Séance du 15/05 : Algèbre linéaire

Ex 1 : [Mines] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ telle que les seuls sous-espaces vectoriels stables par tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont E et $\{0\}$. Montrer que, pour tout $x \in E$ non nul et tout $y \in E$, il existe $u \in \mathcal{A}$ tel que $u(x) = y$.

Ex 2 : [Mines] Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de dimension finie.

1. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $uvu = u$ et $vuv = v$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(v)$.
2. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E_1 un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\,(u)$ dans E, F_1 un supplémentaire de $\mathrm{Im}\,(u)$ dans F. Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tel que $\mathrm{Ker}\,(v) = F_1$, $\mathrm{Im}\,(v) = E_1$, $uvu = u$ et $vuv = v$.

Ex 3 : [Mines]

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $p \in [\![1, n-1]\!]$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ qui stabilise tous les sous-espaces de dimension p. Montrer que u est une homothétie.
2. Soient $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A n'est pas scalaire (différente de λI_n) et que M commute avec toutes les matrices semblables à A. Que dire de M ?
3. Même question pour deux matrices réelles.

Ex 4 : [Mines] Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $L(P) \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme associé à la fonction polynomiale $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} P(x+t)e^{-t}dt$.

1. Montrer que L définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $L = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} D^k$, où D est l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer les éléments propres de L.
4. Déterminer le commutant de L.

Ex 5 : [Centrale] Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Cours : lemme des noyaux (avec démonstration).
2. Soit u et v deux symétries telles que $u \circ v = -v \circ u$. Montrer que n est pair.
3. On pose $n = 2p$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle les matrices de u et v sont respectivement : $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$.
4. Quels sont les entiers k pour lesquels il existe des symétries $s_1, ...; s_k$ vérifiant :
$\forall (i,j) \in [\![1,k]\!]^2,\ (i \neq j) \Rightarrow (s_i \circ s_j = -s_j \circ s_i)$?

Ex 6 : [Centrale]

1. Rappeler la définition d'une $\mathbb{K}$-algèbre et d'un endomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbre.
2. Soit φ un endomorphisme de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}(X)$. Montrer que $\varphi(X) \neq 0$.
3. Déterminer les endomorphismes de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}(X)$.
4. Déterminer les automorphismes de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathbb{K}(X)$.

Ex 7 : [X] On considère un groupe fini G et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de dimension finie. Soit ρ un morphisme injectif de G dans $GL(V)$.

1. Calculer $tr(\rho(e))$ où e est l'élément neutre de G.
2. Montrer que, pour tout $g \in G$, $\rho(g)$ est diagonalisable.
3. Montrer que, si $tr(\rho(g)) = tr(\rho(e))$, alors $\rho(g) = \rho(e)$.
4. Soit $f : G \to \mathbb{C}$. Pour $m \in \mathbb{N}$, on note $a_m = \displaystyle\sum_{g \in G} f(g)\,(tr(\rho(g)))^m$. Démontrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a_m \neq 0$ lorsque $f(e) \neq 0$.
5. Montrer que $\Phi : z \mapsto \displaystyle\sum_{m=0}^{+\infty} a_m z^m$ est une fonction rationnelle.
6. On prend $G = \mathcal{S}_3$ et $\rho : \mathcal{S}_3 \to GL(V)$. Montrer qu'il existe une décomposition de V sous la forme $\displaystyle\bigoplus_i E_i$ telle que :
   i Pour tout i et pour tout g de G, l'espace E_i est stable par $\rho(g)$;
   ii Pour tout i, on a : $\dim(E_i) \in \{1, 2\}$.

Séance du 19/05 : Intégration

Ex 8 : [Mines] Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \ln(x)dx$.

Ex 9 : [Mines] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, strictement croissante telle que $f(0) = 0$.

1. On suppose dans cette questions que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que :
   $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\displaystyle\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x)$.
2. **a.** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in [\![0, n]\!]$, on note $x_{i,n} = \dfrac{ix}{n}$. Montrer que :
   $$\sum_{i=0}^{n-1} x_{i,n}(f(x_{i+1,n}) - f(x_{i,n})) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt.$$
   b. Montrer l'égalité vue en **a)**.
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue et bijective. Montrer que :
   $\displaystyle\int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(t)dt \geq ab$.

Ex 10 : [Mines] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que : $E\left(\dfrac{1}{X}\right) < +\infty$.
On définit F_X sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F_X(t) = E(e^{-tX})$.

1. Montrer que F_X est bien définie, continue, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} F_X(t)dt$.

2. Soient Y, Z deux variabales aléatoires indépendantes qui suivant chacune la loi $\mathcal{G}(p)$, avec $p \in]0,1[$.
Calculer $E\left(\dfrac{1}{Y+Z}\right)$.

