1 Rappels de sup sur les suites

1.1 Limite d'une suite

Définition 1.1.1 (Limite d'une suite) 1. *Soit (x_n) une suite de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et l un nombre complexe. On dit que la suite (x_n) converge vers l si*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ |x_n - l| \leq \varepsilon.$$

2. *Soit (x_n) une suite de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que la suite (x_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si*

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^* (\text{ resp. } \forall A \in \mathbb{R}_-^*), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N,\ x_n \geq A\ (\text{resp. } x_n \leq A).$$

Proposition 1.1.1 (Suites convergentes et suites bornées) *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 1.1.2 (Convergence des suites complexes) *Soit (z_n) une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Soit $l = \alpha + i\beta$, avec $\alpha = Re(l)$ et $\beta = Im(l)$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose : $z_n = x_n + iy_n$, avec $x_n = Re(z_n)$ et $y_n = Im(z_n)$. On a :*

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha \ \ ET \lim_{n\to+\infty} y_n = \beta.$$

Corollaire 1.1.1 (Signe de deux suites équivalentes) *Deux suites réelles équivalentes sont de même signe à partir d'un certain rang.*

1.2 Suites extraites

Proposition 1.2.1 (Convergence des suites extraites) *Soit (u_n) une suite complexe ayant pour limite ℓ. Toute suite extraite (c'est-à-dire de la forme $(u_{\phi(n)})$ avec $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) converge vers la même limite.*

Proposition 1.2.2 (Suites extraites d'indice pair et impair) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Si on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l$, alors la suite (u_n) admet une limite et : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.*

Théorème 1.2.1 (Bolzano-Weierstrass) *De toute suite complexe bornée, on peut extraire une suite convergente.*

Définition 1.2.1 (Valeur d'adhérence) *Soit (u_n) une suite de $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Soit $x \in \mathbb{K}$. On dit que x est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si x est limite d'une suite extraite de (u_n).*

1.3 Relations d'ordre et convergence

Proposition 1.3.1 (Relation d'ordre et limite) 1. *Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang N, on ait : $\forall n \geq N,\ x_n \leq y_n$.*

   (a) *Si on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = l'$, alors on a : $l \leq l'$.*

   (b) *Si on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.*

   (c) *Si on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = -\infty$, alors on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.*

2. *Si (x_n) est une suite complexe et (y_n) une suite à valeurs positives telles qu'à partir d'un certain rang N, on ait : $\forall n \geq N,\ |x_n| \leq y_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.*

Proposition 1.3.2 (Théorème des gendarmes ou d'encadrement) *Soient (x_n), (y_n) et (z_n) trois suites réelles telles que $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} z_n = l$. Si à partir d'un certain rang N, on a :*
$\forall n \geq N,\ x_n \leq y_n \leq z_n$, alors la suite (y_n) converge et $\lim_{n\to+\infty} y_n = l$.

Proposition 1.3.3 (Suites monotones et limites) *1. Soit (x_n) une suite réelle croissante.*
- *Si elle est majorée, alors elle est convergente.*
- *Si elle n'est pas majorée, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$.*

2. Soit (x_n) une suite réelle décroissante.
- *Si elle est minorée, alors elle est convergente.*
- *Si elle n'est pas minorée, alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = -\infty$.*

Ainsi, une suite monotone et bornée, converge.

Définition 1.3.1 (Suites adjacentes) *Soient (x_n) et (y_n) deux suites. On dit que ces suites sont **adjacentes** si :*

1. *(x_n) et (y_n) sont monotones et de monotonie différente.*
2. *$\lim_{n\to+\infty} (y_n - x_n) = 0$.*

Proposition 1.3.4 (Convergence de suites adjacentes) *Deux suites adjacentes (x_n) et (y_n) sont convergentes et ont la même limite.*

1.4 Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec f croissante

Voici la méthode de recherche d'une limite d'une telle suite :

