Séance du 15/05 : Algèbre linéaire

Ex 1 : [CCINP 2024] Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$ à l'aide du lemme des noyaux.

2. Montrer l'équivalence suivante :

  a. $u \circ p = p \circ u$, (ii) $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ sont stables par u.

  b. Quel lien existe-t-il entre $\text{rg}(p)$ et $\text{Tr}(p)$?

3. Tout endomorphisme f vérifiant $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ est-il nécessairement un projecteur ?

Ex 2 : [ENSEA 2024] Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F)^2$.

a. Montrer que

$$\text{Im}(f + g) \subseteq \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$$

b. Montrer que

$$|\text{rg}(f) - \text{rg}(g)| \leq \text{rg}(f + g) \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$$

On suppose que $E = F$, que $f \circ g = 0_{L(E)}$ et que $f + g \in \text{GL}(E)$.

c. Montrer que

$$\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g).$$

Ex 3 : [CCINP 2024] Soit E un espace vectoriel de dimension n, avec $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme nilpotent d'indice $p > 0$ tel que $\text{rg}\,(u) = n - 1$.

1. Soit F un sous espace de E stable par u et $u|_F$ sa restriction à F. Déterminer $\dim(ker(u|_F))$ et montrer que $\dim(u(F)) = \dim(F) - 1$.

2. Déterminer $\text{rg}\,(u^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Ex 4 : [IMT 2024] Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On définit l'application T, telle que :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = (x - 1)\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 (t-1) f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme.

2. Calculer $T(f)(0)$ et $T(f)(1)$, pour tout $f \in E$.

3. Montrer que $T(f)$ est C^2 sur $[0,1]$ pour tout $f \in E$.

4. Déteminer $\text{Ker}\,T$.

5. On note G l'ensemble des applications de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ qui s'annulent en 0 et en 1. Montrer que $\text{Im}\,T = G$.

6. Déterminer les éléments propres de T.

Ex 5 : [CCINP 2024]

1. Énoncer le lemme de décomposition des noyaux.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de polynôme minimal : $\pi_f = \left(X^2+1\right)\left(X^2+4\right)$.

2. Montrer qu'il existe $x, y \in E$ non nuls tels que : $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.

3. On suppose que $\dim E = 4$. Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

Ex 6 : [Navale 2023] Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ et $p_1, \ldots, p_n$ des endomorphismes non nuls vérifiant $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$, où δ est le symbole de Kronecker.

1. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Im}(p_i)$, avec $1 \leqslant i \leqslant n$, sont en somme directe.

2. Montrer que les p_i sont de rang 1 .

Séance du 19/05 : Intégration

Ex 7 : [CCINP 2023] On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2,\ u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2$

1. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$:

$$\int_1^n (\ln(t))^2 \mathrm{d}t \leq u_n \leq \int_2^{n+1} (\ln(t))^2 \mathrm{d}t$$

3. Pour $x \geq 1$, calculer $\displaystyle\int_1^x (\ln(t))^2 \mathrm{d}t$ et en trouver un équivalent en $+\infty$ en fonction de $x \mapsto x(\ln(x))^2$.

4. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq 2}$ et en déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{u_n}$.

Ex 8 : [IMT 2024] On cherche à déterminer un équivalent de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\, \mathrm{d}x$.

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\, \mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I = J$.

2. Calculer $I + J$.

3. En déduire I.

4. Effectuer le changement de variable $t = n^{4/3}x$ dans l'expression de I_n.

5. Déterminer la limite de $\left(n^{5/3} I_n\right)$. En déduire un équivalent de I_n.

Ex 9 : [IMT 2024] Déterminer $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\left(x+\frac{1}{2}\right)^n}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

Ex 10 : [CCINP 2024] On pose, pour $(n,p)\in\mathbb{N}^2, a_{n,p}=\int_0^1 x^n(\ln x)^p\ \mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de $a_{n,p}$ et calculer cette expression.

2. On considère $\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{a_{n,p}}$. Justifier son existence et calculer sa valeur.

