À rendre pour le jeudi 5 octobre

DM NORMAL

EXERCICE

Pour tous réel $x > 0$ et entier $n\geq 3$, on pose : $f_n(x) = x - n\ln(x)$, où le symbole ln désigne le logarithme népérien.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle ouvert $]1, 2[$. On appellera désormais a_n cette solution.

2. ***a.*** Programmer en PYTHON une fonction `dicho` qui prend en argument `(f, a, b, epsilon)`, avec f une fonction, $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et renvoie une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $[a, b]$ trouvée à l'aide de la méthode de dichotomie à la précision *espilon*.

b. À l'aide de PYTHON, afficher pour $n = 10k$, $1 \leq k \leq 100$ les valeurs de a_n. On cherchera les valeurs de a_n à l'aide de la fonction `dicho` de la question précédente avec une précision de 10^{-8}.

c. On note ℓ la limite de la suite (a_n). Avec l'aide de PYTHON, conjecturer les valeurs a, b telles que

$$a_n = \ell + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2}.$$

3. Montrer que la suite (a_n) est strictement décroissante [on pourra comparer $f_n(a_n)$ et $f_n(a_{n-1})$].

4. Montrer que cette suite (a_n) tend vers 1.

5. Soit Φ la fonction telle que $\Phi(t) = \dfrac{\ln(1+t)}{1+t}$ avec t réel strictement supérieur à -1.

Démontrer que Φ admet, en $t = 0$, un DL à tout ordre k, soit $\Phi(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} b_j t^j + o(t^k)$

6. Étudier la nature de la suite $(|b_j|)$.

7. Montrer que, sur l'intervalle $]-1, e-1[$, la fonction Φ admet une fonction réciproque Ψ dont on donnera le tableau de variations.

8. Montrer que Ψ admet, en $u = 0$, un DL à tout ordre k, soit $t = \Psi(u) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} c_j u^j + o(u^k)$.

9. Donner pour a_n un développement limité d'ordre 2 vis-à-vis de l'infiniment petit $\dfrac{1}{n}$, soit $a_n = A + \dfrac{B}{n} + \dfrac{C}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, où l'on précisera les constantes A, B et C. On posera $b_n = a_n - 1$ et on remarquera que $\Phi(b_n) = \dfrac{1}{n}$.

10. Prouver que les coefficients c_j sont tous strictement positifs [on pourra utiliser une équation différentielle du premier ordre reliant $\Psi(u)$ et $\dfrac{d}{du}\Psi(u)$ afin d'exprimer c_k en fonction des c_j d'indices $j < k$].

I-Étude de la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

1.1 Montrer à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégrale que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

1.2 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \leq \frac{1}{n+1}$.

1.3 En déduire que : $\ln(2) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

1.4 On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$. Montrer que

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\ t \in [0,1], \quad \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k t^k = \frac{1}{1+t} - (-1)^n \frac{t^n}{1+t}$$

1.5 En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = (-1)^n \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t} \mathrm{d}t$.

1.6 Montrer que l'on a

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2} \mathrm{d}t$$

1.7 Conclure que $S_n \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$.

II-Etude de la série $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3} \right) \right)_{k\geq 1}$.

On considère la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ a_{3p} = -\frac{2}{3p}\ ;\ \forall p \in \mathbb{N},\ a_{3p+1} = \frac{1}{3p+1} \ \text{ et } \ a_{3p+2} = \frac{1}{3p+2}$$

2.1 Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que les suites extraites (u_{3n}), (u_{3n+1}) et (u_{3n+2}) convergent vers une même limite ℓ. Montrer que la suite (u_n) converge aussi vers ℓ (on pourra raisonner avec des ε).

2.2 Montrer que

$$\sum_{k=1}^{3p} a_k = \sum_{k=p+1}^{3p} \frac{1}{k} = \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{2p} \frac{1}{1+\frac{h}{p}}$$

2.3 Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=1}^{3p} a_k$ lorsque $p \to +\infty$ (on pourra considérer la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t}$ sur un intervalle convenable et faire apparaître une somme de Riemann). En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} a_k$ et préciser sa somme.

2.4 En déduire que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k} \cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)$ converge et montrer que sa somme est égale à $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

III-Etude des séries $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)$ et $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)$.

Pour $t \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi(t) = \frac{1}{e^{it}-1}$ et $S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{ikt}$.

On désigne par α un nombre réel fixé dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. Pour simplifier l'écriture des démonstrations, on supposera $\pi \leq \alpha < 2\pi$.

3.1 Montrer que $S_n(t) = \varphi(t)(e^{i(n+1)t} - e^{it})$.

3.2 Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^1([\pi, \alpha])$.

