

## Introduction

C'est avec l'insistance de nos étudiants et enrichis de notre expérience auprès d'eux que nous avons réalisé cet ouvrage, qui s'inspire étroitement des programmes publiés en 2004 à destination des classes préparatoires scientifiques MP, PC, PSI et PT :

- mécanique (des systèmes, des solides, des fluides) ;
- électrocinétique et électronique ;
- électromagnétisme (électrostatique, magnétostatique, équations de Maxwell) ;
- optique ondulatoire ;
- physique des ondes (cordes vibrantes, ondes sonores, ondes électromagnétiques) ;
- thermodynamique (conduction thermique, rayonnement, diffusion de particules, potentiels thermodynamiques) ;
- thermodynamique des systèmes chimiques ;
- réactions d'oxydo-réduction.

La conception de ce livre a été guidée par le souci permanent d'en rendre chaque chapitre accessible, au moins partiellement, aux étudiants de ces quatre filières. C'est pourquoi la chimie organique, dédiée exclusivement aux étudiants en PC, n'apparaît pas dans cet ouvrage.

Bien qu'il s'agisse essentiellement d'un recueil de sujets de contrôles et de concours, des rappels de cours y figurent parfois avec des détails qui ne manqueront pas d'éveiller la curiosité des étudiants, lesquels y trouveront au demeurant de nombreux exercices d'illustration, brefs et néanmoins nécessaires à l'assimilation des concepts capitaux.

Pour autant, ces rappels ne pourront se substituer à un cours structuré dispensé par un enseignant et qui aura fait l'objet d'un apprentissage méticuleux. C'est à l'aune de ce travail préalable que se mesurera l'efficacité des pages qui suivent ; les notions de cours qui y sont développées doivent, tout au plus, enrichir des connaissances supposées déjà acquises. De même, la réussite aux concours ne saura s'affranchir d'une révision approfondie des leçons apprises en première année et fréquemment sollicitées pendant les épreuves.

Les sujets de contrôles ou de concours proposés ont été sélectionnés de manière à illustrer chaque notion introduite en cours, lesquelles notions sont d'ailleurs mentionnées avec chaque énoncé. Y figurent également des suggestions de durées que le candidat est invité à respecter au cours d'une épreuve en temps limité. En aucun cas, cependant, ces durées ne doivent limiter un étudiant en phase d'apprentissage : une période d'assimilation sera nécessaire avant d'entreprendre l'entraînement aux concours, dans des conditions fatalement limitées dans le temps. Signalons quand même que la durée suggérée pour la résolution d'un exercice indique souvent aussi le niveau de difficulté. Quant aux corrigés proposés, ils ont été volontairement détaillés de sorte que les calculs n'en compromettent pas la compréhension des raisonnements physiques. Insistons enfin sur le bon usage qui doit être fait de ces corrigés : dans le meilleur des cas, ils permettront à l'étudiant de vérifier la justesse de son travail, sinon leur consultation ne devra être qu'un ultime recours, suite à des recherches personnelles obstinées

mais vaines. C'est à ces conditions que nous espérons partager le plaisir de vous avoir modestement accompagné dans votre réussite.

Les auteurs

# Table des matières

<b>1 Mécanique</b>	<b>9</b>
1.1 Cinématique des systèmes matériels	9
1.1.1 Mouvement relatif de deux référentiels	9
1.1.2 Description d'un système matériel	14
1.1.3 Référentiel du centre de masse	20
1.1.4 Champ de vecteurs, torseurs	22
1.1.5 Notion de solide	24
1.1.6 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe	25
1.1.7 Cinématique des solides en contact	28
1.2 Dynamique des systèmes matériels	29
1.2.1 Torseur des efforts	29
1.2.2 Les principes de la dynamique en référentiel galiléen.	32
1.2.3 Référentiels non galiléens	33
1.3 Lois de Coulomb pour le contact entre deux solides	35
1.3.1 Types de contact	35
1.3.2 Vitesse de glissement	35
1.3.3 Actions de contact	35
1.4 Énergie en mécanique	36
1.4.1 Travail et puissance des efforts	36
1.4.2 Efforts conservatifs	38
1.4.3 Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique	40
1.4.4 Théorème de l'énergie mécanique	40
1.4.5 Théorèmes de l'énergie en référentiel non galiléen	41
1.4.6 Puissance des efforts de contact	42
1.4.7 Étude des liaisons	44
1.4.8 Applications à la rotation d'un solide autour d'un axe fixe	46
1.5 Cinématique des fluides	47
1.5.1 Description d'un fluide	47
1.6 Dynamique des fluides.	57
1.6.1 Efforts sur une particule de fluide	57
1.6.2 Écoulement laminaire et turbulent, nombre de Reynolds.	60
1.6.3 Équation d'Euler.	61
1.6.4 Taux de variation d'une intégrale de volume dans le temps.	62
1.7 Dynamique des fluides parfaits.	64
1.7.1 Équation de Bernoulli.	64
1.7.2 Écoulement potentiel.	67

<b>Énoncés</b>	<b>69</b>
<b>Corrigés</b>	<b>97</b>
<b>2 Électrocinétique - Électronique</b>	<b>155</b>
2.1 Décomposition d'un signal en série de Fourier . . . . .	155
2.1.1 Les signaux périodiques . . . . .	155
2.1.2 Série de Fourier . . . . .	156
2.1.3 Propriétés . . . . .	157
2.1.4 Décomposition des signaux usuels . . . . .	157
2.1.5 Spectre en fréquence d'un signal . . . . .	160
2.2 Systèmes électroniques linéaires . . . . .	162
2.2.1 Quadripôles linéaires . . . . .	162
2.2.2 Fonction de transfert et diagramme de Bode . . . . .	163
2.2.3 Signal d'entrée non sinusoïdal . . . . .	166
2.2.4 Filtres passifs . . . . .	168
2.2.5 Réponse à un échelon de tension . . . . .	177
2.3 Amplificateur opérationnel . . . . .	181
2.3.1 Montages amplificateurs . . . . .	182
2.3.2 Montage intégrateur ou filtre passe-bas . . . . .	183
2.3.3 Montage dérivateur ou filtre passe-haut . . . . .	185
2.3.4 Filtre passe-tout déphaseur . . . . .	186
2.3.5 Montage amplificateur différentiel . . . . .	188
2.3.6 Amplificateur sommateur . . . . .	189
2.3.7 Les limites de l'amplificateur opérationnel . . . . .	189
2.4 Conversion électronique . . . . .	192
2.4.1 Générateurs et récepteurs . . . . .	192
2.4.2 Fonctions de commutation . . . . .	194
2.4.3 Transfert de puissance par hacheur . . . . .	197
2.5 Commande d'un système linéaire . . . . .	201
2.5.1 Définitions . . . . .	201
2.5.2 Générateur quasi sinusoïdal . . . . .	208
2.5.3 L'amplificateur opérationnel saturé . . . . .	211
<b>Énoncés</b>	<b>216</b>
<b>Corrigés</b>	<b>239</b>
<b>3 Électromagnétisme</b>	<b>317</b>
3.1 Opérateurs vectoriels . . . . .	317
3.1.1 Opérateurs en coordonnées cartésiennes . . . . .	317
3.1.2 Opérateurs en coordonnées cylindriques . . . . .	318
3.1.3 Opérateurs en coordonnées sphériques . . . . .	318
3.1.4 L'opérateur vectoriel <i>nabla</i> . . . . .	319
3.1.5 Relations entre opérateurs . . . . .	320
3.1.6 Circulation et flux d'un vecteur . . . . .	320
3.2 Électrostatique . . . . .	321
3.2.1 Loi de Coulomb . . . . .	321
3.2.2 Équation de Maxwell-Gauss . . . . .	328
3.2.3 Équation de Maxwell-Faraday . . . . .	331

3.2.4	Énergie électrostatique . . . . .	339
3.2.5	Dipôle électrostatique . . . . .	340
3.3	Conducteurs à l'équilibre électrostatique . . . . .	346
3.3.1	Équilibre électrostatique . . . . .	346
3.3.2	Condensateurs . . . . .	349
3.3.3	Énergie d'un condensateur . . . . .	351
3.4	Magnétostatique . . . . .	351
3.4.1	Densités de courant . . . . .	351
3.4.2	Le champ magnétostatique . . . . .	355
3.4.3	Forces de Laplace . . . . .	366
3.4.4	Énergie magnétostatique . . . . .	369
3.4.5	Le dipôle magnétique . . . . .	372
3.5	Les équations de Maxwell en régime non stationnaire . . . . .	373
3.5.1	Équation de Maxwell-Faraday . . . . .	373
3.5.2	Équation de Maxwell-Ampère . . . . .	374
3.5.3	Équation de Maxwell-Gauss et du flux magnétique . . . . .	375
3.5.4	Relations champs-potentiels . . . . .	375
3.5.5	Équations aux potentiels . . . . .	376
3.5.6	Potentiels retardés . . . . .	376
3.5.7	Approximations . . . . .	377
3.6	Induction électromagnétique . . . . .	378
3.6.1	Loi de transformation des champs . . . . .	378
3.6.2	Circuit mobile dans un champ permanent, induction de Lorentz . . . . .	378
3.6.3	Circuit fixe dans un champ magnétique variable, induction de Neumann . . . . .	380
3.6.4	Induction dans le cas général . . . . .	380
3.6.5	Auto-induction . . . . .	381
3.6.6	Inductance mutuelle . . . . .	382
3.6.7	Énergie électromagnétique . . . . .	384
	<b>Énoncés</b>	<b>387</b>
	<b>Corrigés</b>	<b>411</b>
<b>4</b>	<b>Optique ondulatoire</b>	<b>495</b>
4.1	Propagation de la lumière . . . . .	495
4.1.1	Ondes planes et ondes sphériques . . . . .	495
4.1.2	Chemin optique . . . . .	498
4.1.3	Éclairement . . . . .	501
4.2	Interférences non localisées . . . . .	502
4.2.1	Conditions d'interférence entre deux ondes planes . . . . .	503
4.2.2	Miroirs de Fresnel . . . . .	514
4.3	Interféromètre de Michelson . . . . .	516
4.3.1	Utilisation en lame d'air . . . . .	516
4.3.2	Utilisation en coin d'air . . . . .	525
4.4	Diffraction des ondes lumineuses . . . . .	528
4.4.1	Principe de Huygens-Fresnel . . . . .	528
4.4.2	Diffraction de Fraunhofer d'une onde plane . . . . .	529
4.4.3	Cas d'une ouverture rectangulaire . . . . .	531

4.4.4	Cas d'une ouverture circulaire . . . . .	536
4.4.5	Diffraction à l'infini par les fentes d'Young . . . . .	537
4.5	Réseaux plans . . . . .	544
4.5.1	Généralités . . . . .	544
4.5.2	Formule du réseau . . . . .	545
<b>Énoncés</b>		<b>550</b>
<b>Corrigés</b>		<b>579</b>
<b>5</b>	<b>Physique des ondes</b>	<b>673</b>
5.1	Propagation unidimensionnelle d'une onde . . . . .	673
5.1.1	Équation de propagation . . . . .	673
5.1.2	Famille de solutions . . . . .	673
5.1.3	Ondes transversales sur une corde vibrante . . . . .	677
5.1.4	Ondes longitudinales dans une tige rigide . . . . .	681
5.1.5	Conditions aux limites . . . . .	684
5.2	Ondes sonores dans les fluides . . . . .	688
5.2.1	Propagation des ondes sonores . . . . .	688
5.2.2	Ondes sphériques . . . . .	697
5.2.3	Aspect énergétique . . . . .	697
5.2.4	Réflexion et transmission d'une onde sonore . . . . .	704
5.3	Ondes électromagnétiques dans le vide . . . . .	714
5.3.1	Équation de propagation des champs . . . . .	714
5.3.2	Ondes électromagnétiques planes . . . . .	715
5.3.3	Aspect énergétique des ondes planes progressives monochromatiques . . . . .	718
5.4	Phénomènes dispersifs de propagation . . . . .	719
5.4.1	Relation de dispersion . . . . .	719
5.4.2	Paquets d'ondes . . . . .	721
<b>Énoncés</b>		<b>727</b>
<b>Corrigés</b>		<b>756</b>
<b>6</b>	<b>Thermodynamique</b>	<b>847</b>
6.1	Rappels de première année . . . . .	847
6.1.1	Éléments de statique des fluides . . . . .	847
6.1.2	Premier principe de la thermodynamique . . . . .	848
6.1.3	Deuxième principe de la thermodynamique . . . . .	856
6.1.4	Généralités sur les machines thermiques . . . . .	860
6.2	Transferts thermiques et diffusion de particules . . . . .	864
6.2.1	Loi de Fourier . . . . .	864
6.2.2	Transferts thermiques par rayonnement . . . . .	873
6.2.3	Diffusion de particules . . . . .	879
6.3	Étude du corps pur sous deux phases . . . . .	881
6.3.1	Potentiels thermodynamiques . . . . .	881
6.3.2	Corps pur sous deux phases . . . . .	885
6.4	Étude de l'équilibre liquide-vapeur . . . . .	890
6.4.1	Diagramme de Clapeyron . . . . .	890

6.4.2	Diagramme entropique . . . . .	894
6.4.3	Diagramme de Mollier . . . . .	896
6.5	Thermodynamique des fluides en écoulement . . . . .	899
6.5.1	Définitions en thermodynamique industrielle . . . . .	899
6.5.2	Expressions du premier et du deuxième principes . . . . .	900
6.5.3	Travail de transvasement . . . . .	902
6.5.4	Utilisation des diagrammes entropiques . . . . .	904
<b>Énoncés</b>		<b>907</b>
<b>Corrigés</b>		<b>945</b>
<b>7</b>	<b>Thermodynamique des systèmes chimiques</b>	<b>1043</b>
7.1	Enthalpie libre et potentiel chimique . . . . .	1043
7.1.1	Grandeurs molaires et molaires partielles . . . . .	1043
7.1.2	Enthalpie libre . . . . .	1046
7.1.3	Potentiel chimique d'un corps pur . . . . .	1048
7.1.4	Potentiel chimique dans un mélange . . . . .	1050
7.1.5	Corps pur sous deux phases . . . . .	1055
7.2	Grandeurs standard relatives à un constituant . . . . .	1060
7.2.1	Définitions . . . . .	1060
7.2.2	Présentation de quelques grandeurs standard . . . . .	1060
7.2.3	Grandeurs standard de réaction . . . . .	1061
7.2.4	Grandeurs <i>standard</i> de formation . . . . .	1068
7.2.5	Relations entre les grandeurs <i>standard</i> de réaction . . . . .	1071
7.3	Affinité chimique – Équilibre chimique . . . . .	1075
7.3.1	Affinité chimique . . . . .	1075
7.3.2	L'équilibre chimique . . . . .	1077
7.3.3	Lois de déplacement des équilibres . . . . .	1079
7.4	Équilibres liquide-vapeur des mélanges binaires . . . . .	1087
7.4.1	Paramétrage du système . . . . .	1087
7.4.2	Loi de Raoult . . . . .	1088
7.4.3	Diagramme binaire isotherme . . . . .	1088
7.4.4	Diagramme binaire isobare . . . . .	1090
7.4.5	Liquide saturé . . . . .	1091
7.4.6	Règle des moments . . . . .	1094
7.4.7	Application à la distillation . . . . .	1096
7.4.8	Azéotropisme . . . . .	1099
7.4.9	Cas des liquides non miscibles . . . . .	1103
<b>Énoncés</b>		<b>1110</b>
<b>Corrigés</b>		<b>1135</b>
<b>8</b>	<b>Oxydo-réduction</b>	<b>1223</b>
8.1	Thermodynamique de l'oxydo-réduction . . . . .	1223
8.1.1	Cellules galvaniques . . . . .	1223
8.1.2	Potentiel <i>standard</i> d'un couple redox . . . . .	1225
8.1.3	Diagrammes potentiel-pH . . . . .	1229
8.1.4	Diagrammes d'Ellingham . . . . .	1253

8.2	Cinétique de l'oxydo-réduction . . . . .	1263
8.2.1	Présentation des courbes intensité-potentiel . . . . .	1263
8.2.2	Intensité et vitesse de réaction . . . . .	1269
8.2.3	Phénomènes de diffusion . . . . .	1271
8.2.4	Courbes intensité-potentiel . . . . .	1274
8.3	Élaboration et protection des métaux . . . . .	1281
8.3.1	Pyrométallurgie du zinc . . . . .	1281
8.3.2	Hydrométallurgie . . . . .	1287
8.3.3	Phénomènes de corrosion . . . . .	1291
	<b>Énoncés</b>	<b>1298</b>
	<b>Corrigés</b>	<b>1327</b>



# Chapitre 1

## Mécanique

### 1.1 Cinématique des systèmes matériels

#### 1.1.1 Mouvement relatif de deux référentiels

##### 1.1.1.1 Repère et référentiel

**Définition 1** On appelle référentiel un ensemble de points fixes les uns par rapport aux autres.

**Définition 2** On appelle repère la donnée d'une origine  $O$  et de trois vecteurs de base :  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ .

Pour illustrer la notion de référentiel on peut donner comme exemple le mouvement d'un train par rapport au quai :

Cette situation permet de définir deux référentiels différents, celui du quai et celui du train. Un passager assis dans un wagon est en mouvement par rapport au premier et immobile par rapport au second.

Le mouvement d'un système dépendra donc du référentiel choisi pour en faire l'étude.

Remarque – Quand un repère est fixe dans un référentiel, on a pour habitude de confondre les deux notions.

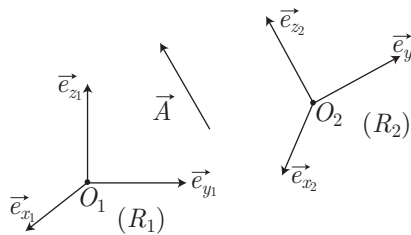
##### 1.1.1.2 Dérivation d'un vecteur

**Définition 3**  $\vec{\Omega}_{R_2/R_1}$  est le vecteur rotation du référentiel  $R_2$  par rapport au référentiel  $R_1$ .

On détermine  $\vec{\Omega}_{R_2/R_1}$  en utilisant les trois relations ci-dessous :

$$\begin{cases} \left( \frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} \right)_{/R_1} = \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{e}_{x_2} \\ \left( \frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} \right)_{/R_1} = \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{e}_{y_2} \\ \left( \frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt} \right)_{/R_1} = \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{e}_{z_2} \end{cases}$$

Soient deux référentiels  $R_1$  et  $R_2$  auxquels on associe les repères :  $(O_1, \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$  et  $(O_2, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2}, \vec{e}_{z_2})$ . Considérons un vecteur  $\vec{A}$  étudié dans ces deux référentiels.



Les dérivées temporelles de  $\vec{A}$  dans  $R_1$  et  $R_2$ , sont liées par la relation :

$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/R_1} = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{A} \quad (1)$$

### 1.1.1.3 $R_2$ en translation par rapport à $R_1$

**Définition 4**  $R_2$  est en translation par rapport à  $R_1$  si les vecteurs de bases de  $R_2$  sont constants dans  $R_1$

De ce fait :

$$\left( \frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} \right)_{/R_1} = \left( \frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} \right)_{/R_1} = \left( \frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt} \right)_{/R_1} = \vec{0}$$

$\vec{\Omega}_{R_2/R_1}$  est donc, d'après sa définition, colinéaire aux vecteurs  $\vec{e}_{x_2}$ ,  $\vec{e}_{y_2}$  et  $\vec{e}_{z_2}$ . Ceci n'est possible que si  $\vec{\Omega}_{R_2/R_1}$  est nul.

Pour un mouvement de translation :

$$\vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \vec{0}.$$

Dans ce cas, conformément à la relation (1), la dérivée temporelle de  $\vec{A}$  est la même dans les deux référentiels.

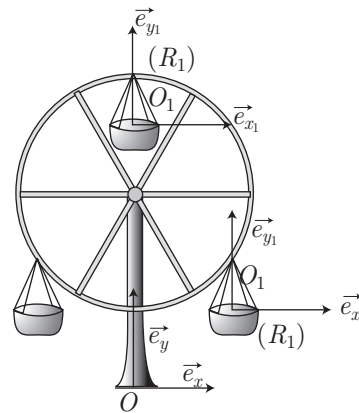
$$\left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/R_1} = \left( \frac{d\vec{A}}{dt} \right)_{/R_2}$$

*Exemple : la translation circulaire :*

Une nacelle est attachée à une grande roue de fête foraine. On note  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  le référentiel attaché au sol et  $(O_1, \vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{z_1})$  le référentiel attaché à la nacelle. On remarque qu'au cours du mouvement de la nacelle, les vecteurs  $\vec{e}_{x_1}$ ,  $\vec{e}_{y_1}$  et  $\vec{e}_{z_1}$  sont constants en direction, sens et norme. Ils sont donc fixes dans  $R$  donc :

$$\vec{\Omega}_{R_1/R} = \vec{\Omega}_{nacelle/sol} = \vec{0}$$

Remarque – Cet exemple doit rappeler que les mouvements de translation ne se limitent pas au cas de la translation rectiligne.



### 1.1.1.4 $R_2$ en rotation autour d'un axe fixe de $R_1$

On peut choisir  $\vec{e}_{z_1}$  et  $\vec{e}_{z_2}$  confondus avec la direction de l'axe fixe,  $\theta$  étant l'angle caractéristique de la rotation :

$$\theta = (\vec{e}_{x_1}, \vec{e}_{x_2}) = (\vec{e}_{y_1}, \vec{e}_{y_2})$$

Nous avons :  $\vec{e}_{x_2} = \cos \theta \vec{e}_{x_1} + \sin \theta \vec{e}_{y_1}$ , d'où :

$$\frac{d\vec{e}_{x_2}}{dt} /_{R_1} = \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{e}_{x_1} + \cos \theta \vec{e}_{y_1}) = \dot{\theta} \vec{e}_{z_1} \wedge \vec{e}_{x_2}.$$

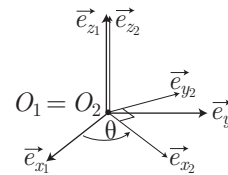
De même on montre que :

- $\frac{d\vec{e}_{y_2}}{dt} /_{R_1} = \dot{\theta} \vec{e}_{z_1} \wedge \vec{e}_{y_2}.$
- $\frac{d\vec{e}_{z_2}}{dt} /_{R_1} = \vec{0}.$

Dans ce cas :

$$\vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_{z_1}$$

Remarque – La rotation est dite uniforme lorsque  $\dot{\theta} = cte.$



### 1.1.1.5 Composition des vecteurs rotation

Considérons trois référentiels  $R_1$ ,  $R_2$  et  $R_3$ , en mouvement relatif :

$$\vec{\Omega}_{R_3/R_1} = \vec{\Omega}_{R_3/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1}$$

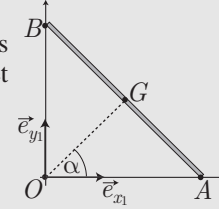
De cette relation on déduit :  $\vec{\Omega}_{R_2/R_1} = -\vec{\Omega}_{R_1/R_2}$ . Posons  $R_3 = R_1$ , nous avons alors :

$$\vec{\Omega}_{R_3/R_3} = \vec{0} = \vec{\Omega}_{R_1/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \Rightarrow \vec{\Omega}_{R_2/R_1} = -\vec{\Omega}_{R_1/R_2}.$$



Soit une tige de centre  $G$  contenue dans le plan  $Ox_1y_1$ .

Les extrémités  $A$  et  $B$  sont contraintes à se déplacer le long des axes  $Ox_1$  et  $Oy_1$ . On définit le référentiel  $R_T$  attaché à la tige et on note  $R_1$  le référentiel associé au plan  $(O, x_1, y_1)$ . Déterminer  $\vec{\Omega}_{R_T/R_1}$  en fonction de  $\alpha = (\vec{e}_{x_1}, \vec{OG})$

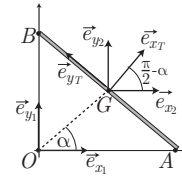


**RÉPONSE** Notons  $(G, \vec{e}_{x_T}, \vec{e}_{y_T})$  le référentiel  $R_T$  attaché à la tige et  $(G, \vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_2})$  le référentiel  $R_2$  centré en  $G$  en translation par rapport à  $R_1$ .

$$\vec{\Omega}_{R_T/R_1} = \vec{\Omega}_{R_T/R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} = \vec{\Omega}_{R_T/R_2}$$

Par rapport à  $R_2$  le mouvement de  $R_T$  correspond à une rotation autour de l'axe fixe  $(G, \vec{e}_z)$ , paramétré par l'angle  $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha = (\vec{e}_{x_2}, \vec{e}_{y_T})$ .

On en déduit  $\vec{\Omega}_{R_T/R_1} = \dot{\theta} \vec{e}_z = -\dot{\alpha} \vec{e}_z$



### 1.1.1.6 Composition des vitesses

Soit un point  $M$  mobile par rapport aux deux référentiels  $R_1$  et  $R_2$ . On rappelle la relation de composition des vitesses :

$$\vec{V}(M)_{/R_1} = \vec{V}(M)_{/R_2} + \vec{V}(O_2)_{/R_1} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{O_2M} \quad (2)$$

**Définition 5** On appelle point coïncident de  $M$  dans  $R_2$ , noté  $M_2$ , le point fixe dans  $R_2$  qui à chaque instant se trouve confondu avec  $M$ .

**Définition 6** On appelle vitesse d'entraînement  $\vec{V}_e$  la vitesse de  $M_2$  par rapport à  $R_1$

Conformément à la relation (2) l'expression de la vitesse d'entraînement est :

$$\vec{V}_e = \vec{V}(M_2)_{/R_1} = \vec{V}(M_2)_{/R_2} + \vec{V}(O_2)_{/R_1} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{O_2M_2}$$

À chaque instant  $M_2$  est confondu avec  $M$ , et sa vitesse est nulle dans  $R_2$  :

$$\vec{V}(M_2)_{/R_2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}_e(M) = \vec{V}(O_2)_{/R_1} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{O_2M}$$

On en déduit alors une relation équivalente à (2) :

$$\vec{V}(M)_{/R_1} = \vec{V}(M)_{/R_2} + \vec{V}_e(M) \quad (3)$$

### 1.1.1.7 Composition des accélérations

La relation entre les accélérations de  $M$  dans  $R_1$  et  $R_2$  est donnée par :

$$\vec{a}(M)_{/R_1} = \vec{a}(M)_{/R_2} + \vec{a}(O_2)_{/R_1} + \frac{d\vec{\Omega}_{R_2/R_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge (\vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M}) + 2\vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{V}(M)_{/R_2} \quad (4)$$

**1.1.1.8 Accélérations d’entraînement et de Coriolis**

L’accélération d’entraînement correspond à l’accélération du point coïncidant  $M_2$  par rapport au référentiel  $R_1$ .

Pour le point  $M_2$  on a :  $2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}(M_2)_{/R_2} = \vec{0}$  et  $\vec{a}(M_2)_{/R_2} = \vec{0}$ , d’où l’on déduit :

$$\vec{a}(M_2)_{/R_1} = \vec{a}_e(M) = \vec{a}(O_2)_{/R_1} + \frac{d\vec{\Omega}_{R_2/R_1}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge (\vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \overrightarrow{O_2M})$$

**Définition 7** On appelle  $\vec{a}_c(M)$  l’accélération de Coriolis du point  $M$  le terme :

$$\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega}_{R_2/R_1} \wedge \vec{V}(M)_{/R_2}$$

On en déduit alors une relation équivalente à (4) :

$$\vec{a}(M)_{/R_1} = \vec{a}(M)_{/R_2} + \vec{a}_e(M)_{/R_2} + \vec{a}_c(M)_{/R_2} \quad (5)$$



Exprimer les accélérations d’entraînement et de Coriolis pour les cas où :

- $R_2$  a un mouvement de translation par rapport à  $R_1$ .
- $R_2$  a un mouvement de rotation uniforme autour d’un axe fixe de  $R_1$ .

**RÉPONSE** Notons  $\vec{\Omega}$  le vecteur rotation de  $R_2$  par rapport à  $R_1$ .

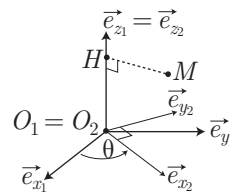
- Pour une translation relative entre  $R_1$  et  $R_2$  on a :  $\vec{\Omega} = \vec{0}$  donc  $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(O_2)_{/R_1}$  et  $\vec{a}_c(M) = \vec{0}$ .
- Pour la rotation uniforme autour d’un axe fixe, on peut choisir  $O_2 \vec{e}_{z_2}$  et  $O_1 \vec{e}_{z_1}$  confondus avec l’axe de rotation.

$O_2$  étant sur l’axe de rotation  $\vec{V}(O_2)_{/R_1} = \vec{0}$ , tandis que la rotation est

uniforme, il s’ensuit que :  $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \vec{0}$ .

On définit  $H$  projeté orthogonal de  $M$  sur l’axe de rotation,  $\overrightarrow{O_2H}$  étant parallèle à l’axe de rotation, nous avons :

$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{O_2H} + \overrightarrow{HM})) = \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM})$$



Le développement du double produit vectoriel donne :

$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}) = \vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \overrightarrow{HM}) - \Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

Comme  $\vec{\Omega}$  est perpendiculaire à  $\overrightarrow{HM}$  nous en déduisons :

$$\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$$

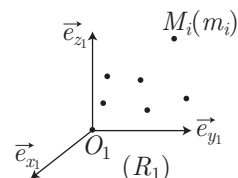
Pour le cas de la rotation uniforme autour d’un axe fixe :  $\vec{a}_e(M) = -\Omega^2 \overrightarrow{HM}$ .

L’accélération de Coriolis est donnée par :  $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\Omega} \wedge \left( \frac{d\overrightarrow{HM}}{dt} \right)_{/R_1}$

## 1.1.2 Description d'un système matériel

### 1.1.2.1 Représentation discrète d'un système matériel

Un système matériel peut être décrit par une répartition discrète de masses, c'est-à-dire comme un ensemble de  $N$  points matériels  $M_i$ , chacun affecté d'une masse  $m_i$ . Ces points  $M_i$  peuvent représenter les particules qui constituent le système. On note  $m$  la masse du système :



$$m = \sum_{i=1}^N m_i$$

### 1.1.2.2 Représentation continue d'un système matériel

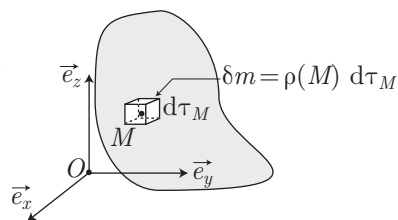
Les systèmes matériels que nous allons étudier seront souvent composés d'un très grand nombre de particules. Nous pourrions alors ignorer l'aspect corpusculaire de la matière et substituer au modèle discret pour la répartition de masse, un modèle continu. Comme nous définissons en électromagnétisme des distributions continues de charge, nous pourrions faire de même avec la masse.

#### Définition 8

Dans le cas d'une distribution volumique, continue, de masse on considère que chaque élément de volume  $d\tau_M$  contient la masse :

$$\delta m = \mu(M) d\tau_M$$

On appelle  $\mu$  la masse volumique du système définie en chaque point  $M$  du système :

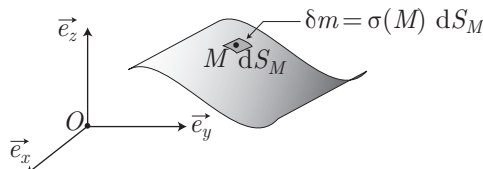


$$\mu(M) = \frac{\delta m}{d\tau_M} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

**Définition 9** Dans le cas d'une distribution continue surfacique de masse, on considère que chaque élément  $dS_M$  contient la masse  $\delta m = \sigma(M) dS_M$ .

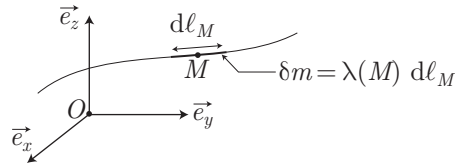
On appelle  $\sigma(M)$  la densité surfacique de masse définie en chaque point  $M$  du système :

$$\sigma(M) = \frac{\delta m}{dS_M} \text{ (en } \text{kg} \cdot \text{m}^{-2}\text{)}$$



**Définition 10** Dans le cas d'une distribution continue linéique de masse, on considère que chaque élément  $d\ell_M$  contient la masse  $\delta m = \lambda(M) d\ell_M$ . On appelle  $\lambda(M)$  la masse linéique définie en chaque point  $M$  du système :

$$\lambda(M) = \frac{\delta m}{d\ell_M} \text{ (en kg} \cdot \text{m}^{-1}\text{)}$$



Dans les trois cas, la masse  $m$  du système est donnée par :

$$m = \int_{\text{Distribution}} \delta m$$

L'intégrale sera triple, double ou simple selon la modélisation considérée. Pour chaque cas, l'élément  $d\tau$ ,  $dS$  ou  $d\ell$  de masse  $\delta m$  est l'équivalent du point matériel  $M_i$  de masse  $m_i$ .

**1.1.2.3 Centre d'inertie d'un système matériel**

Pour introduire cette notion, commençons par considérer une répartition discrète de masse  $\{M_i(m_i)\}$ .

$m = \sum_{i=1}^{i=N} m_i$  est la masse de ce système.

**Définition 11** On appelle centre d'inertie du système matériel le point  $G$  donné par la relation :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{OM}_i$$

Cette définition se transpose aisément pour les répartitions continues de masse. Chaque élément de volume  $d\tau_M$  (de surface  $dS_M$  ou de segment  $d\ell_M$ ), construit autour du point  $M$  est assimilable à un point matériel de masse  $\delta m = \mu(M) d\tau_M$  ( $\sigma(M) dS_M$  ou  $\lambda(M) d\ell_M$ ).

Pour une répartition volumique nous aurons :

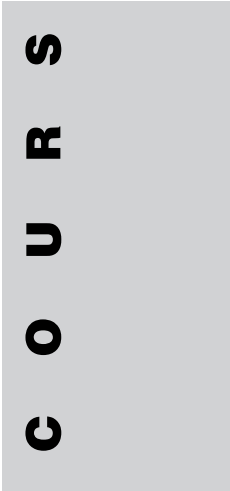
$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \iiint_{\mathcal{V}} \mu(M) d\tau_M \vec{OM}$$

Pour une répartition surfacique nous aurons :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \iint_S \sigma(M) dS_M \vec{OM}$$

Pour une répartition linéique nous aurons :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{C}} \lambda(M) d\ell_M \vec{OM}$$



Remarque –  $G$  est en fait le barycentre de l'ensemble des points du système, affectés de leurs masse. Il sera souvent facile de le positionner en utilisant des arguments de symétrie.

