Ex 1 : (CCP MP 2006 épreuve 1)

Montrer que les deux séries suivantes convergent et calculer leur somme :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{(n-1)!}$.

Ex 2 : (CCP MP 2016 épreuve 2)

Pour tout entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Dans cet exercice, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Démontrer que les valeurs propres complexes de A prennent au maximum trois valeurs distinctes que l'on précisera.
2. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Démontrer que si A est inversible alors $\det(A) = 1$.

Ex 3 : (E3A PC 2020)

Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2P(X = n+2) = 3P(X = n+1) - P(X = n).$$

1. On note $p_n = P(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n . En déduire la loi de la variable aléatoire X .
2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.

Ex 4 : (E3A PC 2001 épreuve 1 NC) Soient $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $(P) : \begin{cases} y'' - y = f \\ y(0) = y'(0) \\ y(1) = -y'(1) \end{cases}$

1. Soit y_0 une solution particulière de $y'' - y = f$ sur I . Déterminer en fonction de y_0 l'ensemble des solutions de cette équation.
2. Exprimer la solution de (P) (dont on démontrera l'unicité) à l'aide de y_0 et y'_0 .
3. Résoudre (P) pour $f(x) = x$ puis $f(x) = x^2$.
4. Montrer dans le cas général que $T(f) : x \mapsto -\frac{e^x}{2} \int_x^1 f(t)e^{-t} dt - \frac{e^{-x}}{2} \int_0^x f(t)e^t dt$ est la solution de (P) .
5. Montrer que $\|T(f)\|_\infty \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \|f\|_\infty$.
6. Montrer que l'application $T : f \mapsto T(f)$ est continue de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ dans lui-même.
7. Soit $f : x \mapsto \ln(1+x)$ et Q le polynôme de degré 2 réalisant le développement limité de f au voisinage de 0.
 - a. Montrer que $\|f - Q\|_\infty \leq \frac{1}{5}$.
 - b. En déduire une fonction g de classe $\mathcal{C}^2$ sur I telle que $\|g - T(f)\|_\infty \leq \frac{2}{25}$.

Ex 5 : (E3A PSI 2013 épreuve B)

Dans tout l'exercice, I désigne l'intervalle $]0, +\infty[$.

1. Déterminer l'ensemble D des réels x pour lesquels la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + (nx)^2}$ converge.

On définit alors la fonction f de I dans $\mathbb{R}$ en posant $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + (nx)^2}$.

2. Déterminer le sens de variation de f .
3. Prouver que f est de classe C^1 sur I .
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

5. a. Vérifier que $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall x \in I, \frac{1}{1 + (p+1)^2 x^2} \leq \int_p^{p+1} \frac{dt}{1 + t^2 x^2} \leq \frac{1}{1 + p^2 x^2}$.
b. En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.

Ex 6 : (E3A MP 2013 épreuve B)

On note A une matrice carrée d'ordre $n > 0$ à coefficients complexes, I_n est la matrice identité carrée d'ordre $n > 0$ ayant des 1 sur la diagonale et des zéros ailleurs.

Le noyau et l'image d'une matrice désignent respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire canoniquement associée à cette matrice.

On considère la matrice M_A carrée d'ordre $2n$ à coefficients complexes définie par blocs de la façon suivante :

$$M_A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit ϕ l'application qui à tout vecteur X de $\mathbb{C}^n$ associe le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$ de $\mathbb{C}^{2n}$.
- a. Montrer que ϕ est une application linéaire.
b. Montrer que ϕ est bijective du noyau de la matrice A vers le noyau de la matrice M_A . Quelle relation en déduit-on entre les dimensions de $\text{Ker}(M_A)$ et de $\text{Ker}(A)$?
c. En déduire le rang de la matrice M_A en fonction du rang de la matrice A .
2. On suppose, dans cette question, que la matrice A est diagonalisable et inversible.
- a. Exprimer la matrice M_A^2 en fonction de A .
b. Démontrer que la matrice M_A^2 est diagonalisable.
c. Montrer que la matrice M_A^2 est inversible.
d. En déduire que la matrice M_A est diagonalisable.
3. On suppose, dans cette question, que la matrice M_A est diagonalisable.
- a. Démontrer que $\text{Im}(M_A) = \text{Im}(M_A^2)$.
b. En déduire $\text{Ker}(M_A) = \text{Ker}(M_A^2)$.
c. Montrer que la matrice A est inversible (indication : pour $X \in \text{Ker} A$, on pourra considérer le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix}$).
d. Démontrer que la matrice A est diagonalisable.
4. Que peut-on déduire des questions 2) et 3)?

