À rendre pour le mardi 17 octobre

DM NORMAL

EXERCICE 1

Soient p et q deux entiers naturels non nuls, $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$.
Le résultant des polynômes P et Q est le nombre complexe noté $\mathrm{Res}(P, Q)$:

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} a_0 & & & b_0 & & \\ a_1 & \ddots & & b_1 & \ddots & \\ \vdots & & a_0 & \vdots & & b_0 \\ a_p & & a_1 & a_0 & \vdots & & b_1 \\ & \ddots & \vdots & a_1 & b_q & & \vdots \\ & & a_p & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_p & & & b_q \end{vmatrix}.$$

C'est un déterminant $q + p$ colonnes, dont les q premières colonnes représentent les coefficients du polynôme P et les p suivantes représentent les coefficients du polynôme Q ; les positions non remplies étant des zéros. Par exemple, si $P = 1 + 2X + 3X^2$ et $Q = 4 + 5X + 6X^2 + 7X^3$,

$$\mathrm{Res}(P,Q) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \\ 0 & 3 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 7 \end{vmatrix}.$$

On note $E = \mathbb{C}_{q-1}[X] \times \mathbb{C}_{p-1}[X]$ et $F = \mathbb{C}_{p+q-1}[X]$.
Soit u l'application de E dans F définie pour $(A, B) \in E$ par : $u(A, B) = PA + QB$.

1. **Cas où u est bijective**

- ***a.*** Démontrer que u est une application linéaire.
- ***b.*** Si on suppose que u est bijective, démontrer que P et Q sont premiers entre eux.
- ***c.*** Si on suppose que P et Q sont premiers entre eux, déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et en déduire que u est bijective.

2. **Matrice de u** On note $\mathcal{B} = ((1, 0), (X, 0), \ldots, (X^{q-1}, 0)(0, 1), (0, X), \ldots, (0, X^{p-1}))$ une base de E et $\mathcal{B}' = (1, X, \cdots, X^{p+q-1})$ la base canonique de F.

- ***a.*** Déterminer la matrice de u par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$.
- ***b.*** Démontrer que $\mathrm{Res}(P, Q) \neq 0$ si et seulement si P et Q sont premiers entre eux (donc $\mathrm{Res}(P, Q) = 0$ si et seulement si P et Q ont au moins une racine commune complexe).

3. **Racine multiple**

- ***a.*** Démontrer qu'un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$ si et seulement si $\mathrm{Res}(P, P') = 0$.

b. *Application* : déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le polynôme $X^3 + aX + b$ admette une racine multiple.

4. **Nombre algébrique**
En utilisant les polynômes $P(X) = X^2 - 3$ et $Q_y(X) = (y - X)^2 - 7$, déterminer un polynôme à coefficients entiers de degré 4 ayant comme racine $\sqrt{3} + \sqrt{7}$. Quelles sont les autres racines de ce polynôme ?

EXERCICE 2

Dans tout le problème n et p désignent deux entiers supérieurs ou égaux à 2 et $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On identifiera $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices colonnes d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Si M est une matrice, m_{ij} désigne le coefficient d'indice (i, j) de M et $C_j(M)$ désigne la j-ème colonne de cette matrice.
- Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg}(A)$ désigne le rang de A.
- On définit pour :
  — $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p$, $X * Y = \begin{pmatrix} x_1 Y \\ \vdots \\ x_n Y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{np}$;
  — Pour A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A * B$ la matrice carrée d'ordre np, dont la représentation par blocs carrés d'ordre p est :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,n}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

Par exemple si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors on a $A*B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Si $n = p = 3$ écrire une fonction en PYTHON qui à deux matrices A, B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ renvoie $A * B$.

2. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ A * B = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$.

3. *a.* Montrer que :
$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ \forall X \in \mathbb{K}^n,\ \forall Y \in \mathbb{K}^p,\ (A * B)(X * Y) = (AX) * (BY)$.

b. De même, montrer que :
$\forall (A, A') \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ \forall (B, B') \in (\mathcal{M}_p(\mathbb{K}))^2,\ (A * B)(A' * B') = (AA') * (BB')$.

