CCINP MP

Planche 1 :

1. (ccinp 5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ pour $n \geq 2$.

   1. Si $\alpha \leq 0$, montrer par une minoration très simple que $\sum u_n$ diverge.

   2. Étudier la nature de la série de $\sum u_n$, pour $\alpha > 0$.

   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

   3. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) e^{1/n}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

2. (ex 9) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si w est une valeur propre complexe de A, alors $\overline{w}$ l'est aussi.
   (b) i. Montrer que $X^3 - 3X - 4$ possède une unique racine réelle.
   ii. On suppose dans cette question de $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que $\det(A)$ est positif.
   (c) On suppose dans cette question de $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
   (d) On suppose dans cette question de $A^3 + A^2 + A = 0$.
   i. Montrer que $\text{rg}\,(A)$ est pair.
   ii. Montrer que $tr(A)$ est dans $\mathbb{Z}^-$.

Planche 2 :

1. (ccinp 4)

   1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

   2. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f?(x_0) = \displaystyle\lim_{x\to x_0} f'(x)$.

   3. f dérivable en x_0 n'implique pas que f' a une limite finie en x_0.
   On pourra utiliser $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

2. (ex 10)
   (a) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.
   i. Montrer que $\dim(\text{Ker}\,(A)) = 2$.
   ii. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   (b) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'équation $M^2 + M = A$, d'inconnue M, avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   i. Si M est solution, montrer que M est diagonalisable.
   ii. Résoudre l'équation.

Planche 3 :

1. (ccinp 63) Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(.\,|.\,)$.
   On pose : $\forall x \in E,,\ \|x\| = \sqrt{(x|x)}$.
   Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on note u^* son adjoint.
   1. Un endomorphisme u de E vérifiant : $\forall x \in E,\ (x|u(x)) = 0$ est-il forcément nul ?
   2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
      i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
      ii. $\forall x, y \in E,\ (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
      iii. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
2. (ex 46) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.
   Soit $g : x \mapsto \begin{cases} f(x)/x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.
   (a) Montrer que g est continue sur I, puis dérivable sur I si $n \geq 2$.
   (b) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I\backslash\{0\}$ et que : $\forall x \in I\backslash\{0\},\ g^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n! f^{(k)}(x)}{k! x^{n-k+1}}$.
   (c) Montrer que : $\forall x \in I \setminus \{0\},\ g^{(n)}(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)dt$, grâce à une formule de Taylor avec reste intégrale.

Planche 4 :

1. (ccinp 16) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $u_n : x \mapsto \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$ définie sur $[0, 1]$.
   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$, lorsque la série converge.
   1. Montrer que S est définie sur $[0, 1]$.
   2. Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = \ln(n+1) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
   En utilisant $S(1)$, montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge.
   En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   3. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.
2. (ex 35) Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle .\,, . \rangle$. Soit u un vecteur unitaire de E et pour a dans $\mathbb{R}$ on pose $f_a : x \mapsto x + a \langle x, u \rangle u$.
   (a) Montrer que f_a est un endomorphisme de E.
   (b) i. Montrer qu'il existe un unique a' dans $\mathbb{R}^*$ tel que : $\forall x \in E,\ \|f_{a'}(x)\| = \|x\|$.
      ii. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f_{a'} + Id_E)$ et $\mathrm{Im}\,(f_{a'} + Id_E)$ sont supplémentaires dans E.
   (c) On se replace dans le cas général. Déterminer les éléments propres de f_a.

Planche 5 :

1. (ccinp 7) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\geq 0}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
   1. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   2. On suppose dans cette question (v_n) positive. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
   3. Nature de la série $\sum \dfrac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$.
2. (ex 18) Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a^2 + b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer MM^T. En déduire $\det(M)$.
   (b) Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, donner le rang de M. Si $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, donner le rang de M.
   (c) On pose $w \in \mathbb{C}$ tel que : $w^2 = b^2 + c^2 + d^2$. Quelles sont les valeurs propres de M ? En déduire que si $w \neq 0$, alors M est diagonalisable.

Planche 6 :

1. (ccinp 34)
   Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.
   1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
   2. Démontrer que : x est dans $\overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in A$ et $\lim x_n = x$.
   3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   4. Soient B une autre partie non vide de E. Montrer que $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
2. (ex 5) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.
   (a) Montrer que si u est nilpotent, alors $u^n = 0$.
   (b) Soit $n \geq 2$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que :
   $$A = Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & (0) & \vdots \\ 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \vdots \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (c) Déterminer les matrices X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X^2 = A$.

Planche 7 :

1. (ccinp 108) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   On suppose que la loi du couple (X, Y) vérifie : $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P(X = i, Y = j) = \dfrac{1}{e2^{i+1}j!}$.

   1. Déterminer les lois de X et Y.

   2. **a.** Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.

   b. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

   3. Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

   4. Calculer $P(X = Y)$.

2. (ex 7) Soit $P = X^n - X + 1$, avec $n \geq 2$.

   (a) Montrer que P admet n racines $z_1, ..., z_n$ distinctes sur $\mathbb{C}$.

   (b) Soit la matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $\forall i,j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = \begin{cases} 1 + z_i & \text{si} \quad i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

   Calculer $\det(A)$.

Planche 8 :

1. (ccinp 77) Soit E un espace euclidien.

   1. Soit A un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $(A^{\perp})^{\perp} = A$.

   2. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

   a. Montrer que : $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

   b. Montrer que : $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

2. (ex 44)

   (a) Montrer que pour $n \geq 3$, on a : $\displaystyle\int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt + \frac{\ln(2)}{2} \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(n)}{n} \leq \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}$.

   (b) Montrer que $\ln^2(n) - \ln^2(n-1) = \dfrac{2\ln(n)}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n^2}\right)$.

   (c) On pose $u_n = \dfrac{\ln(n)}{n} - \dfrac{1}{2}\left(\ln^2(n) - \ln^2(n-1)\right)$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2} + c + \varepsilon_n$, avec $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Planche 9 :

1. (ccinp 69) Soit $\begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, avec $a \in \mathbb{R}$.

   1. Déterminer le rang de A.

   2. Pour quelles valeurs de a, la matrice A est-elle diagonalisable ?

2. (ex 49) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^3)^n}$.

   (a) i. Montrer que I_n est bien définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   ii. Montrer que la suite (I_n) converge et calculer sa limite.

   (b) i. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

   ii. En déduire une autre méthode pour calculer la limite de (I_n).

Planche 10 :

1. (ccinp 78) Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et y et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

   1. Soit u un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

      a. Démontrer que : $\forall x, y \in E,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

      b. Démontrer que u est bijectif.

   2. Démontrer que $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

   3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. Prouver que u est dans $O(E)$ si et seulement si $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

2. (ex 52) On pose $\zeta(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$.

   (a) Donner le domaine de définition et le sens de variation de ζ.

   (b) Étudier la continuité de ζ sur son domaine de définition.

   (c) Quelle est la limite de ζ en $+\infty$?