Ex 11 : [Mines] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et admettant une variance.

1. Montrer que la fonction génératrice de X est convexe sur $[0,1]$.

2. Prouver que $E\left(\dfrac{1}{X+1}\right) \leq 1 - \dfrac{2}{3}E(X) + \dfrac{1}{6}E(X^2)$.

Ex 12 : [Centrale] On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$. On munit E de la norme $\|.\|_\infty$ et on définit $T(f)$ pour tout f de E par :
$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-|x-t|} f(t)dt.$

1. ***a.*** Rappeler le théoème de Heine.

b. Montrer que f est uniformément continue.

2. Montrer que T est un endomorphisme de E, puis qu'il est continu.

3. Déterminer $|||T|||$.

Ex 13 : [Mines] Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $F(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}\left(\frac{x}{a}\right) + \text{Arctan}\,(ax)}{1+x^2} dx$. Justifier l'existence de $F(a)$, puis calculer cette intégrale.

Ex 14 : [X] Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{-x} + e^{2x}|\sin(x)|} dx$?

Séance du 21/05 : Algèbre générale

Ex 15 : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On pose $Q = 1 + 2X + ... + nX^{n-1}$. Calculer $\displaystyle\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} Q(\zeta)$.

Ex 16 : [Mines] Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $\forall M \in G,\ M^2 = I_n$. Montrer que G est fini.

Ex 17 : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer et dénombrer les sous-groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Ex 18 : [Mines] On note φ la fonction indicatrice d'Euler.

1. Calculer $\varphi(7)$ et $\varphi(37044)$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) \geq \dfrac{n\ln(2)}{\ln(n)+\ln(2)}$.

Ex 19 : [Centrale]

1. Soit I un idéal de $\mathbb{Q}[X]$ distinct de $\{0\}$. Montrer qu'il existe un polynôme $\mu \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $I = \mu\mathbb{Q}[X]$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $I_\lambda = \{P \in \mathbb{Q}[X],\ P(\lambda) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$.
3. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible. Montrer que les racines complexes de P sont simples.
4. Soient $P \in \mathbb{Q}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ racine de P avec multiplicité $m > \dfrac{d^\circ P}{2}$. Montrer que λ est dans $\mathbb{Q}$.

Ex 20 : [Centrale] Un entier $n \geq 2$ est un faux premier (FP) s'il n'est pas premier et si, pour tout $a \in \mathbb{Z}$ premier à n, on a : $a^{n-1} \equiv 1[n]$.

1. Montrer que, si n est FP, alors n est impair.
2. On suppose que n s'écrit $\prod_{i=1}^{r} p_i$ où $r \geq 2$ et les p_i étant des nombres premiers impairs distincts tels que : $\forall i \in [\![1, r]\!],\ (p_i - 1)|(n-1)$. Montrer que n est FP.
3. On admet que, pour tout nombre premier p impair et tout v dans $\mathbb{N}^*$, le groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p^v\mathbb{Z})^*$ est cyclique. En déduire la réciproque de la question précédente.

Ex 21 : [X] Soit p un nombre premier. On dit qu'un groupe est un p-groupe si, pour tout $g \in G$, l'ordre de g est une puissance de p. Si k est dans $\mathbb{N}^*$, on dit que G est k-divisible si, pour tout $g \in G$, il existe $x \in G$ tel que : $x^k = g$.

1. Montrer qu'un p-groupe non trivial et p-divisible est infini.
2. Donner un exemple de tel groupe.
3. Montrer que G est alors k-divisible pour tout k.

Séance du 22/05 : Probabilité, dénombrement

Ex 22 : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k}(-3)^k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \binom{n}{3k}$.

Ex 23 : [Mines] Soient G un groupe fini et $\Omega = G^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme. On pose $C = \{(x, y) \in G^2,\ xy = yx\}$ et $p = P(C)$.

1. Montrer que $p > 0$. Que dire si $p = 1$?

Dans la suite, on suppose que G n'est pas commutatif.

2. Calculer p lorsque $G = \mathcal{S}_3$, puis lorsque $G = \mathcal{S}_4$.

3. On définit la relation $\sim$ sur G^2 par $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G,\ x = gyg^{-1}$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

4. On note s le nombre de classes d'équivalences. Montrer que $p = \dfrac{s}{card(G)}$.

Ex 24 : [Mines] On lance simultanément deux pièces équilibrées n fois. Soit E_n l'événement « les deux pièces donnent la même nombre de pile ».

1. *a.* Pour $a, b, n \in \mathbb{N}$ tels que $n \leqslant a + b$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}$.

b. En déduire $P(E_n)$.