Ex 7 : (E3A MP 2009 épreuve B)

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum \frac{(-x)^n}{3n+1}$.
 2.
 - a. Calculer $\int_0^1 t^{3n} dt$, avec $n \in \mathbb{N}$.
 - b. Montrer que $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-t^3)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-t^3)^n dt$.
 3. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ converge et calculer sa somme.
-

Ex 8 : (E3A MP 2017 épreuve 1)

E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ muni du produit scalaire $(x, y) \mapsto (x|y)$. On rappelle qu'un automorphisme de E est un endomorphisme **bijectif** de E . On considère un automorphisme u de E qui vérifie la propriété (1) : $\forall (x, y) \in E \times E, (u(x)|y) = -(x|u(y))$.

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Soit A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.
 - a. étant donnés deux entiers i, j compris entre 1 et n , on note $a_{i,j}$ le (i, j) -ème coefficient de A . Justifier : $a_{i,j} = (u(e_j)|e_i)$.
 - b. En déduire l'égalité : $A^T = -A$.
2. Montrer que l'entier n est un nombre pair (on pourra considérer le déterminant de la matrice A).
3. On appelle v l'automorphisme égal à $u \circ u$. Montrer que v est un automorphisme diagonalisable dans une base orthonormée de E .
4. Soit λ une valeur propre réelle de v , montrer que λ est strictement négative.
5. On note x un vecteur propre de l'automorphisme v associé à la valeur propre λ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par x et $u(x)$.
 - a. Montrer que la dimension de F est égale à 2.
 - b. Montrer que F est stable par l'automorphisme u , en déduire que l'orthogonal $F^\perp$ est aussi stable par u . On notera u_F et $u_{F^\perp}$ les applications induites par l'automorphisme u sur les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$.
 - c. Soit λ une valeur propre réelle de v , on pose $a = \sqrt{-\lambda}$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}'$ de F telle que la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}'$ soit égale à $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$.
Indication : On pourra considérer les vecteurs $e'_1 = \frac{1}{\|x\|}x$ et $e'_2 = \frac{1}{a\|x\|}u(x)$.
 - d. Montrer que l'endomorphisme $u_{F^\perp}$ est un automorphisme vérifiant la relation (1).
6. On suppose dans cette question que l'espace euclidien E est de dimension 4. Soit u un automorphisme de E vérifiant la relation (1).
Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}''$ de E et deux réels α et β non nuls tels que la

matrice de l'automorphisme u dans cette base soit égale à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex 9 : (E3A MP 2015 épreuve 1) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels non nuls. On pose $A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$. On note $P_n(X) = \det(XI_n - A_n)$

1. Déterminer une relation de récurrence entre $P_{n+1}(X)$, $P_n(X)$ et $P_{n-1}(X)$.
2. **a.** Montrer que A_n est diagonalisable.

b. Soit $\lambda \in Sp(A)$ réel. Calculer

$$\begin{vmatrix} -b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda - a_2 & & \ddots & \ddots & 0 \\ -b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b_{n-2} & 0 \\ \cdots & -b_{n-2} & \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} \end{vmatrix}.$$

c. En déduire $\text{rg}(\lambda I_n - A_n)$.

d. En déduire que P_n admet n racines réelles distinctes.

3. On pose $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} P'_{n+1}(x) & P'_n(x) \\ P_{n+1}(x) & P_n(x) \end{vmatrix}$.

a. Pour $n \geq 2$, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Delta_n(x) = P_n^2(x) + b_n^2 \Delta_{n-1}(x)$.

b. Montrer que $\Delta_1(x)$ est strictement positif pour tout x de $\mathbb{R}$. En déduire le signe de $\Delta_n(x)$ pour $n \geq 2$.

