À rendre pour le jeudi 9 novembre

EXERCICE COMMUN À TOUS

1. Programmes mystères

1. On donne les programmes Python `P0` et `P1` suivants. Que renvoient les appels `P0(5)`, `P1(5)` et `P0(9)`, `P1(9)` ? Dire en une phrase ce que fait chacun des programmes `P0` et `P1` ?

```python
def P0(N): #N entier naturel
    if N==1 :
        return False
    if N==2:
        return True
    for d in range(2,N):
        if N%d==0:
            return False
        return True
```

```python
def P1(N): #N entier naturel
    if N==1 :
        return False
    if N==2:
        return True
    for d in range(2,N):
        if N%d==0:
            return False
    return True
```

2. En une phrase, dire ce que fait le programme python, `P2`, qui utilise le programme `P1` précédent :

```python
def P2(N): #N entier naturel
    L=[]
    k=0
    n=k*k+1
    while n<=N:
        if P1(n):
            L.append(n)
        k=k+1
        n=k*k+1
    return L
```

Que renvoie l'appel `P2(127)` ?

3. Ecrire une fonction `nextPrime` en langage python qui prend en argument un entier `N` et qui retourne comme valeur le premier nombre premier qui est strictement supérieur à `N`.

4. **Nombres jumeaux**
On appelle *couple de nombres premiers jumeaux* toute liste `[p,q]` telle que `p,q` sont des nombres premiers vérifiant $\texttt{p} < \texttt{q}$ et $\texttt{q} = \texttt{p} + 2$. Par exemple, `[3,5]` ou `[11,13]` sont des couples de nombres premiers jumeaux alors que `[2,3]` ne l'est pas.

a. Ecrire à l'aide de la fonction `nextPrime` précédente, une fonction python nommée `jumeau`, prenant comme argument un entier `N` et renvoyant le couple `[p,q]` de nombres premiers jumeaux tels que `p` strictement supérieur à `N` et le plus petit possible.
Par exemple `jumeau(5)` renvoie comme valeur `[11,13]`.

b. Ecrire avec les mêmes consignes une fonction `lesJumeaux` prenant en argument un entier `N` et renvoyant la liste de tous les couples de nombres premiers jumeaux `[p,q]` tels que $\texttt{q} \leq \texttt{N}$.
Par exemple, `lesJumeaux(18)` retourne `[[3,5],[5,7],[11,13]]` (le couple `[17,19]` n'en fait pas partie).

2. Fonction récursive

On considère la fonction définie comme suit en python

```
def M(n):
    if n>100:
        return n-10
    else:
        return M(M(n+11))
```

1. Que fait l'appel `M(101)` ?
2. Plus généralement, que fait l'appel `M(N)` si `N` > 100 ?
3. Que renvoient les appels `M(100)` ? Puis `M(99)`, `M(98)` ?
4. Conjecturer ce que renvoie l'appel `M(N)` où `N` ≤ 100, entier naturel, puis le démontrer.

Nous allons étudier dans ce problème la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^1 e^{-x\ln(1+t^2)}dt.$$

Dans un deuxième temps nous allons déterminer une valeur approchée de l'unique solution de l'équation $(E): \ F(x) = x$.

Partie I -

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

2. **a.** Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

b. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}F(1)$.
En déduire une relation entre $F(1)$ et $F(2)$, puis la valeur de $F(2)$.

c. En s'inspirant de la même méthode de la question précédente, montrer que :
$\displaystyle\forall n \in \mathbb{N}^*, \ F(n+1) = \frac{1}{2^{n+1}n} + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)F(n)$.

d. Donner une relation de récurrence entre $F(-n-1)$ et $F(-n)$.

3. Montrer que F est strictement décroissante.

4. **a.** Lorsque x est dans $\mathbb{R}_-^*$ fixé. Montrer que : $F(x) \geq \dfrac{1}{2}e^{-x\ln(5/4)}$.

b. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$.

c. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)/x$.