2. Déduire combien de fois en moyenne les pièces sont tombées sur Pile lorsque l'événement E_n est réalisé.

Ex 25 : [Mines] On dispose de deux urnes A et B, et de $2N$ boules numérotées de 1 à $2N$ réparties aléatoirement dans ces urnes. À chaque itération, on pioche une boule au hasard et on la change d'urne. On note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules dans l'urne B à la n-ème itération. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, U_n = \left(P(X_n = 0)\ \ P(X_n = 1) \cdots P(X_n = 2N)\right)^T$.

1. Déterminer $M \in \mathcal{M}_{2N+1}(\mathbb{R})$ telle que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait : $U_{n+1} = MU_n$.

2. Soient $v_0, \dots, v_{2N}$ des réels et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{2N} v_k X^k$. En notant V le vecteur colonne défini par les coefficients v_k, montrer que $V \in \operatorname{Ker}(M - \lambda I_{2N+1}) \Leftrightarrow \lambda P = XP - \dfrac{1 - X^2}{2N} P'$.

3. Montrer les X_n suivent la même loi si et seulement si X_0 suit une certaine loi à déterminer.

4. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Ex 26 : [Centrale] La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est $F_X : t \mapsto P(X \leq t)$.

1. Montrer que, pour une variable aléatoire X, la fonction F_X est croissante et de limite 1 en $+\infty$.

Soient E un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E et X une variable aléatoire à valeurs dans E. On suppose que :
$\forall x \in E,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(X_n = x) = P(X = x)$.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{x\in E} |P(X_n = x) - P(X = n)|\right) = 0$.
Indication : Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, considérer une partie finie $I \subset E$ telle que $P(X \in I) > 1 - \varepsilon$.

3. Montrer que $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F_X.

Ex 27 : [Centrale] Une suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ est dite transiente si, pour toute partie bornée A de $\mathbb{Z}$, on a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(Z_n \in A) < +\infty$.

1. Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, X_i suit une loi $\mathcal{P}(\alpha/i)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, quelle est la loi de $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$? La suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est-elle transiente ?
2. Soient $p \in]0,1[$ et $(R_i)_{i\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a : $P(X_i = 1 = p$ et $P(X_i = -1) = 1-p$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est-elle transiente ?

Ex 28 : [X] Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.
On pose $A_n = \left(\sqrt{X_n} \text{ admet 1 pour premier chiffre après la virgule}\right)$ et
$B_n = \left(\sqrt{X_n} \text{ admet 1 pour premier chiffre}\right)$, $C_n = \left(2^{X_n} \text{ admet 1 pour premier chiffre}\right)$.

1. Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(P(A_n))$.
2. Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(P(B_n))$.
3. Étudier l'existence et, le cas échéant, calculer la limite de la suite $(P(C_n))$.

Séance du 26/05 : Matrices et déterminant

Ex 29 : [Mines] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Étude de l'inversibilité de $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$. Donner l'inverse le cas échéant.

Ex 30 : [Mines] Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, montrer que $Com(A)$ et $Com(B)$ le sont aussi.

Ex 31 : [Mines] Soient $n \in \mathbb{N}$, $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, $\alpha_0, ..., \alpha_n$ des éléments distincts de $\mathbb{K}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice $[P^{((i)}(\alpha_j)]_{0\leq ij\leq n}$.
2. Montrer que $(P(X+\alpha_j))_{0\leq j\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Ex 32 : [Mines] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension $3n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{rg}\,(f) = 2n$ et $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 33 : [Centrale] Pour $a \in \mathbb{Z}$, on pose $S_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $T_a = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner le lien entre l'inverse d'une matrice carrée inversible et sa comatrice.

2. Montrer que $GL_2(\mathbb{Z})$ (ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(Z)$ inversibles et dont l'inverse est à coefficients dans $\mathbb{Z}$) est un groupe et que S_a, T_a sont dans $GL_2(\mathbb{Z})$ pour tout $a \in \mathbb{Z}$.

3. Que vaut $T_b S_a T_b^{-1}$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$?

4. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ de polynôme caractéristique $X^2 - 1$. Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{Z})$ tel que $M = PS_0P^{-1}$ ou $M = PS_1P^{-1}$.

Ex 34 : [Centrale] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ dont toutes les racines complexes ont un module majoré par 1.
Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in S_n$.
On note $z_1, \ldots, z_n$ les racines de P éventuellement confondues.

1. *a.* Rappeler les relations coefficients-racines pour un polynôme complexe.

b. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ |a_k| \leqslant \binom{n}{k}$.

c. Conclure que S_n est fini.