4. Montrer que l'application $x \mapsto P_{n+1}(x)$ s'annule entre deux zéros consécutifs de P_n (on pourra considérer $x \mapsto \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$).

Ex 10 : (E3A PC 2020) Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E .
2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.
4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.
 - a.** Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E . Quelle est sa dimension ?
 - b.** Soit φ la projection orthogonale sur H . Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Ex 11 : (CCP 2011 épreuve 1) On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} \frac{2x^n}{n^2 - 1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. On note S la fonction somme de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{2x^n}{n^2 - 1}$. Déterminer S sur $] -R, R[$.
3. Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.

Ex 12 : (E3A PSI 2001 épreuve 2) Soit f l'application définie sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ par : $(x, t) \rightarrow f(x, t) = e^{-t^2\sqrt{x}} \cos\left(\frac{t^3}{3}\right)$.

1. Pour x réel strictement positif fixé, montrer que l'application $t \rightarrow f(x, t)$ définie sur $[0, +\infty[$, est intégrable sur $[0, +\infty[$.

2. Soit F l'application définie sur $]0, +\infty[$ par : $x \rightarrow F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}} \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) dt$.

a. Prouver que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, et, pour x strictement positif, donner une expression de $F'(x)$ sous forme d'une intégrale.

b. Montrer que F' est aussi définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2\sqrt{x}} \sin\left(\frac{t^3}{3}\right) dt.$$

En déduire que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et donner une expression de $F''(x)$ sous forme d'une intégrale.

3. Montrer que F est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) - 2\sqrt{x}y'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}}y(x) = 0.$$

4. Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

5. On admet le résultat suivant : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

a. Déterminer un réel K tel que pour tout réel u : $|\cos u - 1| \leq Ku^2$.

b. Justifier l'existence du réel J défini par : $J = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} u^6 du$.

Pour x réel strictement positif, majorer l'intégrale : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2\sqrt{x}} \left| \cos\left(\frac{t^3}{3}\right) - 1 \right| dt$ en fonction de J et de x .

c. En déduire que $F(x)$ est équivalent à $\frac{\sqrt{\pi}}{2x^{1/4}}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Ex 13 : (E3A PSI 2017 épreuve 1)

On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des résultats possibles est noté Ω .

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et T une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $[[0, k]]$.

On considère alors une suite $(X_i)_{i \in [[0, k]]}$ de variables aléatoires de même loi et toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On suppose que les variables aléatoires $X_0, X_1, \dots, X_k$ et T sont mutuellement indépendantes.

On définit la variable aléatoire Y par : $\forall \omega \in \Omega, Y(\omega) = \sum_{i=0}^{T(\omega)} X_i(\omega)$

1. Montrer que l'existence de l'espérance des variables aléatoires X_i entraîne l'existence de l'espérance de Y .

2. Calculer alors $\mathbb{E}(Y)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_0)$ et $\mathbb{E}(T)$. On pourra constater que $([T = j])_{j \in [[0, k]]}$ constitue un système complet d'événements.

3. On suppose que $\mathbb{E}(X_0) = 0$ et que X_0^2 possède une espérance. Prouver alors que : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(X_0)(\mathbb{E}(T) + 1)$.

Ex 14 : (E3A PSI 2002 épreuve 2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et on pose pour $n \in \mathbb{N}^* : \forall x \in \mathbb{R}_+, u_n(x) = \frac{x}{n^\alpha(1 + nx^2)}$.

1. étude des modes de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$.
 - a. Montrer que la série $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.
 - b. Démontrer que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.
 - c. Soient a et b deux réels tels que : $0 < a < b$. Prouver que la série $\sum u_n$ converge normalement sur $[a, b]$.
 - d. On suppose dans cette question que : $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit $x \in [0, +\infty[$, on pose : $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.
 - i) Établir l'inégalité : $R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{x}{\sqrt{2n}(1 + kx^2)}$
 - ii) En déduire que la série $\sum u_n$ n'est pas uniformément convergente sur $[0, a]$ où a est un réel strictement positif.