3. La famille $\left(\frac{1}{a_{n,p}}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Ex 11 : [CCINP 2024] On définit la fonction $g(x)=\int_0^{\infty}\frac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,(t)}{t}\,dt$.

1. Montrer que cette fonction est intégrable sur ${\mathbb{R}_+}^*$

2. Montrer que cette fonction est dérivable sur ${\mathbb{R}_+}^*$ et calculer $g'(x)$.

3. Vérifier que $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$.

4. Que vaut $g(x)$?

Ex 12 : [IMT 2 2023] Soit $f : x\mapsto\int_0^{x^2}\frac{\ln(1+t)}{t}\ \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et exprimer sa dérivée.

2. Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$. Est-elle est dérivable en 1 ? Pourquoi ?

3. Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0 .

Séance du 21/05 : Algèbre générale

Ex 13 : [IMT 2024] Soit $\mathcal{U}_n=\{z\in\mathbb{C}\,/\,z^n=1\}$ et $\mathcal{U}=\{z\in\mathbb{C}\,/\,|z|=1\}$.

1. Montrer que $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n\in\mathcal{U}$

2. On cherche à savoir s'il existe un entier n tel que $\left(\frac{3+4i}{5}\right)^n=1$.

On pose a_k la partie réelle et b_k la partie imaginaire de $(3+4i)^k$.

- ***a.*** Formulez a_{k+1} et b_{k+1} en fonction de a_k et b_k. Puis montrez que a_k et b_k sont des entiers relatifs pour tout entier k.
- ***b.*** Montrez que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, le reste de a_k par 5 est 3 et le reste de b_k par 5 est 4.
- ***c.*** Concluez.

Ex 14 : [IMT 2024] Par combien de zéros se termine 2024!

Ex 15 : [IMT 2024] Soit $(G,*)$ un groupe. On note $\mathrm{Aut}(G)$ l'ensemble des automorphismes de G. Soit $a \in G$ et $\phi_a : \begin{cases} G & \to & G \\ x & \mapsto & a*x*a^{-1} \end{cases}$.

1. On considère $\phi : \begin{cases} G & \to & \mathrm{Aut(G)} \\ a & \mapsto & \phi_a. \end{cases}$.

   Montrer que ϕ est un morphisme de groupes.
2. Montrer que $\{\phi_a / a \in \mathbb{R}\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$.

Ex 16 : [IMT 2024] Résoudre $x^2+x+1=0$ dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Ex 17 : [IMT 2024] Factoriser X^8+X^4+1 dans $\mathbb{R}[X]$.

Ex 18 : [IMT 1 2022] Pour un anneau A, on dit qu'un idéal I de A est premier si et seulement si :
$\forall (x,y) \in A^2, xy \in I \implies x \in I$ ou $y \in I$.
Soit A un anneau commutatif dont tous les idéaux sont premiers, montrer que A est un anneau intègre, puis que A est un corps.

Séance du 22/05 : Probabilité, dénombrement

Ex 19 : [CCINP 2023] On dispose d'une urne contenant $n \in \mathbb{N}$ ($n \geqslant 2$) boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue des tirages successifs avec remise. Soit X_n la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la première boule différente de la première tirée.

1. Donner la loi de X_n.
2. Justifier que X_n admet une espérance finie et la calculer.
3. On note Y_n la variable aléatoire correspondant au rang où pour la première fois toutes les boules ont été tirées au moins une fois.
   a. Donner la loi de Y_2.
   b. Donner la loi de Y_3.

Ex 20 : [IMT 1 2023] On se place dans $A = \{1, \ldots, n\}$. On choisit F et G deux parties de A de manière équiprobable et indépendante. Soit $i \in A$.

1. Montrer que $P(i \in F) = 1/2$.
2. Montrer que les événements $(i \in F)$ et $(j \in G)$ sont indépendants pour $j \neq i$.