2. Montrer que P est le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

3. *a.* Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \exists Q_p \in S_n, \forall i \in [\![1, n]\!],\ Q_p(z_i^p) = 0$.

b. Conclure que les racines non nulles de P sont de module 1.

Ex 35 : [X] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on pose $P_\sigma = [\delta_{i,\sigma(j)}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on note $n_k(\sigma)$ le nombre de cycles de longueur k dans la décomposition de σ en produit de cycles à support disjoint.

1. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Pour k dans $\mathbb{N}$, calculer $tr(P_\sigma^k)$ en fonction de $n_r(\sigma)$.

2. En déduire que deux permutations $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$ sont conjuguées (il existe $s \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma = s \circ \tau \circ s^{-1}$) si et seulement si les matrices P_σ et P_τ sont semblables.

Séance du 28/05 : Séries, suites et séries de fonctions

Ex 36 : [Mines] Étudier la convergence de $\sum \sin(\pi e n!)$.

Ex 37 : [Mines] Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ vérifiant $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$.

1. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles (u_n) converge.
2. Trouver alors un équivalent de $\ell - u_n$, où ℓ désigne la limite de la suite.
3. Donner un équivalent de u_n lorsque la suite (u_n) diverge.

Ex 38 : [Mines] Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer qu'en posant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^\alpha x}$, on définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.
2. Donner la limite puis un équivalent simple de f en $+\infty$.
3. Donner la limite puis un équivalent simple de f en 0.

Ex 39 : [Mines] On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(x+p)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Exprimer $f(x)$ en fonction de : $g(x) = \dfrac{1}{x} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)...(x+k)}$.
3. Déterminer un équivalent simple de f en $+\infty$.
4. Déterminer un équivalent simple de f en 0 par valeurs supérieures.
5. Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(x+p)}$ sur les parties du domaine de définition de f.

Ex 40 : [Mines] Soient $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $n > m + 2$. On définit une suite $(u_k)_{k\geq 0}$ en fixant $u_0 \in \mathbb{R}$ et en posant, pour tout $k \in \mathbb{N},\ u_{k+1} = \dfrac{k+m}{k+n} u_k$.

1. Étudier la série $\displaystyle\sum \ln\left(\left(\frac{k+1}{k}\right)^{n-m} \frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$. En déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} C k^{m-n}$.
2. Montrer l'existence d'une variable aléatoire réelle X telle que :
$\forall k \in \mathbb{N},\ (k+n)P(X = k+1) = (k+m)P(X = k)$.
3. Montrer que : $X \in L^1$ et calculer $E(X)$.

Ex 41 : [Centrale]

1. Rappeler le théorème de convergence dominé.
2. Montrer que $\Gamma : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$.

4. On pose $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$. Trouver une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

5. Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}$.

6. Montrer que $\frac{e^{-\gamma x}}{\Gamma(x+1)} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{x}{k}\right) e^{-x/k}$ où γ est la constante d'Euler définie par $\gamma = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$.

Ex 42 : [X] Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^\alpha}$.

Séance du 02/06 : Réduction

Ex 43 : [Mines] Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur B pour que l'équation A^3 admette au moins une solution.

Ex 44 : [Mines] Soient $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec A inversible et M de rang un.

1. On suppose que $\det(A+M) = 0$. Que dire de $tr(A^{-1}M)$?

2. On suppose que $\det(A+M) \neq 0$. Donner une expression de $(A+M)^{-1}$.

Ex 45 : [Mines] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer les équivalences entre les propositions suivante :

i. $BA = 0$ et B est nilpotente ;

ii. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

Ex 46 : [Mines] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie vectorielle. Soit Φ défini sur $\mathcal{L}(E)$ par : $\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \Phi(u) = \frac{us+su}{2}$. Déterminer les éléments propres de Φ, puis étudier sa diagonalisabilité.

Ex 47 : [Mines] Soient $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $a_0, ..., a_{k-1} \in]0,1[^k$ tels que $a_0 + ... + a_{k-1} = 1$. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$. On suppose que $P(X_0 = 0) = 1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z},\ P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i P(X_n = j-i).$$

1. Déterminer la loi de X_n.

2. Soit $j \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ fixé. Étudier le comportement asymptotique de $(P(X_n = j-i))_{n\geq 0}$.

Ex 48 : [Centrale] Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Calculer, en fonction de $tr(u)$ et de $tr(u^2)$, les coefficients de X^{n-1} et X^{n-2} de χ_u

2. On suppose u de rang 2.

  a. Montrer que l'on peut écrire $\chi_u = X^{n-2}P(X)$, où P est un polynôme de degré 2 dont on précisera les coefficients en fonction de $tr(u)$ et $tr(u^2)$.

  b. À quelle condition l'endomorphisme u est-il trigonalisable ?