On note S l'application de $[0, +\infty[$ vers $\mathbf{R}$ définie par : $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

2. Etude de la continuité de S .
 - a. Montrer que, pour tout α, S est continue sur $]0, +\infty[$.
 - b. Montrer que, si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors S est continue sur $[0, +\infty[$.
 - c. On suppose que : $\alpha \leq \frac{1}{2}$. Soit x un réel strictement positif.
 - i) Soit f l'application définie sur $[1, +\infty[$ par : $t \mapsto f(t) = \frac{x}{t^\alpha(1 + tx^2)}$. Prouver que f est intégrable sur $[1, +\infty[$.
 - ii) Montrer que : $\int_1^{+\infty} f(t)dt \leq S(x)$.
 - iii) Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{t}(1 + tx^2)} dt$.
 - iv) En déduire que S n'est pas continue en 0 .

Ex 15 : (E3A PC 2003 épreuve B) On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire : $\forall P, Q \in E, \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^0 PQ$.

Soit $\Delta : P \mapsto (X^2 + X)P'' + (2X + 1)P'$ définie sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $P \in E$. Montrer que $d^\circ(\Delta(P)) \leq d^\circ(P)$.
3. On note Δ_n l'endomorphisme induit par Δ sur $\mathbb{R}_n[X]$
4. Quelle est la matrice de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$?
5. Quelles sont les valeurs propre de Δ_n ? Δ_n est-il diagonalisable ?
6. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe un unique polynôme de degré n et unitaire tel que $\Delta(P_n) = n(n + 1)P_n$.
7. Exprimer P_n en fonction de $Q_n = \sum_{k=0}^n \frac{(n + k)!}{(n - k)!(k!)^2} X^k$.
8. Montrer que : $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \langle \Delta(P), Q \rangle = \langle P, \Delta(Q) \rangle$.
9. Déterminer $\langle P_n, P_m \rangle$, pour n et m non nuls et distincts.

Ex 16 : (E3A MP 2003 épreuve B)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On notera $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^* = \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang un.
 - a. En discutant sur la dimension de $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u)$, montrer que $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$ ou $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.
 - b. Soit $e \in \text{Im}(u)$ non nul. Montrer qu'il existe une base de E dont le premier vecteur est e . Dans le cas où $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$, quelle est le forme de la matrice de u dans une telle base? Dans le cas $\text{Im}(u) \not\subset \text{Ker}(u)$, montrer que $\text{tr}(u) = 0$.
 - c. Montrer alors l'équivalence des trois assertions :
 - i u est diagonalisable.
 - ii $E = \text{Im}(u) \oplus \text{Ker}(u)$
 - iii $\text{tr}(u) \neq 0$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $F_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathbb{C} \\ X & \mapsto \text{tr}(AX) \end{cases}$.
 - a. Montrer que F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - b. Soit $F : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^* \\ A & \mapsto F_A \end{cases}$. Montrer que F est linéaire.
 - c. Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $F_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de A .
 - d. Montrer que F est un isomorphisme.
3. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle et soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit l'endomorphisme $\psi_f : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto f(X)J \end{cases}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
 - a. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :
 $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), f(X) = \text{tr}(AX)$.
 - b. Comparer le noyau de ψ_f et le noyau de f . Quel est l'image de ψ_f ? Quel est son rang?
 - c. Exprimer $\text{tr}(\psi_f)$ en fonction de A et J .
 - d. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur A et J pour que ψ_f soit diagonalisable.
 - e. On suppose que ψ_f est diagonalisable. Déterminer le polynôme minimal de ψ_f .

Ex 17 : (E3A PC 2006 épreuve B) Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

1.
 - a. Montrer que A est diagonalisable.
 - b. Montrer que P est inversible.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $fg = gf$.
 - a. Montrer que les vecteurs propres de f sont des vecteurs propres de g .
 - b. Montrer que f et g diagonalisent dans la même base.
3. Soit l'équation matricielle $(E) : M^2 - 6M = A$, avec $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - a. Montrer que si M est solution de (E) , alors M et A commutent.
 - b. En déduire que (E) est équivalente à l'équation (E') d'inconnue D diagonale :
$$(E') : D^2 - 6D = \Delta, \quad \text{avec } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$
 - c. Résoudre (E') , puis (E) .