Ex 21 : [IMT 2024] On considère une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On pioche les boules 2 par 2 et sans remise. Quelle est la probabilité que l'on tire exactement une boule blanche et une boule noire à chaque tirage ?

Ex 22 : [IMT 2024] On a N coffres. Avec une probabilité p, un trésor a été placé dans l'un de ces coffres, chaque coffre pouvant être choisi uniformément. On a ouvert $N-1$ coffre sans trouver le trésor, quelle est la probabilité qu'on trouve le trésor dans le dernier coffre ?

Ex 23 : [CCINP 2024] Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit le taux de panne de X comme la suite (x_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geq n)$. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}^\star$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(Y = n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que la loi de Y est bien une loi de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$.
   i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(X \geq n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1 - x_k)$.
   ii. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction des x_k.
3. Déterminer les variables aléatoires réelles discrètes ayant un taux de panne constant.
4. Déterminer le taux de panne de Y.
5. Soit (U_k) une suite de variabales aléatoires discrètes indépendantes à valeurs incluses dans $[0,1]$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose $Z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ U_k(\omega) > x_k \\ \min\{k \in \mathbb{N},\ U_k(\omega) \leq x_k\} & \text{sinon} \end{cases}$.
   Montrer que Z et X suivent la même loi.

Ex 24 : [St-Cyr 2024] Un groupe de n personnes souhaite rentrer dans un bâtiment. Il y a un vigile devant le bâtiment qui laisse rentrer un nombre aléatoire non nul de personnes à chaque minute. On note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de minutes nécessaire pour que le groupe entier soit rentré.

1. Montrer que : $\forall k \geqslant 2,\ P(X_n = k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=k-1}^{n-1} P(X_i = k-1)$
2. Montrer que $E(X_n) = 1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} E(X_i)$
3. Exprimer $E(X_n)$ en fonction de $E(X_{n-1})$ et démontrer l'équivalent de la question 4.

Séance du 26/05 : Matrices et déterminant

Ex 25 : [CCINP 2024] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang un.

1. Montrer que $M = CL$ où C une matrice colonne non nulle et L une matrice ligne non nulle.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{rg}(AB - BA) = 1$. Calculer $(AB - BA)^2$.

Ex 26 : [IMT 2024]

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-m \\ m-2 & 0 & 1 \\ 2m & m-2 & m-2 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de M en fonction de m.
2. Résoudre le système $\begin{cases} 2y + (2-m)z = 2-m \\ (m-2)x + z = 1 \\ 2mx + (m-2)y + (m-2)z = m-2 \end{cases}$.

Ex 27 : [IMT 2024] Soit A une partie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle centre de A l'ensemble des matrices commutant avec tous les éléments de A.

1. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\text{Vect}(GL_n(\mathbf{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire le centre de $GL_n(\mathbf{R})$.

Ex 28 : [CCINP 2024] Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $f^2 = 0$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et le rang de f.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Montrer que si deux matrices non nulles M_1 et M_2 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifient $M_1^2 = M_2^2 = 0$, alors elles sont semblables.
4. Montrer que deux matrices carrées quelconques mais semblables ont le même rang.
5. Deux matrices non nulles M_1 et M_2 de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ vérifiant $M_1^2 = M_2^2 = 0$ sont-elles nécessairement semblables ?

Ex 29 : [IMT 1 2023] Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Montrer que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

Ex 30 : [IMT 2 2023] Calculer $\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & & & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & & & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

Séance du 28/05 : Séries, suites et séries de fonctions

<u>Ex 31</u> : [IMT 2024] Soit $a > 0$ un réel. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :
$u_n = \text{Arctan}\,(n+a) - \text{Arctan}\,(n)$.
Étudier la nature de la série de terme général u_n.
Indication : on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis.

<u>Ex 32</u> : [CCINP 2023] Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $v_n(x) = n^x e^{-nx}$.
Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de S.
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Donner la limite de S en $+\infty$ à l'aide du théorème de la double limite.
4. $\displaystyle\sum_{n \geq 0} v_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, +\infty[$?
5. S est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?