4. Montrer que pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on a : $A * B$ est nilpotente si et seulement si A ou B l'est.

5. *a.* On suppose que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ sont inversibles. Montrer que $A*B$ est inversible et préciser son inverse en fonction de A^{-1} et B^{-1}.

b. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

6. On note $J_n(r)$ la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux qui valent 1.

a. Montrer que $\text{rg}\,(J_n(r) * J_p(s)) = rs$.

b. On suppose que A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\text{rg}\,(A) = r$, et B est dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $\text{rg}\,(B) = s$. Montrer que $rg(A * B) = rs$.

c. En déduire aue $A * B$ est inversible si et seulement si A et B sont inversibles.

7. Montrer que : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}),\ (A * B)^T = A^T * B^T$.

8. On note $(U_1, ..., U_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $(V_1, ..., V_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

a. Montrer que $\mathcal{B} = (U_1 * V_1, ..., U_1 * V_p, U_2 * V_1, ..., U_2 * V_p, ..., U_n * V_1, ..., U_n * V_p)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^{np}$.

b. Établir que : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall j \in [\![1, p]\!],\ (A * B)(U_i * V_j) = \displaystyle\sum_{l=1}^{p} b_{l,j} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{k,i}(U_k * V_l) \right)$.

En déduire la matrice associée à $A * B$ dans la base
$\mathcal{B}' = (U_1 * V_1, ..., U_n * V_1, U_1 * V_2, ..., U_n * V_2, ..., U_1 * V_p, ..., U_n * V_p)$.

c. Montrer qu'il existe une matrice carrée P d'ordre np, inversible telle que :
$B * A = P^{-1}(A * B)P$.

9. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Déterminer $\det(I_n * B)$ et $\det(A * I_p)$. En déduire $\det(A * B)$.

EXERCICE 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On notera $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^* = \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 0$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang un.

a. En discutant sur la dimension de $\text{Im}\,(u) \cap \text{Ker}\,(u)$, montrer que $E = \text{Im}\,(u) \oplus \text{Ker}\,(u)$ ou $\text{Im}\,(u) \subset \text{Ker}\,(u)$.

b. Soit $e \in \text{Im}\,(u)$ non nul. Montrer qu'il existe une base de E dont le premier vecteur est e. Dans le cas où $\text{Im}\,(u) \subset \text{Ker}\,(u)$, quelle est le forme de la matrice de u dans une telle base ? Dans le cas $\text{Im}\,(u) \subset \text{Ker}\,(u)$, montrer que $tr(u) = 0$.

c. Montrer alors l'équivalence des trois assertions :
i $E = \text{Im}\,(u) \oplus \text{Ker}\,(u)$
ii $tr(u) \neq 0$.

Dans ce cas, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$,

avec $a \neq 0$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $F_A : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ X & \mapsto & tr(AX) \end{array} \right.$.

a. Montrer que F_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

b. Soit $F : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^* \\ A & \mapsto & F_A \end{array} \right.$. Montrer que F est linéaire.

c. Soit $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, exprimer $F_A(E_{i,j})$ en fonction des coefficients de A.

d. Montrer que F est un isomorphisme.

3. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle et soit f une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit l'endomorphisme $\psi_f : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \mapsto & f(X)J \end{array} \right.$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :
$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ f(X) = tr(AX)$.

b. Comparer le noyau de ψ_f et le noyau de f. Quel est l'image de ψ_f ? Quel est son rang ?

c. Exprimer $tr(\psi_f)$ en fonction de A et J.

d. En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur A et J pour que l'on ait $\text{Im}\,(\psi_f) \oplus \text{Ker}\,(\psi_f) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

e. Déterminer le polynôme minimal de ψ_f si $\text{Im}\,(\psi_f) \oplus \text{Ker}\,(\psi_f) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