Ex 18 : (E3A PC 2017 épreuve 1 NC)

Dans tout cet exercice, λ désignera un réel strictement positif, et X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ , c'est-à-dire telle que : $\forall j \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}$.

1. **a.** Montrer que la variable aléatoire réelle discrète $X(X-1)$ admet une espérance et la calculer.
b. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^2)$.

2. Montrer que : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X \geq i) \leq \frac{\lambda^2 + \lambda}{i^2}$.

Que peut-on en déduire pour la série de terme général $\mathbb{P}(X \geq i)$ où $i \in \mathbb{N}^*$?

3. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(u_{i,k})_{i \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, u_{i,k} = \frac{\lambda^i}{(k+1)(k+2)\dots(k+i)}$$

- a.** Montrer que la série $\sum_{i \geq 1} u_{i,k}$ converge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_{n,k} = \sum_{i=n}^{+\infty} u_{i,k}$.

- b.** Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une constante K que l'on précisera telle que pour tout entier $k \geq K$, on a : $R_{n,k} \leq \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{k^i}$.

4. **a.** Montrer que pour tout entier $k > \lambda$, $\mathbb{P}(X \geq k) \leq \frac{k}{k-\lambda} \mathbb{P}(X = k)$.

Puis montrer que pour tout entier $k \geq 2\lambda$, $\mathbb{P}(X > k) \leq \mathbb{P}(X = k)$.

- b.** Dans cette question et uniquement cette question, on suppose que $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

Montrer à l'aide des questions précédentes que $\sum_{i=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq i) \leq 1$.

- c.** Dans le cas général, que vaut $\sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq i)$? Le justifier.

5. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Dans cette question, on considère Y une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{\lambda}{n}\right)$.

- a.** Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, 1 - t \leq e^{-t}$.

- b.** Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!} e^{-\alpha(n,k)}$ où $\alpha(n,k) = \frac{(k-1)k}{2n}$.

- c.** Montrer que : $\forall k \in \{0, 1, \dots, n\}, \mathbb{P}(Y = k) \leq \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} e^{\beta(n,k,\lambda)}$ où $\beta(n,k,\lambda) = \frac{k(2\lambda + 1 - k)}{2n}$.

- d.** Quelle majoration de $\mathbb{P}(Y = k)$ peut-on obtenir pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$?

- e.** En déduire que pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2\lambda + 1$: $\sum_{j=k+1}^n \mathbb{P}(Y = j) \leq \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$.

Ex 19 : (E3A PC 2009 épreuve B)

On rappelle que $T = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. a. Justifier l'existence des intégrales : $J = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx$ et $K = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x} dx$.

b. On pose $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Justifier que $\frac{3}{4}T = S$ et en déduire la valeur de S .

c. Justifier l'égalité :

$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x} dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, en précisant le résultat du cours utilisé. En déduire les valeurs des intégrales J et K de (a).

d. Justifier l'existence des intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x} dx$; $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x^2} dx$ et les calculer grâce aux résultats précédents.

2. a. Calculer : $A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k}$ et justifier l'existence de : $B = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 2^k}$.

b. Justifier l'égalité : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(x)}{1-x} dx = -(\ln(2))^2 - B$.

c. Calculer : $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1-t)}{t} dt$ en fonction de B, et en déduire la valeur de B.

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $a_n = h_n - \ln(n)$.

a. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 de $g(x) = x + \ln(1-x)$ quand x tend vers 0. En déduire un équivalent simple de $a_{n+1} - a_n$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Déterminer la nature de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$, et en déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathbb{R}$.

On pourra noter $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ que l'on ne cherchera pas à calculer.

c. Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{h_n}{n}$, ainsi que de terme général $(-1)^n \frac{h_n}{n}$.

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de $v_n = \int_0^1 x^n \ln(1-x) dx$, et montrer que : $v_n = -\frac{h_{n+1}}{n+1}$.

b. Soit $U = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{h_n}{n}$, $V = -\int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{1+t} dt$, $W = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 2^n}$, montrer que :
 $U = V = W$.

Ex 20 : (E3A MP 2015 épreuve 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $J = [1]_{1 \leq i, j \leq n}$.