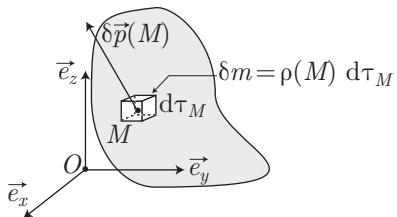
Il sera utile par la suite de retenir les relations donnant la vitesse et l'accélération de  $G$  par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  :

$$\vec{V}(G)_{/R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}(M_i)_{/R} \quad \text{et} \quad \vec{a}(G)_{/R} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}(M_i)_{/R}$$

#### 1.1.2.4 Résultante cinétique d'un système matériel

**Définition 12** On appelle résultante cinétique d'un système matériel, la somme des quantités de mouvement de chacun de ses points.

Considérons une répartition volumique de masse étudiée dans un référentiel  $R$ .

$$\vec{V}(G)_{/R} = \frac{1}{m} \iiint_{\mathcal{V}} \delta m \vec{V}(M)_{/R}$$


Chaque volume  $d\tau_M$ , de masse  $\delta m = \mu(M) d\tau_M$  et de vitesse  $\vec{V}(M)_{/R}$ , a pour quantité de mouvement élémentaire :  $\delta \vec{p}(M)_{/R} = \delta m \vec{V}(M)_{/R}$ .

La résultante cinétique s'écrit :

$$\vec{P}_{/R} = \iiint_{\mathcal{V}} \mu(M) d\tau_M \vec{V}(M)_{/R} = m \vec{V}(G)_{/R}$$

#### 1.1.2.5 Résultante dynamique d'un système matériel

**Définition 13** On appelle résultante dynamique d'un système matériel, la somme des résultantes dynamiques de chacun de ses points.

Considérons une répartition volumique de masse étudiée dans un référentiel  $R$ .

On note  $\vec{S}_{/R}$ , la résultante dynamique du système matériel de masse  $m$  de centre d'inertie  $G$ , étudié dans le référentiel  $R$ . Chaque volume  $d\tau_M$ , de masse  $\delta m = \mu(M) d\tau_M$  et d'accélération  $\vec{a}(M)_{/R}$ , a pour résultante dynamique élémentaire :  $\delta \vec{s}(M)_{/R} = \delta m \vec{a}(M)_{/R}$ .

La résultante dynamique s'écrit :

$$\vec{S}_{/R} = \iiint_{\mathcal{V}} \mu(M) d\tau_M \vec{a}(M)_{/R} = m \vec{a}(G)_{/R}$$

#### 1.1.2.6 Moment cinétique d'un système matériel

**Définition 14** Le moment cinétique en un point  $A$  d'un système est la somme des moments cinétiques de chacun de ses points calculés au même point  $A$ .



Cette grandeur calculée au point  $A$ , dans le référentiel  $R$ , se note  $(\vec{L}_A)_{/R}$ .

Remarque – Quand il n’y a pas d’ambiguïté sur le choix du référentiel on peut se contenter de la notation :  $\vec{L}_A$ .

$$(\vec{L}_A)_{/R} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{V}(M_i)_{/R}$$

$\overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{V}(M_i)_{/R}$  étant le moment cinétique au point  $A$  du point matériel  $M_i(m_i)$  de vitesse  $\vec{V}(M_i)_{/R}$ .

Remarque – Pour une répartition volumique de masse, on aura :

$$(\vec{L}_A)_{/R} = \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \mu(M) d\tau_M \vec{V}(M)_{/R}$$

### 1.1.2.7 Changement de point pour le calcul du moment cinétique

Le moment cinétique dépend du point où on le calcule. Il existe une relation de passage permettant de l’exprimer au point  $B$  lorsqu’on le connaît en un point  $A$  :

$$(\vec{L}_B)_{/R} = (\vec{L}_A)_{/R} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P}_{/R} \tag{6}$$



Démontrer la relation :  $(\vec{L}_B)_{/R} = (\vec{L}_A)_{/R} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P}_{/R}$ .

**RÉPONSE** Pour la démonstration utilisons le modèle de la répartition discrète de masse, le moment cinétique s’exprime au point  $A$  comme :

$$(\vec{L}_A)_{/R} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{V}(M_i)_{/R}$$

De même au point  $B$ , il s’écrit :

$$\begin{aligned} (\vec{L}_B)_{/R} &= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{BM_i} \wedge m_i \vec{V}(M_i)_{/R} \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{BA} \wedge \vec{V}(M_i)_{/R} + \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{AM_i} \wedge \vec{V}(M_i)_{/R}}_{(\vec{L}_A)_{/R}} \end{aligned}$$

De plus :

$$\sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{BA} \wedge \vec{V}(M_i)_{/R} = \overrightarrow{BA} \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{V}(M_i)_{/R}}_{m\vec{V}(G)} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P}_{/R}$$

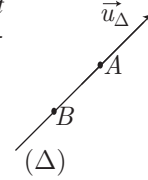
Nous retrouvons bien la relation (6).

### 1.1.2.8 Moment cinétique par rapport à un axe

#### Définition 15

Soit un axe  $\Delta$ , de vecteur directeur unitaire  $\vec{u}_\Delta$ , passant par un point  $A$ . On note  $(L_\Delta)_{/R}$  le moment cinétique du système, étudié dans le référentiel  $R$ , par rapport à l'axe  $\Delta$ .

$$(L_\Delta)_{/R} = \left( \vec{L}_A \right)_{/R} \cdot \vec{u}_\Delta$$



Cette grandeur est indépendante du point de l'axe  $\Delta$ . Considérons en effet deux points  $A$  et  $B$  appartenant à cet axe. La relation (6) nous permet d'écrire que :

$$\left( \vec{L}_B \right)_{/R} \cdot \vec{u}_\Delta = \left( \vec{L}_A \right)_{/R} \cdot \vec{u}_\Delta + \underbrace{\left( \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P}_{/R} \right) \cdot \vec{u}_\Delta}_0$$

Le dernier terme est nul, puisqu'on retrouve dans ce produit mixte deux vecteurs colinéaires ( $\overrightarrow{BA}$  et  $\vec{u}_\Delta$ ).

### 1.1.2.9 Moment dynamique d'un système matériel.

**Définition 16** *Le moment dynamique d'un système est la somme des moments dynamiques de chacun de ses points.*

Cette grandeur se calcule en un point  $A$ , dans le référentiel  $R$ , on la note  $\left( \vec{D}_A \right)_{/R}$ .

Remarque – Quand il n'y aura pas d'ambiguïté sur le choix du référentiel on pourra se contenter de la notation :  $\vec{D}_A$ .

$$\left( \vec{D}_A \right)_{/R} = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}(M_i)_{/R}$$

$\overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{a}(M_i)_{/R}$  étant le moment dynamique du point matériel  $M_i(m_i)$  d'accélération  $\vec{a}(M_i)_{/R}$ .

Remarque – Pour une répartition volumique de masse, on aura :

$$\left( \vec{D}_A \right)_{/R} = \iiint_V \overrightarrow{AM} \wedge \mu(M) d\tau_M \vec{a}(M)_{/R}$$

Comme pour le moment cinétique, cette grandeur dépend du point où on la calcule. Il existe une relation de passage permettant de l'exprimer au point  $B$  lorsqu'on la connaît au point  $A$  :

$$\left( \vec{D}_B \right)_{/R} = \left( \vec{D}_A \right)_{/R} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}_{/R} \quad (7)$$

### 1.1.2.10 Moment dynamique par rapport à un axe.

**Définition 17** *Soit  $\Delta$  un axe de vecteur directeur  $\vec{u}_\Delta$  passant par un point  $A$ . On note*

$(D_\Delta)_{/R}$  le moment dynamique du système, étudié dans le référentiel  $R$  par rapport à l'axe  $\Delta$  :

$$(D_\Delta)_{/R} = (\vec{D}_A)_{/R} \cdot \vec{u}_\Delta$$

Comme pour le moment cinétique, cette grandeur est indépendante du point de l'axe  $\Delta$ . Considérons en effet deux points  $A$  et  $B$  appartenant à l'axe  $\Delta$ . La relation (7) nous permet d'écrire que :

$$(\vec{D}_B)_{/R} \cdot \vec{u}_\Delta = (\vec{D}_A)_{/R} \cdot \vec{u}_\Delta + \underbrace{(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}_{/R}) \cdot \vec{u}_\Delta}_0$$

le dernier terme étant nul, comme produit mixte contenant deux vecteurs colinéaires ( $\overrightarrow{BA}$  et  $\vec{u}_\Delta$ ).

### 1.1.2.11 Relation entre résultante cinétique et résultante dynamique.

Il est aisé de remarquer que, pour un système fermé,  $m = \text{cte}$ , la dérivée par rapport au temps, dans un référentiel  $R$ , de la résultante cinétique est égale à la résultante dynamique :

$$\vec{S}_{/R} = \left( \frac{d\vec{P}_{/R}}{dt} \right)_{/R}$$

### 1.1.2.12 Relation entre moment cinétique et moment dynamique, calculées en un point fixe ou au point $G$

La relation entre moments cinétique et dynamique mérite que l'on s'y attarde un peu plus. Exprimons la dérivée temporelle du moment cinétique calculé en un point  $A$ , par rapport au référentiel  $R$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_A}{dt} &= \sum_{i=1}^N \frac{d\overrightarrow{AM}_i}{dt} \wedge m_i \vec{V}(M_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \frac{d\vec{V}(M_i)}{dt}}_{\vec{D}_A} \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{d\overrightarrow{AM}_i}{dt} \wedge m_i \vec{V}(M_i) + \vec{D}_A \end{aligned}$$

Développons le premier terme du membre de droite :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{d\overrightarrow{AM}_i}{dt} \wedge m_i \vec{V}(M_i) &= \sum_{i=1}^N \frac{d\overrightarrow{AO}}{dt} \wedge m_i \vec{V}(M_i) + \underbrace{\sum_{i=1}^N \frac{d\overrightarrow{OM}_i}{dt} \wedge m_i \vec{V}(M_i)}_{\vec{0}} \\ &= \underbrace{-\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}}_{-\vec{V}(A)} \wedge \underbrace{\sum_{i=1}^N m_i \vec{V}(M_i)}_{m\vec{V}(G)} \end{aligned}$$

Le programme limite cependant l'utilisation de cette dernière relation en un point fixe du référentiel d'étude ou au point  $G$ , centre d'inertie du système matériel. Dans les deux cas nous retiendrons que :

$$\left( \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right)_{/R} = (\vec{D}_A)_{/R} \quad (8)$$

### 1.1.2.13 Énergie cinétique d'un système matériel

On note  $E_C$  l'énergie cinétique du système matériel, par rapport au référentiel  $R$  :

$$E_C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i V^2(M_i)_{/R}$$

Les vitesses étant exprimées par rapport au référentiel  $R$ .

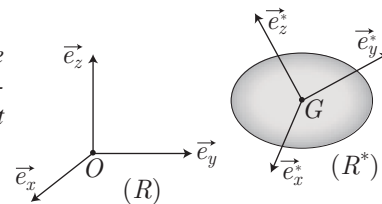
Remarque – Pour une répartition volumique de matière :

$$E_C = \iiint_V \frac{1}{2} \mu(M) d\tau_M V^2(M)_{/R}$$

## 1.1.3 Référentiel du centre de masse

### 1.1.3.1 Définition

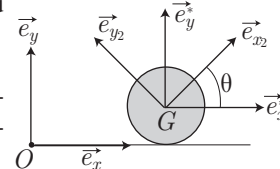
**Définition 18** On appelle référentiel du centre de masse, ou référentiel barycentrique, le référentiel d'origine  $G$ , qui est en translation par rapport au référentiel d'étude ; on le note  $R^*$ .



Prenons l'exemple d'une roue en mouvement par rapport au sol.

Pour cette situation on peut définir trois référentiels :

le référentiel d'étude attaché au sol ( $O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ ), celui attaché à la roue : ( $G, \vec{e}_{x2}, \vec{e}_{y2}, \vec{e}_{z2}$ ) et son référentiel barycentrique : ( $G, \vec{e}_x^*, \vec{e}_y^*, \vec{e}_z^*$ ).



Remarque – On exprime généralement les grandeurs calculées dans  $R^*$  en rajoutant l'exposant  $*$ .

$R^*$  ayant un mouvement de translation par rapport à  $R$  on retiendra que :

$$\vec{\Omega}_{R^*/R} = \vec{0}$$

### 1.1.3.2 Grandeurs cinétiques dans $R^*$

Par définition  $G$  est fixe dans  $R^*$ .

Dans le référentiel barycentrique, les résultantes cinétique et dynamique sont nulles :

$$\vec{P}^* = m \vec{V}^*(G) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{S}^* = m \vec{a}^*(G) = \vec{0}$$

Dans le référentiel barycentrique les moments cinétique et dynamique sont indépendants des points où on les calcule. Ceci se déduit des relations (6) et (7) :

$$\vec{L}_B^* = \vec{L}_A^* + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{P}^* = \vec{L}_A^* \quad \text{et} \quad \vec{D}_B^* = \vec{D}_A^* + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}^* = \vec{D}_A^*$$



Exprimer la vitesse et l'accélération d'un point  $M$  dans le référentiel barycentrique en fonction de sa vitesse et de son accélération dans le référentiel  $R$ .

**RÉPONSE** Pour exprimer  $\vec{V}^*(M)$  utilisons la relation (2), appliquée entre  $R$  et  $R^*$  :

$$\vec{V}(M)_{/R} = \vec{V}(M)_{/R^*} + \vec{V}(G)_{/R} + \vec{\Omega}_{R^*/R} \wedge \overrightarrow{GM}$$

où :

$$\vec{\Omega}_{R^*/R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(M)_{/R^*} = \vec{V}(M)_{/R} - \vec{V}(G)_{/R}$$

De même on montre que :  $\vec{a}(M)_{/R^*} = \vec{a}(M)_{/R} - \vec{a}(G)_{/R}$ .

### 1.1.3.3 Théorèmes de Koenig pour les moments cinétique et dynamique

Considérons un système de masse  $m$ , de centre d'inertie  $G$ , étudié dans le référentiel  $R$ . Notons  $R^*$  son référentiel barycentrique. Les théorèmes qui suivent lient les moments cinétique et dynamique calculés dans  $R$  à ceux calculés dans  $R^*$ .

$$\left( \vec{L}_A \right)_{/R} = \vec{L}^* + \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{V}(G)_{/R} \quad (9)$$

$$\left( \vec{D}_A \right)_{/R} = \vec{D}^* + \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{a}(G)_{/R} \quad (10)$$

Le moment cinétique dans  $R$  au point  $A$  se calcule comme la somme du moment cinétique dans  $R^*$  et du moment cinétique d'une particule fictive de masse  $m$  placée en  $G$ .

Il en est de même pour le moment dynamique.



Démontrer le théorème de Koenig pour le moment cinétique.

**RÉPONSE** Pour démontrer ce théorème utilisons le modèle de la répartition discrète de matière  $\{M_i(m_i)\}$ . On sait que dans  $R^*$  le moment cinétique est indépendant du point où on le calcule; choisissons le point  $G$ .

Par définition :  $\vec{L}^* = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{GM}_i \wedge m_i \vec{V}^*(M_i)$ .

D'après la relation de composition des vitesses :  $\vec{V}(M_i)_{/R^*} = \vec{V}(M_i)_{/R} - \vec{V}(G)_{/R}$ , on peut écrire pour tout point  $A$  :

$$\begin{aligned} \vec{L}^* &= \sum_{i=1}^N \left( \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AM}_i \right) \wedge m_i \left( \vec{V}(M_i)_{/R} - \vec{V}(G)_{/R} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \overrightarrow{GA} \wedge m_i \vec{V}(M_i) - \sum_{i=1}^N \overrightarrow{GA} \wedge m_i \vec{V}(G)_{/R} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{V}(M_i)_{/R} - \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{V}(G)_{/R} \\ &= \overrightarrow{GA} \wedge m \vec{V}(G)_{/R} - \overrightarrow{GA} \wedge m \vec{V}(G)_{/R} + \left( \vec{L}_A \right)_{/R} - \overrightarrow{AG} \wedge m \vec{V}(G)_{/R} \end{aligned}$$

On en déduit donc que :

$$\left(\vec{L}_A\right)_{/R} = \vec{L}^* + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}(G)_{/R}$$

Il est intéressant de remarquer que les moments cinétique et dynamique dans  $R^*$  s'identifient aux moments cinétique et dynamique dans  $R$  exprimés au point  $G$  :

$$\vec{L}^* = \left(\vec{L}_G\right)_{/R} \quad \text{et} \quad \vec{D}^* = \left(\vec{D}_G\right)_{/R}$$

### 1.1.3.4 Théorème de Koenig pour l'énergie cinétique

On note  $E_C^*$  l'énergie cinétique du système calculée dans  $R^*$  :

$$(E_C)_{/R} = E_C^* + \frac{1}{2}m V^2(G)_{/R} \quad (11)$$

L'énergie cinétique du système par rapport au référentiel  $R$  est égale à son énergie cinétique par rapport au référentiel  $R^*$  à laquelle on ajoute celle d'une particule fictive placée en  $G$ , de masse  $m$ .



Démontrer le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique.

**RÉPONSE** On représente toujours le système par un ensemble de points matériels  $\{M_i(m_i)\}$  :

$$E_C^* = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i (V^*(M_i))^2$$

et :

$$\begin{aligned} \vec{V}^*(M_i) &= \vec{V}(M_i)_{/R} - \vec{V}(G)_{/R} \\ \Rightarrow V^{*2}(M_i) &= V^2(M_i)_{/R} + V^2(G) - 2\vec{V}(M_i)_{/R} \cdot \vec{V}(G)_{/R} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_C^* = (E_C)_{/R} + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_i V^2(G)_{/R} - \sum_{i=1}^N m_i \vec{V}(M_i)_{/R} \cdot \vec{V}(G)_{/R}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$E_C^* = (E_C)_{/R} + \frac{1}{2}m V^2(G)_{/R} - \vec{V}(G)_{/R} \cdot m \vec{V}(G)_{/R}$$

d'où l'on déduit la relation :

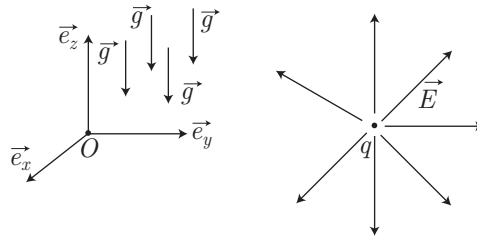
$$(E_C)_{/R} = E_C^* + \frac{1}{2}m V^2(G)_{/R}$$

## 1.1.4 Champ de vecteurs, torseurs

### 1.1.4.1 Champ de vecteurs

**Définition 19** Une champ de vecteurs  $\mathcal{C}$  est l'application qui tout point  $M$  d'une partie de l'espace fait correspondre un vecteur  $\vec{A}(M)$ .

On peut citer comme exemple le champ de gravitation au voisinage de la Terre, qui à chaque point  $M$  fait correspondre le vecteur  $\vec{g}(M) = \vec{g}$ . De même le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle  $q$  placée en  $O$ , qui à chaque point  $M$  différent de  $O$  fait correspondre le vecteur :  $\vec{E}(M) = \frac{q \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 (OM)^3}$



### 1.1.4.2 Résultante et moment associés à un champ de vecteurs

**Définition 20** Considérons un champ de vecteurs qui à tout point  $M_i$  fait correspondre le vecteur  $\vec{A}(M_i)$ . La résultante du champ de vecteurs est définie par :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{A}(M_i)$$

**Définition 21** Le moment, au point  $O$ , du champ de vecteurs est la somme :

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^N \vec{OM}_i \wedge \vec{A}(M_i)$$

### 1.1.4.3 Changement de point pour le calcul du moment

Considérons deux points  $O$  et  $O'$ . Il existe une relation simple entre  $\vec{M}_O$  et  $\vec{M}_{O'}$  :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= \sum_{i=1}^N \vec{O'M}_i \wedge \vec{A}(M_i) = \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{O'O} \wedge \vec{A}(M_i)}_{\vec{O'O} \wedge \vec{R}} + \underbrace{\sum_{i=1}^N \vec{OM}_i \wedge \vec{A}(M_i)}_{\vec{M}_O} \quad (12) \\ \Rightarrow \vec{M}_{O'} &= \vec{M}_O + \vec{O'O} \wedge \vec{R} \quad (13) \end{aligned}$$

### 1.1.4.4 Torseurs

Un torseur  $\mathcal{T}$ , associé au champ de vecteurs  $\mathcal{C}$  se définit par la donnée du couple de vecteurs :  $(\vec{R}, \vec{M}_O)$

**Définition 22** On appelle éléments de réduction au point  $O$  du torseur  $\mathcal{T}_O$ , la résultante  $\vec{R}$  et le moment  $\vec{M}_O$  du champ de vecteurs auquel il est associé.

### 1.1.4.5 Opérations sur les torseurs

Soient deux torseurs dont on se donne les éléments de réduction au même point  $O$  :  $(\mathcal{T}_1)_O$  et  $(\mathcal{T}_2)_O$ . On définit les opérations suivantes :

- *Somme de deux torseurs* : on peut définir le torseur somme, dont les éléments de réduction au point  $O$  sont donnés par :

$$\mathcal{T}_O \left( \vec{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{R}}_1 + \vec{\mathcal{R}}_2, \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_{1O} + \vec{\mathcal{M}}_{2O} \right)$$

- *Egalité de deux torseurs* : l'égalité de deux torseurs se traduit par l'égalité entre leurs résultantes et entre leurs moments en un point (donc de leurs moments en tout point) .

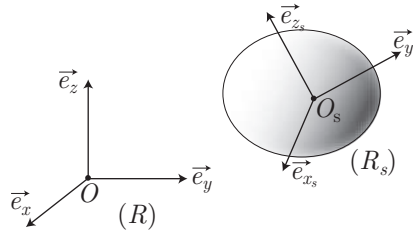
On définit de plus le torseur nul, ayant pour résultante  $\vec{\mathcal{R}} = \vec{0}$  et pour moment en tout point  $\vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$  (pour cela il suffit qu'il soit nul en un point).

## 1.1.5 Notion de solide

### 1.1.5.1 Définition

**Définition 23** On appelle solide un ensemble de points dont les distances mutuelles ne varient pas au cours du temps.

À tout solide  $S$  on associe un référentiel  $R_S = \{O_S, \vec{e}_{x_S}, \vec{e}_{y_S}, \vec{e}_{z_S}\}$ , qui lui est attaché. À chaque instant le solide est immobile dans  $R_S$ .



Remarque – Il ne faut pas confondre le référentiel attaché au solide et le référentiel barycentrique : le solide est immobile dans  $R_S$ , pas dans  $R^*$ .

### 1.1.5.2 Champ des vitesses d'un solide

Considérons deux points  $M$  et  $N$  appartenant à un même solide. La relation de composition des vitesses entre un référentiel  $R$  et le référentiel  $R_S$  (2) donne pour  $M$  et  $N$  :

$$\begin{cases} \vec{V}(M)_{/R} = \vec{V}(M)_{/R_S} + \vec{V}(O_S)_{/R} + \vec{\Omega}_{R_S/R} \wedge \overrightarrow{O_S M} \\ \vec{V}(N)_{/R} = \vec{V}(N)_{/R_S} + \vec{V}(O_S)_{/R} + \vec{\Omega}_{R_S/R} \wedge \overrightarrow{O_S N} \end{cases}$$

avec  $\vec{V}(M)_{/R_S} = \vec{V}(N)_{/R_S} = \vec{0}$ .

De ces égalités on déduit, en éliminant le terme  $\vec{V}(O_S)_{/R}$ , la relation du champ des vitesses pour un solide :

$$\vec{V}(N)_{/R} = \vec{V}(M)_{/R} + \overrightarrow{NM} \wedge \vec{\Omega}_{R_S/R} \quad (14)$$

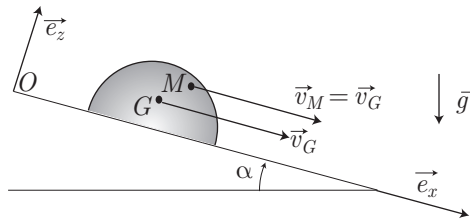


### 1.1.5.3 Solide en translation dans un référentiel $R$

**Définition 24** Un solide est dit en translation par rapport au référentiel  $R$  lorsque  $\vec{\Omega}_{R_S/R} = \vec{0}$

Il en découle :  $\vec{V}(N)_{/R} = \vec{V}(M)_{/R}$ . Tous les points du solide ont même vitesse ; ce sera aussi la vitesse de  $G$ , centre d'inertie du solide.

On peut se donner comme exemple une demi-sphère qui glisse le long de la plus grande pente d'un plan incliné d'un angle  $\alpha$  : tous les points de la demi-sphère ont même vitesse.



L'égalité des vitesses entraîne des propriétés intéressantes :

- l'énergie cinétique du solide dans ce référentiel s'exprime alors simplement :

$$E_C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \frac{1}{2} m V^2(G)$$

$m$  étant la masse du système. On reconnaît l'énergie cinétique d'un point matériel fictif positionné en  $G$ , de masse égale à celle du système.

- le moment cinétique calculé en un point  $A$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{L}_A &= \sum_{i=1}^N \vec{AM}_i \wedge m_i \vec{V}(M_i) = \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{AM}_i \right) \wedge \vec{V}(G) \\ &\Rightarrow \vec{L}_A = \vec{AG} \wedge m \vec{V}(G) \end{aligned}$$

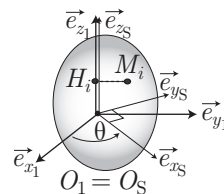
On reconnaît le moment cinétique, au point  $A$ , d'un point matériel fictif placé en  $G$  et ayant pour masse celle du système.

Dans le cas d'un mouvement de translation, tout se passe comme si le solide était équivalent à un point matériel de masse  $m$  positionné en  $G$ .

## 1.1.6 Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

### 1.1.6.1 Moment cinétique par rapport à un point de l'axe

Considérons  $R_1$  le référentiel d'étude,  $\mathcal{S}$  le solide et  $R_S$  le référentiel attaché au solide. À chaque instant l'origine  $O_S$  est confondue avec  $O_1$ , et  $\vec{e}_{z_S} = \vec{e}_{z_1}$ . On note  $\vec{\Omega} = \dot{\alpha} \vec{e}_{z_1}$  le vecteur rotation de  $R_S$  par rapport à  $R_1$ . On désigne par  $\Delta$  l'axe commun  $O_1 \vec{e}_{z_1}$ ,  $O_1 \vec{e}_{z_S}$ .



Pour tout point  $M_i$  du solide, la vitesse par rapport au référentiel  $R_1$  s'écrit :

$$\vec{V}(M_i) = \vec{V}(H_i) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{H_i M_i}$$

$H_i$  étant le projeté orthogonal de  $M_i$  sur l'axe de rotation :

$$\vec{V}(H_i) = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(M_i) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{H_i M_i}$$

Exprimons le moment cinétique du solide en un point  $A$  appartenant à l'axe de rotation :

$$\vec{L}_A = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i \vec{V}(M_i) = \sum_{i=1}^N \overrightarrow{AM_i} \wedge m_i (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{H_i M_i})$$

Développons le double produit vectoriel :

$$\overrightarrow{AM_i} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{H_i M_i}) = \vec{\Omega} (\overrightarrow{AM_i} \cdot \overrightarrow{H_i M_i}) - \overrightarrow{H_i M_i} (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\Omega})$$

et remarquons que  $\overrightarrow{AM_i} \cdot \overrightarrow{H_i M_i} = (\overrightarrow{AH_i} + \overrightarrow{H_i M_i}) \cdot \overrightarrow{H_i M_i} = (H_i M_i)^2$  puisque  $\overrightarrow{AH_i}$  et  $\overrightarrow{H_i M_i}$  sont perpendiculaires. Il s'ensuit que :

$$\vec{L}_A = \left( \sum_{i=1}^N m_i H_i M_i^2 \right) \vec{\Omega} - \left( \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{H_i M_i} (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\Omega}) \right)$$

Nous obtenons deux termes, le premier indépendant de  $A$  et colinéaire à  $\vec{\Omega}$ , le second dépendant de  $A$  et perpendiculaire à  $\vec{\Omega}$ .

**Définition 25** On appelle moment d'inertie du solide par rapport à l'axe  $\Delta$ , la quantité :

$$J = \sum_{i=1}^N m_i H_i M_i^2 \text{ (en } \text{kg} \cdot \text{m}^2 \text{)}$$

Remarque – Par définition le moment d'inertie est un grandeur additive.

Posons  $\vec{L}_{A\perp} = \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{H_i M_i} (\overrightarrow{AM_i} \cdot \vec{\Omega})$ , composante du moment cinétique au point

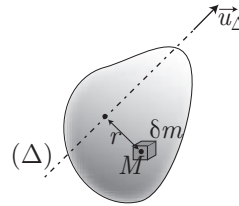
$A$  perpendiculaire à  $\vec{\Omega}$ . Le moment cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe, calculé en un point  $A$  de cet axe, est donné par :

$$\left( \vec{L}_A \right)_{/R} = J_\Delta \vec{\Omega} + \vec{L}_{A\perp} \quad (15)$$

Remarque – Le moment cinétique par rapport à l'axe  $\Delta$  est donné par la relation :  $L_\Delta = \vec{L}_A \cdot \vec{u}_\Delta = J_\Delta \Omega$ , puisque  $\vec{u}_\Delta$  est colinéaire à  $\vec{\Omega}$ . On retrouve bien le fait que cette grandeur est indépendante du point  $A$  de l'axe.

Toutes les relations précédentes ont été établies pour le cas d'une répartition discrète de masse. Dans le cas d'une répartition continue, de type volumique par exemple, le moment d'inertie s'exprime par :

$$J_{\Delta} = \iiint_{\mathcal{V}} dm (HM)^2 = \iiint_{\mathcal{V}} \mu(M) d\tau_M r^2$$



$r$  étant la distance du point  $M$  à l'axe  $\Delta$  de rotation.

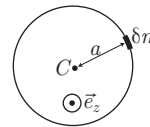


Exprimer le moment d'inertie d'un cerceau,  $\mathcal{C}$ , de rayon  $a$  et de centre  $C$ , contenu dans le plan  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  par rapport à l'axe  $(C, \vec{e}_z)$ .

**RÉPONSE**

Tous les éléments  $\delta l$  de masse  $\delta m$  sont à égale distance  $a$  de l'axe  $(C, \vec{e}_z)$ , auquel cas :

$$J_{(C, \vec{e}_z)} = \oint_C \delta m (CM)^2 = \oint_C \delta m a^2 = a^2 \oint_C \delta m = ma^2$$



**1.1.6.2 Cas remarquables.**

Nous admettons que  $\vec{L}_{A\perp} = \vec{0}$  pour les cas suivants :

1. L'axe de rotation est aussi axe de symétrie de révolution pour le solide, par exemple un cylindre qui tourne autour de son axe de révolution (fig. 1).
2. Le solide est contenu dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation auquel appartient aussi le point  $A$  ; par exemple un disque qui tourne dans le plan  $(O, x, y)$  (fig. 2).

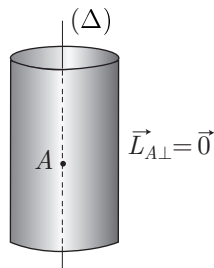


figure 1

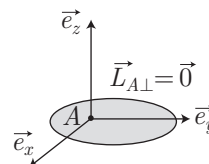


figure 2

**1.1.6.3 Énergie cinétique**

Exprimons l'énergie cinétique par rapport au référentiel  $R$  d'étude :

$$E_C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i V_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \left( \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{H_i M_i} \right)^2$$

avec  $\vec{\Omega}$  perpendiculaire à  $\overrightarrow{H_i M_i}$ . Ainsi :

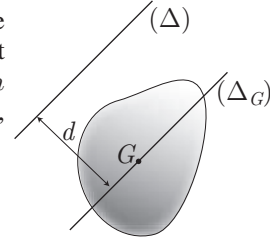
$$E_C = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \Omega^2 H_i M_i^2 = \frac{\Omega^2}{2} \sum_{i=1}^N m_i H_i M_i^2 = \frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega^2 \quad (16)$$

$$\Rightarrow (E_C)_{/R} = \frac{1}{2} J_{\Delta} \Omega^2 \quad (17)$$

### 1.1.6.4 Théorème de Huygens

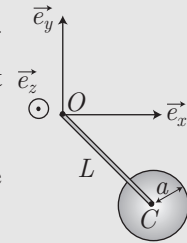
Soit  $J_{\Delta G}$  le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe  $\Delta_G$  passant par le centre d'inertie  $G$  et soit  $J_{\Delta}$  son moment d'inertie par rapport à un axe  $\Delta$  parallèle à l'axe  $\Delta_G$ . Si  $m$  désigne la masse du solide et  $d$  la distance entre les deux axes, le *théorème de Huygens* stipule que :

$$J_{\Delta} = J_{\Delta G} + md^2$$



On considère le système constitué d'une tige de longueur  $L$  et d'un disque de centre  $C$  et de rayon  $a$ , contenus dans le plan  $Oxy$ .

La tige et le disque ont même masse  $m$ . On donne le moment d'inertie de la tige par rapport à  $O \vec{e}_z$  :  $(J_1)_{O \vec{e}_z} = \frac{mL^2}{3}$  et le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe  $C \vec{e}_z$  :  $(J_2)_{C \vec{e}_z} = \frac{ma^2}{2}$ . Exprimer le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe  $O \vec{e}_z$ .



**RÉPONSE** Par additivité, le moment d'inertie de l'ensemble s'écrit :

$$J_{O \vec{e}_z} = (J_1)_{O \vec{e}_z} + (J_2)_{O \vec{e}_z}$$

tandis que le théorème de Huygens fournit

$$(J_2)_{O \vec{e}_z} = (J_2)_{C \vec{e}_z} + mL^2 = \frac{ma^2}{2} + mL^2$$

Il s'ensuit que :

$$J_{O \vec{e}_z} = \frac{mL^2}{3} + \frac{ma^2}{2} + mL^2 = \frac{4}{3}mL^2 + \frac{ma^2}{2}$$

## 1.1.7 Cinématique des solides en contact

### 1.1.7.1 Vitesse de glissement

Considérons deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en mouvement par rapport à un référentiel  $R$ , de manière à ce qu'une partie de leurs surfaces soient en contact. Supposons, pour simplifier, que le contact soit ponctuel. Au niveau du contact, il est possible de définir :

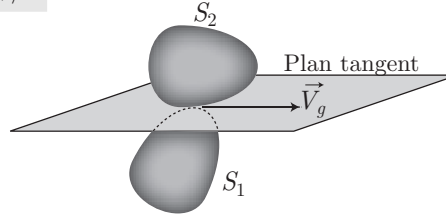
- le point géométrique de contact :  $I$ .
- le point coïncident de  $I$  par rapport à  $S_1$  :  $I_1$ .
- le point coïncident de  $I$  par rapport à  $S_2$  :  $I_2$ .

