À rendre pour le mardi 12 décembre

DM NORMAL

PROBLÈME 1

Partie A.

Soit a un réel positif ou nul. On considère les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_0 = a,\ b_0 = 1,\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$ on a

 a. $a_n \geq 0$ et $b_n \geq 0$,

 b. $a_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2$.

2. En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $0 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq a_{n+1} \leq a_n$.

3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \leq a_n - b_n$, puis que, pour tout $n \geq 1$, on a : $|a_n - b_n| \leq \dfrac{1}{2^n}|1-a|$.

4. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite.

5. Écrire en PYTHON une fonction qui prend en argument $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ et renvoie le n-ème terme de (a_n, b_n). Calculer les 100 premiers termes de (a_n) et (b_n), pour $a = 2$. Conjecturer la limite dans ce cas.

Partie B.

Désormais $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent les suites de fonctions définies sur $[0, +\infty[$ en posant

$$a_0(x) = x,\ b_0(x) = 1,\ a_{n+1}(x) = \frac{a_n(x) + b_n(x)}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1}(x) = \sqrt{a_n(x) b_n(x)}$$

1. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f.

2. ***a.*** Déterminer $f(0)$ et $f(1)$.

 b. Montrer que pour tout x on a $\sqrt{x} \leq f(x) \leq \dfrac{1+x}{2}$.

3. Soit $A > 0$ un réel. Montrer que les suites de fonctions $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément sur $[0, A]$ vers f. (On pourra utiliser la question $A.3$).

4. En déduire que la fonction f est continue sur $[0, +\infty[$.

5. Écrire une PYTHON une fonction qui à n renvoie la fonction a_n. Même question pour b_n.

Partie C.

Pour $n \geq 1$ et $x > 0$, on définit la fonction $h_n\ :\ t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(t^2 + a_n(x)^2)(t^2 + b_n(x)^2)}}$.

1. Montrer que, pour tout $t > 0$ et $x > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n(t) = \dfrac{1}{t^2 + f(x)^2}$.

2. Démontrer l'inégalité $0 < h_n(t) \leq \dfrac{1}{t^2 + x}$ où $t > 0$, $x > 0$ et $n \geq 1$.

3. En déduire $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} h_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2f(x)}$ où $x>0$.

PROBLÈME 2

Objectifs : On note F la fonction zeta alternée de Riemann, définie par

$$F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x},$$

et ζ la fonction zeta de Riemann, définie sur $]1,+\infty[$ par

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

Ce problème propose une étude croisée de quelques propriétés de F et ζ.

I. Généralités

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.

2. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définies sur $[0,1[$ par

$$g_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(-t)^k.$$

Déterminer la limite simple g de (g_n) puis, en utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que $F(1)=\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $F(1)$.

3. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ converge normalement sur $[2,+\infty[$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

4. *Dérivabilité de F*

a. Soit $x>0$. Étudier les variations sur $]0,+\infty[$ de la fonction $t\mapsto\frac{\ln t}{t^x}$ et en déduire que la suite $\left(\frac{\ln n}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est monotone à partir d'un certain rang (dépendant de x) que l'on précisera.

b. Pour $n\geq 1$, on pose $f_n : x\mapsto\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.
Si a est un réel strictement positif, démontrer que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge uniformément sur $[a,+\infty[$.
En déduire que F est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

5. *Lien avec ζ*
Calculer, pour $x>1$, $F(x)-\zeta(x)$ en fonction de x et de $\zeta(x)$. En déduire que :

$$F(x)=(1-2^{1-x})\zeta(x).$$

Puis en déduire la limite de ζ en $+\infty$.

II. Calcul de la somme d'une série à l'aide d'une étude de ζ au voisinage de 1

6. *Développement asymptotique en 1*

a. Écrire en fonction de $\ln 2$ et de $F'(1)$ le développement limité à l'ordre 1 et au voisinage de 1 de la fonction F, puis déterminer le développement limité à l'ordre 2 et au voisinage de 1 de la fonction $x \mapsto 1 - 2^{1-x}$.

b. En déduire deux réels a et b, qui s'écrivent éventuellement à l'aide de $\ln 2$ et $F'(1)$, tels que l'on ait, pour x au voisinage de 1^+ :

$$\zeta(x) = \frac{a}{x-1} + b + o(1).$$

7. *Développement asymptotique en 1 (bis)*

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$, où v_n est définie sur $[1, 2]$ par

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

a. Justifier que, pour $n \geq 1$ et $x \in [1, 2]$, on a : $0 \leq v_n(x) \leq \dfrac{1}{n^x} - \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

b. Justifier que, pour $x \in [1, 2]$, la série $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$ converge. On note alors $\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(1)$ (c'est la constante d'Euler).

c. Exprimer, pour $x \in]1, 2]$, la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$ et $1 - x$.

d. Démontrer que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[1, 2]$.

e. En déduire que l'on a, pour x au voisinage de 1^+ : $\zeta(x) = \dfrac{1}{x-1} + \gamma + o(1)$.

