

- NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES -

La lettre \mathbf{C} désigne le corps des nombres complexes ; les espaces vectoriels considérés seront toujours des espaces vectoriels sur ce corps \mathbf{C} , et les symboles \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} ont leur signification habituelle. On note \mathbf{N}^* (resp. \mathbf{C}^*) l'ensemble des entiers ≥ 1 (resp. l'ensemble des complexes non-nuls).

La lettre \mathcal{P} désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes (« polynômes » et « fonctions polynômes » seront toujours confondus, puisqu'on travaille sur le corps \mathbf{C} , infini). La partie réelle (resp. la partie imaginaire) du nombre complexe z sera notée $\operatorname{Re}(z)$ (resp. $\operatorname{Im}(z)$) en un endroit du problème.

On rappelle que le symbole de Kronecker δ_{ij} vaut 1 et $i = j$ et 0 sinon (i et j étant deux entiers).

Enfin, pour une partie A d'un espace vectoriel normé \mathcal{E} on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A .

L'objectif du problème est l'étude de l'équation de Guichard :

$$(G) \quad f(z+1) - f(z) = g(z)$$

dans un certain espace \mathcal{E} de fonctions définies sur \mathbf{C} , qui contient \mathcal{P} . Dans cette équation, $g \in \mathcal{E}$ est la donnée, $f \in \mathcal{E}$ l'inconnue.

La partie I étudie l'équation (G) sur \mathcal{P} , et donne une application.

La partie II définit l'espace \mathcal{E} et établit quelques-unes de ses propriétés qui seront utiles par la suite. La partie III étudie l'équation (G) sur \mathcal{E} .

La partie IV, enfin, étudie une variante multiplicative de (G), à savoir l'équation (sur \mathcal{E}) :

$$(H) \quad f(qz) - f(z) = g(z)$$

dans laquelle q est un nombre complexe non nul ($q \in \mathbf{C}^*$). Cette partie fait intervenir des considérations « diophantiennes », en ce sens que la vitesse d'approximation d'un irrationnel par des rationnels doit être prise en compte.

- Partie I : L'équation (G) sur \mathcal{P} et les opérateurs nilpotents -

Soit $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ l'opérateur de différence première défini par :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad (\Delta P)(z) = P(z+1) - P(z), \quad \text{où } \Delta P = \Delta(P) \tag{1}$$

1. (a) Démontrer que $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est une application linéaire *localement nilpotente*, c'est-à-dire (en notant $\Delta^n = \Delta \circ \dots \circ \Delta$ (n fois) et $\Delta^0 = \operatorname{id}$) :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \exists n \in \mathbf{N} \text{ tel que } \Delta^n P = 0.$$

- (b) Existe-t-il un entier $p \in \mathbf{N}$ tel que $\Delta^p = 0$?

2. Démontrer que $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ n'est pas injective et décrire son noyau.

3. On définit la suite $(H_n)_{n \geq 0}$ des *polynômes de Hilbert* sur \mathbf{C} par :

$$H_0(z) = 1; \quad \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad H_n(z) = \frac{z(z-1)(z-n+1)}{n!}.$$

- (a) Démontrer que $\Delta H_0 = 0$, $\Delta H_n = H_{n-1}$ si $n \geq 1$, et $(\Delta^k H_n)(0) = \delta_{n,k}$.
- (b) Démontrer que $(H_n)_{n \geq 0}$ est une base de \mathcal{P} et que, plus précisément :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad P = \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^n P)(0) H_n \tag{2}$$

Expliciter les coefficients du polynôme $z \rightarrow z^3$ sur la base (H_n) .

(c) Démontrer que $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est surjective. Comment conciliez-vous cela avec la question 2) ?

4. (a) Soit p un entier fixé ; on écrit $z^p = f(z+1) - f(z)$, avec $f \in \mathcal{P}$ et $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\forall N \in \mathbf{N}, \quad \sum_{n=0}^N n^p = f(N+1) \quad (3)$$

(b) Donner une formule simple pour calculer $\sum_{n=0}^N n^3$ en fonction de N .

5. (a) Pour $P \in \mathcal{P}$, on pose $\|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|$. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur \mathcal{P} .

(b) L'application linéaire $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est-elle continue pour la norme précédente ?

(c) Montrer qu'il existe une norme sur \mathcal{P} pour laquelle Δ est continue.

Indication : on pourra utiliser le caractère localement nilpotent de Δ pour définir à partir de la formule (2) une norme faisant de Δ une application linéaire de norme 1.

6. On rappelle le *lemme de Baire pour les espaces vectoriels normés complets* ou « espaces de Banach » (admis ici) : Si $(F_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fermés d'un espace de Banach dont la réunion est tout l'espace, alors l'un au moins de ces fermés, F_p , est d'intérieur non-vide ($\overset{\circ}{F}_p \neq \emptyset$). On se donne X un tel espace de Banach (ici sur \mathbf{C}).

(a) Soit Y un sous-espace vectoriel de X ; montrer que $\overset{\circ}{Y} \neq \emptyset \implies Y = X$.

(b) Soit $T : X \rightarrow X$ une application linéaire continue *localement nilpotente* :

$$\forall x \in X, \exists n \in \mathbf{N} : T^n(x) = 0.$$

Démontrer que T est nilpotente : il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $T^n = 0$.

7. (a) L'espace vectoriel \mathcal{P} est-il complet pour la norme construite au 5)c) ?

(b) L'espace vectoriel \mathcal{P} est-il complet pour au moins une norme ?

- Partie II : L'espace \mathcal{E} des fonctions entières -

Soit \mathcal{E} l'espace vectoriel des fonctions entières, c'est-à-dire des fonctions $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ qui s'écrivent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où la série entière figurant au second membre a un rayon de convergence infini. On a immédiatement $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$.

1. (a) Démontrer que les a_n sont déterminés de façon unique par f et que l'on a plus précisément :

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt. \quad (4)$$

(b) On pose $M(f, r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Démontrer que :

$$\forall r > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \quad |a_n| \leq \frac{M(f, r)}{r^n}. \quad (5)$$

- (c) Démontrer que \mathcal{P} n'est pas égal à \mathcal{E} (il suffira de donner un exemple d'une fonction $f \in \mathcal{E}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, qui n'est pas un polynôme; on justifiera la réponse).
- (d) Démontrer que les seules fonctions de \mathcal{E} qui sont bornées sont les constantes.
- (e) Démontrer que

$$f \in \mathcal{P} \iff \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ converge uniformément sur } \mathbf{C} \text{ tout entier.}$$

2. Cette question a pour but de mettre en place quelques propriétés importantes de l'espace \mathcal{E} .

- (a) Soit (f_k) une suite de fonctions de \mathcal{E} , $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} z^n$. On suppose que (f_k) converge uniformément vers f sur tout compact de \mathbf{C} . Démontrer que f appartient à \mathcal{E} .

Indication : on pourra commencer par démontrer que :

$$\forall R > 0, \exists M > 0 \quad / \quad \forall (n, k) \in \mathbf{N}^2, |a_n^{(k)}| \leq \frac{M}{R^n}.$$

- (b) Démontrer qu'une fonction f de \mathbf{C} dans \mathbf{C} appartient à \mathcal{E} si et seulement s'il existe une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers f sur tout compact de \mathbf{C} .
- (c) Démontrer que \mathcal{E} est stable par produit, c'est-à-dire que $f, g \in \mathcal{E} \implies fg \in \mathcal{E}$.
- (d) Soit $f \in \mathcal{E}$, $a \in \mathbf{C}$ et $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ définie par $g(z) = f(z + a)$. Montrer que $g \in \mathcal{E}$. Ainsi, \mathcal{E} est stable par translation.

3. Une suite $(\lambda_n)_{n \geq 0}$ de complexes est dite un *multiplicateur* de \mathcal{E} si, pour toute fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{E},$$

la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_n z^n$ définit un élément de \mathcal{E} , c'est-à-dire a un rayon de convergence infini.

On se propose de montrer qu'on a équivalence entre :

- i) (λ_n) est un multiplicateur de \mathcal{E} ;
- ii) il existe des constantes $A, B > 0$ telles que : $\forall n \in \mathbf{N}, |\lambda_n| \leq AB^n$.

- (a) Démontrer que ii) implique i).
- (b) On suppose que ii) n'est pas réalisée. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_j)_{j \geq 1}$ d'entiers ≥ 1 avec : $\forall j \geq 1, |\lambda_{n_j}| > j^{n_j}$. Puis montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{E}$, de la forme $f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{n_j} z^{n_j}$, telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_{n_j} \lambda_{n_j} z^{n_j}$ ne soit pas infini. En déduire que ii) implique i).

- 4. (a) Démontrer que Δ , défini par $(\Delta f)(z) = f(z + 1) - f(z)$, envoie \mathcal{E} dans \mathcal{E} .
- (b) Décrire le noyau $\ker \Delta$ de $\Delta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$, et montrer que ce noyau est de dimension infinie. Ainsi, $\Delta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est très loin d'être injective. On verra dans la partie III qu'elle est cependant surjective.

5. On rappelle que pour $\rho > 0$ et f définie et continue sur le cercle de centre 0 et de rayon ρ ($|w| = \rho$), à valeurs complexes, l'intégrale curviligne

$$I = \int_{|w|=\rho} f(w) dw$$

est par définition :

$$I = \int_0^{2\pi} f(\rho e^{it}) i \rho e^{it} dt. \tag{6}$$

- (a) Démontrer que $|I| \leq 2\pi\rho M(f, \rho)$.
- (b) Montrer que si f appartient à \mathcal{E} alors $I = 0$.
- (c) Soit un élément h de \mathcal{E} et un entier $k \in \mathbf{Z}$. On pose :

$$J_k(h, \rho) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=\rho} w^k h(w) dw .$$

Démontrer que $J_{-1}(h, \rho) = h(0)$ et $J_k(h, \rho) = 0$ pour tout $k \geq 0$.

6. (a) Montrer qu'il existe une fonction g de \mathcal{E} telle que

$$w \in \mathbf{C} \implies e^w = 1 + w + w^2 g(w) \quad \text{avec de plus} \quad |g(w)| \leq e - 2 \quad \text{si} \quad |w| = 1 .$$

- (b) Soit $k \in \mathbf{Z}$, et

$$I_k = \frac{1}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{w^k}{e^w - 1} dw .$$

- i) Démontrer que I_k est bien définie.
- ii) Démontrer que $I_0 = 1$ et que $I_k = 0$ si $k \geq 1$.

Indication : on pourra par exemple faire intervenir une série géométrique.

- Partie III : L'équation de Guichard dans \mathcal{E} -

A) Les polynômes de Bernoulli et une application :

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}$, on pose :

$$B_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=1} \frac{e^{zw}}{(e^w - 1)} \frac{dw}{w^n} . \tag{7}$$

1. Démontrer que

$$B_n(z) = n! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_{k-n}}{k!} z^k$$

puis que B_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n . Calculer B_0 .

2. (a) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}^*, B'_n(x) = nB_{n-1}(x) . \tag{8}$$

- (b) Démontrer que

$$\forall z \in \mathbf{C}, \forall n \in \mathbf{N}^*, B_n(z+1) - B_n(z) = nz^{n-1} , \tag{9}$$

et que $B_n(1) = B_n(0)$ pour tout entier $n \geq 2$.

3. (a) Démontrer que

$$\forall n \geq 1, \int_0^1 B_n(x) dx = 0 . \tag{10}$$

- (b) Calculer B_1, B_2, B_3 .

Les deux questions suivantes proposent une application (à l'ordre 2) des polynômes B_n .

4. Soit $h : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$, de classe \mathcal{C}^2 .

- (a) Démontrer que

$$\int_0^1 h(t) dt = \frac{h(0) + h(1)}{2} - \int_0^1 h'(t) B_1(t) dt .$$

(b) Montrer ensuite que

$$\int_0^1 h(t) dt = \frac{h(0) + h(1)}{2} + \frac{h'(0) - h'(1)}{12} + \frac{1}{2} \int_0^1 h''(t) B_2(t) dt .$$

5. Soit $\varphi : [1, \infty[\rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe C^1 , et N un entier non nul. On pose :

$$S_N = \sum_{n=1}^N \varphi(n) \quad \text{et} \quad I_N = \int_1^N \varphi(t) dt .$$

On désigne par π_2 la fonction 1-périodique valant $\frac{B_2}{2}$ sur $[0, 1[$.

(a) Montrer qu'on a, pour $n \in \mathbf{N}^*$:

$$\int_n^{n+1} \varphi(t) dt = \frac{\varphi(n) + \varphi(n+1)}{2} + \frac{\varphi'(n) - \varphi'(n+1)}{12} + \int_n^{n+1} \varphi''(t) \pi_2(t) dt .$$

(b) Démontrer que

$$S_N = I_N + \frac{1}{2} (\varphi(1) + \varphi(N)) + \frac{1}{12} (\varphi'(N) - \varphi'(1)) - \int_1^N \varphi''(t) \pi_2(t) dt .$$

(c) On suppose que $|\varphi''|$ est intégrable sur $[1, \infty[$ et que $\varphi(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 1} \varphi(n)$ et l'intégrale généralisée (impropre) $\int_1^\infty \varphi(t) dt$ sont de même nature.