1.
 - a. Calculer J^2 , puis trouver un polynôme annulateur de A .
 - b. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .
 - c. Montrer qu'il existe $Q \in O(n)$ tel que $A = QDQ^{-1}$, avec D une matrice diagonale que l'on précisera.
 - d. Donner les sous-espaces propres de A .
2. Soient $\mathcal{E} = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), U^T A = AU\}$ et $\mathcal{F} = \{V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), V^T D = DV\}$
 - a. Montrer que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - b. Déterminer $\dim(\mathcal{F})$.
 - c. En déduire $\dim(\mathcal{E})$ (pour $U \in \mathcal{E}$, on regardera la matrice $V = Q^T U Q$).
3. Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on pose $\varphi(X, Y) = X^T A Y$.
 - a. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
 - b. Soit $U \in \mathcal{E}$ et $u : X \mapsto UX$ défini sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que u est autoadjoint pour le produit scalaire φ .
 - c. En déduire que pour tout U de $\mathcal{E}$, il existe $B \in GL_n(\mathbb{R})$ et Δ diagonale telle que $U = B\Delta B^{-1}$ et $B^T A B = I_n$.

Ex 21 : (E3A PSI 2020)

Pour tout entier naturel n , on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur J .

On note alors pour tout x de J , $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J .

3. étudier alors sa convergence uniforme sur J .

4. Déterminer $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- a. Justifier la convergence de la série de terme général u_n . On note $a = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

- b. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini : $\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$.

Ex 22 : (E3A MP 2022)

Pour tout entier $n \geq 2$, on note : $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ **si, et seulement si** $\bar{z} = \frac{1}{z}$.

2. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Déterminer $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$.

3. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

4. On considère le polynôme $P = \sum_{k=1}^n kX^{k-1}$.

a. Montrer que pour tout réel x différent de 1 : $P(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

b. Montrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, P(\omega^k) = \frac{n}{\omega^k - 1}$.

c. En factorisant $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que : $\prod_{k=1}^{n-1} (1 - \omega^k) = n$.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4 .

On note F et A les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par : $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et

$A = P(F)$ où P est le polynôme défini à la question 4 .

5. Réduction de la matrice F

a. Donner, sans démonstration, la matrice F^k pour $k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$, F^{n-1} puis F^n .

On pourra étudier le cas $n = 4$ et/ou l'endomorphisme f canoniquement associé à F pour conjecturer les résultats.

b. On note G_F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $(F^k)_{k \in \mathbb{N}}$. Montrer que G_F est de dimension n . En donner une base.

c. Démontrer que $X^n - 1$ est le polynôme minimal de F .

d. Justifier que F est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et donner une matrice diagonale D semblable à F .

6. Réduction de la matrice A

a. Expliciter la matrice A .

b. Déterminer une matrice Δ diagonale semblable à la matrice A .

c. Déterminer le degré du polynôme minimal de A .

En déduire que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est une famille libre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

7. Calculer le déterminant de A . Justifier que la matrice A est inversible.

8. Soit G_A le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.
Vérifier que $A^{-1} \in G_A$.

9. Montrer que $G_A = G_F$.

10. Vérifier que l'on a l'égalité : $A(F - I_n)^2 = n(F - I_n)$.

11. Déterminer enfin une expression de A^{-1} à l'aide des puissances de la matrice F .

Ex 23 : (E3A MP 2010 épreuve B NC)

Soit $(\mathcal{E}_{p,q}) : M^2 + pM + qI_n = 0$ l'équation d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $p, q \in \mathbb{R}$.

1. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $E(M) = \{PMP^{-1}, P \in GL_n(\mathbb{R})\}$. Démontrer que si M est solution de $(\mathcal{E}_{p,q})$, alors toute matrice M' de $E(M)$ l'est également.

Dans la suite, les ensembles de solutions des équation $(\mathcal{E}_{p,q})$ pourront être écrits sous la forme d'une réunion d'ensembles $E(A)$, avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab}) : M^2 - (a+b)M + abI_n = 0$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ distincts.

- a. Démontrer que toute solution M de l'équation est diagonalisable.
- b. Déterminer les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{-(a+b),ab})$.

3. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$ (c'est à dire l'équation $M^2 = 0$).