   (d) Montrer que $\zeta(t) \underset{t \to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{t-1}$. On pourra s'aider $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^t}$.

   (e) Montrer que ζ est convexe.

Planche 11 :

1. (ccinp 15) Soit X une partie de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

   1. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Rappeler la définition de la convergence normale de $\sum f_n$ sur X, puis celle de la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur X.

   2. Démontrer que toute série de fonctions, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ normalement convergente sur X est uniformément convergence sur X.

   3. La série de fonction $\sum \dfrac{n^2}{n!} z^n$ est-elle uniformément convergente sur le disque fermé de centre 0 et de rayon $R \in \mathbb{R}_+^*$?

2. (ex 40)

   (a) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices triangulaires supérieures donc tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs) sont des sous-groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), \circ)$.

   (b) Montrer que $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R}) = \{I_n\}$.

   (c) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Soit $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ la base constituée des vecteurs colonnes de A. Soit $\mathcal{B}_{GS} = (v_1, ..., v_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathcal{B}$ grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. À l'aide de ces bases, montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telles que : $A = OT$.

Planche 12 :

1. (ccinp 72) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = ... = f(e_n) = v$ où v est un vecteur donné de E.
   1. Donner le rang de f.
   2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur u)
2. (ex 70) Soit (E) : $(x^2 - 2)y' + xy = -2$.
   (a) Résoudre (E) sur $I =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
   (b) On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times ... \times (2n+1)} x^{2n+1}$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
   (c) On note f la somme de la série entière précédente, trouver une équation différentielle dont f est solution.
   (d) Déterminer une expression simple de f.

Planche 13 :

1. (ccinp 84)
   1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
   2. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
   3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.
2. (ex 60) Soit $r \in]-1, 1[$. On définit $f_n : x \mapsto r^n \cos(nx)$, pour $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction S définie par $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
   (c) En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(x)} = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   (d) Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(nx)dx$.
   (e) En déduire, pour k dans $\mathbb{N}$, l'expression de $I_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{1 + r^2 - 2r\cos(x)} dx$.

Planche 14 :

1. (ccinp 27) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $f_n(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

   1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[0,1]$.

   2. Soit $a \in]0,1[$. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[a,1]$?

   3. La suite de fonctions (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,1]$?

   4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (ex 32) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
   On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (A|B) = tr(A^T B)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.

   (c) On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

   (d) Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr(M)} = 0\}$. Montrer que H est un espace vectoriel de dimension à déterminer.

   (e) Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1. Calculer la distance de J à H.

Planche 15 :

1. (ccinp 6) Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel dans $[0,1[$.

   1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors $\sum u_n$ converge.
   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

   2. Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

2. (ex 38) Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^* = -f$.

   (a) Montrer que si f est injectif, alors n est pair.

   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.

   (c) En déduire que le rang de f est pair.

   (d) Montrer que la seule valeur propre réelle de f est 0.

Planche 16 :

1. (ccinp 79) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
   1. Soit h une fonction continue et positive de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : $\displaystyle\int_a^b h(x)dx = 0 \Rightarrow h = 0$.
   2. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On pose : $\forall f, g \in E,\ (f|g) = \displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$.
   Démontrer que l'on définit aisni un produit scalaire sur E.
   3. Majorer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. (ex 67) On note n et p deux entiers naturels avec n non nul et $p \leq n$.
   On note $N(n, p)$ le nombre de permutation de $\mathfrak{S}_n$ avec p points fixes et on introduit $D(n) = N(n, 0)$ et $D(0) = 1$.
   On considère $f(x)$ la somme de la série entière de terme général $\dfrac{D_n}{n!}x^n$.
   (a) Par dénombrement montrer que $N(n, p) = \dbinom{n}{p} D(n-p)$ et que $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} N(n, p) = n!$.
   (b) Montrer que la fonction f est définie sur $]-1, 1[$ et que $f(x)e^x = \dfrac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.
   (c) En déduire $N(n, p)$.
   (d) Trouver la limite lorsque $n \to +\infty$ de $\dfrac{N(n, p)}{n!}$ en fonction de p. Interpréter.

Planche 17 :

1. (ccinp 12)
   1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$.
   Démontrer que f est continue en x_0.
   2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [01], g_n(x) = x^n$.
   La suite de fonctions $(g_n)_{n \geq 1}$ converge-t-elle uniformément sur $[0, 1]$?
2. (ex 1) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$.
   (a) Soit $a \in \mathbb{C}$ racine de P.
      i. Montrer que $a = 0$ ou $|a| = 1$.
      ii. Montrer que $a = -1$ ou $|a + 1| = 1$.
   (b) En déduire tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P\left(X^2\right) = P(X)P(X-1)$.

Planche 18 :

1. (ccinp 11)

   1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

   2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

   a. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

   b. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

2. (ex 24) Soient $n \in \mathbb{N}$,$n \geq 3$, $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & . \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, on note f l'endomorphisme canoniquement associé à M.

   (a) Déterminer le rang de M.

   (b) Donner les valeurs propres de M et leurs sous espaces propres associés.

   (c) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Planche 19 :

1. (ccinp 82) Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$. On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\varphi(A, A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.

   1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.

2. (ex 55) Soit une suite (a_n) décroissante positive et qui converge vers 0. Pour $x \in [0, 1]$, on note $u_n(x) = a_n x^n (1 - x)$.

   (a) Justifier que (a_n) est bornée.

   (b) Étudier la convergence simple de la série $\sum(u_n)$ sur $[0, 1]$

   (c) Étudier la convergence uniforme de la série (on peut calculer le reste $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$).

   (d) Calculer la limite de $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n$

   (e) Étudier la convergence normale de la série (on peut calculer la norme infinie de u_n)

Planche 20 :

1. (ccinp 17) Soient $A \subset \mathbb{C}$ et (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{C}$.
   1. Montrer que si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur A.
   2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+,\ f_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$. A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$? Justifier.
2. (ex 12) Soit U et V deux vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, la matrice $A = UV^\top$ et le complexe $a = \mathrm{Trace}(A)$.
   (a) Quel est le rang de la matrice A ?
   (b) Calculer $U^\top V$.
   (c) Calculer A^2.
   (d) La matrice A est-elle diagonalisable ?
   (e) Dans le cas où $a \neq 0$, déterminer les sous-espaces propres de A.

Planche 21 :

1. (ccinp 30)
   1. Énoncer le théorème de dérivation sous le signe intégrale.
   2. Soit $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(tx)dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   3. **a.** Trouver une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1 vérifiée par F.
   b. Résoudre (E).
2. (ex 37) Soit E un espace euclidien et u une isométrie vectorielle de E. On pose $v = \mathrm{Id}_E - u$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(v)$ et $\mathrm{Ker}(v)$ sont suplémentaires orthogonaux.
   (b) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k$. Soit $x \in E$.
      i. Soit $z \in \mathrm{Im}(v)$ et $y \in \mathrm{Ker}(v)$ tel que $x = z + y$. Montrer que : $f_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u^k(z) + y$.
      ii. En déduire que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\mathrm{Ker}(v)$.