(d) Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$?

B) Solution de l'équation (G) de Guichard

1. (Question préliminaire) : Soit $g(z) = \sum_{n=0}^\infty b_n z^n$, $g \in \mathcal{E}$. On veut résoudre l'équation $\Delta f = g$, avec $f \in \mathcal{E}$. Pourquoi est-il plausible de prendre

$$f = \sum_{n=0}^\infty b_n \frac{B_{n+1}}{n+1} ?$$

Qu'est-ce qui pourrait empêcher ce choix ?

La suite de cette partie est consacrée à une modification des polynômes de Bernoulli destinée à contourner cet obstacle.

2. On se propose d'abord de montrer par l'absurde le fait suivant :

$$\text{Il existe } c > 0 \text{ tel que : } \forall n \in \mathbf{N}, |w| = (2n+1)\pi \implies |e^w - 1| \geq c . \quad (11)$$

On suppose donc qu'une telle constante c n'existe pas.

i) Montrer qu'on peut trouver des suites $(n_j)_{j \geq 1}$ d'entiers positifs et $(w_j)_{j \geq 1}$ de complexes telles que $|w_j| = (2n_j + 1)\pi$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} e^{w_j} = 1$.

ii) Démontrer que l'on a : $\lim_{j \rightarrow \infty} \text{Re}(w_j) = 0$ et $\lim_{j \rightarrow \infty} (|\text{Im}(w_j)| - (2n_j + 1)\pi) = 0$.

iii) Montrer qu'il existe une suite (ε_j) , à valeurs dans $\{+1, -1\}$ et telle que la quantité $\delta_j = w_j - i\varepsilon_j(2n_j + 1)\pi$ tende vers 0 quand j tend vers $+\infty$.

iv) Conclure que (11) est vrai.

Dans ce qui suit, on pose, pour $n \in \mathbf{N}$ et $z \in \mathbf{C}$:

$$\rho_n = (2n+1)\pi; \quad A_n(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|w|=\rho_n} \frac{e^{zw}}{(e^w - 1) w^n} dw . \quad (12)$$

3. Démontrer que A_n est dans \mathcal{E} , et que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall z \in \mathbf{C}, \quad (\Delta A_n)(z) = nz^{n-1}.$$

4. Montrer qu'il existe des constantes a et b strictement positives telles que :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall z \in \mathbf{C}, |A_n(z)| \leq ae^{nb|z|}. \quad (13)$$

5. Soit $g \in \mathcal{E}$. Démontrer que l'équation de Guichard (G) : $f(z+1) - f(z) = g(z)$ possède au moins une solution dans \mathcal{E} . Décrire toutes les solutions de (G) .

– Partie IV : La version multiplicative (H) de l'équation de Guichard –

Soit $q \in \mathbf{C}^*$. On considère dans cette partie l'équation « aux q -différences »

$$(H) \quad f(qz) - f(z) = g(z), \quad \text{avec } g \in \mathcal{E}.$$

1. On suppose $|q| \neq 1$. Démontrer que (H) possède une solution $f \in \mathcal{E}$ si et seulement si $g(0) = 0$. Décrire alors l'ensemble de toutes les solutions.

Dans la suite, on suppose $|q| = 1$ et plus précisément $q = e^{2i\pi\theta}$, où $\theta \notin \mathbf{Q}$.

2. (**Question préliminaire**) : Pour $x \in \mathbf{R}$, on note $\|x\|$ la distance de x à l'entier le plus proche :

$$\|x\| = d(x, \mathbf{Z}) = \inf_{m \in \mathbf{Z}} |x - m| = \min_{m \in \mathbf{Z}} |x - m|.$$

Démontrer que $\|x\| \leq \frac{1}{2}$, et qu'on a la double inégalité :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 4\|x\| \leq |e^{2i\pi x} - 1| \leq 2\pi\|x\|.$$

Indication : on rappelle que $0 \leq u \leq \frac{\pi}{2} \implies \sin u \geq \frac{2}{\pi}u$.

3. On dit que θ est *lentement approchable* (par des rationnels) s'il existe $a > 0$ et $b > 1$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \|n\theta\| \geq ab^{-n}. \quad (14)$$

On dit que θ est *vite approchable* si $\theta \notin \mathbf{Q}$ et si θ n'est pas lentement approchable. On note A l'ensemble des irrationnels lentement approchables, et B l'ensemble des irrationnels vite approchables.

(a) Démontrer que $\sqrt{2} \in A$.

(b) Montrer qu'il existe une suite croissante d'entiers positifs $(p_k)_{k \geq 1}$ telle que l'on ait :

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p_k}} \in B.$$

Indication : on pourra définir les p_k de proche en proche afin d'avoir une croissance suffisamment rapide.

4. Soit θ un irrationnel, et $q = e^{2i\pi\theta}$.

(a) Montrer la double inégalité :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 4\|n\theta\| \leq |q^n - 1| \leq 2\pi\|n\theta\|.$$

(b) Montrer qu'on a équivalence entre :

i) θ est *lentement approchable*, autrement dit $\theta \in A$;

ii) pour toute $g \in \mathcal{E}$ avec $g(0) = 0$, l'équation (H) possède une solution $f \in \mathcal{E}$.

Indication : on pourra utiliser la question 3) de la partie II sur les multiplicateurs de \mathcal{E} .

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

OPTION MP

CONCOURS D'ADMISSION 1998

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

On se propose, dans ce problème, de démontrer quelques propriétés des sous-corps du corps des complexes \mathbb{C} . On rappelle que, si K est un sous-corps d'un corps K' , ce dernier est, en particulier, un K -espace vectoriel, ce qui donne un sens à la K -dimension de K' , notée $\dim_K(K')$.

Si K est un corps, on note $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans K . On dit qu'un polynôme de degré > 0 est *irréductible* s'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degrés > 0 . Un polynôme est *unitaire* si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

La question 1 est classique et servira surtout à fixer quelques notations ; la question 2 n'est pas utilisée dans la suite.

Première partie

On désigne par K un sous-corps de \mathbb{C} , par α un nombre complexe non nul, par $K[\alpha]$ le sous- K -espace vectoriel de \mathbb{C} engendré par les nombres α^n , $n = 0, 1, 2, \dots$, enfin par $I_K(\alpha)$ l'ensemble des polynômes de $K[X]$ annulés par α .

1.a) Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\dim_K(K[\alpha]) < +\infty$
- (ii) $I_K(\alpha) \neq \{0\}$.

Si elles sont remplies, on dit que α est *K -algébrique*, ce que l'on suppose dans la suite de cette question.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in K[X]$ tel que tout élément de $I_K(\alpha)$ soit un multiple de P , et que P est irréductible.

Ce polynôme P sera noté $P_K(\alpha)$ et appelé *polynôme K -minimal* de α .

c) Comparer le degré de $P_K(\alpha)$ et $\dim_K(K[\alpha])$.

d) Montrer que $K[\alpha]$ est un corps.

2. *Applications numériques.* On prend $K = \mathbb{Q}$.

a) Déterminer le polynôme \mathbb{Q} -minimal de $\alpha = \sqrt{2}$.

b) Déterminer le polynôme \mathbb{Q} -minimal de $\alpha = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.

Deuxième partie

On définit K et α comme dans la première partie. On suppose que α est K -algébrique et on pose $n = \dim_K(K[\alpha])$.

3. Montrer que, si P est un élément irréductible de $K[X]$, ses zéros dans \mathbb{C} sont tous simples.

4.a) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les zéros de $P_K(\alpha)$ dans \mathbb{C} . Montrer que, pour tout $i = 1, \dots, n$, il existe un unique morphisme de K -algèbres σ_i de $K[\alpha]$ dans \mathbb{C} tel que $\sigma_i(\alpha) = \lambda_i$.

b) Obtient-on de cette façon tous les morphismes de K -algèbres de $K[\alpha]$ dans \mathbb{C} ?

5. Montrer que si β est un élément de $K[\alpha]$ et si les $\sigma_i(\beta)$ sont deux à deux distincts, alors on a $K[\alpha] = K[\beta]$.

6. Etant donné un élément β de $K[\alpha]$, démontrer l'existence de deux éléments β_1 et β_2 de $K[\alpha]$ vérifiant $K[\beta_1] = K[\beta_2] = K[\alpha]$ et $\beta_1 + \beta_2 = \beta$.

[On pourra introduire, pour $i \neq j$, l'ensemble $E_{i,j}$ des éléments λ de K vérifiant

$$\sigma_i(\alpha + \lambda\beta) = \sigma_j(\alpha + \lambda\beta)]$$

Troisième partie

On fixe un nombre complexe \mathbb{Q} -algébrique non nul θ , et on pose $K = \mathbb{Q}[\theta]$, $n = \dim_{\mathbb{Q}}(K)$. On note σ_i , $i = 1, \dots, n$, les morphismes de \mathbb{Q} -algèbres de K dans \mathbb{C} .

Dans ce qui suit, α désigne un élément de K ; on appelle M_α l'endomorphisme du \mathbb{Q} -espace vectoriel K défini par $M_\alpha(\beta) = \alpha\beta$ pour tout $\beta \in K$, et Δ_α son polynôme caractéristique défini par $\lambda \mapsto \det(\lambda I - M_\alpha)$.

7. On pose $m = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}[\alpha])$, $d = \dim_{\mathbb{Q}[\alpha]}(K)$. Vérifier que, si (e_1, \dots, e_d) est une $\mathbb{Q}[\alpha]$ -base de K , les éléments $\alpha^p e_r$ où $p = 0, \dots, m-1$ et $r = 1, \dots, d$, forment une \mathbb{Q} -base de K .

8.a) Démontrer l'égalité $\Delta_{\alpha} = (P_{\mathbb{Q}}(\alpha))^d$.

[On pourra examiner d'abord le cas où $\mathbb{Q}[\alpha] = K$]

b) Démontrer l'égalité $\text{Tr}(M_{\alpha}) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\alpha)$.

9. Pour tout n -uple $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de K^n , on pose

$$D(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det \left(\text{Tr}(M_{\alpha_i \alpha_j}) \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Exprimer $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ en fonction de $\det \left(\sigma_i(\alpha_j) \right)_{i,j=1,\dots,n}$.

10. Soit $A = (A_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ une matrice à coefficients dans \mathbb{Q} , et soit $\beta_i = \sum_{p=1}^n A_{i,p} \alpha_p$.

Vérifier que

$$D(\beta_1, \dots, \beta_n) = (\det A)^2 D(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

11. Montrer que

$$D(1, \theta, \dots, \theta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)).$$

12. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $D(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, pour qu'un n -uple $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ soit une \mathbb{Q} -base de K .

13.a) Vérifier que le polynôme $X^3 - X - 1$ admet un unique zéro réel, que l'on note θ .

b) Déterminer le polynôme \mathbb{Q} -minimal de θ .

c) Calculer $D(1, \theta, \theta^2)$.

* *
*

Suites du Cauchy (complément du sujet BECEAS 2016 ep 1)

Une suite réelle (u_n) est dite de Cauchy si : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \varepsilon$.

1. Montrer qu'une telle suite est bornée.
2. Montrer que si (u_n) admet une suite extraite qui converge, alors la suite converge.
3. Montrer que (u_n) converge.

Partie II : Un cas aléatoire

On considère une suite $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, **indépendantes, centrées** (c'est-à-dire d'espérance nulle) et possédant un moment d'ordre 2.

On **admet** qu'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge si, et seulement si, on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 \quad (p \geq N \text{ et } n \geq N \Rightarrow |u_p - u_n| \leq \varepsilon).$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ et on note \mathcal{C} l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la suite $(S_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

A. La convergence presque sûre

1. On pose, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(\varepsilon) = \bigcup_{N=1}^{+\infty} \bigcap_{\substack{n \geq N \\ p \geq N}} [|S_n - S_p| \leq \varepsilon]$.

- (i) Justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'appartenance de $B(\varepsilon)$ à \mathcal{A} .
- (ii) Établir l'égalité : $\mathcal{C} = \bigcap_{\varepsilon > 0} B(\varepsilon)$.
- (iii) Comparer les ensembles $B(\varepsilon)$ et $B(\varepsilon')$ quand $0 < \varepsilon < \varepsilon'$.
- (iv) Établir l'égalité : $\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B(\frac{1}{k})$ et en déduire que $\mathcal{C} \in \mathcal{A}$.

2. a) Montrer que $\mathbf{P}(\mathcal{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout entier naturel k non nul,

$$\mathbf{P}\left(B\left(\frac{1}{k}\right)\right) = 1.$$

b) En déduire que $\mathbf{P}(\mathcal{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{N=1}^{+\infty} \bigcup_{\substack{n \geq N \\ p \geq N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right) = 0.$$

c) Montrer que $\mathbf{P}(\mathcal{C}) = 1$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{\substack{n \geq N \\ p \geq N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon]\right) = 0$.

