À rendre pour le samedi 2 décembre

DM NORMAL

PROBLÈME 1

E_0 est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et vérifiant $f(0)=0$.

E_1 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto \left(\dfrac{f(t)}{t}\right)^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

E_2 est l'ensemble des fonctions f appartenant à E_0 et telles que la fonction $t \mapsto (f'(t))^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note

$N_1(f) = \left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 \, dt\right]^{1/2}$ pour $f \in E_1$; $N_2(f) = \left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*} (f'(t))^2 \, dt\right]^{1/2}$ pour $f \in E_2$.

Le but de ce problème est de comparer, d'une part les ensembles E_1 et E_2, d'autre part les fonctions N_1 et N_2.

1. Soit f une fonction quelconque appartenant à E_0 (donc de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0)=0$). On associe à f deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \dfrac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $h(t) = \dfrac{f(t)}{t}$ pour tout $t>0$. On pose $\alpha = f'(0)$.

- ***a.*** Quelle est la limite de $h(t)$ (respectivement de $g(t)$) quand $t \to 0^+$?
- ***b.*** Exprimer $f'(t) - \sqrt{t}g'(t)$ en fonction de $h(t)$ lorsque $t \in \mathbb{R}_+^*$.
- ***c.*** Quelle est la limite de $\sqrt{t}g'(t)$ (respectivement de $g(t) \times g'(t)$) lorsque $t \to 0^+$? (on exprimera les résultats en fonction de $\alpha = f'(0)$).
- ***d.*** Établir, pour $x>0$, la relation :

$$(R) \ : \quad \int_{]0,x]} (f'(t))^2 \, dt = \frac{1}{2}(g(x))^2 + \int_{]0,x]} \left(\sqrt{t}g'(t)\right)^2 \, dt + \frac{1}{4}\int_{]0,x]} (h(t))^2 \, dt$$

(après avoir justifié l'intégrabilité sur $]0,x]$ de chacune des fonctions qui interviennent).

2. **Comparaison de E_1 et E_2.**

- ***a.*** Déduire de la relation (R) l'inclusion $E_2 \subset E_1$.
- ***b.*** Les ensembles E_1 et E_2 sont-ils égaux ? (On pourra considérer la fonction $t \mapsto \sin t$)

3. **Comparaison de N_1 et N_2.**

- ***a.*** Montrer que E_2 est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E_0.
  On admettra sans justification que N_1 et N_2 sont des normes sur l'espace vectoriel E_2.
- ***b.*** Justifier l'inégalité $N_1(f) \le 2N_2(f)$, pour $f \in E_2$.
- ***c.*** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_n par $f_n(t) = e^{-t}\sin(nt)$.
  Vérifier que $f_n \in E_2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et calculer $N_2(f_n)$.
- ***d.*** Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes sur E_2 ?

4. Soit f appartenant à E_2 ; en utilisant la relation (R) montrer que $g(t)$ admet une limite lorsque $t \to +\infty$; quelle est cette limite ?

PROBLÈME 2

Si $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes, à coefficients réels et $\mathcal{M}_p(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$.
Un élément de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ est noté $(a_{i,j})$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$.
Un vecteur de $\mathbb{R}^p$, rapporté à sa base canonique, et sa matrice dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ sont notés par la même lettre.
Si N est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, la suite $(A_n)_n$, où $n \in \mathbb{N}$, d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ admet une limite B dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ si et seulement si la suite réelle $(N(A_n - B))_n$ a pour limite 0.
On note :

$$\lim_{n \to +\infty} A_n = B \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} N(A_n - B) = 0.$$

Les coefficients de la matrice limite B sont les limites des coefficients de la matrice A_n.

Partie I

1. ***a.*** Montrer que l'application, notée $\|.\|$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C}), \|A\| = \max_{1 \leq i \leq p} \sum_{j=1}^{q} |a_{i,j}|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

On adoptera dans la suite du problème cette norme

b. Montrer que : $\forall r \in \mathbb{N}^*, \forall A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C}), \forall B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{C}), \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

c. Écrire en PYTHON une fonction qui prend en argument A est renvoie $\|A\|$. Quel est le nombre d'opérations et comparaisons ?

2. Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on note $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq p}$ les valeurs propres de A et $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq p} |\lambda_i|$.

Montrer que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \forall k \in \mathbb{N}^*, |\lambda_i|^k \leq \left\|A^k\right\|.$$

En déduire que si A est diagonalisable alors :

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = 0 \Leftrightarrow \rho(A) < 1$$

3. $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, $b \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, A inversible.
On considère une méthode de résolution approchée de l'équation $Ax = b$, où b est donné et x est l'inconnue. On décompose la matrice A sous la forme $A = M - N$, où M et N sont deux éléments de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, avec M inversible et $M^{-1}N$ diagonalisable.

a. Montrer que l'équation $Ax = b$ équivaut à $x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$.