Planche 22 :

1. (ccinp 63) Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $(.\,|.\,)$.
   On pose : $\forall x \in E, ,\ \|x\| = \sqrt{(x|x)}$. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on note u^* son adjoint.
   1. Un endomorphisme u de E vérifiant : $\forall x \in E,\ (x|u(x)) = 0$ est-il forcément nul ?
   2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que les trois assertions suivantes sont équivalentes :
      i. $u \circ u^* = u^* \circ u$.
      ii. $\forall x, y \in E,\ (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$.
      iii. $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$.
2. (ex 54) On considère la fonction d'une variable réelle : $F : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + \mathrm{e}^{-nx})$.
   (a) Déterminer le domaine D de définition de F.
   (b) La fonction F est-elle continue sur D ?
   (c) Montrer que F est monotone sur D.
   (d) Déterminer le domaine image $F(D)$.

Planche 23 :

1. (ccinp 29) On pose : $\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x,t) = e^{-t}t^{x-1}$.

   1. Démontrer que : $\forall x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors : $\forall x \in]0,+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$.

   2. Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

   3. Démontrer que Γ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

2. (ex 16)

   (a) Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire telle que : $\forall i \in [\![1,n]\!],\ |a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{j\neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

   (b) Soit $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B. Montrer qu'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $|\lambda - b_{i,i}| \leqslant \displaystyle\sum_{j\neq i} |b_{i,j}|$.

Planche 24 :

1. (ccinp 9)

   1. Soit X un ensemble, (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

   2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}e^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

   a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).

   b. La suite de fonctions (f_n) convergence-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

   c. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. La suite de fonctions (f_n) convergence-t-ell uniformément sur $[a,+\infty[$?

   d. La suite de fonctions (f_n) convergence-t-ell uniformément sur $]0,+\infty[$?

2. (ex 32) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques.
   On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ (A|B) = tr(A^TB)$.

   (a) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.

   (c) On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

   (d) Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{tr(M)} = 0\}$. Montrer que H est un espace vectoriel de dimension à déterminer.

   (e) Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1. Calculer la distance de J à H.

Planche 25 :

1. (ccinp 22)

   1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.

   2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon de convergence, la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.
   La série obtenue converge-t-elle pour $x = 1/4$? $x = 1/2$? $x = -1/2$?
   En cas de convergence, la somme de cette série est-elle continue en ces points ?

2. (ex 19) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Justifier que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer le rang de A.
   (c) Déterminer le polynôme minimal de A, le spectre de A et le polynôme caractéristique de A.

Planche 26 :

1. (ccinp 33) Soit $f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} \right.$

   1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.

   3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

2. (ex 17) Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et la matrice : $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer $\det(A)$. On exprimera le résultat sous une forme factorisée.
   (b) Déterminer le rang de la matrice A.
   (c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Préciser la valeurs propres de A ainsi que leur multiplicité. Déterminer le polynôme minimal π_A de A.

Planche 27 :

1. (ccinp 105)

   1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.

   2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
   Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 1/2.

   a. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

   c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

2. (ex 50) Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

   (a) Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et calculer S'.

Planche 28 :

1. (ccinp 71) Soient $P=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x+y+z=0\}$ et $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/x=y/2=z/3\}$.

   1. Montrer que $P\oplus D=\mathbb{R}^3$.

   2. Soit p la projection sur P parallèlement à D. Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}$. Exprimer $p(u)$. Quelle est la matrice de p dans la base canonique ?

   3. Déterminer une base dans laquelle p est diagonale.

2. (ex 59)

   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente pour tout $a\in\,]0,1[$.

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^a \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}dx=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a^n}{n(n+1)}$

   (c) Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente et en déduire sa valeur.

Planche 29 :

1. (ccinp 66)

   1. Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est dans $S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si : $Sp(A)\subset\mathbb{R}_+$.

   2. Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que A^2 est dans $S_n^+(\mathbb{R})$

   3. Soient $A\in S_n(\mathbb{R})$ et $B\in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $AB=BA$. Montrer que : $A^2B\in S_n^+(\mathbb{R})$.

   4. Soit $A\in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe B dans $S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $B^2=A$.

2. (ex 71)

   (a) Déterminer le développement en série entière de la fonction Arcsin.

   (b) Justifier que la fonction f définie par : $\forall x\in\,]-1,1[\,,f(x)=(\operatorname{Arcsin}x)^2$ admet un développement en série entière.

   (c) Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $(1-x^2)y''-xy'=2$.

   (d) En déduire le développement en série entière de f.

Planche 30 :

1. (ccinp 66)

   1. Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est dans $S_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si : $Sp(A)\subset\mathbb{R}_+$.

   2. Soit $A\in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que A^2 est dans $S_n^+(\mathbb{R})$

   3. Soient $A\in S_n(\mathbb{R})$ et $B\in S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $AB=BA$. Montrer que : $A^2B\in S_n^+(\mathbb{R})$.

   4. Soit $A\in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe B dans $S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $B^2=A$.

2. (ex 87) Pour tout $s>1$, on pose $\zeta(s)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$. Soit X une variable aléatoire telle que

$$X(\Omega)=\mathbb{N}^*,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ :\ P(X=n)=\frac{\lambda}{n^s}$$

   (a) Calculer λ. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une espérance. Puis une variance.

   (b) Soit A_n : « n divise X » (avec $n\in\mathbb{N}^*$). Calculer $P(A_n)$. Étudier l'indépendance de A_n et A_m quand $n\wedge m=1$.

   (c) Montrer qu'en notant P l'ensemble des nombres premiers, $\zeta(s)=\displaystyle\prod_{p\in P}\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$.

Planche 31 :

1. (ccinp 94)

   1. En raisonnant par l'absurde, montrer que le système $(S) : \left\{ \begin{array}{lcl} x & \equiv & 5[6] \\ x & \equiv & 4[8] \end{array} \right.$ n'a pas de solution $x \in \mathbb{Z}$.

   2. ***a.*** Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

   b. Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$. Prouver que : $(a|c$ et $b|c) \Leftrightarrow ab|c$.

   3. On considère le système $(S) : \left\{ \begin{array}{lcll} x & \equiv & 6 & [17] \\ x & \equiv & 5[16] & \\ x & \equiv & 4 & [15] \end{array} \right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

   a. Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

   b. *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ de (S). On exprimera les solutions en fonction de la solution particulière x_0.

2. (ex 78) On pose : $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(t^2+1).x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour tout x.

   (b) Exprimer g en fonction de $h : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

   (c) Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

Planche 32 :

1. (ccinp 47)Pour chacune des séries entières de la variable réelle suivantes, déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière sur l'intervalle ouvert de convergence :

   1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n x^{2n}}{n}$.

   2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, avec $\left\{ \begin{array}{l} a_{2n} = 4^n \\ a_{2n+1} = 5^{n+1} \end{array} \right.$.

2. (ex 4) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang un.

   (a) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f^2 = \lambda f$.

   (b) A-t-on : $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$?

