

CCINP MP 2024

Ex 1 : [CCINP] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$ racine de P .
 - a. Montrer que $a = 0$ ou $|a| = 1$.
 - b. Montrer que $a = -1$ ou $|a+1| = 1$.
2. En déduire tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Ex 2 : [CCINP] Soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ des réels deux à deux distincts.

1. Soit $b_1, \dots, b_{n+1}$ des réels. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $P(a_k) = b_k$.
2. Expliciter L_k l'unique polynôme de la question précédente lorsque $b_i = 1$ si $i = k$, 0 sinon.
3. Montrer que, pour tout $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $X^p = \sum_{k=1}^{n+1} a_k^p L_k$.

Ex 3 : [CCINP] Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non colinéaire à I_n tel que $(A + I_n)^3 = 0$.

1. Montrer que A est inversible et expliciter son inverse. Donner un exemple d'une telle matrice.
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Soit p un entier naturel, exprimer A^p en fonction de A^2 , de A et de I_n .

Ex 4 : [CCINP] Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang un.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f^2 = \lambda f$.
2. A-t-on : $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$?
3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - i. Il existe un scalaire c non nul tel que cf soit un projecteur ;
 - ii. $f \circ f \neq 0$;
 - iii. $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.

Ex 5 : [CCINP] Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose u nilpotent. Prouver que $u^n = 0$.
2. On suppose que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice

$$\text{de } u \text{ est } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Résoudre l'équation $X^2 = A$.

Ex 6 : [CCINP] Soit E un espace vectoriel de dimension finie n avec $2 \leq n$
Soit u un endomorphisme de E . On suppose que E est le seul espace non nul stable par u .

1. Que peut-on dire du spectre de u ?
 2. Montrer que : $\forall x \in E, (x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E .
 3. On fixe $x \in E$. Donner la matrice de u dans cette base et montrer qu'elle ne dépend pas de x .
-

Ex 7 : [CCINP] Soit $P = X^n - X + 1$, avec $n \geq 2$.

1. Montrer que P admet n racines $z_1, \dots, z_n$ distinctes sur $\mathbb{C}$.
 2. Soit la matrice $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{i,j} = \begin{cases} 1 + z_i & \text{si } i = j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.
Calculer $\det(A)$.
-

Ex 8 : [CCINP] Soit $n \geq 2$ et $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On considère $A \in E$ telle que $A^2 = I_n, A \neq I_n$ et $A \neq -I_n$.

1. Montrer que $\text{Tr } A \equiv n \pmod{2}$.
 2. Montrer que $|\text{Tr } A| \leq n - 2$.
-

Ex 9 : [CCINP] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si w est une valeur propre complexe de A , alors $\bar{w}$ l'est aussi.
 2.
 - a. Montrer que $X^3 - 3X - 4$ possède une unique racine réelle.
 - b. On suppose dans cette question de $A^3 - 3A - 4I_n = 0$. Montrer que $\det(A)$ est positif.
 3. On suppose dans cette question de $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
 4. On suppose dans cette question de $A^3 + A^2 + A = 0$.
 - a. Montrer que $\text{rg}(A)$ est pair.
 - b. Montrer que $\text{tr}(A)$ est dans $\mathbb{Z}^-$.
-

Ex 10 : [CCINP]

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0$ et $A \neq 0$.
 - a. Montrer que $\dim(\text{Ker}(A)) = 2$.
 - b. Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'équation $M^2 + M = A$, d'inconnue M , avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a. Si M est solution, montrer que M est diagonalisable.

b. Résoudre l'équation.

Ex 11 : [CCINP] Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geq 2$ tel que $\text{rg}(A) = 1$.

1.
 - a.* Montrer que $\chi_A = X^{n+1}(X - \text{Tr}(A))$ et $\Pi_A = X(X - \text{Tr}(A))$.
 - b.* En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.

c. Montrer que A est semblable à $\text{Diag}(0, \dots, 0, \text{Tr}(A))$ ou à la matrice
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & 0 \\ (\mathbf{0}) & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On suppose que $\text{rg}(B) = \text{rg}(A) = 1$ où B désigne une matrice de $M_n(\mathbb{K})$.
Montrer que A et B sont semblables si et seulement si $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$
3. On fixe maintenant 2 matrices A et B dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ et on pose $M = AB^T$.
 - a.* Donner le rang de M .
 - b.* Valeur propre et sous espace propre de M ?
 - c.* M est-elle diagonalisable ?

Ex 12 : [CCINP] Soit U et V deux vecteurs non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, la matrice $A = UV^T$ et le complexe $a = \text{Trace}(A)$.

1. Quel est le rang de la matrice A ?
2. Calculer $U^T V$.
3. Calculer A^2 .
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Dans le cas où $a \neq 0$, déterminer les sous-espaces propres de A .

Ex 13 : [CCINP] Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A est trigonalisable mais n'est pas diagonalisable.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.
 - a.* Justifier que M n'est pas inversible.
 - b.* Montrer que les seules valeurs propres possibles pour M sont -1 , 0 et 1 .
 - c.* Montrer que la dimension des sous-espaces propres de M est égale à 1.
3. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

Ex 14 : [CCINP] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A .
2. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Ex 15 : [CCINP] On considère la matrice A suivante : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer les valeurs propres de A et ses sous-espaces. A est-elle diagonalisable ?
 2. Soit u_1 un vecteur propre de A . On pose $u_2 = e_1 - e_2$ et $u_3 = e_1$ (avec (e_1, e_2, e_3) base canonique de $\mathbb{R}^3$). Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
 3. On pose f l'endomorphisme canoniquement associée à A . Exprimer la matrice f dans (u_1, u_2, u_3) .
 4. Résoudre l'équation $X' = AX$.
-

Ex 16 : [CCINP]

1. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire telle que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.
 2. Soit $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de B . Montrer qu'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|\lambda - b_{i,i}| \leq \sum_{j \neq i} |b_{i,j}|$.
-

Ex 17 : [CCINP] Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$. On exprimera le résultat sous une forme factorisée.
 2. Déterminer le rang de la matrice A .
 3. La matrice A est-elle diagonalisable ? Préciser la valeurs propres de A ainsi que leur multiplicité. Déterminer le polynôme minimal π_A de A .
-

Ex 18 : [CCINP] Soient $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $a^2 + b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer MM^T et en déduire $\det M$.
 2. **a.** On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Montrer que $\text{rg } M = 4$.
b. On suppose que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Montrer que $\text{rg } M = 2$.
 3. Étudier la diagonalisabilité de M .
-

Ex 19 : [CCINP] Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a \\ a & \cdots & a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Justifier que A est diagonalisable.
 2. Déterminer le rang de A .
 3. Déterminer le polynôme minimal de A , les valeurs propres de A et le polynôme caractéristique de A .
-

Ex 20 : [CCINP] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $[A]_{ij} = \sin(i + j)$.

$$A = \begin{pmatrix} \sin(2) & \sin(3) & \sin(4) & \cdots & \sin(n+1) \\ \sin(3) & \sin(4) & \sin(5) & \cdots & \sin(n+2) \\ \sin(4) & \sin(5) & \ddots & \cdots & \sin(n+3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sin(n+1) & \sin(n+2) & \sin(n+3) & \cdots & \sin(2n) \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de A
 2. Trouver $B \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R})$ telles que $A = BC$ et CB soit inversible.
 3. Montrer que $\text{Sp}(CB) \subset \text{Sp}(A)$.
 4. Trouver les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.
-

Ex 21 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ v & \mapsto u \circ v \end{cases}.$$

- 1.
 2. Montrer que toute valeur propre de f est également valeur propre de u .
 3. Soit $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et v un projecteur sur $E_\lambda(u)$.
 - a.
 - b. Montrer que v est un vecteur propre de f .
 - c. En déduire que u et f ont le même spectre.
 4. Pour $\lambda \in \text{Sp}(u)$, on suppose que $\dim(E_\lambda(f)) = n \dim(E_\lambda(u))$.
Montrer que f est diagonalisable ssi u est diagonalisable.
 5. Montrer que $\dim(E_\lambda(f)) = n \dim(E_\lambda(u))$.
-

Ex 22 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

et $\phi_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ avec $\phi_A(M) = AM$.

1.
 - a. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $\phi_{P(A)} = P(\phi_A)$.
 - b. Montrer que A est diagonalisable ssi ϕ_A est diagonalisable.
 - c. Si A diagonalisable et $\lambda \in \text{Sp}(A)$ de multiplicité m .
Alors montrer que $\lambda \in \text{Sp}(\phi_A)$ et sa multiplicité est mn .
2. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\phi_{A,B} \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\phi_{A,B}(M) = AMB$.
 - a. Si X est un vecteur propre de A et Y un vecteur propre de B^T ,
montrer que XY^T est un vecteur propre de $\phi_{A,B}$.
 - b. Montrer que si A et B diagonalisable alors $\phi_{A,B}$ est diagonalisable.
La réciproque est-elle vraie ?

Ex 23 : [CCINP] Soit u l'application de $M_3(\mathbb{C})$ et qui à $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ x & y & z \end{pmatrix}$ associe la matrice $\begin{pmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ z & y & x \end{pmatrix}$

1. Montrer que u est un endomorphisme.
 2. Chercher les valeurs propres et vecteurs propres associés à l'endomorphisme u .
 3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
 4. Déterminer la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de u .
-

Ex 24 : [CCINP] Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$, $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & . & 1 \\ 1 & 0 & 0 & . & 0 \\ 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & . \\ 1 & 0 & . & . & . \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$, on note f l'endomorphisme canoniquement associé à M .

1. Déterminer le rang de M .
 2. Donner les valeurs propres de M et leurs sous espaces propres associés.
 3. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur $\text{Im } f$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
-

Ex 25 : [CCINP] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n . On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = u$.

1. Montrer que u est diagonalisable et discuter de son nombre de valeurs propres p .
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u et $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ les sous espaces propres associés.
 2. Soit F un sous espace vectoriel de E . Prouver que :
 F stable par u si et seulement si $F = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ avec pour tout i de $\llbracket 1; p \rrbracket$, F_i est un sous espace vectoriel de E_{λ_i} .
-

Ex 26 : [CCINP] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E) \setminus \{0\}$ tel que $f^3 + f = 0$.

1. Soit $x \in E$. Montrer que si $(y, z) \in \text{Ker } f \times \text{Ker}(f^2 + \text{Id})$ est tel que $x = y + z$, alors $y = x + f^2(x)$ et $z = -f^2(x)$.
 2. Montrer que $\dim \text{Ker}(f^2 + \text{Id}) \geq 1$ et que si $x \in \text{Ker}(f^2 + \text{Id}) \setminus \{0\}$, alors $(x, f(x))$ est une famille libre de $\text{Ker}(f^2 + \text{Id})$.
 3. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 + \text{Id})$.
 4. Calculer $\det(-\text{Id})$; montrer que $\dim \text{Ker}(f^2 + \text{Id}) = 2$.
 5. Trouver une base $\mathcal{B}$ telle que : $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
-

Ex 27 : [CCINP] Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que $\det A = 1$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. On note α et β les deux racines complexes de χ_A . Montrer que : $|\alpha| = |\beta| = 1, \alpha = \bar{\beta}, |\Re \alpha| \in \{0, 1/2, 1\}$.

3. Montrer que $A^{12} = I_2$.
 4. Montrer que $G = \{A^n, n \in \mathbb{N}\}$ est un groupe cyclique.
-

Ex 28 : [CCINP] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

1. Montrer que, si P est un polynôme annulateur de M , toute valeur propre de M est racine de P .
 2. On suppose M symétrique.
 - a. Montrer que M diagonalisable.
 - b. Montrer que $\text{Tr}(M) \det(M) \neq 0$.
 3. On suppose M non symétrique. Montrer que M est diagonalisable.
 4. Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \text{Sp}(M)$.
-

Ex 29 : [CCINP] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

1. Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à A , montrer que $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(B)$.
 2. Si A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, montrer que $\dim \mathcal{C}(A) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} m(\lambda)^2$, où $m(\lambda)$ est la multiplicité de la valeur propre λ .
-

Ex 30 : [CCINP] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MB$.

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\text{Sp } N = \text{Sp } N^T$.
 2. Soient $U, V \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\})^2$. Montrer que : $UV^T \neq 0$.
 3. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que, pour tous $(\alpha, \beta) \in \text{Sp } A \times \text{Sp } B$, $\alpha + \beta \in \text{Sp } \Phi$.
 4. Soient $\lambda \in \text{Sp } \Phi$ et M un vecteur propre associé.
 - a. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = MP(\lambda I_n - B)$.
 - b. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \text{Sp } A \times \text{Sp } B$ tel que : $\lambda = \alpha + \beta$.
-

Ex 31 : [CCINP] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit : $u : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & -X + \text{tr}(X)A \end{cases}$.

1. Montrer que u est linéaire.
 2. Montrer que u est injective si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 1$.
 3. En déduire une condition pour que u ne soit pas bijective.
 4. Discuter selon A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'existence de solutions de l'équation $u(X) = B$.
-

Ex 32 : [CCINP] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M^T = -M\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), (A|B) = \text{tr}(A^T B)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^\perp$.

3. On note $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer la distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
 4. Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$. Montrer que H est un espace vectoriel de dimension à déterminer.
 5. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1. Calculer la distance de J à H .
-

Ex 33 : Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$,

on pose $\langle P, Q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

1. Montrer que l'intégrale est bien définie et qu'il s'agit d'un produit scalaire.
 2. Soit $\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}[X])$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \delta(P) = P'$.
On note δ^* l'adjoint de δ . Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \delta^*(P) = XP - P'$.
 3. On pose $H_0 = 1$ et $\forall k \in \mathbb{N}, H_{k+1} = \delta^*(H_k)$.
Calculer H_1, H_2 et H_3 .
 4. Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \forall k \in \mathbb{N}, \langle H_k, P \rangle = \langle H_0, P^{(k)} \rangle$.
 5. Montrer que $(H_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
-

Ex 34 : [CCINP]

1. Rappeler l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien E , lorsque l'on dispose d'une base orthonormée de F .
 2. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur la droite d'équation $6x = 4y = z$.
-

Ex 35 : [CCINP] Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit u un vecteur unitaire de E et pour a dans $\mathbb{R}$ on pose $f_a : x \mapsto x + a \langle x, u \rangle u$.

1. Montrer que f_a est un endomorphisme de E .
 2. **a.** Montrer qu'il existe un unique a' dans $\mathbb{R}^*$ tel que : $\forall x \in E, \|f_{a'}(x)\| = \|x\|$.
b. Montrer que $\text{Ker}(f_{a'} + \text{Id}_E)$ et $\text{Im}(f_{a'} + \text{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E .
 3. On se replace dans le cas général. Déterminer les éléments propres de f_a .
-

Ex 36 : [CCINP] On pose $M = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(M)$.
 2. Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les sous-espaces propres de M .
 3. Montrer que M est diagonalisable.
 4. Trouver un polynôme annulateur de M . Qu'en dire ?
 5. Trouver $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
-

Ex 37 : [CCINP] Soit E un espace euclidien et u une isométrie vectorielle de E . On pose $v = \text{Id}_E - u$.

1. Montrer que $\text{Im}(v)$ et $\text{Ker}(v)$ sont supplémentaires orthogonaux.

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$. Soit $x \in E$.

a. On considère $z \in \text{Im}(v)$ et $y \in \text{Ker}(v)$ tel que $x = z + y$. Montrer que :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k(z) + y.$$

b. En déduire que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(v)$.

Ex 38 : [CCINP] Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^* = -f$.