On définit une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$, $(x^{(n)})_n$, où $n \in \mathbb{N}$ par :

$$x^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, x^{(n+1)} = M^{-1}Nx^{(n)} + M^{-1}b.$$

b. Exprimer $x^{(n)}$ en fonction de M, N, $x^{(0)}$ et de la solution x de l'équation $Ax = b$.

c. Montrer que la suite $(x^{(n)})_n$ converge vers x si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$.

d. Écrire en PYTHON une fonction qui prend en argument $x^{(0)}, b \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C}), M, N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $n \in \mathbb{N}$ et qui renvoie $x^{(n)}$. On pourra utiliser `np.dot(A,B)` du module `numpy`, qui calcule le produit matricel de deux matrices A et B et `alg.inv(A)` du module `numpy.linalg` qui calcule A^{-1}.

Partie II

On donne la matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

telle que :

$$\begin{cases} \forall i, 1 \leq i \leq p & a_{i,i} = 2; \\ \forall i, 2 \leq i \leq p & a_{i,i-1} = -1; \\ \forall i, 1 \leq i \leq p-1 & a_{i,i+1} = -1 \end{cases}$$

tous les autres coefficients étant nuls.

1. Écrire en PYTHON une fonction qui prend en argument $p \in \mathbb{N}^*$ et renvoie la matrice A ci-dessus.

2. I_p désignant la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, soit $D_p = \det(A - \lambda I_p)$.
Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N},\ p \geq 2,\ D_p = (2-\lambda)\, D_{p-1} - D_{p-2}$.
On prendra $D_0 = 1$ et $D_1 = 2 - \lambda$.

3. Soit x un vecteur propre associé à la valeur propre λ de la matrice A.
Montrer que $|\lambda - 2| \leq 2$ à l'aide de $\|A - 2I_p\|$.

4. On pose $2 - \lambda = 2\cos\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$.
Calculer D_p en fonction de p et θ. Examiner les cas $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.
En déduire que les valeurs propres de A sont les $2 - 2\cos\left(\dfrac{k\pi}{p+1}\right)$, avec $1 \leq k \leq p$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie III

Dans la décomposition $A = M - N$ donnée au **I 3)**, A est la matrice du **II** et l'on pose $M = 2I_p$, d'où $N = 2I_p - A$ où I_p désigne la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Soit $J = M^{-1}N$, $J \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
On reprend la méthode itérative de **I 2)**.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, expliciter la matrice $x^{(n+1)}$ en fonction de la matrice $x^{(n)}$ et de la matrice b. Préciser tous ses éléments.

2. Montrer que $Sp\,(J) = \left\{\cos\left(\dfrac{k\pi}{p+1}\right), 1 \leq k \leq p\right\}$ et calculer $\rho(J)$, ρ ayant été défini au **I 1)**. La suite $(x^{(n)})_n$ est-elle convergente ?

3. Montrer que :

$$1 - \rho(J) \leq \frac{\pi^2}{2p^2}.$$

DM DIFFICILE

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, de dimension finie ou infinie, muni de la norme $\|.\|_E$. On appelle opérateur sur E tout endomorphisme T de E dans E tel que

$$\exists M \geq 0 / \ \forall f \in E, \ \|T(f)\|_E \leq M\|f\|_E \tag{1}$$

On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des opérateurs sur E.

L'objectif de ce problème est d'étudier différents exemples ou classes de tels opérateurs dans le cadre de la dimension infinie.

On appelle respectivement :

(i) spectre de $T \in \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif. On note $\sigma(T)$ l'ensemble de ces réels.

(ii) spectre ponctuel de $T \in \mathcal{L}(E)$ l'ensemble des réels λ tel que $T - \lambda Id_E$ n'est pas injectif. On note $\sigma_p(T)$ l'ensemble de ces réels.

Les quatre parties sont indépendantes.

Partie 1. Un premier exemple d'opérateur.

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$:

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

On note T l'application définie sur E telle que :

$$\forall f \in E, \ \forall x \in [0, 1], \ T(f)(x) = xf\left(\frac{x}{2}\right)$$

a) i. Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.

 ii. Écrire en PYTHON une fonction qui prend en argument une fonction f et renvoie la fonction $T(f)$.

b) Calculer la valeur minimale possible pour la constante M de la relation (1).

c) Déterminer Ker (T) et Im(T).

On se place à présent dans E muni de la norme $\|.\|_2$:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 \, dx}$$

d) Reprendre la question $a)$ i. avec cette nouvelle norme pour E.

e) Reprendre la question $b)$ avec cette nouvelle norme pour E. Pour cela, on pourra considérer la famille $(f_n)_{n\geq 2}$ d'éléments de E telle que :

(i) f_n est affine par morceaux,

(ii) $f_n(0) = f_n(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) = f_n(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^2}) = f_n(1) = 0$ et $f_n(\frac{1}{2}) = 1$.

Partie 2. Un premier exemple de calcul de spectres.