8. *Application*

Déduire des résultats précédents une expression, à l'aide de $\ln 2$ et γ, de la somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} \ln n}{n}.$$

III. Produit de Cauchy de la série alternée par elle-même (FACULTATIF)

On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries $\sum_{n\geq 1} a_n$ et $\sum_{n\geq 1} b_n$ est la série $\sum_{n\geq 2} c_n$, où $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k}$. Dans cette partie, on veut déterminer la nature, selon la valeur de x, de la série $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$, produit de Cauchy de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ par elle-même.

Cette étude va illustrer le fait que le produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement une série convergente.

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x un réel strictement positif.

9. *Étude de la convergence*

a. Indiquer sans aucun calcul la nature et la somme, en fonction de F, de la série produit $\sum_{n\geq 2} c_n(x)$ lorsque $x > 1$.

b. Démontrer que, pour $x > 0$, $|c_n(x)| \geq \dfrac{4^x(n-1)}{n^{2x}}$.

En déduire, pour $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$, la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} c_n(x)$.

10. *Cas où $x = 1$*

On suppose, dans cette question 7., que $x = 1$.

a. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{1}{\mathrm{X}(n-\mathrm{X})}$.

En déduire une expression de $c_n(1)$ en fonction de $\dfrac{H_{n-1}}{n}$, où $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ (somme partielle de la série harmonique).

b. Déterminer la monotonie de la suite $\left(\dfrac{H_{n-1}}{n}\right)_{n\geq 2}$.

c. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} c_n(1)$.

DM DIFFICILE

On note $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et on désigne par $C_{2\pi}$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui sont continues et 2π-périodiques.

Si $f \in C_{2\pi}$ on rappelle que ses coefficients de Fourier sont donnés pour $n \in \mathbb{Z}$ par $\widehat{f}(n) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt$.

Partie I - Définition de la fonction x

On considère les deux suites de fonctions $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $]0,\pi[$ par

$$\begin{cases} \forall t \in]0,\pi[,\ x_0(t) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1}(t) = x_n(t) + (-1)^n \dfrac{\sin^2(2^n t)}{2^n \sin^2(t)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \forall t \in]0,\pi[,\ z_0(t) = \dfrac{\cos(t)}{\sin(t)} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1}(t) = -z_n(t)\cos(2^{n+1}t) \end{cases}.$$

1. ***a.*** Déterminer z_n pour tout n de $\mathbb{N}$.

b. Montrer que la suite de fonctions (z_n) converge simplement vers 0. A-t-on convergence uniforme ?

2. ***a.*** Montrer que la suite de fonction (x_n) converge simplement vers $x : t \mapsto 1+\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sin^2(2^n t)}{2^n \sin^2(t)}$.

b. On pose, pour $n \geq 0$, $u_n(t) = \sin^2(t)x_n(t)$. Montrer que la suite (u_n) converge simplement vers une fonction u continue sur $]0,\pi[$. En déduire que la suite (x_n) converge simplement vers une fonction x continue sur $]0,\pi[$.

c. Montrer que la fonction u se prolonge en une fonction paire (que l'on appellera encore u) de $C_{2\pi}$.

d. Montrer que : $\forall t \in]0,\pi[,\ u(t) = \dfrac{1}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\cos(2^n t)}{2^n}$.

3. Écrire en PYTHON la fonction `x(n)`.

Partie II - Etude de quelques propriétés de la fonction x

1. Calculer $x(\frac{\pi}{4})$, $x(\frac{\pi}{3})$,$x(\frac{\pi}{2})$; montrer que $x(\pi - t) = x(t)$ pour $t \in]0,\pi[$.

2. ***a.*** On pose pour $n \geq 1$, $t \in]0,\pi[$,

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k 2^k \sin^2\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

Montrer que, pour $n \geq 1$,

$$\forall t \in]0,\pi[, \quad 2^n u\left(\frac{t}{2^n}\right) = (-1)^n(u(t) + \varphi_n(t)).$$

b. Montrer que la suite (φ_n) converge simplement sur $]0,\pi[$ vers une fonction φ de classe C^1.