EXERCICE

On désigne par $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$.
Pour tout $\lambda \geq 0$, on note ϕ_λ l'élément de $C([0,1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$.
Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.
On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_m} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_m+b_1} & \dfrac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(X-a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X+b_k)}.$$

1. Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

2. Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X+b_k}$, alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

3. En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}(a_i+b_j)}.$$

4. ***a.*** Écrire en PYTHON une fonction `M(L1,L2)` qui à une liste de réels L_1 et L_2 renvoie la matrice associée à D_m. En renverra un message d'erreur si les listes ne sont pas de même taille ou si elles ne sont pas constituées exclusivement d'éléments strictement positifs.

b. Écrire en PYTHON une fonction `D(L1,L2)` qui renvoie le déterminant D_m (on enverra les mêmes messages d'erreur que dans la question précédente). On n'utilisera pas la fonction déterminant de PYTHON.

PROBLÈME

Dans tout le problème, K désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$. Si E et F sont des espaces vectoriels sur K, on note $\mathcal{L}(E,F)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F ; pour tout élément T de $\mathcal{L}(E,F)$, on désigne par $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Im} T$ respectivement le noyau de T dans E et son sous-espace image dans F. Un élément T de $\mathcal{L}(E,E)$ est dit *nilpotent* s'il existe un entier strictement positif r tel que $T^r = 0$.

On appelle *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E,E)$ tout sous-espace vectoriel stable par multiplication (dans ce problème Id_E n'est pas forcément dans l'algèbre) ; une sous-algèbre $\mathcal{A}$ est dite *commutative* si l'on a $ST = TS$ pour tous S et T dans $\mathcal{A}$; enfin $\mathcal{A}$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier strictement positif r tel que le produit de r éléments quelconques de $\mathcal{A}$ soit nul, et on appelle *ordre de nilpotence* de $\mathcal{A}$ le plus petit de ces entiers r.

Le but de ce problème est d'établir quelques propriétés des sous-algèbres commutatives nilpotentes.

Première partie

Dans cette partie, on note E l'espace vectoriel K^2.

1. Soit T un endomorphisme nilpotent non nul de E, r le plus petit entier positif tel que $T^r = 0$.

- ***a.*** Déterminer les dimensions de $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Im} T$.
- ***b.*** Construire une base de E dans laquelle T est représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et préciser la valeur de r.

2. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre commutative nilpotente non nulle de $\mathcal{L}(E,E)$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices représentant les éléments de $\mathcal{A}$ sont exactement les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ avec $c \in K$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on se donne un espace vectoriel E sur K et une décomposition de E en somme directe de sous-espaces vectoriels $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$; pour tout $i = 1, \ldots, n$, on note P_i le projecteur sur E_i associé à cette décomposition ; on écrit aussi x_i au lieu de $P_i(x)$ pour $x \in E$.

3. Etant donné un endomorphisme T de E, construire des applications linéaires $T_{i,j}$ appartenant à $\mathcal{L}(E_j, E_i)$ telles que l'on ait $(T(x))_i = \sum_{j=1}^{n} T_{i,j}(x_j)$ pour tout $x \in E$.

On dira que T est *représenté par le tableau d'applications linéaires* $(T_{i,j})$.

4. Etant donné deux endomorphismes S et T de E, exprimer les composantes $(ST)_{i,j}$ de ST en fonction de celles de S et T.

Troisième partie

Dans cette partie, on pose $E = K^n$, où n est un entier strictement positif ; on considère un endomorphisme nilpotent non nul T de E et on note r le plus petit entier strictement positif tel que $T^r = 0$. On pose $E_3 = \operatorname{Im} T \cap \operatorname{Ker} T$.

5. Vérifier que E_3 est distinct de $\{0\}$ et de E.

6. Pour quelles valeurs de r a-t-on $E_3 = \operatorname{Im} T$?

7. Dans cette question, on suppose $r \geq 3$ et on note E_1 (resp. E_2) un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\operatorname{Im} T$ dans E (resp.de E_3 dans $\operatorname{Im} T$). Vérifier que, dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$, T est représenté par un tableau de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Montrer que $T_{2,2}$ est nilpotent et qu'il existe une base de E dans laquelle T est représenté par une matrice $(t_{i,j})$ telle que $t_{i,j}$ soit nul lorsque $i \leq j$.

