À rendre pour le jeudi 23 novembre

DM NORMAL

EXERCICE

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Justifier, sans calcul, que la matrice A est diagonalisable puis déterminer une matrice D diagonale réelle et une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$

2. Déterminer une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, que l'on explicitera, vérifiant $B^2 = A$

3. Déterminer, pour tout entier naturel non nul n, les 9 coefficients de la matrice A^n en utilisant la matrice de passage P

4. Donner le polynôme minimal de la matrice A et en déduire, a l'aide d'une division euclidienne de polynômes, la matrice A^n comme une combinaison linéaire des matrices A.

PROBLÈME

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. Cet entier est quelconque sauf dans la partie I, où il est égal à 2.
On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, $(E_{i,j})$ sa base canonique ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$) et I_n sa matrice unité (tous les coefficients de $E_{i,j}$ sont nuls, sauf celui situé à la i^{e} ligne et à la j^{e} colonne, qui vaut 1).
On note $\mathbb{R}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients réels.
Dans tout le problème, A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.
Pour tout $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $P(A) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k A^k$. L'ensemble des matrices $P(A)$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ est noté $\mathbb{R}[A]$.
On dit que P annule A lorsque $P(A) = 0$, ce qui équivaut à $P(u) = 0$. On appelle polynôme minimal de la matrice A le polynôme minimal de l'endomorphisme u ; c'est donc le polynôme unitaire de plus petit degré qui annule A.
On note ϕ_A l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\phi_A(M) = AM - MA$$

L'objet du problème est d'étudier quelques propriétés des éléments propres de ϕ_A. Les parties I et II étudient la diagonalisabilité de ϕ_A, les parties III et IV en étudient les vecteurs propres.
Les quatre parties sont indépendantes.

Partie I. Étude du cas $n = 2$

Dans toute cette partie, on prendra $n = 2$.

1. Vérifier que l'application ϕ_A est linéaire et que I_2 et A appartiennent à $\operatorname{Ker} \phi_A$.

Dans la suite de cette partie, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Donner la matrice de ϕ_A dans la base $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, on suppose que $\phi_A \neq 0$ (c'est-à-dire que $A \neq \lambda I_2$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$).

3. Donner le polynôme caractéristique de ϕ_A sous forme factorisée (on pourra utiliser la calculatrice).

4. En déduire que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si $(d-a)^2 + 4bc > 0$.

5. Démontrer que ϕ_A est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.

6. **a.** À l'aide des deux questions précédente, écrire une fonction en PYTHON qui prend comme argument une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et qui vous dit si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou non.

b. Écrire une fonction en PYTHON qui prend comme argument une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et qui vous renvoie la fonction ϕ_A (on programmera le produit matriciel).

Partie II. Étude du cas général

On note $c = (c_1, \ldots, c_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

7. On suppose dans cette question que A est diagonalisable.

On note $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u (défini au début du problème) et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, λ_i la valeur propre associée au vecteur e_i. On note alors P la matrice de passage de la base c à la base e et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Enfin, pour tout couple (i,j) d'entiers tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, on pose :

$$B_{i,j} = P E_{i,j} P^{-1}$$

a. Exprimer, pour tout couple (i,j), la matrice $DE_{i,j} - E_{i,j}D$ en fonction de la matrice $E_{i,j}$ et des réels λ_i et λ_j.

b. Démontrer que, pour tout couple (i,j), $B_{i,j}$ est un vecteur propre de ϕ_A.

c. En déduire que ϕ_A est diagonalisable.

8. On suppose dans cette question que ϕ_A est diagonalisable en tant qu'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $(P_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ une base de vecteurs propres de ϕ_A et, pour tout couple (i,j), $\lambda_{i,j}$ la valeur propre associée à $P_{i,j}$.

a. Dans cette question, on considère A comme une matrice à coefficients complexes ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) et ϕ_A comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (défini par $\phi_A(M) = AM - MA$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

i. Justifier que toutes les valeurs propres de ϕ_A sont réelles.

ii. Soit $z \in \mathbb{C}$. Justifier que si z est une valeur propre de A, alors z est aussi une valeur propre de A^T.

iii. Soit $z \in \mathbb{C}$. On suppose que z et $\overline{z}$ sont deux valeurs propres de la matrice A. On considère alors $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($X \neq 0$) et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ ($Y \neq 0$) tels que $AX = zX$ et $A^T Y = \overline{z} Y$.