- a. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice M . Démontrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$.
- b. Énoncer précisément le théorème du rang.
- c. Démontrer que $\text{rg } f \leq \frac{n}{2}$.
- d. On pose $p = \text{rg } f$. Démontrer qu'il existe $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$ telle que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ soit de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline I_p & 0 \end{array} \right)$$

- e. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,0})$.

4. On considère dans cette question l'équation $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$:

$$M^2 - 2aM + a^2I_n = 0$$

avec a un réel.

- a. Démontrer que toute solution M peut s'écrire $M = N + aI_n$ avec $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N^2 = 0$.
 - b. En déduire les solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{-2a,a^2})$.
5. Démontrer que si n est impair, l'équation $M^2 + I_n = 0$ n'a pas de solution dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 6. On considère l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$ (c'est à dire l'équation $M^2 + I_n = 0$). On suppose que n est pair et on note $n = 2p$.
 - a. Démontrer que la matrice M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
 - b. Démontrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} 0 & -I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array} \right)$$

- c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E}_{0,1})$.

Ex 24 : (E3A PC 2020) On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+2}.$$

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < a_n \leq 1$.

2. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.

Pour $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

3. a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+2}$.

b. Déterminer l'ensemble réel de définition de la fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

c. Montrer que l'on a pour tout $x \in]-1, 1[$, $f'(x) = f(x) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

4. Démontrer alors que pour tout $x \in [0, 1[$, $\ln(f(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)}$.

5. En déduire, pour tout $x \in [0, 1[$, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

6. Justifier que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{2^n}$ converge et calculer sa somme.

Ex 25 : (E3A MP 2021)

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. **Généralités sur φ .**

a. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

b. Déterminer $\text{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ .

3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que : $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = \int_0^x P(t) dt$.

a. Justifier que l'application ψ est linéaire.

b. Démontrer que $\text{Im}(\psi) = \text{vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$.

c. Démontrer que : $P \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \text{vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1))$.

d. Donner alors une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

a. Donner la dimension de $\mathcal{H}$.

b. Pour $k \in [0, n]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$. Démontrer que la famille $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.

c. Déterminer les composantes de φ dans cette base.

Ex 26 : (E3A PC 2022)

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On note $E_n = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ sa base canonique. On considère les endomorphismes f et g de E_n définis par :

$$\left(f(e_1) = \sum_{i=1}^n e_i \text{ et } \forall j \in \llbracket 2, n \rrbracket, f(e_j) = e_1 + e_j \right) \text{ et } (g = f - id_{E_n}).$$

1. Donner, dans la base $\mathcal{B}$, F et G les matrices respectives des endomorphismes f et g .

2. Justifier que f et g sont diagonalisables.

3. Diagonalisation de f et de g dans une même base

a. Déterminer la base $\mathcal{B}_1$ de $\text{Im}(g)$, le rang de g et une base $\mathcal{B}_2$ de $\text{Ker}(g)$.

b. Montrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E_n .

c. Démontrer que le spectre de l'endomorphisme g est : $\mathbf{Sp}(g) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$ où les deux réels λ_1 et λ_2 sont non nuls et vérifient la relation $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. On choisira $\lambda_1 > 0$.

d. On se propose de déterminer λ_1 et λ_2 par deux méthodes :

e. Méthode 1

(i) Démontrer que $\text{Im}(g)$ et $\text{Ker}(g)$ sont stables par g .

(ii) Déterminer la matrice H dans la base $\mathcal{B}_1$ de l'endomorphisme h de $\text{Im}(g)$ induit par g .

(iii) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres associés de h .

(iv) En déduire, en le justifiant soigneusement, les valeurs de λ_1 et λ_2 .

f. Méthode 2

(i) Montrer que le spectre de $g^2 = g \circ g$ est : $\mathbf{Sp}(g^2) = \{0, \lambda_1^2, \lambda_2^2\}$.

(ii) Déterminer la matrice de l'endomorphisme g^2 dans la base $\mathcal{B}$.

(iii) En déduire, en fonction de n , la valeur de $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$.