- On commence par bien vérifier que f est croissante et $f(I) \subset I$.
- On montre ensuite par récurrence la monotonie de la suite.
  — Si $u_0 \leq u_1$, on montre que (u_n) est croissante.
  — Si $u_0 \geq u_1$, on montre que la suite est décroissante.
  Si on vous donne u_0, il n'y a plus qu'à calculer u_1.
  Par contre si on vous demande de discuter la limite de la suite en fonction de u_0, il faut connaître le signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$, ce qui revient à étudier le signe de $f(x) - x$.
- Maintenant que la suite (u_n) est monotone, on sait que cette suite admet une limite (finie ou infinie).
  Si (u_n) converge vers ℓ, alors en passant à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$, par continuité de f, on a : $\ell = f(\ell)$. On dit que ℓ est un point fixe de f. Pour les trouver il suffit de voir quand $f(x) - x$ s'annule.
  Si (u_n) reste dans un intervalle borné ou si I est borné, alors cette limite est finie (on utilise le théorème de la limite monotone).
  Pour trouver la limite, il faut effectuer une étude au cas par cas. En général on arrive à conclure à l'aide de la monotonie et de la position de (u_n) par rapport aux points fixes (on peut éventuellement prouver par récurrence que u_n reste toujours entre les mêmes points fixes).

Exemple 1.4.1 *Étude de la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \operatorname{Arctan}(u_n)$.*

1.5 Suites classiques

1.5.1 Suites arithmétiques

Définition 1.5.1 (Suites arithmétiques) *Soit $r \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite **arithmétique de raison** r si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r.$$

Remarque 1.5.1 $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$.

1.5.2 Suites géométriques

Définition 1.5.2 (Suites géométriques) *Soit $q \in \mathbb{C}^*$. Une suite (u_n) est dite **géométrique de raison** q si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = qu_n.$$

Remarque 1.5.2 $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n u_0.$

Proposition 1.5.1 (Convergence des suites géométriques) *Soit $q \in \mathbb{R}^*$. On a :*

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < q < 1 \\ \text{pas de limite} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}.$$

Proposition 1.5.2 (Somme des termes d'une suite géométrique) *Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k = \begin{cases} \dfrac{1-a^n}{1-a} & \text{si } \ a \neq 1 \\ n & \text{si } \ a = 1 \end{cases}$$

1.5.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 1.5.3 (Suites arithmético-géométriques) *Soient $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{C}$. Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** si*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b.$$

Méthode pour trouver toutes les suites arithmético-géométriques vérifiant la relation précédente :

1. Trouver les suites constantes $(\lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant cette dernière relation. On doit avoir $\lambda = a\lambda + b$ et on trouve donc $\lambda = \dfrac{b}{1-a}$.
2. Trouver toutes les autres suites en se ramenant à l'étude d'une suite géométrique : on montre que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - \lambda = a(u_n - \lambda)$ en soustrayant les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & au_n + b \\ \lambda & = & a\lambda + b \end{cases}$$

Ensuite on peut écrire : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - \lambda = a^n(u_0 - \lambda)$ et donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda + a^n(u_0 - \lambda)$.

1.5.4 Suites récurrentes linéaires homogènes d'ordre deux à coefficients constants

Cas complexe Soit $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Soit (u_n) une suite telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n.$$

On appelle (E) l'équation caractéristique : $r^2 - ar - b = 0$ (qui est à rapprocher de la relation $u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n = 0$) et on appelle Δ son discriminant.

Proposition 1.5.3 (Suites récurrentes doubles complexes) *Soient r_1 et r_2 les deux solutions complexes (éventuellement confondues de (E)).*
- *Si $\Delta \neq 0$, soit $r_1 \neq r_2$, alors : $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.*
- *Si $\Delta = 0$, soit $r_1 = r_2 = r$, alors : $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 r^n + \lambda_2 n r^n$.*

Corollaire 1.5.1 (Suites récurrentes doubles réelles) *On suppose maintenant (a, b) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ et u_0 et u_1 réels.*
- *Si $\Delta > 0$, soit r_1, r_2 les deux solutions réelles distinctes, alors :*
$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n$.

- *Si $\Delta = 0$, soit r la solution double, alors :* $\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda_1 r^n + \lambda_2 n r^n$.
- *Si $\Delta < 0$, soit r_1 et r_2 les deux solutions complexes distinctes, avec $r_2 = \overline{r_1}$. On pose $r_1 = \rho e^{i\theta}$ avec ρ dans $\mathbb{R}_+^*$ et θ dans $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. On a donc :*

$$\exists(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n(\lambda_1 \cos(n\theta) + \lambda_2 \sin(n\theta)).$$

ou

$$\exists(\alpha, \theta_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \alpha \cos(n\theta - \theta_0).$$

2 Séries numériques

Dans ce paragraphe $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Définitions et proriétés

Définition 2.1.1 (Série) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit la* **somme partielle de rang** p

$$S_p = \sum_{n=0}^{p} u_n.$$

On appelle alors **série de terme général** u_n*, notée* $\sum u_n$*, la suite des sommes partielles* $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

Définition 2.1.2 (Série convergente) *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que la série $\sum u_n$* **converge** *quand la suite de ses sommes partielles $(S_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.*
On appelle alors **somme de la série** *la limite des sommes partielles et on note :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty} S_p = \lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{p} u_n.$$

Dans le cas contraire, on dit que la série **diverge**.