En calculant $\phi_A\left(XY^T\right)$, démontrer que $z - \overline{z}$ est une valeur propre de ϕ_A.

b. En déduire que la matrice A a au moins une valeur propre réelle.

On note λ une valeur propre réelle de A et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ($X \neq 0$) une matrice colonne telle que $AX = \lambda X$.

c. Démontrer que, pour tout couple (i,j), il existe un réel $\mu_{i,j}$, que l'on exprimera en fonction de λ et $\lambda_{i,j}$, tel que $AP_{i,j}X = \mu_{i,j} P_{i,j} X$.

d. En déduire que A est diagonalisable.

Partie III. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à la valeur propre 0

Soit m le degré du polynôme minimal de A.

9. Démontrer que la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{m-1}\right)$ est une base de $\mathbb{R}[A]$.

10. Vérifier que $\mathbb{R}[A]$ est inclus dans $\operatorname{Ker} \phi_A$ et en déduire une minoration de $\dim \operatorname{Ker} \phi_A$.

11. *Un cas d'égalité*

On suppose que l'endomorphisme u (défini au début du problème) est nilpotent d'indice n (c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$). On considère un vecteur y de $\mathbb{R}^n$ tel que $u^{n-1}(y) \neq 0$ et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose $e_i = u^{n-i}(y)$.

a. Démontrer que la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

b. Soient $B \in \operatorname{Ker} \phi_A$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B.

Démontrer que si $v(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$) alors $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u^{n-i}$.

c. En déduire $\operatorname{Ker} \phi_A$.

12. *Cas où u est diagonalisable*

On suppose que u est diagonalisable. On note $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ $(1 \leq p \leq n)$ les p valeurs propres distinctes de u et, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k. On note m_k la dimension de cet espace propre.

a. Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. Démontrer que $B \in \operatorname{Ker} \phi_A$ si et seulement si, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq p$, $E_u(\lambda_k)$ est stable par v (c'est-à-dire $v\left(E_u(\lambda_k)\right) \subset E_u(\lambda_k)$).

b. En déduire que $B \in \operatorname{Ker} \phi_A$ si et seulement si la matrice de v, dans une base adaptée à la décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme directe des sous-espaces propres de u, a une forme que l'on précisera.

c. Préciser la dimension de $\operatorname{Ker} \phi_A$.

d. Lorsque $n = 7$, donner toutes les valeurs possibles pour cette dimension en envisageant les différentes valeurs possibles de p et des m_k (on ne demande pas de justification).

e. Écrire en PYTHON une fonction qui prend en argument n et revoie toutes les valeurs possibles de d tel que $d = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} m_k^2$, avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} m_k = n$, avec p pouvant varier entre 1 et n et les m_k étant des entiers naturels non nuls.

Partie IV. Étude des vecteurs propres de ϕ_A associés à une valeur propre non nulle

Dans cette partie, α est une valeur propre non nulle de ϕ_A et B un vecteur propre associé ($B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$). On note π_B le polynôme minimal de B et d le degré de π_B.

13. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_A\left(B^k\right) = \alpha k B^k$.

14. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Exprimer $\phi_A(P(B))$ en fonction de α, B et $P'(B)$.

15. Démontrer que le polynôme $X\pi_B' - d\pi_B$ est le polynôme nul (π_B' étant le polynôme dérivé du polynôme minimal de la matrice B).

16. En déduire que $B^d = 0$.

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et n est un entier naturel.

On note $\mathbb{K}_n[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour $n \geq 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la $\mathbb{K}$-algèbre des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$. La matrice unité est notée I_n et on désigne par $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^\top$ la transposée de la matrice A, $\mathrm{rg}(A)$ son rang, $\mathrm{tr}(A)$ sa trace, $\chi_A = \det(XI_n - A)$ son polynôme caractéristique, π_A son polynôme minimal et $\mathrm{sp}(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres dans $\mathbb{K}$.