3.3 Montrer que l'intégrale $\int_\pi^\alpha e^{i(n+1)t}\varphi(t)\, dt$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (on pourra utiliser une intégration par parties).

3.4 Expliciter $\int_\pi^\alpha S_n(t)\, dt$. Déduire de ce qui précède la convergence de la série $\sum \left(\frac{e^{ik\alpha}}{k}\right)_{k\geq 1}$.

Expliciter la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\alpha}}{k}$ en fonction de $\ln(2)$ et de $\int_\pi^\alpha e^{it}\varphi(t)\, dt$.

3.5 Exprimer $e^{it}\varphi(t)$ en fonction de $\frac{e^{\frac{it}{2}}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ où $t \in [\pi, \alpha]$.

3.6 En déduire la convergence et la somme des séries $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{\cos(k\alpha)}{k}\right)$ et $\sum_{k\geq 1}\left(\frac{\sin(k\alpha)}{k}\right)$.

IV-Lien entre une intégrale et une série

On pose $\tilde{E}(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}|\sin(xt)|\, dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

4.1. Montrer que $\tilde{E}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
Pour les 5/2, montrer que $\tilde{E}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

4.2. Pour $\gamma \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\theta(\gamma) = \int_0^\pi e^{\gamma y}\sin(y)\, dy$.

4.3. Montrer que pour $x > 0$,

$$\tilde{E}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\, du$$

4.4. Exprimer pour $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}}|\sin(u)|\, du$ en fonction de $e^{-\frac{k\pi}{x}}$ et de $\theta(\gamma)$ pour un γ convenable.

4.5. Justifier, pour $x > 0$, la convergence de la série $\sum_{k\geq 0} e^{-\frac{k\pi}{x}}$. Préciser sa somme.

4.6. Expliciter $\tilde{E}(x)$ pour $x > 0$. Déterminer la limite de $\tilde{E}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE

Partie I

Soient $A \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in]1, +\infty[$. On suppose que la suite (u_n) de réels strictement positifs converge vers 0 et vérifie : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n^{1-\alpha} - u_{n+1}u_n^{-\alpha}\right) = A$.

1. Montrer que $A > 0$.

2. Étudier la limite de la suite (x_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = u_{n+1}^{1-\alpha} - u_n^{1-\alpha}$.

3. En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que $u_n \sim_{n \to +\infty} K n^{1/(1-\alpha)}$.
En déduire la nature de la série de terme u_n suivant les valeurs de α.

4. Soit $v_0 \in \mathbb{R}_+^*$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1 + argch(1 + v_n)}$, avec :
$\forall x \in [1, +\infty[,\ argch(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Étudier la nature de la série de terme v_n.

5. Définir en PYTHON `v(n,a)` qui à $(n, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^*$ renvoie v_n de l'exemple précédent avec $v_0 = a$.
En étudiant les 500 premiers termes de la suite $(v_{n+1}^{1-\alpha} - v_n^{1-\alpha})$, pour certaines valeurs de α et $v_0 = 1$, trouver pour quelles valeurs la α cette suite semble converger vers une limite non nulle.

Partie II

f désigne dans cette partie une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et (u_n) la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que si la série de terme u_n converge alors $f(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Dans toute cette partie on supposera désormais que } f(0) = 0}$$

2. Si $|f'(0)| < 1$ démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u_0 \in]0, \alpha[$, la série de terme u_n converge.

3. Si $|f'(0)| > 1$, démontrer que la série converge si et seulement si, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p = 0$.

4. On suppose dans cette question que $f'(0) = -1$.
Etudier la convergence de la série de terme u_n lorsque les deux conditions suivantes sont remplies :
(1)$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ |u_{n+1}| \leq |u_n|$.
(2) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
En déduire la convergence de la série de terme x_n définie par $x_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = -\sin(x_n)$.

5. On suppose dans cette question que $f'(0) = 1$, que la suite (u_n) est à termes strictement positifs et converge vers 0.

- ***a.*** On considère deux réels p et q tels que $p > q > 0$. Démontrer que si la série de terme u_n^q converge, il en est de même de la série de terme u_n^p.
- ***b.*** Soit (x_n) une suite décroissante de réels strictement positifs qui converge vers 0. Etudier la nature de la série de terme $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} - 1$.
  En déduire la nature de la série de terme v_n où $v_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \dfrac{v_n}{\operatorname{ch} v_n}$
- ***c.*** Soient un réel $\alpha > 1$ et $a \in]0, +\infty[$. On suppose que $\lim\limits_{x \to 0^+} (x - f(x))x^{-\alpha} = a$.
  Etudier suivant les valeurs de α et de p la convergence de la série de terme u_n^p.
  Si f est la fonction Arctan, étudier la nature de la série de terme u_n^2.

d. Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que f est k fois dérivable en 0 et que : $\forall p \in \{2, \dots, k-1\},\ f^{(p)}(0) = 0$ et $f^{(k)}(0) < 0$.
Quelle est la nature de la série de terme u_n ?