1. Montrer que si f est injectif, alors n est pair.
 2. Montrer que $\text{Ker}(f)$ et $\text{Im}(f)$ sont supplémentaires orthogonaux.
 3. En déduire que le rang de f est pair.
 4. Montrer que la seule valeur propre réelle de f est 0.
-

Ex 39 : [CCINP]

1. Montrer que $(M, N) \mapsto \text{tr}(M^T N)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 2. Soient $M, N \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\text{tr}(M^T N) \leq n$.
 3. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
 - a. Montrer que $\text{tr}((AB)^2) \leq \text{tr}(A^2 B^2)$.
 - b. Montrer que $\text{tr}((AB + BA)^2) \leq 4\sqrt{\text{tr}(A^4)}\sqrt{\text{tr}(B^4)}$.
-

Ex 40 : [CCINP]

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et $T_n^+(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices triangulaires supérieures donc tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs) sont des sous-groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), \circ)$.
 2. Montrer que $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+(\mathbb{R}) = \{I_n\}$.
 3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ la base constituée des vecteurs colonnes de A . Soit $\mathcal{B}_{GS} = (v_1, \dots, v_n)$ la base orthonormée obtenue à partir de $\mathcal{B}$ grâce au procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. À l'aide de ces bases, montrer qu'il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in T_n^+(\mathbb{R})$ telles que : $A = OT$.
-

Ex 41 : [CCINP] Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

1. Déterminer les éléments de $\mathcal{S}^+(E) \cap \mathcal{O}(E)$.
 2. Montrer la stabilité de $\mathcal{S}^+(E)$ par addition. L'ensemble $\mathcal{S}^+(E)$ est-il un espace vectoriel ?
 3. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer l'existence de $v \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = v^2$.
 4. En déduire que pour tous $u, v \in \mathcal{S}^+(E)$, $\text{Ker}(u+v) = \text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v)$ et $\text{Im}(u+v) = \text{Im}(u) + \text{Im}(v)$.
-

Ex 42 : [CCINP]

1. Soit $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ définie par : $\forall t \in [-1, 1], \gamma(t) = \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{2i\pi t}$. Calculer $\frac{1}{2i\pi} \int_{-1}^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt$.
 2. Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}^*$. On note : $\phi : t \mapsto \frac{1}{i} \int_a^t \frac{g'(s)}{g(s)} ds$ et $\psi : t \mapsto g(t)e^{-i\phi(t)}$.
 - a. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$.
 - b. Montrer que ψ est constante.
 - c. Montrer qu'il existe $\rho : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\theta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in [a, b], g(t) = \rho(t)e^{i\theta(t)}$.
 3. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$. Montrer que $\frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} dt \in \mathbb{Z}$. Pourrait-on déduire la valeur à la question 1 ?
-

Ex 43 : [CCINP]

1. Soit f la fonction définie pour $t > 0$ telle que $f(t) = \frac{\ln t}{(1+t)^2}$. Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.
 2. Calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt$.
-

Ex 44 : [CCINP]

1. Montrer que pour $n \geq 3$, on a : $\int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt + \frac{\ln(2)}{2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{n} \leq \int_3^n \frac{\ln(t)}{t} dt + \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\ln(3)}{3}$.
 2. Montrer que $\ln^2(n) - \ln^2(n-1) = \frac{2\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)}{n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$.
 3. On pose $u_n = \frac{\ln(n)}{n} - \frac{1}{2} (\ln^2(n) - \ln^2(n-1))$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=2}^n \frac{\ln(k)}{k} = \frac{\ln^2(n)}{2} + c + \varepsilon_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0$.
-

Ex 45 : Soit $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}$.

- 1.
2. Montrer que $u_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}}$.
3. Par comparaison série-intégrale montrer que $u_{2n} \sim \frac{\sqrt{2n}}{2}$.
4. Trouver un équivalent de u_n .
5. On pose $v_n = u_{n+1} + u_n$. Nature de $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$.
Montrer que (v_n) converge vers $l < 0$.
6. Nature de $\sum \frac{1}{u_n}$.

Ex 46 : [CCINP] Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

Soit $g : x \mapsto \begin{cases} f(x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que g est continue sur I , puis dérivable sur I si $n \geq 2$.

2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I \setminus \{0\}$ et que : $\forall x \in I \setminus \{0\}, g^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} n! f^{(k)}(x)}{k! x^{n-k+1}}$.

3. Montrer que : $\forall x \in I \setminus \{0\}, g^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt$, grâce à une formule de Taylor avec reste intégrale.

Ex 47 : [CCINP] On note $I =]0, +\infty[$ et on fixe une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I, f(x+1) = xf(x) \\ f(1) = 1 \\ \phi = \ln(f) \text{ est convexe.} \end{cases}$$

1. Tracer l'allure du graphe d'une fonction convexe et y placer trois points A, B et C d'abscisses croissantes. Classer alors, sans justification, les pentes des droites $(AB), (BC)$ et (AC) .

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in]0, 1]$:

$$\ln(n) \leq \frac{\phi(n+1+x) - \phi(n+1)}{x} \leq \ln(n+1).$$

3. Montrer que $\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, 1]$:

$$0 \leq \phi(x) - \ln \left(\frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)} \right) \leq x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

4. Montrer alors que f est unique, puis vérifier que f coïncide avec la fonction

$$\Gamma : x > 0 \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \text{ d'Euler.}$$

Ex 48 : [CCINP]

1. Soient $a, b > 0$. Calculer $\int_a^b \frac{dt}{t^{3/2} + t^{1/2}}$.

On effectuera le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2} + k^{1/2}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq R_n \leq 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

4. Déterminer un équivalent simple de R_n quand n tend vers $+\infty$.

Ex 49 : [CCINP] Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$.

1. **a.** Montrer que I_n est bien définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

b. Montrer que la suite (I_n) converge et calculer sa limite.

- 2. a.** Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .
 - b.** En déduire une autre méthode pour calculer la limite de (I_n) .
-

Ex 50 : [CCINP] Soit $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-x\sqrt{n}}}{n}$.

- 1.** Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}^+$.
 - 2.** Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et calculer S' .
-

Ex 51 : [CCINP] On pose pour $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n}$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

- 1.** Quel est le domaine de définition de S ?
 - 2.** Montrer que $S \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$.
 - 3.** Montrer que $S \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$.
 - 4.** Calculer S .
-

Ex 52 : [CCINP] On pose $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$.

- 1.** Donner le domaine de définition et le sens de variation de ζ .
 - 2.** Étudier la continuité de ζ sur son domaine de définition.
 - 3.** Quelle est la limite de ζ en $+\infty$?
 - 4.** Montrer que $\zeta(t) \underset{t \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{t-1}$. On pourra s'aider $\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^t}$.
 - 5.** Montrer que ζ est convexe.
-

Ex 53 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : x \mapsto nx^n(1-x)$

et $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ quand c'est défini.

- 1. a.** Étudier les convergences simples, uniformes et normales de $\sum f_n$.
 - b.** Montrer que S est définie sur $[0, 1]$ et continue sur $[0, 1]$.
 - 2. a.** Expliciter $S(x)$.
 - b.** Montrer que $S(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{1-x}$.
 - c.** S est-elle continue en 1? Justifiez.
-

Ex 54 : [CCINP] On considère la fonction d'une variable réelle : $F : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + e^{-nx})$.

- 1.** Déterminer le domaine D de définition de F .
- 2.** La fonction F est-elle continue sur D ?

3. Montrer que F est monotone sur D .
4. Déterminer le domaine image $F(D)$.
-

Ex 55 : [CCINP] Soit une suite (a_n) décroissante positive et qui converge vers 0. Pour $x \in [0, 1]$, on note

$$u_n(x) = a_n x^n (1 - x).$$

1. Justifier que (a_n) est bornée.
 2. Étudier la convergence simple de la série $\sum (u_n)$ sur $[0, 1]$
 3. Étudier la convergence uniforme de la série (on peut calculer le reste $\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$).
 4. Calculer la limite de $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
 5. Étudier la convergence normale de la série (on peut calculer la norme infinie de u_n)
-

Ex 56 : [CCINP] On pose $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + n^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire.
 2. La série converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?
 3. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
 4. Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
 5. Étudier la convergence uniforme sur $[1, +\infty[$.
-

Ex 57 : Soit $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1 + n^2}$.

1. Déterminer l'ensemble E de définition de f .
 2. f est-elle continue sur E ?
 3. f est-elle dérivable sur $]0, +\infty[$?
 4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$?
-

Ex 58 : [CCINP]

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum e^{-nx}$ converge-t-elle ?
 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x \mapsto e^{-nx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
 3. Justifier l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} x e^{-nx} \, dx$.
 4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} \, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 + n^2}$.
-

Ex 59 : [CCINP]

1. Montrer que l'intégrale $\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx$ est convergente pour tout $a \in]0, 1[$.
 2. Montrer que $\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}$
 3. Montrer alors que $\int_0^1 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx$ est convergente et en déduire sa valeur.
-

Ex 60 : [CCINP] Soit $r \in]-1, 1[$. On définit $f_n : x \mapsto r^n \cos(nx)$, pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction S définie par $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
 3. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos(x)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
 4. Soit $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx$.
 5. En déduire, pour k dans $\mathbb{N}$, l'expression de $I_k = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(kx)}{1+r^2-2r \cos(x)} dx$.
-

Ex 61 : [CCINP] Soit $p \geq 2$ entier et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 [p] \\ -1 & \text{si } n \equiv 1 [p] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
 2. Calculer la somme de la série $f(x)$, et l'écrire sous une forme simplifiée.
 3. La série converge-t-elle uniformément sur $] -R, R[$?
 4. Décomposer $f(x)$ en éléments simples dans $\mathbb{C}$, écrire les coefficients sous forme trigonométrique.
-

Ex 62 : [CCINP]

1. Donner le rayon de convergence de $S : x \mapsto \sum (-1)^n \ln(n) x^n$.
 2. Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, $S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^{n+1}$.
 3. Montrer que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.
 4. Calculer cette limite à l'aide de la formule de Wallis : $\frac{2}{\pi} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{4k^2} \right)$.
-

Ex 63 : Soit $u_n = \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$.

1. Donner le développement en série entière de $\ln(1+t)$.
2. Montrer, avec le théorème d'intégration terme à terme, que

$$u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$$

3. Soit $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+x)}$.

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

b. Déterminer u_n en fonction de f .

c. On admet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $u_n \sim \frac{\pi^2}{12n}$.

4. Montrer que : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, u_n = \frac{\pi^2}{12n} + \frac{\lambda}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

5. Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ en fonction de λ tels que $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Ex 64 : [CCINP] Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k u_{n-k}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq n!4^{n+1}$.

2. Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$. Donner l'intervalle de définition de f et montrer que, sur cet intervalle, $f'(x) = f(x)^2$.

3. En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

4. Donner une expression de u_n .

Ex 65 : [CCINP] Soit (a_n) une suite réelle convergente de limite $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n} x^n$.

2. Rappeler le développement en série entière de $\ln(1-x)$ et son rayon de convergence.

3. Rappeler la définition de la convergence de (a_n) vers a .

4. On note f la somme de la série entière susmentionnée. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un majorant de $\left| \frac{f(x)}{\ln(1-x)} + a \right|$ de limite ε quand x tend vers 1^- . En déduire la convergence et la limite de $\frac{f(x)}{\ln(1-x)}$ ainsi qu'un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1^- .

Ex 66 : [CCINP] On pose $a_0 = a_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ et $u_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

1. Montrer que $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$ puis que $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. a. Montrer que $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ admet un point fixe dans $[1/2, 1]$.

b. Montrer que (u_n) converge et calculer sa limite.

3. Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

a. Préciser le rayon de convergence de S .

b. Prouver que $S(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

c. En déduire une expression explicite de a_n .

Ex 67 : [CCINP] On note n et p deux entiers naturels avec n non nul et $p \leq n$.

On note $N(n, p)$ le nombre de permutation de $\mathfrak{S}_n$ avec p points fixes et on introduit $D(n) = N(n, 0)$ et $D(0) = 1$.

On considère $f(x)$ la somme de la série entière de terme général $\frac{D_n}{n!} x^n$.

1. Par dénombrement montrer que $N(n, p) = \binom{n}{p} D(n-p)$ et que $\sum_{p=0}^n N(n, p) = n!$.

2. Montrer que la fonction f est définie sur $] -1, 1[$ et que $f(x)e^x = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in] -1, 1[$.

3. En déduire $N(n, p)$.

4. Trouver la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $\frac{N(n, p)}{n!}$ en fonction de p . Interpréter.

Ex 68 : [CCINP] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^3)^n} dx$.

1. Justifier la définition de I_n .

2. Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n I_n$. Montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer la somme de cette série.

Ex 69 : [CCINP] On donne $\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer le rayon de convergence et la limite en 1 de $f : x \mapsto \sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

2. Déterminer le rayon de convergence de $g : x \mapsto \sum \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Exprimer g à l'aide de $\ln$.
Donner les limites en 1 et 0 de $x \mapsto \ln(x)g(x)$.

3. Soient a et b deux réels, $0 < a < b < 1$. Montrer que $\int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$ est bien définie.

4. Montrer que $\int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx = - \sum_{n \geq 0} \int_a^b \ln(x) x^{2n} dx$.

5. Calculer $\int_a^b \ln(x) x^{2n} dx$.

6. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1} dx$.

Ex 70 : [CCINP] Soit $(E) : (x^2 - 2)y' + xy = -2$.

1. Résoudre (E) sur $I =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.
 2. On considère la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
 3. On note f la somme de la série entière précédente, trouver une équation différentielle dont f est solution.
 4. Déterminer une expression simple de f .
-

Ex 71 : [CCINP]

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction Arcsin .
 2. Justifier que la fonction f définie par : $\forall x \in]-1, 1[, f(x) = (\text{Arcsin } x)^2$ admet un développement en série entière.
 3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle : $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$.
 4. En déduire le développement en série entière de f .
-

Ex 72 : Soit $(E) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 1$

et $(H) : x^2 y'' + 4xy' + (2 - x^2)y = 0$.

On étudie les solutions de (E) et (H) sur $]0, +\infty[$.

- 1.
 2. Montrer qu'il existe une unique solution DSE, qui vérifie (E) et la déterminer.
 3. Montrer que $g : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est solution de (E) .
 4. On admet que $h : x \mapsto \frac{\text{sh}(x)}{x^2}$ est solution de (H) .
Déterminer toutes les solutions de (H) .
-

Ex 73 : [CCINP] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{n!}{1.3 \dots (2n+1)}$.

1. Donner le rayon de convergence R de $\sum a_n x^{2n+1}$.
 2. Résoudre sur $] -R, R[$ l'équation différentielle $(E) : (2 - x^2)y' - xy = 2$.
 3. Montrer que la somme f de $\sum a_n x^{2n+1}$ est solution de (E) sur $] -R, R[$.
 4. Étudier la convergence aux bords de l'intervalle de convergence de cette série entière.
-

Ex 74 : [CCINP] On définit $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t+1} dt$.

1. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et trouver une équation différentielle simple vérifiée par g .
3. En déduire une autre expression (intégrale) de g et un équivalent de g en $+\infty$.

