle P \mid Q\rangle$.

III.8.b. Démontrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

III.9. Une famille orthogonale

Dans la suite, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire et de la norme associée notée $\|\,.\,\|$.

III.9.a. Démontrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\langle P \mid H_n\rangle = \left\langle P^{(n)} \mid H_0\right\rangle$.

III.9.b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0,H_1,\ldots,H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.9.c. Calculer $\|H_n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III.9.d. Soit $P = X^3 + X^2 + X + 1$. Préciser les polynômes H_1, H_2 et H_3 puis déterminer quatre réels a_i $(0 \leq i \leq 3)$ tels que $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} a_i H_i$. En déduire la distance d du polynôme P au sous-espace $\mathbb{R}_0[X]$ des polynômes constants, c'est-à-dire la borne inférieure de $\|P - Q\|$ quand Q décrit $\mathbb{R}_0[X]$.

III.10. Étude des racines des polynômes H_n

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note p le nombre de racines réelles (distinctes) d'ordre impair du polynôme H_n, a_1, a_2, ..., a_p ses racines et S le polynôme défini par

$$S = 1 \text{ si } p = 0 \quad \text{et} \quad S = \prod_{i=1}^{p}(X - a_i) \text{ sinon.}$$

III.10.a. Démontrer que, si $p < n$, alors $\langle S \mid H_n\rangle = 0$.

III.10.b. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S(x)H_n(x) \geq 0$.

III.10.c. En déduire que H_n a n racines réelles distinctes.

Fin de l'énoncé

PROBLEME 2

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

- On note **N** l'ensemble des entiers naturels.
- On note **C** le corps des nombres complexes, **R** celui des réels.
- Pour tout $z \in \mathbf{C}$, on note $|z|$ le module de z.
- M_n désigne l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes.
- Les éléments de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^n$ seront considérés comme des "matrices colonnes", c'est-à-dire des matrices à n lignes et une seule colonne. Ainsi, pour tout $Z \in \mathbf{C}^n$ et tout $A \in \mathrm{M}_n$, l'expression AZ désignera un élément de $\mathbf{C}^n$.
- Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n$, et pour tout couple (i, j) d'indices compris entre 1 et n, l'expression $(A)_{ij}$ désigne le coefficient de A d'indice (i, j). Par ailleurs, on écrira simplement $A = (a_{ij})$ pour exprimer que $\forall (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, a_{ij} = (A)_{ij}$.
- De même, pour tout $Z \in \mathbf{C}^n$, et pour tout entier k compris entre 1 et n, l'expression $(Z)_k$ désigne le $k^{\text{ème}}$ coefficient de Z. Et on écrira simplement $Z = (z_k)$ pour exprimer que
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}, z_k = (Z)_k.$$
- Pour toute matrice M, on note ${}^tM$ la matrice transposée de M.
- La matrice identité de M_n est notée I, la matrice nulle simplement 0.
- On dira que ψ est *norme matricielle* si c'est une norme sur l'algèbre M_n, autrement dit si ψ est une norme sur l'espace vectoriel M_n qui vérifie la condition :
$$\forall (A, B) \in \mathrm{M}_n^2, \psi(AB) \leq \psi(A).\psi(B).$$
- Pour toute norme N sur $\mathbf{C}^n$, on notera $\tilde{N}$ la norme matricielle associée à N, c'est-à-dire la norme matricielle définie par
$$\forall A \in \mathrm{M}_n, \quad \tilde{N}(A) = \sup_{Z \in C^n - \{0\}} \frac{N(AZ)}{N(Z)}.$$
- Pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n$, on note $sp(A)$ le spectre de A, et $\rho(A)$ le nombre défini par :
$$\rho(A) = \max \{|\lambda|, \lambda \in sp(A)\}.$$

Tournez la page S.V.P.

- Conformément à l'usage, on note N_∞ la norme définie sur $\mathbf{C}^n$ par
$$\forall Z = (z_k) \in \mathbf{C}^n, \quad N_\infty(Z) = \max_{k \in \{1,\dots,n\}} |z_k|.$$

- Tous les espaces vectoriels considérés dans ce problème étant de dimension finie, on dira qu'une suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E converge vers un vecteur u de E si la convergence a lieu dans l'espace vectoriel normé obtenu en munissant E d'une norme quelconque.

1.1. Soit N une norme sur $\mathbf{C}^n$.
Montrer que $\forall (A, Z) \in \mathrm{M}_n \times \mathbf{C}^n$, $N(AZ) \leq \tilde{N}(A).N(Z)$.

1.2. Prouver que $\forall A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n$, $\tilde{N}_\infty(A) \leq \max_{i \in \{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

1.3. Etablir la formule donnant, pour toute matrice $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}_n$, la valeur de $\tilde{N}_\infty(A)$ en fonction des nombres a_{ij}.

2.1. Soit $Z \in \mathbf{C}^n$, $Z \neq 0$. Montrer que $Z\,{}^tZ$ est un élément non nul de M_n.
2.2. Soit $A \in \mathrm{M}_n$ et ψ une norme matricielle. Montrer que $\rho(A) \leq \psi(A)$.
[on pourra utiliser la question **2.1.**, en considérant un vecteur Z bien choisi].

3. Le but de cette question est de prouver que, pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n$ et pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une norme N sur $\mathbf{C}^n$ telle que $\tilde{N}(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$.

Soit donc $A \in \mathrm{M}_n$ et $\varepsilon > 0$, quelconques.
Soit $U \in \mathrm{M}_n$ une matrice inversible telle que $U^{-1}AU$ soit triangulaire supérieure (le candidat admettra l'existence d'une telle matrice U, quelle que soit la matrice A).
On pose $U^{-1}AU = T = (t_{ij})$.

3.1. Que représente l'ensemble $S = \{t_{ii}, i \in \{1, \dots, n\}\}$ pour la matrice A ?

Pour tout $\delta > 0$, on note D_δ la matrice de M_n définie par :
$$\forall (i, j) \in \{1,\dots,n\}, \begin{cases} i \neq j \Rightarrow (D_\delta)_{ij} = 0 \\ (D_\delta)_{ii} = \delta^{i-1} \end{cases},$$
et on note V_δ la matrice définie par $V_\delta = UD_\delta$.

3.2. Calculer $V_\delta^{-1} A V_\delta$.

3.3. Montrer qu'il existe un réel $\delta_\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété suivante :

$$\forall i \in \{1,\dots,n-1\},\ \sum_{j=i+1}^{n} \left|\delta_\varepsilon{}^{j-i} t_{ij}\right| \le \varepsilon .$$

Dans la suite, on pose $V = V_{\delta_\varepsilon}$, où δ_ε désigne un réel vérifiant la propriété ci-dessus.

On note ψ l'application de M_n dans $\mathbf{R}$ définie par :

$$\forall B \in \mathrm{M}_n, \psi(B) = \tilde{N}_\infty\left(V^{-1}BV\right).$$

3.4. Prouver que $\psi(A) \le \rho(A) + \varepsilon$.

3.5. Montrer qu'il existe une norme N sur $\mathbf{C}^n$ telle que $\psi = \tilde{N}$.

4. Soit $A \in \mathrm{M}_n$.

4.1. Prouver l'implication $\left(\lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{A}^k = 0\right) \Rightarrow \left(\forall Z \in \mathbf{C}^n,\ \lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{A}^k Z = 0\right)$.

4.2. Prouver l'implication $\left(\forall Z \in \mathbf{C}^n,\ \lim\limits_{k\to+\infty} A^k Z = 0\right) \Rightarrow \left(\rho(A) < 1\right)$.

4.3. Prouver l'implication

$\left(\rho(A) < 1\right) \Rightarrow$ (il existe une norme N sur $\mathbf{C}^n$ telle que $\tilde{N}(A) < 1$).

4.4. Prouver l'implication

(Il existe une norme N sur $\mathbf{C}^n$ telle que $\tilde{N}(A) < 1$) $\Rightarrow \left(\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0\right)$

5. Soient $\sigma \in \left]0,1\right[$, N une norme sur $\mathbf{C}^n$ et $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ une application σ-lipschitzienne sur l'espace vectoriel normé $(\mathbf{C}^n, N)$.

5.1. Soit $Z_0 \in \mathbf{C}^n$, un vecteur quelconque. On considère la suite $\left(Z_k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ de premier terme Z_0 et qui vérifie la relation de récurrence

$$\forall k \in \mathbf{N},\ Z_{k+1} = f\left(Z_k\right).$$

Montrer que la suite $\left(Z_k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ est convergente.

5.2. Montrer que f admet un unique point fixe.

6. Soient $W \in \mathbf{C}^n$ et $B \in \mathrm{M}_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\rho(B)$ pour qu'il existe un vecteur $X \in \mathbf{C}^n$ tel que toutes les suites de vecteurs $\left(Z_k\right)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N},\ Z_{k+1} = BZ_k + W$$

convergent vers X.

