

Notations et rappels

Dans tout le sujet, n est un entier naturel non nul. On désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, par $\mathbb{R}$ le corps des nombres réels, par $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, par $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs.

On désigne par $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille n à coefficients réels et par $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ son sous $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices symétriques. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A^\top$ sa transposée et $\text{Tr}(A)$ sa trace; on note $\text{Sp}(A)$ le spectre de A , qui est l'ensemble de toutes ses valeurs propres.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire usuel, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. La norme euclidienne associée est notée $\|\cdot\|$. La base canonique, orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, est notée $\mathcal{F}$.
Si $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x^\top$ son transposé.

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives, i.e. l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Ax, x \rangle \geq 0.$$

On remarquera que une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x^\top Ax \geq 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives, i.e. l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \langle Ax, x \rangle > 0.$$

On remarquera que une matrice $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est symétrique positive si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x^\top Ax > 0.$$

La matrice d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel E de dimension finie dans une base $\mathcal{B}$ est notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Soit E un espace vectoriel normé. Dans la suite on considère E muni de la topologie induite par la norme. Pour toute partie A de E , on note $\overset{\circ}{A}$ l'intérieur de A , i.e. le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans A , $\overline{A}$ l'adhérence de A , i.e. le plus petit fermé contenant A . Le bord ∂A d'une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est défini par $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$; c'est l'adhérence de A privée de l'intérieur de A . Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. A est dense dans B si $\overline{A} = B$. Soit A une partie de E : A est une partie compacte (un compact) de E si de toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A on peut extraire une suite convergeant dans A .

Si $x \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}_+$, la boule ouverte, respectivement fermée, de centre x et de rayon r est notée $B(x, r)$, respectivement $\overline{B}(x, r)$. La boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour la norme $\|\cdot\|$ est notée B_2^n . La sphère unité est notée S^{n-1} .

Soit E un espace vectoriel et soit A une partie de E . A est une partie convexe si, pour tout u et pour tout v éléments de A , le segment $[u, v] = \{x \in E, \exists t \in [0, 1] \text{ tel que } x = (1-t)u + tv\}$ est inclus dans A .

L'espérance d'une variable aléatoire X définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est notée, sous réserve d'existence, $E(X)$.

Définition 1. Une variable aléatoire X définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suit une loi de Rademacher si $X(\Omega) = \{-1, 1\}$ et si $P(X = 1) = P(X = -1) = \frac{1}{2}$.

Dans tout le sujet, on pourra utiliser librement l'inégalité suivante :

Théorème 2. (inégalité arithmético-géométrique). Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_m) \in (\mathbb{R}_+)^m$. Alors

$$\left(\prod_{i=1}^m x_i \right)^{1/m} \leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i,$$

avec égalité si, et seulement si, $x_1 = \dots = x_m$.

Le sujet est composé d'un vrai/faux, d'un exercice préliminaire et d'un problème en huit parties. Les résultats de l'exercice préliminaire peuvent être utilisés durant le problème.

Vrai/faux

Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. On justifiera soigneusement la réponse.

1. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, la fonction $x \longmapsto \int_0^x (x-t)f(t)dt$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée seconde est f .
2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ est convergente et est nulle.
3. Il existe une probabilité P sur $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(\{k\}) = \frac{1}{k(k+1)}.$$

4. Si X et Y sont deux variables aléatoires définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ suivant toutes les deux des lois de Rademacher. Alors la variable aléatoire XY suit une loi de Rademacher.
5. Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. On suppose que A est dense dans B et que B est dense dans E . Alors A est dense dans E .
6. La réunion de deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.
7. La seule partie convexe dense de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$.

Exercice préliminaire

8. Soit Φ l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ par $\Phi(A, B) = \text{Tr}(AB^\top)$. Montrer que Φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite de l'exercice, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de la norme associée au produit scalaire Φ . On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme un espace topologique avec la topologie définie par cette norme. Dans la suite, toute partie A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est munie de la topologie induite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (O est un ouvert de A si, et seulement si, il existe un ouvert U de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $O = U \cap A$).