Ex 49 : [ENS ULCR] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite toute puissante ($TP\mathbb{K}$) si, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = B^p$.

1. Trouver les matrices $TP\mathbb{K}$ pour $n = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $\chi_A = \displaystyle\prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$ où les λ_i sont distincts dans $\mathbb{K}$ et les α_i sont des entiers naturels non nuls.

  a. Montrer qu'il existe $N_1, \ldots, N_k$ nilpotentes telles que A soit semblable à une matrice diagonale par blocs avec comme blocs diagonaux $\lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{\alpha_k} + N_k$.

  b. Montrer que A est $TP\mathbb{K}$ si et seulement si les $\lambda_i I_{\alpha_i} + N_i$ le sont. On dit que $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unipotente si $M - I_n$ est nilpotente et on note $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices unipotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$, on pose $\ln(A) = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} (A - I_n)^p$.

3. Justifier la définition de $\ln(A)$ pour $A \in \mathcal{U}_n(\mathbb{K})$. Montrer que exp est une bijection de l'ensemble des matrices nilpotentes sur l'ensemble $\mathcal{U}_n(\mathbb{K})$.

4. Montrer que les matrices unipotentes sont $TP\mathbb{K}$.

5. Déterminer finalement les matrices toutes-puissantes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Séance du 04/06 : Séries entières, dérivation

Ex 50 : [Mines] Soit $(a_n)_{n\geq 2}$ une suite réelle telle que la série entière associée ait un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

On suppose que $f : z \mapsto z + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} a_n z^n$ est injective sur $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$.

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $f(z)$ est réel si et seulement si z est réel.

2. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{D}$, $Im(f(z)) > 0$ si et seulement si $Im(z) > 0$.

3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [0, 1[$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} Im(f(re^{it}) \sin(nt) dt$.

Ex 51 : [Mines] Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) > 0$, $f'(0) > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x_1 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f'(x_1) = 0$.
2. Montrer qu'il existe une suite (x_n) strictement croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x_n) = 0$.

Ex 52 : [Mines] Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n = o(p_n)$. Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^{p_n}$.

1. Quel est le rayon de convergence de f ?
2. Déterminer la limite en 1 par valeurs inférieures de $x \mapsto (1-x)f(x)$.

Ex 53 : [Mines]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner le développement en série entière de $f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-t)^n}$.
2. En déduire que $card\{(k_1, ..., k_n) \in \mathbb{N}^n,\ k_1 + ... + k_n = s\} = \dbinom{s+n-1}{n}$.
3. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ i.i.d. suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
   Déterminer $P\left(\bigcup\limits_{n \geq 1} (X_1 + ... + X_n = s)\right)$.

Ex 54 : [Centrale]

1. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière qui converge sur $]-\alpha, \alpha[$, avec $\alpha > 0$. Montrer que sa somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$.
2. Est-ce que toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$, avec $\alpha > 0$ est développable en série entière au voisinage de 0 ?
3. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert contenant 0. Montrer qu'elle est développable en série entière au voisinage de 0 si et seulement si :
   $\exists(\alpha, M, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^3, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\alpha, \alpha],\ |f^{(n)}(x)| \leq MA^n n!$.

Ex 55 : [Centrale]

1. Rappeler la formule de Stirling.
2. Donner un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(x)dx$ quand n tend vers $+\infty$.
3. On pose $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-x^2t^2)}}$.
   a. Quel est l'ensemble de définition de F ?
   b. Développer F en série entière au voisinage de 0.
   c. Trouver un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Ex 56 : [X] Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a < b$. Montrer l'équivalence entre :

i. f n'est pas polynomiale ;
ii. $vect(\{x \mapsto f(\alpha x+\beta),\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_\infty$.

Séance du 05/06 : Espaces euclidiens et préhilbertiens

Ex 57 : [Mines] Soit $n \geq 2$.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $S = P^T P$.

2. Déterminer le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

3. Soient $A_1, ..., A_k \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$.
Montrer que $|\det(\alpha_1 A_1 + ... + \alpha_k A_k)| \leq \det(|\alpha_1| A_1 + ... + |\alpha_k| A_k)$.

Ex 58 : [Mines] Soit (a, b, x_n) une famille libre d'un espace euclidien E. Trouver une CNS pour qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u(x_0) = a$ et $u^*(x_0) = b$.

Ex 59 : [Mines] Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = Diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, avec $\lambda_1, ..., \lambda_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$, telles que $P^T M^T M P = D^2$.

2. On note $V_1, ..., V_n$ les colonnes de MP. Soit Q la matrice dont les colonnes sont $\dfrac{1}{\lambda_1}V_1, ..., \dfrac{1}{\lambda_n}V_n$.
Montrer que Q est dans $O_n(\mathbb{R})$.