Ex 75 : [CCINP] On pose $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Rappeler la définition de $\lim_{x \rightarrow 0} |f'(x)| = +\infty$. Montrer que :

$$\forall A > 0 \quad \forall x > 0 \quad |f'(x)| \geq \int_0^A \frac{t^2}{1+t^2} (1 - xt^2) dt.$$

3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\infty$.
-

Ex 76 : [CCINP] Soit $k > 0$ et $f: x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^1 t^k \sin(xt) dt$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis prouver que f vérifie la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x f'(x) + (k+1) f(x) = \sin(x)$$

3. Déterminer le développement en série entière de $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, x y'(x) + (k+1) y(x) = \sin(x)$. Donner, ensuite, le rayon de convergence du développement en série entière d'une telle fonction y .
-

Ex 77 : [CCINP]

1. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, calculer $\int \frac{1}{au^2 + b} du$.
2. Soit t tel que $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ ne s'annule pas. On pose $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, déterminer $\cos(t)$ en fonction de u .
3. On définit : $f: \begin{cases}]1; +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^\pi \ln(x + \cos(t)) dt \end{cases}$.

Montrer que f est de classe C^1 sur $]1; +\infty[$ puis montrer que : $\forall x \in]1; +\infty[, f'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Ex 78 : [CCINP] On pose : $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1} dt$.

1. Montrer que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer $g'(x)$ pour tout x .
 2. Exprimer g en fonction de $h: x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.
 3. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
-

Ex 79 : [CCINP] Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \exp(-xt^2)}{t^2} dt$.

1. Domaine de définition de f ?

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son domaine de définition.

3. Donner une expression simplifiée de $f(x)$. On donne $\int_0^{+\infty} \exp(-t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ex 80 : [CCINP] On considère l'équation différentielle : $(E) : y' - 2xy = 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution développable en série entière vérifiant $y(0) = 0$.

2. Résoudre sous forme intégrale le problème de Cauchy $(y' - 2xy = 1, y(0) = 0)$.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Ex 81 : [CCINP] Soient $E = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, P (resp. I) le sous-espace des fonctions paires (resp. impaires) de E .

1. Montrer que $E = P \oplus I$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = \operatorname{ch} x$.

3. Trouver les fonctions $f \in E$ telles que $f''(x) - f(-x) = \operatorname{ch} x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ex 82 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de A .

Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B = A + \lambda I_2$ soit nilpotente.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tA} et e^{tB} .

3. Résoudre le système d'équation différentiel $\begin{cases} x' &= x - y \\ y' &= x + 3y \end{cases}$.

Ex 83 : [CCINP]

1. Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$.

2. Montrer que $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} dt$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

3. Majorer F sur $\mathbb{R}^*$ et en déduire sa limite en $+\infty$.

4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer explicitement $F'(x)$.

Ex 84 : [CCINP] Soient $a \in \mathbb{R}$ et f définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(x, y) = \frac{2x^2 + xy^2 + 6x^2y^2}{(x^2 + y^2)^a}.$$

1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0, 0)$?

2. La fonction f possède-t-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?

3. Étudier la différentiabilité de f en $(0, 0)$.

Ex 85 : [CCINP] Soit $n \geq 2$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des réels strictements positifs tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$.

On pose deux fonctions f et g tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \quad f((x_1, \dots, x_n)) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} & \text{si } \prod_{i=1}^n x_i \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } g((x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i.$$

On pose également $\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, g((x_1, \dots, x_n)) = 1\}$.

1. Montrer que f admet un maximum μ sur Γ , en particulier sur $\Gamma \cap]0, +\infty[^n$.
2. Déterminer μ et $A \in \Gamma \cap]0, +\infty[^n$ tel que $f(A) = \mu$.
3. En déduire que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \quad \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

Ex 86 : [CCINP] Soit $n \in \mathbb{N}$, soit une fonction f_n définie sur $[0; 1]^n$ telle que

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in [0; 1]^n, \quad f_n(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1 - x_i^2} \right)$$

1. Montrer que f_n admet un minimum m_n et un maximum M_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer m_n .
3. **a.** Montrer que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\Omega =]0; 1[^n$, et montrer qu'il existe un unique point critique $A \in \Omega$.
b. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in [0; 1]^n$.
Montrer que $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \sqrt{1 - x_j^2} + x_j \sqrt{1 - x_i^2} \leq 1$.
c. Montrer que $M_n = f_n(A)$.

Ex 87 : [CCINP] Pour tout $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Soit X une variable aléatoire telle que

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* : P(X = n) = \frac{\lambda}{n^s}$$

1. Calculer λ . Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que X admette une espérance. Puis une variance.
2. Soit A_n : « n divise X » (avec $n \in \mathbb{N}^*$). Calculer $P(A_n)$. Étudier l'indépendance de A_n et A_m quand $n \wedge m = 1$.
3. Montrer qu'en notant P l'ensemble des nombres premiers,

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in P} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)$$

Ex 88 : [CCINP] Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles admettant une variance. On introduit la matrice $S = (\text{cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ et l'application définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par : $\forall U = (u_i)_{1 \leq i \leq n} \in$

$$\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f(U) = \frac{1}{\|U\|^2} \mathbf{V} \left(\sum_{i=1}^n u_i X_i \right).$$

1. Montrer que S est diagonalisable.

2. Prouver que pour tout $U \in \mathbb{R}^n$, $U^T S U = \mathbf{V} \left(\sum_{i=1}^n u_i X_i \right)$.

3. On ordonne les valeurs propres de S dans l'ordre décroissant : $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1$. Soit $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

a. Montrer que $U^T S U \leq \lambda_1 \|U\|^2$.

b. En déduire que $f(U) \leq \lambda_1$. Prouver que cette inégalité est une égalité si et seulement si U est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_1 .

4. a. Soit $a \in]0, 1[$. On choisit ici $S = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres de S .

b. En déduire $\max_{U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(U)$ et donner les vecteurs U pour lesquels ce maximum est atteint.

Ex 89 : On a deux urnes opaques.

L'urne U contient n boules numéroté de 1 à n .

L'urne V contient des boules blanches en proportion p .

On tire une boule dans l'urne U et on note X la variable aléatoire associée au numéro k de cette boule.

On tire k boules dans l'urne V et on note Y la variable aléatoire associée au nombre de boules blanches tirées.

1. Reconnaître la loi de X . Donnez son espérance et sa variance.

2. Calculez la loi de Y . Donnez son espérance

3. Calculez $E(Y(Y-1))$, en déduire la variance de Y .

Ex 90 : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Pour quelles valeurs de a et b M est-elle diagonalisable ?

2. Soient $X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ telles que X et Y soient indépendantes.

Quelle est la probabilité que $\begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

$\text{tr}(A^N)$ admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

IMT MP 2024

Ex 91 : [IMT] Quel est le nombre d'applications $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $f \circ f = f$?

Ex 92 : [IMT] Soit l'anneau $A = (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ et $I_x = \{f \in A / f(x) = 0\}$.

1. Montrer que I_x est un idéal.

2. Montrer que si $x_1 \neq x_2$, $A = I_{x_1} + I_{x_2}$.

Ex 93 : [IMT] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ (on pourra traiter les cas $a = b$ et $a \neq b$).
 2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X + 1)^{2n+1} - X^{2n}$ par $X^2 + X + 1$.
-

Ex 94 : Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^*$.

1. Supposons que n divise m , Montrer que $X^n - 1$ divise $X^m - 1$.
 2. Nous ne supposons plus que n divise m .
Calculer le résultat de la division euclidienne de $X^m - 1$ par $X^n - 1$
-

Ex 95 : [IMT]

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n . Montrer l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que :
 $\forall \theta \in \mathbb{R}, P(e^{i\theta}) = e^{-in\theta} Q(e^{i\theta})$.
 2. En déduire les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) = \mathbb{U}$.
-

Ex 96 : [IMT] On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \sin(i + j)$. Calculer $\text{rg}(A)$ et en déduire $\det(A)$. Ind. On pourra considérer $X = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$.

Ex 97 : [IMT] Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telles que $\text{rg}(f \circ g) = 2$. Calculer $\text{rg } f$ et $\text{rg } g$.

Ex 98 : [IMT] Soit E un espace vectoriel de dimension 4 et $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang 2 tel que $u^2 = 0$.

1. Montrer que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$.
 2. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
-

Ex 99 : [IMT] Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$

Calculer A^2 , puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ex 100 : [IMT] Soit P un polynôme annulateur d'une matrice carrée M non inversible. Montrer que $P(0) = 0$.

Ex 101 : [IMT] Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + XX^T) = 1 + X^T X$.

Ex 102 : [IMT] On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
 2. Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$ et $\Delta = P^{-1}XP$.
 - a. Calculer $\Delta^2 + \Delta$.
 - b. Montrer que D et Δ commutent. En déduire que Δ est diagonale.
 3. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 + X = A$.
-

Ex 103 : Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle diagonalisable ? trigonalisable ?
 2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.
Montrer que $\{0\} \subset Sp(M) \subset \{-1, 0, 1\}$.
 3. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\exists P \in GL_3(\mathbb{R}), A = PTP^{-1}$.
 4. Montrer que la dimension des sous-espaces propres de M est égale à 1.
 5. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $M^2 = A$.
-

Ex 104 : [IMT] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $u^3 + u = 0$.

1. Pour $x \in \text{Im } u$, calculer $u^2(x)$.
 2. On note v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im } u$. Montrer que v est un isomorphisme.
 3. Montrer que $\text{rg } u$ est pair.
-

Ex 105 : [IMT] Soient u et v deux endomorphismes nilpotents et non nuls de $\mathbb{R}^n$ qui commutent. On note $\tilde{v}$ l'endomorphisme induit par v sur $\text{Im}(u)$.

1. Montrer que l'endomorphisme $\tilde{v}$ est bien défini et en déduire que $\text{rg}(v \circ u) < \text{rg}(u)$.
 2. Soient $A_1, \dots, A_n$ des matrices nilpotentes d'ordre n commutant deux à deux. Montrer que leur produit est nul.
-

Ex 106 : [IMT] On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, où $a \in \mathbb{R}$. La matrice A est-elle inversible ? diagonalisable ?

Ex 107 : [IMT] Soient $x \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Ex 108 : [IMT] Soit $n \in \mathbb{N}$.

On considère la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{si } j = n \\ j & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. Déterminer ses éléments propres.

Ex 109 : Trouver toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\text{tr}(M) = n$.

Ex 110 : [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique est scindé à racines simples.

1. Montrer que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre.

2. Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AB = BA$. Montrer que B est combinaison linéaire de $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$.

Ex 111 : [IMT]

1. Montrer que $P = X^3 - X - 1$ admet une unique racine réelle et qu'elle est strictement positive.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

Ex 112 : [IMT] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - 2 \text{Tr}(M)A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante de bijectivité de f_A .

3. Dans le cas de non bijectivité, montrer que f_A est un projecteur.

4. L'endomorphisme f_A est-il diagonalisable ?

Ex 113 : [IMT] On se place dans $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère $f : P \mapsto X(X+1)P' - nXP$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .

2. Déterminer les éléments propres de f . L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Ex 114 : [IMT] Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ défini par $M \mapsto (\text{Tr } M)I_n - M$.

1. Montrer que $-1 \in \text{Sp}(\phi)$ et déterminer la dimension de $E_{-1}(\phi)$.

2. Est-ce que ϕ est diagonalisable ?

3. Calculer $\det(\phi)$.

Ex 115 : Soit E un ev de dimension finie et $(u, v) \in \mathcal{L}^2$.

Montrer que si λ est valeur propre de $u \circ v$ alors elle est valeur propre de $v \circ u$.

Ex 116 : [IMT] Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n . Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On considère ϕ définie sur $\mathcal{L}(E)$ par $\phi(v) = u \circ v$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$.
 2. Montrer que $\lambda \in \text{Sp}(u) \Leftrightarrow \lambda \in \text{Sp}(\phi)$.
 3. Montrer que si v est un vecteur propre de ϕ associé à λ , alors $\text{Im } v \subset \text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$.
 4. Montrer que si u est diagonalisable, alors ϕ l'est aussi.
-

Ex 117 : [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\psi : M \mapsto (\text{Tr } A)M + (\text{Tr } M)A$.

1. L'endomorphisme ψ est-il diagonalisable ?
 2. Donner son polynôme caractéristique et sa trace.
-

Ex 118 : [IMT] Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. On considère $\varphi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ tel que : $\forall u \in \mathcal{L}(E), \varphi(u) = f \circ u$.

1. Montrer que φ est diagonalisable.
 2. Calculer les valeurs et vecteurs propres de φ .
-

Ex 119 : [IMT] On considère l'endomorphisme $T : (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mapsto (w_n)$ où $w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$. Déterminer les éléments propres de T .

Ex 120 : [IMT] Soit $\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ A & \mapsto -A + \text{tr}(A)I_n \end{cases}$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 2. Déterminer le spectre de φ .
 3. Montrer que $\text{Ker}(\text{tr})$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 4. Est-ce que φ est diagonalisable ?
-

Ex 121 : [IMT] Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et Φ défini par $\Phi(P)(X) = 2X^4 P(\frac{1}{X}) + P(X)$ pour tout $P \in E$.

1. Montrer que Φ est un endomorphisme.
 2. Calculer les éléments propres de Φ (vecteurs propres et valeurs propres), Φ est-il diagonalisable ?
-

Ex 122 : [IMT] On pose $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que

$$\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

définit un produit scalaire sur E .

2. Calculer $\varphi(X^p, X^q)$ pour (p, q) dans $\mathbb{N}^2$.

3. Orthonormaliser la base $(1, X, X^2)$ à l'aide du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Ex 123 : [IMT] On munit $\mathbb{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Déterminer une base orthogonale de F et de $F^\perp$ pour :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0 \text{ et } t + x + y = 0\}$$

Ex 124 : [IMT] On considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, que l'on munit de sa structure euclidienne canonique, et le plan $\mathcal{P}$ d'équations :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

On note s la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Donner l'expression de la matrice de s dans la base canonique.

Ex 125 : [IMT] Soit E un espace euclidien de dimension n . Soient $(u, v) \in E^2$ fixés quelconques.

On pose : $\forall x \in E, \quad u \otimes v(x) = \langle v \mid x \rangle u$

1. Montrer que $u \otimes v$ est un endomorphisme et déterminer son rang.

2. Déterminer les éléments propres de $u \otimes v$. L'endomorphisme est-il diagonalisable ?

Ex 126 : [IMT] Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espace euclidien. On définit $f : x \mapsto x + \langle a, x \rangle b$ où $a, b \in E$. Les espaces $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont-ils supplémentaires ?

Ex 127 : [IMT] Soit E un espace euclidien. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille liée de vecteurs unitaires de E , deux à deux distincts, pour laquelle il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad i \neq j \implies \langle e_i \mid e_j \rangle = \alpha$$

1. Montrer que $\sum_{i=1}^n e_i = 0$ et $\alpha = -\frac{1}{n-1}$.

2. Montrer que $\dim E = n - 1$.

Ex 128 : [IMT] Soit E un espace euclidien, soit $f \in \mathcal{L}(E)$, et soit $u = f^* \circ f$.

1. Montrer que u est diagonalisable, et que son spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{S}(E)$ tel que : $g^2 = u$.

Ex 129 : [IMT] On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
 2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer en fonction des coefficients de M la distance de M à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
-

Ex 130 : [IMT]

1. Montrer que l'espace des matrices symétriques et l'espace des matrices antisymétriques sont supplémentaires orthogonaux dans l'espace des matrices carrées réelles de taille n muni de sa structure euclidienne canonique.
 2. Déterminer la distance de la matrice M suivante à l'espace des matrices antisymétriques : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
-

Ex 131 : [IMT] Soit E un espace euclidien de dimension n (on identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$). Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. On pose $\varphi_A(X) = X^T A X$, pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \lambda_1 \|X\|^2 \leq \varphi_A(X) \leq \lambda_n \|X\|^2$.
 2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_A^{-1}(\{1\})$ soit un compact non vide.
-

Ex 132 : [IMT] Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien. Donner la matrice de la rotation R autour de la droite D d'équation $x - y + z = x + y + z = 0$ et telle que $R(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$.