Définition 2.1.3 (Reste) *Soit $\sum u_n$ une série convergente. Pour tout entier p, on appelle* **reste d'ordre** p *:*

$$R_p = \sum_{k=p+1}^{+\infty} u_k.$$

Proposition 2.1.1 (Lien entre somme et reste) *Soit $\sum u_n$ une série convergente de somme S. Si on note S_p et R_p la somme partielle et le reste d'ordre p, alors*

- *pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S_p + R_p$, soit $R_p = S - S_p$.*
- $\lim_{p\to+\infty} R_p = 0$.

Remarque 2.1.1 *ATTENTION : on ne doit pas dire qu'une série converge si et seulement si son reste tend vers 0. En effet l'existence même du reste suppose déjà que la série converge.*

2.2 Propriétés de linéarité de la somme

Proposition 2.2.1 (Linéarité de la somme) *Pour toutes séries convergentes $\sum u_n$, $\sum v_n$ et pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Proposition 2.2.2 (Convergence des séries à termes complexes) *Soit* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. *La série* $\sum z_n$ *converge si et seulement si les séries réelles* $\sum Re(z_n)$ *et* $\sum Im(z_n)$ *convergent.*

En cas de convergence, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} Re(z_n) + i \sum_{n=0}^{+\infty} Im(z_n)$ *et donc* $\sum_{n=0}^{+\infty} Re(z_n) = Re\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right)$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} Im(z_n) = Im\left(\sum_{n=0}^{+\infty} z_n\right)$

Remarque 2.2.1 *Si* $\sum z_n$ *converge, alors* $\sum \overline{z_n}$ *converge et on a :* $\overline{\sum_{n=0}^{+\infty} z_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{z_n}$.

Proposition 2.2.3 (Condition nécessaire de convergence) *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Par contraposée, lorsque la suite (u_n) *ne tend pas vers* 0*, on dit que la série* $\sum u_n$ ***diverge grossièrement****.*

2.3 Des séries de référence

2.3.1 Séries géométriques

Proposition 2.3.1 (Séries géométriques) *Soit* $q \in \mathbb{C}$. *La série* $\sum q^n$ *est convergente si, et seulement si,* $|q| < 1$. *Dans le cas de convergence*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Remarque 2.3.1 $\forall p \in \mathbb{N},\ R_p = \sum_{n=p+1}^{+\infty} q^n = \frac{q^{p+1}}{1-q}$.

2.3.2 Séries téléscopiques

Proposition 2.3.2 (Séries télescopiques) *Soit* (u_n) *une suite complexe. La série* $\sum (u_{n+1} - u_n)$ *est convergente si et seulement si* (u_n) *converge.*

En cas de convergence, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \left(\lim_{p\to+\infty} u_p\right) - u_0$.

Remarque 2.3.2 *Les sommes partielles valent :* $S_p = \sum_{n=0}^{p} (u_{p+1} - u_p) = u_{p+1} - u_0$.

2.3.3 Séries de Riemann

Définition 2.3.1 (Séries de Riemann) *On appelle* ***série de Riemann*** *une série de la forme* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$*, avec* α *un réel.*

Proposition 2.3.3 (Convergence des séries de Riemann) *La série de Riemann* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

2.3.4 Série exponentielle

Proposition 2.3.4 (Série exponentielle) *Pour tout* z *dans* $\mathbb{C}$*, la série* $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ *converge absolulment et on pose* $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

2.3.5 Formule de Stirling

Théorème 2.3.1 (Formule de Stirling) $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

2.4 Séries à termes positifs

Dans ce paragraphe on se place dans le cas où l'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0$.