   (c) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

      i. Il existe un scalaire c non nul tel que cf soit un projecteur ;

      ii. $f \circ f \neq 0$;

      iii. $E = \mathrm{Im}\,(f) \oplus \mathrm{Ker}\,(f)$.

Planche 33 :

1. (ccinp 81) On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ définie par : $\varphi(A, A') = tr(A^T A')$. On admet que cela définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

   1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   2. Donner une base de $\mathcal{F}^\perp$.
   3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
   4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

2. (ex 85) Soit $n \geqslant 2$, $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des réels strictements positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

   On pose deux fonctions f et g tels que

   $\forall (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \quad f((x_1, ..., x_n)) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \text{ si } \prod_{i=1}^{n} x_i \neq 0 \\ 0 \quad \text{sinon} \end{cases}$ et $g((x_1, ..., x_n)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$.

   On pose également $\Gamma = \{(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, g((x_1, ..., x_n)) = 1\}$.

   (a) Montrer que f admet un maximum μ sur Γ, en particulier sur $\Gamma \cap]0, +\infty[^n$.
   (b) Déterminer μ et $A \in \Gamma \cap]0, +\infty[^n$ tel que $f(A) = \mu$.
   (c) En déduire que

   $$\forall (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \quad \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Planche 34 :

1. (ccinp 54) Soient E l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0.

   1. Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles.
   2. On pose : $\forall u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \ \|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

      a. Prouver que $\|.\|$ est une norme sur E.
      b. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$. Montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$ converge.
      c. Soit f l'application définie sur E par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}$. Montrer que f est continue sur E.

2. (ex 31) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit : $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & -X + \mathrm{tr}(X)A \end{array} \right.$.

   (a) Montrer que u est linéaire.
   (b) Montrer que u est injective si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 1$.
   (c) En déduire une condition pour que u ne soit pas bijective.
   (d) Discuter selon A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'existence de solutions de l'équation $u(X) = B$.

Planche 35 :

1. (ccinp 59) Soit n un entier tel que $n \geq 2$. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ de degré inférieur ou égal à n.
   On pose : $\forall P \in E,\ f(P) = P - P'$.
   1. Montrer que f est bijective de deux manières :
      a. sans utiliser la matrice de f.
      b. en utilisant la matrice de f.

   2. Soit $Q \in E$. Trouver $P \in E$ tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si P est dans E, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
   3. f est-elle diagonalisable ?
2. (ex 73) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \dfrac{n!}{1.3\ldots(2n+1)}$.
   (a) Donner le rayon de convergence R de $\sum a_n x^{2n+1}$.
   (b) Résoudre sur $]-R, R[$ l'équation différentielle $(E)\colon (2 - x^2)y' - xy = 2$.
   (c) Montrer que la somme f de $\sum a_n x^{2n+1}$ est solution de (E) sur $]-R, R[$.
   (d) Étudier la convergence aux bords de l'intervalle de convergence de cette série entière.

Planche 36 :

1. (ccinp 7) Soient $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ deux suites réelles telles que $(v_n)_{n\geq 0}$ est non nulle à partir d'un certain rang.
   1. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
   2. On suppose dans cette question (v_n) positive. Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
   3. Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$.
2. (ex 3) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non colinéaire à I_n tel que $(A + I_n)^3 = 0$.
   (a) Montrer que A est inversible et expliciter son inverse. Donner un exemple d'une telle matrice.
   (b) A est-t-elle diagonalisable ?
   (c) Soit p un entier naturel, exprimer A^p en fonction de A^2, de A et de I_n.

Planche 37 :

1. (ccinp 82) Soit E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie $n > 0$. On admet que, pour tout $x \in E$, il existe un élément unique y_0 de F tel que $x - y_0$ soit orthogonal à F et que la distance de x à F soit égale à $\|x - y_0\|$.
   Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose $\varphi(A, A') = aa' + bb' + cc' + dd'$.
   1. Montrer que $(.|.)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   2. Calculer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel F des matrices triangulaires supérieures.
2. (ex 47) On note $I =]0, +\infty[$ et on fixe une fonction $f\colon I \to \mathbb{R}_+^\star$ telle que :
$$\begin{cases} \forall x \in I,\ f(x+1) = xf(x) \\ f(1) = 1 \\ \phi = \ln(f) \text{ est convexe.} \end{cases}$$
   (a) Tracer l'allure du graphe d'une fonction convexe et y placer trois points A, B et C d'abscisses croissantes. Classer alors, sans justification, les pentes des droites (AB), (BC) et (AC).
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$ et $\forall x \in]0, 1]$:
$$\ln(n) \leq \frac{\phi(n+1+x) - \phi(n+1)}{x} \leq \ln(n+1).$$
   (c) Montrer que $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^\star \times]0, 1]$:
$$0 \leq \phi(x) - \ln\left(\frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}\right) \leq x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
   (d) Montrer alors que f est unique, puis vérifier que f coïncide avec la fonction $\Gamma\colon x > 0 \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ d'Euler.

Planche 38 :

1. (ccinp 91) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
   2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
   3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
   4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.
2. (ex 74) On définit $g\colon x \in \mathbb{R}_+^\star \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+1}\mathrm{d}t$.
   (a) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   (b) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et trouver une équation différentielle simple vérifiée par g.
   (c) En déduire une autre expression (intégrale) de g et un équivalent de g en $+\infty$.

Planche 39 :

1. (ccinp 84)

   1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).

   2. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.

   3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+i)^n = (z-i)^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

2. (ex 76) Soit $k > 0$ et $f\colon x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^1 t^k \sin(xt)\mathrm{d}t$.

   (a) Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis prouver que f vérifie la relation :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ xf'(x) + (k+1)f(x) = \sin(x)$.

   (c) Déterminer le développement en série entière de $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ xy'(x) + (k+1)y(x) = \sin(x)$. Donner, ensuite, le rayon de convergence du développement en série entière d'une telle fonction y.

Planche 40 :

1. (ccinp 56) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

   1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.

   2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

   3. Soit $K = [0,1] \times [0,1]$. Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K, puis le déterminer.

2. (ex 25) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.

   (a) Montrer que u est diagonalisable et discuter de son nombre de valeurs propres p.
   On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ les sous espaces propres associés.

   (b) Soit F un sous espace vectoriel de E. Prouver que F stable par u si et seulement si $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ avec pour tout i de $[\![1;p]\!]$, F_i est un sous espace vectoriel de E_{λ_i}.

Planche 41 :

1. (ccinp 75) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.

   2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à A. Trouver une base (v_1, v_2) dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$. On donnera explicitement les valeurs de a, b, c.

   3. En déduire la résolution du système $\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x + 3y \end{array} \right.$.

2. (ex 75) On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Rappeler la définition de $\lim\limits_{x \to 0} |f'(x)| = +\infty$.
   Montrer que : $\forall A > 0 \quad \forall x > 0 \quad |f'(x)| \geq \displaystyle\int_0^A \frac{t^2}{1+t^2}(1 - xt^2)dt$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$.