9. (a) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
(b) Énoncer et démontrer une caractérisation similaire des matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ à l'aide de leurs spectres.
10. Soient A une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $B^\top AB \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
11. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sont convexes.
12. Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
13. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
14. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = S$. On notera $R = S^{1/2}$.
15. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Justifier que $S^{1/2}$ est inversible, puis que $(S^{1/2})^{-1} = (S^{-1})^{1/2}$. On notera plus simplement $S^{-1/2}$ la matrice $(S^{1/2})^{-1}$.

Première partie : jauge d'un corps convexe symétrique

Définition 3. Soit C une partie de $\mathbb{R}^n$. On dit que C est un corps convexe si C est compact, convexe et si 0 appartient à l'intérieur de C , c'est-à-dire $0 \in \overset{\circ}{C}$. On dit que C est symétrique si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (x \in C) \iff (-x \in C).$$

On notera que cette notion de « corps convexe » n'est aucunement liée avec la notion de corps en algèbre.

16. Montrer que si C est la boule unité d'une norme N définie sur $\mathbb{R}^n$, alors C est un corps convexe symétrique.

Le but de cette partie est de caractériser les corps convexes symétriques de $\mathbb{R}^n$ comme des boules unités d'une certaine norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour cela, on va introduire la jauge associée à un corps convexe symétrique :

Définition 4. Soit C un corps convexe symétrique. On définit sur $\mathbb{R}^n$ l'application J , appelée jauge de C , par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J(x) = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \frac{1}{\lambda}x \in C \right\}.$$

On se donne maintenant un corps convexe symétrique C .

17. Justifier que J , la jauge de C , est bien définie et que $J(0) = 0$.
 18. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $J(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 0$.
 19. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, $J(\mu x) = \mu J(x)$.
 (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, $J(\mu x) = |\mu|J(x)$.
 20. Montrer que $C = \{x \in \mathbb{R}^n, J(x) \leq 1\}$.
 21. Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}^n$. Soit ε un réel strictement positif. On note :

$$x' = \frac{x}{J(x) + \varepsilon} \quad \text{et} \quad y' = \frac{y}{J(y) + \varepsilon}.$$

Soit $\alpha = \frac{J(x) + \varepsilon}{J(x) + J(y) + 2\varepsilon}$ et $z = \alpha x' + (1 - \alpha)y'$.

- (a) Montrer que x' et y' appartiennent à C . En déduire que $z \in C$.
 (b) En déduire que $J(x + y) \leq J(x) + J(y)$.
 22. (a) Déduire de ce qui précède que J est une norme.
 (b) Quelle est la boule unité de cette norme J ?
 (c) En déduire que $\partial C = \{x \in \mathbb{R}^n, J(x) = 1\}$.
 23. Montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes de $\mathbb{R}^n$ ayant la même boule unité, alors $N_1 = N_2$.

Deuxième partie : généralités sur les ensembles convexes

Soit E un espace euclidien, dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ le produit scalaire. On note $\|\cdot\|_E$ la norme associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$.

Dans toute cette partie, on désigne par C un convexe compact de E .

24. Soit $a \in E$.
 (a) Montrer qu'il existe $x_a \in C$ tel que $\|a - x_a\|_E = \inf_{x \in C} \|a - x\|_E$. Justifier que si $a \notin C$, alors $\|a - x_a\|_E > 0$.
 (b) Soient $x_0, x_1 \in C$ tels que $\|a - x_0\|_E = \|a - x_1\|_E = \inf_{x \in C} \|a - x\|_E$. Montrer que $x_0 = x_1$.

Indication : On pourra raisonner par l'absurde et considérer $\frac{x_0 + x_1}{2}$.

Ainsi, pour tout $a \in E$, il existe un unique $x_a \in C$ tel que $\|a - x_a\|_E = \inf_{x \in C} \|a - x\|_E$. On définit alors l'application $\pi_C : E \rightarrow C$ par la relation $\pi_C(a) = x_a$.

25. Soit $a \in E$.
 (a) Soit l'application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \langle a - \pi_C(a), x \rangle_E$. Soit l'ensemble $H = \{x \in E, f(x) = f(a)\}$. Justifier que H est un sous-espace affine de E . Quelles sont les dimensions possibles pour H ?

(b) Vérifier que $f(\pi_C(a)) \leq f(a)$ et que cette inégalité est stricte si $a \notin C$.

(c) Montrer que pour tout $x \in C$, $f(x) \leq f(\pi_C(a))$.

