1 Rappels de sup sur les fonctions usuelles

1.1 Les fonctions Arcsin, Arccos et Arctan

Définition 1.1.1 (Fonction Arc sinus) *La fonction sinus est continue et strictement croissante sur l'intervalle* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. *Ainsi la fonction* sin *réalise une bijection de* $[-\pi/2,\pi/2]$ *dans* $[-1,1]$ *et donc elle admet donc une fonction réciproque appelée* ***Arc sinus*** *définie de* $[-1;1]$ *dans* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. *Cette fonction est notée* Arcsin.
De plus Arcsin *est continue sur* $[-1,1]$.

Remarque 1.1.1 *Ainsi pour tout* $x\in[-1;1]$, $\operatorname{Arcsin} x$ *est l'unique élément de* $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ *dont le sinus vaut* x.

Définition 1.1.2 (Fonction Arc cosinus) *La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur l'intervalle* $[0;\pi]$. *Elle réalise donc une bijection de* $[0,\pi]$ *dans* $[-1,1]$ *et donc elle admet une fonction réciproque appelée* ***Arc cosinus*** *définie de* $[-1;1]$ *dans* $[0;\pi]$. *Cette fonction est notée* Arccos.
De plus Arccos *est continue sur* $[-1,1]$.

Remarque 1.1.2 *Ainsi, pour tout* $x\in[-1;1]$, $\operatorname{Arccos} x$ *est l'unique élément de* $[0;\pi]$ *dont le cosinus vaut* x.

Définition 1.1.3 (Fonction Arc tangente) *La fonction tangente est continue et strictement croissante sur l'intervalle* $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. *Elle réalise donc une bijection de* $]-\pi/2,\pi/2[$ *dans* $\mathbb{R}$ *et donc elle admet une fonction réciproque appelée* ***Arc tangente*** *définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$. *Cette fonction est notée* Arctan.

Remarque 1.1.3 *Ainsi, pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $\operatorname{Arctan} x$ *est l'unique élément de* $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ *dont la tangente vaut* x.

Proposition 1.1.1 (Limites de Arctan) *On a :* $\lim_{x\to-\infty}\operatorname{Arctan}(x)=-\frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to+\infty}\operatorname{Arctan}(x)=\frac{\pi}{2}$

Proposition 1.1.2 (Imparité) *Les fonctions* Arcsin *et* Arctan *sont impaires.*

Remarque 1.1.4 Arccos *n'est ni paire ni impaire.*

Proposition 1.1.3 (Dérivée de ces fonctions) *Les fonctions Arc sinus et Arc cosinus sont dérivables sur* $]-1;1[$ *et pour tout* $y\in]-1;1[$,

$$\operatorname{Arcsin}'(y) = \qquad\qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arccos}'(y) =$$

La fonction Arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ *et pour tout* $y\in\mathbb{R}$,

$$\operatorname{Arctan}'(y) =$$

Exemple 1.1.1 *1. (a) Montrer que :* $\forall x\in[-1,1],\ \cos(\operatorname{Arcsin} x)=\sqrt{1-x^2}$.
(b) Résoudre (E) : $\operatorname{Arccos}(x)=\operatorname{Arcsin}(2x)$.

2. *Montrer que pour tout* $x \in [-1;1]$*, on a :* $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \dfrac{\pi}{2}$.

3. ***(Polynômes de Tchebychev)*** *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on pose :* $\forall x \in [-1,1],\ T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos}(x))$.
   (a) *Montrer que :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1,1],\ T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$.
   (b) *En déduire que* T_n *est une fonction polynomiale, dont on précisera le degré et le coefficient dominant.*
   (c) *Soit* $n \in \mathbb{N}$*. Montrer que :* $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$.
   (d) *Montrer que* T_n *est le seul polynôme vérifiant la relation précédente.*

1.2 Les fonctions ch, sh et th

Définition 1.2.1 (Cosinus, Sinus, Tangente hyperboliques) *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique par*

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \ \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}.$$

Proposition 1.2.1 (Formule de trigonométrie hyperbolique) *On a :* $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$.

Proposition 1.2.2 (Parité de ch, sh et th) *La fonction ch est paire et les fonctions sh et th sont impaires.*

Proposition 1.2.3 (Dérivation de ch, sh et th) *Les dérivées des fonctions hyperboliques sont données par*

$$\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}, \operatorname{ch}' = \operatorname{sh}, \ \operatorname{th}' = 1 - \operatorname{th}^2 = \frac{1}{\operatorname{ch}^2}.$$

Proposition 1.2.4 (Limites de ch, sh et th en $\pm\infty$) $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sh}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{ch}(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{sh}(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{th}(x) = -1$.