B. Une inégalité

Quand une variable aléatoire U , définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, a une espérance on note $\mathbf{E}(U)$ sa valeur.

Soit $\varepsilon > 0$ et N un entier naturel non nul. On note T_N l'application qui, à chaque $\omega \in \Omega$, associe l'élément de $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ défini par

$$T_N(\omega) = \inf \left\{ p \in \mathbb{N}^*; p > N \quad \text{et} \quad |S_p(\omega) - S_N(\omega)| > \varepsilon \right\}$$

(avec la convention $\inf \emptyset = +\infty$).

1. **a)** Soit A un événement. Établir l'égalité : $\mathbf{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.
b) Déterminer, pour tout entier naturel N non nul et pour tout entier $p > N$, les valeurs des espérances $\mathbf{E}(S_p - S_N)$ et $\mathbf{E}((S_p - S_N)^2)$ en fonction des moments des Y_k .
2. Exprimer, pour tout entier $k > N$, l'ensemble $[T_N = k]$ à l'aide d'événements liés à différentes variables aléatoires S_i et en déduire que l'application T_N est une variable aléatoire.
3. **a)** Prouver, pour tout entier $k > N$, l'inégalité : $\varepsilon^2 \mathbf{P}([T_N = k]) \leq \mathbf{E}((S_k - S_N)^2 \mathbf{1}_{[T_N = k]})$.
b) Soit p un entier strictement plus grand que N .
Justifier, pour tout $k \in \llbracket N+1, p \rrbracket$, l'indépendance des variables $S_p - S_k$ et $(S_k - S_N) \mathbf{1}_{[T_N = k]}$.
c) En déduire, pour tout $(p, k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $N < k \leq p$, l'inégalité :

$$\varepsilon^2 \mathbf{P}([T_N = k]) \leq \mathbf{E}((S_p - S_N)^2 \mathbf{1}_{[T_N = k]}).$$

d) Prouver, pour tout entier $p > N$, l'inégalité :

$$\varepsilon^2 \sum_{k=N+1}^p \mathbf{P}([T_N = k]) \leq \sum_{i=N+1}^p \mathbf{E}(Y_i^2).$$

4. On suppose, de plus, que la série $\sum \mathbf{E}(Y_m^2)$ converge. Établir l'inégalité :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{p>N} [|S_p - S_N| > \varepsilon]\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^{+\infty} \mathbf{E}(Y_i^2).$$

C. Le résultat

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles discrètes, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, **indépendantes** et toutes de **même loi** que X_1 . On suppose que la loi de la variable X_1 est donnée par

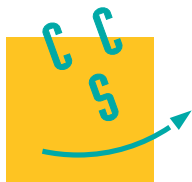
$$\mathbf{P}([X_1 = -1]) = \mathbf{P}([X_1 = 1]) = \frac{1}{2}.$$

On pose, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel N non nul, l'inclusion

$$\bigcup_{\substack{n \geq N \\ p \geq N}} [|S_p - S_n| > \varepsilon] \subset \bigcup_{p > N} [|S_p - S_N| > \frac{\varepsilon}{2}].$$

2. Montrer que, presque sûrement, la série $\sum \frac{X_n}{n}$ converge, c'est-à-dire montrer que l'ensemble des $\omega \in \Omega$ pour lesquels la série $\sum \frac{X_n(\omega)}{n}$ converge est de probabilité 1.



L'objet du problème est une étude de la vitesse de convergence de suites réelles. Dans la partie I, on définit la vitesse de convergence d'une suite à valeurs réelles et on en étudie quelques propriétés. Le but de la partie II est d'obtenir, dans différents cas issus des probabilités, des majorations de suites convergentes vers 0.

Les parties I et II sont indépendantes.

I Vitesse de convergence d'une suite réelle

Dans cette partie, on utilisera les notations suivantes :

- \mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites définies sur \mathbb{N} à valeurs réelles ;
- E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes telles que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N, u_k \neq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

- à toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartenant à E et de limite égale à ℓ , on associe la suite $(u_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ définie à partir d'un certain rang par

$$u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right|$$

- E^c désigne l'ensemble des éléments $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E telles que $(u_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente ;
- soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite appartenant à E^c et soit ℓ^c la limite de $(u_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est :
 - lente si $\ell^c = 1$,
 - géométrique de rapport ℓ^c si $\ell^c \in]0, 1[$,
 - rapide si $\ell^c = 0$;
- soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite appartenant à E et de limite égale à ℓ , et soit r un réel strictement supérieur à 1 ; on dit que la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers ℓ est d'ordre r si la suite définie à partir d'un certain rang par $\frac{u_{n+1} - \ell}{|u_n - \ell|^r}$ est bornée ;
- on rappelle qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire si $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n = u_{n_0}$.

I.A – Des résultats généraux

- I.A.1)** Montrer que l'ensemble E^c est non vide.
- I.A.2)** L'ensemble E^c est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
- I.A.3)** Montrer que E^c est strictement inclus dans E .
- I.A.4)** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E^c . Montrer que ℓ^c appartient au segment $[0, 1]$.

I.B – Exemples de calcul de vitesse de convergence

- I.B.1)** Soit k un entier strictement positif et q un réel appartenant à l'intervalle $]0, 1[$. Montrer que les suites $\left(\frac{1}{(n+1)^k}\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(n^k q^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ et $\left(\frac{1}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence.

- I.B.2)** On considère la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$.

a) Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $v_n = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

b) Montrer que la suite (v_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

I.B.3) On considère la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $I_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-x} dx$.

a) Montrer que la suite (I_n) est bien définie et appartient à E .

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que la suite (I_n) appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

I.B.4) Soit α un réel strictement supérieur à 1. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge vers un réel que l'on notera ℓ . On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $S_0 = 0$ et $\forall n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

a) Montrer que $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.

b) En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E^c et donner sa vitesse de convergence.

I.C – Vitesse de convergence d'ordre r d'une suite réelle

I.C.1) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de E dont la vitesse de convergence est d'ordre r , où r est un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est rapide.

I.C.2)

a) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ est un élément de E . On note s la limite de cette suite.

b) Montrer que pour tout entier naturel n , on a $\frac{1}{(n+1)!} \leq s - S_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$.

c) En déduire que la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est rapide.

d) Soit r un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers s n'est pas d'ordre r .

I.C.3) On considère I un intervalle réel de longueur strictement positive, f une application définie sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément ℓ de I et que f est dérivable en ℓ .

a) Montrer que $f(\ell) = \ell$.

b) Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire alors elle appartient à E^c . Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.

c) Montrer que si $|f'(\ell)| > 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

d) Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que la fonction f est de classe \mathcal{C}^r sur I et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. Montrer que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est d'ordre r si et seulement si $\forall k \in \{1, 2, \dots, r-1\}$, $f^{(k)}(\ell) = 0$.

II Autour de la loi faible des grands nombres

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires sont réelles discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour toute variable aléatoire X d'espérance finie, on note $\mathbb{E}(X)$ l'espérance de X .

Soit α un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle discrète X admet un moment exponentiel d'ordre α si la variable aléatoire $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie.

On pourra utiliser les deux propriétés suivantes sans avoir besoin de les démontrer. Soit n un entier strictement positif et soit X_1, \dots, X_n , n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes. Alors :

– si f est une application définie sur \mathbb{R} à valeurs réelles, alors $f(X_1), \dots, f(X_n)$ sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes ;

– si les n variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont d'espérance finie, alors la variable aléatoire $\prod_{i=1}^n X_i$ est d'espérance

$$\text{finie et } \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i).$$

II.A – Préliminaires

Les trois questions de ces préliminaires sont indépendantes.

On rappelle que la fonction cosinus hyperbolique, que l'on note \cosh , est définie, pour tout réel t , par

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

II.A.1)

a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique et celui de la fonction définie sur \mathbb{R} par $t \mapsto e^{t^2/2}$. On donnera le rayon de convergence de ces deux séries entières.

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, \cosh(t) \leq e^{t^2/2}$.

II.A.2) Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$. Montrer que $\forall \lambda \in [0, 1], e^{\lambda a + (1-\lambda)b} \leq \lambda e^a + (1-\lambda)e^b$.

II.A.3) Soit f une fonction à valeurs réelles, définie et continue sur \mathbb{R}^+ , et admettant une limite finie en $+\infty$.

a) Montrer que f est bornée sur \mathbb{R}^+ .

b) En déduire que la fonction g définie sur \mathbb{R}^+ par $\forall t \in \mathbb{R}^+, g(t) = te^{\gamma t}$ où γ est un réel strictement négatif, est bornée sur \mathbb{R}^+ .

II.B – Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel

II.B.1) Soit α un réel strictement positif et X une variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel d'ordre α . Montrer que la variable aléatoire $e^{\alpha X}$ admet une espérance finie.

II.B.2) Pour chacune des variables aléatoires réelles suivantes, déterminer les réels α strictement positifs tels que la variable aléatoire admette un moment exponentiel d'ordre α et calculer $\mathbb{E}(e^{\alpha X})$ dans ce cas.

a) X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif.

b) Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p , où p est un réel strictement compris entre 0 et 1.

c) Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p , où n est un entier strictement positif et p est un réel strictement compris entre 0 et 1.

II.C – Une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right)$

Dans les sous-parties II.C et II.D, on considère ε un réel strictement positif, X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\{x_p, p \in \mathbb{N}\}$, et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X .

Pour tout entier n strictement positif, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Dans cette sous-partie II.C, on suppose que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α où α est un réel strictement positif.

II.C.1)

a) Montrer que la variable X admet une espérance finie. On notera m l'espérance de X .

b) Appliquer, avec les justifications utiles, la loi faible des grands nombres pour la suite de variables aléatoires (X_k) .

II.C.2)

a) Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto \mathbb{E}(e^{tX})$ est définie et continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$.

b) Montrer que la fonction Ψ est dérivable sur l'intervalle $] -\alpha, \alpha[$ et déterminer sa fonction dérivée.

II.C.3) On considère l'application f_ε définie par

$$f_\varepsilon : \begin{cases} [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto e^{-(m+\varepsilon)t} \Psi(t) \end{cases}$$

a) Donner les valeurs de $f_\varepsilon(0)$ et $f'_\varepsilon(0)$.

b) En déduire qu'il existe un réel t_0 appartenant à l'intervalle $]0, \alpha[$ vérifiant $0 < f_\varepsilon(t_0) < 1$.

II.C.4) Montrer que pour tout réel t appartenant au segment $[-\alpha, \alpha]$ et tout n appartenant à \mathbb{N}^* , la variable aléatoire réelle e^{tS_n} admet une espérance égale à $(\Psi(t))^n$.

II.C.5)

a) Soit t un réel appartenant à l'intervalle $]0, \alpha]$ et soit n appartenant à \mathbb{N}^* .

Montrer que $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(e^{tS_n} \geq (e^{t(m+\varepsilon)})^n\right)$, puis que $\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) \leq (f_\varepsilon(t))^n$.

b) En déduire qu'il existe un réel r appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) \leq r^n$.

II.C.6) Montrer que la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right)$ est majorée par une suite de limite nulle et dont la vitesse de convergence est géométrique. Comparer ce résultat à la majoration obtenue avec la loi faible des grands nombres.

II.D – Une majoration de $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right)$

Dans cette sous-partie II.D, on suppose qu'il existe un réel c strictement positif tel que la variable aléatoire réelle discrète X vérifie $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leq c$.

II.D.1) Montrer que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α pour tout réel α strictement positif.

Les fonctions Ψ et f_ε des questions II.C.2 et II.C.3 sont ainsi définies sur \mathbb{R} .

II.D.2) On considère Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = \frac{1}{2} - \frac{X}{2c}$.

a) Vérifier que $X = -cY + (1 - Y)c$.

b) Montrer que $e^X \leq Ye^{-c} + (1 - Y)e^c$.

II.D.3)

a) Montrer que $\mathbb{E}(e^X) \leq \cosh(c)$.

b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \Psi(t) \leq \cosh(ct)$.

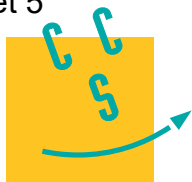
II.D.4) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, f_\varepsilon(t) \leq \exp(-t\varepsilon + \frac{1}{2}c^2t^2)$.

II.D.5) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp(-n \frac{\varepsilon^2}{2c^2})$.

II.D.6) Soit n un entier naturel non nul, p un élément de l'intervalle $]0, 1[$ et Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n, p) .

À l'aide de la question précédente, majorer $\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$ en fonction de n, p et ε .

• • • FIN • • •



Quelques applications de la formule de Stirling

Ce problème propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling et de l'appliquer à l'étude des marches aléatoires sur \mathbb{Z} .

I Intégrale de Gauss

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale dite de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Q 1. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est absolument convergente.