**Définition 26** On appelle *vitesse de glissement* du solide  $S_2$  par rapport au solide  $S_1$  :

$$\vec{V}_{g_{S_2/S_1}} = \vec{V}(I_2)_{/S_1} = \vec{V}(I_2)_{/R} - \vec{V}(I_1)_{/R}$$

Remarquons que :

- $\vec{V}_{g_{S_2/S_1}}$  appartient au plan tangent à  $S_2$  et  $S_1$ .
- $\vec{V}_{g_{S_2/S_1}}$  est indépendante du référentiel d'étude  $R$ .



### 1.1.7.2 Cas du non glissement

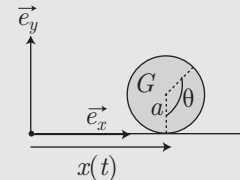
Lorsque les solides ne glissent pas l'un sur l'autre on retiendra les deux relations équivalentes :

$$\vec{V}_{g_{S_2/S_1}} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}(I_2)_{/R} = \vec{V}(I_1)_{/R}$$



On considère un disque de centre  $G$ , de rayon  $a$ , qui roule sur un plan horizontal. On admet qu'au cours du mouvement,  $G$  reste dans le même plan horizontal. On note  $x(t)$  l'abscisse de  $G$  et  $\theta$  l'angle qui mesure la rotation.

1. Exprimer la vitesse de glissement du disque sur le plan horizontal.
2. En déduire une relation entre  $\dot{x}$  et  $\dot{\theta}$  dans le cas du roulement sans glissement.



#### RÉPONSE

1. Notons  $x(t)$  l'abscisse du centre  $G$  du disque  $\mathcal{D}$  de rayon  $a$  et  $\theta(t)$  l'angle de rotation. Exprimons la vitesse de glissement du disque par rapport au sol  $S$  :  $\vec{V}_{g_{\mathcal{D}/S}}$ . Par définition :

$$\vec{V}_{g_{\mathcal{D}/S}} = \vec{V}(I_{\mathcal{D}})_{/S} - \vec{V}(I_S)_{/S}$$

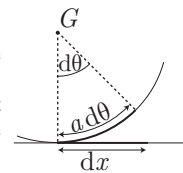
$I_{\mathcal{D}}$  étant le point coïncident à  $I$  (point de contact entre le cylindre et le sol) par rapport au disque et  $I_S$  étant le point coïncident à  $I$  par rapport au sol.

$\vec{V}(I_S)_{/S} = \vec{0}$  de plus en utilisant la relation (14) :

$$\vec{V}(I_{\mathcal{D}})_{/S} = \vec{V}(G)_{/S} + \vec{\Omega}_{\mathcal{D}/S} \wedge \vec{GI} = \dot{x} \vec{e}_x + \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge (-a \vec{e}_y) = (\dot{x} + a\dot{\theta}) \vec{e}_x$$

2. Le cas du roulement sans glissement donne donc :  $\dot{x} = -a\dot{\theta}$ .

Il est intéressant de donner une interprétation géométrique de cette dernière relation : au cours d'une évolution temporelle élémentaire, nous avons :  $|dx| = a|d\theta|$ . Le terme  $|dx|$  représente la distance parcourue par  $G$  pendant  $dt$ , celle-ci est égale à  $|a d\theta|$ , longueur dont a tourné le disque pendant le même intervalle de temps  $dt$ .



## 1.2 Dynamique des systèmes matériels

### 1.2.1 Torseur des efforts

#### 1.2.1.1 Cas général

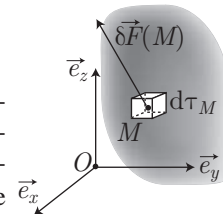
Soit un système  $\mathcal{S}$  constitué de  $N$  points matériels  $M_i$  chacun de masse  $m_i$ , étudié dans un référentiel  $R$ . Chaque point  $M_i$  est soumis à la force  $\vec{F}_i$ . L'ensemble des forces

auquel  $\mathcal{S}$  est soumis constitue un champ de vecteurs auquel il est possible d'associer un torseur : *le torseur des efforts*.

Le torseur des efforts se caractérise par ses éléments de réduction en un point  $O$  :

$$\vec{\mathcal{R}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_O = \sum_{i=1}^N \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i$$

Le système pourra, dans certains cas, être représenté par une distribution continue de matière. Dans le cas d'une répartition volumique par exemple, chaque élément  $d\tau_M$ , de masse  $\delta m$ , équivaut à un point matériel soumis à la force  $\delta \vec{F}$ . Les éléments de réduction du torseur en un point  $O$  seront alors :



$$\vec{\mathcal{R}} = \iiint_V \delta \vec{F} \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_O = \iiint_V \vec{OM} \wedge \delta \vec{F}$$

**1.2.1.2 Glisseur et couple**

- On appelle *glisseur* un torseur pour lequel il existe au moins un point  $A$  où le moment s'annule. Le calcul du moment en un point  $C$ , donne donc :

$$\vec{\mathcal{M}}_C = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{CA} \wedge \vec{\mathcal{R}} = \vec{CA} \wedge \vec{\mathcal{R}}$$

Dans ce cas le glisseur est équivalent à une force de point d'application  $A$ .

- On appelle *couple*, un torseur pour lequel la résultante est nulle. Dans ce cas le moment du torseur est indépendant du point où on le calcule :

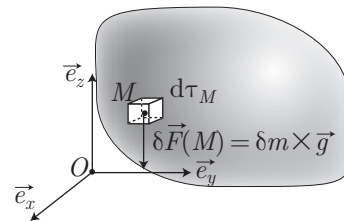
$$\vec{\mathcal{M}}_B = \vec{\mathcal{M}}_A + \vec{BA} \wedge \vec{0} = \vec{\mathcal{M}}_A$$

**1.2.1.3 Torseur des efforts de pesanteur**

Considérons une répartition volumique de masse, de centre d'inertie  $G$  et de masse  $m$ , étudiée dans un référentiel  $R$ . Chaque élément de volume  $d\tau_M$  de masse  $\delta m$  subit la force  $\delta \vec{P} = \delta m \vec{g}$ .

On peut exprimer la somme des forces élémentaires comme étant la résultante des efforts de pesanteur :

$$\vec{\mathcal{R}} = \iiint_V \delta m \vec{g} = \left( \iiint_V \delta m \right) \vec{g} = m \vec{g} = \vec{P}$$



On retrouve alors ce que l'on a défini jusque là comme le poids du système.

Exprimons de même le moment des efforts au point  $O$ . Chaque volume élémentaire  $d\tau_M$ , construit autour d'un point  $M$  du système subissant la force  $\delta \vec{P}$  de moment en  $O$  :  $\delta \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OM} \wedge \delta \vec{P}$ . On en déduit alors le moment résultant :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O &= \iiint_V \vec{OM} \wedge \delta m \vec{g} = \underbrace{\iiint_V \delta m \vec{OM}}_{m \vec{OG}} \wedge \vec{g} \\ &\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OG} \wedge \vec{P} \end{aligned}$$

Les efforts de pesanteur peuvent donc être représentés par un torseur dont les éléments de réduction au point  $O$  sont donnés par :

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{P} \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{OG} \wedge m\vec{g}$$

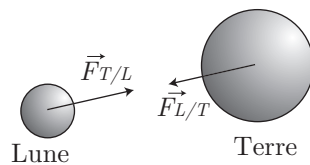
Étant donné que  $\vec{\mathcal{M}}_G = \vec{0}$ , les efforts de pesanteur sont équivalents à un glisseur de point d'application  $G$ .

#### 1.2.1.4 Torseur des efforts intérieurs à un système

**Définition 27** On appelle *efforts intérieurs*, les efforts qui ont pour origine une partie qui appartient au système, les autres seront nommés *efforts extérieurs*.

Pour distinguer les efforts intérieurs des efforts extérieurs il faudra préciser avec soin le système sur lequel on travaille. Par exemple pour l'ensemble Terre-Lune :

- Si le système étudié est la Terre, l'action de la Lune sur cette dernière sera un effort extérieur .
- Si le système étudié est l'ensemble Terre-Lune, l'action de la Lune sur la Terre sera un effort intérieur.



Considérons une répartition discrète de masse  $\{M_i(m_i)\}$  définissant un système  $\mathcal{S}$ . Notons  $\vec{F}_{i \rightarrow j}$  la force qu'exerce  $M_i$  sur  $M_j$  et  $\vec{F}_{j \rightarrow i}$  la force qu'exerce  $M_j$  sur  $M_i$ . D'après la troisième loi de Newton, énoncée en première année :

$$\vec{F}_{i \rightarrow j} = -\vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Si on applique ce raisonnement au système entier, les forces qui agissent sur les points  $M_i$  vont s'annuler deux à deux ; on arrive à la conclusion que la résultante des efforts intérieurs est nulle :

$$\vec{\mathcal{R}}_{\text{int}} = \vec{0}$$

De même, si l'on définit la somme des moments de ces deux forces en un point  $O$  :

$$\vec{OM}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} + \vec{OM}_j \wedge \vec{F}_{i \rightarrow j} = (\vec{OM}_i - \vec{OM}_j) \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{M}_j \vec{M}_i \wedge \vec{F}_{j \rightarrow i} = \vec{0}$$

car, toujours d'après la troisième loi de Newton,  $\vec{F}_{j \rightarrow i}$  est colinéaire à  $\vec{M}_j \vec{M}_i$ . Il s'ensuit que :

$$\vec{\mathcal{M}}(O)_{\text{int}} = \vec{0}$$

Ce raisonnement, appliqué au système entier, nous pousse à conclure que le moment, en tout point, des efforts intérieurs est nul :

Le torseur des efforts intérieur est équivalent au torseur nul :  $\mathcal{T}_{\text{int}} = 0$

## 1.2.2 Les principes de la dynamique en référentiel galiléen.

### 1.2.2.1 Principe fondamental de la dynamique.

Dans un référentiel galiléen, le torseur dynamique d'un système matériel fermé de masse  $m$ , est égal au torseur des efforts extérieurs qui agissent sur le système.

Remarque – En chaque point, les éléments de réduction des deux torseurs sont donc égaux.

### 1.2.2.2 Théorème de la résultante dynamique

L'égalité précédente entre torseurs implique une première relation, traduisant le fait que dans un référentiel galiléen  $R$  la résultante dynamique  $m \vec{a}(G)_{/R}$  est égale à la résultante du torseur des efforts extérieurs  $\vec{\mathcal{R}}_{\text{ext}}$  :

$$\vec{\mathcal{R}}_{\text{ext}} = m \vec{a}(G)_{/R} \quad (18)$$

### 1.2.2.3 Théorème du moment cinétique en un point fixe ou en $G$

Le principe fondamental implique aussi une seconde relation associée à l'égalité des moments. Effectivement, en tout point  $A$  le moment du torseur des efforts extérieurs  $\vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}}$  est égal au moment dynamique du système  $\vec{D}_A$ .

Le programme limitant l'utilisation de cette relation en un point fixe ou au point  $G$  :

$\vec{D}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$ . Nous retiendrons donc la relation suivante appelée théorème du moment cinétique :

$$\left( \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right)_{/R} = \vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}} \quad (19)$$

Remarque – Cette dernière relation ne peut être appliquée qu'en un point fixe de  $R$  ou en  $G$ .

### 1.2.2.4 Principe des actions réciproques

Considérons deux systèmes  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  en interaction. Notons  $\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}$  le torseur des efforts qu'exerce  $\mathcal{S}_1$  sur  $\mathcal{S}_2$  et  $\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}$  le torseur des efforts qu'exerce  $\mathcal{S}_2$  sur  $\mathcal{S}_1$ . Le principe des actions réciproques stipule que :

$$\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2} = -\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}$$

ce qui signifie qu'en tout point  $A$  :

$$\vec{\mathcal{R}}(\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}) = -\vec{\mathcal{R}}(\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}) \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_A(\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}) = -\vec{\mathcal{M}}_A(\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2})$$

### 1.2.2.5 Cas de la statique

Lorsque chaque point du système est immobile, on se trouve dans le cas de la statique où, quel que soit le point  $A$  :

$$\vec{a}(G)_{/R} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathcal{R}}_{\text{ext}} = \vec{0} \text{ et } \vec{L}_A = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}} = \vec{0}$$



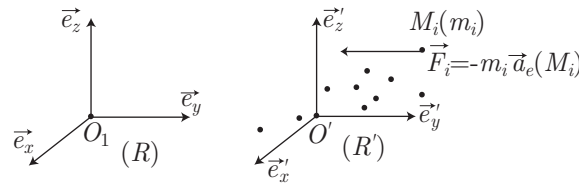
### 1.2.3 Référentiels non galiléens

#### 1.2.3.1 Efforts d'inertie d'entraînement

Soient deux référentiels  $R$  (galiléen) et  $R'$  (non galiléen). Considérons un système matériel de masse  $m$  et de centre d'inertie  $G$  étudié dans  $R'$ .

##### 1. $R'$ en translation par rapport à $R$

Pour exprimer les efforts d'inertie d'entraînement considérons que le système est modélisé par une répartition discrète de masse  $\{M_i(m_i)\}$ .



Chaque point matériel  $M_i$  subit la force d'inertie dans  $R'$  :  $\vec{F}_i = -m_i \vec{a}_e(M_i)$  avec  $\vec{a}_e(M_i) = \vec{a}(O')_{/R}$ . Donc  $\vec{F}_i = -m_i \vec{a}(O')_{/R}$ , d'où l'on déduit la résultante des efforts d'inertie :

$$\vec{R} = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{a}(O')_{/R} = -\vec{a}(O')_{/R} \sum_{i=1}^N m_i = -m \vec{a}(O')_{/R}$$

Quant au moment des efforts, il est donné au point  $O'$  par :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{O'} &= - \sum_{i=1}^N \overrightarrow{O'M_i} \wedge m_i \vec{a}(O')_{/R} = - \left( \sum_{i=1}^N m_i \overrightarrow{O'M_i} \right) \wedge \vec{a}(O')_{/R} \\ &\Rightarrow \vec{M}_{O'} = -m \overrightarrow{O'G} \wedge \vec{a}(O')_{/R} = \overrightarrow{O'G} \wedge \vec{R} \end{aligned}$$

Ce moment étant nul en  $G$ , ces efforts sont équivalents à un glisseur de point d'application  $G$ .

Pour un mouvement de translation de  $R'$  par rapport à  $R$ , les efforts d'inertie d'entraînement sont équivalents à une force de point d'application  $G$  :  $\vec{R} = -m \vec{a}(O')_{/R}$ .

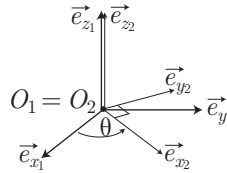
##### 2. $R'$ a un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe de $R$

Dans ce cas :  $\vec{a}_e(M_i) = -\omega^2 \overline{H_i M_i}$ , avec  $\vec{\Omega}_{R'/R} = \omega \vec{e}_z$ ,  $H_i$  étant le projeté orthogonal de  $M_i$  par rapport à l'axe de rotation  $(O_1, \vec{e}_z)$ . D'où l'expression de la résultante :

$$\vec{R} = m\omega^2 \overline{H_G G}$$

$H_G$  étant le projeté de  $G$  sur l'axe de rotation.

Remarque – Dans ce cas le calcul du moment n'est pas aussi simple que précédemment. Il faut faire le calcul pour chaque cas.



On retiendra donc pour les deux cas (translation et rotation) l'expression de la résultante des efforts d'inertie d'entraînement :

$$\vec{\mathcal{R}} = -m \vec{a}_e(G)_{/R}$$

### 1.2.3.2 Efforts d'inertie de Coriolis

- Dans le cas où  $R'$  est en translation par rapport à  $R$ , ces efforts sont nuls puisque  $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{0}$ .
- Dans le cas où  $R'$  est en mouvement de rotation autour d'un axe fixe de  $R$  la résultante des efforts est donnée par :

$$\vec{\mathcal{R}} = -m \vec{a}_c(G)_{/R} = -2m \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{V}(G)_{/R}$$

Remarque – *Le calcul du moment des efforts de Coriolis n'est pas simple en général.*

### 1.2.3.3 Théorèmes de la résultante cinétique et du moment cinétique en référentiel non galiléen.

En référentiel non galiléen les théorèmes du moment cinétique et de la résultante cinétique pour un système fermé sont modifiés comme suit :

$$m \vec{a}(G)_{/R'} = \vec{\mathcal{R}}_{\text{ext}} + \vec{\mathcal{R}}_{\text{inertie}} \quad \text{et} \quad \left( \frac{d\vec{L}_A}{dt} \right)_{/R'} = \vec{\mathcal{M}}_{A\text{ext}} + \vec{\mathcal{M}}_{A\text{inertie}}$$

Remarque – *Le théorème du moment cinétique ne s'applique qu'en un point fixe de  $R'$  ou en  $G$ .*

### 1.2.3.4 Théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique

Soit un système fermé, de masse  $m$ , étudié dans un référentiel  $R$  galiléen et  $R^*$  son référentiel barycentrique. Nous allons expliciter une forme utile du théorème du moment cinétique. Dans  $R^*$ , le moment cinétique est indépendant du point où on l'exprime ; on le note  $\vec{L}^*$ . D'après le théorème de Koenig pour le moment cinétique :

$$\vec{L}^* = \vec{L}(G)_{/R}$$

Comme  $\left( \frac{d\vec{L}(G)}{dt} \right)_{/R} = \vec{\mathcal{M}}_{G\text{ext}}$ , nous en déduisons que :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{G\text{ext}}$$

Remarque –  $R^*$  n'est pas a priori un référentiel galiléen, toutefois le moment des efforts d'inertie d'entraînement n'apparaît pas dans cette relation puisqu'il est nul au point  $G$ . Ceci n'a rien de surprenant : les efforts d'inertie d'entraînement étant équivalents dans ce cas à un glisseur de point d'application  $G$ .

## 1.3 Lois de Coulomb pour le contact entre deux solides

### 1.3.1 Types de contact

Suivant les situations nous rencontrerons des contacts de type ponctuels, linéiques ou surfaciques.

### 1.3.2 Vitesse de glissement

Considérons deux solides  $S_1$  et  $S_2$  en contact. Pour simplifier considérons le contact ponctuel. On définit au niveau du point de contact  $I$ , les points  $I_1$  et  $I_2$  coïncident respectivement à  $S_1$  et  $S_2$ . Nous avons précédemment défini la vitesse de glissement de  $S_2$  par rapport à  $S_1$  :

$$\vec{V}_{g_{S_2/S_1}} = \vec{V}(I_2)_{/R} - \vec{V}(I_1)_{/R}$$

Le contact est dit sans glissement lorsque  $\vec{V}_{g_{S_2/S_1}} = \vec{0}$ , ce qui se traduit aussi par :

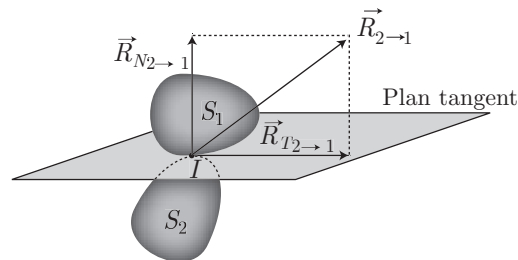
$$\vec{V}(I_2)_{/R} = \vec{V}(I_1)_{/R}$$

Cette égalité sera très importante pour la suite puisqu'elle fournira, lors de l'étude des systèmes, une équation supplémentaire.

### 1.3.3 Actions de contact

#### 1.3.3.1 Description des efforts

Notons  $\mathcal{P}$  le plan tangent aux deux solides en contact. Dans le cas d'un contact ponctuel, les efforts de contact sont équivalents à un glisseur de point d'application  $I$ .



On note  $\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}$  le torseur des efforts exercés par  $S_2$  sur  $S_1$ , dont les éléments de réduction au point  $O$  sont donnés par :  $\vec{R}_{2 \rightarrow 1}$  et  $\vec{M}_{O_{2 \rightarrow 1}}$  (la résultante et le moment au point  $O$  de ces efforts). D'une manière générale on peut écrire :  $\vec{R}_{2 \rightarrow 1} = \vec{R}_{T_{2 \rightarrow 1}} + \vec{R}_{N_{2 \rightarrow 1}}$

- $\vec{R}_{T_{2 \rightarrow 1}}$  est la composante tangente à  $\mathcal{P}$ . Elle est directement liée au phénomène de frottement entre les solides. Elle s'annule pour un contact sans frottements.
- $\vec{R}_{N_{2 \rightarrow 1}}$  est la composante normale à  $\mathcal{P}$ , dirigée de  $S_2$  vers  $S_1$ . Elle s'oppose à l'interpénétration des solides. Elle s'annule lors d'une rupture de contact.

### 1.3.3.2 Cas d'un contact sans glissement

Les lois de Coulomb donnent alors une relation d'inégalité entre les composantes tangentielle et normales :

$$\vec{V}_{gS_2/S_1} = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{\mathcal{R}}_{T_2 \rightarrow 1}\| \leq \mu_S \|\vec{\mathcal{R}}_{N_2 \rightarrow 1}\| \quad (20)$$

$\mu_S$  étant le coefficient de frottement statique, il dépend de la nature des matériaux en contact.

### 1.3.3.3 Cas du contact avec glissement

Les lois de Coulomb donnent cette fois une égalité entre les composantes tangentielle et normales :

$$\vec{V}_{gS_2/S_1} \neq \vec{0} \Rightarrow \|\vec{\mathcal{R}}_{T_2 \rightarrow 1}\| = \mu_d \|\vec{\mathcal{R}}_{N_2 \rightarrow 1}\| \quad (21)$$

$$\vec{\mathcal{R}}_{T_2 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}_{gS_2/S_1} < 0 \quad (22)$$

$$\vec{\mathcal{R}}_{T_2 \rightarrow 1} \wedge \vec{V}_{gS_2/S_1} = \vec{0} \quad (23)$$

$\mu_d$  étant le coefficient de frottement dynamique, il dépend de la nature des matériaux en contact.

Remarque – Généralement les coefficients de frottement statique et dynamique sont très proches ; on pourra alors les confondre.

Remarque – Dans le cas du glissement l'égalité  $\|\vec{\mathcal{R}}_{T_2 \rightarrow 1}\| = \mu_d \|\vec{\mathcal{R}}_{N_2 \rightarrow 1}\|$  fournit une équation supplémentaire qu'il faudra considérer lors de l'étude d'un problème de mécanique.

Remarque – Dans le cas d'un contact de type linéique (cylindre sur une table), ces lois restent utilisables, les efforts sont toujours équivalents à un glisseur de point d'application le milieu de la ligne.

## 1.4 Énergie en mécanique

### 1.4.1 Travail et puissance des efforts

#### 1.4.1.1 Point matériel

Considérons un point matériel  $M_i(m_i)$ , étudié dans un référentiel  $R$ , de vitesse  $\vec{V}(M_i)_{/R}$ . Ce dernier est soumis à la force  $\vec{F}(M_i)$ , au cours d'un déplacement élémentaire. Le travail de la force est donné par :

$$\delta W_i = \vec{F}_i \cdot \vec{V}(M_i)_{/R} dt$$

Sur un trajet  $(AB)$  le travail total est donc égal à :

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \delta W = \int_A^B \vec{F}_i \cdot \vec{V}(M_i)_{/R} dt$$

À chaque instant la puissance est donnée par :

$$P = \frac{\delta W_i}{dt} = \vec{F}_i \cdot \vec{V}(M_i)_{/R}$$

Remarque –  $W_{A \rightarrow B}$  et  $P$  sont des grandeurs qui dépendent du référentiel. Le travail s'exprime en Joules ( $J$ ) et la puissance en Watts ( $W$ ).

### 1.4.1.2 Puissance et travail des efforts pour un système matériel

Soit un système constitué de  $N$  points matériels  $M_i(m_i)$ . Dans le référentiel  $R$  d'étude chaque point  $M_i$ , subissant la force  $\vec{F}(M_i) = \vec{F}_i$ , a pour vitesse  $\vec{V}(M_i)_{/R}$ . Au cours d'une évolution élémentaire du système, le travail des efforts correspond à la somme des travaux pour chaque point matériel :

$$\delta W_{/R} = \sum_{i=1}^N \delta W_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}(M_i) \cdot \vec{V}(M_i)_{/R} dt$$

de même la puissance est donnée par :

$$P_{/R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}(M_i) \cdot \vec{V}(M_i)_{/R}$$

Remarque – Par définition le travail et la puissance des efforts sont nuls dans un référentiel où chaque point du système est immobile.

### 1.4.1.3 Changement de référentiel pour le calcul de la puissance

Considérons deux référentiels  $R$  et  $R'$ , ainsi qu'un système de  $N$  points matériels soumis à des efforts dont les éléments de réduction au point  $O'$  sont donnés par  $\vec{\mathcal{R}}$  et  $\vec{\mathcal{M}}_{O'}$ . Il existe une relation entre les puissances exprimées dans chaque référentiel  $P_{/R}$  et  $P_{/R'}$  :

$$P_{/R} = P_{/R'} + \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{V}(O')_{/R} + \vec{\mathcal{M}}_{O'} \cdot \vec{\Omega}_{R'/R}$$

Remarque – Tout point fixe dans  $R'$  peut être choisi à la place de  $O'$ .



Démontrer la relation existant entre  $P_{/R}$  et  $P_{/R'}$ .

**RÉPONSE** La relation de composition des vitesses pour un point  $M_i$  du système entre les référentiels  $R$  et  $R'$  donne :

$$\vec{V}(M_i)_{/R} = \vec{V}(M_i)_{/R'} + \vec{V}(O')_{/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M_i}$$

On peut alors en déduire que :

$$\vec{F}(M_i) \cdot \vec{V}(M_i)_{/R} = \vec{F}(M_i) \cdot \vec{V}(M_i)_{/R'} + \vec{F}(M_i) \cdot \vec{V}(O')_{/R} + \underbrace{\vec{F}(M_i) \cdot (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M_i})}_{\vec{\Omega}_{R'/R} \cdot (\overrightarrow{O'M_i} \wedge \vec{F}(M_i))}$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}(M_i) \cdot \vec{V}(M_i)_{/R}) = \sum_{i=1}^N (\vec{F}(M_i) \cdot \vec{V}(M_i)_{/R'}) + \sum_{i=1}^N (\vec{F}(M_i) \cdot \vec{V}(O')_{/R}) + \sum_{i=1}^N (\vec{\Omega}_{R'/R} \cdot (\vec{O'M}_i \wedge \vec{F}(M_i)))$$

ce qui implique :

$$P_{/R} = P_{/R'} + \left( \sum_{i=1}^N \vec{F}(M_i) \right) \cdot \vec{V}(O')_{/R} + \vec{\Omega}_{R'/R} \cdot \sum_{i=1}^N (\vec{O'M}_i \wedge \vec{F}(M_i))$$

On retrouve bien :  $P_{/R} = P_{/R'} + \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{V}(O')_{/R} + \vec{\mathcal{M}}_{O'} \cdot \vec{\Omega}_{R'/R}$ .

#### 1.4.1.4 Cas du solide

Pour tout solide,  $S$ , étudié dans un référentiel  $R$ , on peut appliquer la relation précédente, en posant  $R' = R_S$ . Le solide étant immobile dans  $R_S$ , la puissance des efforts par rapport à ce référentiel est nulle ; on obtient alors :

$$P_{/R} = \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{V}(O_S)_{/R} + \vec{\mathcal{M}}_{O_S} \cdot \vec{\Omega}_{R_S/R} \quad (24)$$

Remarque –  $O_S$  peut être remplacé par un point quelconque du solide. Lorsque les efforts sont équivalents à un glisseur il sera intéressant de choisir le point d'application de la résultante.

#### 1.4.1.5 Puissance des efforts intérieurs

La résultante et le moment en tout point étant nuls, la puissance des efforts intérieurs est indépendante du référentiel.

Remarque – La puissance des efforts intérieurs n'est pas nulle en général.



Pourquoi la puissance des efforts intérieurs est-elle nulle pour un solide ?

RÉPONSE Cette puissance est indépendante du référentiel. Comme elle est nulle dans  $R_S$ , elle est nulle dans tout référentiel.

La puissance des efforts intérieurs est nulle pour un solide.

### 1.4.2 Efforts conservatifs

#### 1.4.2.1 Définition

**Définition 28** Des efforts sont dits conservatifs s'il existe une fonction énergie potentielle  $E_P$  telle que pour une évolution élémentaire :  $\delta W = -dE_P$

### 1.4.2.2 Énergie potentielle de pesanteur

Considérons un solide de masse  $m$ , dans un référentiel  $R$ , soumis aux efforts de pesanteur. La puissance élémentaire des efforts est donnée d'après la relation (24) par :

$$P_{/R} = m \vec{g} \cdot \vec{V}(G)_{/R} + \vec{M}_G \cdot \vec{\Omega}_{R_S/R} = m \vec{g} \cdot \vec{V}(G)_{/R}$$

puisque le moment des efforts de pesanteur est nul en  $G$ . On en déduit que :

$$\delta W = P dt = m \vec{g} \cdot \vec{V}(G)_{/R} dt$$

Cherchons la fonction  $E_P$  telle que :  $\delta W = -dE_P$ . Si elle existe, cette fonction vérifie :

$$dE_P = -m \vec{g} \cdot \vec{V}(G)_{/R} dt = -m \vec{g} \cdot d\vec{OG} = d(-m \vec{g} \cdot \vec{OG})$$

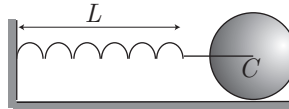
On déduit ainsi l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_P = -m \vec{g} \cdot \vec{OG} + \text{cte}$$

Remarque – Cette relation se généralise au cas des systèmes déformables.

### 1.4.2.3 Énergie potentielle élastique

Considérons un système lié à un ressort idéal de longueur à vide  $L_0$  et de constante de raideur  $k$ . Lorsque la longueur du ressort est  $L$ , l'ensemble possède l'énergie potentielle :



$$E_P = \frac{1}{2} k (L - L_0)^2 + \text{cte}$$

### 1.4.2.4 Énergie potentielle d'entraînement

Soit un système  $\mathcal{S}$ , de masse  $m$ , étudié dans un référentiel  $R'$  non galiléen en mouvement de translation par rapport à un référentiel galiléen  $R$ .

$O'$  étant l'origine de  $R'$ , le système possède une énergie potentielle d'entraînement donnée par :

$$E_P = m \vec{a}_e(O')_{/R} \cdot \vec{O}'G + \text{cte}$$

### 1.4.2.5 Énergie potentielle centrifuge

Considérons un système  $\mathcal{S}$ , étudié dans un référentiel  $R'$  non galiléen, en rotation uniforme autour d'un axe fixe  $\Delta$  d'un référentiel galiléen  $R$ . On note  $J_\Delta$  le moment d'inertie du solide par rapport à  $\Delta$ . Le système possède alors une énergie potentielle donnée par :

$$E_P = -\frac{1}{2} J_\Delta \Omega_{R'/R}^2 + \text{cte}$$

### 1.4.3 Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique

#### 1.4.3.1 Théorème de l'énergie cinétique

Pour un système qui évolue dans un référentiel  $R$ , entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$E_C(t_2) - E_C(t_1) = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$$

$W_{\text{ext}}$  représente la somme des travaux des efforts extérieurs et  $W_{\text{int}}$  la somme des travaux des efforts intérieurs.

#### 1.4.3.2 Théorème de la puissance cinétique

**Définition 29** On appelle puissance cinétique :

$$P_C = \left( \frac{dE_C}{dt} \right)_{/R}$$

Au cours d'une évolution du système dans un référentiel  $R$  la puissance cinétique vérifie la relation :

$$\left( \frac{dE_C}{dt} \right)_{/R} = P_{\text{ext}} + P_{\text{int}}$$

$P_{\text{ext}}$  représente la puissance des efforts extérieurs et  $P_{\text{int}}$  la puissance des efforts intérieurs dans le référentiel  $R$ .

### 1.4.4 Théorème de l'énergie mécanique

#### 1.4.4.1 Énergie mécanique

**Définition 30** L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'ensemble des énergies potentielles correspondants aux efforts extérieurs et intérieurs :

$$E_m = E_C + E_P$$

Remarque –  $E_P$  représente l'ensemble des énergies potentielles correspondant aux efforts extérieurs et intérieurs.

#### 1.4.4.2 Théorème de l'énergie mécanique

Il est possible d'expliciter ce théorème de deux façons : pour un système qui évolue dans un référentiel  $R$ , entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$  :

$$E_m(t_2) - E_m(t_1) = W(nc)_{\text{ext}} + W(nc)_{\text{int}}$$

$W(nc)_{\text{ext}}$  étant le travail des efforts extérieurs non conservatifs,  $W(nc)_{\text{int}}$  celui des efforts intérieurs non conservatifs.

Remarque – On ne doit prendre en compte que les travaux des efforts non conservatifs ( $nc$ ).

La relation précédente équivaut à :



$$\left( \frac{dE_m}{dt} \right)_{/R} = P(nc)_{\text{ext}} + P(nc)_{\text{int}}$$

Remarque – On ne doit prendre en compte que les puissances associées aux efforts non conservatifs, extérieurs et intérieurs.

#### 1.4.4.3 Systèmes conservatifs

**Définition 31** Un système est dit conservatif lorsque son énergie mécanique se conserve au cours du temps.

Ceci se produit lorsque les efforts non conservatifs sont nuls ou lorsque ces derniers ne travaillent pas (ce sera le cas par exemple des efforts d'un contact ponctuel lors d'un mouvement avec roulement sans glissement).

**Définition 32** L'égalité  $E_m = \text{cte}$  s'appelle intégrale première du mouvement, la valeur de la constante étant fixée par les conditions initiales.

Lorsque le système conservatif est paramétré par une seule variable, l'égalité :  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ , donne directement l'équation du mouvement.

### 1.4.5 Théorèmes de l'énergie en référentiel non galiléen

#### 1.4.5.1 Cas général

On peut appliquer les théorèmes relatifs à l'énergie à un système  $S$  étudié dans un référentiel non galiléen  $R'$ . Il suffit pour cela de comptabiliser la puissance et les travaux des efforts d'inertie d'entraînement.

Remarque – Rappelons que les efforts d'inertie de Coriolis ne travaillent pas.

#### 1.4.5.2 Cas du référentiel barycentrique

$R^*$  est en mouvement de translation par rapport à  $R$ , chaque point  $M_i$  de masse  $m_i$  du système est soumis à la force  $\vec{F}_i = -m_i \vec{a}_e(M_i) = -m_i \vec{a}(G)_{/R}$ .