3. Montrer qu'il existe $U, U' \in O_n(\mathbb{R})$ telles que $M = UDU'$.

4. Montrer le même résultat si M est non inversible.

Ex 60 : [Centrale] Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $(E, \langle\ .,\ .\rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et deux familles $(x_1, ..., x_n)$ et $(y_1, ..., y_n)$ d'éléments de E. On note respectivement A et B les matrices représentatives des familles précédentes dans la base $\mathcal{B}$.

1. ***a.*** Exprimer les coordonnées et la norme d'un vecteur x de E à l'aide des éléments de $\mathcal{B}$.

b. Exprimer les coefficients de A, B et $A^T B$ à l'aide de produits scalaires.

c. On suppose ici que $(x_1, ..., x_n)$ est une base de E. Déduire de la question précédente que l'on peut choisir $y_1, ..., y_n$ de telle sorte que $\langle x_i, y_j\rangle = \delta_{i,j}$. Montrer que, ainsi choisis, $(y_1, ..., y_n)$ est une base de E.

2. On suppose ici que :

i. $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \|x_i\| = 1$ et $\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ i \neq j \Rightarrow \langle x_i, y_j\rangle < 0$;
ii. $\exists v \in E, \forall i \in [\![1,n]\!],\ \langle x_i, v\rangle > 0$.

Montrer que $(x_1, ...x_n)$ est une base de E.

Ex 61 : [Centrale]

1. Énoncer et démontrer le théorème des bornes atteintes.
2. Soit C une partie convexe compacte non vide d'un espace euclidien E.
Soit $x \in E$.
   a. Montrer l'existence et l'unicité d'un vecteur $p(x) \in C$ tel que : $d(x, C) = \|x - p(x)\|$.
   b. Soit $y \in C$. Montrer que $y = p(x)$ si et seulement si : $\forall c \in C,\ \langle x - p(x), c - p(x)\rangle \leq 0$.
3. Montrer que l'application p définie dans ce qui précède est continue.

Ex 62 : [Centrale] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\Omega = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ I_n + M \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

1. Montrer que $(O_n(\mathbb{R}), \times)$ est un groupe.
2. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \Omega$, mais $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \neq \Omega$.
3. On pose $f : M \mapsto (I_n - M)(I_n + M)^{-1}$ définie sur Ω.
Montrer que : $\forall M \in O_n(\mathbb{R}) \cap \Omega,\ f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $f(f(M)) = M$.
4. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice diagonale J à coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$ telle que $\det(M + J) \neq 0$.
On pourra faire une récurrence et comparer deux déterminants.
5. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice diagonale J à coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = Jf(A)$.

Ex 63 : [ENS SR] Soient $n \in \mathbb{N}$ et w une fonction continue positive non identiquement nulle de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit $(f_k)_{0 \leq k \leq ,}$ une suite de fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$\forall k, l \in [\![0, n]\!],\ \displaystyle\int_0^1 f_k f_l w = \delta_{k,l}$. Montrer que $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre.
2. Montrer qu'il existe une unique suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall k, l \in \mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 p_k p_l w = \delta_{k,l}$ et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k soit polynomiale de degré k à coefficients dominant positif.
3. Montrer que si n est dans $\mathbb{N}^*$, alors p_n a n racines simples dans $]0, 1[$ que l'on note $x_{1,n} < ... < x_{n,n}$.
4. Montrer que pour n dans $\mathbb{N}^*$, il existe un unique $(\lambda_{1,n}, ..., \lambda_{n,n}) \in \mathbb{R}^n$ tel que :
$\forall p \in \mathbb{R}_{2n-1}[X],\ \displaystyle\int_0^1 pw = \sum_{k=1}^{n} \lambda_{k,n} p(x_{k,n})$.

Séance du 11/06 : Équations différentielles, calcul différentiel, fonctions vectorielles

---

Ex 64 : [Mines] Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = f(1/x)$.

Ex 65 : [Mines] Déterminer le domaine de définition de $f : (x,y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n^2}$. Est-elle continue ? de classe $\mathcal{C}^1$?

Ex 66 : [Mines] Soit y une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $xy'' + y' + xy = 0$.

1. On pose : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ u(x) = \sqrt{x}y(x)$. Déterminer une équation différentielle dont u est solution.

2. Montrer que $\int_a^b \frac{u(x)v(x)}{4x^2}dx = (uv' - u'v)(b) - (uv' - u'v)(a)$, avec v vérifiant $v'' + v = 0$.

3. Montrer que, pour tout $a > 0$, il existe $x_a \in [a, a+\pi[$ tel que $y(x_a) = 0$.

4. Montrer que $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4^n (n!)^2}$ s'annule une infinité de fois.

Ex 67 : [Mines] On munit $\mathbb{R}^2$ de sa norme euclidienne canonique.
On définit f sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \left(\frac{1}{2}\sin(x+y), \frac{1}{2}\cos(x-y)\right)$.