Planche 42 :

1. (ccinp 4)

   1. Énoncer le théorème des accroissements finis.

   2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f?(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.

   3. f dérivable en x_0 n'implique pas que f' a une limite finie en x_0.
   On pourra utiliser $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

2. (ex 20) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $[A]_{ij} = \sin(i + j)$.

$$A = \begin{pmatrix} \sin(2) & \sin(3) & \sin(4) & \cdots & \sin(n+1) \\ \sin(3) & \sin(4) & \sin(5) & \cdots & \sin(n+2) \\ \sin(4) & \sin(5) & \ddots & \cdots & \sin(n+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(n+1) & \sin(n+2) & \sin(n+3) & \cdots & \sin(2n) \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer le rang de A

   (b) Trouver $B \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ telles que $A = BC$ et CB soit inversible.

   (c) Montrer que $\mathrm{Sp}(CB) \subset \mathrm{Sp}(A)$.

   (d) Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.

Planche 43 :

1. (ccinp 41) oit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
   $f : (x, y) \mapsto 4x^2 + 12xy - y^2$.
   Soit $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 = 13\}$.

   1. Justifier que f atteint un maximum et un minimum sur C.

   2. Soit $(u, v) \in C$ un point où f atteint un de ses extremums.

      a. Justifier qu'il existe un réel λ tel que le système (S) suivant soit vérifié :
      $(S) : \begin{cases} 4u + 6v = \lambda u \\ 6u - v = \lambda v \end{cases}$

      b. Montrer que $(\lambda - 4)(\lambda + 1) - 36 = 0$. En déduire les valeurs possibles de λ.

   3. Déterminer les valeurs possibles de (u, v), puis donner le maximum et le minimum de f sur C.

2. (ex 6) Soit E un espace vectoriel de dimension finie n avec $2 \leq n$
   Soit u un endomorphisme de E. On suppose que E est le seul espace non nul stable par u.

   (a) Que peut-on dire du spectre de u ?

   (b) Montrer que : $\forall x \in E, (x, u(x), ..., u^{n-1}(x))$ est une base de E.

   (c) On fixe $x \in E$. Donner la matrice de u dans cette base et montrer qu'elle ne dépend pas de x.

Planche 44 :

1. (ccinp 78) Soit E un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. On note $(x|y)$ le produit scalaire de x et y et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

   1. Soit u un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.

   a. Démontrer que : $\forall x, y \in E,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$.

   b. Démontrer que u est bijectif.

   2. Démontrer que $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe.

   3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $e = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base orthonormée de E. Prouver que u est dans $O(E)$ si et seulement si $(u(e_1), u(e_2), ..., u(e_n))$ est une base orthonormée de E.

2. (ex 86) Soit $n \in \mathbb{N}$, soit une fonction f_n définie sur $[0;1]^n$ telle que

$$\forall (x_1, ..., x_n) \in [0;1]^n,\ f_n(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 - x_i^2}\right)$$

   (a) Montrer que f_n admet un minimum m_n et un maximum M_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Calculer m_n.

   (c) i. Montrer que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega =]0;1[^n$, et montrer qu'il existe un unique point critique $A \in \Omega$.

   ii. Soit $(x_1, ..., x_n) \in [0;1]^n$.
   Montrer que $\forall i, j \in [\![1;n]\!],\ x_i\sqrt{1 - x_j^2} + x_j\sqrt{1 - x_i^2} \leq 1$.

   iii. Montrer que $M_n = f_n(A)$.

Planche 45 :

1. (ccinp 61) Pour $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \sup\limits_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$.

   1. Prouver que $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   2. Montrer que pour tout A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a : $\|AB\| \leq n\|A\|\|B\|$, puis que :
   $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \|A^p\| \leq n^{p-1}(\|A\|)^p$.

   3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la série $\sum \dfrac{A^p}{p!}$ est absolument convergente.
   Est-elle convergente ?

2. (ex 45) Soit $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$.

   1.

   2. Montrer que $u_{2n} = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}}$.

   3. Par comparaison série-intégrale montrer que $u_{2n} \sim \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$.

   4. Trouver un équivalent de u_n.

   5. On pose $v_n = u_{n+1} + u_n$. Nature de $\sum\limits_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$.
   Montrer que (v_n) converge vers $l < 0$.

   6. Nature de $\sum \dfrac{1}{u_n}$.

Planche 46 :

1. (ccinp 72) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(e_1, ..., e_n)$ une base de E. On suppose que $f(e_1) = f(e_2) = ... = f(e_n) = v$ où v est un vecteur donné de E.
   1. Donner le rang de f.
   2. f est-il diagonalisable ? (discuter en fonction du vecteur u)
2. (ex 72) Soit $(E) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$
   et $(H) : x^2y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$.
   On étudie les solutions de (E) et (H) sur $]0, +\infty[$.
   1. Montrer qu'il existe une unique solution DSE, qui vérifie (E) et la déterminer.
   2. Montrer que $g : x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ est solution de (E).
   3. On admet que $h : x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{x^2}$ est solution de (H).
   Déterminer toutes les solutions de (H).

Planche 47 :

1. (ccinp 99)
   1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et dans L^2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geq a\right) \leq \dfrac{V(Y_1)}{na^2}$.
   3. **Application :** Une urne contient 2 boules rouges et 3 boules noires. On tire successivement avec remise des boules de cette urne. À partir de combien de tirages peut-on garantir à 95% que la proportion de boules rouges tirées est dans l'intervalle $]0,35; 0,45[$.
   Indication : considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du i-ème tirage.
2. (ex 55) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto nx^n(1 - x)$
   et $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ quand c'est défini.
   1. ***a.*** Etudier les convergences simples, uniformes et normales de $\sum f_n$.
   b. Montrer que S est définie sur $[0, 1]$ et continue sur $[0, 1[$.
   2. ***a.*** Expliciter $S(x)$.
   b. Montrer que $S(x) \underset{x \to 1^-}{\sim} \dfrac{1}{1 - x}$.
   c. S est-elle continue en 1 ? Justifiez.

Planche 48 :

1. (ccinp 37) On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$. On pose : $\forall f \in E,\ N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|dt$.

   1. ***a.*** Démontrer que N_1 et N_∞ sont deux normes sur E.

   b. Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.

   c. Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.

   2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes

2. (ex 21) Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.
   Soit $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{L}(E) & \to & \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto & u \circ v \end{array} \right.$.

   1.

   2. Montrer que toute valeur propre de f est également valeur propre de u.

   3. Soit $\lambda \in Sp(u)$ et v un projecteur sur $E_\lambda(u)$.

   a.

   b. Montrer que v est un vecteur propre de f.

   c. En déduire que u et f ont le même spectre.

   4. Pour $\lambda \in Sp(u)$, on suppose que $\dim(E_\lambda(f)) = n \dim(E_\lambda(u))$.
   Montrer que f est diagonalisable ssi u est diagonalisable.