La puissance dans  $R^*$  de cette force étant  $P_i = -m_i \vec{a}(G) \cdot \vec{V}^*(M_i)$ , on en déduit la puissance associée aux efforts d'inertie d'entraînement dans le référentiel barycentrique :

$$P = - \sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{a}(G)_{/R} \cdot \vec{V}^*(M_i) = -\vec{a}(G)_{/R} \cdot \sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{V}^*(M_i) = 0$$

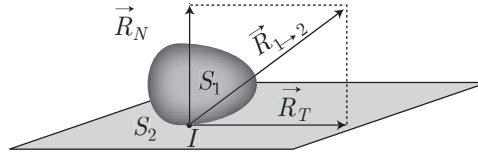
Effectivement on reconnaît :

$$\vec{P}^* = \sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{V}^*(M_i) = \vec{0}$$

Remarque – On peut appliquer dans  $R^*$  les théorèmes de l'énergie sans tenir compte de la puissance des efforts d'inertie.

## 1.4.6 Puissance des efforts de contact

### 1.4.6.1 Contact quelconque



$S_2$  est le support, immobile dans  $R$ , du solide  $S_1$ .

Considérons  $I_1$  un point de la surface de contact appartenant à  $S_1$ , la relation (24) donne :

$$\mathcal{P}_{/R} = (\vec{\mathcal{R}}_T + \vec{\mathcal{R}}_N) \cdot \vec{V}(I_1)_{/R} + \vec{\mathcal{M}}_{I_1} \cdot \vec{\Omega}_{S_1/R}$$

### 1.4.6.2 Contact ponctuel


Dans ce cas les efforts sont alors équivalents à un glisseur de point d'application le point de contact :  $\vec{\mathcal{M}}_{I_1} = \vec{0}$  tandis que  $\vec{V}(I_1)_{/R}$  représente la vitesse de glissement de  $S_1$  par rapport à  $S_2$ , contenue dans le plan tangent aux deux solides, ce qui implique :  $\vec{\mathcal{R}}_N \cdot \vec{V}(I_1)_{/R} = 0$ . On retiendra donc l'expression ci dessous,  $I_1$  étant le point de contact :

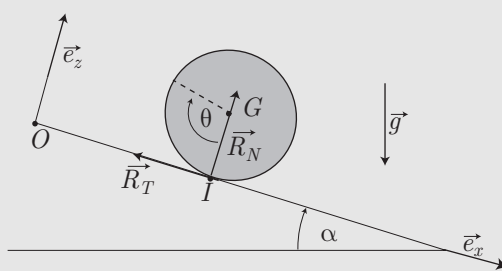
$$\mathcal{P} = \vec{\mathcal{R}}_T \cdot \vec{V}(I_1)_{/R} \quad (25)$$

Cette puissance est nulle dans deux cas très importants :

- absence de glissement de  $S_1$  sur  $S_2$  :  $\vec{V}(I_1)_{/R} = \vec{0}$ .
- absence de frottements entre  $S_1$  et  $S_2$  :  $\vec{\mathcal{R}}_T = \vec{0}$ .

Remarque – *Ce qui vient d'être établi pour le contact ponctuel reste vrai pour le contact qui se fait le long d'une ligne, le point  $I_1$  étant alors le milieu de cette ligne.*

 Un cylindre  $C_0$ , de rayon  $a$ , de masse  $m$ , et de centre  $G$  roule sans glisser le long de la plus grande pente d'un plan incliné d'un angle  $\alpha$ . On paramètre le mouvement de ce dernier par l'abscisse  $x(t)$  de son centre d'inertie  $G$  et l'angle de rotation  $\theta(t)$ .  
 À  $t = 0$ ,  $G$  se trouve en  $O$ , le cylindre est alors immobile.  
 On donne le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe de symétrie de révolution :  $J = \frac{ma^2}{2}$



1. Démontrer que le système est conservatif.
2. Exprimer  $x(t)$  et  $\theta(t)$ .

**RÉPONSE**

1. Le roulement étant sans glissement :  $\vec{V}(I_1)_{/R} = \vec{0}$  et le contact étant de plus ponctuel :  $\mathcal{P} = \vec{r}_T \cdot \vec{V}(I_1)_{/R} = 0$ . Les efforts de contact ne travaillent pas auquel cas le système est conservatif :  $\frac{dE_m}{dt} = 0$

2. D'après le théorème de Koenig pour l'énergie cinétique :  $E_C = E_C^* + \frac{1}{2}mV^2(G)$ . Or, dans  $R^*$ , le cylindre a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe  $(G, \vec{e}_y)$ , ce qui se traduit par :

$$E_C^* = \frac{1}{2} J_G \vec{e}_z \times \Omega_{C/R}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{ma^2}{2} \right) \dot{\theta}^2 \Rightarrow E_C = \frac{1}{4} ma^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

L'énergie potentielle est donnée, quant à elle, par :

$$E_P = -m \vec{g} \cdot \vec{OG} = -mgx \sin \alpha + mga \cos \alpha$$

On en déduit l'énergie mécanique :

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{4} ma^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx \sin \alpha + mga \cos \alpha$$

Cette expression fait intervenir les variables  $x$  et  $\theta$ , en conséquence de quoi l'application de  $\frac{dE_m}{dt} = 0$  n'aura d'intérêt que si l'on ramène la dépendance seulement sur  $x$  ou  $\theta$ . Pour cela utilisons la condition de roulement sans glissement  $\vec{V}(I_1)_{/R} = \vec{0}$ ; la relation (10) donne :

$$\vec{V}(I_1)_{/R} = \vec{V}(G) + \vec{\Omega}_{C/R} \wedge \vec{GI}_1 = \dot{x} \vec{e}_x - a \dot{\theta} \vec{e}_x = \vec{0}$$

Le roulement sans glissement est donc équivalent à  $\dot{x} = a \dot{\theta}$  ce qui implique :

$$\begin{aligned} E_m = \frac{3}{4} m \dot{x}^2 - mgx \sin \alpha + mga \cos \alpha &\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = \frac{3}{2} m \dot{x} \ddot{x} - mg \dot{x} \sin \alpha = 0 \\ &\Rightarrow \ddot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha \text{ et } \ddot{\theta} = \left( \frac{2g}{3a} \right) \sin \alpha \end{aligned}$$

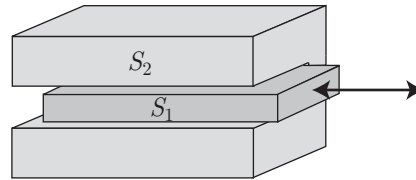
Les conditions initiales imposent alors :

$$x(t) = \left( \frac{1}{3} g \sin \alpha \right) t^2 \text{ et } \theta(t) = \left( \frac{g \sin \alpha}{3a} \right) t^2$$

## 1.4.7 Étude des liaisons

### 1.4.7.1 Liaison glissière

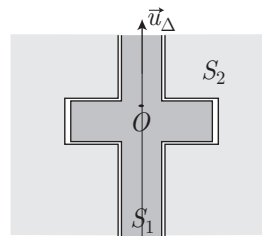
Le solide  $S_1$  ne peut avoir qu'un mouvement de translation par rapport à  $S_2$ .



Liaison glissière

### 1.4.7.2 Liaison pivot

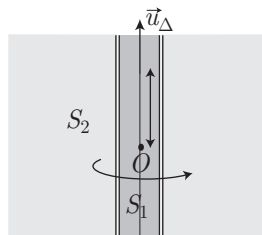
Les solides  $S_1$  et  $S_2$ , sont liés de façon à ce que  $S_1$  ne puisse effectuer qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe de  $S_2$ .



Liaison pivot

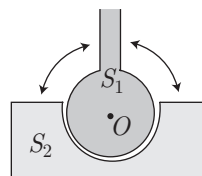
### 1.4.7.3 Liaison pivot glissant

Pour cette liaison, le solide  $S_1$ , peut effectuer un mouvement de rotation autour d'un axe fixe de  $S_2$ , tout en se tradant le long de cet axe.



Liaison pivot-glisement

### 1.4.7.4 Liaison rotule



Liaison rotule

Pour une liaison rotule, le solide  $S_1$  est mobile autour d'un point fixe de  $S_2$ .

### 1.4.7.5 Puissance d'une liaison

La puissance d'une liaison entre deux systèmes  $S_1$  et  $S_2$ , correspond à la puissance totale des actions de contact :

$$\mathcal{P}_{\text{liaison}} = \mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} + \mathcal{P}_{2 \rightarrow 1}$$

Cette puissance, qui correspond à des efforts intérieurs, est indépendante du référentiel où on la calcule.

Remarque – Très souvent un des deux solides est fixe dans le référentiel d'étude  $R$ . Par exemple si  $S_2$  est fixe dans  $R$  :  $\mathcal{P}_{1 \rightarrow 2} = 0 \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{liaison}} = \mathcal{P}_{2 \rightarrow 1}$ .

Une liaison est dite parfaite lorsque :  $\mathcal{P}_{\text{liaison}} = 0$ .

### 1.4.7.6 Liaison glissière parfaite

Supposons que le solide  $S_2$  soit fixe dans le référentiel d'étude :

$$\mathcal{P}_{\text{liaison}} = \vec{\mathcal{R}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}_g S_1 / S_2$$

où  $I_1$  étant un point de  $S_1$ . La liaison sera parfaite en l'absence de frottements

$$\mathcal{R}_{T_2 \rightarrow 1} = \vec{0}$$

### 1.4.7.7 Liaison pivot parfaite

$S_2$  est fixe dans le référentiel d'étude :

$$\mathcal{P}_{\text{liaison}} = \mathcal{P}_{S_2 \rightarrow S_1} = \vec{\mathcal{R}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}(O)_{/R} + \vec{\mathcal{M}}_{2 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{\Omega}_{S_1/R}$$

$O$  étant un point de  $S_1$  qui appartient aussi à l'axe de rotation on a :

$$\mathcal{P}_{\text{liaison}} = \vec{\mathcal{M}}_{2 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{\Omega}_{S_1/R}$$

La liaison pivot est parfaite si le moment des efforts exprimé en un point de l'axe de rotation est perpendiculaire à cet axe :

$$\vec{\mathcal{M}}_{2 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{\Omega}_{S_1/R} = 0$$

### 1.4.7.8 Liaison pivot glissant parfaite

$S_2$  est fixe dans le référentiel d'étude :

$$\mathcal{P}_{\text{liaison}} = \mathcal{P}_{S_2 \rightarrow S_1} = \vec{\mathcal{R}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}(O)_{/R} + \vec{\mathcal{M}}_{2 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{\Omega}_{S_1/R}$$

Cette liaison combine en fait la liaison glissière et la liaison pivot, elle sera parfaite si :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{R}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}(O)_{/R} = \vec{0} \text{ ce qui traduit l'absence de frottement} \\ \vec{\mathcal{M}}_{2 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{\Omega}_{S_1/R} \text{ le moment en un point de l'axe de rotation perpendiculaire à } \vec{\Omega}_{S_1/R} \end{array} \right.$$

**1.4.7.9 Liaison rotule parfaite**

$S_2$  est fixe dans le référentiel d'étude :

$$\mathcal{P}_{\text{liaison}} = \mathcal{P}_{S_2 \rightarrow S_1} = \vec{\mathcal{R}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{V}(O)_{/R} + \vec{\mathcal{M}}_{2 \rightarrow 1}(O) \cdot \vec{\Omega}_{S_1/R}$$

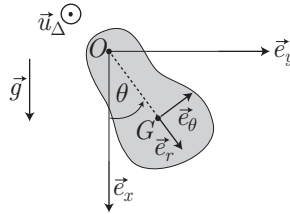
$O$  étant le point fixe de  $S_1$ . Il s'ensuit que :

$$\mathcal{P}_{\text{liaison}} = \vec{\mathcal{M}}_{2 \rightarrow 1} \cdot \vec{\Omega}_{S_1/R}$$

Le vecteur rotation peut prendre une infinité de directions. La liaison est parfaite si  $\vec{\mathcal{M}}_{2 \rightarrow 1}(O) = \vec{0}$ , c'est-à-dire si les efforts sont équivalents à un glisseur de point d'application  $O$ .

**1.4.8 Applications à la rotation d'un solide autour d'un axe fixe**

**1.4.8.1 Théorème du moment cinétique**



Considérons un solide  $S$ , de masse  $m$ , en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta$ . Étudié dans un référentiel  $R$ , cette rotation est assurée par une liaison pivot. Notons  $\vec{\Omega}$  le vecteur rotation du solide dans  $R$ . Le théorème du moment cinétique, appliqué à ce système en un point  $O$  de l'axe de rotation, donne :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} /_R = \vec{\mathcal{M}}_{O_{ext}} + \vec{\mathcal{M}}'_{O_{ext}}$$

- $\vec{\mathcal{M}}_{O_{ext}}$  représente le moment en  $O$  des efforts de contact exercés par l'axe de rotation.
- $\vec{\mathcal{M}}'_{O_{ext}}$  est le moment associé aux autres efforts (pesanteur, inertie,...).

$$\vec{L}_O = J\vec{\Omega} + \vec{L}(O)_{\perp}$$

Dans le cas d'une liaison pivot parfaite, la projection du théorème sur la direction de l'axe de rotation donne une relation qui permet de déterminer  $\theta$  :

$$J\ddot{\theta} = \vec{\mathcal{M}}'(O) \cdot \vec{u}_{\Delta}$$

**1.4.8.2 Théorème de la résultante cinétique**

L'application du théorème de la résultante cinétique au système  $S$  donne, dans le référentiel d'étude  $R$  :

$$m \vec{a}(G) = \vec{\mathcal{R}} + \vec{\mathcal{R}}'$$

où  $\vec{\mathcal{R}}$  est la résultante des efforts qu'exerce l'axe sur  $S$  et  $\vec{\mathcal{R}}'$  la résultante associée aux autres efforts.

$G$  ayant une trajectoire circulaire de rayon  $OG = a$ , son accélération s'exprime simplement en coordonnées polaires :

$$\vec{a}(G) = -a\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + a\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

L'application du théorème de la résultante cinétique permettra alors de déterminer la résultante des efforts qu'exercent l'axe sur  $\mathcal{S}$ .

## 1.5 Cinématique des fluides

### 1.5.1 Description d'un fluide

#### 1.5.1.1 Particule de fluide

Pour réaliser l'étude cinématique et dynamique d'un fluide, on découpe ce dernier en cellules élémentaires de taille intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique : l'échelle mésoscopique.

Chaque cellule représente ce que l'on va appeler par la suite, la particule de fluide.

Cette particule de fluide doit être assez grande pour nous permettre d'ignorer l'aspect corpusculaire de la matière, et assez petite pour rendre compte des propriétés locales du fluide étudié.

Chaque particule, repérée par  $M$  à  $t$ , sera affectée d'un volume  $\delta\tau(M, t)$ , d'une masse constante  $\delta m(M)$  et, du point de vue cinématique, on lui associera une vitesse  $\vec{V}(M, t)$  et une accélération  $\vec{a}(M, t)$ .

Par exemple pour un fluide comme l'eau dans les conditions normales de température et de pression, la particule de fluide pourra être définie à partir d'un volume  $\delta\tau = 1 \mu\text{m}^3$ , très petit à l'échelle macroscopique. Ce volume reste très grand par rapport à l'échelle microscopique puisqu'il contient environs :  $10^{22}$  molécules d'eau.

Du point de vue thermodynamique, la pression et la température de la particule de fluide seront prises égales à la pression et la température du fluide au point  $M$  à l'instant  $t$ .

#### 1.5.1.2 Masse volumique

En tout point  $M$ , où se trouve la particule de masse  $\delta m$  et de volume  $\delta\tau$ , on définit la masse volumique du fluide comme :

$$\rho(M) = \frac{\delta m}{\delta\tau}$$



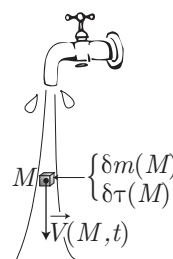
On définit le coefficient de compressibilité isotherme comme :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Démontrer que :  $\chi_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$

**RÉPONSE** Par définition  $\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$ .

Considérons une particule de fluide de masse  $m$  et de volume  $V$ , nous pouvons écrire :  $V = \frac{m}{\rho}$ .



D'où :  $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{m}{\rho}\right)_T = -m \frac{\partial}{\partial P} \left(\frac{1}{\rho}\right)_T$ . Il s'ensuit que :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{m}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T = -\frac{V}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T$$

D'où l'on déduit :

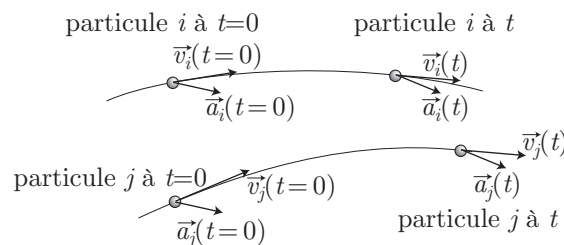
$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_T$$

### 1.5.1.3 Vitesse et accélération de la particule de fluide : description Lagrangienne d'un fluide

Dans cette description, lorsqu'un fluide est en écoulement, on affecte un numéro à chaque particule pour la suivre au cours de son déplacement.

À  $t = 0$ , chaque particule ( $i$ ) sera repérée dans le référentiel d'étude par  $\vec{r}_i(t=0)$ , sa vitesse s'écrira  $\vec{V}_i(t=0)$  et son accélération :  $\vec{a}_i(t=0)$ .

À l'instant  $t$  on notera les grandeurs position, vitesse et accélération :  $\vec{r}_i(t)$ ,  $\vec{V}_i(t)$ ,  $\vec{a}_i(t)$ . Le point de vue Lagrangien, permet l'étude de la particule à la manière dont on étudiait le point matériel en mécanique. On pourra donc lui appliquer les principes de la mécanique classique. Il sera possible de définir, pour chaque particule, une trajectoire au sein du fluide.



### 1.5.1.4 Champ des vitesses et des accélérations : description eulérienne d'un fluide.

Considérons l'écoulement d'un fluide dans un référentiel  $\mathcal{R}$ . À un instant  $t$  donné, on définit la vitesse (ou l'accélération) en un point  $M$  du fluide :  $\vec{V}(M, t)$ , comme la vitesse de la particule qui à  $t$  se trouve au point  $M$ .

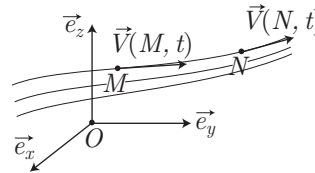
Entre  $t$  et  $t + dt$ , au même point  $M$  se succèdent deux particules différentes.  $\vec{V}(M, t)$  représente donc à chaque instant la vitesse du point de vue Lagrangien de la particule de fluide qui passe en  $M$  à la date  $t$ .

Dans cette description que l'on nomme eulérienne, les variables de temps et d'espace sont indépendantes.



### 1.5.1.5 Lignes et tubes de courant

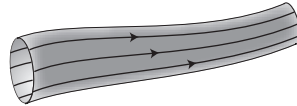
**Définition 33** Les lignes de courant sont les lignes de champ de  $\vec{V}(M, t)$ . Elles sont tangentes en chaque point à la vitesse de la particule de fluide qui s'y trouve.



Les équations des lignes de courant sont données par :

$$\vec{V}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$$

**Définition 34** On appelle tube de courant, tout volume délimité par un ensemble de lignes de courant.



### 1.5.1.6 Taux de variation dans le temps d'une grandeur caractéristique d'une particule.

Considérons une grandeur scalaire  $f(x, y, z, t)$  associée au fluide.

Pour une particule donnée, en mouvement, on s'intéresse à l'évolution de  $f$  au cours du temps. Entre  $t$  et  $t + dt$ , pour deux positions voisines de la particule, la variation de  $f$  est donnée par :  $Df = f(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - f(\vec{r}, t)$ .

Le vecteur  $d\vec{r}$  représente le déplacement élémentaire de la particule pendant  $dt$ . Si l'on note  $\vec{V}$  la vitesse de cette dernière, il est donné par :  $d\vec{r} = \vec{V} dt$ . L'évolution de  $f$  s'écrit donc :

$$Df = f(\vec{r} + \vec{V} dt, t + dt) - f(\vec{r}, t)$$

Il s'ensuit que :

$$Df = f(x + V_x dt, y + V_y dt, z + V_z dt, t + dt) - f(x, y, z, t)$$

d'où :

$$Df = \frac{\partial f}{\partial x} V_x dt + \frac{\partial f}{\partial y} V_y dt + \frac{\partial f}{\partial z} V_z dt + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Sachant que :  $\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$ , nous avons :

$$Df = \left( \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) dt$$

Nous noterons cette dérivée particulière :

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} f$$

Généralisons cette relation à toute grandeur vectorielle :  $\vec{f} = f_x \vec{e}_x + f_y \vec{e}_y + f_z \vec{e}_z$ . Il suffit pour cela de l'appliquer à chacune des composantes  $f_x, f_y$  et  $f_z$  :

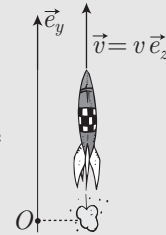
$$\frac{D\vec{f}}{Dt} = \left( \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{f} + \frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$$



Considérons une fusée effectuant un vol vertical dans une atmosphère où la température décroît linéairement à partir du sol selon la loi :

$$T(x, y, z) = T_0 - \alpha z$$

La fusée est munie d'un capteur de température.  
Calculer le taux de variation de la température quand la fusée s'élève avec une vitesse  $v$ .  
On donne  $\alpha = 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $v = 400 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



**RÉPONSE** Le taux de variation de  $T$  est défini comme :  $\frac{DT}{dt}$ .

Nous avons :  $\frac{DT}{Dt} = \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T + \frac{\partial T}{\partial t}$ . La température ne dépend pas explicitement du temps, donc :  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ .

Le mouvement étant vertical ascendant :  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = v \vec{e}_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \vec{e}_z = -\alpha v$ .

On calcule donc :  $\frac{DT}{Dt} = -400 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 1.5.1.7 Accélération d'une particule de fluide

L'accélération de la particule de fluide est donnée par :  $\vec{a}(M, t) = \frac{D\vec{v}}{Dt}$ . Nous avons donc :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{V}(M, t)] + [\vec{V}(M, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}}] \vec{V}(M, t)$$

Rappelons, pour toute grandeur  $\vec{X}$ , l'égalité :

$$\left( \vec{X} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{X} = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{X^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{X} \wedge \vec{X}$$

ce qui nous permet de donner une autre expression pour l'accélération de la particule de fluide :

$$\vec{a}(M, t) = \frac{\partial}{\partial t} [\vec{V}(M, t)] + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (V^2(M, t)) + [\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}(M, t)] \wedge \vec{V}(M, t)$$

### 1.5.1.8 Débits volumiques et massiques

**Définition 35** On appelle *débit massique* à travers une surface  $S$  :

$$D_m = \iint_S \rho \vec{V}(M, t) \cdot d\vec{S}$$

$D_m$  s'exprime en  $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

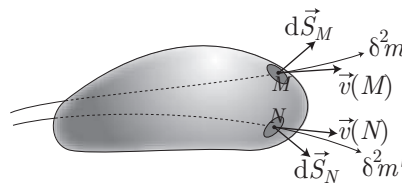
**Définition 36** On appelle débit volumique à travers une surface  $S$  :

$$D_v = \iint_S \vec{V}(M, t) \cdot d\vec{S}$$

$D_v$  s'exprime en  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 1.5.1.9 Équation de conservation de la masse

Considérons un volume,  $\mathcal{V}$ , fixe, limité par une surface  $S$  au sein d'un fluide de masse volumique  $\rho(M, t)$ , en écoulement.



La masse de fluide contenue dans le volume peut évoluer au cours du temps. On la note :

$$m(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(M, t) d\tau(M)$$

Notons  $\delta m$ , la variation de masse à l'intérieur de  $\mathcal{V}$ , entre  $t$  et  $t + dt$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \delta m &= m(t + dt) - m(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \rho(M, t + dt) d\tau(M) - \iiint_{\mathcal{V}} \rho(M, t) d\tau(M) \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} [\rho(M, t + dt) - \rho(M, t)] d\tau(M) = \left( \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau(M) \right) dt \end{aligned}$$

Pendant  $dt$ , chaque surface élémentaire  $d\vec{S}$  est traversée par la quantité de masse  $\delta^2 m = \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} dt$ ,  $\vec{V}$  étant la vitesse du fluide au niveau de  $d\vec{S}$ .

Si  $\vec{V}(M) \cdot d\vec{S}_M > 0$ , alors  $\delta^2 m$  est perdue par  $\mathcal{V}$ , puisque la masse sort du volume. Réciproquement, si  $\vec{V}(M) \cdot d\vec{S}_M < 0$ , alors  $\delta^2 m$  est gagnée par  $\mathcal{V}$ . On peut donc donner la variation de masse du volume  $\mathcal{V}$  pendant  $dt$  :

$$\delta m = - \left( \oiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} \right) dt$$

En identifiant les deux expressions de  $\delta m$ , nous obtenons :

$$\oiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = - \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho(M, t)}{\partial t} d\tau$$

Or, d'après le théorème de Green-Ostrogradsky :  $\oiint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\rho \vec{V}) d\tau$ .

Nous en déduisons l'égalité :  $\iiint_{\mathcal{V}} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right] d\tau = 0$ .

Cette dernière doit être vérifiée quel que soit le volume  $\mathcal{V}$ , ce qui implique la nullité du terme :  $\operatorname{div}(\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t}$ .

On démontre ainsi l'équation locale de conservation de la masse :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

### 1.5.1.10 Écoulement permanent

**Définition 37** Un écoulement est dit permanent si toute grandeur  $f$  caractéristique du fluide en un point donné, ne dépend pas du temps :

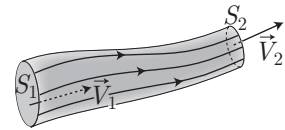
$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

L'équation de conservation de la masse s'écrit, dans le cas d'un écoulement permanent, sous sa forme locale ou sous sa forme intégrale équivalente :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \Leftrightarrow \oint_S (\rho \vec{V} \cdot d\vec{S}) = 0$$

Le débit massique à travers une surface fermée étant nul, il se conserve le long d'un tube de courant :

$$D_{m1} = D_{m2} \Rightarrow \iint_{S_1} (\rho \vec{V}) \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} (\rho \vec{V}) \cdot d\vec{S}_2$$



On admettra que, dans le cas du régime permanent, il y a identité entre les lignes de courant et les trajectoires des particules.

### 1.5.1.11 Écoulement incompressible

**Définition 38** Un écoulement est dit incompressible lorsqu'au cours de son évolution chaque particule de fluide garde une masse volumique constante.

$$\text{Écoulement incompressible : } \left( \frac{D\rho}{Dt} \right) = 0$$

La masse de la particule de fluide étant invariable, on en déduit que son volume aussi.

Exploitions l'égalité  $\frac{D\rho}{Dt} = 0$  :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho$$

L'équation de conservation de la masse donne quant à elle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho \vec{V}) \text{ avec } \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = \rho \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho$$

Nous déduisons alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{V} = 0$$

Le champ des vitesses d'un écoulement incompressible vérifie donc :

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0$$

Cette dernière égalité s'écrit aussi sous une forme intégrale :

$$\oiint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$$

Pour un écoulement incompressible, le débit volumique est nul à travers toute surface fermée ; il se conserve donc le long d'un tube de courant.

### 1.5.1.12 Vecteur tourbillon

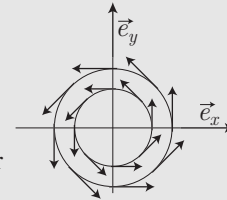
**Définition 39** On appelle vecteur tourbillon le vecteur :  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{V}$

Ce vecteur est caractéristique de certains écoulements comme les vortex.



Exprimer le vecteur tourbillon de l'écoulement plan défini par le champ des vitesses, en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \vec{V}(r < a) = \frac{\Gamma r^2}{2\pi a} \vec{e}_\theta \\ \vec{V}(r > a) = \frac{\Gamma a}{2\pi r} \vec{e}_\theta \end{cases}$$



On rappelle l'expression du rotationnel d'un vecteur  $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_z \vec{e}_z$  en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ r \frac{\partial \theta}{\partial A_r} - \frac{\partial z}{\partial A_z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial r}{\partial A_r} \end{pmatrix}$$

#### RÉPONSE

- Pour  $r < a$ , nous avons :  $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) \vec{e}_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\Gamma r^2}{2\pi a} \right) \vec{e}_z = \frac{\Gamma}{\pi a} \vec{e}_z$ . D'où :

$$\vec{\Omega}(r < a) = \frac{\Gamma}{2\pi a} \vec{e}_z$$

- Pour  $r > a$  nous avons  $\frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} = \vec{0}$ . D'où :

$$\vec{\Omega}(r > a) = \vec{0}$$

### 1.5.1.13 Écoulement irrotationnel ou potentiel

**Définition 40** Un écoulement est dit irrotationnel ou potentiel lorsqu'en tout point du fluide le vecteur tourbillon est nul.

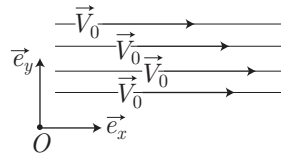
$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}_{(\text{Potentiel})} = \vec{0}$$

Remarque – Pour définir l'écoulement potentiel il faut que la vitesse soit définie en tout point du fluide.

L'égalité  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$  est équivalente à  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ , il existe donc une fonction potentiel  $\phi$  qui caractérise le champ des vitesses de l'écoulement.

$$\vec{V}_{\text{Potentiel}} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$$

### 1.5.1.14 Écoulement parallèle uniforme plan.



Le champ des vitesses pour cet écoulement plan est donné par :  $\vec{V} = V_0 \vec{e}_x$ . Le potentiel des vitesses est donné par la relation :

$V_0 \vec{e}_x = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ , ce qui donne :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = V_0 \text{ et } \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

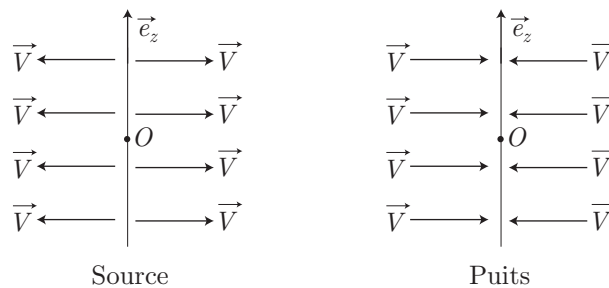
Nous en déduisons donc :

$$\phi = V_0 x + \text{cte}$$

### 1.5.1.15 Sources et puits

Nous allons étudier ici des sources et des puits d'écoulement, de type linéiques : considérons l'axe  $Oz$  à partir duquel est émis le fluide avec une vitesse radiale :

$\vec{V} = \frac{K}{r} \vec{e}_r$ . Si  $K > 0$ , on se trouve en présence d'une source d'écoulement. Si  $K < 0$ , il s'agit d'un puits d'écoulement.



Dans les deux cas l'axe  $Oz$  joue le rôle d'une source ou d'un puits linéique d'écoulement. On peut définir le débit volumique de cet écoulement à travers un cylindre d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$  et de hauteur  $h$  :

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{Lat}} \frac{K}{r} \vec{e}_r \cdot dS \vec{e}_r$$

le flux de la vitesse étant non nul seulement à travers la surface latérale. Nous avons donc :

$$\iint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_{Lat}} \frac{K}{r} r dz d\theta = 2\pi h K = D_V$$

Nous avons donc  $K = \frac{D_V}{2\pi h}$ , d'où l'expression du champ des vitesses :

$$\vec{V} = \frac{D_V}{2\pi h r} \vec{e}_r$$

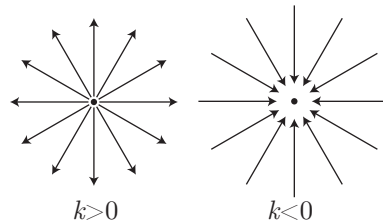
Il est alors possible de définir le débit volumique par unité de longueur :  $d_V = \frac{D_V}{h}$ , ce qui donne :

$$\vec{V} = \frac{d_V}{2\pi r} \vec{e}_r$$

Le potentiel des vitesses d'un tel écoulement vérifie donc :  $\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{d_V}{2\pi r}$ , soit encore :

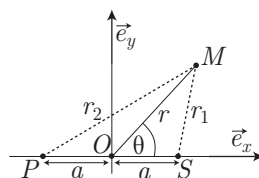
$$\phi = \frac{d_V}{2\pi} \ln r + \text{cte}$$

**1.5.1.16 Sources et puits bidimensionnels.**



On peut étudier l'écoulement précédent en se limitant à un plan perpendiculaire à  $Oz$ . On travaille alors en coordonnées polaires :  $(r, \theta)$ . La fonction potentiel va s'écrire :  $\phi = \frac{d}{2\pi} \ln r$ , si  $d > 0$ , il s'agit d'une source, si  $d < 0$ , il s'agit d'un puit.

**1.5.1.17 Additivité des fonctions potentiel, exemple du doublet.**



Considérons un écoulement plan conséquence de la superposition d'une source et d'un puits.

Exprimons le potentiel des vitesses de l'écoulement au point  $M(r, \theta)$ .

La source située en  $S$  a pour fonction potentiel :  $\phi_S = \frac{d}{2\pi} \ln r_1 + \text{cte}_1$  avec  $d > 0$ .

Le puits situé en  $P$  a pour fonction potentiel :  $\phi_P = -\frac{d}{2\pi} \ln r_2 + \text{cte}_2$ .

La fonction  $\phi$  s'écrit :

$$\phi(M) = \phi_S(M) + \phi_P(M) = \frac{d}{2\pi} (\ln r_1 - \ln r_2) + \text{cte}$$

Dans le cas où  $a \ll r$ , l'association puits-source s'appelle un doublet.

Exprimons le potentiel des vitesses du doublet :

$$\begin{cases} r_1^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \theta \\ r_2^2 = a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta \end{cases}$$

$$r_1^2 = r^2 \left( 1 - \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right) \Rightarrow r_1 \simeq r \left( 1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

De la même manière :

$$r_2 \simeq r \left( 1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

on en déduit :

$$\phi = \frac{d}{2\pi} \left[ \ln r + \ln \left( 1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right) - \ln r - \ln \left( 1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right) \right]$$

En utilisant le fait que :  $\ln(1+x) \simeq x$ , pour  $x \ll 1$ , on a :

$$\phi = -\frac{da \cos \theta}{\pi r}$$

### 1.5.1.18 Écoulement incompressible et potentiel.

Lorsqu'un écoulement est à la fois incompressible et potentiel, nous avons deux relations :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \text{ et } \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi \Rightarrow \text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}} \phi \right) = 0$$

Or pour toute fonction  $X$ , nous avons l'égalité :  $\text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}} X \right) = \Delta X$ . Nous en déduisons que pour un écoulement incompressible et potentiel, la fonction potentiel obéit à l'équation de Laplace :

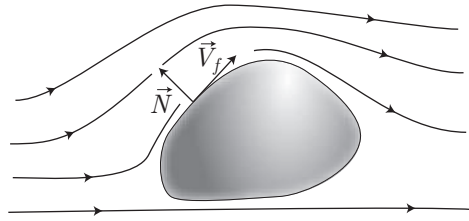
$$\Delta \phi = 0$$

### 1.5.1.19 Écoulement d'un fluide au voisinage d'un obstacle solide immobile.

Soit un fluide en contact avec un solide immobile. En chaque point  $C$  de contact il est possible de décomposer la vitesse du fluide en une composante normale et une composante tangentielle à la surface :

$$\vec{V} = \vec{V}_N + \vec{V}_T$$





- Étude de la composante normale :

Le fluide ne peut ni entrer ni sortir du solide ; la composante normale doit donc être nulle :  $\vec{V}_N = \vec{0}$ .