<u>Ex 33</u> : [CCINP 2023] On considère la suite définie pour tout n par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1. Montrer que $(u_n)_n$ tend vers 0.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k = \int_0^1 \frac{2}{3+t^2} dt$.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{3+t^2} dt$.

<u>Ex 34</u> : [Navale 2024] On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ F_n(x) = \sin x \cos^n x$.

1. Étudier la convergence de la suite (F_n).
2. Étudier la convergence de (G_n) où $G_n = nF_n$.
3. On note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} G_n(x)\,\mathrm{d}x$. Calculer I_n et déterminer sa limite.

<u>Ex 35</u> : [IMT 2024] Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-x\sqrt{n})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Déterminer un équivalent simple en 0 de f.

Ex 36 : [CCINP 2024] On définit une suite $(u_n)_n$ de fonctions en posant :

$$\forall n \geqslant 2,\ \forall t \in]0,1],\ u_n(t) = \frac{t^{n-1}\ln(t)}{n}.$$

1. Calculer $\|u_n\|_\infty$.
2. Montrer que la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}$ est intégrable sur $]0,1[$.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.

Séance du 02/06 : Réduction

Ex 37 : [CCINP 2023] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A de multiplicité $p \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\bar{\omega}$ est une valeur propre de A de multiplicité p.
2. i. Montrer que le polynôme $X^3 - 3X - 4$ admet une unique racine réelle.
   ii. On suppose que $A^3 - 3A - 4\mathrm{I}_n = 0$. Montrer que $\det(A) \geq 0$.
3. On suppose que $A^2 + A + \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que n est pair.

Ex 38 : [CCINP 2024]

1. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(R)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(R)$ telle que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad a_{i,i} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

   Montrer que A est inversible
3. On pose : $L_i = \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|,\ C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{j,i}|,\ L = \max_{1 \leq i \leq n}(|a_{i,i}| + L_i),\ C = \max_{1 \leq i \leq n}(|a_{i,i}| + C_i)$.
   Soit λ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $|\lambda - a_{i,i}| \leq L_i$.
   Puis que $\lambda \leq \min(C, L)$.
4. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   Montrer que pour chaque valeur propre de A il existe α tel que $\lambda = 2 \times cos(\alpha)$
   Déterminer les valeurs propres et vecteurs propres de A

Ex 39 : [IMT 2024] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle trigonalisable ? A est-elle diagonalisable ?

2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = A$.

3. i. Montrer que $\{0\} \subset Sp(M) \subset \{-1, 0, 1\}$.
ii. Montrer que la dimension des sous espaces propres de M valent 1.
iii. Résoudre $M^2 = A$.

Ex 40 : [IMT 2024] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et admettant n valeurs propres distinctes. On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

1. Exprimer le polynôme caractéristique de M en fonction de celui de A.

2. La matrice M est-elle diagonalisable ?

Ex 41 : [IMT 2024] Soit l'endomorphisme $f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & \left(X^2 + X\right) P(1) + \left(X^2 - X\right) P(-1) \end{cases}$.

1. Déterminer des bases de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

2. Déterminer les valeurs propres de f.

3. f est-il diagonalisable ?

Ex 42 : [CCINP 2024] Soit $n \geq 2$. Soit $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$

1. On suppose qu'il existe M $\in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

a. Montrez que pour tout $P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = MP(B)$.

b. Montrez que $Sp(A) \cap Sp(B) = \emptyset$.

2. Montrer la réciproque.

Séance du 04/06 : Séries entières, dérivation

Ex 43 : [CCINP 2023] On considère : $\sum a_n x^n$ série entière de rayon R, de somme $f(x)$, $\sum b_n x^n$ série entière de rayon R', de somme $g(x)$, et $\sum c_n x^n$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$.

1. Que dire du rayon de convergence de la série $\sum c_n x^n$? Que dire de la somme de la série ? (Aucune démonstration n'est exigée).