Définition 2.4.1 (Séries à termes positifs) *On dit qu'une série $\sum u_n$ est **à termes positifs** si, pour tout n, u_n est positif.*

Proposition 2.4.1 (Convergence des séries à termes positifs) *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. $\sum u_n$ converge si et seulement si sa suite des sommes partielles est majorée.*

En cas de divergence, les sommes partielles vérifie : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k = +\infty$.

2.5 Séries absolument convergentes

Définition 2.5.1 (Séries absolument convergentes) *Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On dit que la série $\sum u_n$ est* **absolument convergente** *si $\sum |u_n|$ converge.*

Proposition 2.5.1 (Convergence absolue implique convergence) *Si une série est absolument convergente alors elle converge.*

Proposition 2.5.2 (Inégalité triangulaire) *Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, on a* $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

3 Critères de convergence d'une série

3.1 Utilisation des relations de comparaison

Proposition 3.1.1 (Comparaisons)

1. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors*
   - *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
   - *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*
2. *Par extension on utilise plus souvent les caractérisations suivantes : si on a $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$. Alors*
   - *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
   - *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*
3. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.*

Proposition 3.1.2 (Comparaison avec une série à termes positifs) *Soient $\sum u_n$ une série à termes dans $\mathbb{C}$ et $\sum v_n$ une série à termes positifs. Si on a :*

- *$|u_n| \leq v_n$ à partir d'un certain rang. Alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge (absolument).*
- *si $u_n = o(v_n)$ ou $u_n = O(v_n)$ (ce qui revient à avoir $|u_n| = o(v_n)$ ou $|u_n| = O(v_n)$) . Alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge (absolument).*
- *Si $|u_n| \sim v_n$. Alors si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge (absolument).*

Proposition 3.1.3 (Sommation des restes) *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques telles que la série $\sum v_n$ soit à termes positifs et convergente.*

- *Si $u_n = O(v_n)$, alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.*
- *Si $u_n = o(v_n)$, alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.*
- *Si $u_n \sim v_n$, alors $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.*

Proposition 3.1.4 (Sommation des sommes partielles) *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques telles que la série $\sum v_n$ soit à termes positifs et divergente.*

- *Si $u_n = O(v_n)$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.*
- *Si $u_n = o(v_n)$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right)$.*
- *Si $u_n \sim v_n$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \sim \sum_{k=0}^{n} v_k$.*

Corollaire 3.1.1 (Lemme de Cesàro) *Soit (u_n) qui converge vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que :*
$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \ell$.

3.2 Règle de D'Alembert

Proposition 3.2.1 (Règle de D'Alembert) *On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.*

1. *Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.*
2. *Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite $\ell > 1$ (y compris $\ell = +\infty$), alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement avec $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*

Remarque 3.2.1 *Comme la règle de D'Alembert s'applique à des séries à termes positifs, nous pouvons l'utiliser pour prouver l'absolue convergence :*

1. *Si $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ admet une limite $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge (absolument).*
2. *Si $\dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|}$ admet une limite $\ell > 1$ (y compris $\ell = +\infty$), alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$.*

3.3 Théorème spécial des séries alternées

Définition 3.3.1 (Série alternée) *On appelle **série alternée** toute série de la forme $\sum(-1)^n u_n$, avec (u_n) une suite à signe constant.*
Autrement dit une série alternée est de la forme $\sum(-1)^n v_n$ ou $\sum(-1)^{n+1} v_n$, avec v_n positive.

Proposition 3.3.1 (Théorème spécial des séries alternées) *Si la suite $(|u_n|)$ est décroissante et de limite nulle, alors la série alternée $\sum(-1)^n u_n$ converge.*

Dans ce cas, le reste $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ *est du signe de son premier terme* $(-1)^{N+1} u_{N+1}$ *et on a* $0 \leq |R_N| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leq |u_{N+1}|$.