   5. Montrer que $\dim(E_\lambda(f)) = n \dim(E_\lambda(u))$.

Planche 49 :

1. (ccinp 73) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

   1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

   2. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. En déduire que l'ensemble $C(A)$ des matrices qui commutent avec A est $vect(I_2, A)$.

2. (ex 63) Soit $u_n = \int_0^1 \ln(1 + t^n)dt$.

   1. Donner le développement en série entière de $\ln(1 + t)$.

   2. Montrer, avec le théorème d'intégration terme à terme, que

   $$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$$

   3. Soit $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+x)}$.

   a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

   b. Déterminer u_n en fonction de f.

   c. On admet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $u_n \sim \frac{\pi^2}{12n}$.

   4. Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R},\ u_n = \frac{\pi^2}{12n} + \frac{\lambda}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   5. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ en fonction de λ tels que $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Planche 50 :

1. (ccinp 111) On admet que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge pour $x \in]-1,1[$ et que :

   $\forall x \in]-1,1[, \ \sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

   Soient $p \in]0,1[$ et $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   On suppose que la probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

   $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2, \ P((X=k) \cap (Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

   1. Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité pour le couple (X, Y).
   2. ***a.*** Déterminer la loi de Y.
   b. Montrer que $1 + Y$ suit une loi géométrique.
   c. Déterminer l'espérance de Y.
   3. Déterminer la loi de X.

2. (ex 82) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   1. Déterminer les valeurs propres de A.
   Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = A + \lambda I_2$ soit nilpotente.
   2. Soit $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA} et e^{tB}.
   3. Résoudre le système d'équation différentiel $\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$.

Planche 51 :

1. (ccinp 95) Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

   1. On effectue cinq tirages successifs avec remise. Chaque boule blanche tirée rapporte 2 points et chaque boule noire tirée fait perdre 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus.
   a. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   b. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
   2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Déterminer la loi de Y.

2. (ex 33) Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,
   on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

   1. Montrer que l'intégrale est bien définie et qu'il s'agit d'un produit scalaire.
   2. Soit $\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \delta(P) = P'$.
   On note δ^* l'adjoint de δ. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \ \delta^*(P) = XP - P'$.
   3. On pose $H_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}, \ H_{k+1} = \delta^*(H_k)$.
   Calculer H_1, H_2 et H_3.
   4. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall k \in \mathbb{N}, \ \langle H_k, P \rangle = \langle H_0, P^{(k)} \rangle$.
   5. Montrer que $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Planche 52 :

1. (ccinp 39) On note ℓ^2 l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$ converge.

   1. ***a.*** Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$. Montrer que la série $\sum x_n y_n$ converge.

   b. ℓ^2 est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

   ℓ^2 est un espace préhilbertien si on le munit du produit scalaire (admis) : $(x|y) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$, pour $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$.

   2. Soit $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, on pose $\varphi(x) = x_p$.
   Montrer que φ est une forme linéaire et continue de ℓ^2 dans $\mathbb{R}$.

   3. Soit F l'ensemble des suites réelles dont tous les termes sont nuls sauf peut-être un nombre fini. Déterminer $F^\perp$, puis comparer F et $(F^\perp)^\perp$.

2. (ex 89) On a deux urnes opaques.
   L'urne U contient n boules numéroté de 1 à n.
   L'urne V contient des boules blanches en proportion p.
   On tire une boule dans l'urne U et on note X la variable aléatoire associée au numéro k de cette boule .
   On tire k boules dans l'urne V et on note Y la variable aléatoire associée au nombre de boules blanches tirées.

   1. Reconnaître la loi de X. Donnez son espérance et sa variance.

   2. Calculez la loi de Y. Donnez son espérance

   3. Calculez $E(Y(Y-1))$, en déduire la variance de Y.

Planche 53 :

1. (ccinp 81) On définit sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ définie par : $\varphi(A, A') = tr(A^T A')$. On admet que cela définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

   1. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   2. Donner une base de $\mathcal{F}^\perp$.

   3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

   4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

2. (ex 57) Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nt}}{1+n^2}$.

   1. Déterminer l'ensemble E de définition de f.

   2. f est-elle continue sur E ?

   3. f est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?

   4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$?

Planche 54 :

1. (ccinp 11)

   1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, (f_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la suite $\left(f_n(x_n) - f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Démontrer que la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur X.

   2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

   a. Étudier la convergence simple de la suite (f_n).

   b. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

2. (ex 22) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
   et $\phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ avec $\phi_A(M) = AM$.

   1. a. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\phi_{P(A)} = P(\phi_A)$.

   b. Montrer que A est diagonalisable ssi ϕ_A est diagonalisable.

   c. Si A diagonalisable et $\lambda \in Sp(A)$ de multiplicité m.
   Alors montrer que $\lambda \in Sp(\phi_A)$ et sa muliplicité est mn.

   2. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi_{A,B} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\phi_{A,B}(M) = AMB$.

   a. Si X est un vecteur propre de A et Y un vecteur propre de B^T,
   montrer que XY^T est un vecteur propre de $\phi_{A,B}$.

   b. Montrer que si A et B diagonalisable alors $\phi_{A,B}$ est diagonalisable.
   La réciproque est-elle vraie ?

Planche 55 :

1. (ccinp 45) Les questions 1 et 2 sont indépendantes.
   Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

   1. a. Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.

   b. Montrer que si A est convexe, alors $\overline{A}$ aussi.

   2. On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a\in A} \|x - a\|$.

   a. Soit $x \in E$. Montrer que : $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \overline{A}$.

   b. On suppose que A est fermée et que :
   $\forall x, y \in E, \forall t \in [0,1],\ d_A(tx + (1-t)y) \leq td_A(x) + (1-t)d_A(y)$. Montrer que A est convexe.

2. (ex 90) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

   1. Pour quelles valeurs de a et b M est-elle diagonalisable ?

   2. Soient $X \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $Y \sim \mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ telles que X et Y soient indépendantes.
   Quelle est la probabilité que $\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

   3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
   $\mathrm{tr}\,(A^N)$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

IMT MP

Planche 1 :

1. (ex 194) Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli et Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, avec X et Y indépendantes. On pose $Z = XY$.
   (a) Déterminer $E(Z)$.
   (b) Quelle est la loi de Z ?
   (c) Quelle est la variance de Z ?
2. (ex 93) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
   (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ (on pourra traiter les cas $a = b$ et $a \neq b$).
   (b) Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^{2n+1} - X^{2n}$ par X^2+X+1.

Planche 2 :

1. (ex 148) Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.
   (a) Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (b) Donner un équivalent de f en 0.
   (c) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. (ex 206) Soit X une variable alétoire discrète définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = P(X=-n)$ et $|X|$ suit une loi de Poisson de paramètre $a \in \mathbb{R}_+^*$.
   On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & X & 1 \\ X & 0 & 1 \\ X & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Trouver la loi de X.
   (b) Quel est le rang de A.
   (c) Quelle est le loi de $\mathrm{rg}\,(A)$?