2. Donner le rayon de convergence et la somme de la série suivante : $\sum_{n \geqslant 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

Ex 44 : [CCINP 2023] On définit la suite réelle (I_n) par : $I_0 = I_1 = 1$ et $\quad \forall n \geqslant 2 \quad I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$.

2. Donner une équation differentielle du premier ordre vérifiée par f.

3. Donner l'expression de f, le rayon de convergence, exprimer I_n.

Ex 45 : [IMT 2024] Soit $a \in [-1, 1]$; soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = af(ax)$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Exprimer $f^{(n)}$ pour tout n.

3. Déterminer toutes les solutions du problème.

Ex 46 : [CCINP 2024] Déterminer les développements en série entière de $x \mapsto \ln\left(1 + x - 2x^2\right)$ et $x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ en 0.

Ex 47 : [ENSEA 2024] Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$; puis calculer sa somme pour $x \geqslant 0$.

Ex 48 : [Dauphine 2023] Trouver la limite de la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \tan\left(\frac{1}{k+n}\right)$.

Séance du 05/06 : Espaces euclidiens et préhilbertiens

Ex 49 : [CCINP 2023] On note $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

2. Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \, \mathrm{d}t$ soit minimal :

- en construisant une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$;
- en recherchant a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$.

Ex 50 : [CCINP 2023] Soient E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$,

1. Soient $\lambda \in \operatorname{sp} u$ et x un vecteur propre associé. Montrer que $\|u^*(x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$. Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.
2. Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.
3. Montrer que les espaces propres de u sont orthogonaux.
4. Montrer que, si u est diagonalisable, alors u est autoadjoint.

Ex 51 : [CCINP 2024] Soit E espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0$.

1. Montrer que : $\forall y, z \in E,\ \langle u(y), z\rangle = -\langle y, u(z)\rangle$.

2. Montrer que $\operatorname{Im}(u)$ et $\operatorname{Ker}(u)$ sont supplémentaires orthogonaux.

3. ***a.*** $u|_{\operatorname{Im}(u)}$ admet-il des valeurs propres ?

b. Déterminer les polyômes de $\mathbb{R}[X]$ sans racines réelles.

c. En déduire que $\operatorname{rg}(u)$ est pair.

Ex 52 : [CCINP 2024] E espace euclidien muni du produit scalaire $\langle ., .\rangle$
$(e_1, ..., e_p)$ est une famille de vecteurs de E telle que pour tout $i \neq j$: $\langle e_i, e_j\rangle < 0$.

1. Comparer pour tout $i \neq j$: $\lambda_i\lambda_j\langle e_i, e_j\rangle$ avec $|\lambda_i||\lambda_j|\langle e_i, e_j\rangle$ pour des λ_k réels.

2. Comparer $\|\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i e_i\|^2$ et $\|\sum_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| e_i\|^2$

En déduire que $\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i e_i = 0 \implies \sum_{i=1}^{p-1} |\lambda_i| e_i = 0$

3. Montrer que toute famille de $p-1$ vecteurs extraite de $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre

---

Ex 53 : [IMT 2024] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^{2022} = A^{2024}$.

1. Montrer que $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}^2 = rg(A)$.

2. Le résultat reste-t-il vrai si A est seulement diagonalisable ?

Ex 54 : [IMT 2024] Soit $E = \mathbb{R}^3$. Considèrons le plan $P : x + 2y + z = 0$. Déterminer la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P.

Séance du 11/06 : Équations différentielles, calcul différentiel, fonctions vectorielles

---

Ex 55 : [IMT 2024] Soit $f : (x, y) \mapsto 3xy - x^3 - y^3$. Étudier les extremas de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 56 : [CCINP 2023] $E=\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni d'une norme sous-multiplicative $\|.\|$, ie :
$\forall (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\|AB\|\leq\|A\|\|B\|$.