Ex 133 : [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Donner la définition de $\exp(A)$.
 2. Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\exp(A) \in SO_n(\mathbb{R})$
-

Ex 134 : [IMT] Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $XX^T X = -I_n$.

1. Montrer que $X \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
 2. Déterminer X .
-

Ex 135 : [IMT] Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et u une suite d'éléments de E telle que $\forall x \in E, (\|u_n - x\|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence.
 2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
-

Ex 136 : [IMT] Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et soient A et B deux parties de E . On pose : $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.
2. Montrer que si A est fermé et B compact, alors $A + B$ est fermé.

Ex 137 : [IMT] Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $t > 0$. On note $\mathcal{B}$ la base $\left(\frac{e_1}{t}, \dots, \frac{e_n}{t}\right)$.

1. Déterminer $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
2. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\text{Sim}(N)$ la classe de similitude de N . Montrer que la matrice N est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est dans l'adhérence de $\text{Sim}(N)$.

Ex 138 : [IMT] Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$$

1. Déterminer la limite éventuelle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Déterminer la limite de $\left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. En déduire un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ex 139 : [IMT] On note I_n l'intervalle $]2n\pi, 2n\pi + \pi/2[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $\sin(x) = e^{-x}$ admet une unique solution dans I_n , notée par la suite x_n . Qu'en est-il sur $\mathbb{R}^+$?
2. Montrer que $x_n \rightarrow +\infty$.
3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n .

Ex 140 : [IMT] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n = \frac{1! + 2! + \dots + n!}{n!}$.

1. Donner une relation entre d_{n+1} et d_n .
2. Montrer par récurrence que d_n est majorée par 2.
3. En déduire la convergence de (d_n) .
4. Étudier la série $\sum \frac{d_n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ex 141 : [IMT] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : t \mapsto \ln t - \text{Arctan } t - n\pi$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $g_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{n\pi} < x_n$. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{x_n}$.

Ex 142 : [IMT] Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n S_n = 1$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ et que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

2. Montrer que $S_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} S_n$.

Ex 143 : [IMT] Déterminer la nature de la série de terme général $\frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))}$.

Ex 144 : [IMT] Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}$. Nature de $\sum u_n$? de $\sum (-1)^n u_n$?

Ex 145 : [IMT] Donner la nature des séries de termes général u_n avec :

1. $u_n = n^a \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, pour a réel.

2. $u_n = n^{1/n^2} - 1$.

Ex 146 : [IMT] Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence de $\int_0^{+\infty} x^\alpha (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$ quand $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ex 147 : Convergence de $\int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$.

Ex 148 : [IMT] Soit $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Donner un équivalent de f en 0.

3. Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 149 : [IMT] Existence et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-z)^2}$, avec $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Ex 150 : [IMT] Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-xn}}{n}$.

1. Préciser l'ensemble de définition réel D de S .

2. Calculer $S(x)$ pour tout $x \in D$.

3. Quelles sont les limites de S aux bornes de D ?

4. L'intégrale $\int_0^{+\infty} S(x) dx$ est-elle convergente ?

Ex 151 : [IMT] On s'intéresse pour x dans $\mathbb{R}_+$ à la série

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}.$$

- a. Étudier sa convergence simple.
- b. Converge-t-elle normalement ?
- c. Uniformément ?

On note S sa somme.

- d. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+$.
 - e. Déterminer la limite de S en $+\infty$.
 - f. Donner une expression de S sur $\mathbb{R}_+$.
-

Ex 152 : [IMT] On considère la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

- 1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 - 2. Calculer $g''(x)$ et en déduire une équation différentielle vérifiée par g .
 - 3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
-

Ex 153 : [IMT] Montrer que $S : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) - \frac{x}{n} \right)$ est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ et calculer $S'(1)$.

Ex 154 : [IMT] Montrer que $f : x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{x}{k} \right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Ex 155 : [IMT] On pose $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\exp(-nx)}{n^2}$.

- 1. Montrer que $f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
 - 2. Montrer que f est $C^1(\mathbb{R}_+^*)$.
 - 3. Montrer que f est $C^2(\mathbb{R}_+^*)$.
 - 4. Calculer f'' sur $\mathbb{R}_+^*$ et en déduire une expression de f sur $\mathbb{R}_+$.
-

Ex 156 : [IMT] Soit $f : x \mapsto \sum_{n \geq 1} nxe^{-nx^2}$.

- 1. Déterminer le domaine de définition de f .
- 2. Étudier les modes de convergence de cette série de fonctions.

3. Donner une expression simplifiée de $f(x)$.

Ex 157 : [IMT] Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}$.

1. Étudier la convergence simple de la série sur l'intervalle $[1, +\infty[$.
 2. Étudier la convergence uniforme de la série.
 3. La série converge-t-elle uniformément sur l'intervalle $]1, +\infty[$?
-

Ex 158 : [IMT] On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{2x}{x^2 + n^2}$. On pose

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n.$$

1. Étudier la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$.
 2. Étudier la continuité de S sur son ensemble de définition.
 3. Déterminer les limites de S en $+\infty$ et $-\infty$.
-

Ex 159 : [IMT] Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $f : t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$.

1. Justifier l'intégrabilité de f sur $]0, 1]$.
2. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a + nb}.$$

On fixe $b > 0$ et on pose $F(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a + nb}$.

3. Déterminer un équivalent de $F(a)$ quand a tend vers $+\infty$.
-

Ex 160 : [IMT] Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt$ (on pourra faire apparaître une somme).

Ex 161 : [IMT] Montrer que : $\int_0^{2\pi} e^{2\cos(x)} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\pi}{(k!)^2}$

Ex 162 : [IMT] On considère $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \exp(-nx)$: montrer que la somme de cette série est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 163 : [IMT] $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$.

1. déterminer la limite de (a_n) .
 2. Déterminer une relation entre a_n et a_{n+2} .
 3. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$?
 4. Calculer la somme de cette série entière.
-

Ex 164 : [IMT] Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 2} u_n x^n$, puis l'ensemble de définition de sa somme où : $u_n = \ln \left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right)$.

Ex 165 : [IMT] On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt$.

1. Donner le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$.
 2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$.
-

Ex 166 : [IMT] On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum S_n x^n$. On note R un tel rayon de convergence.

On définit f par la fonction suivante : $f : \begin{cases}]-R; R[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n \end{cases}$.

2. Déterminer f . (On pourra remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad x^n = A_n - A_{n-1}$ avec $A_n = \sum_{k=0}^n x^k$)
-

Ex 167 : [IMT] Rayon de convergence et somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Ex 168 : [IMT]

1. Démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.
 2. Donner une valeur approchée de π à 10^{-10} près.
-

Ex 169 : [IMT] Soit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$

1. Déterminer l'intervalle de définition de f .
 2. Trouver un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1.
-

Ex 170 : [IMT] Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence infini.

1. Montrer que pour $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$.
 2. Montrer que si f est bornée alors elle est constante.
-

Ex 171 : [IMT] Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 t^n |\ln(1-t)|^\alpha dt$.

1. Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale I_n converge-t-elle ?
 2. Déterminer la limite de (I_n) .
 3. La série $\sum I_n$ converge-t-elle ?
-

Ex 172 : [IMT] Déterminer toutes les fonctions f développables en série entière sur $\mathbb{R}$ qui vérifient $(E) : 2xy'' + y' - y = 0$, $y(0) = 1$.

Ex 173 : [IMT] On pose $a_n = \frac{4^n}{(2n+1)!} (n!)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$.

1. Justifier que f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, 1[$.
 2. En déterminant une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n , montrer que f vérifie l'équation différentielle $f'(x) = 1 + x^2 f'(x) + x f(x)$.
En déduire l'expression de f .
-

Ex 174 : [IMT] Soit $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan(x)^n dx$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.
 2. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n + I_{n+2}$.
 3. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Ind. On fera apparaître un télescopage.
 4. Retrouver directement ce résultat.
-

Ex 175 : [IMT] En se ramenant à une équation différentielle, calculer $\int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t^2} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Ex 176 : [IMT] Soit $\varphi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx} dt$.

1. Montrer que φ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
 2. Calculer $\varphi'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
 3. En déduire $\varphi(x)$.
-

Ex 177 : [IMT]

1. Pour $x > 0$, montrer que $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge et la calculer.
 2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et trouver deux expressions de $F^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
-

Ex 178 : [IMT] Soit $f : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f .
 2. f est-elle continue ? Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
 3. Donner un équivalent de f en $+\infty$, puis en 0^+ .
-

Ex 179 : [IMT]

1. Déterminer le domaine de définition D_F de $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t} dt$.
 2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
 3. En déduire $F(x)$ pour tout $x \in D_F$.
-

Ex 180 : [IMT] Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-x \operatorname{ch}(t)} dt$.

1. Donner le domaine de définition de F .
 2. Montrer que F est $\mathcal{C}^2$ sur ce domaine de définition.
 3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par F .
-

Ex 181 : [IMT] Soit $f : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi t^2 - 2i\pi xt) dt$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
 2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f puis simplifier l'expression de $f(x)$.
-

Ex 182 : [IMT] Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée. Montrer que l'équation différentielle $x' - ax = h$ a une unique solution bornée sur $\mathbb{R}^+$.

1. Déterminer les solutions développables en série entière de : $4xy'' + 6y' + y = 0$.
Soient $(E) : x^{(3)} + 2x'' - x' - 2x = 0$. Soit G l'ensemble des solutions de classe $\mathcal{C}^3$ de (E) .

2. Montrer que $G \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $\Delta : f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f'$.

3. Déterminer un polynôme P tel que $G = \text{Ker } P(\Delta)$.

4. Montrer que $G = \text{Ker } (\Delta^2 - \text{id}) \oplus \text{Ker}(\Delta + 2\text{id})$.

5. Résoudre (E).

Ex 183 : [IMT] On note S l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation définit par :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad xy'' + 2y' - xy = 0$$

1. Déterminer les fonctions développables en série entière appartenant à S .

On note

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

2. Exprimer f à l'aide de fonction(s) usuelle(s).

3. Justifier que $f \in S$.

4. Déterminer S à l'aide du changement de variable $u = xy$.

Ex 184 : [IMT] Résoudre :
$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 1 \\ y''(0) = y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Ex 185 : [IMT] Soit (E) : $\ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1$.

1. Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.

2. On pose $g : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ définie sur $] -1, +\infty[\setminus \{0\}$.

Montrer que g est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$.

3. Montrer que (E) admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ex 186 : [IMT] On considère l'équation différentielle suivante :

$$xy' + 3y = \frac{\exp(-1/x^2)}{x^5}$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}^*$, puis dans $\mathbb{R}$.

2. Déterminer un développement limité de la solution à l'ordre 4.

Ex 187 : [IMT] Soient $a > 0$ et $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. L'équation (E) : $y' - ay = h(t)$ admet-elle une solution bornée dans $\mathbb{R}_+$? Donner ses solutions.

Ex 188 : [IMT] Trouver toutes les fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(1-x)$.

Ex 189 : [IMT] On considère $\mathbb{R}^n$ comme étant euclidien canonique. Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) : A est antisymétrique ;
 - (2) : Les solutions de $X' = AX$ sont de norme constante.
-

Ex 190 : [IMT] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. à quelle condition sur a la suite $(a^n A^n)$ converge-t-elle vers une limite non nulle ?

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telle que $A^2 = 0$. Dimension du commutant de A ?

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a. Sans calcul, montrer que A est diagonalisable.
 - b. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
 - c. Résoudre le système différentiel $X' = AX$.
-

Ex 191 : [IMT] Étudier les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 + 4xy + 1$.

Ex 192 : [IMT] Soit X et Y deux variables indépendantes de loi uniforme $\mathcal{U}([1; n])$. On pose $S = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de S et son espérance.
 2. Déterminer la loi de T .
 3. S et T sont-elles indépendantes ?
-

Ex 193 : [IMT] Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire successivement sans remise toutes les boules de l'urne.

1. On note X la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule blanche. Déterminer la loi de X .
 2. On note Y la variable aléatoire égale au rang de tirage de la première boule numérotée 1. Déterminer la loi de Y .
-

Ex 194 : [IMT] Soit X une variable aléatoire suivant une loi de poisson de paramètre $\lambda \geq 0$. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X telle que $Y(\Omega) = \{1, 2\}$ et $P(Y = 1) = P(Y = 2)$. On pose $Z = XY$.

1. Donner l'espérance de Z .
 2. Donner la loi de Z .
-

Ex 195 : [IMT] Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . X est le numéro de la boule tirée au hasard.

1. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

On considère désormais une urne contenant k boules numérotées k pour chaque k de 1 à n .

2. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Ex 196 : [IMT] Dans une urne comportant n boules numérotées de 1 à n , on tire trois boules simultanément et on note X le plus petit numéro tiré. Déterminer $X(\Omega)$ puis les probabilités $\mathbf{P}(X = 1)$, $\mathbf{P}(X = 2)$, $\mathbf{P}(X = n)$.

Ex 197 : [IMT] On dispose initialement d'une urne constituée d'une boule blanche, et d'une pièce de monnaie équilibrée. On effectue des lancers de la pièce selon la règle suivante :

- si on obtient « Face » on ajoute une boule noire dans l'urne ;
- si on obtient « Pile » on tire une boule dans l'urne et on arrête l'expérience.

Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de lancers de la pièce.

1. Quelle est la loi de X ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche à la fin de l'expérience ?

Ex 198 : [IMT] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, m_i \in \mathbb{N}, p_i \in]0, 1[$.

Les X_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi binomiale : $\mathcal{B}(m_i, p_i)$ et

on note $S = \sum_{i=1}^n X_i$.

Montrer que S suit une loi binomiale si et seulement si tous les p_i sont égaux. Préciser les paramètres de la loi de S .

Ex 199 : [IMT] Soient X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli et Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson, avec X et Y indépendantes. On pose $Z = XY$.

1. Déterminer $E(Z)$.

2. Quelle est la loi de Z ?

3. Quelle est la variance de Z ?

Ex 200 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.

Soit $S = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

1. Loi et espérance de S .

2. espérance de T .

3. S et T sont-elles indépendantes ?

Ex 201 : Soient deux variables aléatoire discrètes S et N .

$N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et représente le nombre de particule de fumée dans une pièce.

S représente le nombre de particules détectées par un détecteur de fumée.

Chaque particule a une probabilité p d'être détectée (avec $p \in]0, 1[$).

1. Déterminer la loi de S sachant $(N = n)$.

En déduire la loi de S .

2. Déterminer la loi suivie par $N - S$.

Montrer que S et $N - S$ sont indépendantes.

3. N et S sont-elles indépendantes ?

Ex 202 : [IMT] Soient X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes suivant une même loi.

Soit Y une variable aléatoire indépendante de X_1 et de X_2 telle que

$Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in]0, 1[$.

On pose $M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$.

1. On suppose que $(X_1 + 1) \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$. Calculer la probabilité que M soit inversible.

2. On suppose que $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable.

Ex 203 : [IMT] Soit X_1, X_2 et Y des variables aléatoires indépendantes telles que X_1 et X_2 suivent la même loi. On a également $Y(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{P}(Y = 1) = p \in]0, 1[$. On définit la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ YX_2 & X_1 \end{pmatrix}$$

1. Supposons que la variable aléatoire $X_1 - 1$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?

2. Supposons que la variable aléatoire X_1 suit une loi de Poisson de paramètre 3. Quelle est la probabilité que M soit inversible ?

Ex 204 : [IMT] On pose $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ où X, Y sont des variables aléatoires indépendantes et suivent la loi géométrique de paramètre p . Déterminer la probabilité que A soit inversible ? diagonalisable ?