3. ***a.*** Montrer que les suites

$$\alpha_n = 2^{-2n}x\left(\frac{\pi}{2^{2n+2}}\right), \quad \beta_n = 2^{-(2n+1)}x\left(\frac{\pi}{2^{2n+3}}\right) \quad \text{sont convergentes :}$$

déterminer leurs limites.

b. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2^{2n}}\right) = -\infty$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2^{2n+1}}\right) = +\infty$ et qu'il existe une suite de nombres $t_n \in]0,\pi[$ convergeant vers 0 telle que $x(t_n) = 0$.

Partie III - Séries de Fourier lacunaires

Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose $D_N(t) = \displaystyle\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}$ et $I_N = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)^4\, dt$.

1. ***a.*** Montrer que : $\forall t \in]-\pi, \pi[\backslash\{0\}, \quad D_N(t) = \dfrac{\sin\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$.

b. Montrer que : $I_N \geq \dfrac{8}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\sin^4\left(N+\frac{1}{2}\right)t}{t^4}\, dt$
et en déduire l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\forall N \geq 0,\ I_N \geq CN^3$.

Dans toute la suite de la Partie III, $a = (a_n)_{n\geq 0}$ **est une suite de nombres complexes telle que** $\displaystyle\sum_{n\geq 0} |a_n| < +\infty$**.**

2. ***a.*** Pour $n \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ on pose $v_n(t) = 2a_n \cos 2^n t$.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction $v \in C_{2\pi}$.

b. Soit $l \in \mathbb{Z}$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, montrer que $\widehat{v_n}(l) = a_n$ si l vaut 2^n ou -2^n et $\widehat{v_n}(l) = 0$ sinon.
En déduire que $\widehat{v}(l) = a_n$, si $l = \pm 2^n$ et $\widehat{v}(l) = 0$ si l n'est pas une puissance de 2.

Désormais v **désigne cette fonction (associée à la suite** a**) et** t_0 **un réel tel que** v **est dérivable en** t_0 **(on suppose l'existence d'un tel** t_0**).**

Si $n_0 \in \mathbb{N}^*$, on définit $H_{n_0}(t) = e^{-i2^{n_0}(t+t_0)}[v(t+t_0) - v(t_0)\cos t - v'(t_0)\sin t]$.

c. Montrer que $H_{n_0} \in C_{2\pi}$ et que H_{n_0} est dérivable en 0. Calculer $H_{n_0}(0)$ et $H'_{n_0}(0)$.

d. Calculer $\widehat{H_{n_0}}(0)$ à l'aide de la suite a et montrer que $\widehat{H_{n_0}}(k) = 0$ si $k \in \mathbb{Z}^* \bigcap [-2^{n_0-1}+1, 2^{n_0}-1]$.

3. On suppose désormais $n_0 \geq 6$. Soit $N = 2^{n_0-4}$ et $g_N(t) = I_N^{-1} D_N(t)^4$.

a. Montrer que pour tout nombre entier j tel que $-4N \leq j \leq 4N$, il existe α_j tel que :

$$\alpha_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ g_N(t) = \sum_{j=-4N}^{4N} \alpha_j e^{ijt}.$$

b. Montrer que : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} H_{n_0}(t) g_N(t)\, dt = 2\pi a_{n_0}$.

4. On pose $K(t) = \left|\dfrac{H_{n_0}(t)}{t}\right|$ si $t \in [-\pi, \pi]\backslash\{0\}$, $K(t) = 0$ si $t = 0$ ou $|t| > \pi$
(noter que la fonction K ne dépend pas de n_0).

a. Montrer que K est bornée sur $\mathbb{R}$. Etudier sa limite en 0.

b. Montrer qu'il existe $C' > 0$ telle que

$$2^{n_0}|a_{n_0}| \leq C' \int_{-\infty}^{+\infty} K\left(\frac{t}{N+\frac{1}{2}}\right) \frac{\sin^4 t}{|t|^3}\, dt.$$

On pourra démontrer au préalable que : $|\sin\theta| \geq \dfrac{2}{\pi}|\theta|$ pour $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

c. Etudier la limite de la suite $(2^n a_n)_{n\geq 0}$.

Partie IV -

Utiliser les résultats des Parties I et III pour montrer que la fonction x définie en Partie I n'est dérivable en aucun point de $]0, \pi[$.