1. Calculer la différentielle de f en tout point.

2. Montrer que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |||df(x,y)||| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. En déduire que f possède au plus un point fixe.

Ex 68 : [Mines] On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne usuelle. On note $\mathcal{B}$ la boule unité ouverte et $\mathcal{S}$ la sphère unité. Soit $f : \overline{\mathcal{B}} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

1. On suppose que $f|_{\mathcal{S}} \leq 0$ et qu'il existe $\zeta \in \mathcal{B}$ tel que $f(\zeta) > 0$.

Montrer que $\varphi : x \in \overline{\mathcal{B}} \mapsto f(x) + \varepsilon(\|x\|^2 - 1)$ admet un maximum en $\zeta_0 \in \mathcal{B}$ pour ε strictement positif assez petit , puis prouver que $\Delta f(\zeta_0) < 0$.

2. On suppose que $\Delta f = 0$. Montrer que $\min_{\overline{\mathcal{B}}} f = \min_{\mathcal{S}} f$ et $\max_{\overline{\mathcal{B}}} f = \max_{\mathcal{S}} f$.

Ex 69 : [Centrale] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne canonique. Soient $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : X' = -AX + B$. On suppose que l'ensemble $S = \{U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ AU = B\}$ est non vide.

1. Montrer que les valeurs propres de A sont positives.

2. Quelles sont les solutions constantes de (E) ?

3. Soient X et Y deux solutions de (E). Montrer que $t \mapsto \|X(t) - Y(t)\|$ est décroissante. En déduire que toute solution est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

4. Soit X une solution de (E). Montrer que $X(t)$ admet une limite X_∞ quand t tend vers $+\infty$.

5. Montrer que $\|X(0) - X_\infty\| = \inf_{U \in S} \|X(0) - U\|$.

Ex 70 : [ENS U] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $E = \mathcal{C}([0,1]\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Pour $u \in E$, soit X_u l'unique application de $\mathcal{C}^1([0,1]\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))$ telle que $X_u(0) = X$ et : $\forall t \in [0,1],\ X_u'(t) = AX_u(t) + Bu(t)$. Montrer que $\{X_u(1),\ u \in E\} = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si la matrice $(B|AB|...|A^{n-1}B)$ de $\mathcal{M}_{n,n^2}(\mathbb{R})$ est de rang n.

Séance du 12/06 : Variables aléatoires

Ex 71 : [Mines] Une urne contient $a \geq 1$ boules blanches et $b \geq 1$ boules rouges. À chaque tirage, on remet la boule tirée et on ajoute $c \geq 1$ boules de la même couleur. Soit Y la variable aléatoire donnant le rang de la première boule blanche tirée. Donner sa loi. Admet-elle une espérance ? Est-ce que X^p est dans L^1 pour $p \geq 2$?

Ex 72 : [Mines] Soit $p \in]0,1[$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y_n = \min(X_1, ..., X_n)$ et $Z_n = \max(X_1, ..., X_n)$; $\alpha_n = E(Y_n)$ et $\beta_n = E(Z_n)$.

1. Déterminer la monotonie des suite (α_n) et (β_n).
2. Calculer α_n.
3. Déterminer la limite de (β_n). Donner un équivalent de β_n.

Ex 73 : [Mines] Soient $k \leqslant n \in \mathbb{N}$. Un parking dispose de n places consécutives numérotées de 1 à n. On y dispose des véhicules nécessitant chacun k places consécutives pour être garés. Chaque véhicule est successivement placé aléatoirement sur les emplacements disponibles jusqu'à ce qu'on ne puisse plus en garer aucun. Pour $j \in [\![1, n-k+1]\!], B_j$ désigne l'événement « la première voiture est garée entre les emplacements j et $j+k-1$ », et X_n est le nombre d'emplacements résiduels libres à la fin du processus.

1. Montrer que, pour i, j convenables, $P_{B_j}(X_n = i) = P\left(X_{j-1} + X_{n-(j+k)+1} = i - k\right)$.

   En déduire que $E(X_n) = k + \dfrac{2}{n-k+1} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-k} E(X_\ell)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = E(X_0) + \cdots + E(X_n)$.
   Montrer que la somme f de la série entière $\sum S_n t^n$ est au moins définie sur $]0,1[$ et vérifie une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
3. Expliciter f et en déduire une expression de $E(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Ex 74 : [Mines] Soit (E_n) une suite d'événements de $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $Z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 1_{E_n}$. Montrer que si $\sum P(E_n)$ converge, alors Z est d'espérance finie.