5. **a.** Montrer que : $\forall t \in [0,1], \ \dfrac{1}{2}t^2 \leq \ln(1+t^2)$.

b. En déduire que : $\displaystyle\forall x \in \mathbb{R}^+, \ F(x) \leq \int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}}dt$.

c. Soit $\displaystyle\phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$. Pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, exprimer $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{xt^2}{2}}dt$ à l'aide de la fonction ϕ.

d. Pour x dans $[1,+\infty[$, montrer que : $\displaystyle\phi(x) \leq \int_0^1 e^{-\frac{u^2}{2}}du + 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2}$.

e. En déduire que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

6. **a.** Soit $\displaystyle g(x) = -\int_0^1 e^{-x\ln(1+t^2)}\ln(1+t^2)dt$. Montrer l'existence de $g(x)$ pour tout réel x.

b. Montrer que : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ |e^\alpha - 1 - \alpha| \leq \dfrac{\alpha^2}{2}e^{|\alpha|}$.

c. Montrer que :
$\displaystyle\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall h \in [-1,1], \ |F(x_0+h) - F(x_0) - hg(x_0)| \leq h^2\int_0^1 e^{-x_0\ln(1+t^2)}[\ln(1+t^2)]^2dt$.

d. En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $F' = g$. Retrouver le résultat de la troisième question.

e. Calculer $F'(0)$.

7. (Admis pour les 3/2) Montrer que F est deux fois dérivable et que :

$$F''(x) = \int_0^1 e^{-x\ln(1+t^2)}[\ln(1+t^2)]^2dt.$$

8. Montrer que F est convexe sur $\mathbb{R}$.

9. En réunissant les résultats précédents, dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie II -

1. Soient a et b deux réels tels que l'on ait : $a < b$ et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a, b]$. On pose $c = \dfrac{a+b}{2}$ et $I(\varphi) = \displaystyle\int_a^b \varphi(t)dt$ et $R(\varphi) = (b-a)\varphi(c)$.

- ***a.*** Dans cette question uniquement, φ est une fonction polynomiale de degré au plus un de la forme $x \mapsto \alpha x + \beta$. Montrer que : $I(\varphi) = R(\varphi)$.
- ***b.*** Montrer que : $\forall t \in [a, b],\ \varphi(t) = P(t) + \displaystyle\int_c^t (t-u)\varphi''(u)du,$
  où P est un polynôme de degré inférieur ou égal à un que l'on précisera.
- ***c.*** Montrer que : $I(\varphi) - R(\varphi) = \displaystyle\int_a^b \left[\int_c^t (t-u)\varphi''(u)du\right] dt.$
- ***d.*** Justifier l'existence de $M_2 = \sup\limits_{[a,b]} |\varphi''|$.
- ***e.*** Montrer que : $|I(\varphi) - R(\varphi)| \leq \dfrac{(b-a)^3}{24} M_2$.

2.
- ***a.*** Montrer que l'équation (E) : $F(x) = x$ admet une unique solution que l'on note α.
- ***b.*** Montrer que α est dans $]0, 1[$.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme u_0 qui est dans $\mathbb{R}$ et par la relation : $u_{n+1} = F(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

- ***a.*** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |F'(x)| \leq \ln(2)$.
- ***b.*** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq (\ln(2))^n |u_0 - \alpha|$.
- ***c.*** Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
- ***d.*** On suppose dans cette question que u_0 est dans $[0, 1]$. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer un n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que : $|u_{n_0} - \alpha| \leq \varepsilon$.

4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement convexe si pour tout a et b dans I distincts et pour tout λ de $]0, 1[$, on a : $f((1-\lambda)a + \lambda b) < (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$.
Soit g une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et dont la dérivée seconde est strictement positive sur I. Nous allons montrer que g est strictement convexe.
Soient a et b dans I distincts, avec $a < b$. On pose $\psi : \lambda \mapsto g((1-\lambda)a + \lambda b) - (1-\lambda)g(a) - \lambda g(b)$ qui est définie sur $[0, 1]$.

- ***a.*** Montrer qu'il existe d dans $]a, b[$ tel que : $\forall \lambda \in [0, 1],\ \psi'(\lambda) = (b-a)[g'(a + \lambda(b-a)) - g'(d)]$.
- ***b.*** En déduire les variations de ψ sur $[0, 1]$.
- ***c.*** En déduire que g est strictment convexe.