Indication : On pourra considérer l'application $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui à t associe $\|a - ((1-t)\pi_C(a) + tx)\|_E^2$.

(d) Soit $b \in C$ tel que pour tout $x \in C$, $\langle a - b, x - b \rangle_E \leq 0$. Pour tout $x \in C$, montrer que $\|a - x\|_E \geq \|a - b\|_E$ et en déduire que $b = \pi_C(a)$.

Ainsi, on a montré que pour tout $a \in E$, $\pi_C(a)$ est l'unique point b de C tel que pour tout $x \in C$, $\langle a - b, x - b \rangle_E \leq 0$.

26. (a) Soient $a, a' \in E$. Montrer que $\|\pi_C(a') - \pi_C(a)\|_E^2 \leq \langle a' - a, \pi_C(a') - \pi_C(a) \rangle_E$.

(b) En déduire que π_C est 1-lipschitzienne.

27. Soit $a \in \partial C$. Soit $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $E \setminus C$ qui converge vers a .

(a) Montrer que la suite $\left(\frac{a_p - \pi_C(a_p)}{\|a_p - \pi_C(a_p)\|_E} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite de E et qu'elle possède une sous-suite convergeant vers un élément y de E .

(b) Montrer que y est non nul et que pour tout $x \in C$, $\langle y, x - a \rangle_E \leq 0$.

Troisième partie : sur les ellipsoïdes

Définition 5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On appelle ellipsoïde associé à A la partie $\mathcal{E}_A$ définie par

$$\mathcal{E}_A = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle Ax, x \rangle \leq 1\}.$$

Une partie $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^n$ est un ellipsoïde s'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$.

28. Soit $r > 0$. Montrer que $\bar{B}(0, r)$ (la boule fermée de centre 0 et de rayon r) pour la norme $\|\cdot\|$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et préciser une matrice $A_r \in \mathcal{S}_n^{++}$ telle que $\bar{B}(0, r) = \mathcal{E}_{A_r}$.

29. Soit $\mathcal{E}_A$ l'ellipsoïde associé à une matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(a) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Montrer que $B^{-1}\mathcal{E}_A = \{B^{-1}x, x \in \mathcal{E}_A\}$ est un ellipsoïde.

(b) Montrer que $\mathcal{E}_A = A^{-1/2}B_2^n$.

(c) En déduire que $\mathcal{E}_A$ est un corps convexe symétrique.

(d) Quelle est la jauge J_A associée à $\mathcal{E}_A$?

(e) Montrer que cette jauge J_A est une norme euclidienne. On donnera la matrice du produit scalaire associé à cette norme dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

30. Soient $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$ deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$, respectivement associés à A et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{E}_A = \mathcal{E}_B$ si et seulement si $A = B$.

31. Soient $\mathcal{E}_A$ et $\mathcal{E}_B$ deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$, respectivement associés à A et $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathcal{E}_A \subseteq \mathcal{E}_B$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $\langle Bx, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle$.

Définition 6. Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde. On a montré qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{E} = \mathcal{E}_A$. On définit alors la mesure de $\mathcal{E}$, noté $\mu(\mathcal{E})$, par

$$\mu(\mathcal{E}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

32. Dans cette question uniquement, on suppose $n = 3$. Soit r un réel strictement positif. Donner une relation entre $\mu(\bar{B}(0, r))$ et le volume de $\bar{B}(0, r)$.

33. Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Préciser la mesure de $B^{-1}\mathcal{E}$ en fonction de la mesure de $\mathcal{E}$.

34. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et soient $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs. Soit $\mathcal{E} = \left\{ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \leq 1 \right\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et calculer sa mesure.
35. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
- (a) Justifier que A admet n valeurs propres réelles (comptées avec leurs ordres de multiplicité) $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ et qu'il existe une base orthonormée $(f_1, \dots, f_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $A f_i = \lambda_i f_i$.
- (b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer que l'on a

$$\lambda_k = \sup_{V \in G_k} \min_{\substack{x \in V \\ \|x\|=1}} \langle Ax, x \rangle,$$

où G_k désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ de dimension k .

Indication : Si $V \in G_k$, on pourra considérer l'intersection de V avec le sous-espace engendré par $f_k, \dots, f_n$.

36. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux ellipsoïdes de $\mathbb{R}^n$ tels que $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}'$. Montrer que $\mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\mathcal{E}')$.