Ex 75 : [Mines] Soient un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Montrer que : $P(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda}$.

2. Soit Z une variable aléatoire réelle centrée dans L^2. On pose $V(Z) = \sigma^2$.

   a. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ P(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2 + x^2}{(x+a)^2}$.

   b. En déduire que $P(Z \geq a) \leq \dfrac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$ et $P(X \geq 2\lambda) \leq \dfrac{1}{\lambda + 1}$.

Ex 76 : [Centrale] Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. On suppose que $\mu = \dfrac{\ln(2)}{|\ln(q)|}$ n'est pas un entier.

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{G}(p)$. Montrer qu'il existe un unique entier m tel que $P(X \geq m) \geq \dfrac{1}{2}$ et $P(X \leq m) \geq \dfrac{1}{2}$.

2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d de loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y_n = 1_{X_n \geq m}$ et $S_n = Y_1 + ... + Y_{2n-1}$, pour $n \geq 1$. Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} P(S_n \geq n) = 1$.

Ex 77 : [X] Soient $v_1, ..., v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace euclidien.

Montrer qu'il existe $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$ tel que $\left\| \sum\limits_{i=1}^n \varepsilon_i v_i \right\| \leq \sqrt{n}$.

Séance du 16/06 : Espaces vectoriels normés, suites, fonctions usuelles

---

Ex 78 : [Mines] Déterminer les sous-groupes compacts de $(\mathbb{C}^* \times)$.

Ex 79 : [Mines] Soient C une partie convexe d'un espace vectoriel normé E, X une partie de E telle que $C \subset X \subset \overline{C}$. Montrer que X est connexe par arcs.

Ex 80 : [Mines] Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\|P\|_Q = \sup\limits_{x \in [-1,1]} |PQ(x)|$.

1. Montrer que $\|.\|_Q$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

2. À quelle condition sur Q la norme $\|.\|_Q$ est-elle équivalente à $\|.\|_1$ (norme associée au polynôme égal à 1) ?

3. Soit $c \in [-1, 1]$ une racine de Q. Trouver $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(c) = 1$ et $P'(c) = 0$ et : $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{c\},\ 0 \leq P(x) < 1$.

4. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|P^n\|_Q = 0$. Qu'en déduire ?

Ex 81 : [Mines] Soit $\alpha > 1$. On considère l'équation : $(E_n) : \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(kx+n^2) = \alpha n^{2n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) possède une unique solution strictement positive. On la note x_n.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ x_n < 2\alpha$.
3. Montrer la convergence et calculer la limite de la suite (x_n).

Ex 82 : [Centrale] On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients dans $[-1,1]$.

1. Montrer la continuité du déterminant sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que le déterminant admet un maximum α sur $\mathcal{A}$.
3. Montrer que le maximum est atteint en une matrice inversible A de déterminant strictement positif et à coefficients dans $\{-1,1\}$.
4. Montrer que $\alpha \leq n^{n/2}$, avec égalité si et seulement si les colonnes de A sont deux à deux orthogonales pour le produit scalaire euclidien canonique.

Ex 83 : [Centrale] Soit $A = (a_0,\dots,a_n)$ dans $\mathbb{N}^{n+1}$ avec $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$. On définit pour P dans $\mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_A = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}|P(a_k)|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_A$ est une norme.
2. Pour P dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, montrer qu'il existe une unique famille $(b_0,\dots,b_n)$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $X^n - P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{j\neq k}(X-a_j)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k = 1$.
3. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a : $\displaystyle\prod_{j\neq k}|a_k - a_j| \geqslant \frac{n!}{\binom{n}{k}}$.
4. En déduire $\|X^n - P\|_A \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
5. Calculer $d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])$ dans le cas où $A = (0,1,\dots,n)$.

Ex 84 : [X] Si f est une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on note $V(f)$ la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble $\left\{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|f(a_{k+1})-f(a_k)|,\ n\in\mathbb{N}^*,\ 0 \leq a_0 \leq a_1 ... \leq a_n \leq 1\right\}$. On note VB l'ensemble des fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $V(f) < +\infty$.

1. Montrer que VB est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions f de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ contenant les fonctions monotones et lipschitziennes.
2. Donner un exemple de fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ n'appartenant pas à VB.
3. Montrer qu'une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ est dans VB si et seulement si elle est différence de deux fonctions croissantes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
4. Soit f une fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
   i. Pour tout fonction g de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, si $V(g) < +\infty$, alors $V(f\circ g) < +\infty$;
   ii. f est lipschitzienne.