Planche 3 :

1. (ex 131) Soit E un espace euclidien de dimension n (on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On pose $\varphi_A(X) = X^T AX$, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \lambda_1\|X\|^2 \leq \varphi_A(X) \leq \lambda_n\|X\|^2$.
   (b) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_A^{-1}(\{1\})$ soit un compact non vide.
2. (ex 211) Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires identiquement distribuées indépendantes qui suivent toutes une loi $\mathcal{U}\{-1,1\}$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$.
   (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $E(tS_n)$.
   (b) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}\,(t) \leq \exp(t^2/2)$.
   (c) Oubli de la part de l'étudiant. Question probable : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que : $P(|S| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.

Planche 4 :

1. (ex 120) Soit $\varphi : \left\{ \begin{array}{lll} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto & -A + tr(A)I_n \end{array} \right.$.

   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Déterminer le spectre de φ.

   (c) Montrer que Ker (tr) est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (d) Est-ce que φ est diagonalisable ?

2. (ex 197) On dispose initialement d'une urne constituée d'une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers de la pièce selon la règle suivante :
   - si on obtient « Face » on ajoute une boule noire dans l'urne ;
   - si on obtient « Pile » on tire une boule dans l'urne et on arrête l'expérience.

   Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers de la pièce.

   (a) Quelle est la loi de X ?

   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Planche 5 :

1. (ex 119) Soit $T : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n) & \mapsto & (w_n) \end{array} \right.$, avec : $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

   Déterminer les éléments propres de T.

2. (ex 208) Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires qui suivent une loi géométrique de paramètre p. On pose $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$.

   (a) Déterminer $(Z \leq n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

   (b) On lance trois pièces. À chaque lancer, on met de côté les pièces ayant donné « Pile » et on relance les autres.
   Déterminer l'espérance de Z, avec Z la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers.

Planche 6 :

1. (ex 118) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On considère $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = f \circ u$.

   (a) Montrer que φ est diagonalisable.

   (b) Calculer les valeurs et vecteurs propres de φ.

2. (ex 136) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et soient A et B deux parties de E. On pose : $A + B = \{a + b\,;\, a \in A, b \in B\}$.

   (a) Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

   (b) Montrer que si A est fermé et B compact, alors $A + B$ est fermé.

Planche 7 :

1. (ex 169) Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$
   (a) Déterminer l'Iitervalle de définition de f.
   (b) Trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.
2. (ex 99) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$
   Calculer A^2, puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Planche 8 :

1. (ex 128) Soit E un espace préhilbertien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit $u = f^* \circ f$.
   (a) Montrer que u est diagonalisable, et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{S}(E)$ tel que : $g^2 = u$.
2. (ex 176) Soit $\varphi : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} e^{-tx} dt$.
   (a) Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
   (b) Calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   (c) En déduire $\varphi(x)$.

Planche 9 :

1. (ex 187) Soient $a > 0$ et $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. L'équation $(E) : y' - ay = h(t)$ admet-elle une solution bornée dans $\mathbb{R}_+$? Donner ses solutions.
2. (ex 101) Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Démontrer que $\det(I_n + XX^\top) = 1 + X^\top X$

Planche 10 :

1. (ex 188) Trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que
   $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(1 - x)$.
2. (ex 202) Soient X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.
   Soit Y une variable aléatoire indépendante de X_1 et de X_2 telle que
   $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in]0, 1[$.
   On pose $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.
   (a) On suppose que $(X_1 + 1) \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$. Calculer la probabilité que M soit inversible.
   (b) On suppose que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable.

Planche 11 :

1. (ex 164) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 2} u_n x^n$, puis l'ensemble de définition de sa somme où : $u_n = \ln\left(\dfrac{(-1)^n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$.
2. (ex 204) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p.

   On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que A est inversible.
   (b) Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

Planche 12 :

1. On pose $E = \mathbb{R}[X]$.

   (a) (ex 122) Montrer que
   $$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$
   définit un produit scalaire sur E.
   (b) Calculer $\varphi(X^p, X^q)$ pour (p,q) dans $\mathbb{N}^2$.
   (c) Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

2. (ex 151) On s'intéresse pour x dans $\mathbb{R}_+$ à la série
   $$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

   (a) Étudier sa convergence simple.
   (b) Converge-t-elle normalement ?
   (c) Uniformément ?

   On note S sa somme.

   (d) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   (e) Déterminer la limite de S en $+\infty$.
   (f) Donner une expression de S sur $\mathbb{R}_+$.

Planche 13 :

1. (ex 137) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

   (a) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est A. Écrire la matrice de f dans $\mathcal{B}' = \left(\dfrac{e_1}{t}, \dots, \dfrac{e_n}{t^n}\right)$ où $t > 0$.
   (b) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose : $\mathrm{Sim}(N) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ M = PNP^{-1} \ , \ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\}$. Montrer que N est nilpotente si, et seulement si, la matrice nulle est dans l'adhérence de $\mathrm{Sim}(N)$.

2. (ex 160) Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ (on pourra faire appaître une somme).

Planche 14 :

1. (ex 126) Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle$ espace euclidien. On définit $f : x \mapsto x + \langle a, x\rangle b$ où $a, b \in E$. Les espaces $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires ?

2. (ex 173) On pose $a_n = \dfrac{4^n}{(2n+1)!}(n!)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

   (a) Justifier que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

   (b) En déterminant une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n, montrer que f vérifie l'équation différentielle $f'(x) = 1 + x^2 f'(x) + x f(x)$.
   En déduire l'expression de f.

Planche 15 :

1. (ex 189) On considère $\mathbb{R}^n$ comme étant euclidien canonique. Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (1) : A est antisymétrique ;
   (2) : Les solutions de $X' = AX$ sont de norme constante.

2. (ex 121) Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et Φ défini par $\Phi(P)(X) = 2X^4\ P(\dfrac{1}{X}) + P(X)$ pour tout $P \in E$.

   (a) Montrer que Φ est un endomorphisme.

   (b) Calculer les éléments propres de Φ (vecteurs propres et valeurs propres), Φ est il diagonalisable ?

Planche 16 :

1. (ex 108) Soit $n \geq 3$, $A = [a_{i,j}]_{1 \leq ij \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = \begin{cases} j & \text{si } i = n \\ i & \text{si } j = n\ . \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) A est elle diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$

   (b) Déterminer ses éléments propres.

2. (ex 183) On note S l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation définit par :

$$\forall x \in]0; +\infty[,\ xy'' + 2y' - xy = 0$$

   (a) Déterminer les fonctions développables en série entière appartenant à S.
   On note

$$f : x \to \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

   (b) Exprimer f à l'aide de fonction(s) usuelle(s).

   (c) Justifier que $f \in S$.

   (d) Déterminer S à l'aide du changement de variable $u = xy$.

Planche 17 :

1. (ex 195) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. X est le numéro de la boule tirée au hasard.

   (a) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

   On considère désormais une urne contenant k boules numérotées k pour chaque k de 1 à n.

   (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

2. (ex 186) On considère l'équation différentielle suivante :

   $xy' + 3y = \dfrac{\exp(-1/x^2)}{x^5}$

   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}^*$, puis dans $\mathbb{R}$.