On étudie les fonctions f et g définies par

$$f(x) = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Q 2. Montrer que f est définie sur \mathbb{R} et qu'elle est paire. Calculer $f(0)$.

Q 3. Montrer que f est de classe C^1 sur \mathbb{R} et donner l'expression de $f'(x)$.

Q 4. Montrer que g est définie et de classe C^1 sur \mathbb{R} .

Q 5. À l'aide d'un changement de variable affine, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -2g'(x)g(x).$$

Q 6. Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\pi}{4} - g(x)^2.$$

Q 7. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, puis conclure que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

II Formule de Stirling

Dans cette partie, on propose de démontrer un raffinement de la formule de Stirling. On va prouver l'existence d'une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

II.A – Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

Q 8. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

Q 9. Donner une relation entre I_{n+1} et I_n , et en déduire que $I_n = n!$ pour tout entier naturel n .

II.B – Cette sous-partie est consacrée à la démonstration de la formule de Stirling classique

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (\text{II.1})$$

Q 10. Si n est un entier naturel non nul, déduire de la question précédente que

$$n! = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \int_{-\sqrt{n}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy.$$

On note $\mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}$ la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\sqrt{n}, +\infty[$ dont on rappelle qu'elle vaut 1 sur $[-\sqrt{n}, +\infty[$ et 0 sur $] -\infty, -\sqrt{n}[$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{R}$, $f_n(y) = \mathbb{1}_{[-\sqrt{n}, +\infty[}(y) \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-y\sqrt{n}}$.

Q 11. Démontrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} et, pour $y \in \mathbb{R}$, préciser $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y)$.

Pour $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$ on pose $q(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

Q 12. Justifier que q est prolongeable en une fonction continue sur $] -1, +\infty[$ que l'on convient de noter également q .

Q 13. Démontrer que, pour tout $x > -1$, $q(x) = \int_0^1 \frac{u}{1+ux} du$.

Q 14. En déduire que q est une fonction décroissante sur $] -1, +\infty[$ et démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, f_n(y) \leq (1+y)e^{-y} \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}^-, f_n(y) \leq e^{-y^2/2}.$$

Q 15. Déduire des questions précédentes la formule de Stirling (II.1).

II.C – Pour raffiner la formule de Stirling, on introduit les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par :

$$u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \quad v_n = \ln(u_n) \quad w_n = v_{n+1} - v_n.$$

Q 16. Vérifier que $w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et en déduire la nature de la série numérique $\sum w_n$.

II.C.1) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, telles que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$ et la série numérique $\sum b_n$ converge.

Q 17. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, (1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n.$$

Q 18. En déduire que la série numérique $\sum a_n$ converge et que les restes vérifient $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$.

II.C.2) Si n est un entier naturel non nul, on pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Q 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, établir que $\frac{1}{(n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2}$.

Q 20. En déduire un équivalent simple de R_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

II.C.3)

Q 21. Déduire des questions précédentes un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} w_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Q 22. En déduire qu'il existe une suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergente vers 0 telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{q_n}{n}\right).$$

III Étude de deux séries entières et application à une marche aléatoire

Un point se déplace sur un axe gradué. Au départ, il se trouve à l'origine et à chaque étape il se déplace suivant le résultat du lancer d'une pièce de monnaie qui n'est pas supposée équilibrée.

Le déplacement du point est formalisé de la manière suivante. Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes, et telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = q, \quad \text{où } p \in]0, 1[\text{ et } q = 1 - p.$$

Les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ représentent les résultats des lancers successifs de la pièce de monnaie.

L'abscisse S_n du point à l'issue du n -ième lancer est alors définie par :

$$\begin{cases} S_0 = 0, \\ S_n = \sum_{k=1}^n X_k \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

On admet que, si $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi alors, pour tout $n \geq 2$, quel que soit l'entier k compris entre 1 et $n-1$, les variables aléatoires $\sum_{i=1}^{n-k} Y_i$ et $\sum_{i=k+1}^n Y_i$ suivent la même loi.

On se propose de calculer la probabilité que le point ne revienne jamais à l'origine.

On remarque que le point ne peut revenir à l'origine (i.e. $S_k = 0$) qu'après un nombre pair de lancers de la pièce de monnaie (i.e. $k = 2n$).

On introduit alors les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = 1, b_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0) \quad \text{et} \quad b_n = \mathbb{P}([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} = 0])$$

et les séries entières

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n} \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

III.A –

Q 23. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}(X_1 + 1)$? En utilisant une loi binomiale, calculer l'espérance et la variance de la variable S_n .

Q 24. Écrire une fonction Python qui prend en argument le nombre n de lancers et renvoie le nombre de retours au point à l'origine.

On pourra utiliser la fonction Python `random.random()` qui renvoie un nombre flottant pseudo-aléatoire dans l'intervalle $[0, 1[$.

Q 25. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n$.

Q 26. En déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^{2n}$.

Q 27. Pour quelles valeurs de p l'expression $A(x)$ est-elle définie en $x = 1$?

Q 28. En utilisant le développement en série entière en 0 de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ déterminer une expression de $A(x)$.

III.B –

Q 29. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en décomposant l'événement $\{S_{2n} = 0\}$ selon l'indice de 1er retour du point à l'origine, établir la relation $a_n = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}$.

Q 30. En déduire une relation entre $A(x)$ et $B(x)$ et préciser pour quelles valeurs de x elle est valable.

~~Q 31. Conclure que $B(x) = 1 - \sqrt{1 - 4pqx^2}$ pour x dans un intervalle à préciser.~~

~~Q 32. Pour quelles valeurs de p l'expression obtenue à la question précédente pour $B(x)$ est-elle définie en $x = 1$? Qu'en est-il de l'expression qui définit $B(x)$ comme somme d'une série entière ?~~

~~III.C -~~

~~Q 33. En déduire que la probabilité de l'évènement « le point ne revient jamais en 0 » est égale à $|p - q|$.~~

IV Loi de l'arcsinus

Dans cette partie, on reprend les notations de la partie III et on se place dans le cas particulier $p = q = 1/2$. Dans ce cas tous les « chemins » de la marche aléatoire sont équiprobables : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 1\}^n, \quad \mathbb{P}([S_1 = x_1] \cap [S_2 = x_1 + x_2] \cap \dots \cap [S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n]) = \frac{1}{2^n}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on s'intéresse désormais au moment de la *dernière visite* en 0 de la marche aléatoire au cours des $2n$ premiers pas, c'est-à-dire à la variable aléatoire T_n définie par

$$T_n = \max\{0 \leq k \leq 2n \mid S_k = 0\}.$$

On admet dans la suite que T_n est une variable aléatoire discrète, définie sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Si x est un réel, on note $[x]$ sa partie entière.

IV.A - Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *chemin de longueur n* toute ligne polygonale reliant les points $(0, S_0)$, $(1, S_1)$, ..., (n, S_n) .

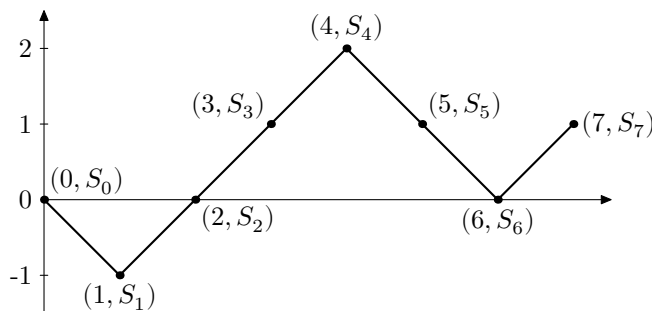


Figure 1 Un chemin de longueur 7

Dans cette sous-partie IV.A, n , x et y sont des entiers naturels tels que $n \neq 0$, $x \neq 0$ et $y \neq 0$.

IV.A.1) On note $N_{n,x}$ le nombre de chemins reliant le point $(0, 0)$ au point (n, x) .

Q 34. Vérifier que si $x \in \llbracket -n, n \rrbracket$ et $n - x$ est un entier pair alors

$$N_{n,x} = \binom{n}{a} \quad \text{où} \quad a = \frac{n+x}{2}$$

et que $N_{n,x} = 0$ dans le cas contraire.

Q 35. En déduire $\mathbb{P}(S_n = x)$.

Q 36. Retrouver ce résultat à l'aide d'une variable aléatoire bien choisie.

IV.A.2) Principe de réflexion

Q 37. Montrer que le nombre de chemins reliant $(0, x)$ à (n, y) , tout en passant au moins une fois par un point d'ordonnée 0, est égal au nombre de chemins quelconques reliant $(0, -x)$ à (n, y) .

IV.A.3)

Q 38. En utilisant le principe de réflexion, montrer que le nombre de chemins reliant $(1, 1)$ à (n, x) sans jamais rencontrer l'axe des abscisses est égal à

$$N_{n-1,x-1} - N_{n-1,x+1}.$$

Q 39. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} = 2k]) = \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}(S_{2n-1} = 2k - 1) - \mathbb{P}(S_{2n-1} = 2k + 1) \right).$$

Q 40. En remarquant que $[S_{2n} > 0] = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [S_{2n} = 2k]$, démontrer que

$$\mathbb{P}([S_1 > 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} > 0] \cap [S_{2n} > 0]) = \frac{1}{2} \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$$

puis que

$$\mathbb{P}([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-1} \neq 0] \cap [S_{2n} \neq 0]) = \mathbb{P}(S_{2n} = 0).$$

IV.B – Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Q 41. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \mathbb{P}(S_{2k} = 0) \times \mathbb{P}([S_1 \neq 0] \cap \dots \cap [S_{2n-2k} \neq 0]).$$

Q 42. En déduire que pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

$$\mathbb{P}(T_{2n} = 2k) = \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n}.$$

IV.C – Dans cette sous-partie IV.C α et β sont deux réels tels que $0 < \alpha < \beta < 1$.

Q 43. On définit la fonction f par $f(t) = \begin{cases} f(\alpha) & \text{si } t \in [0, \alpha[\\ \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} & \text{si } t \in [\alpha, \beta] \\ f(\beta) & \text{si } t \in]\beta, 1]. \end{cases}$

En utilisant des sommes de Riemann adaptées à f , montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt.$$

Q 44. À l'aide de la partie II justifier qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers 1 telle que

$$\binom{2n}{n} = \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}} \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{8n} \right).$$

Q 45. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{4^n} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=\lfloor n\alpha \rfloor + 1}^{\lfloor n\beta \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \right) = 0.$$

Q 46. Montrer alors que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta] \right) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin(\sqrt{\beta}) - \arcsin(\sqrt{\alpha}) \right).$$

Ce résultat a des conséquences assez surprenantes au premier abord. Par exemple $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{T_{2n}}{2n} \leq \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$ s'interprète ainsi : si deux personnes parient chacune un euro chaque jour de l'année à un jeu de hasard équilibré, alors avec la probabilité 1/2, un des deux joueurs sera en tête du premier juillet au 31 décembre.

• • • FIN • • •

Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{Z} . On pourra noter

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de \mathbf{N} et $x_n \in \mathbf{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 1 (Dispersion d'ordre α) On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. On dit que X **vérifie la condition** (\mathcal{D}_α) - dite de dispersion d'ordre α - lorsque, quand n tend vers $+\infty$,

$$\mathbf{P}(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (1)$$

Définition 2 (Variables aléatoires symétriques) On dit que X est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que X , autrement dit lorsque

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbf{P}(X = x) = \mathbf{P}(X = -x). \quad (2)$$

On admet le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

Théorème 1 *Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E , ainsi qu'une application $u : E \rightarrow F$, si X et Y suivent la même loi alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.*

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition (\mathcal{D}_α) . On *admet* que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \dots + X_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

On pose, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

appelée n -ième moyenne empirique des variables X_k . L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n .

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

- 1 ▷ Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.
- 2 ▷ Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $P(|X| \leq M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

- 3 ▷ Soit X une variable aléatoire entière vérifiant (\mathcal{D}_α) . Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.
- 4 ▷ Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $\mathbf{E}(f(X)) = 0$.
- 5 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y) , démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz} du.$$

- 6 ▷ Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe \mathcal{C}^∞ . Donner une expression simple de sa dérivée n -ième pour tout $n \geq 1$.
- 7 ▷ Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1 - t \leq |1 - tz|$, et plus précisément encore que $1 - t < |1 - tz|$.
- 8 ▷ En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1} (1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

9 ▷ En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10 ▷ Montrer que la fonction

$$\gamma : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (t, u) & \longmapsto |1 + ue^{it}| \end{cases}$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0, \pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1], \quad |1 + ue^{it}| \geq m_a.$$

11 ▷ Montrer que la fonction

$$F : t \in]-\pi, \pi[\longmapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1 + ue^{it}} du$$

est de classe \mathcal{C}^1 et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12 ▷ Montrer que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2},$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi[$.

13 ▷ Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X . On pose

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbf{R} & \longrightarrow \mathbf{R} \\ t & \longmapsto \mathbf{E}(\cos(tX)), \end{cases}$$

appelée fonction caractéristique de X .