Quatrième partie : existence d'un ellipsoïde de mesure maximale

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$.

37. Justifier que C est borné et qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}'$ tel que $C \subset \mathcal{E}'$.
38. Soit $\mathcal{A} = \{\mu(\mathcal{E}), \mathcal{E} \text{ ellipsoïde tel que } \mathcal{E} \subset C\}$. Montrer que $\mathcal{A}$ est non vide et majoré. En déduire qu'il admet une borne supérieure notée α .
39. Justifier qu'il existe une suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que, en notant $\mathcal{E}_p$ l'ellipsoïde associé à A_p , pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{E}_p \subset C$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(\mathcal{E}_p) = \alpha$.
40. Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $N(A) = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
41. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On introduit $0 < \lambda_1(p) \leq \dots \leq \lambda_n(p)$ les valeurs propres de A_p . Montrer que la suite $(\lambda_1(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est minorée par un réel strictement positif, puis que la suite $(\lambda_n(p))_{p \in \mathbb{N}^*}$ est majorée.
42. En déduire que la suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est bornée pour la norme N .
43. En déduire qu'il existe $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ strictement croissante et $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $\lim_{p \rightarrow +\infty} A_{\varphi(p)} = A$.
44. Montrer que $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
45. En déduire qu'il existe un ellipsoïde $\mathcal{E}$ de mesure maximale inclus dans C .

Cinquième partie : unicité de l'ellipsoïde de mesure maximale

46. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(1 + e^x)$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.
47. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det^{1/n}(I_n + A) \geq 1 + \det^{1/n}(A)$ avec égalité si, et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $A = \lambda I_n$.
48. En déduire que pour tous $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det^{1/n}(A + B) \geq \det^{1/n}(A) + \det^{1/n}(B)$ avec égalité si, et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $B = \lambda A$. *Indication :* on pourra utiliser la matrice $A^{1/2}$ introduite dans l'exercice préliminaire.
49. En déduire que si A et B appartiennent à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\det\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \sqrt{\det(A)\det(B)}$. Caractériser les cas d'égalité.

50. Montrer l'unicité de l'ellipsoïde de mesure maximale.

Sixième partie : le théorème de John, sens indirect

Définition 7. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. L'application linéaire $\psi_u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \psi_u(v) = \langle u, v \rangle u.$$

Le but des parties 6 et 7 est d'établir le théorème suivant, dû à Fritz John.

Théorème 8. Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. B_2^n est l'ellipsoïde de mesure maximale de C si et seulement si, $B_2^n \subset C$ et s'il existe des points $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1} \cap \partial C$ et des réels $c_1, \dots, c_m > 0$ tels

$$\text{que } \sum_{i=1}^m c_i \psi_{u_i} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

51. Soit $u \in \mathbb{R}^n$, non nul.

- (a) Déterminer le noyau et l'image de ψ_u , ainsi que leurs dimensions.
- (b) Montrer que ψ_u est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
- (c) Déterminer la trace de ψ_u .
- (d) Déterminer la matrice de ψ_u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Dans les questions numérotées de 52 à 53h, C est un corps convexe symétrique contenant B_2^n . On suppose de plus qu'il existe des points $u_1, \dots, u_m$ appartenant à $\partial C \cap S^{n-1}$ et des réels strictement positifs $c_1, \dots, c_m$ tels que $\sum_{i=1}^m c_i \psi_{u_i} = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$.

52. Soit $v \in \partial C \cap S^{n-1}$. D'après la question 27, il existe $y \in \mathbb{R}^n$, non nul, tel que pour tout $x \in C$, $\langle y, x - v \rangle \leq 0$.

- (a) Montrer que l'ensemble $H = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle y, x - v \rangle = 0\}$ est l'hyperplan tangent à S^{n-1} en v .
- (b) En déduire que pour tout $x \in C$, $\langle v, x \rangle \leq 1$.

53. Soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde inclus dans C de mesure maximale.

- (a) Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et des nombres réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ strictement positifs tels que

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n \frac{\langle x, e_j \rangle^2}{\alpha_j^2} \leq 1 \right\}.$$

Quitte à appliquer une isométrie, on suppose maintenant que $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\mathcal{E} = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{\alpha_j^2} \leq 1 \right\}.$$

- (b) Exprimer la mesure de $\mathcal{E}$ en fonction de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$.
- (c) Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \partial C \cap S^{n-1}$. Montrer que $\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j^2 \leq 1$. Indication : On pourra utiliser le vecteur $w = (\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n)$.
- (d) Calculer $\sum_{i=1}^m c_i$.