7. Soit $A \in \mathrm{M}_n$ une matrice inversible, et soit $Y \in \mathbf{C}^n$.
Soit $M \in \mathrm{M}_n$ une matrice inversible. On note F la matrice M^{-1}, et on pose $Q = M - A$.
On suppose que $\rho(FQ) < 1$.
Utiliser F, Q et Y pour définir une application $f : \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ telle que toute suite $(Z_k)_{k \in \mathbf{N}}$ vérifiant

$$\forall k \in \mathbf{N}, \ \ Z_{k+1} = f(Z_k)$$

converge vers l'unique solution du système linéaire $AX = Y$.

L'expression de l'image par f d'un vecteur quelconque $Z \in \mathbf{C}^n$ sera construite à partir des seules matrices F, Q, Y et Z et des seules opérations d'addition (ou de soustraction) et de multiplication matricielles, mais sans faire appel à l'inversion matricielle.

Remarque : en pratique, on prend pour M une matrice facile à inverser, par exemple une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls ; ce qui précède fournit alors (sous réserve que la condition $\rho(FQ) < 1$ soit vérifiée) une méthode numérique de résolution approchée du système linéaire $AX = Y$.

Fin de l'énoncé.

Sujet 6

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PC

MATHEMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Les trois parties sont, dans une large mesure, indépendantes.

On s'intéresse ici aux propriétés de la fonction polylogarithme, définie comme série entière et à son prolongement grâce à une représentation intégrale. On établit aussi quelques formules générales et on complète l'étude par celle d'un cas particulier.

Partie I : le polylogarithme

Dans toute cette partie, α est un réel fixé.

I - 1.1.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière L_α définie par :

$$L_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}.$$

I - 1.2.

Justifier que l'application L_α est de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

I - 1.3.

Montrer que :

$$\forall x \in]-1,1[,\ L_\alpha(-x) + L_\alpha(x) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(x^2).$$

I - 2.1.

Pour tout $x \in]-1,1[$, établir une relation entre $L'_{\alpha+1}(x)$ et $L_\alpha(x)$.

Exprimer $L_{\alpha+1}(x)$ sous forme de l'intégrale entre 0 et x d'une certaine fonction.

I - 2.2.

Pour $x \in]-1,1[$, préciser les valeurs de $L_\alpha(x)$ lorsque $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ et $\alpha = 1$.

I - 3.

Dans cette question, on suppose que $\alpha \leqslant 1$.

Montrer que $L_\alpha(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures. Pour cela, on pourra chercher à minorer $L_\alpha(x)$ pour $x \in]0,1[$.

Partie II : prolongement pour $\alpha > 1$

Dans toute cette partie, α est un réel strictement supérieur à 1.

II - 1.1.

Montrer que la fonction L_α définie en I -1.1 est continue sur $[-1,1]$.

II - 1.2.

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} L'_2(x)$ et préciser si la fonction L_2 est dérivable en 1.

II - 2.1.

Montrer que l'application $\varphi\ : u \mapsto \dfrac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - 1}$ est intégrable sur $]\,0,+\infty\,[$.

II - 2.2.

Pour tout réel $x \leqslant 1$, justifier l'existence de $\;K_\alpha(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - x}\,\mathrm{d}u$.

II - 2.3.

Montrer que l'application K_α ainsi définie est continue sur l'intervalle $]-\infty,1]$.

II - 2.4.

Dans cette question, on suppose que $\alpha > 2$.

Montrer que la fonction K_α est de classe C^1 sur l'intervalle $]-\infty,1]$.

II - 2.5.

On revient au cas général où $\alpha > 1$.

Montrer que la fonction K_α est de classe C^1 sur tout segment $[a,b]$ avec $a < b < 1$, puis sur l'intervalle $]-\infty,1[$.

II - 3.1.

Prouver l'existence de $\;G_\alpha = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\;$ et justifier que $G_\alpha > 0$.

II - 3.2.

Montrer que pour tout $x \in [-1,1]$ et pour tout $u > 0$, on a :

$$\frac{1}{\mathrm{e}^u - x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \mathrm{e}^{-(k+1)u}.$$

II - 3.3.

En déduire que pour tout $x \in [-1,1]$, en utilisant $L_\alpha(x)$ défini dans I - 1.1 et $K_\alpha(x)$ défini dans II - 2.2, on a la relation :

$$xK_\alpha(x) = G_\alpha L_\alpha(x).$$

On précisera avec soin le théorème d'intégration terme à terme utilisé.

II - 4.1.

Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, on prolonge la définition de $L_\alpha(x)$ en posant :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - x}\,\mathrm{d}u.$$

Montrer que l'application L_α ainsi définie est continue sur $]-\infty, 1]$ et de classe C^1 sur $]-\infty, 1[$.

II - 4.2.

Montrer que pour tout réel $x \leqslant 1$, on a :

$$L_\alpha(x) = \frac{x}{G_\alpha} \int_0^{1} \frac{(-\ln(t))^{\alpha-1}}{1 - xt}\,\mathrm{d}t.$$

II - 4.3.

Justifier que l'on peut prolonger la fonction L_α sur $\mathbb{C} \backslash]1, +\infty[$ par la définition :

$$\forall z \in \mathbb{C} \backslash]1, +\infty[,\ L_\alpha(z) = \frac{z}{G_\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^u - z}\,\mathrm{d}u.$$

Montrer alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$, tel que $z^2 \notin]1, +\infty[$, on a encore la relation :

$$L_\alpha(z) + L_\alpha(-z) = 2^{1-\alpha} L_\alpha(z^2).$$

Partie III : le cas $\alpha = 2$

On s'intéresse ici, pour tout $x \in [-1,1]$, à : $L_2(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

III - 1.1.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique et impaire, telle que :

$$\forall x \in]0, \pi],\ f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

Calculer les coefficients de Fourier « $b_n(f)$ » pour $n \in \mathbb{N}^*$.

III - 1.2.

Grâce à l'égalité de Parseval que l'on précisera, appliquée à f, en déduire la valeur de $L_2(1)$. Calculer aussi $L_2(-1)$.

III - 2.1.

Montrer que la fonction Φ définie par :

$$\forall x \in]0,1[,\ \Phi(x) = L_2(x) + L_2(1-x) + \ln(x)\ln(1-x)$$

est de classe C^1 sur $]0,1[$.

III - 2.2.

Montrer que la fonction Φ est constante sur $]0,1[$ et vaut $L_2(1)$.

III - 2.3.

En déduire la valeur de $L_2\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

III - 2.4.

Prouver aussi que :

$$\forall x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right],\ L_2(x) + L_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}\left(\ln(1-x)\right)^2.$$

III - 3.

Grâce à II - 3, calculer $K_2(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u}{\mathrm{e}^u - 1}\,\mathrm{d}u.$

III - 4.

Désormais, on s'intéresse au prolongement de L_2 considéré en II - 4, vérifiant en particulier la relation vue en II-4.2 dont on partira pour traiter les questions suivantes, c'est-à-dire :

$$\forall x < 0,\ L_2(x) = -\frac{x}{G_2}\int_0^1 \frac{\ln(s)}{1-xs}\,\mathrm{d}s.$$

III - 4.1.

Montrer alors que pour tout $x < 0$, on a aussi les égalités :

$$L_2(x) = -\int_x^0 \frac{\ln\left(\dfrac{t}{x}\right)}{1-t}\,\mathrm{d}t = \int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On pourra effectuer un changement de variable et une intégration par parties.

III - 4.2.

Pour tout $x < 0$, calculer $g(x) = \displaystyle\int_x^0 \frac{\ln(1-t)}{t-1}\,\mathrm{d}t.$

III - 4.3.

Justifier l'existence de l'intégrale $A = \displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{\ln(1-t)}{t(t-1)}\,\mathrm{d}t.$

III - 4.4.

Préciser $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} (L_2(x) - g(x))$. En déduire un équivalent simple de $L_2(x)$ quand x tend vers $-\infty$, cet équivalent dépendant de $\ln(-x)$.

Fin de l'énoncé

IMPRIMERIE NATIONALE – 12 1240 – D'après documents fournis

Sujet 7

e3a

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A MP 2006

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage des calculatrices est interdit

Notations

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.