Ex 205 : [IMT] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}.$$

1. Sous quelle condition sur a, b et c cette matrice est-elle diagonalisable ?

2. Soient X, Y et Z des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de probabilité géométrique de paramètre p . Quelle est la probabilité que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable ?

Ex 206 : [IMT] Soit X une variable aléatoire discrète définie sur Ω telle que $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = P(X = -n)$ et $|X|$ suit une loi de Poisson de paramètre $a \in \mathbb{R}_+^*$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & X & 1 \\ X & 0 & 1 \\ X & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Trouver la loi de X .
2. Quel est le rang de A .
3. Quelle est la loi de $\text{rg}(A)$?

Ex 207 : [IMT] Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p . On pose $Z = X/Y$.

1. Montrer que $Z \leq X$ puis montrer que Z admet une espérance et une variance.
2. Calculer $\mathbf{E}(Z)$.
3. Donner la loi de Z .

Ex 208 : [IMT] Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires qui suivent une loi géométrique de paramètre p . On pose $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$.

1. Déterminer $(Z \leq n)$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
2. On lance trois pièces. À chaque lancer, on met de côté les pièces ayant donné « Pile » et on relance les autres.
Déterminer l'espérance de Z , avec Z la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers.

Ex 209 : [IMT] On se donne trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 indépendantes, suivant la loi géométrique de paramètre p . Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, X_2, X_3)$.

Ex 210 : [IMT] Soit $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n$.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série entière .
2. Calculer $S(t)$ sur $] -R, R[$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, $\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Que vaut λ ?
4. Calculer $\mathbf{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Calculer l'espérance et la variance de X .

Ex 211 : [IMT] Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires identiquement distribuées indépendantes qui suivent toutes une loi $\mathcal{U}(\{-1, 1\})$. On note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $E(tS_n)$.
2. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) \leq \exp(t^2/2)$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que : $P(|S| \geq a) \leq 2e^{-\frac{a^2}{2n}}$.

Ex 212 : [ENSEA] Déterminez l'ensemble des points z du plan complexe tels que

$$\frac{z+i}{z-2i} \in i\mathbb{R}$$

Ex 213 : [ENSEA] Soit

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a. Diagonaliser J .
 - b. Résoudre l'équation $X^2 + X = J$.
-

Ex 214 : [ENSEA] Soit $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. Étudier la convergence de (a_n) et calculer a_0 .
 2. Déterminer un équivalent simple de (a_n) .
 3. Nature de la série $\sum a_n$.
 4. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
-

Ex 215 : [ENSEA]

1. Développement limité de $f(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\sin(x)}$ à l'ordre 4 en 0
 2. En déduire un certain nombre de propriétés
-

Ex 216 : [ENSEA] L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{\sin x + \sqrt{x}} dx$ est-elle définie ?

Ex 217 : [ENSEA] Rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{n+1}{2} z^{2n}$.

Ex 218 : [ENSEA]

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. i. Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0, 0)$.
ii. Donner la définition de « f est différentiable en $(0, 0)$ ».
3. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- i. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
- ii. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 219 : [ENSEA] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche. On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X .
2. Déterminer la loi de Y .

Ex 220 : [ENSEA] Une urne contient des boules numérotées de 1 à n . On effectue des tirages avec remise.

Soit X le numéro de la première boule et Y le numéro de la deuxième boule. On note $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Déterminer les lois de U et V .
2. Déterminer $E(U)$ et $E(V)$.
3. Donner une relation entre $X, Y, U + V$.
4. Calculer $P(X + Y = k)$.

Navale, Saint-Cyr MP 2024

Ex 221 : [Navale] Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec les matrices de rang 1.

Ex 222 : [Navale] Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer l'équivalence entre :

- i. $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{Tr}(MAB) = \text{Tr}(MBA)$,
- ii. M est une homothétie (c'est-à-dire de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{R}$).

Ex 223 : [Navale] Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Calculer A^n .

Ex 224 : [Navale] Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\text{rg } f + \text{rg}(f - \text{id}) = \dim E$.

Ex 225 : [St-Cyr] Soit $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée de taille n remplie de 1. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A - (1 + p)I_n = J$, avec $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que J est diagonalisable et donner ses éléments propres.
2. Soit $U = (1 \dots 1)^\top \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Soit X un vecteur propre de A associé à une valeur propre λ telle que (U, X) soit libre. Montrer que $\lambda^2 + \lambda = 1 + p$.

Pour la suite de l'exercice, on suppose A symétrique, d'éléments dans $\{0, 1\}$, telle que $\text{Tr } A = 0$.

3. Montrer que $AU = pU$.
4. Montrer que $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j}^2 = n(p + 2)$.

Ex 226 : [Navale] Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire stable par f .
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable.
3. Que dire de l'énoncé de la question précédente si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Ex 227 : [Navale] Soient $A, B \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que $A \wedge B = 1$ et que B est scindé à racines simples. On écrit $B = \prod_{i=1}^p (X - x_i)$. On note $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto R$ où R désigne le reste de la division euclidienne de AP par B .

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-ce un isomorphisme ?
2. Montrer que 0 est valeur propre de ϕ . Déterminer le sous-espace propre associé.
3. Prouver que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $P_k = \prod_{i \neq k} (X - x_i)$ est vecteur propre de ϕ .
4. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

Ex 228 : [Saint-Cyr] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u_1 + \dots + u_n = \text{id}$ et $u_i \circ u_j = 0$ pour tous $i \neq j$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $f = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$.

1. Calculer u_i^2 pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En déduire f^2 puis f^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
2. Justifier la diagonalisabilité de f .

Ex 229 : [Navale] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que 0 est la seule matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $AM - MB = 0$. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $AN - NB$.
2. On suppose que $\text{Sp } A \cap \text{Sp } B = \emptyset$. Montrer que 0 est la seule matrice vérifiant $AM - MB = 0$.
3. Cela reste-t-il vraie dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Ex 230 : [Navale] Soient E un espace euclidien et F un sous-espace de E . Soient $u \in \mathcal{S}(E)$ et p la projection orthogonale sur F . Montrer que $p \circ u$ est autoadjoint si et seulement si F est stable par u .

Ex 231 : [Navale] Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on note $N_1(f) = \int_0^1 |f|$. Une suite (f_n) d'éléments de E est dite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n, N_1(f_p - f_q) \leq \varepsilon$.

1. Vérifier que N_1 est bien une norme sur E .
 2. Prouver que toute suite convergente au sens de N_1 est de Cauchy.
 3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1]$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$. Montrer que (f_n) est de Cauchy.
 4. Converge-t-elle au sens de N_1 ?
-

Ex 232 : [St-Cyr] Soit E un espace vectoriel normé. Soit C un convexe de E . Montrer que l'intérieur et l'adhérence de C sont convexes

Ex 233 : [Saint-Cyr] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note (E_n) l'équation $x^n + x - 1 = 0$.

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$, notée par la suite x_n .
2. Montrer que (x_n) est croissante et majorée. Qu'en déduire ?

Python Afficher les 100 premières valeurs approchées de (x_n) en procédant par dichotomie.

Python Représenter graphiquement les valeurs et conjecturer la limite.

3. Démontrer cette conjecture.
-

Ex 234 : [Navale] Soit (u_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0. Montrer que cette suite possède une sous-suite décroissante.

Ex 235 : [Navale] Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On suppose que $\sum u_n$ est convergente. Montrer que $\sum \frac{u_n}{n}$ est une série convergente.

Ex 236 : [Navale] Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues. On suppose $f > 0$.

1. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^b (f(t) + xg(t))dt \geq \int_a^b f(t)dt$. Déterminer $\int_a^b g(t)dt$.
 2. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^b |f(t) + xg(t)|dt \geq \int_a^b f(t)dt$. Déterminer $\int_a^b g(t)dt$. La conclusion reste-t-elle vraie avec seulement $f \geq 0$?
-

Ex 237 : [Navale] Pour $n \geq 1$, on pose $u_n : x \mapsto \frac{x}{(1 + n^2x)^2}$. étudier la convergence simple puis uniforme de $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ sur $\mathbb{R}^+$.

Ex 238 : [Navale] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$u_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x}{(1+n^2x)^2}$$

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
 2. Montrer que $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
 3. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
-

Ex 239 : [St-Cyr] Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle d'entiers naturels strictement croissante telle que $n = o(p_n)$ quand n tend vers $+\infty$. Soit la série entière $\sum x^{p_n}$ et f sa somme.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série entière.
 2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)f(x) = 0$.
 3. Exemple pour $p_n = n^2$: trouver un équivalent en 1^- .
-

Ex 240 : [Navale] Soit $(a_n)_n \geq 0 \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_0 + \dots + a_n$. On suppose que $\sum a_n$ converge. Soient $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ et $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} t^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f et g .
 2. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, f'(t) = g'(t) - g(t)$ et $\int_0^t f(u)e^{-u} du = (g(t) - f(t))e^{-t}$.
 3. En déduire : $\int_0^{+\infty} f(u)e^{-u} du = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.
-

Ex 241 : [Navale] Soit $x > 0$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \sin(xt) dt$ est > 0 .

Ex 242 : [Navale] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $F(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

1. Exprimer G en fonction de F .
 2. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.
-

Ex 243 : [Navale] Les clients A_1, A_2 et A_3 arrivent à deux guichets au temps 0. Le client A_3 doit donc attendre. On note X_i la durée de passage de A_i au guichet. On note aussi Y l'instant auquel A_1 ou A_2 libère son guichet et Z l'instant auquel A_3 part du guichet. Les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont indépendantes et suivent chacune la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Exprimer Y en fonction de X_1 et X_2 . Déterminer la loi de Y .

2. Déterminer la loi de Z .

3. Calculer $\mathbf{E}(Z)$.

Ex 244 : [Navale] Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, indépendantes et suivant la même loi. On pose $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$, $Y_1 = X_1/U$ et $Y_2 = X_2/U$.

1. Montrer que Y_1 et Y_2 suivent la même loi.

2. Montrer que Y_1 et Y_2 admettent un moment à tout d'ordre et calculer $\mathbf{E}(Y_1)$ et $\mathbf{E}(Y_2)$.

3. Montrer que T/U admet un moment à tout d'ordre et calculer $\mathbf{E}(T/U)$.

4. Exprimer $\mathbf{V}(T/U)$ en fonction de $\mathbf{V}(Y_1)$.

BECEAS MP 2024

Ex 245 : [BECEAS] Soit E un espace euclidien et n un entier naturel non nul.

On considère une famille $(u_1, \dots, u_n)$ de n vecteurs de E .

Pour tout réel $\mu \geq 1$, on dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est μ -presque orthogonale si :

- Tous ses vecteurs sont unitaires
- Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$\frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^n x_i^2 \leq \left\| \sum_{i=0}^n x_i u_i \right\|^2 \leq \mu \sum_{i=0}^n x_i^2 \quad (*)$$

1. Soit un réel $\mu \geq 1$, montrer que si $(u_1, \dots, u_n)$ est μ -presque orthogonale, alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre de vecteurs de E .

2. Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est 1-presque orthogonale si et seulement si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille orthonormée.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E .

a. Soit f un endomorphisme de F . Montrer qu'il existe un réel $k \geq 0$ tel que :

$$\forall x \in F, \|f(x)\| \leq k\|x\|$$

b. Soit f un automorphisme de F . Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que :

$$\forall x \in F, \frac{1}{\lambda}\|x\| \leq \|f(x)\| \leq \lambda\|x\|$$

4. Montrer que si $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre de vecteurs unitaires de E , alors il existe un réel $\mu \geq 1$ tel que $(u_1, \dots, u_n)$ est μ -presque orthogonale.

CCINP MP 2023

Ex 246 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que $P(0) \neq 0$ et que P est scindé sur $\mathbb{R}$, et on note $x_1, \dots, x_n$ ses racines. On note également

$$\sigma_1 = \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\sigma_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \text{ et } \sigma_n = \prod_{i=1}^n x_i.$$

1. Montrer que $\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i^2)$, puis que
$$\left(\prod_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2.$$
 2. Quelles sont les valeurs possibles de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n$?
 3. Montrer que $\sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 3$.
 4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.
-

Ex 247 : On note S l'espace vectoriel des suites complexes. On considère l'endomorphisme (de décalage) de S défini par $L((u_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Trouver le noyau de $L - \lambda \text{id}$ et celui de $(L - \lambda \text{id})^2$.
 2. On note F le sous-espace vectoriel de S des suites (u_n) vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = \frac{1}{2}u_{n+3} + 3u_{n+2} - \frac{7}{2}u_{n+1} + u_n.$$
 Montrer que $F = \text{Ker}(2L - \text{id}) \oplus \text{Ker}(L + 2\text{id}) \oplus \text{Ker}(L - \text{id})^2$.
 3. Déterminer la dimension de F et une base de F .
-

Ex 248 : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang un.

1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $f^2 = \lambda f$.
 2. A-t-on : $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$?
 3. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
 - i. Il existe un scalaire c non nul tel que cf soit un projecteur ;
 - ii. $f \circ f \neq 0$;
 - iii. $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f)$.
-

Ex 249 : Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel si et seulement s'il existe deux nombres complexes a, b tels que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\bar{z}$.
 2. Montrer l'unicité du couple (a, b) .
 3. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $a^2 + |b|^2 = a$ et $b(a + \bar{a}) = b$.
 4. Montrer que f est un projecteur différent de l'endomorphisme nul et de l'identité si et seulement si $\text{Re}(a) = \frac{1}{2}$ et $|a| = |b|$.
-

Ex 250 : Soit E un espace vectoriel.

Soient p et q deux projecteurs de E tels que $\text{Im}(p) \subset \text{Ker}(q)$.

1. Montrer que $\text{Im}p \cap \text{Im}q = \{0_E\}$.
2. Soit $r = p + q - p \circ q$. Montrer que r est un projecteur sur $\text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ parallèlement à $\text{Ker}(p) \cap \text{Ker}(q)$.

Ex 251 : Soit E un espace vectoriel de dimension n , $f, g \in \mathcal{L}(E)^2$ et $p \in \mathbb{N}$.

1. i. Si $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$, montrer que : $\forall k \geq p, \text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^k)$.
 ii. En déduire que si f est non injective, $(\text{Ker}(f^k))_{k \geq 0}$ est strictement croissante puis stationnaire à partir d'un certain indice p .
 Que peut-on dire de p ?
2. i. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que : $\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker}(g) \oplus H$.
 ii. On considère : $h : \begin{cases} H & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & g(x) \end{cases}$.
 Montrer que $h(H) \subset \text{Ker}(f)$ et $\dim(h(H)) = \dim(H)$.
 iii. En déduire que $\dim \text{Ker}(f \circ g) \leq \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Ker}(g)$;
3. On suppose que $\dim \text{Ker}(f) = 1$ et que f est nilpotente.
 i. Préciser la suite $(\dim(\text{Ker}(f^k)))_{k \geq 0}$.
 ii. Montrer que $p = n$.

Ex 252 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? Donner une base de l'image de A .
2. Donner une équation de l'image de A . Le vecteur B appartient-il à l'image de A ?

Ex 253 : Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ non nul tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(u) \oplus \text{Im}(u)$ et que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u^2 + \text{id})$.
2. Montrer que u n'est pas injective, puis que $\text{rg}(u) = 2$.

3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ex 254 : Soient $\varphi \in \mathbb{R}$ et $M_n = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = 2 \cos(\varphi)$ si $i = j$, $m_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$, les autres coefficients étant nuls.

1. On suppose que $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $D_n = \det(M_n)$ et exprimer D_n .
2. Déterminer D_n lorsque $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$.