Soit $H = \ell^2(\mathbb{N})$, l'espace vectoriel des suites réelles de carré sommable :

$$\ell^2(\mathbb{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \ \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2 < +\infty\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|^2}$$

On note S, respectivement V, l'application de décalage à gauche : $(Su)_n = u_{n-1}$ si $n \geq 1$ et $(Su)_0 = 0$, respectivement à droite : $(Vu)_n = u_{n+1}$ si $n \geq 0$ dans $H = \ell^2(\mathbb{N})$.

a) Montrer que S et V appartiennent à $\mathcal{L}(H)$.

b) Calculer le spectre ponctuel de S et V.

On se place à présent dans l'espace des suites réelles bornées $F = \ell^\infty(\mathbb{N})$ muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$$

c) Reprendre la question a) pour les applications S et V dans ce nouvel espace F.

d) Reprendre la question b) pour les applications S et V dans F.

e) Calculer le spectre de S et V dans F.

Partie 3. Un second exemple de calcul de spectre ponctuel.

On note K la fonction définie de $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ par la relation suivante :

$$K(s,t) = (1-s)t \;\text{ si }\; 0 \leq t \leq s \leq 1 \;\text{ et }\; K(s,t) = (1-t)s \;\text{ sinon}$$

On note T l'application définie sur $E = C([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_2$ définie en partie 1, par le relation

$$\forall f \in E,\ \forall s \in [0,1],\ T(f)(s) = \int_0^1 K(s,t)f(t)\,dt$$

a) Montrer que $T \in \mathcal{L}(E)$.

b) Soit $f \in E$. En décomposant $T(f)$ en deux intégrales, montrer que $T(f)$ est une fonction C^2 et exprimer $(T(f))'$ puis montrer que $(T(f))'' = -f$.

c) Montrer que T est injectif.

d) Montrer que si $\lambda \in \sigma_p(T)$ et $f \in \operatorname{Ker}(T - \lambda Id)$ alors $f \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ et vérifie l'équation

$$\lambda f'' + f = 0$$

avec les conditions $f(0) = f(1) = 0$.

e) En déduire $\sigma_p(T)$. Calculer les sous-espaces propres associés $E_\lambda = \operatorname{Ker}(T - \lambda Id)$ à chaque élément $\lambda \in \sigma_p(T)$.

Partie 4. Une classe particulière d'opérateurs.

On rappelle qu'un espace préhilbertien H est un espace vectoriel normé dont la norme dérive d'un produit scalaire noté $<.,.>$. On appelle base hilbertienne de H toute famille $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que :
(i) la famille est orthonormale : pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $< b_i, b_j >= 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
(ii) tout élement x de H peut s'écrire $x = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} < x, b_i > b_i$ c'est à dire que

$$\lim_{N\to+\infty} \|x - \sum_{i=0}^{N} < x, b_i > b_i\| = 0$$

a) Montrer que si $B = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H, alors

$$\forall x \in H,\ \|x\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} | < x, b_i > |^2$$

b) Montrer que $H = \ell^2(\mathbb{N})$ muni de la norme $\|.\|_2$ définie dans la partie 2 est un espace préhilbertien pour le produit scalaire

$$< u, v >= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

(on justifiera qu'il s'agit bien d'un produit scalaire) puis déterminer une base hilbertienne de H.

Dans toute la suite, H désigne l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{N})$ muni du produit scalaire précédent.

c) Soit T un opérateur de H. On admettra l'existence et l'unicité d'un opérateur $\tilde{T} \in \mathcal{L}(H)$ tel que

$$\forall (x, y) \in H^2, \ < T(x), y >=< x, \tilde{T}(y) >$$

Soient $B = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ et $C = (c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux bases hilbertiennes de H telles que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 < +\infty$$

Montrer que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|\tilde{T}(c_i)\|^2$$

d) Soit $B = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que la quantité (éventuellement infinie)

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2$$

ne dépend pas de la base B. On note

$$\|T\|_2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \|T(b_i)\|^2$$

et on pose

$$\mathcal{L}^2(H) = \{T \in \mathcal{L}(H), \ \|T\|_2 < +\infty\}$$

e) Montrer que les opérateurs S et V définis dans la partie 2 ne sont pas dans $\mathcal{L}^2(H)$. Donner un exemple d'opérateur non nul dans $\mathcal{L}^2(H)$.

f) Montrer que $\mathcal{L}^2(H)$ possède une structure d'espace vectoriel.

g) Soient L et U dans $\mathcal{L}^2(H)$ et $B = (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H. Montrer que la quantité

$$\sum_{i=0}^{+\infty} < L(b_i), U(b_i) >$$

est finie, indépendante de la base B choisie et définit un produit scalaire sur $\mathcal{L}^2(H)$.

h) On considère L et U deux opérateurs dans $\mathcal{L}(H)$. Montrer que si $L \in \mathcal{L}^2(H)$, alors il en est de même pour UL.

i) Que se passe-t-il pour UL en supposant cette fois $U \in \mathcal{L}^2(H)$?