14 ▷ Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbf{R}, |\Phi_X(t)| \leq 1$.

15 ▷ En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition (\mathcal{D}_α) . Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$R_n := \mathbf{P}(|X| \geq n).$$

16 ▷ On fixe un réel $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

17 ▷ Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{int} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln t) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi \alpha}{2} + o(1).$$

18 ▷ Conclure que, quand t tend vers 0^+ ,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi \alpha}{2} t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19 ▷ Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \Phi_Y(t).$$

20 ▷ Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable M_n est symétrique et

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(t/n) \right)^n.$$

21 ▷ En déduire que pour tout réel t ,

$$\Phi_{M_n}(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \exp\left(-\frac{\pi\alpha |t|}{2}\right).$$

22 ▷ La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur \mathbf{R} ?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a, b]$ de \mathbf{R} ,

$$\mathbf{P}(a \leq M_n \leq b) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{du}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$

FIN DU PROBLÈME

Racine carrée d'endomorphisme

Pour toute fonction f continue intégrable sur \mathbb{R} , on considère \widehat{f} , dite *transformée de Fourier de f* , définie sur \mathbb{R} par :

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ixy} dx.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on sait que \widehat{f} est continue et on *admet* que si, de plus, \widehat{f} est intégrable alors l'égalité suivante est vérifiée pour tout réel x :

$$2\pi f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)e^{ixy} dy.$$

On note \mathcal{S} , l'ensemble, appelé espace de Schwartz, des fonctions f définies sur \mathbb{R} à valeurs complexes, de classe C^∞ sur \mathbb{R} et telles que pour tous les entiers $j \geq 0$ et $k \geq 0$, la fonction $f^{(j)}$ soit négligeable devant la fonction ($y \mapsto (1 + |y|^k)^{-1}$) quand $|y|$ tend vers l'infini : pour tout j et tout k entiers,

$$|f^{(j)}(y)|(1 + |y|^k) \text{ tend vers } 0 \text{ quand } |y| \text{ tend vers l'infini.}$$

On admet que la transformation de Fourier est une bijection de \mathcal{S} dans lui-même.

Soient I un intervalle de \mathbb{R} et E un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions définies et indéfiniment dérivables sur \mathbb{R} , à valeurs réelles ou complexes. On appelle dérivation dans E l'application d qui à tout f de E associe sa dérivée f' . On suppose que d est un endomorphisme de l'espace vectoriel E . L'objet du problème est de chercher s'il existe un endomorphisme δ de E tel que $\delta \circ \delta = d$: on dira alors que δ est une racine carrée de d .

~~I. Préliminaires~~

~~On suppose, dans cette partie seulement, que δ existe.~~

- ~~1) Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre le noyau de d et le noyau de δ ?~~
- ~~2) Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre l'image de d et l'image de δ ?~~
- ~~3) Montrer que δ est un automorphisme de E si et seulement si d est un automorphisme de E .~~
- ~~4) Montrer que tout sous-espace propre de d est stable par δ .~~

II. Dimension finie

On désigne par E le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions définies sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, dont une base est $(\cos x, \sin x)$.

5) Montrer que la dérivation dans E est un automorphisme d de E .

6) Écrire la matrice D de d dans la base $(\cos x, \sin x)$. Montrer que D est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

7) Qu'est-ce que cela implique pour δ ?

8) Pour diagonaliser D , prenons la matrice de passage

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}.$$

Quelles sont les valeurs possibles de la matrice Δ de δ dans cette base?

9) Déterminer, par leur matrice dans la base $(\cos x, \sin x)$, tous les automorphismes du \mathbb{R} -espace vectoriel E dont le carré est égal à d .

III. Espace de Schwartz

Désormais, on considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{S}$ défini dans l'introduction. Dans ce qui suit, on considère un élément donné f de E . Pour tout nombre réel y , on note

$$r(y) = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{si } y \geq 0 \\ i\sqrt{-y} & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

On définit la fonction $\delta(f)$ par :

$$\delta(f)(x) = \frac{1+i}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} r(y) \widehat{f}(y) e^{ixy} dy.$$

10) À quelle condition sur le réel λ , la fonction φ_λ définie sur \mathbb{R} par :

$$\varphi_\lambda(x) = \exp(-\lambda x^2),$$

appartient-elle à E ?

A faire après III

11) Soit j un entier naturel. Donner l'expression de la transformée de Fourier, $\widehat{f^{(j)}}$, de la dérivée j -ième de f en fonction de la transformée de Fourier de f .

12) Montrer que $\delta(f)$ est définie et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} .

13) Désormais, on suppose de plus que f est nulle en-dehors d'un segment $[-A, A]$, où A est un réel strictement positif, et que f est d'intégrale nulle sur \mathbb{R} , autrement dit telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$.

Montrer que la transformée de Fourier de f est développable en série entière au voisinage de l'origine, et donner une expression des coefficients $(a_n, n \geq 0)$ tels que

$$\widehat{f}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n.$$

14) Montrer qu'il existe une fonction u définie et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} telle que, pour tout réel y , on ait $\widehat{f}(y) = y u(y)$.

15) Démontrer que pour tout réel non nul x , l'identité suivante est satisfaite :

$$\int_0^{+\infty} y^{3/2} u(y) e^{ixy} dy = -\frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3u(y)}{4\sqrt{y}} + 3\sqrt{y}u'(y) + y^{3/2}u''(y) \right) e^{ixy} dy. \quad (1)$$

16) Montrer que $\delta(f)$ est intégrable sur \mathbb{R} .

17) Pour $f \in \mathcal{S}$, on note \widetilde{f} la fonction définie sur \mathbb{R} , par $\widetilde{f}(x) = f(-x)$. Comparer $\widehat{\widetilde{f}}$ et $\widetilde{\widehat{f}}$.

18) Montrer que $r\widehat{\delta(f)}$ est intégrable sur \mathbb{R} .

19) Montrer que $\delta^2 = d$.

20) Montrer que si f n'est pas la fonction nulle, il n'existe aucun segment en dehors duquel $\delta(f)$ est nulle.

FIN DU PROBLÈME

A 2003 Math PC 1

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES.
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE
L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE, DES MINES
DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE.
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Filière TSI).

CONCOURS D'ADMISSION 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
PREMIÈRE ÉPREUVE
Filière PC

(Durée de l'épreuve : 3 heures)

(L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit).

Sujet mis à la disposition des concours : Cycle International, ENSTIM, INT,
TPE-EIVP.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première
page de la copie :
MATHÉMATIQUES 1-Filière PC.

Cet énoncé comporte 4 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur
d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les
raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'objet de ce problème est d'introduire suivant une méthode originale la fonc-
tion Γ et de déterminer, à l'aide de cette fonction, une expression de l'intégrale
 I suivante :

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\ln(\tan x)) \, dx.$$

Première partie

Il est admis que, si la fonction réelle f , définie sur un intervalle I de la
droite réelle \mathbb{R} , est convexe, pour toute suite croissante de trois réels x_1, x_2, x_3 ,
($x_1 < x_2 < x_3$) appartenant à l'intervalle I , les valeurs prises par cette fonction
en ces points vérifient la relation suivante :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

Soit F une fonction inconnue, définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$, prenant des valeurs strictement positives ($F(x) > 0$), qui vérifie les propriétés suivantes :

- i. pour tout réel x strictement positif :

$$F(x+1) = x F(x).$$

- ii. La fonction $x \mapsto \ln F(x)$ est une fonction convexe.

- iii. La fonction F prend la valeur 1 en 1 :

$$F(1) = 1.$$

Encadrement de $F(n+x)$ et de $F(x)$:

Dans les quatre premières questions, x est un réel appartenant à l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2 ($n \geq 2$).

1. Démontrer les inégalités suivantes :

$$\ln F(n) - \ln F(n-1) \leq \frac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{x} \leq \ln F(n+1) - \ln F(n).$$

2. Calculer $F(n)$. En déduire un encadrement de $F(n+x)$ à l'aide des deux expressions $(n-1)^x \cdot (n-1)!$ et $n^x \cdot (n-1)!$.

3. Établir la relation qui lie, pour tout entier p supérieur ou égal à 1 ($p \geq 1$), $F(p+x)$ à $F(x)$.

4. En déduire les inégalités suivantes :

$$\frac{n}{x+n} F(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \leq F(x).$$

Unicité de la fonction F :

Dans les questions 5 et 6, il est admis qu'il existe une fonction F , positive ($F(x) > 0$), définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$, vérifiant les hypothèses **i**, **ii** et **iii**.

Étant donné un entier strictement positif n , soit u_n la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par la relation suivante :

$$u_n(x) = \frac{n^x \cdot n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

5. Déterminer, en supposant le réel x appartenir à l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$, la limite de la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque l'entier n croît indéfiniment.

6. En déduire la limite de la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque l'entier n croît indéfiniment, pour tout réel x strictement positif.

7. En déduire qu'il existe au plus une fonction F définie sur la demi-droite $]0, \infty[$, strictement positive, vérifiant les propriétés **i**, **ii** et **iii**.

Fonction Γ :

Soit k la fonction définie sur le quart de plan $]0, \infty[\times]0, \infty[$ par la relation suivante :

$$k(x, t) = t^{x-1} \cdot e^{-t}.$$

8. Étudier, pour un réel x donné, l'intégrabilité de la fonction : $t \mapsto t^{x-1} \cdot e^{-t}$ sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$.

Soit Γ la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par la relation suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt.$$

9. Établir que cette fonction Γ est strictement positive ($\Gamma(x) > 0$).

10. Établir que cette fonction Γ est deux fois continûment dérivable sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$. Donner les expressions de ces dérivées. Préciser l'expression de la dérivée de la fonction Γ pour $x = 1$, $\Gamma'(1)$, au moyen d'une intégrale.

Existence de la fonction F :

11. Démontrer que la fonction Γ est la fonction F étudiée dans les questions précédentes.

Il est admis, dans la suite, que la constante d'Euler γ est définie par la relation suivante :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

Valeur de $\Gamma(1)$:

Soit $(g_n)_{n \geq 1}$ la suite des fonctions définies, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par la relation suivante :

$$g_n(x) = x \ln n - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right).$$

12. Déterminer, à l'aide des résultats obtenus précédemment, la limite de $g_n(x)$ lorsque l'entier n croît vers l'infini et que le réel x appartient à la demi-droite ouverte $]0, \infty[$.

Soit $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions définies, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$), sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par les relations suivantes :

$$v_1(x) = g_1(x) \quad ; \quad \text{pour tout entier } n \text{ supérieur ou égal à } 2, \quad v_n(x) = g_n(x) - g_{n-1}(x).$$

13. Il est admis que chaque fonction v_n , $n \in \mathbb{N}^*$, est continûment dérivable ; démontrer que la série des fonctions dérivées, de terme général $v_n'(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente pour tout x strictement positif puis uniformément convergente sur tout segment $[a, b]$ contenu dans la demi-droite ouverte $]0, \infty[$.

14. En déduire la limite de la suite des fonctions dérivées g_n' .

15. Que vaut $\Gamma(1)$ au moyen de la constante d'Euler γ ?

Seconde partie

Soit s un réel donné strictement positif ($s > 0$).

Fonction L :

16. Étudier la convergence de la série de terme général w_n , $n \in \mathbb{N}$, défini par la relation suivante :

$$w_n = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

Soit L la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$ par la relation :

$$L(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}.$$

17. Démontrer que la série entière de terme général

$$\frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

est uniformément convergente sur le segment $[0, 1]$. Soit $\varphi(x)$ la somme de cette série :

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Déterminer la fonction φ définie sur le segment $[0, 1]$. En déduire $L(1)$.

18. Soit h_s la fonction définie sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$, par la relation suivante :

$$h_s(x) = \frac{\ln x}{x^s}.$$

Étudier les variations de la fonction h_s sur son ensemble de définition. Soit x_s l'abscisse du maximum de cette fonction. Préciser les variations de la fonction $s \mapsto x_s$.

19. Démontrer que la fonction L est continûment dérivable sur la demi-droite ouverte $]0, \infty[$. Exprimer la valeur prise en 1 par la fonction dérivée L' , $L'(1)$, au moyen de la somme d'une série.

Expression du produit $L(s) \cdot \Gamma(s)$:

20. Calculer, pour tout entier n strictement positif ($n \in \mathbb{N}^*$), au moyen d'une valeur prise par la fonction Γ , l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^\infty e^{-n t} t^{s-1} dt.$$

21. Démontrer la relation :

$$L(s) \cdot \Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1 + e^{-2t}} t^{s-1} dt.$$

Calcul de l'intégrale I :

Il est admis que la fonction $s \mapsto L(s) \cdot \Gamma(s)$ est continûment dérivable et que sa dérivée est donnée par la relation suivante :

$$\frac{d}{ds} (L(s) \cdot \Gamma(s)) = \int_0^\infty \frac{e^{-t} \ln t}{1 + e^{-2t}} t^{s-1} dt.$$

22. Après avoir donné au réel s la valeur 1, effectuer le changement de variable $u = e^t$ dans l'intégrale. Effectuer un nouveau changement de variables pour obtenir l'intégrale I définie dans le préambule :

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\ln(\tan x)) dx.$$

En déduire une expression de l'intégrale I à l'aide de la constante d'Euler et de la somme d'une série.

