

À rendre pour le vendredi 22 décembre

DM NORMAL

On se propose dans ce problème d'étudier la série dont le terme général u_n est l'inverse du coefficient binomial noté $\binom{2n}{n}$, c'est-à-dire $u_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

1. **a.** Donner la nature de la série de terme général u_n .

Dans la suite on note $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $U_N = \sum_{n=0}^N u_n$.

- b.** À l'aide de PYTHON, calculer U_N pour $N \in \mathbb{N}$ et afficher U_N pour $N \leq 100$. Que peut-on conjecturer ?

2. Une majoration de la somme de la série et de l'erreur $U - U_N$.

- a.** Calculer la somme $\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k}$.

- b.** Pour $1 \leq k \leq n$, montrer que $\binom{2n}{k-1} \leq \binom{2n}{k}$.

- c.** En déduire des deux questions précédentes l'inégalité $4^n \leq (2n+1) \binom{2n}{n}$, puis l'inégalité $u_n \leq \frac{2n+1}{4^n}$.

- d.** Préciser les sommes des séries suivantes, où N est donné, pour $-1 < x < 1$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n ; \quad \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n ; \quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n ; \quad \sum_{n=N+1}^{+\infty} nx^n .$$

- e.** En déduire un majorant de la somme $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, puis de la différence $U - U_N$.

Comment suffit-il de choisir N pour avoir $0 \leq U - U_N < 10^{-3}$?

Afin de calculer la somme U de la série précédente, on introduit l'équation différentielle :

$$x(x-4)y' + (x+2)y = 2. \tag{E}$$

3. Recherche de solutions de (E) développable en série entière :

- a.** On suppose qu'il existe une solution de l'équation s'écrivant sous la forme suivante, avec un rayon de convergence $R > 0$:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n .$$

À quelle condition nécessaire et suffisante sur a_0 et la suite (a_n) cette fonction S est-elle solution de l'équation différentielle (E) sur $] -R, R[$?

b. On considère inversement la suite réelle (a_n) définie par $a_0 = 1$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2(2n - 1)a_n = na_{n-1}.$$

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$, et en déduire que sa somme S est solution de l'équation différentielle (E) sur $] -R, R[$.

c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n$.

4. Résolution de l'équation différentielle (E) sur $]0, 4[$

a. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

b. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{x + 2}{x(x - 4)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 4}.$$

En déduire toutes les solutions de l'équation homogène $x(x - 4)y' + (x + 2)y = 0$ sur $]0, 4[$.

c. On cherche les solutions de (E) sur $]0, 4[$ sous la forme suivante :

$$y = \sqrt{\frac{x}{4 - x}} \frac{k(x)}{x - 4}.$$

Déterminer k' pour que y soit solution de (E) .

En déduire k en posant le changement de variable dans l'intégrale : $t = \sqrt{\frac{4 - x}{x}}$.

d. En déduire que les solutions de (E) sur $]0, 4[$ s'expriment comme suit (avec $C \in \mathbb{R}$) :

$$\forall x \in]0, 4[, y(x) = \frac{4}{4 - x} \left(1 + \sqrt{\frac{x}{4 - x}} \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{x}{4 - x}} + C \sqrt{\frac{x}{4 - x}} \right).$$

5. Expression de la somme $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$

a. Préciser le développement en série entière de la fonction Arctan .

En déduire une suite (b_n) telle que soit réalisée l'égalité suivante pour $0 \leq x < 1$:

$$\sqrt{x} \operatorname{Arctan} \sqrt{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n.$$

En déduire que la fonction $x \mapsto \sqrt{x} \operatorname{Arctan} \sqrt{x}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, +\infty[$.

Préciser la valeur de sa dérivée en 0.

b. En déduire que la solution de (E) obtenue pour $C = 0$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 4[$.
Préciser sa valeur en 0 et celle de sa dérivée.

c. Quelles solutions de (E) sur $]0, 4[$ se prolongent-elles en solutions sur $[0, 4[$?

d. En déduire la somme $S(x)$ sur $[0, 4[$ à l'aide des fonctions usuelles.

e. Déterminer alors la valeur de la somme $U = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

6. Expressions de la somme $V = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$

a. Déterminer l'expression des solutions de (E) sur $] -4, 0[$ (reprendre les méthodes de la partie 4).

b. Quelles solutions de (E) sur $] -4, 0[$ se prolongent-elles en solutions sur $] -4, 0[$?

c. Déterminer alors la valeur de la somme $V = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ (reprendre les méthodes de la partie 5).

