

Ex 1 : (E3A PC 2020)

Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2P(X = n+2) = 3P(X = n+1) - P(X = n).$$

1. On note $p_n = P(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n . En déduire la loi de la variable aléatoire X .
2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.

Correction :

1. On a : $\forall n \in \mathbb{N}, 2p_{n+2} - 3p_{n+1} + p_n = 0$.

C'est une suite récurrente double, donc l'équation caractéristique est $2x^2 - 3x + 1 = 0$. Il est clair que 1 est racine et le produit des racines valant $1/2$, donc l'autre racine vaut $1/2$.

Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = a1^2 + b(1/2)^n = a + \frac{b}{2^n}$.

La série $\sum_{n \geq 0} p_n$ converge et vaut 1. Comme la série géométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge, alors comme

$a = p_n - \frac{b}{2^n}$, pour n dans $\mathbb{N}$, la série $\sum a$ converge. Cela n'est possible que si $a = 0$.

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = \frac{b}{2^n}$.

On doit avoir $1 = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = b \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = b \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2b$, car $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$.

On a donc $b = \frac{1}{2}$, puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2. Soit $Y = X + 1$. On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = P(X = n-1) = \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Ainsi Y suit une loi $\mathcal{G}(1/2)$ et donc admet une espérance et une variance. Ainsi $X = Y - 1$ admet aussi une espérance et une variance et :

$$E(X) = E(Y) - 1 = \frac{1}{1/2} - 1 = 2 - 1 = 1,$$

et

$$V(X) = V(Y) = \frac{1 - 1/2}{(1/2)^2} = \frac{1/2}{1/4} = 2.$$