(e) Montrer que si $x \in \mathbb{R}^n$, alors $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^m c_i \langle x, u_i \rangle^2$.

(f) Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, on pose $u_i = (u_{i,1}, \dots, u_{i,n})$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_i \alpha_j u_{i,j}^2 \leq n.$$

(g) En déduire que

$$\left(\prod_{j=1}^n \alpha_j \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \alpha_j \leq 1.$$

(h) Conclure.

Septième partie : le théorème de John, sens direct

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$ et on suppose que son ellipsoïde de mesure maximale est B_2^n . On note X l'ensemble des points de contact entre C et S^{n-1} , i.e. $X = S^{n-1} \cap \partial C$.

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire Φ défini dans l'exercice préliminaire.

54. Montrer que X est un compact non vide.

On pose $T = \{\text{Mat}_{\mathcal{F}}(\psi_u), u \in X\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où, rappelons-le, $\mathcal{F}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On admet dans toute la suite que $\text{conv}(T)$ (le plus petit convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient T) est un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (théorème de Carathéodory). On souhaite donc montrer que $\frac{1}{n}I_n \in \text{conv}(T)$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $\frac{1}{n}I_n \notin \text{conv}(T)$.

55. Montrer que $\text{conv}(T)$ est inclus dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

56. Montrer que pour toute matrice $M \in \text{conv}(T)$, la trace de M vaut 1.

57. (a) Montrer qu'il existe une forme linéaire f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall M \in \text{conv}(T), \quad f(M) > f\left(\frac{1}{n}I_n\right).$$

(b) Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ unique telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad f(M) = \text{Tr}(HM).$$

Quitte à changer f on peut supposer aussi que $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et que H est de trace nulle (admis). On conserve cette hypothèse dans toute la suite.

58. En déduire que pour tout $u \in \partial C \cap S^{n-1}$, $\langle Hu, u \rangle > 0$.

59. Pour tout $\delta > 0$, on pose $\mathcal{E}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle (I_n + \delta H)x, x \rangle \leq 1\}$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, \alpha[$, $\mathcal{E}_\delta$ est un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ et calculer sa mesure.

60. (a) Montrer qu'il existe $\eta \in]0, \alpha[$ tel que pour tout $\delta \in]0, \eta[$, pour tout $u \in \partial C$,

$$\langle (I_n + \delta H)u, u \rangle > 1.$$

Indication : On pourra utiliser le fait suivant, après l'avoir justifié : pour toute réunion

$$\partial C = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap \partial C) \text{ avec pour tout } i \in I, U_i \text{ ouvert de } \mathbb{R}^n, \text{ il existe } J \subset I \text{ fini tel que}$$

$$\partial C = \bigcup_{i \in J} (U_i \cap \partial C).$$

(b) En déduire que pour tout $\delta \in]0, \eta[$, $\mathcal{E}_\delta \subset C$.

61. Conclure.

Huitième partie : une conséquence du théorème de John

Soit C un corps convexe symétrique de $\mathbb{R}^n$. On note $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde de mesure maximale inclus dans C .

62. On suppose uniquement dans cette question que $\mathcal{E} = B_2^n$. Montrer que $B_2^n \subset C \subset \sqrt{n}B_2^n$.

63. En déduire que $\mathcal{E} \subset C \subset \sqrt{n}\mathcal{E}$.

Dans les questions numérotées de 64 à 66, on se propose de montrer que la constante $\sqrt{n}$ est optimale.

On pose $C = [-1, 1]^n$.

64. Vérifier que C est un corps convexe symétrique.

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipsoïde inclus dans C de mesure maximale. On note $J_{\mathcal{E}}$ la jauge de $\mathcal{E}$. On rappelle qu'il s'agit d'une norme euclidienne.

65. Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui suivent une loi de Rademacher. Montrer que :

$$E \left(\|(X_1, \dots, X_n)\|_{\mathcal{E}}^2 \right) \geq n.$$

66. Conclure.

FIN DU SUJET