$\mathcal{C}^0(I)$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et on note : désigne

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$$

On désigne par $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ et on note :

$$L^1(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I)\ ;\ \int_I |f| \text{ existe} \right\} \quad \text{et} \quad \forall f \in L^1(I),\ \|f\|_1 = \int_I |f|$$

$$L^2(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I)\ ;\ \int_I |f|^2 \text{ existe} \right\} \quad \text{et} \quad \forall f \in L^2(I),\ \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}$$

Partie I

1 - Soit f dans $\mathcal{C}^0(I)$ et c un réel strictement positif. Démontrer que l'équation :

$$y' + cy = f$$

admet une unique solution, notée $\varphi(f)$, dérivable sur I, et qui vérifie :

$$\varphi(f)(0) = 0$$

Démontrer :

$$\forall x \in I,\ \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t)\,\mathrm{d}t$$

2 - Exprimer $\varphi'(f)$ en fonction de f et $\varphi(f)$ et démontrer que $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
Prouver que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f)$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$.

Partie II

On suppose dans cette partie que l'intervalle I est un segment $[a, b]$ avec $a \leqslant 0 < b$.

1 - Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \|f\|_1 \leqslant M_1 \|f\|_2 \leqslant M_2 \|f\|_\infty$$

2 - Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \|\varphi(f)\|_\infty \leqslant M_0 \|f\|_\infty$$

3 - Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \forall x \in I,\ |\varphi(f)(x)| \leqslant A \|f\|_1$$

4 - Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \forall x \in I,\ |\varphi(f)(x)| \leqslant B \|f\|_2$$

En déduire :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+,\ \forall f \in \mathcal{C}^0(I),\ \|\varphi(f)\|_2 \leqslant K \|f\|_2$$

5 - L'application φ de $\mathcal{C}^0([a, b])$ dans lui-même est-elle continue

a) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\|_\infty$?

b) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\|_1$?

c) lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\|_2$?

Partie III

Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et pour tout réel $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I,\ f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}$$

1 - Déterminer $\varphi(f_\lambda)$.

2 - Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont intégrables sur I.
Calculer $\|f_\lambda\|_1$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$.

3 - Démontrer que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur I.
Calculer $\|f_\lambda\|_2$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$.

4 - Démontrer que φ est un endomorphisme continu de $L^1(I)$ et calculer :

$$|||\varphi|||_1 = \sup_{\substack{f \in L^1(I) \\ \|f\|_1 \leqslant 1}} \|\varphi(f)\|_1$$

5 - On pose $g = \varphi(f)$. On a donc $f = g' + cg$.
Démontrer :

$$\forall X > 0,\ \frac{g^2(X)}{2} + c\int_0^X g^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^X f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$ et calculer :

$$|||\varphi|||_2 = \sup_{\substack{f \in L^2(I) \\ \|f\|_2 \leqslant 1}} \|\varphi(f)\|_2$$

Partie IV

Soit R un réel strictement positif. On note G l'espace vectoriel réel des fonctions développables en série entière sur l'intervalle $]-R, R[$.

1 - Démontrer que φ est un endomorphisme de G.

2 - Pour f élément de G, on note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles pour lesquelles :

$$\forall x \in]-R, R[\,,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{et} \quad \varphi(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

Exprimer, pour tout entier naturel n, b_n en fonction des termes de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.
On pourra utiliser la relation $f = \varphi(f)' + c\varphi(f)$.

Partie V

I désigne maintenant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $H(I)$ est l'espace vectoriel réel des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que f et f' soient de carrés intégrables sur I :

$$H(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(I),\ \int_I |f|^2 \text{ et } \int_I |f'|^2 \text{ existent} \right\}$$

1 - a) Démontrer que si f et g sont dans $H(I)$ alors les fonctions fg et $f'g'$ sont intégrables sur I.

b) Démontrer que l'application :

$$\phi : \begin{array}{ccc} H(I)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \phi(f,g) = \displaystyle\int_I f(t)g(t)\,\mathrm{d}t + \int_I f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

définit un produit scalaire sur $H(I)$.

c) En déduire que l'application $\|\|_H$ définie par :

$$\forall f \in H(I),\ \|f\|_H = \sqrt{\int_I f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_I f'^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

est une norme sur $H(I)$.

2 - On suppose dans cette question que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$.
On pose :

$$K = \{f \in H(I),\ f(0) = 0\}$$

a) Démontrer que, pour tout f dans $L^2(I)$, $\varphi(f)'$ est dans $L^2(I)$, $\varphi(f)$ est dans K.
Démontrer :

$$\exists A > 0,\ \forall f \in L^2(I),\ \|\varphi(f)\|_H \leqslant A\,\|f\|_2$$

b) Démontrer que φ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K.

c) Démontrer que φ est continue de $\left(L^2(I), \|\|_2\right)$ dans $(K, \|\|_H)$.

d) Démontrer que φ^{-1} est continue de $(K, \|\|_H)$ dans $\left(L^2(I), \|\|_2\right)$.

Partie VI

Dans cette partie, E désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques muni de la norme :

$$\forall f \in E,\ \|f\|_E = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

F désigne l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. F est muni de la norme :

$$\forall f \in F,\ \|f\|_F = \sqrt{\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} f'^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

1 - Démontrer que, pour tout f dans E, il existe une unique solution, notée $\psi(f)$, dans F de l'équation :

$$y' + cy = f$$

Exprimer $\psi(f)(0)$ en fonction de f et c.
Démontrer que ψ est un isomorphisme de E dans F.

2 - Pour tout f dans E et tout entier relatif k, on pose :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad d_k(f) = c_k(\psi(f)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(f)(t)e^{-ikt}\,\mathrm{d}t$$

Exprimer $d_k(f)$ en fonction de $c_k(f)$.

3 - Démontrer que, pour tout f dans E, la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ converge et :

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_E^2$$

Pour g dans F, calculer $\|g\|_F$ en fonction des $c_k(g)$.
Comparer $\|f\|_E$ et $\|\psi(f)\|_F$ pour f dans E. *On pourra distinguer les cas $c \leqslant 1$ et $c > 1$.*

4 - Démontrer que ψ est continue de $(E, \|\|_E)$ dans $(F, \|\|_F)$.
Démontrer que ψ^{-1} est continue de $(F, \|\|_F)$ dans $(E, \|\|_E)$.

Sujet 8 E3A PSI 2013 épreuve A

Les calculatrices ne sont pas autorisées.

Le sujet comporte des questions préliminaires et un problème de quatre parties numérotées **A**, **B**, **C** *et* **D**. *Les parties* **B** *et* **C** *du problème sont indépendantes de la partie* **A**.

L'ensemble des polynômes à coefficients complexes est noté $\mathbb{C}[X]$.

Soit n un entier strictement supérieur à 2. On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\det(M)$ le déterminant de M. On note χ_M le polynôme caratéristique de la matrice M défini par $\chi_M(X) = \det(M - X\,I_n)$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note ω le nombre complexe $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. Autant que possible, on préférera écrire ω plutôt que $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Questions préliminaires d'application directe du cours.

Les résultats de ces questions seront utilisés dans les parties **B** *et* **C** *du problème.*

1) a) Expliciter, sans justification, l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité à l'aide de ω.

b) Factoriser, sans justification, le polynôme $X^n - 1$ comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

c) Soit $r \in \mathbb{Z}$. Montrer que, selon la valeur de r, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk}$ est égale, soit à 0, soit à n.

2) Soient M une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}$ ses valeurs propres non nécessairement distinctes. Chaque valeur propre est écrite autant de fois que son ordre de multiplicité.

a) Démontrer ~~que l'on~~ a $\det(M) = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k$.

b) Soient λ une valeur propre de M et V un vecteur propre associé. Montrer que pour tout entier naturel ℓ, le vecteur V est un vecteur propre de M^ℓ associé à la valeur propre λ^ℓ.

c) Montrer que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$, la matrice $p(M)$ est diagonalisable.

d) Des questions précédentes, déduire que, pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\det(p(M)) = \prod_{k=0}^{n-1} p(\lambda_k).$$

Problème

A. 1) Soit λ un réel strictement positif. Calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2} \right) du$$

après en avoir justifié l'existence.

2) Pour tous réels x et t, calculer le module $|1 - xe^{it}|$ du nombre complexe $1 - xe^{it}$.

3) Montrer que, si $x \in]-1,1[$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) dt$ existe.

On note h la fonction de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) dt\,.$$

4) A l'aide d'un changement de variable, montrer que la fonction h est paire.

5) Montrer que la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

6) Montrer que pour tout réel $x \in]-1,1[$ et $x \neq 0$, on a les deux égalités

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{x - \cos(t)}{1 - 2x\cos(t) + x^2}\, dt &= \frac{2}{x+1} \int_0^{+\infty} \frac{u^2 - \lambda}{(u^2+\lambda^2)(u^2+1)}\, du \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{u^2+1} - \frac{\lambda}{u^2+\lambda^2} \right) du \end{aligned}$$

où l'on a posé $\lambda = \dfrac{1-x}{1+x}$.

On pourra utiliser, en le justifiant, le changement de variable $u = \tan\left(\dfrac{t}{2}\right)$.

7) Démontrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et donner, pour tout $x \in]-1,1[$, une expression de $h'(x)$ et de $h(x)$.

B. **1)** Soit a un nombre complexe. On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $A = (\gamma_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ où

$$\gamma_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ a^{j-i} & \text{si } i < j \\ a^{n-(i-j)} & \text{si } i > j \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & a^2 & \cdots & a^{n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Démontrer que l'on a $\det(A) = (1 - a^n)^{n-1}$.

On pourra utiliser les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - a^{j-1}C_1$ sur les colonnes pour j variant de 2 à n.

2) Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_s)_{1\leqslant s\leqslant n}$ une base de E. On définit l'endomorphisme u de E par

$$u(e_1) = e_n \quad \text{et} \quad u(e_s) = e_{s-1} \quad \text{si } 2 \leqslant s \leqslant n.$$

a) Ecrire la matrice U de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

b) Montrer que le polynôme caractéristique χ_U de U est donné par

$$\chi_U(X) = (-1)^n(X^n - 1).$$

c) Préciser les valeurs propres de U. La matrice U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ?

3) Soit le n-uplet $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On lui associe la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$C_\alpha = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} \\ \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_0 & & \alpha_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Ses coefficients sont précisément définis par $c_{i,j} = \begin{cases} \alpha_{j-i} & \text{si } i \leqslant j \\ \alpha_{n-(i-j)} & \text{si } i > j \end{cases}$.

On admettra que l'on a $C_\alpha = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k U^k$.

Montrer que C_α est diagonalisable.

4) Montrer que les valeurs propres de C_α sont les nombres complexes $q(\omega^\ell)$ où $q(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$ et $\ell \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

C. Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On considère la matrice $\Gamma_\varphi \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\Gamma_\varphi = C_\alpha$ où $\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ avec

$$\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2s\pi}{n}\right)\omega^{-ks} \quad \text{pour } k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

1) a) Vérifier que les valeurs propres de Γ_φ sont les

$$\lambda_\ell = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{s=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2s\pi}{n}\right)\omega^{-ks}\right)\omega^{k\ell} \quad \text{où} \quad 0 \leqslant \ell \leqslant n-1.$$

b) En déduire, en utilisant la question **1)c)** des questions préliminaires, que, pour tout entier $\ell \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, on a $\lambda_\ell = \varphi\left(\dfrac{2\ell\pi}{n}\right)$.

c) Montrer que l'on a $\det(\Gamma_\varphi) = \displaystyle\prod_{\ell=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right)$.

2) Dans cette question, on pose $\varphi(t) = \dfrac{1-a^n}{1-a\,\mathrm{e}^{it}}$ où $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| < 1$.

a) Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

b) Vérifier que l'on a $\varphi\left(\dfrac{2s\pi}{n}\right) = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} a^\ell\omega^{s\ell}$.

c) Démontrer, qu'alors, Γ_φ est égale à la matrice A de la question **B.1)**.

D. 1) Soit F une fonction continue sur $[0, 2\pi]$. Justifier l'égalité suivante

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1} F\left(\frac{2\ell\pi}{n}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t)\,\mathrm{d}t.$$

2) Dans cette question, on considère que a est réel tel que $|a| < 1$ et on pose

$$F(t) = \ln\left(\left|\frac{1}{1-a\,\mathrm{e}^{it}}\right|\right).$$

a) Vérifier que la fonction F est définie et continue sur $[0, 2\pi]$.

b) A l'aide de la partie **C**, montrer que, pour tout $a \in]-1, 1[$, on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left(\left|\frac{1}{1-a\,\mathrm{e}^{it}}\right|\right)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{(\det(A))^{\frac{1}{n}}}{(1-a^n)}\right)$$

où A est la matrice de la question **B.1)**.

c) Retrouver alors l'expression de $h(x)$ obtenue à la question **A.7)**.

Sujet 9

Concours ENSAM - ESTP - EUCLIDE - ARCHIMEDE

Epreuve de Mathématiques A PC 2006

durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

partie I

Un entier naturel $n \geqslant 2$ étant fixé, on note $\mathbb{R}[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré au plus n.

On définit alors pour tout polynôme $P = \sum\limits_{k \geqslant 0} p_k X^k$ de $\mathbb{R}[X]$:

- le polynôme *tronqué* de P au degré n : $T_n(P) = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k X^k$;
- le polynôme *composé* de P et $X + X^2$: $\varphi(P) = \sum\limits_{k \geqslant 0} p_k (X + X^2)^k$.

On confondra tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ avec sa fonction polynomiale réelle associée : $x \mapsto P(x)$.

1. (a) Établir que $T_n : P \mapsto T_n(P)$ définit un projecteur de $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Déterminer l'image de T_n.
   (c) Montrer qu'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ appartient au noyau de T_n si et seulement si :
   $$P(x) \underset{x \to 0}{=} o(x^n).$$

2. (a) Déterminer, pour tout P de $\mathbb{R}[X]$ une relation entre le degré de P et celui de $\varphi(P)$.
   (b) Prouver que φ définit un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$; φ est-il surjectif ?

3. On définit maintenant un endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}_n[X]$ en posant, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$:
   $$\varphi_n(P) = T_n(\varphi(P))$$
   et on note $M_n = [m_{i,j}]_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de φ_n dans la base canonique $\mathscr{B} = (X^j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
   On remarquera que l'indice i de ligne et l'indice j de colonne varient de 0 à n.
   (a) Calculer les $\varphi_4(X^j)$ pour $0 \leqslant j \leqslant 4$ et en déduire M_4 (il s'agit d'une matrice 5×5).
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la matrice M_n est triangulaire inférieure, et expliciter son terme général $m_{i,j}$ lorsque $0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$.

4. (a) Inverser la matrice M_4.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la matrice M_n est inversible. Que peut-on en conclure pour l'endomorphisme φ_n ?
   (c) Montrer que la matrice inverse de M_n, notée $Q_n = [q_{i,j}]_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$, est triangulaire inférieure.

5. (a) Montrer que les $T_n((X + X^2)^i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$ forment une base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $Q_n = (M_n)^{-1}$ est la matrice de $\mathscr{B} = (X^j)_{0 \leqslant j \leqslant n}$ dans cette nouvelle base $\mathscr{B}'$.
   (b) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $j \leqslant n$, lorsque x tend vers 0 : $x^j = \sum\limits_{i=0}^{n} q_{i,j}(x + x^2)^i + o(x^n)$.
   (c) Pour tous les entiers naturels i, j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant n-1$, en remarquant que $X^j = (X + X^2)\, X^{j-1} - X^{j+1}$, établir la relation de récurrence :
$$q_{i,j} = q_{i-1,j-1} - q_{i,j+1}.$$
   (d) Construire alors la matrice $Q_5 = (M_5)^{-1}$ à partir de sa première colonne et de sa diagonale, en indiquant l'enchaînement des calculs.
   (e) Vérifier que lorsque $n = 5$, on a pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant i$:
$$q_{i,j} = (-1)^{i+j}\, \frac{j}{i} \binom{2i - j - 1}{i - j}$$
   où pour $(m, p) \in \mathbb{N}^2$, $0 \leqslant p \leqslant m$, $\binom{m}{p}$ désigne le coefficient binomial noté parfois C_m^p.

   Dans le reste du problème, ce résultat sera admis pour tout entier naturel $n \geqslant 2$.

partie II

1. Soit I un intervalle ouvert contenant 0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une application admettant un développement limité d'ordre $n \geqslant 2$ en 0, de partie régulière $P \in \mathbb{R}_n[X]$; c'est-à-dire que :
$$f(x) \underset{x \to 0}{=} P(x) + o(x^n).$$
   (a) En utilisant éventuellement le I 1°c, montrer que l'application $x \mapsto f(x + x^2)$ admet en 0 un développement limité d'ordre n de partie régulière $\varphi_n(P)$, c'est-à-dire que :
$$f(x + x^2) \underset{x \to 0}{=} T_n(P(x + x^2)) + o(x^n).$$
   (b) Si $P = p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n$, déterminer à l'aide des notations de la partie I, un calcul matriciel fournissant directement le développement limité d'ordre n de $x \mapsto f(x + x^2)$ en 0 à partir du vecteur colonne formé de $p_0, \ldots, p_n$; expliciter alors ce développement limité.

2. (a) Appliquer le II 1°b pour obtenir le développement limité d'ordre 4 en 0 de l'application :
$$g : x \mapsto \frac{1}{1 + x + x^2}.$$
   (b) Vérifier ce résultat par un calcul direct de développement limité que l'on détaillera.

3. Soit une application f, somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$, fini ou non :
$$\forall x \in]-R, R[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\, x^n.$$
   (a) Déterminer le plus grand ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \Omega$, la série numérique $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \lambda_n\, (x + x^2)^n$ converge (il faudra distinguer différents cas selon les valeurs de R).

