Sauf mention contraire, tout est à savoir.

Rappels sur les suites numériques

- Définitions des limites ; signe et limite d'une suite.
- Suites extraites, théorème de Bozano-Weistrass, valeur d'adhérence.
- Relation d'ordre et limite ; théorème d'encadrement ; limite de suites monotones ; suites adjacentes.
- Suites $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f croissante.
- Suites classiques : géométriques+ somme, arithmétiques+somme, arithmético-géométriques, suites récurrentes doubles.

Séries numériques

Généralités

- Définition des sommes partielles et des restes ; linéarité de la somme en cas de convergence ; espace vectoriel des suites associées à des série convergentes ; pour une série complexe, équivalence entre convergence des séries parties réelles et imaginaires de la suite associée et convergence de la série.
- si une série converge, alors son terme général tend vers 0 ; divergence grossière.
- Séries géométriques ; expression des sommes partielles et du reste ; séries téléscopiques.
- Absolue convergence ; elle implique la convergence ; inégalité triangulaire.

Séries à termes positifs

- Comparaison série et intégrale (s'aider d'un dessin) ; permet de trouver la nature de certaines séries ou d'avoir des équivalents des sommes partielles ou des restes ; série de Riemann.
- Comparaison des séries à termes positifs, $\leq,\ o,\ O, \sim$;

Sommation des relations de comparaison

- Sommation des $o, O, \sim$ pour les sommes partielles en cas de divergence et des restes en cas de convergence.
- Application : lemme de Cesàro.

Intégrales et séries

- Comparaison série et intégrale (s'aider d'un dessin) ; permet de trouver la nature de certaines séries ou d'avoir des équivalents des sommes partielles ou des restes ; série de Riemann.
- Utilisation de la relation de Chasles. Application : $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ ne converge pas absolument.

Quelques critères de convergence

- Règle de D'alembert.
- Séries alternées, théorème spécial des séries alternées ; majoration du reste, signe de la somme et du reste.

Sommabilité

Les familles sommables $(a_i)_{i\in I}$ sont définies avec I un ensemble quelconque.

Familles positives

- Définition d'une famille sommable positive, somme. Si $\sum_{i\in I} a_i$ n'est pas sommable, on écrira que $\sum_{i\in I} a_i = +\infty$.
- Sommation par paquets, permutation des termes et théorème de Fubini toujours vrais dans le cas positif en admettant le fait de pouvoir écrire des relations dans dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Familles complexes

- Définition d'une famille sommable, somme.
- Lien entre la sommabilité et la convergence absolue.
- Invariance par permutation des termes pour une famille sommable.
- Théorème de sommation par paquets.
- Théorème de Fubini.
- Produit de Cauchy.

À SAVOIR MONTRER

- CCINP 5
- CCINP 6
- CCINP 46
- CCINP 55
- Soit $0 < \alpha < 1$. Donner un équivalent de $S_p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^\alpha}$ quand p tend vers $+\infty$. Même chose avec $R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, avec $\alpha > 1$. Les encadrements seront à prouver soigneusement.