- Étude de la composante tangentielle :

- Considérons un fluide où les frottements avec le solide sont négligeables (fluide non visqueux). Dans ce cas les particules de fluide vont simplement glisser sur le solide sans interagir avec ce dernier. De ce fait, on ne peut rien affirmer sur la composante tangentielle de la vitesse du fluide. Le fluide est dit parfait.
- Lorsque les frottements entre le solide et le fluide ne sont plus négligeables, les particules de fluide vont au contraire s'accrocher à la surface du solide. La composante tangentielle de la vitesse du fluide sera donc nulle. Ces fluides seront dits réels.

#### 1.5.1.20 Écoulement d'un fluide au voisinage d'un obstacle solide en mouvement.

Dans le cas où le solide est lui même en mouvement dans le référentiel d'étude  $\mathcal{R}$ , nous pourrions tenir le même raisonnement que précédemment mais cette fois dans le référentiel lié au solide :  $\mathcal{R}_S$ .

- Étude de la composante normale :

Si, dans  $\mathcal{R}_S$ , la composante normale du fluide en tout point du solide est nulle, alors dans le référentiel d'étude, où le fluide et le solide sont en mouvement, les composantes normales des vitesses du fluide et du solide seront égales :

$$\vec{V}_{\text{fluide}} \cdot \vec{N} = \vec{V}_{\text{solide}} \cdot \vec{N}$$

- Étude de la composante tangentielle :

- Si le fluide est parfait les composantes tangentielles du fluide et du solide seront différentes dans  $\mathcal{R}$ .
- Si le fluide est réel les composantes tangentielles du fluide et du solide seront égales dans  $\mathcal{R}$ .

## 1.6 Dynamique des fluides.

### 1.6.1 Efforts sur une particule de fluide

#### 1.6.1.1 Fluide au repos

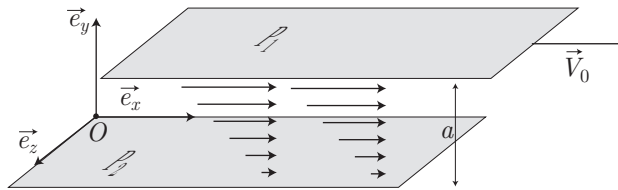
Considérons une particule de fluide dans un fluide au repos. Il a été vu en première année que si la particule est de volume  $d\tau$ , alors elle est soumise à la force de pression :

$$d\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau$$

### 1.6.1.2 Fluide en mouvement.

Lorsque le fluide est en mouvement, toute surface  $d\vec{S}$  de la particule sera soumise de la part du reste du fluide à une force :  $d\vec{F} = -P d\vec{S} + d\vec{F}_T$ ,  $d\vec{F}_T$  étant la composante tangentielle à la surface  $d\vec{S}$ .

Remarque – Lorsque le fluide est au repos  $d\vec{F}_T = \vec{0}$ .  
Explicitons  $d\vec{F}_T$  à partir de l'exemple ci-dessous :



Le plan  $Oxz$  est matérialisé par une plaque  $P_2$  immobile dans le référentiel :  $R(O\vec{e}_x\vec{e}_y\vec{e}_z)$ .

On considère une plaque  $P_1$ , identique à  $P_2$  contenue dans le plan  $y = a$ .

On déplace à la vitesse  $\vec{V} = V_0\vec{e}_x$  la plaque  $P_1$  par rapport à la plaque  $P_2$  jusqu'à ce qu'un régime permanent soit établi.

On constate alors qu'entre les deux plaques, le fluide a été mis en mouvement avec un profil des vitesses du type :

$$\vec{V}(M) = V_0 \times \left(\frac{y}{a}\right) \vec{e}_x$$

On peut interpréter ce résultat de la façon suivante : la plaque  $P_1$  a entraîné la couche de fluide juste au dessous et lui a donné une vitesse dirigée vers la droite. Cette même couche de fluide entraîne alors une autre couche située immédiatement au dessous d'elle. Ainsi de proche en proche, le mouvement se transmet de la plaque  $P_1$  au reste du fluide. On peut donc considérer qu'au sein du fluide une couche de fluide située en  $y$  entraîne la couche de fluide située en :  $y - dy$ . Ceci n'est possible que par l'intermédiaire d'une force tangentielle dirigée de la gauche vers la droite, exercée par la couche supérieure sur la couche inférieure.

D'après le principe des actions réciproques la couche inférieure va exercer, sur la couche supérieure, une force tangentielle dirigée de la droite vers la gauche.

Ces efforts entre les couches auront tendance à accélérer les couches inférieures et à freiner les couches supérieures.

On nomme ces efforts : les efforts de viscosité du fluide.

Expérimentalement, pour le cas précédemment décrit, on détermine la force  $\vec{F}$  exercée par le fluide sur la plaque mobile :

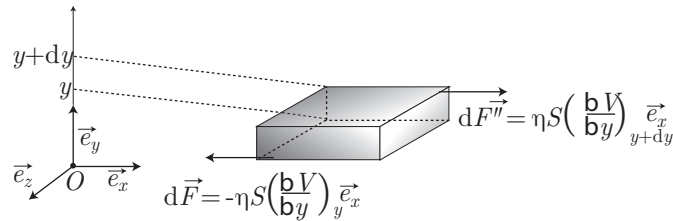
$$\vec{F} = -\eta \times \left(\frac{V_0}{a}\right) S \vec{e}_x$$

On nomme :  $\eta$  le coefficient de viscosité dynamique, caractéristique du fluide considéré ; il se mesure en poiseuille ou en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Exemples :

- $\eta_{\text{eau}} = 10^{-3}$  poiseuille
- $\eta_{\text{verre fondu}} = 10$  poiseuille
- $\eta_{\text{air}} = 10^{-5}$  poiseuille

**1.6.1.3 Expression des efforts de viscosité au sein d'un fluide**



Basons notre raisonnement toujours sur l'exemple précédent et considérons une couche de fluide comprise entre  $y$  et  $y + dy$ . Par analogie avec l'expression de la force de viscosité précédemment établie, on admet que la couche située immédiatement au dessous exerce une force sur la couche étudiée du type :  $d\vec{F} = -\eta S \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_y \vec{e}_x$ . De même, la couche étudiée exerce sur la couche immédiatement au dessus la force  $d\vec{F}' = -\eta S \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y+dy} \vec{e}_x$ . Le principe des actions réciproques permet d'écrire que la couche au dessus du plan situé en  $y + dy$  exerce sur la couche étudiée la force  $d\vec{F}'' = -d\vec{F}'$ . Les efforts de viscosité qui agissent sur la couche s'écrivent donc :

$$d\vec{F}_{\text{tot}} = d\vec{F} + d\vec{F}'' = \eta S \left[ \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_y \right] \vec{e}_x$$

On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction  $\frac{\partial V}{\partial y}$ . Nous avons donc, en notant  $\delta\tau = S dy$  le volume élémentaire de la couche de fluide étudiée :

$$d\vec{F} = \eta S \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dy \vec{e}_x = \eta \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \delta\tau \vec{e}_x$$

Soit un écoulement plus complexe où la vitesse s'écrit :  $\vec{V} = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z$ . On admet que sur chaque particule de fluide de volume  $\delta\tau$ , le reste du fluide exerce la force :

$$d\vec{F} = \eta \delta\tau \vec{\Delta} \vec{V}$$

On reconnaît ici l'opérateur Laplacien vectoriel. On définit donc la densité volumique des efforts de viscosité :

$$\frac{d\vec{F}}{\delta\tau} = \eta \vec{\Delta} \vec{V}$$

## 1.6.2 Écoulement laminaire et turbulent, nombre de Reynolds.

### 1.6.2.1 Écoulement laminaire et turbulent.

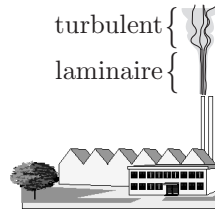
**Définition 41** *Un écoulement est dit laminaire lorsque les lignes de courant ont un aspect régulier. Les couches de fluides glissent les unes sur les autres.*

**Définition 42** *Un écoulement est dit turbulent lorsque les lignes de courant ont un aspect irrégulier et varient de façon imprévisible dans le temps.*

Un écoulement aura d'autant plus de chance d'être laminaire qu'il se fera à petite vitesse et qu'il concernera les fluides visqueux.

L'écoulement de l'eau dans une conduite sera régulier, donc laminaire, aux petites vitesses et turbulent aux vitesses élevées.

De même l'écoulement d'un fluide plus visqueux, comme l'huile, restera laminaire même pour des vitesses élevées ; la viscosité va assurer la régularité des lignes de courant même pour les grandes vitesses d'écoulement.



### 1.6.2.2 Nombre de Reynolds.

Les écoulements laminaires seront plus faciles à étudier que les écoulements turbulents ; il est donc important de préciser les conditions d'obtention de tels écoulements. Considérons l'écoulement d'un fluide de masse volumique  $\rho$  et de viscosité  $\eta$ , pour lequel on se donne  $V$ , vitesse caractéristique de l'écoulement et  $L$  dimension caractéristique sur laquelle la vitesse de l'écoulement varie de façon conséquente.

**Définition 43** *On définit le nombre de Reynolds  $R_E$ , comme la grandeur sans dimension :*

$$R_E = \frac{\rho V L}{\eta}$$

Expérimentalement on constate que les écoulements à faible nombre de Reynolds seront généralement laminaires contrairement à ceux à grand nombre de Reynolds qui seront turbulents.

$R_E$  relie aussi les termes  $\rho (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}$  et  $\eta \vec{\Delta} \vec{V}$ , par :

$$R_E \simeq \frac{\rho |(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}|}{|\eta \vec{\Delta} \vec{V}|}$$

Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds ( $R_E \simeq 10\,000$ ), on pourra négliger le terme  $|\eta \vec{\Delta} \vec{V}|$  par rapport au terme  $|\rho (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}|$ .

Réciproquement pour les écoulements à faibles nombre de Reynolds, nous pourrions négliger le terme  $|\rho (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}|$  par rapport au terme  $|\eta \Delta \vec{V}|$ .

### 1.6.3 Équation d'Euler.

#### 1.6.3.1 Équation d'Euler.

Considérons une particule de fluide de masse  $\delta m$  et de volume  $\delta \tau$ . Appliquons lui le principe fondamental de la dynamique :

$$\delta m \vec{a} = \delta m \vec{g} + \left( -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{V} + \vec{f} \right) d\tau$$

où  $\vec{f}$  comptabilise toutes les forces volumiques autres que pesanteur, pression et viscosité.

Étant donné que  $\delta m = \rho d\tau$ , nous obtenons l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \Delta \vec{V} + \vec{f}$$

#### 1.6.3.2 Fluide parfait

**Définition 44** *Un fluide est dit parfait si les efforts de viscosité sont nuls.*

$$\eta = 0$$

Dans ce cas l'équation se simplifie et devient :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{f}$$

Nous pourrions, au besoin, utiliser l'égalité :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V}, \text{ où } (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{V^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V}$$

#### 1.6.3.3 Statique des fluides

Dans le cas où le fluide est au repos ( $\vec{V} = \vec{0}$ ), et où les efforts à considérer sont seulement ceux de pression et de pesanteur ( $\vec{f} = \vec{0}$ ), on retrouve l'équation fondamentale de la statique des fluides en équilibre dans le champ de pesanteur :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$$



Soit un fluide de masse volumique  $\rho$ , au repos dans le champ de pesanteur. Exprimer  $P(z)$  sachant que  $P(0) = P_0$ .

**RÉPONSE** L'équation de la statique des fluides en projection sur  $Oz$  s'écrit :  $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ , ce qui donne :  $P(z) = \text{cte} - \rho g z$ . La constante se détermine à l'aide de l'égalité :  $P(0) = P_0 \Rightarrow \text{cte} = P_0$ . L'évolution de la pression avec l'altitude est donc donnée par :

$$P(z) = P_0 - \rho g z$$

Dans le cas des gaz la masse volumique est de l'ordre de  $10^{-1} \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Si  $P_0$  est de l'ordre de  $10^5 \text{Pa}$ , le terme :  $\rho g z$  est négligeable devant  $P_0$  et on peut considérer que la pression est uniforme dans le gaz .

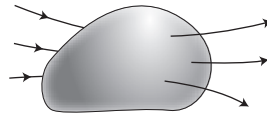
$$P(z) \simeq P_0$$

## 1.6.4 Taux de variation d'une intégrale de volume dans le temps.

### 1.6.4.1 Volume de contrôle et volume matériel.

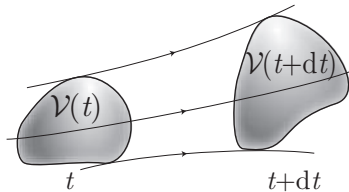
**Définition 45** On appelle volume de contrôle, tout volume  $\mathcal{V}$  fixe limité par une surface fermée  $S$ .

Entre  $t$  et  $t + dt$  ce volume est traversé par des particules de fluide. De ce fait sa masse peut varier au cours du temps.



**Définition 46** On appelle volume matériel, tout volume délimité par une surface fermée qui contient le même nombre de particules au cours du temps.

Ce volume suit donc le fluide dans son mouvement ; il pourra pour cela se déformer. Contrairement au volume de contrôle la masse du volume matériel est constante.



### 1.6.4.2 Taux de variation d'une intégrale de volume dans le temps.

Notons  $F$  une grandeur associée au fluide et  $f = \frac{dF}{d\tau}$  la grandeur volumique correspondante. À chaque instant :  $F = \iiint_{\mathcal{V}} f d\tau$ . Cherchons à évaluer  $\frac{dF}{dt}$  :

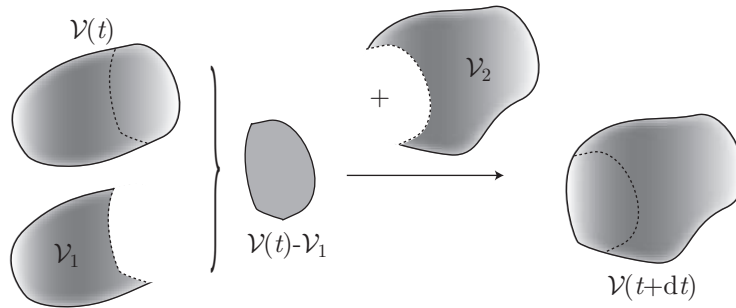
$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [F(t + \Delta t) - F(t)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \iiint_{\mathcal{V}(t+\Delta t)} f(t + \Delta t) d\tau - \iiint_{\mathcal{V}(t)} f(t) d\tau \right) \end{aligned}$$

Remarquons que  $\mathcal{V}(t + \Delta t) = \mathcal{V}(t) + \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1$ , d'où :

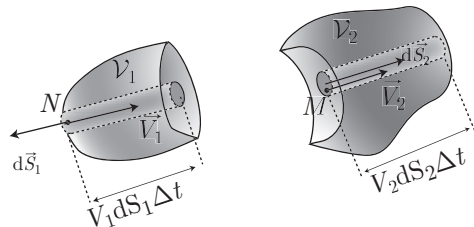
$$\begin{aligned} & \iiint_{\mathcal{V}(t+\Delta t)} f(t + \Delta t) d\tau \\ &= \iiint_{\mathcal{V}(t)} f(t + \Delta t) d\tau + \iiint_{\mathcal{V}_2} f(t + \Delta t) \delta\mathcal{V}_2 - \iiint_{\mathcal{V}_1} f(t + \Delta t) \delta\mathcal{V}_1 \end{aligned}$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left( \iiint_{\mathcal{V}(t+\Delta t)} f(t + \Delta t) d\tau - \iiint_{\mathcal{V}(t)} f(t) d\tau \right) \\ &+ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \iiint_{\mathcal{V}_2} f(t + \Delta t) \delta\mathcal{V}_2 - \iiint_{\mathcal{V}_1} f(t + \Delta t) \delta\mathcal{V}_1 \right) \end{aligned}$$



Remarquons que  $\mathcal{V}_2$  peut se décomposer en volumes élémentaires :  $\delta\mathcal{V}_2 = \vec{V}_2 \Delta t \cdot d\vec{S}_2$ .  
De même  $\mathcal{V}_1$  se décompose en :  $\delta\mathcal{V}_1 = -\vec{V}_1 \cdot d\vec{S}_1 \Delta t$ .



D'où :

$$\iiint_{\mathcal{V}_2} f(t + \Delta t) d\mathcal{V}_2 = \iint_{S_2} f(t + \Delta t) \vec{V}_2 \cdot d\vec{S}_2 \Delta t \text{ et } \iiint_{\mathcal{V}_1} f(t + \Delta t) d\mathcal{V}_1 = - \iint_{S_1} f(t + \Delta t) \vec{V}_1 \cdot d\vec{S}_1 \Delta t$$

Nous obtenons donc :

$$\iiint_{\mathcal{V}_2} f(t + \Delta t) d\mathcal{V}_2 - \iiint_{\mathcal{V}_1} f(t + \Delta t) d\mathcal{V}_1 = \iint_{S_2} f(t + \Delta t) \vec{V}_2 \cdot d\vec{S}_2 \Delta t + \iint_{S_1} f(t + \Delta t) \vec{V}_1 \cdot d\vec{S}_1 \Delta t = \oint_S f(t + \Delta t) \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

la somme étant réalisée sur toute la surface qui délimite  $\mathcal{V}$ .

Il s'ensuit que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\Delta t} \oint_S f(t + \Delta t) \vec{V} \cdot d\vec{S} \Delta t \right) = \oint_S f(t) \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

Étant donné que :

$$\frac{dF}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \iiint_{\mathcal{V}} (f(t + \Delta t) - f(t)) d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau$$

Nous en déduisons alors la relation :

$$\frac{dF}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial f}{\partial t} d\tau + \oiint_S f \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Cette dernière relation se généralise au cas où les grandeurs sont de nature vectorielle :

$$\vec{F} \text{ et } \vec{f} = \frac{d\vec{F}}{d\tau} :$$

$$\frac{d\vec{F}}{dt} = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} d\tau + \oiint_S \vec{f} (\vec{v} \cdot d\vec{S})$$

#### 1.6.4.3 Application : théorème de la quantité de mouvement.

Posons  $\vec{F} = \vec{P}$  quantité de mouvement du volume matériel. Le théorème de la résultante cinétique donne :  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_V$ .

$\vec{F}_V$  correspond aux efforts qui agissent sur le volume matériel.

Par définition :  $\vec{P} = \iiint_{\mathcal{V}} \delta m \vec{V} = \iiint_{\mathcal{V}} \rho d\tau \vec{V}$ . On obtient alors le théorème de la quantité de mouvement :

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\tau + \oiint_S \rho \vec{V} (\vec{v} \cdot d\vec{S}) = \vec{F}_V$$

Cette équation nous permettra donc d'exprimer les efforts qui s'exercent sur un fluide, si on connaît le profil de l'écoulement et réciproquement.

## 1.7 Dynamique des fluides parfaits.

Nous supposons dans cette partie que le fluide considéré est incompressible ( $\rho = \text{cte}$ ) et parfait ( $\eta = 0$ ).

### 1.7.1 Équation de Bernoulli.

#### 1.7.1.1 Écoulement permanent incompressible.

Considérons un fluide incompressible et parfait, soumis seulement aux efforts de pression et de pesanteur. L'équation du mouvement du fluide s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

L'écoulement étant permanent,  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \vec{0}$ , il s'ensuit :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V}$$



Définissons un repère  $Oxyz$  orthonormé direct, dans lequel on peut écrire  $\vec{g} = -\text{grad}(gz)$ . L'équation du mouvement devient :

$$\text{grad} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho gz + P \right) + \rho \text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{0}$$

Projetons cette dernière égalité le long d'une ligne de courant :

$$\text{grad} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho gz + P \right) \cdot d\vec{OM} + \rho (\text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V}) \cdot d\vec{OM} = 0 \text{ avec } d\vec{OM} = \vec{V} dt$$

Le vecteur  $\text{rot} \vec{V} \wedge \vec{V}$  est perpendiculaire à  $\vec{V}$  donc aussi à  $d\vec{OM}$ . De ce fait l'égalité précédente devient :

$$\text{grad} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho gz + P \right) \cdot d\vec{OM} = 0$$

Comme :

$$\text{grad} \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho gz + P \right) \cdot d\vec{OM} = d \left( \frac{\rho V^2}{2} + \rho gz + P \right)$$

Il s'ensuit la relation de Bernoulli sur une ligne de courant :

$$\frac{1}{2} \rho V^2 + \rho gz + P = \text{cte}$$

La somme de ces trois termes est indépendante du point de la ligne de courant. Rappelons que cette dernière égalité n'est vraie que pour un fluide parfait, incompressible, en écoulement permanent.

La valeur de la constante change d'une ligne de courant à l'autre.

### 1.7.1.2 Écoulement permanent, incompressible et irrotationnel.

Étant donné que  $\text{rot} \vec{V} = \vec{0}$ , l'équation du mouvement s'écrit dans ce cas :

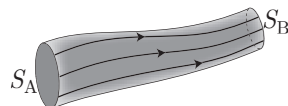
$$\rho \text{grad} \left( \frac{V^2}{2} \right) = \rho \vec{g} - \text{grad} P$$

Par le même raisonnement que précédemment on obtient à nouveau l'égalité :

$$P + \rho gz + \rho \frac{V^2}{2} = \text{cte}$$

Toutefois, la valeur de la constante est cette fois indépendante de la ligne de courant considérée ; l'égalité est vraie en tout point du fluide.

### 1.7.1.3 Exemple d'application : chute de pression lors d'une augmentation de vitesse.



On peut ainsi justifier la diminution de pression dans une veine de fluide dont la section diminue.

Considérons l'écoulement permanent d'un fluide incompressible, non visqueux, dont les grandeurs caractéristiques sont constantes sur toute surface perpendiculaire à l'écoulement.

Le long de la ligne de courant passant par les points  $A$  et  $B$ , la relation de Bernoulli s'écrit :

$$P_A + \rho g z_A + \rho \frac{V_A^2}{2} = P_B + \rho g z_B + \rho \frac{V_B^2}{2}$$

La conservation du débit volumique impose :  $V_B S_B = V_A S_A$ , ce qui montre que lorsque la section diminue le long de la veine de fluide la vitesse augmente :

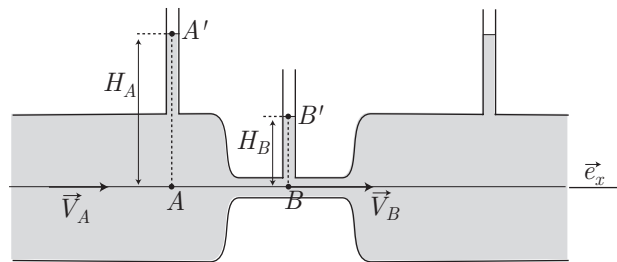
$$S_B < S_A \Rightarrow V_B > V_A$$

En considérant qu'il est possible de négliger la différence d'altitude entre les points  $A$  et  $B$ , nous obtenons :

$$P_A + \rho \frac{V_A^2}{2} = P_B + \rho \frac{V_B^2}{2}$$

D'où comme :  $V_B > V_A$ , on en déduit :  $P_B < P_A$ .

#### 1.7.1.4 Tube de Venturi



Le tube de Venturi, utilise les propriétés du fluide parfait pour mesurer la vitesse d'écoulement d'un gaz ou d'un liquide.

Soit l'écoulement unidimensionnel, uniforme et incompressible, d'un fluide parfait. On admet qu'en tout point du fluide assez éloigné des parois, la vitesse s'écrit :  $\vec{V} = V \vec{e}_x$ . Écrivons le théorème de Bernoulli sur la ligne de courant passant par  $A$  et  $B$  :

$$P_A + \rho \frac{V_A^2}{2} = P_B + \rho \frac{V_B^2}{2}$$

Loin des parois, l'équation du mouvement du fluide s'écrit :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = \rho \vec{g} - \text{grad} P$$

Projetons cette équation sur l'axe  $Oz$ , nous obtenons :  $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ , ce qui donne, pour les variations de la pression :

$$P(z) = -\rho g z + \text{cte}$$

Les points  $A'$  et  $B'$  étant en contact avec l'atmosphère :  $P_{A'} = P_{B'} = P_0$ , donc :  $P_A = P_0 + \rho g H_A$  et  $P_B = P_0 + \rho g H_B$ .

$S_A$  et  $S_B$  étant les sections de l'écoulement, respectivement, au niveau du point  $A$  et du point  $B$ , la conservation du débit volumique donne :  $V_A S_A = V_B S_B$ .

Il existe donc deux relations simples entre les pressions et les vitesses :

$$\begin{cases} V_A = V_B \left( \frac{S_B}{S_A} \right) \\ P_A - P_B = \rho g (H_A - H_B) = \rho g \Delta H, \text{ si on pose : } \Delta H = H_A - H_B \end{cases}$$

L'application de la relation de Bernoulli le long de ligne de fluide ( $AB$ ) donne :

$$P_B + \rho \frac{V_B^2}{2} = P_A + \frac{1}{2} \rho \left( \frac{V_B S_B}{S_A} \right)^2$$

Il s'ensuit :

$$P_A - P_B = \frac{1}{2} \rho V_B^2 \left[ 1 - \left( \frac{S_B}{S_A} \right)^2 \right] = \rho g \Delta H$$

On en déduit alors la vitesse du fluide en  $B$  :

$$V_B = \sqrt{\frac{2g\Delta H}{1 - \left( \frac{S_B}{S_A} \right)^2}}$$

Si on connaît les sections des tubes et si on mesure  $\Delta H$ , on peut calculer la vitesse du fluide au point  $B$ .

## 1.7.2 Écoulement potentiel.

### 1.7.2.1 Équation de Bernoulli généralisée.

Rappelons que l'écoulement est dit potentiel s'il existe une fonction  $\phi$  telle que :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$$

Cette dernière relation est équivalente à :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$ . Supposons que les seuls efforts qui agissent sur le fluide sont ceux de pression et de pesanteur, l'équation du mouvement devient :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

Définissons un référentiel  $Oxyz$ , où l'accélération de la pesanteur s'écrit :  $\vec{g} = -g \vec{e}_z$  :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{V^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} (\rho g z) - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

En utilisant le fait que  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$  et qu'il est possible de permuter les dérivées d'espace et de temps, on obtient :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \rho \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{grad}} \phi) = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

D'où l'équation :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{V^2}{2} + P + \rho g z \right) = \vec{0}$$

Donc, en tout point du fluide on obtient la relation de Bernoulli généralisée :

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho \frac{V^2}{2} + P + \rho g z = \text{cte}(t)$$

Remarque – Cette égalité est vérifiée à chaque instant en chaque point du fluide.

● 1 **Concours Commun Polytechnique**

20 min.

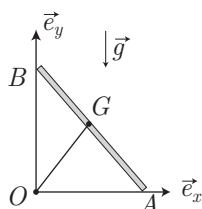
Dynamique en référentiel galiléen

MP-PC-PSI-PT

On considère une barre homogène de longueur  $L$ , de centre d'inertie  $G$  qui repose sur deux axes perpendiculaires.

On suppose qu'il n'y a pas de frottements en  $B$  et qu'il existe un coefficient de frottement  $f$  en  $A$ .

On note  $\alpha$  l'angle entre les axes  $OA$  et  $OG$ .



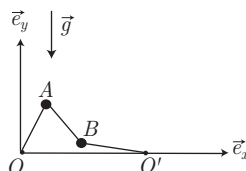
1. Quelle est la trajectoire du point  $G$ , si la tige glisse ?
2. Trouver la condition sur  $\alpha$  pour que la barre reste immobile.

● 2 **Lycée Saint-Exupéry, Mantes la Jolie**

25 min.

Dynamique en référentiel galiléen

MP-PC-PSI-PT



Un fil sans masse, inextensible, de tension constante  $T$  porte deux perles identiques  $A$  et  $B$ , de masse  $m$  espacées de  $a$ . Les extrémités du fil sont fixées en  $O$  et  $O'$  de sorte que  $OA = BO' = a$ .

les masses peuvent effectuer de petits mouvements parallèlement à l'axe  $Oy$ , on négligera les efforts de pesanteur par rapport aux efforts de tension des fils. On note  $y_1$  et  $y_2$

les positions respectives de ces deux masses. On posera  $\omega_0 = \left(\frac{T}{ma}\right)^{1/2}$ .

1. Etablir les équations différentielles vérifiées par  $y_1$  et  $y_2$ .
2. On donne  $y_1(0) = y_2(0) = a$ , les perles étant abandonnées sans vitesse exprimer  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ .
3. On donne  $y_1(0) = -y_2(0) = a$ , les perles étant abandonnées sans vitesse exprimer  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ .
4. On donne  $y_1(0) = 0$  et  $y_2(0) = a$ , les perles étant abandonnées sans vitesse exprimer  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$ .

ÉNONCÉS

### ● 3 ————— Concours Commun Polytechnique

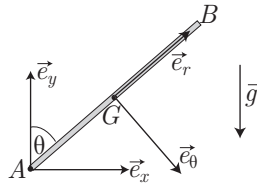
30 min.

Dynamique en référentiel galiléen

MP-PC-PSI-PT

On considère une tige  $AB$  de longueur  $L$  et de masse  $m$ , on note  $J_{A_z} = \frac{mL^2}{3}$  son moment d'inertie par rapport à l'axe  $A_z$ .

A  $t = 0$ , la tige est abandonnée sans vitesse à la position repérée par  $\theta_0 \simeq 0$ . Pendant la chute le point  $A$  reste immobile.



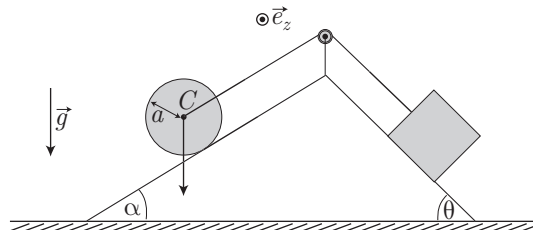
1. Calculer l'accélération du point  $G$ , centre d'inertie de la tige.
2. Montrer que l'énergie mécanique de la tige est constante.
3. Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de  $AB$ .
4. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$  au cours de la chute de la tige.
5. Exprimer la résultante des efforts du sol sur la tige.

### ● 4 ————— Concours Mines-Ponts

30 mn min.

Dynamique en référentiel galiléen

MP-PC-PSI-PT



On considère l'ensemble constitué par un disque  $D$  de rayon  $a$ , de centre  $C$ , de masse  $m$  et par un cube de masse  $M$ . Le cube peut se déplacer sans frottements sur un plan incliné d'un angle  $\theta$ , le disque peut quant à lui rouler sans glisser sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$ .

Le centre du disque est relié au cube par un fil inextensible, sans masse, qui passe par une poulie idéale.

On note  $\varphi$  l'angle entre la verticale descendante et  $\overrightarrow{CA}$ ,  $A$  étant un point de la périphérie du disque.

Exprimer l'accélération du cube.

On donne le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe  $C\vec{e}_z$  :  $J = \frac{ma^2}{2}$

● 5 **Lycée Janson de Sailly, Paris**

30 min.

Dynamique en référentiel galiléen

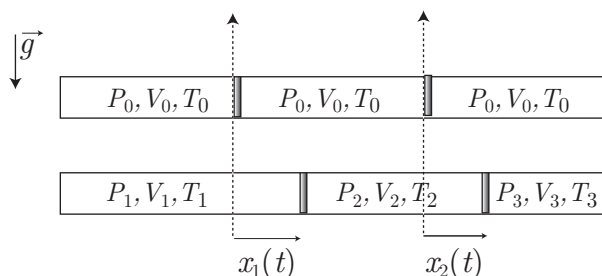
MP-PC-PSI-PT

Soit un tube fermé de section  $S$  aux parois adiabatiques contenant un gaz parfait de coefficient constant  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ .

Dans ce tube se trouvent deux pistons, interdisant les échanges thermiques, chacun de masse  $m$ .

Initialement ces pistons à l'équilibre définissent trois volumes identiques  $V_0$  à la pression  $P_0$  et la température  $T_0$ . Un dispositif non précisé permet de déplacer légèrement les pistons par rapport à leurs positions d'équilibre et à les abandonner par la suite sans vitesse initiale.

On constate alors que ces derniers se mettent à osciller. Les déplacements des pistons pourront être considérés comme élémentaires, et toutes les transformations pourront être considérées comme réversibles.



1. Quand le piston 1 est déplacé de  $x_1$  par rapport à la position d'équilibre, la pression du compartiment devient  $P_1 = P_0 + p_1$ , avec  $p_1 \ll P_0$ .

Démontrer qu'au premier ordre  $p_1 = -\frac{P_0 S \gamma x_1}{V_0}$ .

2. De même les pressions dans les compartiments 2 et 3 deviennent  $P_0 + p_2$  et  $P_0 + p_3$ , exprimer  $p_2$  en fonction de  $P_0, V_0, \gamma, S, x_1$  et  $x_2$ , et  $p_3$  en fonction de  $P_0, V_0, \gamma, S$  et  $x_2$ . On tiendra compte du fait que  $p_2 \ll P_0$  et que  $p_3 \ll P_0$ .
3. Exprimer les équations différentielles vérifiées par  $x_1$  et  $x_2$ , on posera :

$$\omega_0^2 = \frac{P_0 S^2 \gamma}{m V_0}$$

4. Exprimer  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  pour  $x_1(0) = x_2(0) = a$ .
5. Exprimer  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  pour  $x_1(0) = -x_2(0) = a$ .
6. Exprimer  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  pour  $x_1(0) = 0$  et  $x_2(0) = a$ .

● 6 **Concours Mines-Ponts**

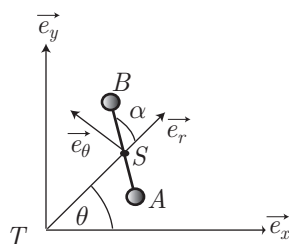
35 mn min.

Dynamique en référentiel galiléen

MP-PC-PSI-PT

Un satellite est constitué d'une barre rigide sans masse de longueur  $L$  et de deux masses,  $m$  ponctuelles  $A$  et  $B$  telles que  $L = (AB)$ . Ce dernier se trouve dans le champ de gravitation terrestre et son centre  $S$  effectue une trajectoire circulaire uniforme de rayon  $r \gg L$  autour de  $T$ . On note  $M_T$ , la masse de la Terre.