9. Comparer r et n.

10. Appliquer ce qui précède (question **8.**) au cas où $n = 4$ et où T est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans la base naturelle de K^4.

Quatrième partie

Dans cette quatrième et dernière partie, nous utiliserons les notations suivantes : si X et Y sont deux espaces vectoriels sur K et $\mathcal{Z}$ un sous-ensemble de $\mathcal{L}(X, Y)$, nous désignerons par $\mathcal{K}(\mathcal{Z})$ l'intersection des noyaux des éléments de $\mathcal{Z}$, et par $\mathcal{I}(\mathcal{Z})$ le sous-espace vectoriel de Y engendré par les images des éléments de $\mathcal{Z}$.

On considère une sous-algèbre commutative nilpotente non nulle $\mathcal{A}$ de $\mathcal{L}(E, E)$, où $E = K^n$; on note r son ordre de nilpotence et on pose $E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{K}(\mathcal{A})$.

11. Vérifier que $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ est distinct de E et que E_3 est distinct de $\{0\}$ et de E.

12. Montrer que $E_3 = \mathcal{I}(\mathcal{A})$ si et seulement si $r = 2$.

Dans la suite du problème on suppose $r \geq 3$; on note E_1 (resp. E_2) un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathcal{I}(\mathcal{A})$ dans E (resp. de E_3 dans $\mathcal{I}(\mathcal{A})$). On écrit les éléments T de $\mathcal{A}$ sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_{2,1} & T_{2,2} & 0 \\ T_{3,1} & T_{3,2} & 0 \end{pmatrix}$; pour i, $j = 1, 2, 3$, selon le modèle de la question **7.**. On note $\mathcal{A}_{i,j}$ l'espace vectoriel des $T_{i,j}$ où T parcourt $\mathcal{A}$.

13. ***a.*** Vérifier que $\mathcal{A}_{2,2}$ est une sous-algèbre commutative nilpotente de $\mathcal{L}(E_2, E_2)$ et montrer que $\mathcal{A}_{2,2} \neq \{0\}$ si $r > 3$.

b. Montrer que $\mathcal{A}_{2,2} = \{0\}$ si et seulement si $r = 3$ (on pourra montrer que : $\forall T \in \mathcal{A}, \quad (T_{2,2} \neq 0) \Rightarrow \exists (S, U) \in \mathcal{A}^2, STU \neq 0)$.

c. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle tous les éléments T de $\mathcal{A}$ sont représentés par des matrices $(t_{i,j})$ telles que $t_{i,j}$ soit nul lorsque $i \leq j$.

d. Comparer r et n.

A partir de maintenant on suppose $r \geq 4$.

14. Montrer que l'ordre de nilpotence r' de $\mathcal{A}_{2,2}$ vaut $r - 2$ (on pourra raisonner par double inégalité et utiliser l'indication de la question **13.b.**).

15. ***a.*** Démontrer que l'on a $T_{2,2}(\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})) \subset \mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$ pour tout $T \in \mathcal{A}$.

b. Démontrer que l'on a $\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1}) = E_2$. $\Big[$On pourra raisonner par l'absurde, introduire un supplémentaire E_2' de $\mathcal{I}(\mathcal{A}_{2,1})$ dans E_2 et démontrer que $T_{2,2}$ peut s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} A(T) & 0 \\ C(T) & D(T) \end{pmatrix}\Big]$.

16. Soit T un élément de $\mathcal{A}$ tel que $T_{2,1} = 0$.

a. Démontrer que $T_{2,2}$ et $T_{3,2}$ sont nuls (on pourra considérer l'algèbre $\mathcal{A}'$ qui est l'espace vectoriel engendré par les T^k avec $k \geq 1$).

b. $T_{3,1}$ est-il nul aussi ?