Ex 255 : Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que si u est nilpotent, alors $u^n = 0$.
2. On suppose u d'indice de nilpotence n . Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $A =$

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & (0) & \vdots \\ 0 & 1 & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Déterminer les matrices X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $X^2 = A$.

Ex 256 : On pose $A = \begin{pmatrix} 0_n & I_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & I_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et le rang de A
2. Soit u un endomorphisme, montrer que $\dim(\text{Ker}(u^2)) \leq 2\dim(\text{Ker}(u))$
3. Soit $B \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = 0$ et $\text{rg}(B) = 2n$
 - i. Montrer que $\text{Im}(B^2) \subset \text{Ker}(B)$
 - ii. En déduire la dimension de $\text{Im}(B^2)$
 - iii. Soit $(E_1; \dots; E_m)$ une base d'un supplémentaire de $\text{Ker}(B^2)$.
Montrer que $(B^2E_1; \dots; B^2E_m; BE_1; \dots; BE_m; E_1; \dots; E_m)$ est une famille libre
 - iv. Montrer que A et B sont semblables.

Ex 257 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 5 & 5 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Donner les conditions de diagonalisabilité concernant les polynômes annulateurs et caractéristiques.
2. Montrer que pour $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifie $B^2 = A$, alors B est diagonalisable.
3. Trouver toutes les matrices B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui vérifient $B^2 = A$.

Ex 258 : Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

1. Déterminer le spectre de A de trois façons :
 - i. En utilisant la définition des valeurs propres et des vecteurs propres.
 - ii. En calculant son polynôme caractéristique χ_A .
 - iii. En calculant son polynôme minimal μ_A .
2. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?
3. La matrice A est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$? Dans ce cas, déterminer $P \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Ex 259 :

1. Localiser les racines réelles de $X^3 - X - 1$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\chi_A(0)$, $\lim_{+\infty} \chi_A$ et $\lim_{-\infty} \chi_A$.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Ex 260 : Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A .

2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$.
 - i. Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2, puis un polynôme annulateur de M de degré 4.
 - ii. Montrer que M est diagonalisable, et préciser les valeurs possibles de son spectre.
 - iii. Donner les différentes formes possibles de M .
-

Ex 261 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 + A^T = I_n$.

1. Justifier que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\text{Sp } M = \text{Sp } M^T$.
 2. Montrer que A est inversible si et seulement si $1 \notin \text{Sp } A$.
 3. Montrer que le polynôme $X^4 - 2X^2 + X$ est annulateur de A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
-

Ex 262 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^{*2}$, $(M, A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^3$ telles que $A + B = I_n$, $M = \lambda A + \mu B$, $M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Déterminer $M^2 - (\lambda + \mu)M + 2\lambda\mu I_n$.
 2. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1} .
 3. Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.
 4. La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.
-

Ex 263 : Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
 2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.
-

Ex 264 : Soit a, b, c, d, e, f des réels et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 & e \\ 0 & f & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est trigonalisable.
 2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A soit diagonalisable.
 3. Dans ce cas, trouver une base de vecteur propres
-

Ex 265 :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $ab > 0$ ou $a = b = 0$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ pair et $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & & \vdots \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- i. Déterminer un espace de dimension deux stable par A .
 - ii. Montrer que A soit diagonalisable si et seulement si :
 $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i = a_{n+1-i} = 0$ ou $a_i a_{n+1-i} > 0$.
-

Ex 266 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, $n \in \mathbb{N}$ et $u : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto (X - a)(X - b)P' - nXP$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$.
 2. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, donner la décomposition en éléments simples de P'/P .
 3. Montrer que u est diagonalisable et donner ses vecteurs propres.
-

Ex 267 : Soit $E = \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Soit $P \in E$ et on pose $f(P) = Q$, avec $Q = (X^2 - 1)P'(X) - (2n + 1)XP(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
 2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f (on pourra résoudre une équation différentielle).
 3. Montrer que f est diagonalisable.
-

Ex 268 : Soit f l'application de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même donnée par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
 2. Redéfinir la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$. Écrire la matrice de f dans cette base.
 3. Donner les éléments propres de f .
 4. L'application f est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Si c'est le cas, exprimer la matrice de f dans la base canonique en fonction d'une matrice diagonale.
 5. Pour n dans $\mathbb{N}$, définir f^n .
-

Ex 269 : Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $AB - BA = B$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, AB^k - B^k A = kB^k$.
 2. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \det(B^k) \cdot \det(A + kI_n) = \det(B^k) \cdot \det A$.
 3.
 - i. Montrer que A admet un nombre limité de valeurs propres.
 - ii. Montrer que $\det B = 0$.
 - iii. Supposons B inversible. Soit λ une valeur propre de A . Montrer que $\lambda + 1$ est aussi une valeur propre de A (on pourra utiliser la relation $AB - BA = B$).
En déduire le résultat précédent.
-

Ex 270 : Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel stable par u non réduit à $\{0\}$.

1. Que dire du spectre de u ?
2. Montrer que, pour tout vecteur $x \neq 0_E$, $(x, u(x), u^2(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E . Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?
3. Montrer que cette matrice ne dépend pas du vecteur x choisi.

Ex 271 : Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \text{tr}(M)I_n$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 2. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?
 3. Trouver une base des sous-espaces propres de ϕ .
 4. Déterminer $\text{tr } \phi$ et $\det \phi$.
 5. L'endomorphisme ϕ est-il inversible ? Si oui, déterminer ϕ^{-1} .
-

Ex 272 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et N_n l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- i. A est diagonalisable ;
 - ii. $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A) \in N_n \Leftrightarrow P(A) = 0$.
-

Ex 273 : Soient $a \in \mathbb{R}^*, U = (a^{j-i})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à U .

1. Déterminer le rang de u et son déterminant.
 2. Déterminer la dimension du noyau de u ainsi qu'une équation de ce noyau.
 3. Déterminer la dimension de l'image de u et une base de cette image.
 4. Étudier la diagonalisabilité de u .
 5. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer U^k en fonction de U .
 6. Déterminer le polynôme minimal de u et retrouver le résultat de la question précédente.
-

Ex 274 : Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que deux endomorphismes u et v de E . On suppose que u et v commutent et u diagonalisable avec n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tous les vecteurs propres de u sont également vecteurs propres de v .
2. Montrer que v est diagonalisable dans une même base que u .

3. Montrer qu'il existe $(a_k)_{0 \leq k \leq n-1} \in \mathbb{K}^n$ telle que $v = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$.
-

Ex 275 : Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où $a_{1,i} = a_{i,1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n$, les autres coefficients étant nuls. On note f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

1. Quel est le rang de A ?
 2. Trouver les valeurs propres et sous-espaces propres de A .
 3. Donner la matrice de la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur l'image de f pour la structure euclidienne canonique.
-

Ex 276 : Soit $n \geq 2$ et on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel : pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$

dans $\mathbb{R}^n$, on pose : $(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Soit $F = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / x_1 = x_n\}$.

1. Montrer que F est un hyperplan.
2. Trouver une base orthonormée de F .
3. Déterminer $F^\perp$.
4. Écrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer $d(e_1, F)$.

Ex 277 : On considère le produit scalaire suivant : $\langle P|Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x} dx$.

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Calculer $\langle X^p|X^q \rangle$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
3. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $F = \mathbb{R}_2[X]$.

Ex 278 : On définit trois fonctions sur le segment $[0, 1]$: $f_0 : t \mapsto 1$, $f_1 : t \mapsto t$ et $f_2 : t \mapsto e^t$, et on note $E = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(f_0, f_1, f_2)$.

1. Montrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur E .
2. Trouver une base orthonormée de $F = \text{Vect}(f_0, f_1)$.
3. Trouver a et b tels que la distance de f_2 à $t \mapsto at + b$ soit minimale.

Ex 279 : Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, un espace euclidien, $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \|v(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que $\text{Ker}(v - \text{id}) \oplus \text{Im}(v - \text{id}) = E$.
Ind. Considérer l'application $t \mapsto \|x + ty\|^2 - \|v(x + ty)\|^2$.
2. Soit, pour $x \in E$ et $p \in \mathbb{N}$, $w_p(x) = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p v^k(x)$.
Montrer que, pour tout $x \in E$, la suite $(w_p(x))$ converge. Déterminer sa limite.

Ex 280 : Soient u et v deux endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

1. Montrer que u et v commutent si et seulement si $u \circ v$ est autoadjoint.
2. Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de vecteurs propres communs à u et v .
3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan $x + y + z = 0$. Caractériser les symétries orthogonales de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec s .

Ex 281 : Soit E un espace euclidien de dimension n . On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .

1. Soit $v \in S(E)$ tel que : $\forall x \in E, (v(x)|x) = 0$. Montrer que $v = 0$.
2. i. Montrer qu'un projecteur orthogonal de E est autoadjoint.
ii. Montrer qu'un projecteur de $S(E)$ est un projecteur orthogonal.

3. Soient $u_1, \dots, u_p \in S(E)$ tels que $rg(u_1) + \dots + rg(u_p) = n$ et :

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^p (u_i(x)|x) = (x|x).$$

- i. Montrer que $u_1 + \dots + u_p = Id_E$.
- ii. Montrer que $\text{Im}(u_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(u_p) = E$.
- iii. Montrer que pour tout i de $\llbracket 1, p \rrbracket$, u_i est la projection sur $\text{Im}(u_i)$ parallèlement à $\text{Im}(u_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(u_{i-1}) \oplus \text{Im}(u_{i+1}) \oplus \dots \oplus \text{Im}(u_p)$.
- iv. Montrer que les $\text{Im}(u_i)$ sont orthogonaux entre eux deux à deux.

Ex 282 : Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$, f un endomorphisme autoadjoint de E , a sa plus petite valeur propre et b sa plus grande valeur propre.

1. Montrer que, pour tout $x \in E$, $a\|x\|^2 \leq \langle x, f(x) \rangle \leq b\|x\|^2$,
2. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = k$ si $i = j$, $a_{i,j} = 1$ si $|i - j| = 1$, les autres coefficients étant nuls.

Montrer que la plus grande valeur propre b de A vérifie $k + 2 \geq b$,

Ex 283 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soient u et v deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
On pose : $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $(u \otimes v)(x) = \langle x, v \rangle u$.
 - i. Déterminer $\text{rg}(u \otimes v)$.
 - ii. Donner les éléments propres de $u \otimes v$.
 - iii. $u \otimes v$ est-il diagonalisable ?
2. Calculer $(u \otimes v)^2$ et retrouver le résultat de la question 2a.iii).
3. Soit g un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$. On note g^* son adjoint.
Montrer que g commute avec $u \otimes v$ ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(u) = \alpha u$ et $g^*(v) = \alpha v$.

Ex 284 : Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs linéairement indépendants.

Soit $u : x \mapsto \langle a, x \rangle a + \langle b, x \rangle b$.

1. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint.
2. Déterminer son noyau.
3. Déterminer les éléments propres de u ,

Ex 285 : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.

1. Montrer que :
 - i. $f \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+$.
 - ii. $f \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}_+^*$.
2. Soit f symétrique positive, montrer qu'il existe un endomorphisme g autoadjoint et positif tel que $f = g^2$. Que dire si f est défini positif ?
3. Soit f défini positif et g positif, montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.

Ex 286 : Soit $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^T A$.
 2. Sans utiliser χ_A , trouver les valeurs propres de A et les multiplicités associées.
 3. Calculer π_A et χ_A .
 4. Trouver $P \in \mathcal{O}_4(\mathbb{R})$ telle que $P^T A P$ soit diagonale.
 5. Trouver le commutant de A .
-

Ex 287 : Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Donner les relations entre a, b, c pour que M soit dans $SO_3(\mathbb{R})$.

On donne l'identité : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ac + ab + cb)$.

2. On pose $\alpha = a + b + c$ et $\beta = ac + ab + cb$. D'après la question précédente, quelles sont les valeurs de α et β pour que M soit dans $SO_3(\mathbb{R})$?
 3. Montrer que M est dans $SO_3(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $k \in [0, 4/27]$ tel que a, b, c soient les racines de $X^3 - X^2 + k$.
 4. Déterminer les triplets (a, b, c) tels que $a = b$ et $M \in O_3(\mathbb{R})$.
-

Ex 288 : On note $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$ d'écriture développée $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$, on pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme de E .
 2. Soit $b \in \mathbb{C}$, on souhaite étudier la continuité de l'application $f : P \in E \mapsto P(b) \in \mathbb{C}$.
 3. Montrer que, si $|b| < 1$, alors f est continue.
 4. Étudier la continuité de f si $|b| = 1$ en utilisant la suite de polynôme $(P_n)_n \geq 0$, où, pour $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^n \bar{b}^k X^k$.
 5. Montrer que, si $|b| > 1$, alors f n'est pas continue.
-

Ex 289 : On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que $\sum \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ et $\sum u_n^2$ sont de même nature.
En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.
3. Montrer que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et $\sum u_n^3$ sont de même nature.
En déduire la nature de la série $\sum u_n^3$.
4. En déduire la nature de la série $\sum u_n^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Ex 290 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}$.

1. Montrer que : $u_{2n} = \sum_{\ell=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\ell} + \sqrt{2\ell-1}}$.
 2. En déduire que $u_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2n}}{2}$.
 3. Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.
 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n + u_{n+1}$. Justifier que la série $\sum_{n \geq 1} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente de somme strictement négative.
 5. Trouver la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{u_n}$.
-

Ex 291 : Soient a et b , deux réels strictements positifs.

1. Calculer l'intégrale suivante : $\int_a^b \frac{1}{t^{3/2} + t^{1/2}} dt$.
Indication : Poser $u = \sqrt{t}$.
 2. Justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2} + k^{1/2}}$.
 3. Montrer l'inégalité suivante : $2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \leq R_n \leq 2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)$.
 4. En déduire un équivalent simple de R_n au voisinage de $+\infty$.
-

Ex 292 :

1. Soit $M > 0$ et $u : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que : $\forall x \in [1, +\infty[, |u(x)| \leq M$.
Montrer que $\int_1^\infty \frac{u'(t)}{t} dt$ converge.
 2. Montrer que $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^\infty \sin(t^2) dt$ convergent.
 3. Montrer que $\int_1^\infty \sin(t^3) dt$ converge.
-

Ex 293 : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

On définit la fonction $T(f)$ sur $\mathbb{R}_+$ par $T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ si $x > 0$, et $T(f)(0) = f(0)$.

1. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.
2. Montrer que 0 n'est pas valeur propre de T ; T est-il injectif ?
3. Montrer que 1 est valeur propre de T , et donner le sous espace propre associé.
4. Donner le spectre de T et les éléments propres associés.

Ex 294 : On note $I = \int_0^{+\infty} \frac{t \sin(t)}{t^2 + 1} dt$.

1. Montrer que I converge.

2. On pose $\forall x \in \mathbb{R}, J(x) = \int_0^x \frac{t |\sin(t)|}{t^2 + 1} dt$.

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{(u + k\pi) \sin(u)}{(u + k\pi)^2 + 1} du$.

3. I converge-t-elle absolument ?

Ex 295 : Soit, pour n un entier naturel non nul, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^4)^n} dt$.

1. Montrer que I_n est défini, puis que la suite $(I_n)_{n>0}$ converge vers une limite à déterminer.

2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} . En déduire une seconde façon de déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n>0}$.

Ex 296 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^3)^n}$.

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \geq 1$.

2. Montrer que $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$.

3. On pose $u_n = n^{1/3} I_n$. étudier la convergence de la suite (u_n) . Ind. Poser $v_n = \ln(u_n)$.

4. Étudier la convergence de la série $\sum I_n$.