**ÉNONCÉS**



1. Démontrer que les efforts qu'exerce le Terre sur le satellite ont pour résultante :

$$\vec{F} \simeq -\frac{2GmM_T}{r^2} \vec{e}_r$$

2. Exprimer le moment en  $S$  des efforts exercés par la Terre sur le satellite.  
 3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\alpha$ .  
 4. En déduire la période des petites oscillations du satellite autour de ses positions d'équilibre stables.

## ÉNONCÉS

● 7

CCP 2006

60 mn min.

MP-PC-PSI-PT

Mécanique 1

Le théorème du viriel affirme que si un point matériel  $M(x, y, z)$  possède une énergie potentielle  $E_P(x, y, z)$  vérifiant la propriété suivante :

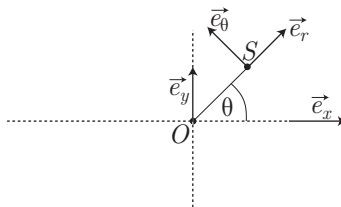
$$E_P(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^k E_P(x, y, z)$$

pour tout réel  $\lambda$ , alors il existe une relation suivante entre les valeurs moyennes temporelles au cours du mouvement de  $M$  :  $k \langle E_P \rangle = 2 \langle E_C \rangle$  à condition que la trajectoire soit bornée.

$E_C$  désigne l'énergie cinétique de  $M$  et  $\langle f \rangle$  la valeur moyenne de  $f$  au cours du temps. Nous ne considérerons que des mouvements périodiques. Les moyennes seront donc calculées sur une période.

Dans tout l'exercice l'étude est faite dans un référentiel  $\mathcal{R}$  auquel est associé un repère orthonormé  $(O, x, y, z)$ .

On considère un satellite de masse  $m$  se trouvant à une distance  $r$  du centre  $O$  de la Terre. On note  $G$  la constante de gravitation,  $M_T$  la masse de la Terre et  $r$  la distance entre  $O$  et le satellite.



1. (a) Comment s'écrit la force subie par le satellite ?  
 (b) Déterminer l'énergie potentielle  $E_P$  du satellite (avec la convention  $E_P = 0$  à l'infini).



- (c) Comment s'exprime ici le théorème du viriel ? Quelle propriété de l'énergie retrouve-t-on pour un état lié ?
- (d) Dans le cas où la trajectoire du satellite est circulaire de rayon  $r_0$ , déterminer sa vitesse  $v_C$ .  
On admettra pour la suite, que le satellite est lancé d'une distance  $r_0$ , avec une vitesse orthogonale de module  $v_0 = \alpha \sqrt{\frac{GM_t}{r_0}}$ , avec  $1 < \alpha < \sqrt{2}$
2. (a) Montrer que le mouvement du satellite est plan. Celui-ci est repéré en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  dans son plan. Montrer que la quantité  $r^2 \frac{d\theta}{dt}$  est constante. Déterminer la valeur de cette constante que l'on notera  $C$ .
- (b) Montrer que la trajectoire est bornée.
- (c) Montrer que l'équation en coordonnées polaires de la trajectoire peut s'écrire :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec  $p = \frac{C'}{GM_t}$  où  $C'$  est une constante que l'on déterminera.

- (d) Déterminer le paramètre  $p$  de la trajectoire du satellite en fonction de  $r_0$  et  $e$ .
- (e) Déterminer l'excentricité de la trajectoire en fonction de  $\alpha$  seulement.
- (f) Calculer les rayons au périhélie et à l'apogée. Représenter la trajectoire en précisant le point de départ, l'axe polaire, les foyers.
3. (a) Exprimer l'énergie cinétique du satellite en fonction de  $G, M_t, p, e$  et  $\theta$ .
- (b) Exprimer de même l'énergie potentielle du satellite en fonction de  $G, M_t, p, e$  et  $\theta$ .
- (c) Dédurre du théorème du viriel que  $\langle \cos \theta \rangle = -e$ . Ce résultat vous surprend-il ? Que pensez vous de  $\langle \sin \theta \rangle$  ?
4. Pour mieux cerner le résultat précédent on cherche à évaluer les durées de passage du satellite  $\Delta t_1$  pour un angle  $\theta$  passant de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{\pi}{2}$  et  $\Delta t_2$  pour un angle  $\theta$  passant de  $\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{3\pi}{2}$ .

- (a) On rappelle la troisième loi de Kepler  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_t}$  ; exprimer la période  $T$  en fonction de  $p, C$  et  $e$ .
- (b) Exprimer la durée  $\Delta t$  que met le satellite pour passer d'un angle polaire  $\theta_1$  à  $\theta_2$  ; on donnera le résultat en fonction de la période et d'une intégrale sans dimensions.  
Si  $e = \frac{1}{2}$  le calcul numérique donne le résultat suivant :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2} = 0,195$$

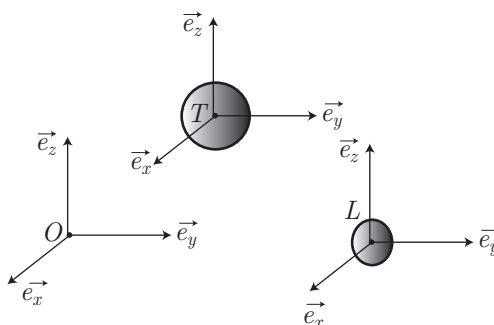
Ce résultat est-il en accord avec celui obtenu au 3.(c) ?

## ● 8 ————— Concours Commun Polytechnique

45 min.

Dynamique en référentiel galiléen

MP-PC-PSI-PT



Définition des différents référentiels et repères associés utilisés dans le problème :

On rappelle que le référentiel de Copernic, noté  $\mathcal{R}$  dont l'origine est le centre de masse  $O$  du système solaire et les trois axes  $Ox, Oy, Oz$  pointent vers trois étoiles lointaines de la sphère céleste, réalise une très bonne approximation d'un référentiel galiléen.

Le repère associé est  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

On note  $T$ , le centre de la Terre et  $\mathcal{R}_T$  le référentiel barycentrique de la Terre (ou référentiel géocentrique) de repère associé  $(T, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  avec  $\vec{e}_z$  : vecteur unitaire de l'axe des pôles.

On note  $L$ , le centre de la Lune et  $\mathcal{R}_L$  le référentiel barycentrique de la Lune (ou référentiel sélénocentrique) de repère associé  $(L, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .

La Lune et la Terre seront supposées être sphériques à répartition de masse à symétrie sphérique.

On néglige les effets dus au Soleil ; le système Terre-Lune est donc considéré isolé et on s'intéresse aux mouvements relatifs de la Terre et de la Lune. On considère le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  du système Terre-Lune et on appelle  $C$  le centre de masse de l'ensemble.

$\vec{\Omega}_L$  et  $\vec{\Omega}_T$  désignent le vecteur vitesse angulaire de rotation propre respectivement de la Lune dans  $\mathcal{R}_L$  et de la Terre dans  $\mathcal{R}_T$ .

$J_L = \frac{2}{5} m_L R_L^2$  désigne le moment d'inertie de la Lune par rapport à son axe de rotation dans  $\mathcal{R}_L$ .

$J_T = \frac{2}{5} m_T R_T^2$  désigne le moment d'inertie de la Terre par rapport à son axe de rotation dans  $\mathcal{R}_T$ .

On désigne par  $\vec{L}^*(T, L)$  le moment cinétique Terre-Lune dans  $\mathcal{R}^*$ .

On désigne respectivement par  $\vec{L}_C^*(T)$  et  $\vec{L}_C^*(L)$ , les moments cinétiques au point  $C$  dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$  de la Terre et de la Lune.  $\vec{L}_T(T)_{/R_T}$  et  $\vec{L}_L(L)_{/R_L}$  sont respectivement les vecteurs moments cinétiques de rotation propre de la Terre au point  $T$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_T$  et de la Lune au point  $L$  dans le référentiel  $\mathcal{R}_L$ .

1. (a) Montrer que  $\vec{L}^*(T, L)$  se conserve.
- (b) Les répartitions de masse de la Terre et de la Lune sont à symétrie sphérique, montrer que  $\vec{L}_T(T)_{/R_T}$  et  $\vec{L}_L(L)_{/R_L}$  se conservent.  
En déduire que  $\vec{\Omega}_L$  et  $\vec{\Omega}_T$  sont constants.

2. (a) En considérant la Terre comme un système de points discrets, montrer que :  
 $\vec{L}_C^*(T) = \vec{L}_T(T)_{/R_T} + \vec{CT} \wedge m_T \vec{V}_{T/R^*}$  où  $\vec{V}_{T/R^*}$  représente le vecteur vitesse de  $T$  dans le référentiel  $\mathcal{R}^*$ .
- (b) Donner la relation analogue pour  $\vec{L}_C^*(L)$
- (c) En déduire que  $\vec{L}^*(T, L)$  peut se mettre sous la forme :  
 $\vec{L}^*(T, L) = \vec{L}_{\text{orb}}^* + \vec{L}_T(T)_{/R_T} + \vec{L}_L(L)_{/R_L}$  où  $\vec{L}_{\text{orb}}^*$  désigne le moment cinétique orbital dans  $\mathcal{R}^*$  du système Terre-Lune.  
 Exprimer  $\vec{L}_{\text{orb}}^*$  en fonction de  $\vec{CT}$ ,  $m_T$ ,  $\vec{V}_{T/R^*}$  et de  $\vec{CL}$ ,  $m_L$ ,  $\vec{V}_{L/R^*}$
3. On appelle  $M$  la particule fictive, telle que  $\vec{CM} = \vec{TL}$  de masse réduite  $\mu = \frac{m_T m_L}{m_T + m_L}$ , de vecteur vitesse  $\vec{V}_{M/R^*}$ .
- (a) Calculer  $\vec{CT}$  et  $\vec{CL}$  en fonction de  $m_T$ ,  $m_L$  et  $\vec{CM}$ . En déduire les vecteurs vitesses  $\vec{V}_{T/R^*}$  et  $\vec{V}_{L/R^*}$  des points  $T$  et  $L$  dans  $\mathcal{R}^*$ , en fonction de  $\vec{V}_{M/R^*}$ .
- (b) Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans  $\mathcal{R}^*$  pour  $L$  et  $T$ , et montrer que cela revient à considérer la particule fictive soumise à la force exercée par la Terre sur la Lune.
4. (a) Exprimer  $\vec{L}_{\text{orb}}^*$  en fonction de  $\vec{V}_{M/R^*}$  et  $\mu$ . Montrer alors que le mouvement de la particule fictive est plan.
- (b) En considérant que  $m_T \gg m_L$ , à quels points peut-on assimiler les points  $C$  et  $M$ ? Avec quel référentiel peut-on confondre  $\mathcal{R}^*$ ?
5. On suppose que la condition précédente est satisfaite. On se place dans le plan de la trajectoire de  $L$  et on introduit le repère de coordonnées polaires  $(T, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  tel que  $\vec{TL} = r \vec{e}_r$ .
- (a) Établir par la méthode de votre choix l'équation différentielle suivie par  $u = \frac{1}{r}$ .  
 Montrer que l'équation de la trajectoire s'écrit :  $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$  où l'on donnera les significations de  $p$  et  $e$ .
- (b) Le périhélie est caractérisé par  $r_p = 363000$  km et l'apogée par  $r_a = 405000$  km. Calculer  $p$  et  $e$ .
- (c) Montrer que la trajectoire de la Lune autour de la Terre peut-être assimilée à un cercle dont on donnera le rayon  $D_L$ . Calculer la vitesse angulaire orbitale  $\omega_L$  de la Lune autour de la Terre, puis la vitesse  $v_L$  de la Lune sur son orbite par rapport au référentiel  $\mathcal{R}_T$ .
6. Évaluer numériquement le moment cinétique orbital  $\vec{L}_{\text{orb}}^*$ , ainsi que les moments cinétiques de rotation propre  $\vec{L}_T(T)_{/R_T}$ ,  $\vec{L}_L(L)_{/R_L}$  et les comparer entre eux.  
 Données :  $\Omega_L = 2,66 \cdot 10^{-6}$  rad  $\cdot$  s $^{-1}$  et  $\Omega_T = 7,29 \cdot 10^{-5}$  rad  $\cdot$  s $^{-1}$
7. En supposant les vecteurs  $\vec{\Omega}_T$  et  $\vec{\omega}_L$  colinéaires et dirigés suivant  $\vec{e}_z$ , montrer alors que l'on peut écrire :

$$\vec{L}^*(T, L) \simeq \left( m_L \sqrt{GD_L m_T} + J_T \Omega_T \right) \vec{e}_z$$

On donne :

$$M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$$

$$M_L = 7.4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$$

$$R_T = 6\,370 \text{ km}$$

$$R_L = 1\,720 \text{ km}$$

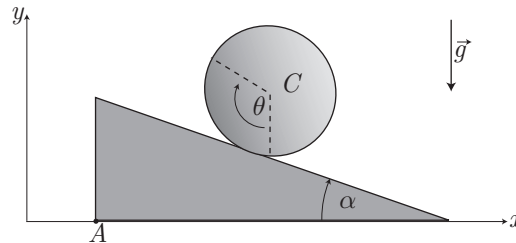
## ● 9 ————— Concours Mines-Ponts

45 min.

*Dynamique en référentiel non galiléen*

MP-PC-PSI-PT

Un prisme de masse  $M$ , sur lequel roule sans glisser un rouleau, de masse  $m$  et de rayon  $a$ , peut glisser sans frottements sur une table horizontale.



1. Déterminer l'abscisse  $x(t)$  du point A du prisme le long du plan horizontal. On considèrera que  $x(0) = 0$ .
2. Exprimer  $\theta(t)$  l'angle dont a tourné le rouleau à  $t$ . On considèrera que  $\theta(0) = 0$ .

On donne  $J = \frac{ma^2}{2}$ , moment d'inertie du rouleau par rapport à son axe de révolution.

## ● 10 ————— Concours Commun Polytechnique

30 min.

*Lois de Coulomb*

MP-PC-PSI-PT

Un cylindre de masse  $m$ , de rayon  $a$ , de moment d'inertie  $J = \frac{ma^2}{2}$  par rapport à son axe de révolution et de centre d'inertie  $C$ , roule sans glisser le long de la plus grande pente d'un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.

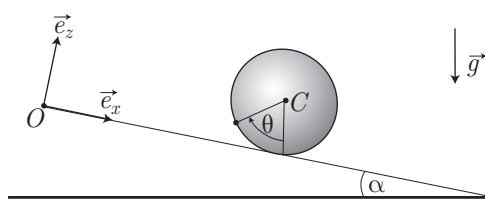
L'ensemble est étudié dans un référentiel galiléen.

L'air exerce sur le cylindre des efforts équivalents à une force de point d'application  $C$  :  $\vec{F} = -bm\vec{V}(C)$ ,  $b$  étant un coefficient positif constant.

Les efforts de contact entre le cylindre et le plan incliné obéissent aux lois de Coulomb. On appelle  $\mu$  le coefficient de frottement associé.

On repère le cylindre par l'abscisse de  $C$  notée :  $x(t)$  et par l'angle :  $\theta(t)$ .

Initialement le cylindre est abandonné immobile, on donne  $x(0) = 0$  et  $\theta(0) = 0$ .



1. Exprimer au cours de la descente  $\dot{x}(t)$ .
2. Montrer que  $C$  va atteindre une vitesse limite que l'on exprimera.
3. Dans le cas où on peut négliger les frottements de l'air, montrer que le roulement sans glissement peut se faire seulement si  $\alpha$  est inférieur à une certaine valeur  $\alpha_0$  que l'on explicitera.

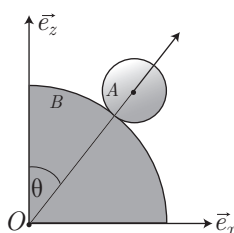
● **11** **Concours Mines-Ponts**

*30 min.*

*Lois de Coulomb*

MP-PC-PSI-PT

On considère un ensemble de deux cylindres :  $A$  de masse  $m$  et de rayon  $a$  et  $B$  de rayon  $R$ , figurés ci-dessous. Le contact entre  $A$  et  $B$ , obéit aux lois de Coulomb, on note  $f$ , le coefficient de frottement entre les deux solides.



1.  $B$  étant fixe, déterminer les composantes normale et tangentielle de l'action de  $B$  sur  $A$ , lorsque  $A$  roule sans glisser sur  $B$ .
2. Pour quelle valeur de  $\theta_\ell$ ,  $A$  commence-t-il à glisser sur  $B$ ?  
On donne  $f = 0,1$ , calculer  $\theta_\ell$ .
3. Le cylindre  $A$  quitte-t-il son support avant de glisser ?

On donne à  $t = 0$ ,  $\theta = 0$ ,  $\frac{d\theta}{dt} \simeq 0$ .

$J = \frac{ma^2}{2}$ , moment d'inertie du cylindre  $A$  par rapport à son axe.

● **12** **Concours Commun Polytechnique**

*30 min.*

*Lois de Coulomb*

MP-PC-PSI-PT

Soit une roue de rayon  $a$ , de centre  $C$  et de moment d'inertie par rapport à l'axe  $C\vec{e}_y$  :

$$J = \frac{ma^2}{2}.$$

Cette roue peut rouler sans glisser le long de la plus grande pente d'un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.

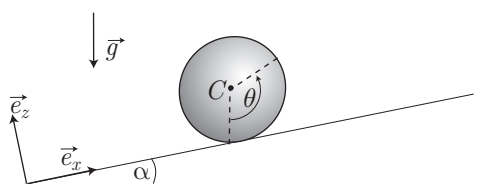
**ÉNONCÉS**

On admettra que le contact entre le roue et le sol est ponctuel et que les efforts de contact obéissent aux lois de Coulomb. On appelle  $\mu$  le coefficient de frottement.

On souhaite faire monter cette roue le long du plan incliné, pour cela on lui applique un couple constant de moment  $\vec{\Gamma} = \Gamma \vec{e}_y$  avec  $\Gamma > 0$ .

On repère la position de la roue par  $x(t)$ , abscisse de  $C$  le long du plan incliné et  $\theta(t)$ , angle de rotation de la roue.

À  $t = 0$  on a  $x(0) = 0$  et  $\theta(0) = 0$ , la roue est alors immobile. L'ensemble est étudié dans un référentiel galiléen.



## ÉNONCÉS

1. Dans le cadre du roulement sans glissement, exprimer  $\ddot{x}(t)$ .
2. Exprimer  $\dot{x}(t)$ . Pour quel couple minimal la roue remonte-t-elle le plan ?
3. Montrer qu'il existe un couple limite, que l'on exprimera en fonction de  $m, g, a, \mu$  et  $\alpha$ , au delà duquel la roue va dérapier.

### ● 13 ————— Concours Mines-Ponts

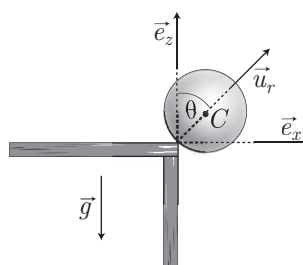
45 min.

Lois de Coulomb

MP-PC-PSI-PT

Un cylindre homogène de rayon  $a$ , de masse  $m$ , de centre  $C$  et de moment d'inertie par rapport à son axe de symétrie de révolution :  $J = \frac{1}{2}ma^2$  repose au bord d'une table.

À  $t = 0$ , il est en équilibre pour la valeur  $\theta = 0$  ; on note  $f$  le coefficient de frottement entre le cylindre et la table.



1. On suppose que dans un premier temps il n'y a pas glissement entre le cylindre et la table ; donner les composantes de la force exercée par la table sur le cylindre.
2. Pour quelle valeur de  $\theta$  le cylindre commence-t-il à glisser ? Calculer  $\theta$  pour  $f = 0,1$ .
3. Montrer que le cylindre glisse avant de quitter la table.

### ● 14 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

Système conservatif

MP-PC-PSI-PT

Un disque  $\mathcal{D}$  de masse  $m$ , de rayon  $a$  et de centre  $C$ , peut rouler, dans un plan vertical, à l'intérieur d'un cylindre fixe de centre  $O$  ; on note  $b = OC$  la distance de  $O$  à  $C$ .  $\mathcal{D}$  est homogène de moment d'inertie

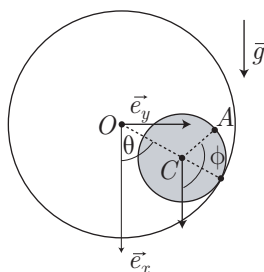
$$J = \frac{1}{2}ma^2 \text{ par rapport à son axe } C\vec{e}_z.$$

Le coefficient de frottement entre le cylindre et le disque est  $f$ .

$Ox$  est l'axe vertical, le champ de pesanteur  $g$  est uniforme.

On appelle  $\theta$ , l'angle entre  $\vec{e}_x$  et  $\vec{OC}$  et  $\phi$  celui entre  $\vec{e}_x$  et la direction  $CA$  où  $A$  est un point périphérique de  $\mathcal{D}$ .

On suppose que  $\mathcal{D}$  peut rouler sans glisser dans le cylindre. En outre l'angle  $\theta$  reste faible.



1. Déterminer l'énergie potentielle  $E_p(\theta)$  de  $\mathcal{D}$  en imposant  $E_p(0) = 0$ . En donner une expression approchée au deuxième ordre en  $\theta$ .
2. Établir la relation liant  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\phi}$ .
3. L'énergie mécanique du disque est-elle conservée ? Pourquoi ?
4. Déterminer l'équation du mouvement vérifiée par  $\theta(t)$ . La résoudre avec les conditions initiales  $\theta(0) = \theta_0 > 0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ .
5. Pour la solution précédente calculer les valeurs moyennes de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique. Que constate-t-on ?
6. Application numérique :  $\theta_0 = 0,1 \text{ rad}$ ,  $m = 160\text{g}$ ,  $g = 10\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $b = 20 \text{ cm}$ . Calculer l'énergie cinétique moyenne de  $\mathcal{D}$ .

### ● 15 ————— Concours Commun Polytechnique

30 min.

Système conservatif

MP-PC-PSI-PT

Une masse  $M$  est suspendue à un fil passant par une poulie de masse  $m$ , de rayon  $R$ .

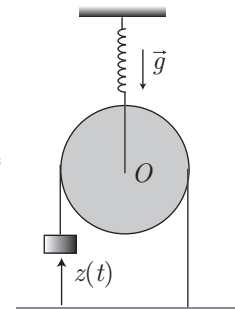
On note  $J_0 = \frac{mR^2}{2}$ , le moment d'inertie de la poulie par rapport à l'axe passant par  $O$  et perpendiculaire au plan de la poulie.

On admettra que le fil ne glisse pas sur la poulie.

La poulie est suspendue par son centre à un ressort de constante de raideur  $k$ , et de longueur à vide  $L_0$ .

On néglige les frottements. On appelle  $z$  et  $Z$ , respectivement, les écarts de la masse  $M$  et de la poulie par rapport à leur position d'équilibre.

1. Donner l'énergie mécanique du système en fonction de  $z$  et  $\dot{z}$ .
2. Donner la période des petites oscillations de la masse autour de sa position d'équilibre.



## ● 16 ————— Concours Mines-Ponts

45 min.

MP-PC-PSI-PT

*Énergie en référentiel non galiléen*

Une tige  $T$  de masse  $m$  et de longueur  $L$  peut tourner dans le plan  $Oxz$ , par l'intermédiaire d'une liaison pivot parfaite en  $O$ . Sa position dans ce plan est repérée par l'angle  $\theta$ .

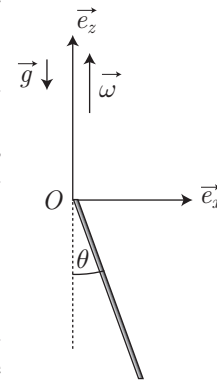
Ce plan tourne lui-même autour de l'axe fixe  $Oz$ , dans un référentiel galiléen, à vitesse angulaire uniforme  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ .

Du fait de la rotation la tige peut occuper différentes positions d'équilibre, caractérisées par  $\theta_{eq}$  dans le plan  $Oxz$  que l'on souhaite de déterminer.

On donne le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe  $Oy$  :

$$J = \frac{mL^2}{3}$$

1. Dans le référentiel tournant, exprimer la résultante des efforts d'inertie d'entraînement sur la tige en fonction de  $m, L, \omega$  et  $\theta$ .
2. Dans ce même référentiel exprimer le moment en  $O$  des efforts d'inertie d'entraînement.
3. Montrer qu'il existe une énergie potentielle centrifuge  $E_p = -\frac{mL^2}{6}\omega^2 \sin^2 \theta + \text{cte}$ .
4. Dans le référentiel tournant, exprimer l'énergie potentielle totale de la tige.
5. En déduire les positions d'équilibre possibles.
6. Étudier la stabilité de ces positions d'équilibre.



ÉNONCÉS

## ● 17 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes La Jolie

30 min.

MP-PC-PSI-PT

*Rotation d'un solide autour d'un axe fixe*

On considère le système constitué par l'ensemble de deux tiges identiques, de longueur  $L$ , de masse  $m$  et d'un ressort idéal, de constante de raideur  $k$  et de longueur à vide  $L_0$ . Le tout est étudié dans un référentiel galiléen.

Les tiges peuvent tourner, par l'intermédiaire de liaisons pivots parfaites, autour des axes  $O_1z$  et  $O_2z$  fixes (perpendiculaires au plan de la figure).

On repère les positions de ces dernières par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .

Les extrémités opposées des tiges sont liées par le ressort. Lorsque les angles sont nuls, la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide. On suppose qu'au cours du mouvement ce dernier reste constamment horizontal.

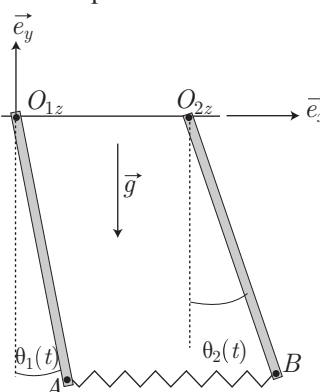


À  $t = 0$  on écarte les tiges des angles  $\theta_{10}$  et  $\theta_{20}$  et on les abandonne sans vitesse initiale.

On posera  $\omega_1^2 = \frac{3k}{m}$  et  $\omega_0^2 = \frac{3g}{2L}$ . On donne le moment d'inertie de chaque tige par rapport à son axe de rotation :  $J = \frac{mL^2}{3}$ .

Dans tout le problème les angles seront considérés comme très petits.

1. Au cours du mouvement exprimer la longueur approximative du ressort en fonction de  $L_0, L, \theta_2$  et  $\theta_1$ .
2. Déterminer deux équations différentielles couplées liants  $\theta_1$  et  $\theta_2$ .
3. Dans le cas où  $\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_0$  exprimer  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$ .
4. Dans le cas où  $\theta_{10} = -\theta_{20} = \theta_0$  exprimer  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$ .



● 18 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

10 min.

Statique des fluides

MP-PC-PSI-PT

L'air est assimilé à un gaz parfait, de masse molaire  $M$ . On se donne, dans l'atmosphère, une relation entre la pression  $p(z)$  et la masse volumique  $\mu(z)$  de l'air à une altitude  $z$ , appelée loi polytropique d'indice  $k$  :

$$\frac{p(z)}{[\mu(z)]^k} = \text{cte}$$

$k$  est une constante donnée, ajustée à *posteriori* aux données expérimentales. Le modèle de l'atmosphère polytropique constitue une généralisation du modèle de l'atmosphère isotherme pour lequel on aurait  $k = 1$ . Dans la suite,  $k$  est choisi différent de l'unité.

Au niveau du sol ( $z = 0$ ), on note  $p_0$  la pression,  $T_0$  la température et  $\mu_0$  la masse volumique de l'air.

1. Établir une relation donnant implicitement  $p(z)$ .
2. Montrer que  $\frac{dT}{dz}$  est une constante que l'on exprimera en fonction de l'intensité de la pesanteur  $g$ , de la masse molaire  $M$  de l'air, de la constante molaire des gaz parfaits  $R$  et de  $k$ .
3. En déduire que :

$$p(z) = p_0 \times (1 - \beta z)^{k/k-1}$$

où  $\beta$  est un coefficient constant que l'on déterminera en fonction de  $M, g, R, T_0$  et  $k$

**ÉNONCÉS**

## ● 19 Lycée Faidherbe, Lille

30 min.

Statique des fluides

MP-PC-PSI-PT

Dans tout le problème, les solides et les liquides sont plongés dans le champ de pesanteur uniforme, d'intensité  $g$ .

Le référentiel d'étude est supposé galiléen et associé à un repère  $\mathcal{R}(0, x, y, z)$ , tel que l'axe  $(Oz)$  soit dirigé suivant la verticale ascendante, dans la base cartésienne  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ .

Un barrage est formé d'un solide indéformable, en forme de pentaèdre de base rectangulaire. Sa section droite est un triangle isocèle, de hauteur  $h$ , de demi-angle au sommet égal à  $\alpha$ . Sa masse volumique est égale à  $\rho$ . Il est posé sur le sol horizontal et permet de retenir l'eau d'un lac dont la masse volumique est constante et égale à  $\mu$ . On suppose que les seules forces qui interviennent sont liées à la pression des fluides (eau et air), au poids du barrage et aux forces de contact exercées par le sol. La longueur  $L$  du barrage est suffisamment grande pour que l'on puisse négliger les forces de liaison intervenant à ses extrémités.

On appellera  $p_0$  la pression, uniforme, de l'air au voisinage du barrage.

1. Exprimer la pression de l'eau en fonction de l'altitude  $z$ , de  $p_0$ ,  $\mu$ ,  $g$  et  $h$ .
2. Calculer la force exercée sur la face immergée.
3. Calculer la force exercée sur la face émergée.

On admet que ni l'air, ni l'eau ne peuvent pénétrer sous le barrage. On considère que ce dernier ne tient alors en équilibre sur le sol que par l'action de la force de frottement. Dans ce cas, la réaction  $\vec{R} = T \vec{e}_x + N \vec{e}_z$  du sol sur le barrage est représentée par :

- une composante normale  $N$ , verticale ascendante ;
- une composante tangentielle  $T$ , horizontale, qui s'oppose au glissement du barrage.

L'équilibre statique n'est garanti que si  $|T| \leq f \times |N|$ , expression dans laquelle  $f$  est un coefficient constant appelé « coefficient de frottement statique » du barrage sur le sol.

On définit aussi l'angle de frottement  $\varphi$  tel que  $\tan \varphi = f$ . Cet angle représente l'inclinaison maximale de la réaction du sol par rapport à la verticale.

4. Déterminer les forces  $N$  et  $T$ , réactions du sol sur le barrage.
5. En déduire la valeur minimale du coefficient de frottement pour que le barrage reste en équilibre sur le sol, sans glisser.
6. Montrer que si  $\alpha + \varphi > \frac{\pi}{2}$ , alors le barrage reste en équilibre.

## ● 20 Lycée Janson De Sailly, Paris

30 min.

Cinématique des fluides

PC-PSI

On considère l'écoulement permanent d'un fluide incompressible dont le champ des vitesses en coordonnées cylindriques est donné par :

$$\vec{V} = V_0 \left( \frac{r}{R} \vec{u}_r + \frac{z}{Z_0} \vec{u}_z \right)$$

$V_0$ ,  $R$  et  $Z_0$  étant des constantes.

1. Exprimer la vitesse à l'aide des seules constantes  $V_0$  et  $R$ .
2. Montrer que la circulation de  $\vec{V}$  est nulle le long de tout contour fermé. En déduire une fonction scalaire caractéristique de l'écoulement.
3. Donner les équations des lignes de courant.
4. Quelles sont les équations des trajectoires des particules de fluide pour cet écoulement ?
5. Montrer que les trajectoires des particules de fluide s'identifient aux lignes de courant.
6. Exprimer l'accélération des particules de fluide.

On donne :

$$\operatorname{div} \vec{X} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r X_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z$$

● **21** **Concours Commun Polytechnique**

35 min.  
PC-PSI

*Cinématique des fluides*

On considère l'air comme un fluide incompressible, de masse volumique  $\mu$  en écoulement stationnaire sur lequel la pesanteur aura une influence négligeable.

On utilisera les coordonnées cylindriques d'axe polaire  $Oz$  ; elles seront notées  $r, \theta$  et  $z$  avec  $Ox$  pour origine des angles. On note  $\vec{V}(M)$  la vitesse en chaque point du fluide. Les phénomènes seront supposés invariants par translation selon  $Oz$ .

1. Écoulement tourbillonnaire.

On considère un écoulement orthoradial d'axe polaire  $Oz$  appelé tourbillon tel que :

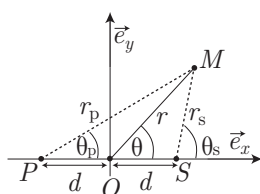
- pour  $r < a$ ,  $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} = \gamma \vec{e}_z$
- pour  $r > a$ ,  $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} = \vec{0}$

Ce tourbillon est dit ponctuel dans le plan  $Oxy$  si l'on considère que lorsque  $a$  tend vers zéro et  $\gamma$  tend vers l'infini, le produit  $\pi a^2 \gamma$  demeure égal à la valeur finie  $\Gamma$  que l'on nomme intensité du tourbillon.

Établir l'expression de  $\vec{V}(M)$  en coordonnées polaires ( $r > a$ ) avec  $\Gamma$  comme paramètre.

À quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer cet écoulement ?

2. Écoulement d'un doublet.



**ÉNONCÉS**

On considère un écoulement engendré par un doublet résultant de l'association d'une source et d'un puits.

- (a) La source se situe le long de l'axe  $Sz$ , parallèle à  $Oz$ , tel que le point  $S$ , placé dans le plan  $Oxy$ , ait pour coordonnées  $(d, 0, 0)$ .

L'écoulement s'effectue radialement de façon homogène avec un débit volumique par unité de longueur  $D$ . L'exemple d'un tel écoulement pourrait être donné par un fin tuyau poreux dans lequel on ferait circuler de l'eau sous pression.

Établir l'expression de la vitesse  $\vec{V}_S(M)$  du fluide en coordonnées cylindriques  $(r_S, \theta_S, z)$ , d'axe polaire  $Sz$  ainsi que le potentiel  $\varphi_S(M)$  associé, défini par :  $\vec{V}_S(M) = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_S$ .

- (b) Le puits se situe le long de l'axe  $Pz$ , parallèle à  $Oz$ , tel que le point situé dans le plan  $Oxy$  ait pour coordonnées  $(-d, 0, 0)$ .

Dans ce puits, le fluide arrive avec une répartition radiale uniforme dont le débit volumique par unité de longueur est également  $D$ .

Donner, sans démonstration, l'expression de la vitesse  $\vec{V}_P(M)$  du fluide en coordonnées cylindriques  $(r_P, \theta_P, z)$ , d'axe polaire  $Pz$  ainsi que le potentiel  $\varphi_P(M)$  associé défini par :  $\vec{V}_P(M) = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_P$ .

- (c) Soit  $\varphi(M)$  le potentiel des vitesses dans le cas où l'on associe la source et le puits pour former un doublet pour lequel  $d$  tend vers 0 et  $D$  tend vers l'infini de sorte que le produit  $2Dd$  demeure égal à la valeur finie  $H$ , que l'on nommera intensité du doublet.