Corollaire 1.2.1 (Monotonie de ch, sh et th) *La fonction sh est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
La fonction ch est strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $[1;+\infty[$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1;+\infty[$.
La fonction th est strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.

Exemple 1.2.1 *Déterminer* sh^{-1}.

1.3 Quelques inégalités

Proposition 1.3.1 (Inégalités) *On a :*

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \ |\sin(x)| \leq |x|$.
2. $\forall x \in]-1,+\infty[, \ \ln(1+x) \leq x$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \ \exp(x) \geq 1 + x$.

2 Rappels de sup sur les théorèmes de continuité

Théorème 2.0.1 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tout a, b appartenant à I, avec $a < b$ et tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a;b]$ tel que $y = f(c)$.*

Corollaire 2.0.1 (Image d'un intervalle) *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Exemple 2.0.1 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f| = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.*

Corollaire 2.0.2 (Annulation d'une fonction continue) *On suppose que f est dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et qu'il existe $(a, b) \in I^2$ tel que l'on ait : $a < b$ et $f(a)f(b) \leq 0$. Alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a; b]$. Ainsi si f change de signe, alors elle s'annule au moins une fois.*

Corollaire 2.0.3 (Signe d'une fonction continue) *On suppose que f est dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et qu'elle ne s'annule jamais sur I. Alors f est de signe constant sur I*

Exemple 2.0.2 *Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ continue. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Un tel x_0* ***s'appelle point fixe de*** *f.*

Théorème 2.0.2 (Théorème de la bijection) *On suppose que f est dans $\mathcal{C}(I)$ et elle est strictement monotone. Soit $J = f(I)$ qui est donc un intervalle. Alors :*

1. *f est une bijection de I sur J.*
2. *$f^{-1} : J \to I$ est une fonction continue sur J et de même monotonie.*

Proposition 2.0.1 (Fonctions Injectives et monotonie) *Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.*

Exemple 2.0.3 *Déterminer toutes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) - f(y)| = |x - y|$.*

3 Rappels de sup sur les théorèmes de dérivation

3.0.1 Dérivation de la réciproque

Proposition 3.0.1 (Dérivation de la réciproque) *On suppose f continue et strictement monotone et on note $J = f(I)$ (qui est un intervalle). Ainsi f réalise une bijection de I dans J.*

1. *On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a)$ est non nul. Alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ (et $a = f^{-1}(b)$) et on a : $(f^{-1})'(b) =$*

2. *Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule jamais sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et on a :* $(f^{-1})' =$

3. *Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I et que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} existe et est définie sur l'intervalle $J = f(I)$ et f^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^n$.*

Exemple 3.0.1 *Montrer que $f : x \mapsto xe^{x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$ admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner le $DL_5(0)$ de f^{-1}.*

3.0.2 Théorème de Rolle

Théorème 3.0.1 (Théorème de Rolle) *Soit $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que : $f'(c) = 0$.*

Exemple 3.0.2 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ s'annulant en $k+1$ points $a_0 < a_1 < ... < a_k$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(k)}(c) = 0$.*

3.0.3 Inégalité et égalité des accroissements finis

Théorème 3.0.2 (Égalité des accroissements finis (EAF)) ***(Énoncé CCP 4)*** *Soit $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe c dans $]a,b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.*

Exemple 3.0.3 *Calculer* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, *avec* $f : x \mapsto \left(\sin\left(\frac{x+1}{x}\right) - \sin\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) x$.

Théorème 3.0.3 (Inégalité des accroissements finis (IAF)) *Soit* $f \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ *continue sur* $[a,b]$ *et dérivable sur* $]a,b[$. *On suppose qu'il existe des réels* m *et* M *tels que sur* $]a,b[$, *on ait :* $m \leq f' \leq M$. *Alors on a :*

$$\leq f(b) - f(a) \leq$$

Corollaire 3.0.1 (Inégalité des accroissements finis (IAF)) *Soit* I *un intervalle et* $f \in \mathcal{F}([I,\mathbb{R})$ *dérivable sur* I. *On suppose qu'il existe* k *dans* $\mathbb{R}_+$ *tel que :* $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq k$. *Alors* f *est* k-*lipschitzienne :* $\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$.

Exemple 3.0.4

1. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On pose* $g_n : t \mapsto e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. *En utilisant cette fonction, montrer que :* $\forall t \in [0,1],\ \left|e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right| \leq \frac{1}{n}$.

2. *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a,b]$, *alors* f *est lipschitzienne sur* $[a,b]$.