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ de dimension finie n supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{L}(E)$ est l'algèbre des endomorphismes de E. On note f un endomorphisme de E.

On note $f^0 = \mathrm{Id}_E$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ f^{k+1} = f^k \circ f$.

Si $Q \in \mathbb{K}[X]$ avec $Q(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_m X^m$, $Q(f)$ désigne l'endomorphisme $a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 f + \cdots + a_m f^m$. On note $\mathbb{K}[f]$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes $Q(f)$ quand Q décrit $\mathbb{K}[X]$.

De même, on utilise les notations suivantes, similaires à celles des matrices, pour un endomorphisme f de E : $\mathrm{rg}(f),\ \mathrm{tr}(f),\ \chi_f,\ \pi_f$ et $\mathrm{sp}(f)$.

Enfin, on dit que f est *cyclique* si et seulement s'il existe un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.

I. Matrices compagnons et endomorphismes cycliques

I.A.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que M et $M^\top$ ont même spectre.

2. Montrer que $M^\top$ est diagonalisable si et seulement si M est diagonalisable.

I.B. Matrices compagnons

3. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in\ \mathbb{K}^n$ et $Q(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$. On considère la matrice

$$C_Q = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

a. Écrire en PYTHON une fonction `Comp(L)` qui à une liste $L = [a_0, ..., a_{n-1}]$ renvoie la matrice C_Q correspondante.

b. Déterminer en fonction de Q le polynôme caractéristique de C_Q.

4. Soit λ une valeur propre de $C_Q^\top$. Déterminer la dimension et une base du sous-espace propre associé.

I.C. Endomorphismes cycliques

5. Montrer que f est cyclique si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme C_Q, où Q est un polynôme unitaire de degré n.

6. Soit f un endomorphisme cyclique. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

7. Montrer que si f est cyclique, alors $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre dans $\mathcal{L}(E)$ et le polynôme minimal de f est de degré n.

I.D. Application à une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

8. Soit x un vecteur non nul de E. Montrer qu'il existe un entier p strictement positif tel que la famille
$(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ soit libre et qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ tel que :

$$\alpha_0 x + \alpha_1 f(x) + \cdots + \alpha_{p-1} f^{p-1}(x) + f^p(x) = 0$$

9. Justifier que $\mathrm{Vect}(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est stable par f.

10. Montrer que $X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ divise le polynôme χ_f.

11. Démontrer que $\chi_f(f)$ est l'endomorphisme nul.

II. Etude des endomorphismes cycliques

II.A. Endomorphismes cycliques nilpotents

Dans cette sous-partie, on suppose que f est un endomorphisme nilpotent de E. On note r le plus petit entier naturel tel que $f^r = 0$.

12. Montrer que f est cyclique si et seulement si $r = n$. Préciser alors la matrice compagnon.

II.B.

Dans cette sous partie II.B, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
On suppose que $(\mathrm{Id}, f, f^2, \ldots, f^{n-1})$ est libre et on se propose de montrer que f est cyclique.
On factorise le polynôme caractéristique de f sous la forme

$$\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont les p valeurs propres deux à deux distinctes de f et les m_k de $\mathbb{N}^*$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on pose $F_k = \mathrm{Ker}\,((f - \lambda_k \mathrm{Id}_E)^{m_k})$.

13. Montrer que les sous-espaces vectoriels F_k sont stables et que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.
Pour $k \in [\![1, p]\!]$, on note φ_k l'endomorphisme induit par $f - \lambda_k \mathrm{Id}$ sur le sous-espace vectoriel F_k,

$$\varphi_k \;:\; \begin{cases} F_k \to F_k \\ x \mapsto f(x) - \lambda_k x \end{cases}$$

14. Justifier que φ_k est un endomorphisme nilpotent de F_k.
On note ν_k le plus petit entier naturel tel que $\varphi_k^{\nu_k} = 0$.