Remarque 3.3.1 *En pratique, il ne faut pas vouloir à tout prix appliquer directement le théorème spécial des séries alternées. Parfois, nous devons effectuer un petit travail sur l'expression pour se ramener à une application simple du théorème spécial des séries alternées. On rencontrera assez souvent la situation d'une suite* (u_n) *compliqueé (la monotonie de* $|u_n|$ *ne sera pas simple à établir), mais que l'on peut décomposer sous la forme :* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n v_n + w_n$, *avec* v_n *simple tel que* $\sum (-1)^n v_n$ *vérifie le théorème spécial des séries alternées et* $\sum w_n$ *une série absolument convergente ou à termes de signe constant. Ceci s'obtient en général avec une développement asymptotique à deux termes.*

3.4 Comparaison séries et intégrales

Proposition 3.4.1 (Comparaison séries et intégrales) *Soit* $a \in \mathbb{N}$ *et* $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ *une fonction continue positive par morceaux* <u>*décroissante*</u>.
Alors, pour tout entier k *tel que* $k \geq a+1$ *on a*

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt.$$

Et donc, pour tout $p \geq n$, *on a :*

$$\int_n^{p+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{p} f(k) \leq \int_{n-1}^{p} f(t)dt.$$

Dans le cas où f *est croissante, on a :*

$$\int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt.$$

$$\int_{n-1}^{p} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{p} f(k) \leq \int_n^{p+1} f(t)dt.$$

Remarque 3.4.1 *La série* $\sum_{n \geq a+1} f(n)$ *converge si et seulement si l'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge.*

4 Familles sommables

4.1 Familles sommables

4.1.1 Familles sommables positives

Dans ce paragraphe, I désignera un ensemble.

Définition 4.1.1 (Famille sommable de réels positifs) *On dit qu'une famille* $(u_i)_{i \in I}$ *de nombres réels positifs est sommable lorsqu'il existe un nombre réel positif* M *tel que, pour toute partie finie* $J \subset I$, *on ait :* $\sum_{j \in J} u_j \leq M$. *On définit alors la somme de la famille par :*

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{j \in J} u_j.$$

Notation : si une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs n'est pas sommable, on écrira $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Proposition 4.1.1 (Invariance par permutation) *Soit $\sigma : I \to I$ une bijection et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On a dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

Proposition 4.1.2 (Opérations sur les sommes) *Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de $\mathbb{R}_+$, alors dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a :*

1. $\sum_{i\in I}(u_i + v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+, \sum_{i\in I}(\lambda u_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i$.

Proposition 4.1.3 (Sommation par paquets pour les familles de réels positifs) *Soit J un ensemble. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels positifs et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, on a la relation :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right).$$

Exemple 4.1.1 *Étude de la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$.*

Corollaire 4.1.1 (Théorème de Fubini) *Soient I et J deux ensembles, $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de réels positifs. Alors on a dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$:*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

Exemple 4.1.2 *La famille $\left(\dfrac{1}{p^2q^2}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable et sa somme vaut $\dfrac{\pi^4}{90}$.*

4.2 Familles sommables dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Définition 4.2.1 (Famille sommable de réels ou complexes) *Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels ou complexes est dite sommable lorsque la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable, soit $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$.*
On note $\ell^1(I)$ l'ensemble des familles sommables de nombres complexes $(u_i)_{i\in I}$.

Proposition 4.2.1 (Condition de sommablité d'une famille complexe) *Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille complexe. Elle est sommable si et seulement si $(Re(u_i))_{i\in I}$ et $(Im(u_i))_{i\in I}$ sont sommables.*

Définition 4.2.2 (Somme d'une famille complexe) *Soit $(u_k)_{k\in I}$ une famille complexe sommable. On pose alors :*

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} Re(u_k) + i\sum_{k\in I} Im(u_k).$$

Proposition 4.2.2 (Sommabilité et sous-famille finie) *Soient I un ensemble, $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes sommable. Alors il existe $F \subset I$, une partie finie de I telle que :*

$$\left|\sum_{i\in I} u_i - \sum_{i\in F} u_i\right| \le \varepsilon.$$

Proposition 4.2.3 (Sommabilité et comparaison) *Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes et $(v_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels positifs telles que :*

$$\forall i \in I, \quad |u_i| \leq v_i.$$

Alors, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Proposition 4.2.4 (Lien entre sommabilité et convergence d'une série) *Une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (indexée par $\mathbb{N}$) est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ est absolument convergente.*

Dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$

Proposition 4.2.5 (Somme par permutation des termes) *Soient I un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Pour toute permutation σ de I, la famille $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est également sommable et on a :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}.$$

Proposition 4.2.6 (Linéarité de la somme) *$\ell^1(I)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application $(u_k)_{k\in I} \mapsto \displaystyle\sum_{k\in I} u_k$ est une forme linéaire sur $\ell^1(I)$.*
Autrement dit, si $(u_k)_{k\in I}$ et $(v_k)_{k\in I}$ de $\ell^1(I)$ et λ, μ deux éléments de $\mathbb{K}$, alors :

$$\sum_{k\in I}(\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k\in I} u_k + \mu \sum_{k\in I} v_k.$$