3.0.4 Théorème de la limite de la dérivée

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

Définition 3.0.1 (Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$) *Soit* $f : I \to \mathbb{C}$ *une fonction. On dit que* f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *sur* I *si* $f^{(n)}$ *existe et est continue sur* I.
On dit que f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* I *si elle est indéfiniment dérivable sur* I, *c'est-à-dire que pour tout pour tout* n *de* $\mathbb{N}$, f *est* n *fois dérivable.*

Théorème 3.0.4 (Théorème de la limite de la dérivée)

1. *Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors : $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$.*
2. ***(Démo CCP 4)*** *Soit $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, continue sur I et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I\setminus\{a\}$. On suppose que : $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.*

Démonstration : Nous démontrerons cela : soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a,b[$. On suppose que f est continue sur $[a,b]$, qu'elle est dérivable sur $]a, x_0[$ et $]b, x_0[$ et que $\lim\limits_{x_0} f'$ existe et est réelle. Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x_0} f'$.

On pose $\lim\limits_{x_0} f' = \ell$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x_0 + h$ soit dans $[a,b]$. f est bien continue entre x_0 et $x_0 + h$, dérivable strictement entre x_0 et $x_0 + h$. Grâce aux égalités des accroisements finis, il existe c_h strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que : $f(x_0+h) - f(x_0) = f'(c_h)(x_0+h-h) = f'(c_h)h$.
Quand h tend vers 0, par encadrement c_h tend vers x_0, donc :
$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} f'(c_h) = \lim\limits_{x_0} f' = \ell$.

Exemple 3.0.5

1. ***(CCP 4)*** *ATTENTION, la réciproque est fausse : f dérivable en x_0 n'implique pas que f' a une limite finie en x_0. Voici un contrexemple : $g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$.*

2. *Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \ln\left(\frac{t^3+2}{t^3+1}\right) dt$.*
   (a) *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.*
   (b) *On pose $g : x \mapsto f(\sqrt{x})$. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?*
   (c) *On pose $h : x \mapsto f\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Cette fonction se prolonge-t-elle en une fonction dérivable en 0 ?*

3. *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :* $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.

   (a) *Montrer pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que :* $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$.

   (b) *Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :* $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(0) = 0$.

3.0.5 Complément : application aux suites récurrentes avec une fonction contractante

Dans ce paragraphe, on considère $f : I \to I$ une fonction et on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

Le but de ce paragraphe est l'étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition 3.0.2 (Fonction contractante) *On dit que $f : I \to I$ est contractante, si elle est k-lipschitzienne ($\forall x, y \in I,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$), avec k dans $[0; 1[$.*

Proposition 3.0.2 (Convergence des suites récurrente dans le cas contractant) *Soit $f : I \to I$ dérivable. On suppose qu'il existe $k \in [0; 1[$ tel que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq k$.*
On suppose qu'il existe $\alpha \in I$ tel que l'on ait : $f(\alpha) = \alpha$. Alors f est contractante et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$$

et donc la suite (u_n) converge vers α.

Démonstration : À refaire à chaque fois : grâce aux IAF, f est k-lipschitzienne. Montrons par récurrence le deuxième résultat.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $\mathcal{P}(n) : |u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.
$\mathcal{P}(0) : |u_0 - \alpha| = k^0 |u_0 - \alpha|$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Comme f est k-lipschitzienne, alors :
$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)| \leq k|u_n - \alpha| \leq k^{n+1}|u_0 - \alpha|$, grâce à $\mathcal{P}(n)$. Ainsi on a $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

Remarque 3.0.1

1. *Il faut avoir absolument $k < 1$, avec l'inégalité stricte.*
2. *ATTENTION ! si on a : $\forall x \in I, |f'(x)| < 1$ cela n'implique pas : $\exists k \in [0, 1[,\ \forall x \in I, |f'(x)| \leq k$. Par exemple si $f'(x) = x/2$ sur $I = [0, 2[$, on a bien $\forall x \in I, |f'(x)| < 1$, sans avoir : $\exists k \in [0, 1[,\ \forall x \in I, |f'(x)| \leq k$.*
3. *On peut aussi démontrer que f admet au plus point fixe. En effet si β est un autre point fixe, alors comme f est contractante on a : $|\alpha - \beta| \leq k|\alpha - \beta|$ et donc on a : $(1 - k)|\alpha - \beta| \leq 0$. Comme $(1 - k)$ est strictement positif, alors $|\alpha - \beta|$ est négatif et donc nul. Ainsi on a : $\alpha = \beta$. Donc si vous trouvez un point fixe de f, c'est le seul .*
4. *Pour trouver un point fixe d'une fonction f contractante, nous nous fixons un u_0 de son ensemble de définition, puis nous étudions la suite définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le seul point fixe de la fonction f.*

Ainsi l'étude se déroule de la façon suivante :

- Vérifier que : $f(I) \subset I$, pour que la suite soit bien définie.
- Dériver f et majorer $|f'|$ par un réel dans $[0; 1[$ sur un intervalle qui contient tous les u_n à partir d'un certain rang.
- Trouver le point fixe de f.
- Conclure à l'aide de la proposition précédente que l'on aura redémontrée.