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose : $g_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \lambda_n \, (x+x^2)^n$. Montrer que :

$$g_N(x) = \sum_{k=0}^{2N} \left(\sum_{n=k/2}^{\min(k,N)} \lambda_n \binom{n}{k-n} \right) x^k.$$

(Dans une telle somme, n ne prend que les valeurs entières entre les bornes indiquées.)

(c) Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mu_k = \sum\limits_{n=k/2}^{k} \lambda_n \binom{n}{k-n}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $h_N(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} \mu_k \, x^k$. Montrer que :

$$|h_N(x) - g_N(x)| \leqslant \sum_{n=N/2}^{N} |\lambda_n| (x^2 + |x|)^n.$$

(d) Déduire de ce qui précède que, sur un intervalle à préciser, on a : $f(x+x^2) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mu_k \, x^k$.

Retrouver alors le développement limité d'ordre n en 0 de $x \mapsto f(x+x^2)$ obtenu en II 1°b.

4. (a) En remarquant que $1 - x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$, développer en série entière au voisinage de 0 l'application $g : x \mapsto \dfrac{1}{1+x+x^2}$ et préciser le rayon de convergence de cette série entière.

(b) Utiliser ce résultat et celui de la question II 3°d pour évaluer, selon $k \in \mathbb{N}$, les sommes :

$$S_k = \sum_{n=k/2}^{k} (-1)^n \binom{n}{k-n}.$$

partie III

1. (a) Déterminer des intervalles ouverts I et J, contenant 0 et aussi grands que possible, tels que $a : x \mapsto u = x + x^2$ définisse une bijection de I vers J. Exprimer alors $a^{-1}(u)$ pour $u \in J$.

(b) Montrer que cette fonction $a^{-1} : J \to I$ est développable en série entière au voisinage de 0, et préciser le rayon de convergence de la série entière associée que l'on notera $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k \, u^k$.

(c) Montrer, à l'aide du I 5°a, que les coefficients $b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont les termes de la deuxième colonne de $Q_n = (M_n)^{-1}$ (colonne d'indice 1).

(d) Calculer directement le développement en série entière de $a^{-1}(u)$ au voisinage de 0 et comparer les résultats obtenus à ceux résultant du I 5°e.

2. On considère maintenant l'application $\alpha : z \mapsto w = z + z^2$, définie sur le demi-plan ouvert Π formé des $z = x + i\,y$ tels que $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $x > -1/2$.

On identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, si bien que en posant $w = u + i\,v$ avec $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, α est aussi l'application $(x,y) \mapsto (u,v)$ définie sur l'ensemble Π des (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x > -1/2$.

(a) Établir que lorsque w décrit $\mathbb{C}$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z + z^2 = w$ restent symétriques par rapport à un point fixe, puis montrer ensuite que l'application α définit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme entre Π et le plan $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ privé d'une demi-droite à préciser.

(b) Soient dans Π les droites D_k, d'équations $x = k$ ($k \in \mathbb{R}$, $k > -1/2$). Montrer que ces droites ont pour images par α des paraboles d'axe Ou et toutes de même foyer F, à préciser.

3. On pose maintenant $\beta(w) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} b_k \, w^k$ lorsque cette série converge, les b_k étant définis au III 1°b.

Montrer que, sur son disque de convergence, cette série a pour somme $\alpha^{-1}(w)$.

(On pourra considérer, sans le calculer, le développement en série entière au voisinage de 0 de l'application $w \mapsto (\beta(w))^2 + \beta(w) - w$.)

Sujet 10

E.P.I.T.A. 2019

Epreuve de mathématiques MP - PC - PSI (3h)

Pour tout réel *strictement positif* α, on se propose d'étudier la fonction S_α de la variable réelle x définie (sous réserve de convergence) comme somme de la série de fonctions suivante :

$$S_\alpha(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^\alpha} = 1 + e^{-x} + e^{-2^\alpha x} + e^{-3^\alpha x} + e^{-4^\alpha x} + \ldots .$$

On étudie dans la partie I le domaine de définition et les premières propriétés de la fonction S_α. Dans la partie II, on approfondit le cas particulier $\alpha = 2$, autrement dit l'étude de la fonction S_2. Puis on introduit dans la partie III des intégrales auxiliaires afin d'obtenir de façon plus générale des équivalents de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

■ PARTIE I : Premières propriétés des fonctions S_α ($\alpha > 0$)

1°) *Etude du cas particulier de la fonction* S_1

a) Etudier la convergence simple et expliciter la somme de la série de fonctions définissant S_1 :

$$S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n}.$$

b) Préciser la limite et un équivalent de $S_1(x)$ quand x tend vers 0.

c) Préciser la limite de $S_1(x)$ quand x tend vers $+\infty$, et un équivalent de $S_1(x) - 1$ en $+\infty$.

2°) *Etude du domaine de définition des fonctions* S_α ($\alpha > 0$)

a) Examiner pour $x \leq 0$ la nature de la série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$.

b) Pour tout réel $x > 0$, déterminer la limite de la suite $n \mapsto n^2\, e^{-x\,n^\alpha}$.
En déduire la nature de la série $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ pour $x > 0$.

c) Préciser le domaine de définition de la fonction S_α pour $\alpha > 0$.

3°) *Premières propriétés des fonctions* S_α *(*$\alpha > 0$*)*

a) Pour tout $\varepsilon > 0$, établir la convergence normale de la série de fonctions $\sum e^{-x\,n^\alpha}$ sur $[\varepsilon, +\infty[$.
En déduire la continuité de la fonction S_α sur $]\,0, +\infty[$ (on explicitera le théorème utilisé).

b) Comparer $S_\alpha(x)$ et $S_\alpha(y)$ pour $0 < x \leq y$ et préciser le sens de variation de la fonction S_α.
En déduire que la fonction S_α admet une limite finie ou infinie en 0 et en $+\infty$.

c) A l'aide d'un théorème dont on précisera l'énoncé, montrer que $\lim_{x \to +\infty} S_\alpha(x) = 1$.

d) En exploitant l'inégalité $S_\alpha(x) \geq \sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^\alpha}$ pour tout entier naturel N et pour tout réel $x > 0$, établir, pour tout entier naturel N, que $\lim_{x \to 0} S_\alpha(x) \geq N + 1$.
Quelle est la limite de $S_\alpha(x)$ lorsque x tend vers 0?

■ PARTIE II : Etude de la fonction S_2

On étudie dans cette partie la fonction définie par :

$$\forall\, x > 0, \quad S_2(x) \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\,n^2} \;=\; 1 + e^{-x} + e^{-4\,x} + e^{-9\,x} + e^{-16\,x} + \;\ldots\;.$$

4°) *Recherche d'un équivalent de S_2 en 0*

a) Etablir l'inégalité suivante pour tout entier naturel n et tout réel $x > 0$:

$$e^{-x\,(n+1)^2} \;\le\; \int_n^{n+1} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t \;\le\; e^{-x\,n^2}.$$

b) En exploitant l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire la double inégalité suivante :

$$S_2(x) - 1 \;\le\; \frac{\sqrt{\pi}}{2\,\sqrt{x}} \;\le\; S_2(x).$$

c) Retrouver alors $\lim_{x\to 0} S_2(x)$, puis donner un équivalent de $S_2(x)$ quand x tend vers 0.

5°) *Recherche d'un équivalent de $S_2 - 1$ en $+\infty$*

a) Pour tout réel $x > 0$, établir que :

$$S_2(x) - 1 - e^{-x} \;\le\; \sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n}.$$

b) En calculant cette dernière somme, démontrer que $S_2(x) = 1 + e^{-x} + o(e^{-x})$ en $+\infty$.
En déduire un équivalent de $S_2(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

6°) *Recherche d'une valeur approchée de $S_2(x)$ pour $x > 0$*

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour tout entier naturel N et tout réel $x > 0$:

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{-x\,n^2} \;\le\; \int_N^{+\infty} e^{-x\,t^2}\,\mathrm{d}t.$$

b) A l'aide d'un changement de variable dans cette dernière intégrale, en déduire que :

$$\forall\, N \in \mathbb{N}^*, \quad S_2(x) - \sum_{n=0}^{N} e^{-x\,n^2} \;\le\; \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \int_{x\,N^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \;\le\; \frac{e^{-x\,N^2}}{2\,N\,x}.$$

c) En déduire un algorithme permettant d'obtenir une valeur approchée de $S_2(x)$ à $\varepsilon > 0$ près.

d) Préciser une valeur approchée de $S_2(1)$ à 10^{-7} près.