Proposition 4.2.7 (Sommation par paquets, pour les familles de nombres complexes) *Soient J un ensemble et $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes et $(I_j)_{j\in J}$ une partition de I. Alors si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors :*

1. *Pour tout $j \in J$, la sous-famille $(u_i)_{i\in I_j}$ est sommable.*
2. *La famille $\displaystyle\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right)_{j\in J}$ est sommable.*

Dans ce cas :

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I_j} u_i\right) = \sum_{i\in I} u_i.$$

Exemple 4.2.1 *Si $\alpha > 1$, si on pose $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ et $\phi(\alpha) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, on a : $\phi(\alpha) = \left(\dfrac{1}{2^{\alpha-1}} - 1\right)\zeta(\alpha)$.*

Corollaire 4.2.1 (Théorème de Fubini) *Soient I et J deux ensembles, $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille sommable. On a alors pour tout i de I et pour tout j de J, les famille $(u_{k,j})_{k\in I}$ et $(u_{i,k})_{k\in J}$ sont sommables et :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

Corollaire 4.2.2 (Produit de familles sommables) *Soient I et J des ensembles, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ deux familles sommables. Alors la famille $(a_i b_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable et*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \sum_{j\in J} b_j.$$

Exemple 4.2.2 *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z[< 1$. La famille $(z^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable.*

4.3 Produit de Cauchy de deux séries

Définition 4.3.1 (Produit de Cauchy) *Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes. On appelle produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série de terme général*

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} u_{n-p} v_p.$$

Proposition 4.3.1 (Expression du produit de Cauchy) *Dans les conditions précédentes, si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit de Cauchy $\sum w_n$ est aussi absolument convergente et on a : $\sum_{n\geq 0} u_n \times \sum_{n\geq 0} v_n = \sum_{n\geq 0} w_n$.*

Exemple 4.3.1 $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, *où l'on a pose* $e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$.

5 Récapitultif méthodologique

5.1 Nature d'une série

Pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$, on pourra se poser dans l'ordre les questions suivantes :

1. Y-a-t-il divergence grossière ? En cas de réponse positive, l'étude est finie.
2. En cas de réponse négative, on distinguera deux cas de figure.

   Si la série est à termes positifs

   - Règle de d'Alembert lorsqu'il y a des puissances ou des produits : étude de la convergence de $\sum \frac{n!}{n^n}$ ou $\sum \frac{n^\alpha}{(1+a)(1+a^2)...(1+a^n)}$.
   - Les tests de comparaison avec une série de Riemann ou géométrique, avec dans l'ordre : utilisation des équivalents : $\sum n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, o ou O : $\sum e^{-n^\alpha}$.
   - Peut-on comparer la série à une intégrale par la méthode des rectangles ? Dans ce cas là il faut que l'on puisse calculer une primitive de la fonction associée. Voir les séries de Bertrand : $\sum \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$.

   Si le signe de u_n est variable

   - La série est-elle absolument convergente ? On utilisera pour cela les tests de comparaison pour les séries à termes positifs : $\sum \frac{((-1)^n + i)\ln(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n+3}-1}$.
   - Le critère spécial des séries alternées est-il appliquable ? Voir $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
   - Peut-on obtenir un développement asymptotique du terme général (par exemple on peut faire apparaître la somme d'une série alternée et d'une série absolument convergente). Voir $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$.

5.2 Calcul d'une somme dans le cas de la convergence de la série

- On reconnaît une série connue géométrique, exponentielle (ou autre quand on abordera les séries entières) : $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.
- Revenir aux sommes partielles et utiliser un téléscopage : calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)^2}$.
- Séparer les termes d'indice pair et impair, en revenant soit aux sommes partielles, soit en donnant un argument de sommabilité : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

5.3 Recherche d'équivalents de sommes partielles de séries divergentes

- Penser à la comparaison série/intégrale pour une fonction décroissante, continue et positive : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{p^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, si $\alpha \leq 1$ ou $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{1-\alpha}}$, si $\alpha > 1$.
- Sommation des équivalents pour une série à termes positifs : exemple $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$, puis $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.