En coordonnées cylindriques  $(r, \theta)$  d'axe polaire  $Oz$ , montrer que :

$$\varphi(M) = -\frac{H \cos \theta}{2\pi r}$$

En déduire l'expression, en coordonnées cylindriques, de la vitesse  $\vec{V}(M)$  créée par ce doublet avec  $H$  comme paramètre.

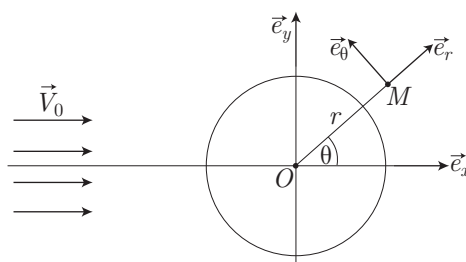
- (d) À quelle distribution électromagnétique peut-on éventuellement comparer cet écoulement ?

## ● 22 Concours Commun Polytechnique

40 min.

PC-PSI

Cinématique des fluides



Considérons l'écoulement potentiel d'un fluide parfait et incompressible autour d'un cylindre infini d'axe  $Oz$  et de section circulaire de rayon  $R$ .

Très loin du cylindre, l'écoulement est uniforme, la vitesse du fluide est donnée par

$$\vec{V} = V_0 \vec{e}_x.$$

On étudiera le problème en utilisant les coordonnées cylindriques :  $r, \theta, z$ .

La symétrie du problème impose qu'aucune grandeur ne va dépendre de la cote  $z$ .

On admet que le potentiel des vitesses s'écrit :

$$\phi(r, \theta) = \phi_u + \frac{A \cos \theta}{r}$$

$\phi_u$  est le potentiel des vitesses associé à l'écoulement uniforme et  $A$ , une constante.

1. Exprimer  $\phi_u(r, \theta)$ .
2. À quel type d'écoulement correspond le terme  $\frac{A \cos \theta}{r}$  ?
3. Exprimer la vitesse du fluide en tout point en fonction de  $r, \theta, A$  et  $V_0$ .
4. Exprimer  $A$  en fonction de  $V_0$  et  $R$ . Positionner les points d'arrêt.
5. Donner les équations des lignes de courant, les représenter.

On donne :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

## ● 23 ————— Concours Commun Polytechnique

45 min.

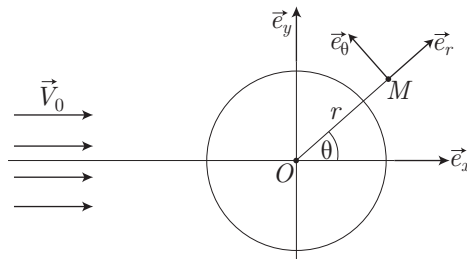
PC-PSI

*Cinématique des fluides*

Un cylindre de base circulaire de rayon  $R$  et en rotation uniforme à la vitesse angulaire  $\omega$  autour de son axe  $Oz$  est placé dans l'air (fluide incompressible en écoulement permanent).

L'écoulement, loin du cylindre, se fait à la vitesse uniforme  $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$  et la pression vaut  $P_0$ .

En tout point du fluide, on notera la vitesse  $\vec{V}(M) = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta$ .



On souhaite étudier l'effet du cylindre sur le fluide. Pour cela nous utiliserons une méthode de superposition qui consiste à introduire à l'intérieur de l'obstacle des singularités telles que son contour soit une ligne de courant de l'écoulement. Ces singularités sont les suivantes :

- un doublet d'axe  $Oz$  et d'intensité  $H$ , dont la fonction potentiel est donnée par  $\varphi_D(M) = -\frac{H \cos \theta}{2\pi r}$ , qui engendre un champ de vitesse  $\vec{V}_D(M)$ .
- un tourbillon d'axe  $Oz$  et d'intensité  $\Gamma$  qui engendre un champ des vitesses  $\vec{V}_T(M) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ .

On pose alors en tout point  $M$  de l'écoulement :

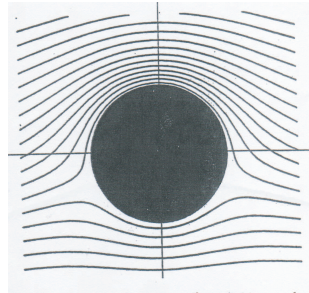
$$\vec{V}(M) = \vec{V}_T(M) + \vec{V}_D(M) + \vec{V}_0$$

1. Les coordonnées polaires de la vitesse  $\vec{V}(M)$  de cet écoulement ont pour expression :

$$\begin{cases} V_r = \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) V_0 \cos \theta \\ V_\theta = -\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) V_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

Expliciter le paramètre  $H$  en fonction de  $R$  et  $V_0$ .

2. On donne ci-dessous le tracé des lignes de courant pour des valeurs particulières de  $V_0$ ,  $R$  et  $\Gamma$ .



**ÉNONCÉS**

- (a) Comparer qualitativement le module de la vitesse du fluide pour les points situés sur l'axe  $Oy$  selon que  $y > R$  ou  $y < -R$ .
- (b) Indiquer le signe de  $\Gamma$  et préciser si le sens de rotation du cylindre est horaire ou antihoraire.
- (c) En exploitant le tracé ci-dessus, justifier l'existence de points d'arrêt du fluide à la surface du cylindre. Donner  $|\Gamma|$  en fonction des paramètres  $V_0$  et  $R$  et du sinus d'un angle géométrique,  $\alpha$ , dont on précisera dans ce cas la valeur numérique approchée en degrés.
- (d) Soit  $\vec{F}$  la résultante de l'action de l'air sur le cylindre. Donner, sans calcul mais en la justifiant, la valeur de la composante  $F_x$  et celle du moment par rapport à l'axe  $Oz$  de cette action. La réalité confirme-t-elle ce résultat ?
- (e) Exprimer la pression  $P(\theta)$  à la surface du cylindre avec  $V_0$ ,  $\mu$ , masse volumique du fluide,  $R$ ,  $\Gamma$ , et  $P_0$  comme paramètres.
- (f) Le cylindre ayant une hauteur  $h$ , établir l'expression de la composante  $F_y$  de  $\vec{F}$  en fonction de  $\mu$ ,  $V_0$ ,  $\Gamma$ .

On donne :

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

## ● 24 Concours Mines-Ponts

45 min.

Cinématique des fluides

PC-PSI

Nous allons étudier diverses propriétés liées aux bulles d'air dans l'eau. Nous pourrions négliger dans tout le problème les effets de la pesanteur sur le fluide, ainsi que la viscosité de ce dernier.

On rappelle l'égalité vectorielle :

$$\left(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}\right) \vec{V} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(V^2) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V}$$

L'air sera considéré comme un fluide homogène et parfait dont le rapport des capacités thermiques  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  est constant.

La masse volumique et la pression dans l'air au repos sont respectivement  $\rho_0$  et  $P_0$ .

L'air est considéré enfermé dans une bulle sphérique entièrement plongée dans l'eau.

On note  $R(t)$  le rayon de la bulle dont nous allons étudier les oscillations sous la forme :

$$R(t) = R_0 + \xi(t)$$

Le rayon moyen  $R_0$  ne dépasse guère quelques millimètres et  $\|\xi(t)\| \ll R_0$ .

On néglige tout effet de tension superficielle et toute variation d'origine hydrostatique de la pression dans l'eau, supposée incompressible.

On admet que, dans ces conditions, il est possible de considérer que la pression est constante à l'intérieur de la bulle.

1. On note  $P_B(t)$  la pression uniforme de l'air dans la bulle de rayon  $R(t)$ .

Établir, pour des oscillations isentropiques, la relation  $[\mathcal{R}]$  :

$$\frac{P_B(t) - P_0}{P_0} + \frac{3\gamma\xi(t)}{R_0} = 0$$

On notera  $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$  et  $\ddot{R} = \frac{d^2R}{dt^2}$ .

Une bulle d'air sphérique, de rayon  $R(t) = R_0 + \xi(t)$  et de centre  $O$ , est immergée dans l'eau, considérée comme un fluide parfait illimité.

À grande distance de la bulle d'air, la pression dans l'eau est notée  $P_0$ . On admet que la relation  $[\mathcal{R}]$  est vérifiée à chaque instant.

2. Soit  $\rho_E$  la masse volumique, constante, de l'eau et  $\vec{V}(\vec{r}, t) = V(r, t) \vec{e}_r$  la vitesse d'une particule d'eau à la distance  $r > R(t)$  du centre  $O$ .

Établir la relation :

$$V(r, t) = \left(\frac{R(t)}{r}\right)^2 \frac{dR}{dt}$$

3. Soit  $P(r, t)$  le champ des pression dans l'eau ; exprimer l'équation d'Euler sous la forme d'une relation donnant  $\frac{\partial P}{\partial r}$  en fonction de  $\rho_E, r, R(t)$  et des dérivées temporelles  $\dot{R}(t)$  et  $\ddot{R}(t)$ .
4. Préciser les valeurs de  $\lim_{r \rightarrow \infty} P(r, t)$  et  $\lim_{r \rightarrow R(t)} P(r, t)$ .

5. Toujours sous l'hypothèse  $\|\xi(t)\| \ll R_0$ , donner l'équation différentielle régissant  $\xi(t)$  ; on fera intervenir la pulsation de Minnaert :

$$\omega_M = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{R_0^2 \rho_E}} = 2\pi f_M$$

6. Calculer  $\omega_M$  et  $f_M$  pour  $R_0 = 10^{-3}$  m,  $P_0 = 10^5$  Pa,  $\rho_E = 10^3$  kg · m<sup>-3</sup> et  $\gamma = 1,4$ .
7. Donner, à l'ordre le plus bas par rapport à  $\xi(t)$  ou à ses dérivées, l'expression de la vitesse  $V(r, t)$  et celle de la pression  $P(r, t)$  à la distance  $r$  du centre de la bulle.

On donne pour toute fonction  $f(r, t)$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r$$

● 25 Lycée Saint-Exupéry

20 min.  
PC-PSI

*Écoulement tourbillonnaire*

Soit l'écoulement permanent d'un fluide parfait et incompressible, de masse volumique  $\mu$ .

Le champ des vitesses pour cet écoulement est donné en coordonnées cylindriques par :

$$\begin{cases} \vec{V}(r < R) = Ar \vec{e}_\theta \\ \vec{V}(r > R) = \frac{AR^2}{r} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

$A$  étant une constante.

On négligera dans tout le problème les effets de la pesanteur.

- Montrer que, dans le domaine caractérisé par  $r < R$ , l'écoulement est à rotationnel non nul.
- En admettant que pour  $r < R$ , le vecteur tourbillon est constant et s'écrit :  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ , exprimer  $\Omega$  en fonction de  $A$ .
- Exprimer le champ des pressions  $P(r, \theta, z)$  en tout point du fluide. On donne  $P(r \rightarrow \infty) = P_0$ .

On donne la relation :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{e}_\theta}{r} \right) = \vec{0}$$

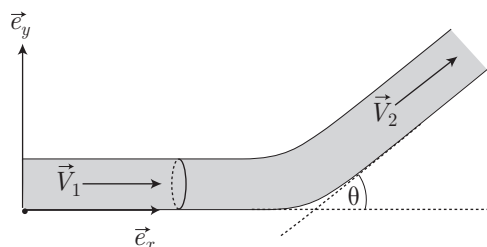


● **26** ————— **Concours Commun Polytechnique**

30 min.

Dynamique des fluides parfaits

PC-PSI



On considère l'écoulement permanent, dans une canalisation comportant un coude, d'un fluide incompressible et parfait de masse volumique  $\mu$ .

La canalisation présente une section constante  $S$ , et  $\theta$  désigne l'angle entre les directions d'entrée et de sortie.

On suppose que le fluide est parfait et que la canalisation est horizontale.

On cherche à exprimer la force exercée par le fluide sur la canalisation.

On supposera que pour cet écoulement les grandeurs caractéristiques du fluide sont constantes en tout point d'une surface perpendiculaire à la canalisation.

On négligera les effets de la pesanteur.

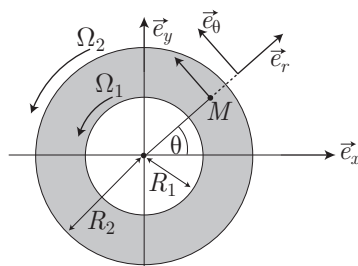
1. On note  $V_1$  et  $V_2$ , les vitesses du fluide à l'entrée et à la sortie de la canalisation,  $P_1$  et  $P_2$ , les pressions à l'entrée et à la sortie de la canalisation, montrer que  $V_1 = V_2$  et que  $P_1 = P_2$  : on notera désormais ces grandeurs  $V$  et  $P$ .
2. On note  $\vec{R} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y$ , la résultante des efforts de pression qu'exerce le fluide sur la canalisation. Exprimer  $R_x$  et  $R_y$  en fonction de  $\mu, P, V, S$  et  $\theta$ .

● **27** ————— **Concours Mines-Ponts**

30 min.

Dynamique des fluides visqueux

PC-PSI



On considère un fluide incompressible, de viscosité  $\eta$ , en écoulement permanent entre deux cylindres infinis  $C_1$  et  $C_2$  d'axe  $Oz$ , et de sections circulaires respectivement de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ .

Le cylindre  $C_1$ , tourne à la vitesse constante  $\Omega_1$  autour de  $Oz$ , et le cylindre  $C_2$ , à la vitesse constante  $\Omega_2$  autour de  $Oz$ .

La symétrie du problème implique qu'aucune grandeur ne va dépendre de  $\theta$  et  $z$ . On a, de plus, pour l'écoulement  $V_z = 0$ .

**ÉNONCÉS**

On négligera les effets liés à la pesanteur.

1. Démontrer que la composante radiale de la vitesse du fluide est nulle.
2. En proposant pour  $V_\theta(r)$ , une solution du type  $r^n$ , exprimer  $V_\theta(r)$  sous la forme :

$$V_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

On exprimera  $A$  et  $B$  en fonction des constantes du problème.

3. Commenter le cas  $\Omega_1 = \Omega_2$ .

On donne :

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z.$$

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Pour le système de coordonnées cylindriques, pour tout vecteur  $\vec{V} = V(r) \vec{e}_\theta$  :

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV) \vec{e}_z \\ \Delta \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta - \frac{V}{r^2} \vec{e}_\theta \end{cases}$$

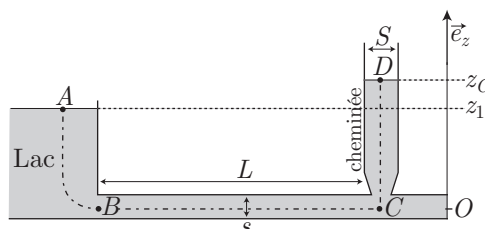
## ● 28

**ESIM**

30 min.

PC-PSI

*Dynamique des fluides parfaits*



Un barrage hydroélectrique est constitué d'une galerie d'aménagement de longueur  $L$  et de section  $s$  reliée à une retenue d'eau (un lac de superficie assez grande pour qu'on puisse y négliger les variations de niveau) et à une cheminée d'équilibre verticale cylindrique de section  $S$ . Une vanne, immédiatement en aval de la cheminée, alimente les turbines de la centrale électrique.

L'eau sera considérée comme un fluide non visqueux. On notera  $d$  le débit dans la galerie considérée. On prend un axe  $Oz$  vertical ascendant dont l'origine est au niveau de la vanne. On appelle  $z_1$  la position de la surface du lac et  $z_C$  celle de l'eau dans la cheminée. On pose  $h = z_C - z_1$  ( $h$  est une valeur algébrique). On notera  $g$  l'accélération de la pesanteur.

1. La vanne est ouverte. Pour cet écoulement, l'eau est un fluide incompressible en régime permanent. En déduire la dénivellation  $h_0$ .
2. On ferme rapidement la vanne à  $t = 0$ . On s'intéresse au mouvement du fluide une fois la vanne fermée. L'écoulement du fluide incompressible est irrotationnel.

- (a) Entre  $t$  et  $t + dt$ ,  $h$  varie de  $dh$ . Établir la relation liant la vitesse  $V$  du fluide dans la galerie à  $\frac{dh}{dt}$ .
- (b) Rappeler l'équation d'Euler. En intégrant cette équation sur la ligne de courant  $A, B, C, D$  et en considérant que, du fait de l'importance de la longueur de la galerie, on a :

$$\int_A^D \frac{D\vec{V}}{Dt} = \int_B^C \frac{D\vec{V}}{Dt}$$

en déduire l'équation différentielle vérifiée par  $h(t)$  :

- (c) En déduire  $h(t)$ . À quelle hauteur maximale  $h_M$  s'élève l'eau dans la cheminée ? On définira avec soin les conditions limites à  $t = 0$ .
3. On appelle  $h_1$ , la hauteur de la cheminée.
- (a) Déterminer le temps  $t_1$  écoulé entre la fermeture de la vanne et le début du versement.
  - (b) Établir l'équation différentielle de la vitesse  $V$  du fluide dans la galerie en fonction du temps, quand l'eau déborde de la cheminée.
  - (c) En déduire que :

$$V = V_1 - \frac{gh_1}{L} t$$

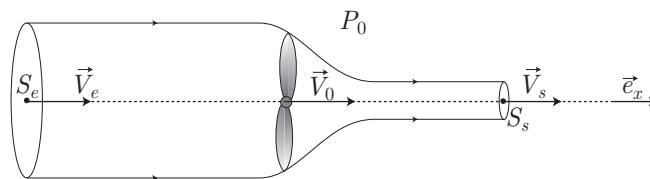
Déterminer le temps de déversement  $t_2$  ainsi que  $V_1$ , vitesse du fluide dans la galerie à l'instant où la hauteur atteint  $h_1$ .

- (d) En déduire le volume déversé en fonction de  $s, g, L, h_1$  et  $V_1$ .
4. (a) Comment évolue  $h(t)$  une fois le déversement fini. En réalité que se passe-t-il ? On justifiera par des arguments physiques.
- (b) Si on ne plaçait pas de cheminée que se passerait-il ? Justifier.

● 29 ————— Concours Mines-Ponts

35 min.  
PC-PSI

Dynamique des fluides parfaits



On considère l'écoulement permanent de l'air, fluide incompressible et parfait, autour d'une éolienne.

On cherche à exprimer la puissance échangée entre l'éolienne et le fluide.

On s'intéresse pour cela à un tube de courant construit autour de l'hélice de l'éolienne dont la section à l'entrée est notée  $S_e$ , et la section à la sortie  $S_s$ .

On note  $V_e$  et  $V_s$  respectivement la vitesse du fluide au niveau de  $S_e$  et  $S_s$  et  $V_0$ , la vitesse du fluide au niveau de l'éolienne.

On admettra par la suite que les vitesses au niveau du tube de courant sont portées par

$\vec{e}_x$ , qu'au niveau de  $S_e$  et  $S_s$  la pression est uniforme et vaut  $P_0$ , ainsi qu'en tout point extérieur au tube de courant.

On considérera de plus que l'écoulement est tel que toutes les grandeurs caractéristiques pourront être considérées comme constantes sur toute section perpendiculaire à  $\vec{e}_x$ .

On note  $\mu$  et  $D$ , la masse volumique et le débit volumique de l'air, dans le tube de courant. On négligera les effets dus à la pesanteur.

1. Exprimer en fonction de  $D$ ,  $\mu$ ,  $V_e$  et  $V_s$ , la résultante des efforts exercés par l'éolienne sur le fluide.
2. Exprimer cette même résultante en fonction de  $\mu$ ,  $S$ ,  $V_e$  et  $V_s$ , où  $S$  est la section du tube de courant au niveau de l'hélice.
3. Montrer que l'on a :

$$V_0 = \frac{V_e + V_s}{2}$$

4. Exprimer la puissance échangée entre l'éolienne et le fluide en fonction de :  $\mu$ ,  $S$ ,  $V_0$ ,  $V_e$  et  $V_s$ .
5. Exprimer  $V_e$  et  $V_s$  en fonction de  $V_0$ , quand la puissance échangée entre l'éolienne et le fluide est maximale.

### ● 30 ————— Lycée Janson de Sailly, Paris

30 min.

PC-PSI

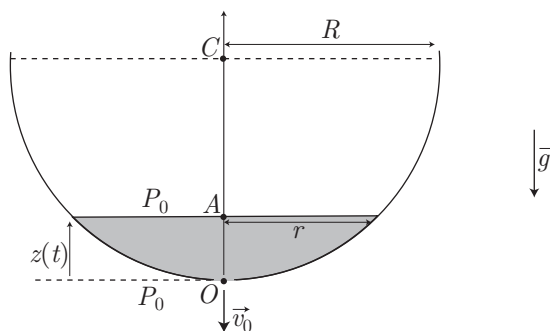
*Clepsydre sphérique*

Un réservoir de forme demi-sphérique, de rayon  $R = 1$  m et de centre  $C$ , est initialement entièrement rempli d'eau.

Il règne au dessus de l'eau la pression  $P_0$ . À  $t = 0$  on perce une ouverture  $O$  de section  $s$  au fond du réservoir et on étudie l'écoulement de l'eau qui se fait à la vitesse  $\vec{v}_0$ .

On note  $z$  la cote de la surface libre de l'eau,  $r$  le rayon de cette même surface libre et  $g$  l'accélération de la pesanteur.

On admettra que la pression au niveau de l'ouverture reste sensiblement égale à  $P_0$ , que l'eau peut être considérée comme un fluide parfait incompressible étudié dans le cadre des régimes permanents. À chaque instant la surface libre de l'eau est très supérieure à  $s$ .



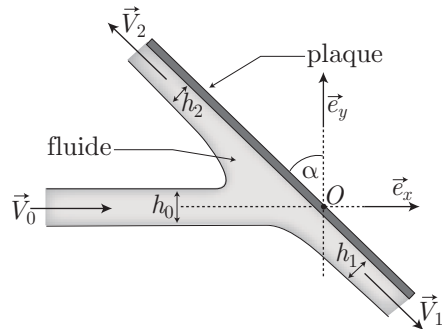
1. Montrer que :  $v_0 = -\frac{\pi r^2}{s} \frac{dz}{dt}$ .

2. En déduire que :  $(2R - z)\sqrt{z} \frac{dz}{dt} = -\frac{s}{\pi} \sqrt{2g}$ .
3. En déduire le temps nécessaire pour que le réservoir se vide.

● **31** ————— **Concours Commun Polytechnique**

40 min.  
PC-PSI

*Dynamique des fluides parfaits*



Considérons un filet  $f_0$  de fluide parfait, incompressible, en écoulement permanent et potentiel, qui arrive avec une vitesse  $\vec{V}_0 = V_0 \vec{e}_x$  sur une plaque immobile faisant un angle  $\alpha$  avec la direction  $Oy$ .

On négligera dans ce problème, les effets de la pesanteur sur le fluide, ainsi que la pression extérieure  $P_0$ , et on notera  $\mu$  la masse volumique du fluide.

Au niveau de la plaque on admet que le filet  $f_0$  se divise en deux filets  $f_1$  et  $f_2$  ayant respectivement pour vitesse  $\vec{V}_1$  et  $\vec{V}_2$ .

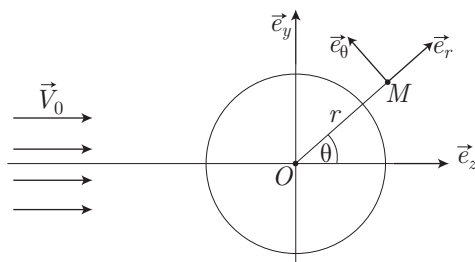
On notera  $h_0, h_1$  et  $h_2$ , les sections des filets  $f_0, f_1$  et  $f_2$  de fluide.

1. Démontrer que  $h_0 = h_1 + h_2$ .
2. Montrer que si le fluide est parfait alors  $h_0 \sin \alpha = h_1 - h_2$ , en déduire  $h_1$  et  $h_2$  en fonction de  $h_0$  et  $\alpha$ .
3. Exprimer la résultante des efforts exercés par le fluide sur la plaque.

● **32** ————— **Lycée Hoche, Versailles**

45 min.  
PC-PSI

*Dynamique des fluides visqueux*



On considère l'écoulement potentiel et permanent d'un fluide incompressible, de masse volumique  $\mu$  autour d'une sphère immobile de rayon  $R$ .

**ÉNONCÉS**

On étudie le problème à l'aide des coordonnées sphériques  $r, \theta, \varphi$ .

Le fluide arrive de l'infini avec une vitesse uniforme  $\vec{V} = V_0 \vec{e}_z$ , où la pression vaut  $P_0$ .

On négligera dans tout le problème les effets dus à la pesanteur.

On cherche à exprimer la force de pression exercée par le fluide sur la sphère. Pour cela nous allons considérer, dans un premier temps, que le fluide est parfait, puis dans un second temps qu'il possède une viscosité  $\eta$ .

1. Dans le cas où le fluide est parfait on admet que le champ des vitesses est donné par :

$$\vec{V} = V_0 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta \vec{e}_r - V_0 \left( 1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta$$

Exprimer la pression en tout point de la sphère.

2. Toujours dans le cas où le fluide est parfait, exprimer la force de pression qu'il exerce sur la sphère.
3. On considère désormais que le fluide est visqueux et que l'écoulement se fait avec un nombre de Reynolds très faible.

Dans ce cas le champ des vitesses est donné par :

$$\vec{V} = V_0 \left( 1 - \frac{3R}{2r} + \frac{R^3}{2r^3} \right) \cos \theta \vec{e}_r - V_0 \left( 1 - \frac{3R}{4r} - \frac{R^3}{4r^3} \right) \sin \theta \vec{e}_\theta$$

Commenter cette expression de la vitesse par rapport à celle donnée dans le cas du fluide parfait.

4. Exprimer, dans le cas où le fluide est visqueux, la pression en chaque point de la sphère.
5. En déduire la force de pression que le fluide exerce sur la sphère.

On donne :

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) \vec{e}_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \vec{e}_\varphi$$

### ● 33 École de l'air

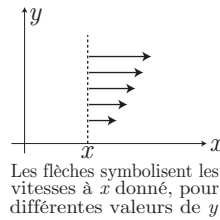
45 min.

*Dynamique des fluides visqueux*

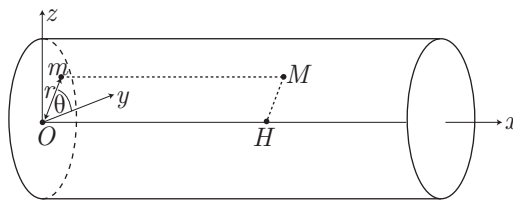
PC-PSI

On considère un tuyau cylindrique, de rayon  $R$ , de longueur  $L$ , horizontal et parcouru par un fluide de viscosité  $\eta$ . La pression sur l'axe du cylindre est  $P_1$  à l'entrée et  $P_2$  à la sortie. On rappelle que  $\eta$  intervient dans la force surfacique qu'exerce une partie d'un fluide sur une autre de vitesse différente. Si l'écoulement se fait sur un axe  $x$  et la vitesse dépend de  $y$ , cette force surfacique exercée par la partie de  $y$  le plus grand sur celle de  $y$  le plus petit est :

$$\vec{f}_S = \eta \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_x$$



1. Pour savoir si l'écoulement est turbulent ou laminaire, on considère un nombre sans dimension d'autant plus grand que l'écoulement est turbulent. Ce nombre est le nombre de Reynolds que l'on notera  $Re$ . Il utilise les grandeurs physiques  $\eta$ ,  $\mu$ , la masse volumique du fluide,  $V$ , la vitesse caractéristique de l'écoulement et  $\ell$ , une longueur, elle aussi caractéristique de l'écoulement.
  - (a) Dans le problème qui nous occupe, prend-on pour  $\ell$  le rayon  $R$  ou la longueur  $L$ ? Expliquer pourquoi.
  - (b) En faisant une analyse dimensionnelle de  $\ell^\alpha V^\beta \eta^\gamma \mu$ , déterminer les valeurs possibles des coefficients  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  pour former un nombre sans dimension.
2. On va considérer les coordonnées cylindriques axées sur le tuyau.



Un point  $M$  est repéré, soit par ses coordonnées cartésiennes, soit par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, x)$ . Le point  $m$  est le projeté de  $M$  sur le plan  $Oyz$ ,  $H$  est le projeté de  $M$  sur  $Ox$ ,  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires de  $m$  dans ce plan où  $Oy$  est l'axe polaire. L'axe  $Ox$  est l'axe du tuyau et le point  $O$  est à son entrée (la pression y est donc  $P_1$ ).

On va considérer un écoulement laminaire permanent suivant l'axe du tuyau. La pesanteur sera négligée. On supposera que la vitesse est de la forme :  $\vec{V}(M) = V(r) \vec{e}_x$ .

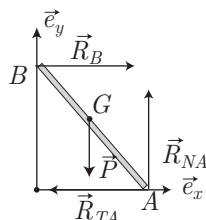
- (a) Indiquer qualitativement comment la pesanteur intervient dans ce problème et pourquoi on la néglige.
- (b) Faire un bilan de force sur un volume élémentaire de fluide autour de  $M$  de coordonnées  $(r, \theta, x)$ . Montrer que, dans ces conditions, la pression ne dépend pas de  $\theta$ , ni de  $r$ .
- (c) Dédire du bilan précédent les variations de  $P$  suivant  $r$  et suivant  $x$ .
- (d) Montrer que la pression ne dépend pas de  $r$ .
- (e) Exprimer  $P(x)$ .

**ÉNONCÉS**

- (f) Déterminer  $V(r)$  et en déduire la vitesse moyenne  $V_m$  et le débit volumique  $D_V$  dans le cylindre.
- (g) Rappeler la signification physique d'une impédance (ou d'une résistance). Définir alors  $K$ , la résistance hydraulique du tuyau, en dégagant la signification physique des deux paramètres physiques que l'on utilise (on illustrera la définition générale). En déduire son expression en fonction des caractéristiques du tuyau et du liquide.
- (h) On considère l'eau se trouvant à l'instant  $t$  dans le tuyau élémentaire horizontal de longueur  $L$  et d'épaisseur  $dr$ . Déterminer le travail élémentaire des forces de pression qui s'exercent sur ce système entre  $t$  et  $t + dt$ . En déduire  $P_P$ , la puissance des forces pressantes qui s'exercent sur le fluide contenu dans l'ensemble du tuyau et  $P_V$ , la puissance dissipée par viscosité.
3. On va appliquer les relations précédentes à un cas physique. On donne  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\eta_{\text{eau}} = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  et  $\mu_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Dans cette application, on considère un réseau de distribution d'eau domestique. Ce type de circuit est alimenté par des châteaux d'eau qui assurent la mise en pression du réseau.
- (a) Quel est l'ordre de grandeur de la pression qui peut-être attendue dans une canalisation au pied d'un château d'eau de 25 m de haut. On supposera que le débit d'eau dans la canalisation est suffisamment faible pour ne pas perturber le champ de pression dans le château d'eau.
- (b) Soit une conduite d'eau de 100 m de longueur et de section  $1 \text{ cm}^2$  partant du pied de ce château d'eau. L'autre extrémité de la canalisation est à l'air libre. Quel débit peut-on attendre en sortie, en supposant que la relation précédemment établie s'applique bien ? Quelle est la vitesse maximale atteinte dans la canalisation ?
- (c) Quelle est la puissance dissipée par la viscosité ? Sachant que pour l'eau, la capacité thermique massique vaut  $c_{\text{eau}} = 4,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1}$ , estimer l'élévation de température produite si l'eau récupère toute l'énergie dissipée. Conclure.



● 1 **Concours Commun Polytechnique**



1. Les coordonnées du point  $G$  sont données par :

$$\vec{OG} = \frac{L}{2} \cos \alpha \vec{e}_x + \frac{L}{2} \sin \alpha \vec{e}_y$$

$$x_G \text{ et } y_G \text{ vérifient donc : } x_G^2 + y_G^2 = \frac{L^2}{4}.$$

On reconnaît la trajectoire d'un cercle de centre  $O$  et de rayon  $\frac{L}{2}$ .

2. Il s'agit d'un problème de statique.

Le théorème de la résultante cinétique s'écrit :

$$\vec{R}_{NA} + \vec{R}_{TA} + \vec{R}_B + m\vec{g} = m\vec{a}(G) = \vec{0}$$

En projection sur les axes  $O_x$  et  $O_y$ , il donne :

$$\begin{cases} R_B = R_{TA} \\ R_{NA} = mg \end{cases}$$

Il y aura équilibre tant que  $R_{TA} < fR_{NA}$ , il faut donc expliciter  $R_{TA}$  et  $R_{NA}$ .

Le théorème du moment cinétique appliqué au point  $G$  donne :

$$\vec{GA} \wedge (\vec{R}_{NA} + \vec{R}_{TA}) + \vec{GB} \wedge \vec{R}_B = \vec{0}, \text{ ce qui s'écrit aussi :}$$

$$\frac{L}{2} (R_{NA} \cos \alpha - R_{TA} \sin \alpha - R_B \sin \alpha) = 0.$$

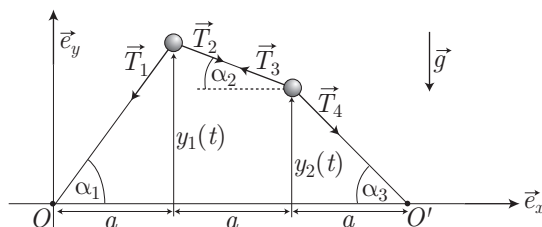
Comme  $R_B = R_{TA}$ , il s'ensuit :

$$R_{TA} = \frac{R_{NA}}{2 \tan \alpha}, \text{ l'inégalité } R_{TA} < fR_{NA}, \text{ se traduit donc par :}$$

$$\tan \alpha > \frac{1}{2f}$$

Plus  $f$  sera faible plus  $\alpha$  devra être proche de  $\frac{\pi}{2}$ , résultat auquel on pouvait s'attendre à l'aide d'un raisonnement qualitatif.