1. Soit $H\in E$, $\|H\|<1$, montrer que I_n-H est inversible, d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}H^n$
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans E
3. Soit $f:\begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^{-1}\end{cases}$.
   i. Montrer que f est différentiable en I_n et que $df(I_n)(H)=-H$
   ii. Montrer que f est différentiable en tout point de $GL_n(\mathbb{R})$
   (on remarquera que $(M+H)^{-1}=(M(I_n+M^{-1}H))^{-1}$).

Ex 57 : [IMT 2 2023] On recherche les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant (1) :
$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)+\displaystyle\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=1+x.$

1. Trouver toutes les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0 .
2. Montrer que, si f vérifie (1), alors elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $(E):y''+y=0$.
3. Résoudre (E).
4. Trouver toutes les solutions de (1).

Ex 58 : [St Cyr 2023] On note (E) l'équation différentielle $t^2y''-2y=3t^2$.

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène associée à (E) de la forme $t\mapsto t^\alpha$ (avec $\alpha\in\mathbb{R}$) sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire une base de l'espace des solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Ex 59 : [CCINP 2022] $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/x>0 \text{ et } y>0\}$
Soit $\Phi:\begin{array}{ccc}\Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (x,y) & \longmapsto & (xy,\dfrac{x}{y})\end{array}$

1. Montrer que Φ est bijective et déterminer Φ^{-1}.
2. On pose $(u,v)=\Phi(x,y)$ et $f(x,y)=F(u,v)$.
   Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en fonction des dérivées partielles de F.
3. Résoudre $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)-2f(x,y)+2=0$
4. Résoudre $x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}-y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=0$.

Ex 60 : [IMT 2024] Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ admettant une unique valeur propre λ.

1. Montrer que $A-\lambda I_n$ est nilpotente.
2. Soit le système différentiel $(\mathcal{E}):Y'=AY$.
   Montrer que les solutions de $(\mathcal{E})$ sont bornées si et seulement si$A=\lambda I_n$ et $\lambda\in i\mathbb{R}$.

Séance du 12/06 : Variables aléatoires

Ex 61 : [IMT 1 2023] On possède une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On réalise deux tirages successifs sans remise. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la première boule tirée et Y celle correspondant au numéro de la seconde.

1. Donner la loi de X.
2. Donner la loi de Y.
3. Calculer $V(X)$, $V(Y)$ et $V(X+Y)$.

Ex 62 : [CCINP 2023] Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un univers probabilisé fini.
Soit X, Y deux variables aléatoires.
Soit $(i,j) \in \{1, \ldots, n+1\}^2$.
On définit $a_{i,j} = P(X=i, Y=j) = \dfrac{1}{2n}$ si $|i+j-(n+2)| = 1$ et $a_{i,j} = P(X=i, Y=j) = 0$ sinon.

1. Montrer que $(a_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\ldots,n+1\}^2}$ définit une loi de probabilité de couple.
2. Expliciter A, la matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j}$, et montrer que A est diagonalisable.
3. Donner les lois marginales de X et Y.
4. On pose $b_{i,j} = P(X=i|Y=j)$ les coefficients de la matrice B.

   Exprimer B et montrer que $v = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \ldots \\ P(X=n+1) \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B.

Ex 63 : [St Cyr 2023] Soit $(X_n)_n \geqslant 1$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $C_n = \operatorname{card}\{X_1, \ldots, X_n\}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbf{E}(C_n) \leqslant k + n\mathbf{P}(X_1 \geqslant k)$.
2. En déduire que $\mathbf{E}(C_n) = o(n)$ quand $n \to +\infty$.

   Dans la suite, on suppose que les X_k sont d'espérance finie.
3. Montrer que $\mathbf{P}(X_1 \geqslant k) = o\left(\dfrac{1}{k}\right)$ quand $k \to +\infty$.
4. En déduire que $\mathbf{E}(C_n) = o(\sqrt{n})$ quand $n \to +\infty$.

Ex 64 : [CCINP 2024] Soit X une variable aléatoire définie d'un espace probabilisé dans $\mathbb{N}^*$. On définit :
$\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = \min(X, n)$.
On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q = 1-p$.