On note \mathbf{C} l'ensemble des nombres complexes, \mathbf{N} l'ensemble des entiers naturels, \mathbf{R} l'ensemble des nombres réels, et \mathbf{R}^+ l'ensemble des nombres réels positifs. On note $\Re(z)$ la partie réelle du nombre complexe z .

(H1) On dit que la fonction $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ vérifie l'hypothèse (H1) si elle possède un développement en série entière au voisinage de l'origine, de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.

1 Séries entières

Soit $\sum_{n \in \mathbf{N}} a_n z^n$ une série entière, où z ainsi que les coefficients a_n sont complexes. On pose

$$h(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} a_n z^n \text{ et } H_r(\theta) = h(re^{i\theta}), \text{ où } r = |z| \text{ et } \theta = \text{Arg } z$$

On suppose désormais que la fonction h vérifie l'hypothèse (H1).

Soit $r \in]0, 1[$

1. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on note t_n le nombre de 0 à la fin de l'écriture décimale de n et s_n la somme de ses chiffres. Par exemple $t_{1004270} = 1$ et $s_{1004270} = 14$. On note $T(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} t_n z^n$, $S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n z^n$.

Écrire des fonctions Python renvoyant t_n et s_n .

2. Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_r(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \begin{cases} a_n r^n & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}$ et donner un résultat du même type pour $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{H_r(\theta)} e^{-in\theta} d\theta$.
3. En fonction du signe de n , en déduire les différentes expressions de

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Re(h(re^{i\theta})) e^{-in\theta} d\theta$$

On suppose que, outre (H1), la fonction h vérifie l'hypothèse suivante :

(H2) le coefficient a_0 du développement en série entière de h est réel, positif ou nul.

4. Montrer que

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Re(h(re^{i\theta})) d\theta$$

On pose $a_n = |a_n| e^{i\varphi_n}$, et on choisit $\tau \in]0, 1[$.

5. Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n| \tau^n r^n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Re(h(re^{i\theta})) \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \geq 1} \tau^n (\cos(n\theta + \varphi_n)) \right) d\theta$$

On choisit maintenant $\tau \in]0, 1/3[$

6. Déterminer le signe de $1/2 + \sum_{n > 1} \tau^n (\cos(n\theta + \varphi_n))$. Montrer que

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n| \tau^n r^n \leq \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\Re(h(re^{i\theta}))|$$

(H3) On dit que la fonction $g : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ vérifie l'hypothèse (H3) si, $\forall r \in [0, 1[$, $\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |\Re(g(re^{i\theta}))| \leq 1$.

7. En admettant que h vérifie les hypothèses (H1), (H2) et (H3), montrer que $\sum_{n \in \mathbf{N}} |a_n| |z|^n \leq 1$, dès que $|z| \leq 1/3$.

2 Le rayon de Bohr

On considère maintenant la fonction $f(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} b_n z^n$, vérifiant l'hypothèse **(H1)** ainsi que

(H4) $\forall z \in \mathbf{C}, |z| < 1 \Rightarrow |f(z)| \leq 1$.

8. À l'aide du résultat de la question 7 montrer que

$$\forall z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1/3 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n| |z|^n \leq 1.$$

La valeur $|z| = 1/3$ constitue le rayon de Bohr de la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} b_n z^n$.

On considère maintenant le cas particulier de la fonction f_λ donnée par

$$f_\lambda(z) = (z - \lambda)/(1 - \lambda z)$$

où $\lambda \in \mathbf{R}^+$

9. Sous quelles conditions relatives à λ , la fonction f_λ vérifie-t-elle les hypothèses **(H1)** et **(H4)**?

En admettant que λ vérifie ces conditions, on note $b_n(\lambda)$ les coefficients du

$$\text{développement en série entière de } f_\lambda : f_\lambda(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} b_n(\lambda) z^n.$$

10. Montrer que $\sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n(\lambda)| |z|^n \leq 1$ si et seulement si $|z| \leq \frac{1}{1 + 2\lambda}$.

11. Démontrer que si $|z| \in]1/3, 1[$, alors il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $\sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n(\lambda)| |z|^n > 1$.

12. En déduire que la constante $1/3$ obtenue à la question 8 ne peut être améliorée sans hypothèse supplémentaire sur f .

3 Au-delà de $|z| = 1/3 \dots$

Nous venons de démontrer que, sous les hypothèses **(H1)** et **(H4)** l'estimation de la question 8 est optimale. Dans ce paragraphe on établit une estimation plus générale, valable au-delà du rayon de Bohr $r = 1/3$.