   (b) Déterminer un développement limité de la solution à l'ordre 4.

Planche 18 :

1. (ex 145) Donner la nature des séries de termes général u_n avec :

   (a) $u_n = n^a \left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$, pour a réel.

   (b) $u_n = n^{1/n^2} - 1$.

2. (ex 124) On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Déterminer une base orthogonale de F et de $F^\perp$ pour :

$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0 \ \text{ et } \ t + x + y = 0\right\}$$

Planche 19 :

1. (ex 98) Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 2 tel que $u^2 = 0$.

   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Im}\,(u)$.

   (b) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. (ex 143) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$.

Planche 20 :

1. (ex 104) Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E tel que $u^3 + u = 0$.

   (a) Calculer $u^2(x)$ pour $x \in \operatorname{Im} u$.

   (b) Soit v l'endomorphisme induit par la restriction de u à $\operatorname{Im} u$, montrer que v est un isomorphisme.

   (c) Montrer que le rang de u est pair.

2. (ex 153) Quand la série converge, on définit : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)$.

   (a) Montrer que S est définie et dérivable sur $[0, 1]$.

   (b) Calculer $S'(1)$.

Planche 21 :

1. (ex 146) Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha (1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{x}}})\,\mathrm{d}x$ quand $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. (ex 116) Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n. Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On considère ϕ définie sur $\mathcal{L}(E)$ par $\phi(v) = u \circ v$.

   (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.

   (b) Montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \Leftrightarrow \lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)$.

   (c) Montrer que si v est un vecteur propre de ϕ associé à λ, alors $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id})$.

   (d) Montrer que si u est diagonalisable, alors ϕ l'est aussi.

Planche 22 :

1. (ex 117) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\psi : M \mapsto (\operatorname{Tr} A)M + (\operatorname{Tr} M)A$.

   (a) L'endormorphisme ψ est-il diagonalisable ?

   (b) Donner son polynôme caractéristique et sa trace.

2. (ex 168)

   (a) Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

   (b) Donner une valeur approchée de π à 10^{-10} près.

Planche 23 :

1. (ex 114) Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par $M \mapsto (\operatorname{Tr} M)I_n - M$.
   (a) Montrer que $-1 \in \operatorname{Sp}(\phi)$ et déterminer la dimension de $E_{-1}(\phi)$.
   (b) Est-ce que ϕ est diagonalisable ?
   (c) Calculer $\det(\phi)$.
2. (ex 138) Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
   $$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$$
   (a) Déterminer la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Déterminer la limite de $\left(\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
   (c) En déduire un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Planche 24 :

1. (ex 172) Déterminer toutes les fonctions f développables en série entière sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $(E) : 2xy'' + y' - y = 0\ ,\ y(0) = 1$.
2. (ex 100) Soit P un polynôme annulateur d'une matrice carrée M non inversible. Montrer que $P(0) = 0$.

Planche 25 :

1. (ex 166) On pose $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
   (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum S_n x^n$. On note R un tel rayon de convergence.
   On définit f par la fonction suivante : $f : \begin{cases}]-R;R[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n \end{cases}$.
   (b) Déterminer f. (On pourra remarquer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ x^n = A_n - A_{n-1}$ avec $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$)
2. (ex 125) Soit E un espace euclidien de dimension n. Soient $(u,\, v) \in E^2$ fixés quelconques.
   On pose : $\forall x \in E, \quad u \otimes v(x) = \langle v \,|\, x\rangle\, u$
   (a) Montrer que $u \otimes v$ est un endomorphisme et déterminer son rang.
   (b) Déterminer les éléments propres de $u \otimes v$. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Planche 26 :

1. (ex 113) On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère $f : P \mapsto X(X+1)P' - nXP$.
   (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Déterminer les élements propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. (ex 193) Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.
   (a) On note X la variable aléatoire égale au rang de tirage de la premi ere boule blanche. Déterminer la loi de X.
   (b) On note Y la variable aléatoire égale au rang de tirage de la premiére boule numérotée 1. Déterminer la loi de Y.

Planche 27 :

1. (ex 110) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.
   (a) Montrer que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre.
   (b) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$. Montrer que B est combinaison linéaire de $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$.

2. (ex 142) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

   On suppose que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n S_n = 1$.
   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
   (b) Montrer que $S_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} S_n$.

Planche 28 :

1. (ex 95)
   1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n. Montrer l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \overline{P(\mathrm{e}^{i\theta})} = \mathrm{e}^{-in\theta} Q(\mathrm{e}^{i\theta})$.
   2. En déduire les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.

2. (ex 149) Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x-z)^2}$, avec $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Planche 29 :

1. (ex 94) Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^*$.
   1. Supposons que n divise m , Montrer que $X^n - 1$ divise $X^m - 1$.
   2. Nous ne supposons plus que n divise m.
   Calculer le résultat de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$

2. (ex 147) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$.

Planche 30 :

1. (ex 115) Soit E un ev de dimension finie et $(u,v) \in \mathcal{L}^2$.
   Montrer que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors elle est valeur propre de $v \circ u$.
2. (ex 163) $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)dt$.
   1. déterminer la limite de (a_n).
   2. Déterminer une relation entre a_n et a_{n+2}.
   3. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
   4. Calculer la somme de cette série entière.

Planche 31 :

1. (ex 200) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$.
   Soit $S = \max(X,Y)$ et $T = \min(X,Y)$.
   1. Loi et espérance de S.
   2. espérance de T.
   3. S et T sont-elles indépendantes ?
2. (ex 103) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   1. A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
   2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.
      Montrer que $\{0\} \subset Sp(M) \subset \{-1,0,1\}$.
   3. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}),\ A = PTP^{-1}$.
   4. Montrer que la dimension des sous-espaces propres de M est égale à 1.
   5. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$.

Planche 32 :

1. (ex 92) Soit l'anneau $A = (\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$ et $I_x = \{f \in A / f(x) = 0\}$.
   1. Montrer que I_x est un idéal.
   2. Montrer que si $x_1 \neq x_2$, $A = I_{x_1} + I_{x_2}$.
2. (ex 201) Soient deux variables aléatoire discrètes S et N.
   $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et représente le nombre de particule de fumée dans une pièce.
   S représente le nombre de particules détectées par un détecteur de fumée.
   Chaque particule a une probabilité p d'être détectée (avec $p \in]0,1[$).
   1. Déterminer la loi de S sachant $(N = n)$.
      En déduire la loi de S.
   2. Déterminer la loi suivie par $N - S$.
      Montrer que S et $N - S$ sont indépendantes.
   3. N et S sont-elles indépendantes ?

Planche 33 :

1. (ex 185) Soit $(E) : \ln(x)y' + \dfrac{y}{x} = 1$.

   1. Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

   2. On pose $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ définie sur $]-1, +\infty[\setminus\{0\}$.
   Montrer que g est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.

   3. Montrer que (E) admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. (ex 109) Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\operatorname{tr}(M) = n$.