1. a. Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X \geqslant k) = q^{k-1}$.
   b. En déduire la loi de Y_n.
   c. Montrer que Y_n admet une espérance qui est $E(Y_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
   d. Calculer la fonction génératrice de Y_n
2. Montrer que : $\forall n, k \in \mathbb{N},\ P(X > k+n \,|\, X > k) = P(X > n)$ si et seulement si X suit une loi géométrique.

Ex 65 : [IMT 2024] Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ des variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi de Bernouilli de paramètre $p \in]1;0[$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Soit M la matrice définie par : $M_{i,j} = X_iX_j$

1. Quel est le lien entre M et X ?
2. Quel est le lien entre M^2 et $tr(M)$?
3. Quel est la loi suivie par $tr(M)$?
4. Quel est la loi de $rg(M)$?
5. Quel est la probabilité pour que M soit une matrice de projection ?

Ex 66 : [IMT] On effectue des lancers successifs d'une pièce équilibrée. On convient qu'on gagne 1 point à l'issue d'un lancer si celui-ci est différent du précédent, 0 point, sinon. Soit $n \in \mathbb{N}^{\star}$. On note X_n la variable aléatoire correspondant au gain total au bout de n lancers.

1. Déterminer $E(X_2)$ et $E(X_3)$.
2. Pour $n \geq 2$, déterminer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n-1)$.
3. Pour $k \in \mathbb{N}$ convenable, exprimer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ en fonctions de $\mathbb{P}(X_n = k)$ et $\mathbb{P}(X_n = k-1)$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $Q_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k)x^k$. Montrer que $Q_{n+1}(x) = \left(\dfrac{1+x}{2}\right) Q_n(x)$.
5. En déduire une expression de $Q_n(x)$, puis la loi de X_n.

Séance du 16/06 : Espaces vectoriels normés, suites, fonctions usuelles

---

Ex 67 : [CCINP 2022] Une matrice $A = [a_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si tous ses coefficients sont positifs et : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. On considère la norme infinie $\|.\|_\infty$ standard sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que : $\forall X \in \mathbb{C}^n,\ \|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.
3. En déduire que pour toute valeur propre complexe λ de A, on a : $|\lambda| \leq 1$.
4. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe et stable par produit matriciel.

Ex 68 : [IMT 1 2023] On pose $E = \mathcal{C}^\infty([0;1])$ que l'on muni de $\|\,.\|_\infty$. On pose $\forall f \in E,\ u(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 \inf(x,t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que u est un endomorphisme continu de E et calculer $|\!|\!|u|\!|\!|$.

Ex 69 : [IMT 1 2023] On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0)=0$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f+f'\|_\infty$ et $N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

1. Montrer que N et N' sont des normes sur E.
2. Montrer que N et N' sont équivalentes. Ind. Exprimer f en fonction de $g = f + f'$.

Ex 70 : [IMT 2024] On appelle une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ toute matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont des réels positifs et la somme de chaque coefficient de la même ligne vaut 1. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est stable par produit matriciel.
2. Étudier la topologie de $\mathcal{S}$ (ouvert, fermé, compact, connexité par arcs).

Ex 71 : [IMT 2024] Soit n un entier supérieur ou égal à 3 . On note (E_n) l'équation $\mathrm{e}^x = nx$, où $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3, (E_n)$ admet exactement deux solutions, notées par la suite α_n et β_n avec $\alpha_n < \beta_n$.
2. Montrer que $\alpha_n > 0$ pour tout $n \geqslant 3$.
3. Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$.
4. Déterminer la limite de (α_n).
5. Donner un équivalent simple de α_n en $+\infty$.
6. Donner un développement asymptotique à deux termes de α_n.

Ex 72 : [IMT 1 2023] On définit, pour x réel, $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. Discuter la continuité de f.
2. Tracer le graphe de f.
3. On définit la suite (x_n) par $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Étudier la monotonie et la convergence de (x_n).