Remarque : un calcul de $L'(1)$ permet d'obtenir le résultat :

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\ln(\tan x)) dx = \frac{\pi}{2} \ln \left(\sqrt{2\pi} \frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \right).$$

FIN DU PROBLÈME

Matrices de Hurwitz

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- \mathbf{K} désigne \mathbf{R} ou \mathbf{C} .
- $M_n(\mathbf{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans \mathbf{K} et pour une matrice M de $M_n(\mathbf{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
- $\mathbf{K}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbf{K} , $\mathbf{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .
- $\text{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \text{Re}(z) < 0\}$.
- On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de \mathbf{R}^n et $\|\cdot\|$ sa norme associée :

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

- On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbf{K}^n

avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de \mathbf{K}^n .

- Pour $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de \mathbf{C}^n , on notera son conjugué $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, sa partie réelle $\text{Re}(X) = \frac{X + \bar{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\text{Im}(X) = \frac{X - \bar{X}}{2i}$.
- Si $M \in M_n(\mathbf{R})$, l'endomorphisme de \mathbf{R}^n (respectivement \mathbf{C}^n) canoniquement associé à M est

$$\begin{array}{l} \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n \\ X \mapsto MX \end{array} \quad \left(\text{respectivement} \quad \begin{array}{l} \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n \\ X \mapsto MX \end{array} \right)$$

Rappels

- 1) Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{K})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{K})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
Deux matrices A et B de $M_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $M_n(\mathbf{C})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbf{C})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
- 2) Soient R et S deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$. R est un diviseur de S s'il existe un polynôme Q de $\mathbf{K}[X]$ tel que $S = QR$.

Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Objectifs

- Il s'agit d'établir pour un système différentiel linéaire d'ordre 1, une équivalence entre des propriétés qualitatives des solutions et des conditions portant sur la nature de la matrice associée à ce système et de son polynôme caractéristique.
- La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
- La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.
- La partie 3 est consacrée à l'étude des polynômes de Hurwitz.
- Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.
- La partie 4, sur l'équivalence annoncée pour les systèmes différentiels, utilise des résultats des parties 1 et 3.

1 Matrices semi-simples

Définition 1 Une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ est dite **semi-simple** si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbf{C})$.

Définition 2 Une matrice M de $M_n(\mathbf{R})$ est dite **presque diagonale** s'il existe :

- i)* deux entiers naturels p et q ;
- ii)* q réels a_1, a_2, \dots, a_q ;
- iii)* q réels non nuls b_1, b_2, \dots, b_q ;
- iv)* une matrice D diagonale de $M_p(\mathbf{R})$ tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2, b_2) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

où, $\forall j \in \llbracket 1 ; q \rrbracket : M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M . De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

Soit A la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

1 ▷ La matrice A est-elle semi-simple ?

Soit B la matrice de $M_2(\mathbf{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

2 ▷ Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $M_2(\mathbf{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B , introduire les vecteurs $W_1 = \operatorname{Re}(V)$ et $W_2 = \operatorname{Im}(V)$.

Soit M une matrice de $M_2(\mathbf{R})$.

On suppose dans la question 3) seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\bar{\mu} = a - ib$ avec $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{R}^*$.

3 ▷ Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $M_2(\mathbf{R})$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

4 ▷ Démontrer que M est semi-simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- i) M est diagonalisable dans $M_2(\mathbf{R})$;
- ii) χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

5 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.

6 ▷ Soit N une matrice de $M_n(\mathbf{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbf{C}[X]$, en précisant dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $M_n(\mathbf{R})$ à une matrice presque diagonale.

2 Une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$

Dans cette partie, E désigne un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E .

On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . Soit F un sous-espace vectoriel de E , différent de $\{0_E\}$ et de E .

- 7 ▷ Démontrer qu'il existe $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe.

On note alors

$$\mathcal{A} = \left\{ H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\} \right\}$$

et

$$\mathcal{L} = \left\{ p \in \mathbf{N}^* \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H) \right\}.$$

- 8 ▷ Démontrer que \mathcal{L} admet un plus grand élément que l'on nommera r .
- 9 ▷ Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E , stable par u .
- 10 ▷ On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E , stable par u . Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbf{C})$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n - 1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u .

3 Polynômes de Hurwitz

Définition 3 Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit polynôme de Hurwitz si ses racines dans \mathbf{C} appartiennent à $\text{Re}^- = \{z \in \mathbf{C} / \text{Re}(z) < 0\}$.

Définition 4 Un polynôme $P \in \mathbf{R}[X]$ est dit à coefficients strictement positifs s'il est non nul et si, d désignant son degré, $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ où, pour tout $k \in [0, d]$, $a_k > 0$

- 11 ▷ Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Démontrer que si α est une racine d'un polynôme P de $\mathbf{R}[X]$, à coefficients strictement positifs, alors $\alpha < 0$.
- 12 ▷ Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.
- 13 ▷ Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbf{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbf{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^n (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,l) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2} (X - z_k - z_l)$$

- 14 ▷ On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbf{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme de Hurwitz ?
- 15 ▷ Soient A et B deux polynômes de $\mathbf{R}[X]$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.
- 16 ▷ Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbf{R}[X]$, alors on a l'équivalence : P est un polynôme de Hurwitz si et seulement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

4 Système différentiel de matrice associée semi-simple

Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$. On note (S) le système différentiel :

$$(S) \quad X' = MX$$

où X est une application de la variable t de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^n , dérivable sur \mathbf{R} .

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que M est semblable à T dans $M_n(\mathbf{R})$ et on note (S^*) le système différentiel

$$(S^*) \quad Y' = TY$$

- 17 ▷ Démontrer que les coordonnées d'une solution X de (S) sont combinaisons linéaires des coordonnées d'une solution Y de (S^*) .

Dans les deux questions suivantes 18) et 19), on suppose $n = 2$, on note alors $X = (x; y)$ où x et y sont deux fonctions dérivables de \mathbf{R} dans \mathbf{R} et on pose $z = x + iy$.

On suppose qu'il existe a et b réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

- 18 ▷ Démontrer que X est solution de (S) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à déterminer. En déduire une expression, en fonction de t , des coordonnées des solutions de (S) .

Résoudre le système $X' = BX$ où B est la matrice de la question 2).

- 19 ▷ Soit $M \in M_2(\mathbf{R})$ semi-simple. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les parties réelles et imaginaires des valeurs propres de M , pour que toute solution de (S) ait chacune de ses coordonnées qui tende vers 0 en $+\infty$.

On reprend le cas général $n \geq 2$ et on considère les assertions suivantes :

A₁ χ_M est un polynôme de Hurwitz ;

A₂ Les solutions de (S) tendent vers $0_{\mathbf{R}^n}$ quand t tend vers $+\infty$;

A₃ Il existe $\alpha > 0$, il existe $k > 0$ tels que pour toute solution Φ de (S) ,

$$\forall t \geq 0 \quad : \quad \|\Phi(t)\| \leq ke^{-\alpha t} \|\Phi(0)\|.$$

Soit $T \in M_n(\mathbf{R})$. On suppose que T vérifie la condition suivante :

$$(C) \quad \exists \beta \in \mathbf{R}_+^*, \forall X \in \mathbf{R}^n : \langle TX, X \rangle \leq -\beta \|X\|^2.$$

20 \triangleright Démontrer que A_3 est vraie avec $k = 1$ pour toute solution Φ de (S^*) .

Indication : on pourra introduire la fonction $t \mapsto e^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2$.

21 \triangleright On suppose que $M \in M_n(\mathbf{R})$ est semi-simple. Démontrer que les assertions A_1 , A_2 et A_3 sont équivalentes.

Indication : on pourra commencer par A_3 implique A_2 .

FIN DU PROBLÈME

**Objectifs**

Ce problème étudie la dérivation des sommes de séries de fonctions $\sum f_n$ de deux façons différentes : un point de vue déterministe et un point de vue probabiliste. Pour conclure à une formule du type $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(K)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(K)}$ avec K entier supérieur ou égal à 2, les théorèmes usuels contiennent généralement au moins une hypothèse sur les dérivées intermédiaires $f'_n, \dots, f_n^{(K-1)}$ (par exemple de convergence simple sur tout l'intervalle ou même en un seul point). Le sujet montre que l'on peut affaiblir l'hypothèse de contrôle des dérivées intermédiaires par une hypothèse de convergence de séries numériques de la forme $\sum f_n(x)$ où x parcourt un ensemble fini. Cette dernière hypothèse sera de nouveau affaiblie dans la partie probabiliste consacrée à la dérivation de séries aléatoires de fonctions.

Le sujet est divisé en quatre parties :

- la partie I étudie une inégalité, qualifiée d'inégalité d'interpolation, qui permet de contrôler les dérivées intermédiaires d'une fonction de classe \mathcal{C}^K ;
- la partie II utilise la partie I pour démontrer un résultat de transfert du caractère \mathcal{C}^K à une somme de série de fonctions ;
- la partie III, qui est indépendante des parties I et II, étudie la convergence des séries aléatoires numériques de la forme $\sum X_n a_n$, où (X_n) est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de Rademacher et (a_n) une suite réelle telle que la série $\sum a_n^2$ converge ;
- la partie IV utilise les résultats des parties précédentes pour donner une application au caractère \mathcal{C}^K de la somme d'une série aléatoire de fonctions de la forme $\sum X_n f_n$.

Notations

- Pour tous entiers i et j vérifiant $i \leq j$, la notation $\llbracket i, j \rrbracket$ désigne l'intervalle d'entiers $[i, j] \cap \mathbb{N}$.
- La lettre K désigne systématiquement un entier naturel non nul.
- Le symbole $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ désigne le \mathbb{R} -espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à $K-1$ à coefficients réels.
- Pour tout intervalle I , on note $\mathcal{C}^K(I)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^K . Pour tous $f \in \mathcal{C}^K(I)$ et $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$, on note $f^{(k)}$ la dérivée d'ordre k (et donc $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$).
- Dans le cas particulier $I = [0, 1]$, pour toute fonction bornée $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$.

I Inégalités d'interpolation des dérivées

Soit K réels distincts $x_1 < \dots < x_K$ de l'intervalle $[0, 1]$. Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant : il existe une constante $C > 0$ (dépendant des réels x_1, \dots, x_K) telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^K([0, 1]), \quad \max_{0 \leq k \leq K-1} \|f^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(K)}\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^K |f(x_\ell)|. \quad (\text{I.1})$$

Une inégalité du type précédent est appelée *inégalité d'interpolation* à l'ordre K .

I.A – Cas particulier $K = 1$

On fixe $x_1 \in [0, 1]$ et on étudie une inégalité d'interpolation à l'ordre 1,

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([0, 1]), \quad \|f\|_\infty \leq \|f'\|_\infty + C |f(x_1)|. \quad (\text{I.2})$$

Q 1. Montrer l'inégalité d'interpolation (I.2) avec $C = 1$.

Q 2. Soit $C \in]0, 1[$. À l'aide d'un exemple simple de fonction f , montrer que l'inégalité d'interpolation (I.2) est fautive.

I.B – Cas particulier $K = 2$

On fixe deux réels distincts $x_1 < x_2$ de $[0, 1]$. On veut construire une constante $C > 0$ telle qu'on ait l'inégalité d'interpolation à l'ordre 2,

$$\forall f \in \mathcal{C}^2([0, 1]), \quad \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty) \leq \|f''\|_\infty + C(|f(x_1)| + |f(x_2)|). \quad (\text{I.3})$$

Q 3. Pour tous $x \in [0, 1]$ et $f \in \mathcal{C}^2([0, 1])$, démontrer l'inégalité

$$\left| f'(x) - \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq \|f''\|_\infty.$$

Q 4. En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^2([0, 1])$, on a $\|f'\|_\infty \leq \|f''\|_\infty + \frac{|f(x_1)| + |f(x_2)|}{x_2 - x_1}$.

Q 5. Conclure le cas $K = 2$ en montrant l'inégalité d'interpolation (I.3) avec $C = 1 + \frac{1}{x_2 - x_1}$.

I.C – Cas général par interpolation de Lagrange

On revient à l'étude du cas général d'inégalité d'interpolation à l'ordre K , donnée par (I.1). On fixe $K \in \mathbb{N}^*$.

Q 6. Démontrer que l'application

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{R}_{K-1}[X] & \rightarrow \mathbb{R}^K \\ P & \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_K)) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Q 7. Montrer qu'il existe K polynômes L_1, \dots, L_K de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tels que, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^K([0, 1])$, le polynôme $P = \sum_{j=1}^K f(x_j)L_j$ vérifie

$$\forall \ell \in \llbracket 1, K \rrbracket, \quad P(x_\ell) = f(x_\ell).$$

Dans les deux questions suivantes Q8 et Q9, on fixe $f \in \mathcal{C}^K([0, 1])$ et on note P le polynôme déterminé dans la question Q7.