■ PARTIE III : Etude de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0 et $+\infty$

7°) *Comparaison de deux intégrales*

On considère pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ les deux intégrales suivantes :

$$\Gamma(\alpha) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-u}\,u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u \qquad \text{et} \qquad I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x\,t^\alpha}\,\mathrm{d}t.$$

a) Pour quelles valeurs de α les intégrales $\int_0^1 e^{-u}\,u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ et $\int_1^{+\infty} e^{-u}\,u^{\alpha-1}\,\mathrm{d}u$ convergent-elles?
En déduire que l'intégrale $\Gamma(\alpha)$ converge pour $\alpha > 0$.

b) A l'aide d'une intégration par parties, exprimer $\Gamma(\alpha + 1)$ en fonction de $\Gamma(\alpha)$.
Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire $\Gamma(n + 1)$ pour tout entier naturel n.

c) Pour tout $x > 0$, effectuer dans l'intégrale $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ le changement de variables défini par $u = x\, t^{\alpha}$.

Qu'en déduit-on pour l'intégrale $I(\alpha)$, et quelle relation obtient-on entre $\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ et $I(\alpha)$?

8°) *Recherche d'un équivalent de S_α en 0 ($\alpha > 0$)*

a) En raisonnant comme à la question 4.a), établir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$0 \ \leq\ S_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\frac{1}{x^{1/\alpha}} \ \leq\ 1.$$

b) Retrouver $\lim_{x\to 0} S_\alpha(x)$, puis donner un équivalent de $S_\alpha(x)$ quand x tend vers 0.

9°) *Majoration d'une intégrale auxiliaire ($\alpha > 0$)*

a) Justifier pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$ la relation suivante :

$$\int_1^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t \ =\ \frac{1}{\alpha\, x^{1/\alpha}}\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u.$$

b) Etablir l'égalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u \ =\ e^{-x}\, x^{\frac{1}{\alpha}-1} + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u.$$

Justifier ensuite l'inégalité suivante pour tous réels $\alpha > 0$ et $x > 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-2}\,\mathrm{d}u \ \leq\ \frac{1}{x}\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u$$

En déduire enfin l'équivalence suivante lorsque x tend vers $+\infty$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-u}\, u^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{d}u \ \underset{x\to+\infty}{\sim}\ e^{-x}\, x^{\frac{1}{\alpha}-1}.$$

c) En conclure que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t$ est négligeable devant e^{-x} lorsque x tend vers $+\infty$.

10°) *Recherche d'un équivalent de S_α en $+\infty$ ($\alpha > 0$)*

a) Etablir pour $\alpha > 0$ et $x > 0$ l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} e^{-x\,n^{\alpha}} \ \leq\ \int_1^{+\infty} e^{-x\,t^{\alpha}}\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire un équivalent de $S_\alpha(x) - 1$ quand x tend vers $+\infty$.

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 2

PC

2020

4 heures — Calculatrice autorisée

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Toutes les variables aléatoires sont discrètes, à valeurs réelles ou complexes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
Si la variable aléatoire $X : \Omega \to \mathbb{R}$ est d'espérance finie, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance.
Pour tout nombre complexe z, on note $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle, $\mathrm{Im}(z)$ sa partie imaginaire et $\bar{z}$ son conjugué.

On appelle *sinus cardinal* la fonction définie, pour tout réel x, par $\mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On admet que cette fonction est continue et que pour tout réel x, $|\mathrm{sinc}(x)| \leqslant 1$.

On étend aux variables aléatoires discrètes à valeurs complexes la notion d'espérance définie pour les variables aléatoires discrètes réelles. Ainsi, on dit qu'une variable aléatoire discrète à valeurs complexes $Z : \Omega \to \mathbb{C}$ est *d'espérance finie* si les variables aléatoires réelles $\mathrm{Re}(Z)$ et $\mathrm{Im}(Z)$ sont d'espérance finie et on définit alors l'espérance de Z par

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(\mathrm{Re}(Z)) + \mathrm{i}\,\mathbb{E}(\mathrm{Im}(Z)).$$

On admettra les résultats suivants qui étendent aux variables aléatoires complexes les résultats analogues sur les variables aléatoires réelles.

— Toute variable aléatoire Z complexe finie est d'espérance finie. Si $Z(\Omega) = \{z_1, \dots, z_r\}$, où les z_i sont deux à deux distincts, alors

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{r} z_k \mathbb{P}(Z = z_k).$$

— *Théorème du transfert* (cas $X(\Omega)$ fini). Soit X une variable aléatoire réelle d'image finie $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts et soit f une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
Alors $f(X)$ est d'espérance finie et

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{k=1}^{r} \mathbb{P}(X = x_k) f(x_k).$$

— Soit Z une variable aléatoire complexe telle que $Z(\Omega)$ soit dénombrable égal à $\{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les z_n sont deux à deux distincts. Alors Z est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0} z_n \mathbb{P}(Z = z_n)$ converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n \mathbb{P}(Z = z_n).$$

— *Théorème du transfert* (cas $X(\Omega)$ dénombrable). Soit X une variable aléatoire réelle d'image dénombrable $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts et soit f une application à valeurs complexes définie sur $X(\Omega)$.
Alors $f(X)$ est d'espérance finie si, et seulement si, la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}(X = x_n) f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas,

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_n) f(x_n).$$

— Soit Z une variable aléatoire complexe et $\bar{Z} : \omega \in \Omega \mapsto \overline{Z(\omega)}$ sa variable aléatoire conjuguée.
Si Z est d'espérance finie, alors $\bar{Z}$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(\bar{Z}) = \overline{\mathbb{E}(Z)}$.

— Soit Z_1 et Z_2 deux variables aléatoires complexes d'espérance finie et soit $\lambda \in \mathbb{C}$.
Alors $Z_1 + Z_2$ et λZ_1 sont d'espérance finie et $\mathbb{E}(Z_1 + Z_2) = \mathbb{E}(Z_1) + \mathbb{E}(Z_2)$ et $\mathbb{E}(\lambda Z_1) = \lambda \mathbb{E}(Z_1)$.

I Fonction caractéristique d'une variable aléatoire réelle

À toute variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, on associe une fonction ϕ_X, appelée *fonction caractéristique* de X et définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_X(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tX}\right).$$

I.A – Premières propriétés

Dans cette sous-partie, X est une variable aléatoire réelle discrète.

Q 1. On suppose, dans cette question, que $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal $r \in \mathbb{N}^*$.

On note $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_r\}$ où les x_i sont deux à deux distincts, et, pour tout entier $k \in [\![1, r]\!]$, $a_k = \mathbb{P}(X = x_k)$.

Montrer que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx_k}$.

Q 2. On suppose dans cette question que $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \mathbb{P}(X = x_n)$.

Montrer que ϕ_X est définie sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx_n}$.

Q 3. Montrer que ϕ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 4. Soit a et b deux réels et $Y = aX + b$. Pour tout réel t, exprimer $\phi_Y(t)$ en fonction de ϕ_X, t, a et b.

Q 5. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner une expression de $\phi_X(-t)$ en fonction de $\phi_X(t)$. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur l'image $\phi_X(\mathbb{R})$ pour que la fonction ϕ_X soit paire.

I.B – Trois exemples

Q 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On suppose que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ et on note $q = 1 - p$. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi_X(t) = (q + p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t})^n$.

Q 7. Soit $p \in]0, 1[$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p ?

Q 8. Soit $\lambda > 0$. Quelle est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ ?

I.C – Image de ϕ_X

On se donne ici une variable aléatoire réelle discrète $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont on note ϕ_X la fonction caractéristique.
Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a + b\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble $\{a + bk, k \in \mathbb{Z}\}$.

Q 9. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\phi_X(t)| \leqslant 1$.

Q 10. Montrer que, s'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tels que $X(\Omega) \subset a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$, alors $|\phi_X(t_0)| = 1$.

On suppose réciproquement qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que $|\phi_X(t_0)| = 1$.
Dans la suite de cette sous-partie I.C, on suppose de plus que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

Q 11. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp\bigl(\mathrm{i}(t_0 x_n - t_0 a)\bigr) = 1$.

Q 12. En déduire que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (1 - \cos(t_0 x_n - t_0 a)) = 0$.

Q 13. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $a_n \neq 0$, alors $x_n \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}$.

Q 14. En déduire que $\mathbb{P}\left(X \in a + \dfrac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$.

II Fonction caractéristique et loi d'une variable aléatoire

L'objectif de cette partie est de montrer que la fonction caractéristique d'une variable aléatoire détermine sa loi. Deux méthodes de démonstration sont proposées.

II.A – Première méthode

Soit X une variable aléatoire réelle et discrète et $m \in \mathbb{R}$.

Pour $T \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $V_m(T) = \dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{-T}^{T} \phi_X(t)\, \mathrm{e}^{-imt}\, \mathrm{d}t$.