Ex 297 : On pose, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0, 1]$, $g_n(t) = e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$.

1. Montrer que : $\forall (t, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*, |g'_n(t)| \leq \frac{e^t}{n}$.

2. Montrer que : $\forall (t, n) \in [0, 1] \times \mathbb{N}^*, \left|e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right| \leq \frac{t}{n}$.

3. Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions $(G_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$G_n : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^x g_n(t) dt.$$

Ex 298 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in [0, \pi/2] \mapsto n \cos^n(x) \sin(x)$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) .

2. (a) La suite converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$?

Indication Considérer $\int_0^{\pi/2} f_n(t) dt$.

(b) Soit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, La suite converge-t-elle uniformément sur $[\alpha, \pi/2]$?

3. Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, \pi/2], \mathbb{R})$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} f_n(t)g(t)dt = g(0)$.

Ind. Utiliser $\left| \int_0^{\pi/2} [f_n(t)g(t) - f_n(t)g(0) + f_n(t)g(0)] dt - g(0) \right|$

Ex 299 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{2x}{x^2 + n^2}$.

1. Justifier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$. On note S la fonction somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

2. Justifier la continuité de S sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \pi$

(on pourra considérer, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{2x}{x^2 + t^2}$).

Ex 300 : Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0, Pour tout $t \in [0, 1]$, on pose $u_n(t) = a_n(1-t)t^n$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge normalement.

3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Ex 301 : On pose $f_n(t) = \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'intervalle de convergence de $\sum u_n$, noté D .

2. Déterminer $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ pour $t \in D$.

3. Étudier la convergence normale sur $[0, 1]$ de $\sum f_n$

4. Convergence uniforme ?

5. Soit $u_n = \int_0^1 \frac{(t^2 - 1)^{n+1}}{n+1} dt$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

6. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Ex 302 : Pour tout $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, on pose $f_n(x) = \frac{1 - x^{2n+2}}{1+x}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) .

2. Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur son intervalle de convergence simple.

3. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt$.
 4. Montrer que : $\forall (n, x) \in \mathbb{N} \times]-1, 1[$, $f_n(x) = \sum_{k=0}^n x^{2k} - \sum_{k=0}^n x^{2k+1}$.
 5. Montrer que $\sum \frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et calculer sa somme à l'aide des questions précédentes.
-

Ex 303 : Soit $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que S est définie sur $]0, +\infty[$. Calculer $S(1)$ et en déduire $xS(x) = \frac{1}{e} + S(x+1)$.
 2. Montrer que $S(x) \sim \frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow 0$.
 3. Montrer S est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
-

Ex 304 :

1. Calculer $\sum_{k=0}^n (-1)^k t^{3k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, puis démontrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3} dt = 0$
 2. En déduire que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt$.
 3. Calculer $\int_0^1 \frac{2t-1}{1-t+t^2} dt$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+3k}$.
-

Ex 305 : On définit pour $n \geq 1$, $f_n : t \mapsto \frac{t^{n-1} \ln(t)}{n}$ sur $I = [0, 1]$ avec la convention $f_n(0) = 0$.

1. Déterminer $\|f_n\|_{\infty, I}$.
 2. On pose $g : t \mapsto \frac{\ln(1-t) \ln(t)}{t}$ sur $J =]0, 1[$.
 - i. Montrer que g est intégrable sur J . Indication : on pourra rappeler la valeur de $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\ln(t)}{t-1}$.
 - ii. Montrer que : $\int_0^1 g(t) dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$.
-

Ex 306 :

1. Justifier l'existence de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt$.
 2. Montrer que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. On admet que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
-

Ex 307 : Pour $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q} = \int_0^1 x^p \ln(x)^q dx$.

1. Montrer la convergence des intégrales $I_{p,q}$ et les calculer.

2. Montrer que $\int_0^1 e^{x \ln(x)} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^n}$.

Ex 308 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n : x \in]0, +\infty[\mapsto \frac{2 \operatorname{sh}(x)}{e^{nx} - 1}$ et sous réserve d'existence, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

1. Montrer que I_n existe.

2. Montrer que $I_n = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(x) e^{-knx} dx$,

3. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4k^2 - 1}$.

Ex 309 : Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{(x \ln(x))^n}{n!}$.

1. Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa somme.

2. Montrer que $\int_0^1 f_n(t) dt$ converge et calculer cette intégrale.

3. Montrer que $\int_0^1 t^t dt$ converge et exprimer cette intégrale sous la forme d'une série.

Ex 310 :

1. Donner le rayon de convergence de la série entière : $\sum_{n \geq 2} (-1)^n (\ln n) x^n$. On notera S sa somme.

2. Montrer que : $\forall x \in]-1, 1[, S(x) = \frac{1}{1+x} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^{n+1}$.

3. Montrer que la limite de S en 1^- est égale à $\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$.

4. Calculer cette limite en utilisant la formule de Stirling : $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$.

Ex 311 : On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) dt$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{\pi}{4}$. En déduire que le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$ est ≥ 1 .

2. Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, que $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

3. Donner un équivalent simple de I_n .

4. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum I_n x^n$. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$.

Ex 312 :

1. étudier la convergence simple de la série entière $\sum_{n \geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$. On note D l'ensemble de convergence et $S(x)$ la somme sur D . L'application S est-elle continue sur D ?
 2. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \left(\sin \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right) x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
 3. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)S(x)$.
-

Ex 313 : Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt$.
 2. Montrer que si f est bornée alors f est constante.
-

Ex 314 : On donne $d_0 = 1$, $d_1 = \frac{1}{2}$ et $d_n =$

$$\begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \sqrt{\frac{1}{n+1}} & 0 & \dots & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{3} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \dots & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}.$$

1. Calculer d_2 et d_3 .
 2. Montrer que $\forall n \geq 2, (n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}$.
 3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, |d_n| \leq 1$ et en déduire une information sur le rayon de convergence R de $\sum_{n \geq 0} d_n x^{n+1}$; on notera S la fonction somme définie sur $] -R, R[$.
 4. Déterminer une équation différentielle vérifiée par S . En déduire une expression simple de S .
 5. Déterminer d_n .
-

Ex 315 : Soit $h(x) = \int_0^{+\infty} e^{(-t^2 - \frac{x^2}{t^2})} dt$

1. Montrer que $t \mapsto \frac{a}{t^2} e^{-t^2 - \frac{b}{t^2}}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ pour $a > 0$ et $b > 0$.
 2. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
 3. Montrer que $h'(x) = -2h(x)$, en déduire une expression de h en fonction de x et de $h(0)$.
-

Ex 316 : Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Montrer que le domaine de définition de F est $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer que, pour tout $x > 0$, $F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.
 3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis que, pour tout $x > 0$, $F(x) - F'(x) = \frac{1}{x}$.
En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
 4. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a : $F(x) = e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.
 5. Montrer que $F(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x$.
-

Ex 317 : Soit $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^\infty \frac{\ln(t)}{x^2 + t^2} dt$.

1. Donnez le domaine de définition D de F .
 2. Calculez $F(1)$. On pourra poser $u = \frac{1}{t}$.
 3. En déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x \in D$.
-

Ex 318 : Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(xt) - \text{Arctan}(t)}{t} dt$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
 2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire l'expression de f' puis de f .
 3. Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(at) - \text{Arctan}(bt)}{t} dt$ pour $(a, b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$.
-

Ex 319 :

1. Montrer que G est bien définie pour $x > 0$.
 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\int_0^y \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(n+t)} dt = \frac{1}{n} \left(\int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt \right)$.
 3. On pose $H(n) = nG(n)$. Montrer que la série de terme général $H(n+1) - H(n) - \frac{1}{2n}$ converge.
En déduire un équivalent de $G(n)$.
-

Ex 320 : On pose : $\forall x \in [0, +\infty[$, $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}(1+t^2)}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$.

1. Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, +\infty[$ et exprimer $F'(x)$.
 2. Montrer que $G^2(x) = \frac{\pi}{4} - F(x)$.
 3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.
-

Ex 321 :

1. Soient $a, b > 0$. Donner les primitives sur $\mathbb{R}$ de $u \mapsto \frac{1}{au^2 + b}$.
2. Exprimer $\cos(t)$ en fonction de $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ lorsque $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$.
3. Soit $f : x \in]1, +\infty[\mapsto \int_0^\pi \ln(\cos(t) + x) dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, puis exprimer f' sans intégrale.
4. En déduire une expression de f .

Ex 322 : Soit $(E) : (1 - x^2)y' - xy = f(x)$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $] -1, 1[$.
2. Soit $h : x \mapsto \sqrt{1 - x^2} - \operatorname{Arccos} x$. Démontrer que h est dérivable sur un intervalle à préciser et calculer h' .
3. Résoudre (E) sur $] -1, 1[$ pour $f(x) = 1 - x$.
4. Montrer que s'il existe une solution de (E) sur $[-1, 1]$, alors $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt = 0$.
5. Soit $f(x) = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe une solution de (E) sur $[-1, 1]$ si, et seulement si, $b = 0$.

Ex 323 : On recherche les fonctions $x, y, z, u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant le système

$$\begin{cases} x' &= x + 2y - 2z \\ y' &= x - y + u \\ z' &= x - z + u \\ u' &= 2y - 2z + u \end{cases}.$$

On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme canoniquement associé à A .

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f .
2. Justifier avec un minimum de calcul que f n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
4. Résoudre le système différentiel.

Ex 324 : Soit l'application $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, avec U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$.

Pour $z = x + iy \in U$, avec x et y réels, on pose $f(z) = \tilde{f}(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$, avec $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ réels.

On dit que f est dérivable en $z_0 \in U$ si $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existe.

Si f est dérivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$, on a alors l'expression :

$$f'(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0).$$

1. Montrer que f est continue en $z_0 \in U$ si et seulement si P et Q sont continues en (x_0, y_0) .

2. Montrer que f est dérivable en $z_0 \in U$ si et seulement si P et Q sont différentiable en (x_0, y_0) et $\frac{\partial P}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial P}{\partial y}(x_0, y_0)$.
3. On suppose que f est deux fois dérivable sur U et que f'' est continue sur U . Déterminer l'expression de f'' .
4. En déduire que si f est deux fois dérivable sur U et que f'' est continue sur U , alors $\Delta(P) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0$ et $\Delta(Q) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 0$

Ex 325 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0, 0) = 0$ et $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) > \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|$.

On pose : $u : x \mapsto f(x, x)$, $v : x \mapsto f(x, -x)$ et $w_x : y \mapsto f(x, y)$.

1. Calculer les dérivées de u , v et w_x .
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un unique $y_x \in \mathbb{R}$ tel que $|y_x| \leq |x|$ et $w_x(y_x) = 0$.
3. On pose $\varphi : x \mapsto y_x$ (on suppose que φ est dérivable). Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction des dérivées partielles de f en $(x, \varphi(x))$. Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Ex 326 : On note, pour tous réels x et $y : f(x, y) = y^2 \sin(x/y)$ si $y \neq 0$ et $f(x, 0) = 0$.

1. On pose $X_0 = (x_0, 0)$ où $x_0 \in \mathbb{R}$.
 - i. Montrer que f est continue en X_0 .
 - ii. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. On considère $X_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ avec $y_1 \neq 0$.
 - i. Calculer les dérivées partielles de f en X_1 .
 - ii. f est-elle différentiable en X_1 ? Si oui, donner la différentielle de f en X_1 , puis en $(0, 1)$.
3. Calculer les dérivées partielles de f en X_0 . Si on suppose que f est différentiable en X_0 , que vaut sa différentielle?

Ex 327 :

1. Déterminer les extrema de $f : (u, v) \in [0, 1]^2 \mapsto uv(1 - u - v)$.
2. Soit (A, B, C) un triangle d'aire égale à 1. Soit M un point dans le triangle. Maximiser le produit des distances de M aux côtés du triangle.
 1. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que, pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $df_{I_n}(H) = H^T + H$.
 2. Déterminer $\text{Ker}(df_{I_n})$.
 3. En déduire que l'espace tangent à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n est $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Ex 328 : On obtient aléatoirement un entier strictement positif n avec une probabilité de $\frac{1}{2^n}$. On note A_k l'événement : « n est un multiple de k ».

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
2. Calculer $P(A_k)$.
3. Calculer $P(A_2 \cup A_3)$.
4. Soient p, q dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- (a) Montrer que $A_p \cap A_q = A_m$, avec $m = p \vee q$.
(b) Montrer que A_p et A_q ne sont pas indépendantes.
-

Ex 329 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

Soient $i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On donne $P(X = j, Y = i) = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$.

1. Déterminer λ .
 2. Donner les lois de X et Y .
 3. X et Y sont-elles indépendantes ?
 4. Déterminer la loi de $Z = X - 1$ et en déduire $E(X)$ et $V(X)$.
 5. Soit $B = [P(Y = i|X = j)]_{1 \leq i, j \leq n+1}$. Expliciter B , puis calculer B^p pour $p \in \mathbb{N}^*$.
 6. B est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.
-

Ex 330 : Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit le taux de panne de X comme la suite (x_n) telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \mathbb{P}(X = n | X \geq n)$. Soit $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que la loi de Y est bien une loi de probabilité.
 2. Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
 - i. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - x_k)$.
 - ii. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\mathbb{P}(X = n)$ en fonction des x_k .
 3. Déterminer les variables aléatoires réelles discrètes ayant un taux de panne constant.
 4. Déterminer le taux de panne de Y .
-

Ex 331 : Une personne sur une échelle est en train de peindre un bâtiment. La probabilité qu'un passant reçoive une goutte de peinture est $p \in]0, 1[$. On note X (resp. Y) le nombre de passants ayant reçu une goutte de peinture (resp. n'ayant pas reçu de goutte.)

1. On suppose que n personnes sont passées. Donner les lois de X et de Y . Sont-elles indépendantes ?
 2. On note à présent N le nombre de passants dans la journée. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ . Donner la loi de X et de Y . Donner l'espérance et la variance de X .
 3. Montrer que X et Y sont indépendantes. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
-

Ex 332 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. En posant $\min \emptyset = +\infty$, on définit $T_1 = \min \{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 1\}$ et $T_2 = \min \{n > T_1, X_n = 1\}$.

1. Que représente T_1 ? Préciser sa loi, son espérance et sa variance.
2. Que représente T_2 ? Calculer $\mathbf{P}(T_2 - T_1 = k, T_1 = n)$.
3. Vérifier que $T_2 - T_1$ et T_1 sont indépendantes. En déduire la loi de T_2 .

Ex 333 : Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant, $\forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X = k, Y = \ell) = \frac{\alpha}{2^{k+\ell}}$.

1. Trouver α . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $G_X(t)$, $\mathbf{E}(X)$, $V(X)$ et $\text{cov}(X, Y)$.
3. Calculer $\mathbf{P}(X \geq k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et retrouver $\mathbf{E}(X)$.
4. On pose $Z = \min(X, Y)$. Déterminer la loi de Z .
5. Calculer $\mathbf{P}(X \geq Y)$.

ENSEA MP 2023

Ex 334 : Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$: $P = X^6 + 1$.

Ex 335 : Factoriser dans $\mathbb{C}$ les polynômes $X^2 + X + 1$ et $X^2 - X + 1$.
Montrer que $X^2 - X + 1$ divise $(X - 1)^{n+2} + X^{2n+1}$.

Ex 336 : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $A^k = I_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Donner un exemple d'une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M^4 = I_3$ et qui ne soit pas diagonalisable sur $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Réduire cette matrice dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
3. Quelles sont les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^k = I_n$ diagonalisables sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Ex 337 : Déterminer les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

Ex 338 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $\varphi_n : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto (X - 1)^2 P' - nXP \end{cases}$

1. Montrer que φ_n est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
 2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ_n .
-

Ex 339 : Soit E un espace euclidien de dimension $d > 0$. Soient a et b deux vecteurs unitaires et linéairement indépendants de E .

