Correction des exercices du 17/03/2025 (Révision algèbre)

Ex 1 : (CCP MP 2016 épreuve 2)
Pour tout entier naturel non nul, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Dans cet exercice, A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Démontrer que les valeurs propres complexes de A prennent au maximum trois valeurs distinctes que l'on précisera.

2. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

3. Démontrer que si A est inversible alors $\det(A) = 1$.

Correction :

1. On a : $X^3 + X^2 + X = X(X^2 + X + 1) = X(X - j)(X - \overline{j})$, avec $j = e^{\frac{2i\pi}{2}}$.
Comme l'ensemble des valeurs propres (complexes) de A sont incluses dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur, alors $Sp(A) \subset \{0, j, \overline{j}\}$.

2. A est annulé par un polynôme scindé à racines simples non nul.

3. Si A est inversible alors 0 n'est pas dans le spectre de A (sinon, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $AX = 0$, donc $\mathrm{Ker}\,(A) \neq \{0\}$).
En regardant A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, j et $\overline{j}$, sont des valeurs propres de même multiplicité, car j est racine de χ_A qui est un polynôme à coefficients réels, donc $\overline{j}$ est aussi racine de χ_A à la même multiplicité. On note m cette multiplicité.
Comme A est diagonalisable sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $m + m = n$ et
$\det(A) = j^m \times \overline{j}^m = (j\overline{j})^m = (|j|^2)^m = 1^m = 1$.