

Ex 1 : (CCP MP 2006 épreuve 1)

Montrer que les deux séries suivantes convergent et calculer leur somme :

1. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{(n-1)!}$.

Correction :

1. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} \sim \frac{1}{n^3}$, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge.

On a la décomposition en éléments simples $\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{1}{2X} - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2(X+2)}$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On a : $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{2(n+2)} =$

$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N+2} \frac{1}{n} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N+1} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} \right)$, car les termes des sommes entre 3 et N se simplifient.

Ainsi quand N tend vers $+\infty$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + 0 \right) + \frac{1}{2} (0 + 0) = \frac{1}{4}.$$

2. Comme on a une série à termes positifs, on va utiliser la règle de d'Alembert. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On

$$a : \frac{\frac{2^{n+1}}{n!}}{\frac{2^n}{(n-1)!}} = \frac{2^{n+1}}{n!} \times \frac{(n-1)!}{2^n} = \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1. \text{ Ainsi la série converge.}$$

$$\text{On a : } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} \underset{p=n-1}{=} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^{p+1}}{p!} = 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p}{p!} = 2e^2.$$