(iv) Retrouver alors les valeurs de λ_1 et λ_2 obtenues par la méthode 1.

a. Déterminer une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ sous la forme $P = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * \\ 1 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & \\ 1 & * & \cdots & * \end{pmatrix}$

telle que $P^{-1}GP = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0, \dots, 0)$. On ne demande pas de déterminer P^{-1}

b. Justifier que la matrice $P^{-1}FP$ est diagonale.

4. Résoudre pour t réel, le système différentiel : $X'(t) = FX(t) + tU$ où U est la première colonne de la matrice P .

Ex 27 : (E3A PSI 2017 épreuve 1)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ sa base canonique.

Soient $a_1, \dots, a_n$, n réels vérifiant : $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

1. Montrer que l'application : $T : P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$ est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.
2. On note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i . Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, \dots, L_n)$ est une base de E puis déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base. On note $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
3. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.
 - a. Donner, sans justification, les polynômes L_1, L_2, L_3 et expliciter la matrice M .
 - b. Montrer que 1 est valeur propre de la matrice M et déterminer le sous-espace propre associé.
 - c. En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.

4. On revient au cas général.

- a. Montrer que M est inversible. Calculer son inverse. (On pourra utiliser la question 2)
 - b. Etablir la relation : $\sum_{i=1}^n L_i = 1$.
 - c. Montrer que l'on a : $\sum_{j=1}^n m_{1,j} = 1$. Montrer ensuite que pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\sum_{j=1}^n m_{i,j} = 0$.
 - d. Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M .
5. Dans cette question, on suppose que $n \geq 4$ et soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in E, u(P) = Q \quad \text{avec} \quad Q(X) = P(0)L_1(X) + P(1)L_2(X) + P(2)L_3(X)$$

avec L_1, L_2 et L_3 les polynômes de la question 3.a.

- a. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?
- b. Déterminer les éléments propres de u et caractériser géométriquement u

Ex 28 : (E3A MPI 2024)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N .

Chaque boule a la probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.

On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

1. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n .
2. Donner les lois de T_1 et de T_2 .

Pour la suite, on prendra $n \geq 2$

3. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = 2)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(T_n = n)$. On pourra distinguer les cas $n \leq N$ et $n > N$.
5. 6. Prouver que, pour tout k appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$, on a : $\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} \mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N - k + 1}{N} \mathbb{P}(T_n = k - 1)$.

6. On considère dans cette question la fonction génératrice : $G_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k) x^k$.

(a) Montrer que $G_n(x) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_n = k) x^k$.

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $G_{n+1}(x) = \frac{1}{N} (x - x^2) G'_n(x) + xG_n(x)$.

(c) Montrer que : $\mathbb{E}[T_{n+1}] = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}[T_n] + 1$.

(d) En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T_n]$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

(e) Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la i -ème case est pleine, 0 sinon.

Ex 29 : (E3A PSI 2019 épreuve 1) On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathcal{E} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Pour tout élément f de $\mathcal{E}$, on note $U(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad U(f)(x) = \int_{x-1}^x f(t) dt$$

1. Soit $f \in \mathcal{E}$, T -périodique. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}, \int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$

2. On suppose de plus dans cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que si f est T -périodique, il en est de même pour f'

Montrer que la réciproque est fautive.

3. Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}_n = (1, X, \dots, X^n)$ sa base canonique.

a. Montrer que la restriction de U à E_n définit un endomorphisme U_n de E_n .

b. Ecrire la matrice de U_n dans la base $\mathcal{B}_n$.

c. L'endomorphisme U_n est-il bijectif? diagonalisable?

5. Justifier que, si f , élément de $\mathcal{E}$, est dans $\text{Ker}(U)$, alors :

(i) $\int_0^1 f(t) dt = 0$

(ii) f est périodique de période 1.

6. A-t-on : $\text{Ker}(U) = \left\{ f \in \mathcal{E}, \text{ périodique de période 1 et telle que } \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$?

7. L'endomorphisme U est-il surjectif?

8. Soient a un réel non nul et f_a la fonction sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{at}$.

a. Déterminer $F_a = U(f_a)$.

b. Dresser le tableau des variations de la fonction réelle : $g : x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$.

c. Montrer alors que tout réel λ strictement positif est valeur propre de l'endomorphisme U .