5.
- ***a.*** Montrer que F est strictement convexe.
- ***b.*** Soient A et B les points de la courbe représentative de F d'abscisses respectives 0 et 1. Soit β l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = x$ avec la corde $[AB]$. Déterminer β.
- ***c.*** Montrer que : $F(\beta) < \beta$. En déduire que : $F(\beta) < \alpha < \beta$.
- ***d.*** Nous allons déterminer une valeur approchée de $F(\beta)$.
  On pose $\lambda_x(t) = e^{-x\ln(1+t^2)} = (1+t^2)^{-x}$.
  On pose $R = \dfrac{1}{4}\left(\lambda_\beta(1/8) + \lambda_\beta(3/8) + \lambda_\beta(5/8) + \lambda_\beta(7/8)\right)$.
  En adaptant le résultat de la question **1.e.** de cette partie, en découpant $[0, 1]$ en quatre intervalles égaux, montrer que : $|F(\beta) - R| \leq 1/48$. En déduire un encadrement de $F(\beta)$ en fonction de R.
- ***e.*** Donner un encadrement de la solution α de (E) en fonction de β.

On rappelle qu'une fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bornée par un réel $K>0$ si la fonction $|\varphi|$ est majorée par K :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi(x)| \leq K.$$

Préliminaire

1. Soit m un entier supérieur ou égal à 1. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m à l'origine de la fonction $(e^x-1)^m$, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m}{k}k^j = \begin{cases} 0 \text{ si } j \text{ est un entier entre 1 et } m-1 \\ m! \text{ si } j=m \end{cases}$$

2. Prouver que si (u_k) est une suite croissante de réels strictement positifs et k, n des entiers tels que $1 \leq k \leq n$, on a :

$$(u_1 u_2 \ldots u_k)^n \leq (u_1 u_2 \ldots u_n)^k.$$

Partie I -

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et f'' soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_2.

a. En écrivant, pour $h>0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange entre x et $x+h$ et entre x et $x-h$, montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2 h}{2}.$$

b. En déduire que f' est bornée par $\sqrt{2M_0M_2}$.

2.

a. Montrer de même que, si f est de classe $\mathcal{C}^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que f et $f^{(3)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_3, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2}\left(9M_0^2M_3\right)^{1/3}.$$

b. f'' est-elle également bornée sur $\mathbb{R}$?

Dans toute la suite du problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie II -

Soit f une fonction, non constante, de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ respectivement par M_0 et M_n.

1. En utilisant la question 1) du préliminaire ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à la fonction f entre les valeurs x et $x+h$ pour $h=1,2,\ldots,n-1$, montrer que la fonction $f^{(n-1)}$ est, elle aussi, bornée sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire que toutes les dérivées $f^{(k)}$ sont bornées pour $0 \leq k \leq n$. On note alors $M_k = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}\left|f^{(k)}(x)\right|$.

3.

a. Montrer que pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $M_k>0$.

b. En utilisant la suite finie $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ avec $u_k = 2^{k-1}\dfrac{M_k}{M_{k-1}}$, en déduire que pour tout entier k entre 0 et n, on a :

$$M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} M_0^{1-k/n} M_n^{k/n}.$$

Est-ce la meilleure majoration possible ?

Partie III -

E désigne l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x+1)+f(x)=0$ pour tout réel x. On admettra -c'est évident- que ce sont des sous-espaces vectoriels réels de l'espace de toutes les fonctions bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour une fonction f bornée sur $\mathbb{R}$, on note : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$.

1. Démontrer que pour toute fonction f dans E, il existe g unique dans E telle que, en tout point x de $\mathbb{R}$, on a $g'(x)=f(x)$. On note alors $g=T(f)$ ou $g=Tf$ et l'on définit ainsi une application T de E dans E.

2. On considère la fonction φ_1 de E telle que :

$$\varphi_1(x) = x - 1/2 \text{ si } x\in[0,1].$$

On pose $T^0 = Id_E$, $T^1 = T$ et si $k\geq 2$, $T^k = T\circ T^{k-1}$, puis pour $k\geq 1$, $\varphi_k = T^{k-1}(\varphi_1)$.

a. Déterminer et représenter graphiquement sur le segment $[0,2]$ les fonctions φ_k pour $k=1,2,3,4$. Dans toute la suite, on notera $\lambda_k = \|\varphi_k\|_\infty$.

b. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\varphi_k(-x) = (-1)^{k+1}\varphi_k(x) \text{ et } \varphi_k(1-x) = (-1)^k\varphi_k(x).$$

c. Montrer que, pour $k\geq 1$

$$\lambda_{2k} = (-1)^k\varphi_{2k}(1/2) \text{ et } \lambda_{2k-1} = (-1)^k\varphi_{2k-1}(0).$$

3.

a. Soit $f\in E$. Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}, 2Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt + \int_1^x f(t)\,dt.$$

b. En déduire que, pour tout $f\in E$, on a $2\|Tf\|_\infty \leq \|f\|_\infty$.

4. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f de E vérifiant $\|f\|_\infty = 1$ et telle que :

$$\|Tf\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

5. Soit maintenant p un entier naturel non nul et f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x+2p)=f(x)$ pour tout réel x, avec $n\geq 1$.

a. i) Montrer que si f a q zéros distincts sur $[0,2p[$, alors f' a au moins q zéros distincts sur $[0,2p[$.

ii) Montrer que si f et f' ont exactement q zéros distincts sur $[0,2p[$, alors elles n'ont aucun zéro commun.

b. Pour tout réel ν tel que $0<\nu<1$ et tout réel ρ, on définit la fonction $\ell : x\mapsto \varphi_n(x) - \nu f(x+\rho)$.

i) On suppose que $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq 1$. Montrer que $\ell^{(n-1)}$ s'annule au plus $2p$ fois sur $[0,2p[$.

ii) On suppose que $\|f\|_\infty \leq \lambda_n$. Montrer que ℓ s'annule au moins $2p$ fois sur $[0,2p[$.

iii) En déduire que, si $\|f\|_\infty \leq\lambda_n$ et $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq 1$, les $\ell^{(k)}$ pour $k=1,2,\ldots,n-1$ ont exactement $2p$ zéros sur l'intervalle $[0,2p[$.

c. On suppose f non constante.

i) Montrer que l'on peut trouver α et β dans $[0,2p[$ tels que :

$$|f'(\alpha)| = \|f'\|_\infty,\ \varphi_n'(\beta) = \frac{\lambda_{n-1}}{\|f'\|_\infty} f'(\alpha).$$

On pose alors $h(x) = \varphi_n(x) - \dfrac{\lambda_{n-1} f(x+\alpha-\beta)}{\|f'\|_\infty}$.

ii) Ici on suppose $n\geq 3$. Vérifier que $h'(\beta) = h''(\beta) = 0$.

iii) En déduire que :

$$\left(\|f\|_\infty \leq\lambda_n \text{ et } \left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq 1\right) \Rightarrow \left(\|f'\|_\infty \leq \lambda_{n-1}\right).$$

iv) Montrer que cette dernière implication est encore vraie pour $n=2$.

6. Montrer qu'il existe une fonction ω de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ valant 1 sur le segment $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et 0 en dehors du segment $[-1,1]$ (on pourra utiliser la fonction $x \mapsto \int_0^x \sin^n(t)\, dt$ sur le segment $[0,\pi]$).

7. Soit maintenant f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$ et pour laquelle :

$$\|f\|_\infty \leq \lambda_n \text{ et } \left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq 1.$$

Soit α un réel de l'intervalle $[0,1[$. Pour tout entier naturel p non nul, on note f_p la fonction de période $2p$ telle que :

$$f_p(x) = \alpha f(x)\omega\left(x/p\right) \text{ pour } |x| \leq p.$$

a. Montrer que $f_p^{(n)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que l'on a, pour p assez grand,

$$\|f_p\|_\infty \leq \lambda_n \text{ et } \left\|f_p^{(n)}\right\|_\infty \leq 1.$$

b. En déduire que l'on a encore $\|f'\|_\infty \leq \lambda_{n-1}$.

8. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout entier k compris entre 0 et n, $f^{(k)}$ est bornée et que l'on a :

$$\left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leq \|f\|_\infty^{1-k/n} \left\|f^{(n)}\right\|_\infty^{k/n} \frac{\lambda_{n-k}}{\lambda_n^{1-k/n}}.$$

(On pourra utiliser une fonction du type $x \mapsto af(bx)$.)

Partie IV -

1. On définit, pour p entier supérieur ou égal à 2, la fonction ψ_p de E, affine sur $\left[0, \frac{1}{p}\right]$, $\left[\frac{1}{p}, 1-\frac{1}{p}\right]$ et $\left[1-\frac{1}{p}, 1\right]$ et vérifiant :

$$\psi_p(0) = \psi_p(1) = 0,\ \psi_p\left(\frac{1}{p}\right) = \psi_p\left(1-\frac{1}{p}\right) = 1.$$

En utilisant le **III.3.**, montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\lim_{p\to+\infty} \|T^n(\psi_p)\|_\infty = \lambda_n.$$

2. En déduire que l'inégalité du **III.8.** ne peut être améliorée.