PROBLÈME

Si z est un nombre complexe, on note $\mathrm{Re}(z)$ sa partie réelle.
On considère une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$, une suite strictement croissante de réels positifs telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Pour tout entier naturel non nul, on définit sur $\mathbb{C}$ la fonction u_n par :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ u_n(z) = a_n e^{-\lambda_n z}.$$

On note

$$I_C = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \sum_{n\geq 1} u_n(x) \text{ converge} \right\} \quad \text{et} \quad I_A = \left\{ x \in \mathbb{R},\ \sum_{n\geq 1} |u_n(x)| \text{ converge} \right\}.$$

Si ces deux ensembles sont non vides et minorés, on pose dans tout le problème :

$$\gamma = \inf(I_C) \quad \text{et} \quad \delta = \inf(I_A).$$

Soit φ la fonction continue sur $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi : t \mapsto \sup\{1 - |t-1|, 0\}$.

On suppose que $(r_n)_{n\geq 1}$ est une suite de réels telle que :

$$\forall n \geq 1,\ 0 < r_n < \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{2}.$$

Pour tout t de $\mathbb{R}$, on pose : $g(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n} \varphi\left(\frac{t-\lambda_n}{r_n}\right)$.

Partie I : Préliminaires

1. Représenter graphiquement la fonction φ et calculer $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)dt$. Définit la fonction φ à l'aide de PYTHON (on définira φ sans utiliser les fonctions sup et valeur absolue).

2. ***a.*** Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que sur $[0, A]$, la fonction g est en fait une somme finie.

b. En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_{\lambda_p}^{\lambda_{p+1}} g(t)dt = a_p$.

3. Soit $x \in]-2, +\infty[$. Soit $\psi : t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^{x+1}(t+1)}$.

a. Montrer que ψ est décroissante à partir d'un certain rang.

b. Pour $x \geq 0$, montrer que ψ est toujours décroissante sur $[e, +\infty[$.

4. On pose $v_n = \dfrac{\ln(n)}{n^\mu}$.

a. Montrer que $\displaystyle\sum \frac{\ln(n)}{n}$ diverge.

b. En déduire que $\sum v_n$ converge si et seulement si $\mu > 1$.

5. Montrer que I_A est un intervalle.

Partie II : Exemples

Dans cette partie on choisit $\lambda_n = \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$.

1. Déterminer γ, δ, I_A et I_C dans les cas suivants :

  a. $a_n = 1$ pour tout $n \geq 1$.

  b. $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$.

2. Dans le cas où $a_n = (-1)^n \dfrac{\ln(n)}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$, on pose $U(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} U(x) = 0$.

3. On suppose dans cette question que I_A et I_C sont non vides et minorés.

  a. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \delta$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n(z)$ est absolument convergente.

  b. Montrer que : $\gamma \leq \delta \leq \gamma + 1$.

  c. Donner un exemple pour lequel $\gamma = \delta$.

  d. Donner un exemple pour lequel $\gamma + 1 = \delta$.

4. En choisissant pour $n \geq 2$,

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right),$$

déterminer γ et δ.

Partie III : cas général

Dans cette partie, on suppose que I_C est non vide et minoré.

1. Si $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels positifs, montrer que, pour tout z de C tel que $\mathrm{Re}(z) > \gamma$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n(z)$ converge.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ continue. On suppose qu'il existe un réel α tel que la fonction F définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ F(t) = \int_0^t f(x) e^{-\alpha x} dx$$

admette une limite finie en $+\infty$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \alpha$.

  a. Montrer que $t \mapsto F(t)e^{(\alpha - z)t}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

  b. En déduire que la suite $\left(\displaystyle\int_0^{\lambda_n} f(x) e^{-zx} dx\right)_{n \geq 1}$ est convergente.

  c. On pose : $v_n(z) = \displaystyle\int_{\lambda_n}^{\lambda_n + 1} g(x) e^{-zx} dx$ et on suppose que la suite $(r_n)_{n \geq 1}$ est choisie de telle sorte que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} (v_n(z) - u_n(z))$ soit convergente (on admet qu'un tel choix est possible).

  Déduire des questions précédentes et du préliminaire que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_n(z)$ converge pour tout z de $\mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(z) > \gamma$.