15. Pourquoi a-t-on $\nu_k \leqslant \dim(F_k)$?

16. Montrer, avec l'hypothèse proposée, que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\nu_k = m_k$.

17. Expliciter la dimension de F_k pour $k \in [\![1, p]\!]$, puis en déduire l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ de E dans laquelle f a une matrice diagonale par blocs, ces blocs appartenant à $\mathcal{M}_{m_k}(\mathbb{C})$ et étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_k & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_k & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_k & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \lambda_k & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

On pose $x_0 = u_1 + u_{m_1+1} + \cdots + u_{m_1+\cdots+m_{p-1}+1}$.

18. Déterminer les polynômes $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(f)(x_0) = 0$.

19. Justifier que f est cyclique.

III. Endomorphismes commutants, décomposition de Frobenius

On appelle commutant de f l'ensemble $C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / \ f \circ g = g \circ f\}$.

20. Montrer que $C(f)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

III.A. Commutant d'un endomorphisme cyclique

On suppose que f est cyclique et on choisit un vecteur x_0 dans E tel que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.

Soit $g \in C(f)$, un endomorphisme qui commute avec f.

21. Justifier l'existence de $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ de $\mathbb{K}$ tels que

$$g(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k f^k(x_0)$$

22. Montrer alors que $g \in \mathbb{K}[f]$.

23. Établir que $g \in C(f)$ si et seulement s'il existe un polynôme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $g = R(f)$.

III.B. Décomposition de Frobenius

On se propose de démontrer le théorème de décomposition de Frobenius : toute matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs, ces blocs étant des matrices compagnons.

24. Montrer que si la réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_r$ de E est un sous-espace vectoriel, alors l'un des sous-espaces F_i contient tous les autres.

On note d le degré de π_f.

25. Justifier l'existence d'un vecteur x_1 de E tel que $(x_1, f(x_1), \ldots, f^{d-1}(x_1))$ est libre.

Pour tout x non nul de E, on pourra remarquer que $I_x = \{P \in \mathbb{K}[X] / \ P(f)(x) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ engendré par un polynôme unitaire $\pi_{f,x}$ diviseur de π_f et considérer les sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker}(\pi_{f,x}(f))$.

On pose $e_1 = x_1$, $e_2 = f(x_1)$, …, $e_d = f^{d-1}(x_1)$ et $E_1 = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_d)$.

26. Montrer que E_1 est stable par f et que $E_1 = \{P(f)(x_1)/\ P \in \mathbb{K}[X]\}$.

On note ψ_1 l'endomorphisme induit par f sur le sous-espace vectoriel E_1,

$$\psi_1 \ : \ \begin{cases} E_1 \to E_1 \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

27. Justifier que ψ_1 est cyclique.

On complète, si nécessaire, $(e_1, e_2, \ldots, e_d)$ en une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E. Soit Φ la d-ième forme coordonnée qui à tout vecteur x de E associe sa coordonnée suivant e_d. On note $F = \{x \in E/\ \forall i \in \mathbb{N},\ \Phi(f^i(x)) = 0\}$.

28. Montrer que F est stable par f et que E_1 et F sont en somme directe.

Soit Ψ l'application linéaire de E dans $\mathbb{K}^d$ définie, pour tout $x \in E$, par

$$\Psi(x) = (\Phi(f^i(x)))_{0 \leqslant i \leqslant d-1} = (\Phi(x), \Phi(f(x)), \ldots, \Phi(f^{d-1}(x)))$$

29. Montrer que Ψ induit un isomorphisme entre E_1 et $\mathbb{K}^d$.

30. Montrer que $E = E_1 \oplus F$.

31. En déduire qu'il existe r sous-espaces vectoriels de E, notés $E_1, \ldots, E_r$, tous stables par f, tels que :

- $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$;
- pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, l'endomorphisme ψ_i induit par f sur le sous-espace vectoriel E_i est cyclique ;
- si on note P_i le polynôme minimal de ψ_i, alors P_{i+1} divise P_i pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant r-1$.

III.C. Commutant d'un endomorphisme quelconque

32. Montrer que la dimension de $C(f)$ est supérieure ou égale à n.

33. On suppose que f est un endomorphisme tel que l'algèbre $C(f)$ est égale à $\mathbb{K}[f]$. Montrer que f est cyclique.