Soit u l'endomorphisme de E défini par $u(x) = (a|x)a + (b|x)b$ pour tout x .

1. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint.
 2. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$.
 3. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de u .
-

Ex 340 : Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $e^{\cos(x)}$.

Ex 341 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$.

1. Montrer que la suite (S_n) converge.
 2. Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$, où γ est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.
 3. Calculer la limite de (S_n) .
-

Ex 342 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$.

1. Donner le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} a_{n-1} x^n$.

On note f la somme de cette série entière

2. Donner l'expression de $f(x)$ pour x dans $] -1, 1[$.
 3. f est-elle définie en -1 ? Que dire alors de f sur $] -1, 1[$?
 4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k dt$.
 5. Calculer $f(1)$.
-

Ex 343 : Résoudre l'équation différentielle :

$$t \frac{d\theta}{dt} - (1+t)\theta = \frac{t^2}{\text{ch}(t)}$$

Ex 344 : Étudier les extrema de la fonction :

$$f : \begin{cases}]0; +\infty[\times \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto x(y^2 + \ln(x)^2) \end{cases}$$

Navale, Saint-Cyr MP 2023

Ex 345 : [St Cyr] Soit A l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ s'écrivant $t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kt)$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n$ constantes réelles.

1. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
2. Calculer en fonction des a_k l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt$.
3. En déduire que A est intègre.

Ex 346 : [St Cyr] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire de degré 3 dont les racines z_1, z_2, z_3 sont les affixes de points M_1, M_2, M_3 d'un plan affine euclidien. Montrer que P' a une racine double si et seulement si le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral.

Ex 347 : [St Cyr] Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$ tels que $A^n = \alpha_n A + \beta_n A^2$.
 2. Programmer une fonction Python `puissance(n)` renvoyant A^n .
 3. Déterminer α_n et β_n grâce à cette fonction.
 4. Tracer $n \mapsto \frac{\alpha_n}{\beta_n}$. Conjecture ?
 5. Prouver cette conjecture.
-

Ex 348 : [St Cyr] Soit $\phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

- i. $\forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$;
- ii. $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \phi\left(\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \lambda$.

Montrer que $\phi = \det$.

Ex 349 : [St Cyr] Soit $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 3$. On note U l'application qui à un polygone P constitué de n points $M_1, \dots, M_n$ du plan complexe associe le polygone :

$$\frac{M_1 + M_2}{2}, \dots, \frac{M_{n-1} + M_n}{2}, \frac{M_n + M_1}{2}.$$

1. Écrire une fonction Python calculant $U(P)$.
 2. L'application U est visiblement linéaire. Donner sa matrice dans la base canonique. C'est une matrice stochastique que l'on notera M .
 3. Montrer que les valeurs propres de M sont de module au plus égal à 1 .
 4. Montrer que 1 est la seule valeur propre de M de module 1 .
-

Ex 350 : [Navale] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que ϕ soit diagonalisable.
 2. Décrire les éléments propres de ϕ .
-

Ex 351 : [St Cyr] On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs telle que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|f_k - e_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que le résultat précédent serait en défaut en remplaçant l'inégalité stricte par une inégalité large.

Ex 352 : [St Cyr] Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $x_1, \dots, x_n$ des éléments de E . On note $G = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Montrer que $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
 2. Montrer l'existence d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $G = A^T A$.
 3. En déduire que le rang de G est égal à celui de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.
-

Ex 353 : [Navale] Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{L}(E)$:

1. Montrer que si $\text{Im } u = \text{Ker } u$, alors $u + u^*$ est inversible.
 2. Montrer la réciproque si $u \circ u = 0$.
-

Ex 354 : [Navale] On munit $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire défini par : $\forall P, Q \in \mathbb{R}_n[X], (P|Q) = \int_0^1 PQ$.

1. Montrer que l'application u définie sur E par : $u(P) = \int_0^1 (X+t)^n P(t) dt$ est un endomorphisme autoadjoint de E .
 2. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(P_0, \dots, P_n)$ formée de vecteurs propres de u . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres associées.
 3. Montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^2, (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \lambda_k P_k(x) P_k(y)$. En déduire $\text{tr}(u)$.
-

Ex 355 : [St Cyr] Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. On munit E du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par : $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Soit $K : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et symétrique c'est-à-dire telle que $\forall (x, t) \in [0, 1]^2, K(x, t) = K(t, x)$. Soit u l'application qui à $f \in E$ associe la fonction $u(f) : x \in [0, 1] \mapsto \int_0^1 K(x, t)f(t)dt$.

On admet le théorème de Fubini :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0([0, 1]^2, \mathbb{R}), \int_0^1 \left(\int_0^1 \phi(x, t) dt \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 \phi(x, t) dx \right) dt.$$

1. Montrer que u est un endomorphisme de E .
 2. Montrer que u est autoadjoint.
 3. Montrer que u est continu.
-

Ex 356 : [St Cyr] Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $M_t = \begin{pmatrix} \text{ch}(t) & \text{sh}(t) \\ \text{sh}(t) & \text{ch}(t) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les matrices M_t sont diagonalisables et trouver une base de vecteurs propres indépendante de t .
2. Montrer que l'application $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ définie par $\theta(t) = M_t$ est injective. Montrer que $\theta(t+t') = \theta(t)\theta(t')$.

3. Soient $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \mathbb{R}^2$, $\mathbf{b}$ sa base canonique, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $q : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$.

Montrer que, si $q \circ f = q$, alors $M = \text{Mat}_{\mathbf{b}}(f)$ vérifie $(*) : M^T J M = J$. Montrer que les matrices M_t , avec $t \in \mathbb{R}$, vérifient $(*)$ et trouver toutes les matrices vérifiant $(*)$.

Ex 357 : [Navale]

1. Rappeler l'algorithme de Gram-Schmidt.
 2. On note $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures, à coefficients diagonaux strictement positifs. Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, T) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OT$.
-

Ex 358 : [St Cyr] Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ non restreint à la fonction nulle. On note I l'ensemble des rapports $\frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2}$ quand f décrit F privé de la fonction nulle, où usuellement

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f| \text{ et } \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f^2}.$$

1. Que dire de I si F est de dimension 1 ?
 2. Dans le cas général, montrer que I est un intervalle inclus dans $[1, +\infty[$.
 3. On suppose F de dimension finie. Montrer que I est fermé.
-

Ex 359 : [Navale] Montrez que toute suite réelle admet une sous suite monotone.

Ex 360 : [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit l'équation $(E_n) : x^n + x - 1 = 0$.

1. Montrer que (E_n) a une solution unique dans $]0, +\infty[$. On la note x_n .
 2. Montrer que la suite (x_n) est croissante et majorée.
 3. (Python) écrire un programme qui renvoie une valeur approchée de x_n à ε près obtenue par dichotomie.
 4. (Python) Afficher les 100 premières valeurs de x_n et conjecturer la limite de la suite.
 5. Démontrer la conjecture.
-

Ex 361 : [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = X^n + X^{n-1} + \dots + X - 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n a une unique racine réelle positive que l'on notera a_n .
 2. Écrire une fonction Python qui renvoie une valeur approchée de a_n .
 3. Afficher un graphe représentant les 20 premières valeurs de la suite (a_n) . Conjecturer la nature de (a_n) .
 4. Montrer la convergence de (a_n) et déterminer sa limite.
-

Ex 362 : [Navale]

1. Pour $m > 1$, montrer qu'il existe un unique $x_m \in]-1, -2[$ tel que $m \ln \left(1 + \frac{x_m}{m+1} \right) = x_m$.
2. Étudier la suite $(x_m)_{m>1}$,

Ex 363 : [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n}$.

1. Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n} \right) I_n$.
2. Programmer sur Python la méthode des trapèzes pour calculer une valeur approchée de I_1 .
3. Programmer une fonction Python qui calcule les 20 premières sommes partielles des séries $\sum I_n^\alpha$ pour $\alpha = 1, 2, 3, 4$.
4. Soit $\sum x_n$ une série à termes strictement positifs et $\sum y_n$ une série absolument convergente.
On suppose qu'il existe λ tel que $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + y_n$.
 - (a) Montrer que $\ln \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right) = -\frac{\lambda}{n} + z_n$, où z_n est le terme général d'une série absolument convergente.
 - (b) Montrer l'existence d'une constante C telle que $\ln(x_n) = -\lambda \ln n + C + o(1)$ quand $n \rightarrow +\infty$ et en déduire un équivalent de x_n .
 - (c) Étudier la nature de la série $\sum I_n^\alpha$ en fonction de α .

Ex 364 : [St Cyr] Pour un entier n , on note r_n le reste de la division euclidienne de n par 5 .

1. Montrer que la série de terme général $\frac{r_n}{n(n+1)}$ converge.
2. On note $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{k(k+1)}$. Déterminer S_{5n} en fonction de termes de la suite (H_p) , où $H_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r_n}{n(n+1)}$.

Ex 365 : [St Cyr] Soient $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$ et $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction deux fois dérivable et majorée.
On suppose que $\forall t \in \mathbb{R}^+, f''(t) \geq \alpha^2 f(t)$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Montrer que f' est négative.
3. Montrer que f admet une limite finie en $+\infty$, déterminer sa valeur.
4. Montrer que f' admet une limite finie en $+\infty$, déterminer sa valeur.
5. Montrer que $\alpha^2 f^2 - f'^2$ est négative.
6. En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^+, f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$.

Ex 366 : [St Cyr] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et concave.

1. Montrer que $\forall x \in [0, 1], xf(x) \leq \int_0^x f(t)dt - x$.
 2. En déduire $\int_0^1 xf(x)dx \leq \frac{2}{3} \int_0^1 f(x)dx$.
-

Ex 367 : [St Cyr] On définit une suite de fonctions $f_n : I = [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
 2. La série converge-t-elle normalement sur I ? uniformément sur I ?
 3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
-

Ex 368 : [St Cyr] Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On définit une suite de fonctions (f_n) sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = f\left(x + \frac{x(1-x)}{n}\right)$ pour $n \geq 1$ et $f_0(x) = 0$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de (f_n) .
 2. Montrer que les résultats restent valides pour une fonction f seulement lipschitzienne.
-

Ex 369 : [Navale] Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des séries de fonctions $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ définies sur $\mathbb{R}^+$ par $u_n(x) = \frac{x}{(1+n^2x)^2}$.

Ex 370 : [St Cyr] Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \frac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$ -
 2. Étudier la continuité de la somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.
 3. Donner un équivalent de f en 0^+ .
-

Ex 371 : [Navale] Soit la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$

1. Exprimer $G(x)$ en fonction en fonction de $F : x \mapsto \int_0^x e^{-u^2} du$.
2. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Ex 372 : [Navale] On considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$. On note $L_1 = \sup \{n \in \mathbb{N}^*, X_1 = X_2 = \dots = X_n\}$ la longueur de la première séquence et $L_2 = \sup \{n \in \mathbb{N}^*, X_{L_1+1} = \dots = X_{L_1+n}\}$ la longueur de la seconde séquence. Montrer que $\text{Cov}(L_1, L_2) = -\frac{(p-q)^2}{pq}$.

Ex 373 : [Navale] Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. ayant une variance. On pose, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $Y_i = X_1 + \dots + X_i$. On note $M = (\text{Cov}(Y_i, Y_j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Relier M à la matrice $A^T A$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 2. Encadrer les valeurs propres de M .
-

Ex 374 : [St Cyr] On considère une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès $p \in]0, 1[$. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et X la variable aléatoire comptant le nombre de répétitions avant d'obtenir le r succès.

1. Écrire une fonction pascal (p, r) qui simule X et renvoie le nombre d'épreuves avant le r^{e} succès.
 2. Écrire une fonction moyenne (p, r, k) qui renvoie une valeur moyenne pour k répétitions de la fonction précédente.
 3. Calculer la loi de X .
 4. Calculer l'espérance de X .
-

Ex 375 : [St Cyr] On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules rouges. On tire simultanément dans l'urne n boules, avec $1 \leq n \leq N_1 + N_2$. On note X le nombre de boules blanches tirées.

1. Déterminer la loi de X ,
2. Retrouver l'identité de Vandermonde : $\sum_{k=0}^n \binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k} = \binom{N_1 + N_2}{n}$.
3. (Python) Définir une fonction `Hypergeom(N_{1}, N_{2}, n)` qui reproduit l'expérience et renvoie une valeur de X .
4. Exprimer l'espérance de X en fonction de N_1, N_2 et n ,
5. (Python) Définir une fonction `Moyenne(N_{1}, N_{2}, n, k)` qui reproduit k expériences et renvoie la moyenne des valeurs de X obtenues.
6. On choisit $N_1 = 10, N_2 = 13, n = 5$, et $k = 100$. Comparer la moyenne empirique et l'espérance théorique.

Dauphine, ISUP MP 2023

Ex 376 : [Dauphine] Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ non nuls tels que $P = \prod_{i=1}^n (X^2 + a_i X + b_i)$ et

$Q = \prod_{i=1}^n (X^2 + c_i X + d_i)$, avec les $X^2 + a_i X + b_i$ et $X^2 + c_i X + d_i$ irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

On suppose que $\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{P(0)}{Q(0)}$.

1. Montrer que P et Q ont les mêmes racines complexes.
2. Montrer qu'il existe $\sigma \in S_n$ tel que : $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, c_i = a_{\sigma(i)}$ et $d_i = b_{\sigma(i)}$.

Ex 377 : [Dauphine]

1. Montrer que : $\forall x \in E, \|p(x)\| \leq \|x\|$.
2. En déduire que toute valeur λ propre de $p \circ q$ vérifie : $|\lambda| \leq 1$.
3. Montrer que : $\forall x \in E, (x|p(x)) = \|p(x)\|^2$. En déduire que toute valeur λ propre de $p \circ q$ vérifie : $\lambda \geq 0$.
4. Soit $f = p \circ q \circ p$.
 - (a) Montrer que f est un endomorphisme autoadjoint, puis que $\text{Im}(p)$ est stable par f .
 - (b) Soient G et H des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que $(G + H)^\perp = G^\perp \cap H^\perp$. En déduire $(\text{Im}(p) + \text{Ker}(q))^\perp$.
 - (c) Soit $x \in [\text{Ker}(q) + (\text{Ker}(p) \cap \text{Im}(q))]$. Déterminer $pq(x)$.
 - (d) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.

Ex 378 : [ISUP] Soit f une application continue de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \inf_{P \in \mathbb{R}_n[X]} \int_{-1}^1 (f(t) - P(t) - P(-t))^2 dt$.

1. Montrer que la suite (U_n) est bien définie.
2. Déterminer la monotonie de la suite (U_n) .

Ex 379 : [Dauphine] Trouver la limite de la suite de terme général $\sum_{k=1}^n \tan\left(\frac{1}{k+n}\right)$.

Ex 380 : [Dauphine] Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs qui tend vers 0 .

1. Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $x_n = \min(x_0, \dots, x_n)$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de n tels que $x_n = \max\{x_k, k \geq n\}$.

Ex 381 : [Dauphine] Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$. Soit $R > 0$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, toutes les racines complexes de P_n sont de module supérieur ou égal à R .

Ex 382 : [ISUP] Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) \subset [a, b]$ avec $0 < a < b$.

1. Majorer la variance $V(X)$. Cette valeur peut-elle être atteinte?
2. Dans quel cas $V(X)$ est-elle maximale? Quelle est sa valeur?