II.A.1) On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

Q 15. Montrer que, pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \displaystyle\sum_{n=1}^{r} \operatorname{sinc}(T(x_n - m))\mathbb{P}(X = x_n)$.

Q 16. En déduire que $V_m(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \mathbb{P}(X = m)$.

II.A.2) On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_n(h) = \operatorname{sinc}\left(\dfrac{x_n - m}{h}\right)\mathbb{P}(X = x_n)$.

Q 17. Montrer que pour tout $T \in \mathbb{R}_+^*$, on a $V_m(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g_n\left(\frac{1}{T}\right)$.

Q 18. Montrer que la fonction g_n se prolonge en une fonction $\tilde{g}_n$ définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q 19. Montrer que la fonction $G = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{g}_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Q 20. Établir que $V_m(T) \xrightarrow[T \to +\infty]{} \mathbb{P}(X = m)$.

II.A.3) Application

Q 21. Soient $X : \Omega \to \mathbb{R}$ et $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires discrètes telles que $\phi_X = \phi_Y$. Montrer que, pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = m) = \mathbb{P}(Y = m)$, autrement dit que X et Y ont la même loi.

II.B – Deuxième méthode

Si a et b sont deux réels, on note $K_{a,b}$ la fonction définie pour tout réel t par $K_{a,b}(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tb} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,ta}}{2\,\mathrm{i}\,t} & \text{si } t \neq 0, \\ \dfrac{b-a}{2} & \text{si } t = 0. \end{cases}$

Q 22. À l'aide de séries entières, montrer que $K_{a,b}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit N un entier naturel et soit F_N la fonction définie, pour tout réel x, par $F_N(x) = \displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,x}(t)\, \mathrm{d}t$.

Q 23. Montrer que F_N est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x, $F_N'(x) = N \operatorname{sinc}(Nx)$.

Q 24. Montrer que $\displaystyle\int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\, \mathrm{d}t = \int_{Na}^{Nb} \operatorname{sinc}(s)\, \mathrm{d}s$.

Q 25. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sinc}(s)\, \mathrm{d}s$ est convergente.

On admettra dans la suite que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \operatorname{sinc}(s)\, \mathrm{d}s = \frac{\pi}{2}$.

Q 26. En déduire l'existence et la valeur de $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_{-N}^{N} K_{a,b}(t)\, \mathrm{d}t$ dans le cas où $a < b$.

Q 27. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega)$ est fini. On suppose que les réels a et b n'appartiennent pas à $X(\Omega)$. Montrer que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-N}^{N} \phi_X(-t) K_{a,b}(t)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[N \to +\infty]{} \mathbb{P}(a < X < b).$$

III Régularité de ϕ_X

On fixe dans cette partie une variable aléatoire réelle $X : \Omega \to \mathbb{R}$, dont l'image $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

On cherche à établir des liens entre des propriétés de la loi de X et la régularité de ϕ_X.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que X admet un moment d'ordre k si la variable aléatoire X^k est d'espérance finie.

III.A –

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose dans cette sous-partie III.A que X admet un moment d'ordre k.

Q 28. Soit j un entier tel que $1 \leqslant j \leqslant k$. Montrer que pour tout réel x, $|x|^j \leqslant 1 + |x|^k$ et en déduire que X admet un moment d'ordre j.

Q 29. En déduire que ϕ_X est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de la dérivée k−ième de ϕ_X.

Q 30. En déduire une expression de $\mathbb{E}(X^k)$ en fonction de $\phi_X^{(k)}(0)$.

III.B –

On suppose dans cette sous-partie III.B que ϕ_X est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Q 31. On note f la fonction qui à tout réel $h > 0$ associe $f(h) = \dfrac{2\phi_X(0) - \phi_X(2h) - \phi_X(-2h)}{4h^2}$. Quelle est la limite de f en 0 ?

Q 32. Montrer que pour tout $h \in \mathbb{R}^*$, $f(h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\sin^2(hx_n)}{h^2}$.

Q 33. En déduire que X admet un moment d'ordre 2.

III.C –

On fixe dans cette sous-partie III.C un entier naturel $k \in \mathbb{N}$ et on suppose à la fois que ϕ_X est de classe C^{2k+2} sur $\mathbb{R}$ et que X admet un moment d'ordre $2k$. On note $\alpha = \mathbb{E}(X^{2k})$.

Q 34. Que peut-on dire de X si α est nul ?

On suppose dorénavant que le réel α est strictement positif.

Q 35. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire vérifiant $Y(\Omega) = X(\Omega)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(Y = x_n) = \frac{a_n x_n^{2k}}{\alpha}.$$

Montrer que ϕ_Y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Q 36. En déduire que X admet un moment d'ordre $2k + 2$.

Q 37. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déduire des questions précédentes que si ϕ_X est de classe C^{2k} sur $\mathbb{R}$, alors X admet un moment d'ordre $2k$.

IV Développement en série entière de ϕ_X

Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle.

IV.A –

On suppose que $X(\Omega)$ est fini et on reprend les notations de la question 1.

Q 38. Montrer que ϕ_X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel t, $\phi_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}\,t)^n}{n!} \mathbb{E}(X^n)$.

IV.B –

On suppose que $X(\Omega)$ est dénombrable et on reprend les notations de la question 2.

On suppose également que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre n et qu'il existe un réel $R > 0$ tel que

$$\mathbb{E}(|X|^n) = O\left(\frac{n^n}{R^n}\right) \qquad \text{quand } n \to +\infty.$$

Q 39. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}y)^k}{k!}\right| \leqslant \dfrac{|y|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Q 40. En déduire que pour tout réel $t \in \left[-\dfrac{R}{\mathrm{e}}, \dfrac{R}{\mathrm{e}}\right]$,

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!}\,\mathbb{E}(X^k).$$

• • • FIN • • •

Notations pour l'ensemble du sujet :
K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note, pour n entier naturel, $n \geq 2$:

- $M_n(\mathrm{K})$ le K-espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients dans K.
- $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices diagonales de $M_n(\mathbb{R})$.

~~EXERCICE~~

~~**Q1.** On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique ($\langle A|B\rangle = \mathrm{trace}({}^t A.B)$), déterminer $(D_n(\mathbb{R}))^{\perp}$, l'orthogonal de $D_n(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.~~

PROBLÈME - Théorème de décomposition de Dunford

On admet le théorème suivant que l'on pourra utiliser librement :

> Si A est une matrice de $M_n(\mathrm{K})$ telle que son polynôme caractéristique χ_A soit scindé sur K, alors il existe un unique couple (D, N) de matrices de $M_n(\mathrm{K})$ vérifiant les quatre propriétés :
> (1) $A = D + N$;
> (2) D est diagonalisable dans $M_n(\mathrm{K})$ (pas nécessairement diagonale) ;
> (3) N est nilpotente ;
> (4) $DN = ND$.
>
> De plus, D et N sont des polynômes en A et $\chi_A = \chi_D$.
>
> Le couple (D, N) s'appelle la décomposition de Dunford de A.

Partie I - Quelques exemples

Q2. Donner le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A de $M_n(\mathrm{K})$ lorsque A est diagonalisable, puis lorsque la matrice A de $M_n(\mathrm{K})$ est nilpotente.
Justifier qu'une matrice trigonalisable vérifie l'hypothèse du théorème, admettant ainsi une décomposition de Dunford.
Le couple de matrices $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est-il la décomposition de Dunford de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$?

Q3. Donner un exemple d'une matrice de $M_2(\mathbb{R})$ n'admettant pas de décomposition de Dunford dans $M_2(\mathbb{R})$.

Q4. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A, puis donner le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de A (on utilisera le fait que $\chi_A = \chi_D$).

Q5. Application

Pour $A \in M_n(\mathrm{K})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ est l'exponentielle de la matrice A.

Déduire de la question précédente l'exponentielle de la matrice A définie en **Q4**.

On pourra utiliser sans démonstration que si M et N sont deux matrices de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent, $\exp(M+N) = (\exp M)(\exp N)$.

Q6. Soit $A \in M_n(\mathrm{K})$ telle que $A^2(A - I_n) = 0$.

Justifier que le polynôme $X(X-1)$ est annulateur de la matrice A^2.

Démontrer que le couple (D,N) de la décomposition de Dunford de la matrice A est donné par : $D = A^2$ et $N = A - A^2$.

Partie II - Un exemple par deux méthodes

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

On notera id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Q7. La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?

Démontrer qu'on a la somme directe : $\mathbb{R}^3 = \ker(u - \mathrm{id}) \oplus \ker(u - 2\,\mathrm{id})^2$.

Q8. Déterminer une base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que :

$\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_1\}$, $\ker(u - 2\,\mathrm{id}) = \mathrm{vect}\{e_2\}$ et $\ker(u - 2\,\mathrm{id})^2 = \mathrm{vect}\{e_2, e_3\}$.