13. Montrer que si f et g vérifient **(H1)**, où

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} b_n z^n \text{ et } g(z) = \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n z^n$$

alors

$$\forall r \in]0, 1[, \sum_{n \in \mathbf{N}} b_n \overline{c_n} r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\theta}) \overline{g(re^{i\theta})} d\theta$$

On pose

$$\|f\| = \left(\sup_{0 \leq r < 1} \sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n|^2 r^{2n} \right)^{1/2}$$

sous réserve que cette dernière quantité soit finie.

L'ensemble des fonctions de $z \in \mathbf{C}$ qui vérifient **(H1)** et **(H4)** et, par souci de simplification, dont les coefficients du développement en série entière sont réels est noté \mathcal{E} .

On suppose désormais que $f \in \mathcal{E}$.

14. En s'aidant de la question 13, montrer que $\|f\| \leq 1$.

On note \mathcal{V}_n l'espace vectoriel des fonctions de la variable complexe z de la forme $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$ où α et β appartiennent à \mathbf{R} .

On note $P_n, n \geq 1$, l'application qui à $g = \sum_{n \in \mathbf{N}} c_n z^n$ vérifiant **(H1)** et dont les coefficients c_n sont réels, fait correspondre la fonction $g_n \in \mathcal{V}_n$ définie par $g_n(z) = c_0 + c_n z^n$.

On note A_f l'application qui à $\psi \in \mathcal{V}_n$ fait correspondre la fonction $f\psi$.

15. Démontrer que pour tout $\psi \in \mathcal{V}_n, \|A_f(\psi)\| \leq \|\psi\|$ et en déduire que $\|P_n \circ A_f(\psi)\| \leq \|\psi\|$.

On note S la bijection de \mathcal{V}_n dans \mathbf{R}^2 , qui à ψ définie par $\psi(z) = \alpha + \beta z^n$

fait correspondre le vecteur $\Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

16. Déterminer la matrice \mathbb{D} de l'application linéaire qui à $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ fait correspondre $S \circ P_n \circ A_f(\psi)$

où $\psi = S^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha + \beta z^n$

On munit \mathbf{R}^2 de la norme euclidienne : $\|\Psi\| = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$, dérivant du produit scalaire $(\Psi | \Theta) = \alpha\gamma + \beta\delta$, où $\Psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $\Theta = \begin{pmatrix} \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$.

17. Montrer que pour tout Ψ , et pour tout $\Theta \in \mathbf{R}^2, (\Psi | \mathbb{D}\Theta) = (\mathbb{D}^T \Psi | \Theta)$

On dit que la matrice \mathbb{A} est positive si et seulement si $(\mathbb{A}\Psi | \Psi) \geq 0$ pour tout $\Psi \in \mathbf{R}^2$.

On note \mathbb{I} la matrice identité.

18. Déduire de la question 15 que $\mathbb{A} = \mathbb{I} - \mathbb{D}^T \mathbb{D}$ est positive (on donne $A = \begin{pmatrix} 1 - b_0^2 - b_n^2 & -b_0 b_n \\ -b_0 b_n & 1 - b_0^2 \end{pmatrix}$).

En déduire que $b_0^2 \leq 1$ et que les valeurs propres de \mathbb{A} sont positives ou nulles.

19. En déduire que $|b_n| \leq 1 - b_0^2$.

Pour $0 \leq r < 1$, on pose

$$M(r) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \left(t + (1 - t^2) \frac{r}{1 - r} \right)$$

20. Montrer que

$$\forall z \in \mathbf{C}, |z| < 1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n z^n| \leq M(|z|)$$

21. Déterminer $M(r)$ pour $r \in [0, 1[$.

On pose

$$m(r) = \min \left(M(r), (1 - r^2)^{-1/2} \right)$$

22. Montrer que

$$\forall \varepsilon \in]0, 1[, \forall z \in \mathbf{C}, |z| < 1 - \varepsilon \Rightarrow \sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n z^n| \leq \left(\sum_{n \in \mathbf{N}} b_n^2 |1 - \varepsilon|^{2n} \right)^{1/2} (1 - |z|^2 / |1 - \varepsilon|^2)^{-1/2}.$$

En déduire à l'aide de la question 14 que

$$\forall z \in \mathbf{C}, |z| < 1 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbf{N}} |b_n| |z|^n \leq m(|z|)$$