Q 8. Pour tout $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$, montrer qu'il existe au moins $K - k$ réels distincts de $[0, 1]$ en lesquels la fonction $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.

Q 9. En déduire l'inégalité $\|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\|_\infty$ pour tout $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$.

Q 10. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ pour laquelle l'inégalité d'interpolation (I.1) est vérifiée.

II Dérivation \mathcal{C}^K pour les séries de fonctions

II.A – Énoncé général

On se propose maintenant de démontrer le résultat annoncé dans le préambule. Soit $K \in \mathbb{N}^*$, on considère

- des réels distincts $x_1 < \dots < x_K$ d'un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$) ;
- une suite de fonctions (f_n) de classe \mathcal{C}^K sur $[a, b]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses

(H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[a, b]$;

(H2) pour tout $\ell \in \llbracket 1, K \rrbracket$ la série numérique $\sum f_n(x_\ell)$ est absolument convergente.

Q 11. Dans le cas particulier $[a, b] = [0, 1]$, justifier que la série $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a, b]$ pour tout $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$.

Q 12. Traiter la question précédente dans le cas général d'un segment $[a, b]$ avec $a < b$.

On pourra examiner $f_n \circ \sigma$ où $\sigma : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ est définie par $\sigma(t) = (1-t)a + tb$ pour tout $t \in [0, 1]$.

D'après le résultat de la question précédente, on peut poser $F_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Q 13. Démontrer que F_0 est de classe \mathcal{C}^K sur $[a, b]$ et que $F_0^{(k)} = F_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, K \rrbracket$.

II.B – Application sur un exemple

Dans cette sous-partie, on considère un exemple où les dérivées intermédiaires ne s'expriment pas avec les fonctions usuelles.

Q 14. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier qu'il existe une unique fonction $f_n \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[)$ vérifiant $f_n(1) = 0$, $f_n(2) = 0$ et $f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$ pour tout $x > 0$.

Q 15. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n(x)$ converge normalement sur tout segment inclus dans $]0, +\infty[$ et que la fonction $F : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$.

Q 16. Expliciter $F''(x)$.

Q 17. Montrer que $|F(x)| \leq \frac{1}{3}$ pour tout $x \in [1, 2]$.

III Convergence d'une série aléatoire de Rademacher

Le but de cette partie est de montrer que, si la série $\sum a_n^2$ converge, alors la série aléatoire $\sum X_n a_n$ converge avec probabilité 1.

Notations

— $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2};$$

— $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que la série $\sum a_n^2$ converge ;

— pour tout $N \in \mathbb{N}$, on note $S_N = \sum_{n=0}^N X_n a_n$ la somme partielle au rang N de la série $\sum X_n a_n$;

— si $(\phi(j))_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers naturels, pour tout entier $j \in \mathbb{N}$ et tout entier $m \in \llbracket \phi(j) + 1, \phi(j + 1) \rrbracket$, on note les évènements

$$\begin{aligned} A_j &= \left\{ \left| S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\}, \\ B_j &= \left\{ \max_{\phi(j)+1 \leq n \leq \phi(j+1)} \left| S_n - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\}, \\ B_{j,m} &= \left\{ \left| S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \text{ et } \forall n \in \llbracket \phi(j), m - 1 \rrbracket, \left| S_n - S_{\phi(j)} \right| \leq 2^{-j} \right\}. \end{aligned}$$

La réalisation de l'évènement $B_{j,m}$ signifie que m est le plus petit entier de l'intervalle $\llbracket \phi(j), \phi(j + 1) \rrbracket$ vérifiant $\left| S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j}$.

III.A – Construction de la suite $(\phi(j))_{j \in \mathbb{N}}$ et majoration de $\mathbb{P}(A_j)$

Q 18. Justifier l'existence d'une suite strictement croissante d'entiers naturels $(\phi(j))_{j \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n > \phi(j)}^{+\infty} a_n^2 \leq \frac{1}{8^j}.$$

On fixe désormais une telle suite $(\phi(j))_{j \in \mathbb{N}}$.

Q 19. Exprimer l'espérance et la variance de $S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}$ en fonction des termes de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Q 20. Dédire des deux questions précédentes la majoration $\mathbb{P}(A_j) \leq 2^{-j}$.

III.B – Inégalité maximale de Lévy $\mathbb{P}(B_j) \leq 2\mathbb{P}(A_j)$

Q 21. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, démontrer que les évènements $B_{j,m}$, pour m parcourant $\llbracket \phi(j) + 1, \phi(j + 1) \rrbracket$, sont disjoints deux à deux et qu'on a l'égalité d'évènements

$$B_j = \bigcup_{\phi(j) < m \leq \phi(j+1)} B_{j,m}.$$

Q 22. Expliquer comment en déduire la formule $\mathbb{P}(A_j) = \sum_{m=\phi(j)+1}^{\phi(j+1)} \mathbb{P}(A_j \cap B_{j,m})$.

Q 23. Soit $m \in \llbracket \phi(j) + 1, \phi(j + 1) \rrbracket$, montrer que la fonction

$$\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha & \mapsto 2^{\phi(j+1)-\phi(j)} \mathbb{P} \left(\left\{ \left| \alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\} \cap B_{j,m} \right) \end{cases}$$

est à valeurs dans \mathbb{N} et est paire.

Q 24. Prouver que si l'évènement B_j se réalise, alors il existe $m \in \llbracket \phi(j) + 1, \phi(j + 1) \rrbracket$ et $\alpha \in \{-1, +1\}$ tels que l'évènement

$$\left\{ \left| \alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)} \right| > 2^{-j} \right\} \cap B_{j,m}$$

se réalise également.

On pourra exprimer $S_m - S_{\phi(j)}$ en fonction des deux nombres $\alpha S_{\phi(j+1)} - \alpha S_m + S_m - S_{\phi(j)}$ avec $\alpha = \pm 1$.

Q 25. En déduire que

$$\mathbb{P}(B_j) \leq 2\mathbb{P}(A_j)$$

III.C – Convergence de la série aléatoire $\sum X_n a_n$

Q 26. On note B l'évènement $\bigcap_{J \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \geq J} B_j$. Montrer l'égalité $\mathbb{P}(B) = 0$.

Q 27. Montrer que l'évènement

$$\{\exists J \in \mathbb{N}, \quad \forall j \geq J, \quad \forall n \in [\phi(j) + 1, \phi(j + 1)], \quad |S_n - S_{\phi(j)}| \leq 2^{-j}\}$$

se réalise avec probabilité 1.

Q 28. En déduire que l'évènement

$$\{\text{la suite } (S_{\phi(j)})_{j \in \mathbb{N}} \text{ est convergente}\}$$

a également une probabilité 1.

On pourra examiner la série $\sum |S_{\phi(j+1)} - S_{\phi(j)}|$.

Q 29. Conclure que l'évènement

$$\{\text{la série } \sum X_n a_n \text{ est convergente}\}$$

a une probabilité 1.

IV Dérivation \mathcal{C}^K pour des séries aléatoires de fonctions

On fixe $K \in \mathbb{N}^*$ et on considère

- une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les hypothèses de la partie précédente ;
- des réels distincts $x_1 < \dots < x_K$ de $[0, 1]$;
- une suite de fonctions (f_n) de classe \mathcal{C}^K sur $[0, 1]$ à valeurs réelles et vérifiant les deux hypothèses

(H1) la série de fonctions $\sum f_n^{(K)}$ converge normalement sur $[0, 1]$;

(H2') pour tout $\ell \in \llbracket 1, K \rrbracket$, la série numérique $\sum f_n(x_\ell)^2$ est convergente.

Q 30. Montrer que l'une des deux hypothèses (H2') ou (H2) (étudiée dans la partie II) implique l'autre.

Q 31. Montrer que l'évènement

$$\{\text{pour tout } \ell \in \llbracket 1, K \rrbracket, \text{ la série } \sum X_n f_n(x_\ell) \text{ est convergente}\}$$

a une probabilité 1.

Q 32. On note $P_n \in \mathbb{R}_{K-1}[X]$ un polynôme vérifiant $P_n(x_\ell) = f_n(x_\ell)$ pour tout $\ell \in \llbracket 1, K \rrbracket$ (cf. question 7), montrer que l'évènement

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } k \in \llbracket 0, K \rrbracket, \text{ la série de fonctions } \sum X_n (f_n - P_n)^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0, 1], \\ \text{la fonction } \sum_{n=0}^{+\infty} X_n (f_n - P_n) \text{ est de classe } \mathcal{C}^K, \\ \text{pour tout } k \in \llbracket 0, K \rrbracket, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} X_n (f_n - P_n) \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n (f_n - P_n)^{(k)} \end{array} \right\}$$

a une probabilité 1.

Q 33. Montrer que l'évènement

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } k \in \llbracket 0, K \rrbracket, \text{ la série de fonctions } \sum X_n f_n^{(k)} \text{ est uniformément convergente sur } [0, 1], \\ \text{la fonction } \sum_{n=0}^{+\infty} X_n f_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^K, \\ \text{pour tout } k \in \llbracket 0, K \rrbracket, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} X_n f_n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} X_n f_n^{(k)} \end{array} \right\}$$

a une probabilité 1.

Q 34. Donner un exemple d'entier $K \in \mathbb{N}^*$ pour lequel l'évènement précédent se réalise avec les fonctions f_n définies par

$$\begin{cases} f_0 = 0, \\ f_n(x) = \ln \left(1 + \sin \left(\frac{x}{n} \right) \right) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0, 1]. \end{cases}$$

• • • FIN • • •

Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents

Dans tout le sujet, on considère des \mathbf{R} -espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E . On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé **nilindice** de u , et l'on remarquera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geq \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \text{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$.

Un sous-espace vectoriel \mathcal{V} de $\mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $T_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $M_n(\mathbf{R})$.

L'objectif du problème est d'établir le théorème suivant, démontré par Murray Gerstenhaber en 1958 :

Théorème de Gerstenhaber

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension $n > 0$, et \mathcal{V} un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Si en outre $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de \mathcal{V} est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **A**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme **B**). Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur la dimension de l'espace E .

I Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$.

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $\text{tr } u^k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.
2. On fixe une base \mathbf{B} de E . On note $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans \mathbf{B} est triangulaire supérieure stricte. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ et que sa dimension vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.
3. Soit \mathbf{B} une base de E . Montrer que

$$\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}\} = \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} = \llbracket 1, n \rrbracket.$$

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E , ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est libre.
5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p . Dédurre de la question précédente que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $\text{Im } u^{p-1} = \text{Im } u \cap \text{Ker } u$ et $\text{Im } u^{p-1}$ est de dimension 1.

II Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (- | -))$. Étant donné $a \in E$ et $x \in E$, on notera $a \otimes x$ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall z \in E, (a \otimes x)(z) = (a | z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est linéaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) : \text{Im } u \subset \text{Vect}(x)\}$.
7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\text{tr}(a \otimes x) = (a | x)$.

III Deux lemmes

On considère ici un \mathbf{R} -espace vectoriel E de dimension $n > 0$. Soit \mathcal{V} un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u),$$

appelé **nilindice générique** de \mathcal{V} (cet entier est bien défini grâce à la question 3). On notera que $p \geq 2$.

On introduit le sous-ensemble \mathcal{V}^\bullet de E formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\text{Im } u^{p-1}$ pour u dans \mathcal{V} ; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$K(\mathcal{V}) := \text{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme A. Soit u et v dans \mathcal{V} . Alors $\text{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k .

Lemme B. Soit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout v dans \mathcal{V} .

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de \mathcal{V} .

8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \dots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbf{R}, (u + tv)^k = \sum_{i=0}^k t^i f_i^{(k)}.$$

Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

9. Montrer que $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.
10. Étant donné $k \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $\text{tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire la validité du lemme A.
11. Soit $y \in E$. Démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \text{Im } u^{p-1}$.
12. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \text{Im } u^{p-1}$. Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \text{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

IV Démonstration du théorème de Gerstenhaber

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur l'entier n . Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n - 1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent

\mathcal{V}' de $\mathcal{L}(E')$, on a $\dim \mathcal{V}' \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, et si en outre $\dim \mathcal{V}' = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ alors il existe une base de E' dans laquelle tout élément de \mathcal{V}' est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n , ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent \mathcal{V} de $\mathcal{L}(E)$. On munit E d'un produit scalaire $(- | -)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose,

$$H := \text{Vect}(x)^\perp, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} : v(x) = 0\}.$$

On note π la projection orthogonale de E sur H . Pour $u \in \mathcal{W}$, on note \bar{u} l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H, \quad \bar{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\bar{\mathcal{V}} := \{\bar{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} : \bar{u} = 0\}.$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x$, \mathcal{W} , $\bar{\mathcal{V}}$ et \mathcal{Z} sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E , \mathcal{V} , $\mathcal{L}(H)$ et \mathcal{V} .