Écrire la matrice B de u dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.

Q9. Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice B et en déduire le couple (on calculera ces matrices) de la décomposition de Dunford de la matrice A.

Q10. Décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{(X-1)(X-2)^2}$ et en déduire deux polynômes U et V tels que :

$$(X-1)U(X) + (X-2)^2 V(X) = 1 \quad \text{avec} \quad \deg U < 2 \quad \text{et} \quad \deg V < 1.$$

Q11. On pose les endomorphismes : $p = V(u) \circ (u - 2\,\mathrm{id})^2$ et $q = U(u) \circ (u - \mathrm{id})$.

Calculer $p(x) + q(x)$ pour tout x vecteur de $\mathbb{R}^3$.

Démontrer que p est le projecteur sur $\ker(u - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(u - 2\,\mathrm{id})^2$ et q est le projecteur sur $\ker(u - 2\,\mathrm{id})^2$ parallèlement à $\ker(u - \mathrm{id})$.

Q12. On pose $d = p + 2q$. Écrire la matrice de d dans la base (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$ (de la question **Q8**).
Déterminer le couple de la décomposition de Dunford de la matrice A en exprimant D et N comme polynômes de la matrice A (sous forme développée).

Partie III - Une preuve de l'unicité de la décomposition

Q13. Soit E un K-espace vectoriel de dimension n.
Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables de E qui commutent. On note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de u et pour tout $1 \leq i \leq p$, $E_{\lambda_i}(u)$ le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ_i.
Démontrer que tout sous-espace propre de u est stable par v.
En déduire qu'il existe une base commune de diagonalisation pour u et v.
Pour tout $1 \leq i \leq p$, on pourra noter v_i l'endomorphisme induit par v sur $E_{\lambda_i}(u)$.

Q14. Soient A et B deux matrices diagonalisables de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent. Démontrer que la matrice $A - B$ est diagonalisable.

Q15. Soient A et B deux matrices nilpotentes de $M_n(\mathrm{K})$ qui commutent, démontrer que la matrice $A - B$ est nilpotente.

Q16. Déterminer les matrices de $M_n(\mathrm{K})$ qui sont à la fois diagonalisables et nilpotentes.

Q17. Dans cette question, on admet, pour toute matrice carrée A de $M_n(\mathrm{K})$ à polynôme caractéristique scindé, l'existence d'un couple (D, N) vérifiant les conditions (1), (2), (3), (4) et tel que D et N soient des polynômes en A.
Établir l'unicité du couple (D, N) dans la décomposition de Dunford.

Partie IV - Non continuité de l'application $A \mapsto D$

Q18. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{C})$ qui sont <u>diagonalisables</u>.
$\mathcal{D}$ est-il un espace vectoriel ?
Si P est une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$, justifier que l'application de $M_n(\mathbb{C})$ vers $M_n(\mathbb{C})$, $M \mapsto PMP^{-1}$ est continue.

Q19. Démontrer que $\mathcal{D}$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

Q20. Si (D, N) est le couple de la décomposition de Dunford d'une matrice A, on note φ l'application de $M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{D}$ qui à la matrice A associe la matrice D.
Justifier que φ est l'application identité sur $\mathcal{D}$ et en déduire que l'application φ n'est pas continue.

FIN

IMPRIMERIE NATIONALE – 21 1154 – D'après documents fournis

PROBLÈME 1

File d'attente

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

On s'intéresse à une file d'attente à un guichet. À l'instant 0, la file contient un client. On suppose qu'à chaque instant $k \in \mathbb{N}^*$ il peut arriver au plus un nouveau client dans la file.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si un nouveau client arrive à l'instant k et 0 sinon.

On suppose que $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

On repère chaque client par un indice qui donne son ordre d'arrivée dans la file : par définition, le client initialement présent a pour indice $n = 0$, le premier nouvellement arrivé a pour indice $n = 1$, etc.

On rappelle que la fonction génératrice d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la fonction notée G_X définie par :

$$G_X(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j)t^j.$$

Partie I - Temps d'arrivée du n-ième client

Q1. On note T_1 la variable aléatoire égale au temps écoulé entre le temps 0 et le temps où arrive le client d'indice 1.
Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{P}(T_1 = k) = (1 - p)^{k-1}p$.

Q2. On note A l'événement « aucun nouveau client n'arrive dans la file ».
Exprimer A en fonction des événements $\{T_1 = k\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire $\mathbf{P}(A)$. Interpréter.

Q3. Déterminer le rayon de convergence R de la fonction génératrice de T_1, puis calculer sa somme.

Q4. En déduire l'espérance et la variance de T_1.

Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n la variable aléatoire égale au temps écoulé entre l'arrivée du client d'indice $n - 1$ et le client d'indice n. On admet que les variables aléatoires T_n sont indépendantes et de même loi.
On note $D_n = T_1 + \ldots + T_n$ la variable aléatoire qui donne le temps d'arrivée du client d'indice n.
Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice G_{D_n} de D_n.

Q6. Rappeler le développement en série entière de $(1 + x)^\alpha$ au voisinage de $x = 0$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
En déduire le développement en série entière de G_{D_n} en 0 et montrer que pour tout $(k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$:

$$\mathbf{P}(D_n = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n, \\ \dbinom{k-1}{k-n} p^n (1-p)^{k-n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II - Étude du comportement de la file

II.1 - Une suite récurrente

Soient $a > 0$ et $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \exp(a(x-1)) \end{cases}$.

On s'intéresse au comportement de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$z_1 \in]0,1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = f(z_n).$$

Q7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_n \in]0,1[$ et $z_{n+1} - z_n$ est du même signe que $z_2 - z_1$.

Q8. En déduire que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

Q9. Soit la fonction $\psi : \begin{cases}]0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) - a(x-1) \end{cases}$.
Montrer que pour tout $x > 0$, on a : $0 \leqslant \psi(x) \iff f(x) \leqslant x$ et $\psi(x) = 0 \iff f(x) = x$.

Q10. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer qu'elle ne s'annule qu'en $x = 1$. En déduire que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Q11. On suppose dans cette question que $a > 1$.
Étudier le signe de ψ et montrer que l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in [0,1]$ admet exactement deux solutions α et 1 avec $\alpha \in]0,1[$ qu'on ne cherchera pas à expliciter.
En distinguant les cas $z_1 \in]0,\alpha]$ et $z_1 \in]\alpha,1[$, montrer que $z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

II.2 - Groupes de clients

On suppose que les clients de la file d'attente sont servis suivant leur ordre d'arrivée par un unique serveur et que la durée de service de chaque client est une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$: pour tout $k \in \mathbb{N}$, le service a une durée k avec la probabilité $e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

On rappelle qu'initialement, la file contient un unique client : le client d'indice 0.

On note S la variable aléatoire égale à la durée de service de ce client : comme à chaque instant il arrive au plus un nouveau client, il peut arriver entre 0 et S nouveaux clients pendant le temps de passage au guichet du client d'indice 0. Les variables S et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont supposées indépendantes.

On appelle « clients du premier groupe » les clients qui sont arrivés pendant que le client d'indice 0 était servi.
Par récurrence, pour tout $k \geqslant 2$, on définit les clients du k-ième groupe comme étant les clients qui sont arrivés pendant que ceux du $(k-1)$-ième groupe étaient servis.

Pour tout $k \geqslant 1$, on note V_k la variable aléatoire égale au nombre de clients du k-ième groupe.

Par construction, pour $n \in \mathbb{N}^*$, si le n-ième groupe est vide, alors l'événement $\{V_k = 0\}$ est réalisé pour tout $k \geqslant n$.

Q12. Quelle est la situation concrète décrite par l'événement $Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}\{V_n = 0\}$?

Q13. Quelle est la loi du nombre N_n de clients qui sont arrivés dans la file d'attente dans l'intervalle de temps $[\![1, n]\!]$?

Q14. Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbf{P}(V_1 = k | S = n)$.
En déduire que V_1 suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.

Q15. On note $z_n = \mathbf{P}(V_n = 0)$. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $\mathbf{P}(Z) = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.

Q16. Justifier que pour tout $(j,n) \in \mathbb{N}^2$, $\mathbf{P}(V_{n+1} = 0 | V_1 = j) = \mathbf{P}(V_n = 0)^j$. On distinguera le cas $j = 0$.

Q17. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $z_{n+1} = \exp(\lambda p(z_n - 1))$.

Q18. Déterminer, suivant les valeurs de λp, la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter.

EXERCICE

Équivalent de Stirling

Q19. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

Pour tout $x > 0$, on note :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\,.$$

Q20. Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!\,.$$

Q21. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

Q22. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\rho_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t\ \mathrm{d}t$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln\Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t\ \mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k\,.$$

On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.