Exemple 3.0.6 *Montrer que le polynôme $X^3 + 2X - 2$ admet une unique racine x_0 réelle qui de plus est dans $[0, 1]$. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2}{u_n^2 + 2}$. Montrer que (u_n) converge et en déduire une approximation rationnelle de x_0 à 10^{-2} près.*

4 Fonctions convexes

4.1 Fonctions convexes d'une variable réelle

Définition 4.1.1 (Fonctions convexes et concaves) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

1. *On dit que f est convexe lorsque :*

2. *Lorsque $-f$ est convexe, on dit que f est concave, autrement dit :*

Proposition 4.1.1 (Inégalité de Jensen) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ et $x_1, ..., x_n \in I$. Alors :*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Remarque 4.1.1 *Si f est concave, alors dans les mêmes conditions que le corollaire précédent, on a :* $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Exemple 4.1.1

1. *La fonction* $\exp$ *est convexe sur* $\mathbb{R}$. *La fonction* $\ln$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et la fonction* $\sin$ *définie sur* $[0, \pi/2]$ *sont concaves.*
2. *p et q sont deux réels strictement supérieurs à 1 vérifiant* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 1.*
   (a) *Soient x et y deux réels positifs. Montrer que :* $xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q$.
   (b) *Soient a_1, ..., a_N, b_1, ..., b_N des réels. Montrer l'inégalité de Hölder :*
   $$\left|\sum_{n=1}^{N} a_n b_n\right| \leq \left(\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$
   On pourra d'abord envisager le cas où $\sum_{n=1}^{N} |a_n|^p = \sum_{n=1}^{N} |b_n|^q = 1$.
3. *Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue. Montrer que :* $\varphi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)dt\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(g(t))dt$.

Proposition 4.1.2 (Arc sous la corde) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soient M_1 et M_2 sur $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de f. Tous les points de l'arc « M_1M_2 » de $\mathcal{C}_f$, sont situés sous la corde $[M_1M_2]$.*
Si f est concave, alors les points de l'arc « M_1M_2 » de $\mathcal{C}_f$, sont situés au dessus la corde $[M_1M_2]$.

Exemple 4.1.2 *Montrer que :* $\forall x \in [0, \pi/2],\ \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$.

Proposition 4.1.3 (Caractérisation de la convexité par le taux d'accroissement) *Une fonction f est convexe sur I si et seulement si les taux d'accroissements sont croissants :*

$$\forall (x,y,z) \in I^3, \quad x < y < z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Remarque 4.1.2

1. *(IMPORTANTE) Soient f une fonction convexe définie sur un intervalle I et $a \in I$. Alors $\varphi_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.*
2. *Soient f une fonction concave définie sur un intervalle I et $a \in I$. Alors $\varphi_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est décroissante sur $I \setminus \{a\}$.*

Exemple 4.1.3 *Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe telle que $\lim\limits_{+\infty} f = 0$. Montrer que f est positive.*

4.2 Fonctions convexes et dérivablité

Proposition 4.2.1 (Cararactérisation de la convexité par la croissance de la dérivée) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors : f est convexe si et seulement si f' est*

Remarque 4.2.1 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors : f est concave si et seulement si f' est décroissante.*

Proposition 4.2.2 (Caractérisation de la convexité par la position courbe/tangente) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors : f est convexe sur I si et seulement si son graphe est situé au-dessus de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire :*

$$\forall a \in \mathring{I}, \forall x \in I, \quad f(x) \ \geq \ f(a) + (x-a)f'(a).$$

Remarque 4.2.2 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur l'intérieur de I. Alors : f est concave sur I si et seulement si son graphe est situé en-dessous de chacune de ses tangentes, c'est-à-dire :*

$$\forall a \in \mathring{I}, \forall x \in I, \quad f(x) \ \leq \ f(a) + (x-a)f'(a).$$

Proposition 4.2.3 (Caractérisation de la convexité par la positivité de la dérivée seconde) *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors :*

1. *La fonction f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.*
2. *La fonction f est concave sur I si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I.*

Exemple 4.2.1 *Soit f deux fois dérivable sur $[a, b]$ à valeurs réelles telle que $f(a) = f(b) = 0$. On pose $M = \max\limits_{[a,b]} |f''|$. Soient $g : x \mapsto f(x) - M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$ et $h : x \mapsto f(x) + M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$.*

1. *Montrer que g est convexe et que h est concave.*
2. *En déduire que : $\forall x \in [a; b], \ |f(x)| \leq M\dfrac{(x-a)(b-x)}{2}$.*