14. Montrer que

$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \bar{\mathcal{V}}.$$

15. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que

$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z},$$

et montrer qu'alors $x \in L^\perp$.

16. En considérant u et $a \otimes x$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **A** que $\mathcal{V}x \subset L^\perp$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^\perp$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.

17. Justifier que $\lambda x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que

$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1.$$

18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\bar{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\bar{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.

19. Démontrer que

$$\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$.

20. Démontrer que

$$\dim \bar{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n$$

et

$$L^\perp = \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

En déduire que $\text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.

21. En appliquant l'hypothèse de récurrence, montrer que le nilindice générique de \mathcal{V} est supérieur ou égal à $n - 1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de \mathcal{V} est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question 21, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ (l'ensemble \mathcal{V}^\bullet a été défini dans la partie III). On note p le nilindice générique de \mathcal{V} , et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \text{Im } u^{p-1}$. On rappelle que $p \geq n - 1$ d'après la question 21.

22. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\text{Im } v^{p-1} \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. On pourra utiliser les résultats des questions 5 et 20.

23. On suppose qu'il existe v_0 dans \mathcal{V} tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\text{Im } v^{p-1} \subset \text{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

24. Conclure.

FIN DU PROBLÈME

Racines carrées de matrices complexes : existence et calcul numérique

Dans ce problème, on étudie l'existence de racines carrées d'une matrice complexe, puis on introduit l'algorithme de Newton pour calculer numériquement l'une de ces racines carrées, avec des considérations sur la convergence et la stabilité de l'algorithme.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est notée I_n . On appelle *racine carrée* de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ solution de l'équation $X^2 = A$.

On note $\tilde{\mathbb{C}}$ l'ensemble des nombres complexes non nuls qui ne sont pas des nombres réels négatifs.

A. Quelques exemples

- 1) Montrer que la matrice $A = I_2$ admet une infinité de racines carrées (on pourra utiliser la notion de symétrie). Lesquelles sont des polynômes en A ?

- 2) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées et qu'aucune d'entre elles n'est un polynôme en A .

Dans la question suivante, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique réelle qui est *définie positive*, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont strictement positives.

- 3) Montrer que A admet une unique racine carrée symétrique réelle définie positive.
(On pourra montrer que deux racines carrées de ce type possèdent les mêmes valeurs et sous-espaces propres.)

B. Existence et calcul d'une racine carrée

Dans cette partie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne une matrice *invertible* quelconque.

- 4) Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ deux matrices complexes triangulaires supérieures. On suppose que T est invertible. Mon-

trer que l'équation $U^2 = T$ est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \leq i \leq n) \\ (u_{i,i} + u_{j,j})u_{i,j} = t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j} & (1 \leq i < j \leq n). \end{cases}$$

Montrer que T étant donnée, on peut résoudre ce système en choisissant une solution U telle que $u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0$ pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. (On pourra considérer les parties réelles et imaginaires des $u_{i,i}$.)

- 5) En déduire que A admet une racine carrée. Si en outre, les valeurs propres de A appartiennent à $\tilde{\mathbb{C}}$, montrer que A admet une racine carrée dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive.

On admet qu'une telle racine carrée est unique et on la notera \sqrt{A} dans toute la suite du problème.

C. Algorithme de Newton

Pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2}$$

et on admet que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $B(X, r)$ et $\bar{B}(X, r)$ les boules, respectivement ouverte et fermée, de centre $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et de rayon r .

Soit A et B deux matrices quelconques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- 6) Montrer que $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

On note m_A le polynôme minimal de A .

- 7) Montrer que la matrice $m_A(B)$ est inversible si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre commune.

En déduire que s'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$, alors A et B ont au moins une valeur propre commune.

- 8) Réciproquement, si A et B ont au moins une valeur propre commune, montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

(On pourra considérer une matrice de la forme XY^T où X et Y sont deux matrices colonnes bien choisies).

Soit $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ l'application définie par la formule $F(X) = X^2 - A$.

9) Montrer que la différentielle dF_X de F en $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est donnée par

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad dF_X(H) = XH + HX.$$

Déduire des deux questions précédentes une condition nécessaire et suffisante pour que dF_X soit inversible. Montrer que cette condition implique que X est inversible.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres appartiennent à $\tilde{\mathbb{C}}$. On pose $X^* = \sqrt{A}$ (la matrice \sqrt{A} a été définie à la question 5).

On définit, sous réserve d'existence, une suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par :

$$(N) \begin{cases} X_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad X_{k+1} = X_k - (dF_{X_k})^{-1}(F(X_k)). \end{cases}$$

Dans les questions suivantes, on étudie l'existence et la convergence de la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

10) Montrer que dF_{X^*} est inversible et qu'il existe $r > 0$ tel que dF_X soit inversible pour tout $X \in \bar{B}(X^*, r)$.

Pour tout $Y \in \bar{B}(X^*, r)$ on pose $G(Y) = Y - (dF_Y)^{-1}(F(Y))$.

11) Calculer $G(X^*)$ et montrer que pour tout $H \in B(0, r)$,

$$G(X^* + H) - G(X^*) = (dF_{X^*+H})^{-1}(H^2)$$

où

$$(dF_{X^*+H})^{-1} = (Id + (dF_{X^*})^{-1} \circ dF_H)^{-1} \circ (dF_{X^*})^{-1}.$$

12) En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout X de $B(X^*, r)$, $\|G(X) - X^*\| \leq C\|X - X^*\|^2$. (On pourra utiliser le résultat de la question 6.)

13) Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $X_0 \in B(X^*, \rho)$ la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ soit bien définie et vérifie, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|X_k - X^*\| \leq \frac{(\rho\sqrt{C})^{2^k}}{C}.$$

Que peut-on en conclure ?

D. Forme équivalente

Dans cette partie, on étudie deux algorithmes équivalents à celui de Newton. On rappelle que A désigne une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres appartiennent à $\tilde{\mathbb{C}}$. Soit U_0 et V_0 deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Sous réserve d'existence, on note $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$(I) \begin{cases} U_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ U_{k+1} = U_k + H_k \text{ où } H_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ vérifie} \\ U_k H_k + H_k U_k = A - U_k^2 \end{cases} \quad \text{pour tout } k \geq 0$$

et $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$(II) \begin{cases} V_0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ V_{k+1} = \frac{1}{2}(V_k + V_k^{-1}A) \end{cases} \quad \text{pour tout } k \geq 0.$$

- 14)** Si la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (N) et $U_0 = X_0$, montrer que la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (I) et égale à $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Réciproquement si la suite $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (I) et $X_0 = U_0$, montrer que la suite $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (N) et égale à $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

On suppose dorénavant ces conditions vérifiées.

- 15)** On suppose que $U_0 = V_0$ commute avec A . Montrer que la suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bien définie par (II) et que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_k = V_k$ commute avec A . (On pourra d'abord montrer que U_k est inversible pour tout $k \in \mathbb{N}$ et considérer la matrice $G_k = \frac{1}{2}(U_k^{-1}A - U_k)$.)

On rappelle qu'une matrice symétrique réelle est *définie positive* si ses valeurs propres sont strictement positives, et qu'une telle matrice admet une unique racine carrée définie positive (question 3).

Dans la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle définie positive.

On considère la suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la relation (II) avec $V_0 = \mu I_n$ et $\mu > 0$. On fixe une matrice orthogonale P de sorte que $A = PDP^T$ où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A , ordonnées par ordre croissant. On note e_1, \dots, e_n les vecteurs propres correspondants.

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \{1, \dots, n\}$ quelconques.

- 16)** Montrer que V_k est symétrique réelle définie positive de mêmes vecteurs propres e_1, \dots, e_n que A dont on notera $\lambda_{k,1}, \dots, \lambda_{k,n}$ les valeurs propres correspondantes. Trouver une relation entre $\lambda_{k+1,\ell}$ et $\lambda_{k,\ell}$.

17) Montrer que

$$\frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}} \right)^{2^{k+1}}.$$

18) Déterminer la limite de la suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

E. Stabilité

On considère la suite $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la relation (II) avec $V_0 = \sqrt{A}$. Soit $\varepsilon > 0$ et i, j deux indices distincts de $\{1, \dots, n\}$. On note C_1, \dots, C_n les colonnes de la matrice orthogonale P définie dans la partie précédente et on pose $\Delta = \varepsilon C_i C_j^T$.

Soit $\widehat{V}_0 = V_0 + \Delta$. La matrice \widehat{V}_1 est calculée par la relation (II) à partir de \widehat{V}_0 et on pose $\Delta_1 = \widehat{V}_1 - V_1$. Ensuite \widehat{V}_2 est calculé à partir de \widehat{V}_1 par la relation (II), puis $\widehat{V}_3, \widehat{V}_4 \dots$ de la même manière.

19) Montrer les relations suivantes :

$$\begin{cases} (V_0 + \Delta)^{-1} = V_0^{-1} - V_0^{-1} \Delta V_0^{-1} \\ \Delta_1 = \frac{1}{2} (\Delta - V_0^{-1} \Delta V_0^{-1} A). \end{cases}$$

20) Déterminer la valeur de $\eta \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{V}_k = \sqrt{A} + \eta^k \Delta.$$

21) On appelle *conditionnement* de A le rapport entre sa plus grande valeur propre et sa plus petite. Que doit vérifier le conditionnement de A pour que la suite $(\widehat{V}_k)_{k \geq 0}$ converge ?

FIN DU PROBLÈME

Théorème de Müntz

On désigne par $C([0, 1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. Pour tout $\lambda \geq 0$, on note ϕ_λ l'élément de $C([0, 1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.

Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts. On note W le sous-espace vectoriel de $C([0, 1])$ engendré la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0, 1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes classiques N_∞ ou N_2 définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La question préliminaire et les parties A, B, C et D sont indépendantes les unes des autres.

Question préliminaire

1) Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une famille libre de $C([0, 1])$.

A. Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_m} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_m+b_1} & \frac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k)}{\prod_{k=1}^n (X + b_k)}.$$

- 2) Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X + b_k}$, alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}.$$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

- 3) En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}.$$

B. Distance d'un point à une partie dans un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, A)$ défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|.$$

- 4) Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A .
 5) Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ alors $d(x, A) = \lim_n d(x, A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V de *dimension finie* de E , et on note $B = \{y; \|y - x\| \leq \|x\|\}$.

- 6) Montrer que $B \cap V$ est compacte et que $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ pour tout $x \in E$.
 7) En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

C. Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace euclidien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ sur E : $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

- 8) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel de *dimension finie* de E , alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x, V) = \|x - y\|$.

Pour toute suite finie $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$ on désigne par $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre n définie par :

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} (x_1|x_1) & (x_1|x_2) & \cdots & (x_1|x_n) \\ (x_2|x_1) & (x_2|x_2) & \cdots & (x_2|x_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (x_n|x_1) & (x_n|x_2) & \cdots & (x_n|x_n) \end{pmatrix}.$$

- 9) Montrer que $G(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est liée.
- 10) On suppose que la famille (x_1, x_2, \dots, x_n) est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \dots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

D. Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $C([0, 1])$ on note \overline{A}^∞ et \overline{A}^2 les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2 , respectivement. Pour $f \in C([0, 1])$ la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A relativement à la norme N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

- 11) Montrer que pour tout $f \in C([0, 1])$, $N_2(f) \leq N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0, 1])$ on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0, 1]) ; f(0) = 0\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

- 12) Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^2$.
- 13) En déduire que V_0 est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 , mais n'est pas dense pour la norme N_∞ .
- 14) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence \overline{V} est également un espace vectoriel.
- 15) Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0, 1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^\infty$.
- 16) En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0, 1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^2$.

E. Un critère de densité de W pour la norme N_2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\phi_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}$.

17) Montrer que l'espace W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim_n d(\phi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$.

18) Montrer que pour tout $\mu \geq 0$,

$$d(\phi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}.$$

19) Montrer que pour tout $\mu \geq 0$, la suite $\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

(On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \in [0, \mu] \mapsto \frac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.)

20) En déduire que l'espace W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_2 si et seulement si la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

F. Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21) Montrer que si W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ , alors la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22) Soit $\psi = \sum_{k=0}^n a_k \phi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n . Montrer que si $\lambda_k \geq 1$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, alors pour tout $\mu \geq 1$, on a :

$$N_\infty(\phi_\mu - \psi) \leq N_2\left(\mu\phi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^n a_k \lambda_k \phi_{\lambda_k-1}\right).$$

23) On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i) : & \lambda_0 = 0 \\ (ii) : & \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que sous ces conditions, si la série $\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente, alors W est dense dans $C([0, 1])$ pour la norme N_∞ .

24) Montrer que la conclusion précédente est encore valable si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii') : \quad \inf_{k \geq 1} \lambda_k > 0.$$

FIN DU PROBLÈME