● 2 **Lycée Saint-Exupéry, Mantes La Jolie**



**CORRIGÉS**

1. Appliquons aux deux perles le théorème de la résultante cinétique :  
 Pour la première perle, on peut écrire, étant donné que l'on peut négliger son poids et que le mouvement a seulement lieu selon la verticale :

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\ddot{y}_1 \vec{e}_y$$

De même pour la seconde perle on peut écrire, étant donné que l'on peut négliger son poids et que le mouvement a seulement lieu selon la verticale :

$$\vec{T}_3 + \vec{T}_4 = m\ddot{y}_2 \vec{e}_y$$

Ces deux équations projetées sur l'axe  $Oy$  donnent :

$$\begin{cases} -T \sin \alpha_1 - T \sin \alpha_2 = m\ddot{y}_1 \\ T \sin \alpha_2 - T \sin \alpha_3 = m\ddot{y}_2 \end{cases}$$

Nous avons de plus :

$$\begin{cases} \sin \alpha_1 \simeq \tan \alpha_1 = \frac{y_1}{a} \\ \sin \alpha_2 \simeq \tan \alpha_2 = \frac{y_1 - y_2}{a} \\ \sin \alpha_3 \simeq \tan \alpha_3 = \frac{y_2}{a} \end{cases}$$

Nous en déduisons alors les deux équations, en posant :  $\omega_0^2 = \frac{T}{ma}$  :

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + 2\omega_0^2 y_1 = \omega_0^2 y_2 \\ \ddot{y}_2 + 2\omega_0^2 y_2 = \omega_0^2 y_1 \end{cases}$$

2. Pour résoudre ce système, il faut découpler les équations différentielles.

Posons  $u = y_1 + y_2$  et  $v = y_1 - y_2$ , on aura alors :  $y_1 = \frac{u+v}{2}$  et  $y_2 = \frac{u-v}{2}$ .

La somme et la différence des deux équations différentielles précédentes donne :

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_0^2 u = 0 \\ \ddot{v} + \omega_1^2 v = 0 \text{ avec } \omega_1^2 = 3\omega_0^2 \end{cases}$$

Les solutions des équations en  $u$  et  $v$  donnent  $u = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  et  $v = C \cos(\omega_1 t) + D \sin(\omega_1 t)$

Pour les conditions initiales données, nous trouvons :

$$\begin{cases} u(0) = A = 2a \text{ et } \dot{u}(0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0 \\ v(0) = C = 0 \text{ et } \dot{v}(0) = D\omega_1 = 0 \Rightarrow D = 0 \end{cases}$$

D'où  $y_1(t) = y_2(t) = a \cos(\omega_0 t)$  les deux masses oscillent en phase à la pulsation  $\omega_0$ , c'est le mode symétrique.

3. Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} u(0) = A = 0 \text{ et } \dot{u}(0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0 \\ v(0) = C = 2a \text{ et } \dot{v}(0) = D\omega_1 = 0 \Rightarrow D = 0 \end{cases}$$

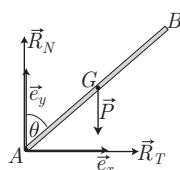
D'où  $y_1(t) = -y_2(t) = a \cos(\omega_1 t)$  les deux masses oscillent en opposition de phase à la pulsation  $\omega_1$ , c'est le mode antisymétrique.

4. Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} u(0) = A = a \text{ et } \dot{u}(0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0 \\ v(0) = C = -a \text{ et } \dot{v}(0) = D\omega_1 = 0 \Rightarrow D = 0 \end{cases}$$

D'où  $y_1(t) = \frac{a}{2} (\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_1 t))$  et  $y_2(t) = \frac{a}{2} (\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t))$  Les solutions combinent les pulsations  $\omega_0$  et  $\omega_1$ .

### 3 ————— Concours commun Polytechnique



1. Le point  $G$  est repéré par  $\overrightarrow{AG} = \frac{L}{2} \vec{e}_r$ , on en déduit sa vitesse et son accélération,  $A$  étant fixe :

$\vec{V}(G) = \frac{L}{2} \dot{\theta} \vec{e}_\theta$  et  $\vec{a}(G) = \frac{L}{2} \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$ . On peut aussi exprimer l'accélération dans la base cartésienne :

$$\vec{a}(G) = \frac{L}{2} (-\dot{\theta}^2 \sin \theta + \ddot{\theta} \cos \theta) \vec{e}_x + \frac{L}{2} (-\dot{\theta}^2 \cos \theta - \ddot{\theta} \sin \theta) \vec{e}_y$$

2. La tige est soumise à son poids ( effort conservatif ), ainsi qu'aux efforts de contact au niveau du point  $A$ .

Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit :  $\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{\text{efforts non conservatifs}}$

Or la puissance des actions de contact en  $A$  est nulle puisque le point  $A$  est fixe, on en déduit :  $E_m = \text{constante}$ .

3. Au cours de la chute la tige effectue un mouvement de rotation autour du point  $A$ , son énergie cinétique vaut donc :  $E_C = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$ .

Son énergie potentielle s'écrit  $E_P = mgy_G = mg \frac{L}{2} \cos \theta$ .

4. Exploisons l'égalité  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ , nous en déduisons :

$$\ddot{\theta} - \frac{mgL}{2J} \sin \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{3g}{2L} \sin \theta$$

5. L'égalité précédente une fois multipliée par  $\dot{\theta}$  s'intègre facilement par rapport au temps pour donner :  $\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L} (1 - \cos \theta)$ .

Faisons un bilan des forces sur la tige :  $\vec{R}_N + \vec{R}_T + m\vec{g} = m\vec{a}(G)$

Ce qui donne une fois projeté sur les axes  $Ox$  et  $Oy$  :

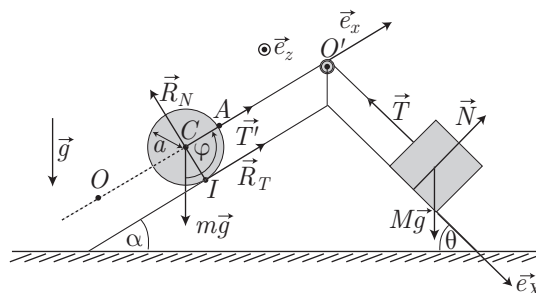
$$\begin{cases} R_N = mg - m \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \cos \theta - m \frac{L}{2} \ddot{\theta} \sin \theta \\ R_T = m \frac{L}{2} \ddot{\theta} \cos \theta - m \frac{L}{2} \dot{\theta}^2 \sin \theta \end{cases}$$

**CORRIGÉS**

Combinées aux relations donnant  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$ , il s'ensuit :

$$\begin{cases} R_N = \frac{1}{4}mg + \frac{9}{4}mg \cos^2 \theta - \frac{3}{2}mg \cos \theta \\ R_T = -\frac{3}{2}mg \sin \theta + \frac{9}{4}mg \cos \theta \sin \theta \end{cases}$$

#### ● 4 ————— Concours Mines-Ponts



Faisons un bilan des forces sur le cube :

$$\vec{T} + \vec{N} + M\vec{g} = M\ddot{X}\vec{e}_X$$

Projetée sur l'axe  $O' \vec{e}_X$  cette relation donne :

$$-T + Mg \sin \theta = M\ddot{X}$$

Cette équation ne permet pas de déterminer  $\ddot{X}$ , il faut pour cela expliciter  $T$ .

Le bilan des forces sur le disque permet d'écrire :

$$\vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{T}' + m\vec{g} = m\ddot{x}\vec{e}_x$$

Avec  $T = T'$  puisque la poulie est idéale, elle transmet intégralement les forces de tension.

Projetons cette égalité sur l'axe  $O \vec{e}_x$  :

$R_T + T - mg \sin \alpha = m\ddot{x}$ , de plus comme le fil est inextensible :  $\ddot{x} = \ddot{X}$ , nous avons donc :

$T = mg \sin \alpha + m\ddot{X} - R_T$  et donc :

$$(M + m)\ddot{X} = Mg \sin \theta - mg \sin \alpha + R_T$$

Cette dernière égalité ne donne toujours pas  $\ddot{X}$ , il faut pour cela expliciter  $R_T$ .

Appliquons le théorème du moment cinétique au disque, au point  $C$ .

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{CI} \wedge \vec{R}_T, \text{ avec } \vec{L} = \frac{ma^2}{2}\dot{\varphi}\vec{e}_z, \text{ les moments des autres forces sont nuls en } C.$$

Nous obtenons donc :  $R_T = \frac{ma}{2}\ddot{\varphi}$ .

De plus la condition de roulement sans glissement du disque sur le plan incliné donne :

$$\vec{V}(I) = \vec{V}(C) + \dot{\varphi}\vec{e}_z \wedge \vec{CI} = \vec{0}, \text{ d'où : } \dot{x} = -a\dot{\varphi} = \dot{X}.$$

Il s'ensuit que :  $R_T = -\frac{m}{2}\ddot{X}$ , d'où :

$(M + m) \ddot{X} = Mg \sin \theta - mg \sin \alpha - \frac{m}{2} \ddot{X}$ , on en déduit :

$$\ddot{X} = \frac{Mg \sin \theta - mg \sin \alpha}{M + \frac{3}{2}m}$$

Il y aura équilibre si :

$$M \sin \theta = m \sin \alpha$$

## ● 5 ————— Lycée Janson De Sailly, Paris

1. Pour le premier compartiment, la transformation est adiabatique réversible, on peut utiliser l'égalité de Laplace  $PV^\gamma = \text{cte}$

$$P_0 V_0^\gamma = P_1 V_1^\gamma, \text{ avec } P_1 = P_0 + p_1 \text{ et } V_1 = V_0 + Sx_1 = V_0 \left(1 + \frac{Sx_1}{V_0}\right)$$

$$P_0 V_0^\gamma = (P_0 + p_1) V_0^\gamma \left(1 + \frac{Sx_1}{V_0}\right)^\gamma = P_0 V_0^\gamma \left(1 + \frac{p_1}{P_0}\right) \left(1 + \frac{Sx_1}{V_0}\right)^\gamma \text{ d'où :}$$

$$1 = \left(1 + \frac{p_1}{P_0}\right) \left(1 + \frac{Sx_1}{V_0}\right)^\gamma \simeq \left(1 + \frac{p_1}{P_0}\right) \left(1 + \frac{\gamma Sx_1}{V_0}\right) \text{ puisque :}$$

$$\frac{Sx_1}{V_0} \ll 1 \text{ au premier ordre } \left(1 + \frac{Sx_1}{V_0}\right)^\gamma \simeq 1 + \frac{\gamma Sx_1}{V_0}$$

Nous avons donc :  $\frac{\gamma Sx_1}{V_0} + \frac{p_1}{P_0} + \frac{\gamma S}{P_0 V_0} x_1 p_1 = 0$ , au premier ordre le terme  $x_1 p_1$

est négligeable (second ordre) on obtient alors :  $p_1 = -\gamma Sx_1 \frac{P_0}{V_0}$

2. Le compartiment du milieu aura pour volume  $V_2 = V_0 + S(x_2 - x_1)$ , un raisonnement analogue au précédent donne :  $p_2 = -\gamma S(x_2 - x_1) \frac{P_0}{V_0}$

Le troisième compartiment aura pour volume  $V_3 = V_0 - Sx_2$ , donc :  $p_3 = \gamma Sx_2 \frac{P_0}{V_0}$

3. Appliquons le principe fondamental de la dynamique au premier piston en projection sur l'axe horizontal :

$$P_1 S - P_2 S = m \ddot{x}_1 = -2\gamma S^2 x_1 \frac{P_0}{V_0} + \gamma S^2 x_2 \frac{P_0}{V_0}$$

Cette équation s'écrit d'après les notations de l'énoncé :

$$\ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 = \omega_0^2 x_2$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au second piston en projection sur l'axe horizontal :

$$P_2 S - P_3 S = m \ddot{x}_2 = -2\gamma S^2 x_2 \frac{P_0}{V_0} + \gamma S^2 x_1 \frac{P_0}{V_0}$$

Cette équation s'écrit d'après les notations de l'énoncé :

$$\ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 = \omega_0^2 x_1$$

Nous obtenons donc un système de deux équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2\omega_0^2 x_1 = \omega_0^2 x_2 \\ \ddot{x}_2 + 2\omega_0^2 x_2 = \omega_0^2 x_1 \end{cases}$$

4. Pour résoudre ce système, il faut découpler les équations différentielles.

Posons  $u = x_1 + x_2$  et  $v = x_1 - x_2$ , on aura alors :  $x_1 = \frac{u+v}{2}$  et  $x_2 = \frac{u-v}{2}$

La somme et la différence des deux équations différentielles précédentes donne :

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega_0^2 u = 0 \\ \ddot{v} + \omega_1^2 v = 0 \text{ avec } \omega_1^2 = 3\omega_0^2 \end{cases}$$

Les solutions des équations en  $u$  et  $v$  donnent  $u = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  et  $v = C \cos(\omega_1 t) + D \sin(\omega_1 t)$

Pour les conditions initiales données, nous trouvons :

$$\begin{cases} u(0) = A = 2a \text{ et } \dot{u}(0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0 \\ v(0) = C = 0 \text{ et } \dot{v}(0) = D\omega_1 = 0 \Rightarrow D = 0 \end{cases}$$

D'où  $x_1(t) = x_2(t) = a \cos(\omega_0 t)$  les deux masses oscillent en phase à la pulsation  $\omega_0$ , c'est le mode symétrique.

5. Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} u(0) = A = 0 \text{ et } \dot{u}(0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0 \\ v(0) = C = 2a \text{ et } \dot{v}(0) = D\omega_1 = 0 \Rightarrow D = 0 \end{cases}$$

D'où  $x_1(t) = -x_2(t) = a \cos(\omega_1 t)$  les deux masses oscillent en opposition de phase à la pulsation  $\omega_1$ , c'est le mode antisymétrique.

6. Les conditions initiales donnent :

$$\begin{cases} u(0) = A = a \text{ et } \dot{u}(0) = B\omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0 \\ v(0) = C = -a \text{ et } \dot{v}(0) = D\omega_1 = 0 \Rightarrow D = 0 \end{cases}$$

D'où  $x_1(t) = \frac{a}{2} (\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega_1 t))$  et  $x_2(t) = \frac{a}{2} (\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t))$  Les solutions combinent les pulsations  $\omega_0$  et  $\omega_1$ .

## 6 ————— Concours Mines-Ponts

1. Notons  $\vec{T}\vec{S} = r \vec{e}_r$ , la force de gravitation s'écrit :

$$\vec{F} = -GmM_T \frac{\vec{T}\vec{A}}{TA^3} - GmM_T \frac{\vec{T}\vec{B}}{TB^3}$$

Exprimons la distance  $TA$  :

$$TA^2 = r^2 + \frac{L^2}{4} - rL \cos \alpha$$

En considérant que  $r \gg L$ , on peut écrire que :

$$TA^{-3} = r^{-3} \left( 1 - \frac{L}{r} \cos \alpha + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{-3/2} \simeq r^{-3} \left( 1 + \frac{3L}{2r} \cos \alpha \right)$$

De même :

$$TB^{-3} = r^{-3} \left( 1 + \frac{L}{r} \cos \alpha + \frac{L^2}{4r^2} \right)^{-3/2} \simeq r^{-3} \left( 1 - \frac{3L}{2r} \cos \alpha \right)$$

$\vec{T}\vec{A} = \vec{T}\vec{S} + \vec{S}\vec{A}$  et  $\vec{T}\vec{B} = \vec{T}\vec{S} + \vec{S}\vec{B}$ , d'où :

$$\begin{cases} \frac{\vec{T}\vec{A}}{TA^3} \simeq \frac{1}{r^2} \left( \vec{e}_r + \frac{3L}{2r} \cos \alpha \vec{e}_r + \frac{\vec{S}\vec{A}}{r} \right) \\ \frac{\vec{T}\vec{B}}{TB^3} \simeq \frac{1}{r^2} \left( \vec{e}_r - \frac{3L}{2r} \cos \alpha \vec{e}_r + \frac{\vec{S}\vec{B}}{r} \right) \end{cases}$$

On en déduit la résultante des efforts qu'exerce la Terre sur le satellite :

$$\vec{F} \simeq -2GmM_T \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

2. Exprimons au point  $S$ , le moment de la force qui s'exerce en  $A$  :

$$\begin{aligned} \vec{M}_S(A) &= -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{S}\vec{A} \wedge \left( \vec{e}_r + \frac{3L}{2r} \cos \alpha \vec{e}_r + \frac{\vec{S}\vec{A}}{r} \right) \\ &= -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{S}\vec{A} \wedge \left( \vec{e}_r + \frac{3L}{2r} \cos \alpha \vec{e}_r \right) \end{aligned}$$

De même :

$$\vec{M}_S(B) = -\frac{GmM_T}{r^2} \vec{S}\vec{B} \wedge \left( \vec{e}_r - \frac{3L}{2r} \cos \alpha \vec{e}_r \right)$$

Comme  $\vec{S}\vec{A} = -\vec{S}\vec{B}$ , et que  $\vec{S}\vec{B} \wedge \vec{e}_r = -\sin \alpha \vec{e}_z$ , le moment total s'exprime :

$$\vec{M}_S = -\frac{3GmM_T L^2}{4r^3} \sin(2\alpha) \vec{e}_z$$

3. Dans le référentiel barycentrique du satellite le moment cinétique est donné par :

$$\vec{L} = m \frac{L^2}{2} (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \vec{e}_z.$$

La rotation de  $S$  autour de  $T$  étant uniforme :  $\ddot{\theta} = 0$ , l'application du théorème du moment cinétique donne alors :

$$\frac{d(\vec{L})}{dt} = \frac{mL^2}{2} \ddot{\alpha} \vec{e}_z = \vec{M} = -\frac{3GmM_T L^2}{4r^3} \sin(2\alpha) \vec{e}_z.$$

L'équation différentielle vérifiée par l'angle  $\alpha$  est donc :

$$\ddot{\alpha} + \frac{3GM_T}{2r^3} \sin(2\alpha) = 0$$

4. Les positions d'équilibre sont données pour  $\ddot{\alpha} = 0$ , c'est à dire  $\sin(2\alpha) = 0$ , ce qui correspond à :  $\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ .

Posons  $\alpha = \alpha_{\text{éq}} + \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est très faible.

Pour  $\alpha_{\text{éq}} = 0$  ou  $\pi$ , l'équation différentielle devient  $\ddot{\varepsilon} + \frac{3GM_T}{r^3} \varepsilon = 0$ , puisque  $\sin(2\varepsilon) \simeq 2\varepsilon$ , ce qui correspond à des positions d'équilibre stable dont la période est donnée par :

$$T = 2\pi \left( \frac{r^3}{3GM_T} \right)^{1/2}$$

Les cas  $\alpha_{\text{éq}} = \frac{\pi}{2}$  ou  $\alpha_{\text{éq}} = \frac{3\pi}{2}$ , donnent l'équation  $\ddot{\varepsilon} - \frac{3GM_T}{r^3}\varepsilon = 0$ , puisque  $\sin(2\varepsilon + \pi) = -\sin(2\varepsilon) \simeq -2\varepsilon$ , ce qui correspond à des positions d'équilibre instables.

## ● 7 ————— Concours Commun Polytechnique

1. (a) La force d'interaction gravitationnelle est donnée par :

$$\vec{F} = -\frac{GmM_t}{r^2} \vec{e}_r$$

- (b) La force de gravitation dérive d'une énergie potentielle si son travail élémentaire s'écrit  $\delta W = -dE_P$ ,

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{OM} \text{ avec } \vec{OM} = r \vec{e}_r \Rightarrow d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

$$\delta W = -\frac{GmM_t}{r^2} dr = d\left(-\frac{GmM_t}{r}\right) \Rightarrow E_P = -\frac{GmM_t}{r} + \text{cte, la constante étant nulle puisque } E_P(\infty) = 0.$$

- (c) Nous avons  $E_p(\lambda r) = \lambda^{-1} E_P(r)$ , l'énergie potentielle de gravitation vérifie bien le théorème du viriel avec  $\lambda = -1$ .

D'où la relation :  $\langle E_P \rangle = -2 \langle E_C \rangle$ .

Les états liés sont ici caractérisés par une énergie mécanique négative, ce que l'on vérifie aisément puisque :  $\langle E_m \rangle = \langle E_P \rangle + \langle E_C \rangle = \frac{1}{2} \langle E_P \rangle < 0$

- (d) La trajectoire du satellite étant circulaire, de rayon  $r_0$ , sa vitesse est donnée par  $\vec{v}_c = r_0 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ , son accélération est donnée par :  $\vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r_0 \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$

L'application du principe fondamental de la dynamique au satellite  $\vec{F} = m \vec{a}$  donne sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$  :

$$\begin{cases} \frac{GmM_t}{r_0^2} = mr_0 \dot{\theta}^2 = \frac{mv_c^2}{r_0} \\ \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } v_c = \sqrt{\frac{GM_t}{r_0}}$$

2. (a) Le mouvement est à force centrale, le moment cinétique du satellite, par rapport au centre de force  $O$  est constant.

Appliquons pour démontrer cela le théorème du moment cinétique au satellite :

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_O) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \text{cte.}$$

$\vec{OM} \wedge m \vec{v}$  est donc un vecteur constant,  $\vec{OM}$  et  $\vec{v}$  sont donc deux vecteurs qui au cours du mouvement restent perpendiculaires à un vecteur constant, le mouvement est donc plan.

Exprimons le moment cinétique en coordonnées polaires :



$$\vec{L}_O = r \vec{e}_r \wedge m (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

Ce vecteur est constant ainsi que  $\vec{e}_z$  et  $m$ , on en déduit que  $r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$ , on détermine la valeur de cette constante à partir des conditions initiales à  $t = 0$  on a  $r = r_0$  et  $v = v_0$ , la vitesse initiale étant perpendiculaire à  $\vec{r}_0$ , :

$$\vec{L}_O(t = 0) = \vec{r}_0 \wedge m \vec{v}_0 = mr_0 v_0 \vec{e}_z \Rightarrow C = r_0 v_0$$

- (b) La trajectoire sera bornée, si l'état est lié, c'est à dire si l'énergie mécanique est négative, cette dernière étant constante, calculons là, à  $t = 0$  :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GmM_t}{r_0}, \text{ avec } v_0^2 = \alpha^2 \frac{GM_t}{r_0} \Rightarrow E_m = \frac{GmM_t}{2r_0} (\alpha^2 - 2), E_m$$

est donc négative si  $\alpha^2 < 2 \Rightarrow \alpha < \sqrt{2}$ , ce qui est le cas d'après l'hypothèse de la question 1d.

- (c) Rappelons la formule de Binet donnant l'accélération en fonction de la variable  $u = \frac{1}{r}$

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r$$

L'application du principe fondamental de la dynamique appliqué au satellite

$$\text{donne : } -mC^2 u^2 \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r = -GmM_t u^2 \vec{e}_r$$

D'où l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $u$  :

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM_t}{C^2} \text{ à laquelle correspond la solution :}$$

$$u(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{GM_t}{C^2}$$

On peut facilement montrer que  $B = 0$ ,  $\frac{du}{d\theta} = -A \sin \theta + B \cos \theta \Rightarrow$

$$B = \frac{du}{d\theta}(0), \text{ or } \frac{du}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2 \dot{\theta}} \frac{dr}{dt},$$

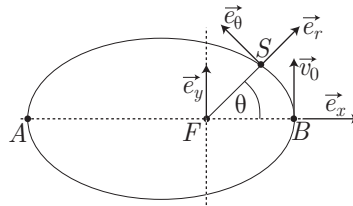
la vitesse initiale étant orthoradiale,  $\dot{r}(0) = 0 \Rightarrow \frac{du}{d\theta}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$ .

On en déduit :  $r = \frac{1}{A \cos \theta + \frac{GM_t}{C^2}} \Rightarrow r = \frac{\frac{GM_t}{C^2}}{1 + \frac{AC^2}{GM_t} \cos \theta}$ , d'où :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \text{ avec } p = \frac{C^2}{GM_t}, e = \frac{AC^2}{GM_t} \text{ et } C' = C^2.$$

- (d) Pour  $\theta = 0$ ,  $r = r_0$  donc :  $r_0 = \frac{p}{1 + e} \Rightarrow p = r_0 (1 + e)$
- (e) De la relation précédente on déduit :  $e = \frac{p}{r_0} - 1 = \frac{r_0^2 v_0^2}{r_0 GM_t} - 1 = \alpha^2 - 1$
- (f) •  $r_{\text{périgée}} = FB = \frac{p}{1 + e}$  c'est la distance qui correspond à  $\theta = 0$
- $r_{\text{apogée}} = FA = \frac{p}{1 - e}$  c'est la distance qui correspond à  $\theta = \pi$

Le foyer  $F$  de l'ellipse est occupé par la Terre. Initialement le satellite  $S$  se trouve en  $B$ .



3. (a) Pour exprimer l'énergie cinétique utilisons la formule de Binet relative à la vitesse :

$$\vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + Cu \vec{e}_\theta$$

On en déduit :  $v^2 = C^2 \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + C^2 u^2 = pGM_t \left[ \left( \frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$

$$u = \frac{1 + e \cos \theta}{p} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{p} \sin \theta, \text{ d'où :}$$

$$v^2 = \frac{GM_t}{p} (1 + e^2 + 2e \cos \theta), \text{ on en déduit l'expression de l'énergie cinétique :}$$

$$E_C = \frac{GmM_t}{2p} (1 + e^2 + 2e \cos \theta)$$

(b)  $E_P = -\frac{GmM_t}{p} (1 + e \cos \theta)$

(c) Le théorème du viriel permet d'écrire :  $\langle E_P \rangle = -2 \langle E_C \rangle \Rightarrow$   
 $-\frac{GmM_t}{p} - \frac{GmM_t e}{p} \langle \cos \theta \rangle = -\frac{GmM_t}{p} (1 + e^2) - 2 \frac{GmM_t m e}{p} \langle \cos \theta \rangle$

D'où :  $\langle \cos \theta \rangle = -e$ , ce résultat n'est pas surprenant, d'abord vue la forme de la trajectoire le satellite passe plus de temps dans un domaine où  $\cos \theta < 0$ , de plus pour une trajectoire circulaire on retrouve bien que  $\langle \cos \theta \rangle = 0$ .

La trajectoire est symétrique par rapport à l'axe polaire donc  $\langle \sin \theta \rangle = 0$

4. (a) La troisième loi de Kepler est donnée par l'énoncé, on a de plus :

$$r_{\text{apogée}} + r_{\text{périgée}} = 2a \Rightarrow a = \frac{p}{1 - e^2}$$

$$T^2 = a^3 \frac{4\pi^2}{GM_t}, \text{ on en déduit que : } T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{GM_t} \right) \frac{p^3}{(1 - e^2)^3},$$

$$\text{on injecte } GM_t = \frac{C^2}{p}, \text{ pour obtenir : } T^2 = \left( \frac{4\pi^2}{C^2} \right) \frac{p^4}{(1 - e^2)^3}.$$

$$\text{On retiendra : } T = \left( \frac{2\pi}{C} \right) \frac{p^2}{(1 - e^2)^{3/2}},$$

(b)  $\frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2} = \frac{C}{p^2} (1 + e \cos \theta)^2$ , d'où :  $\frac{dt}{d\theta} = \frac{p^2}{C (1 + e \cos \theta)^2}$ , on en déduit pour toute évolution élémentaire  $d\theta$ , le temps  $dt$  correspondant :

$$dt = \frac{p^2 d\theta}{C (1 + e \cos \theta)^2} \Rightarrow \Delta t = \frac{p^2}{C} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$$

Notons  $\Delta t_1$ , l'intervalle de temps pour lequel  $\theta$  évolue de  $-\frac{\pi}{2}$  à  $\frac{\pi}{2}$ , c'est à dire pour lequel  $\cos \theta > 0$ .

Le calcul donne :  $\Delta t_1 = 0,195 \frac{p^2}{C}$ .

On a donc  $\Delta t_2 = T - \Delta t_1 = 9,48 \frac{p^2}{C}$ , intervalle de temps pour lequel  $\cos \theta < 0$ .

$$\Delta t_2 > \Delta t_1 \Rightarrow \langle \cos \theta \rangle < 0$$

## 8 ————— Concours Commun Polytechnique

1. (a) L'ensemble Terre-Lune constitue un système isolé,  $\mathcal{R}^*$  est donc galiléen, l'application du théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique donne :

$$\frac{\vec{L}^*(T, L)}{dt} = \vec{0}$$

On en déduit que  $\vec{L}^*(T, L)$  est un vecteur constant.

- (b) Appliquons à la Terre le théorème du moment cinétique dans le référentiel  $R_T$  :  $\frac{d}{dt} (\vec{L}_T(T))_{/R_T} = \vec{0}$  puisque la Terre subit l'action de la Lune qui s'applique au point  $T$ , ainsi que les efforts d'inertie d'entraînement ( $R_T$ , n'est pas galiléen) qui s'appliquent aussi en  $T$ .

On en déduit que  $\vec{L}_T(T)$  est un vecteur constant.

Le même raisonnement peut-être appliqué à la Lune, sur cette dernière les seuls efforts à considérer sont ceux exercés par la Terre, et ceux d'entraînement qui s'appliquent en  $L$ .

Le moment correspondant au point  $L$  est nul et donc  $\vec{L}_L(L) = c\vec{e}$ . Le mouvement de la Terre (respectivement de la Lune) dans  $\mathcal{R}_T$  (respectivement dans  $\mathcal{R}_L$ , est celui d'un solide en rotation autour d'un axe fixe.

- $\vec{L}_T(T)_{/R_T} = J_T \vec{\Omega}_T \Rightarrow \vec{\Omega}_T$  est un vecteur constant.
- $\vec{L}_L(L)_{/R_L} = J_L \vec{\Omega}_L \Rightarrow \vec{\Omega}_L$  est un vecteur constant.

2. (a) C'est le théorème de Koenig appliqué à la Terre entre le référentiel  $R^*$  et le référentiel barycentrique de la Terre  $R_T$ .
- (b) L'application du théorème de Koenig appliqué à la Lune entre les référentiels  $R^*$  et le référentiel barycentrique de la Lune,  $R_L$ , donne :

$$\vec{L}_C^*(L) = \vec{C}\vec{L} \wedge m_L \vec{V}_{L/R^*} + \vec{L}_L(L)_{/R_L}$$

- (c) L'additivité du moment cinétique donne :

$$\vec{L}^*(T, L) = \vec{L}_C^*(T) + \vec{L}_C^*(L)$$

$$\vec{L}^*(T, L) = \vec{C}\vec{T} \wedge m_T \vec{V}_{T/R^*} + \vec{L}_T(T)_{/R_T} + \vec{C}\vec{L} \wedge m_L \vec{V}_{L/R^*} + \vec{L}_L(L)_{/R_L}$$

On en déduit :

$$\vec{L}_{orb}^* = \vec{C}\vec{T} \wedge m_T \vec{V}_{T/R^*} + \vec{C}\vec{L} \wedge m_L \vec{V}_{L/R^*}$$

3. (a)  $C$  étant le barycentre de l'ensemble  $(T, L)$  affecté des masses  $m_T, m_L$ , on peut écrire :  $m_T \vec{C}\vec{T} + m_L \vec{C}\vec{L} = \vec{0}$

Ce qui s'écrit aussi :  $m_T \vec{C}\vec{T} + m_L \vec{C}\vec{T} + m_L \vec{T}\vec{L} = \vec{0}$ , on en déduit :

$$\vec{C}\vec{T} = -\frac{m_L}{m_L + m_T} \vec{C}\vec{M} \text{ et } \vec{C}\vec{L} = \frac{m_T}{m_L + m_T} \vec{C}\vec{M}.$$

On obtient les vitesses en dérivant ces vecteurs dans  $\mathcal{R}^*$  où  $C$  est un point fixe :

$$\begin{aligned} \bullet \vec{V}_{T/R^*} &= -\frac{m_L}{m_L + m_T} \vec{V}_{M/R^*} \\ \bullet \vec{V}_{L/R^*} &= \frac{m_T}{m_L + m_T} \vec{V}_{M/R^*} \end{aligned}$$

(b) Appliquons la relation fondamentale de la dynamique à  $L$  et  $T$  dans  $\mathcal{R}^*$  :

$$m_L \vec{a}(L)_{/R^*} = m_L \frac{d^2}{dt^2} (\overrightarrow{CL})_{/R^*} = \vec{F}_{T \rightarrow L}$$

$$m_T \vec{a}(T)_{/R^*} = m_T \frac{d^2}{dt^2} (\overrightarrow{CT})_{/R^*} = \vec{F}_{L \rightarrow T}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} (\overrightarrow{CL}) - \frac{d^2}{dt^2} (\overrightarrow{CT}) = \frac{1}{m_L} \vec{F}_{T \rightarrow L} - \frac{1}{m_T} \vec{F}_{L \rightarrow T} = \vec{F}_{T \rightarrow L} \left( \frac{1}{m_L} + \frac{1}{m_T} \right)$$

On reconnaît la masse réduite du système, on en déduit :

$$\frac{d^2}{dt^2} (\overrightarrow{CL} - \overrightarrow{CT}) = \frac{d^2}{dt^2} (\overrightarrow{TL}) = \frac{1}{\mu} \vec{F}_{T \rightarrow L}.$$

Tout se passe comme si dans  $\mathcal{R}^*$  la particule fictive était soumise à  $\vec{F}_{T \rightarrow L}$ .

4. (a)  $\vec{L}^*_{\text{orb}} = \overrightarrow{CT} \wedge m_T \vec{V}_{T/R^*} + \overrightarrow{CL} \wedge m_L \vec{V}_{L/R^*}$ , remplaçons  $\overrightarrow{CT}$  et  $\overrightarrow{CL}$  par les expressions établies plus haut :

$$\begin{aligned} \vec{L}^*_{\text{orb}} &= -\frac{m_L m_T}{m_L + m_T} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}_{T/R^*} + \frac{m_L m_T}{m_L + m_T} \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}_{L/R^*} \\ &= \frac{m_L m_T}{m_L + m_T} \overrightarrow{CM} \wedge (\vec{V}_{L/R^*} - \vec{V}_{T/R^*}) = \mu \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}_{M/R^*} \end{aligned}$$

On peut effectivement écrire :

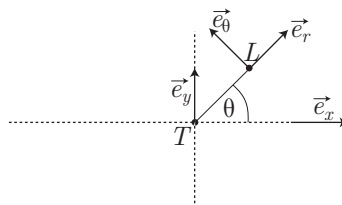
$$\begin{aligned} \vec{V}_{L/R^*} - \vec{V}_{T/R^*} &= \frac{d}{dt} (\overrightarrow{CL})_{/R^*} - \frac{d}{dt} (\overrightarrow{CT})_{/R^*} \\ &= \frac{d}{dt} (\overrightarrow{TL})_{/R^*} = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{CM})_{/R^*} = \vec{V}_{M/R^*} \end{aligned}$$

D'où :  $\vec{L}^*_{\text{orb}} = \mu \overrightarrow{CM} \wedge \vec{V}_{M/R^*}$ , on retrouve le moment cinétique de la particule fictive.

$\vec{L}_T(T)_{/R_T}$ ,  $\vec{L}_L(L)_{/R_L}$  et  $\vec{L}^*(T, L)$  sont des vecteurs constants, donc  $\vec{L}^*_{\text{orb}}$  est aussi un vecteur constant. Le mouvement de la particule fictive est donc contenu dans un plan, perpendiculaire à  $\vec{L}^*_{\text{orb}}$ .

(b) La relation entre les masses :  $m_T \gg m_L$ , implique  $\overrightarrow{CL} \simeq \overrightarrow{CM}$ ,  $\overrightarrow{CT} \simeq \vec{0}$  et  $\mu \simeq m_L$ .

$T$  se confond donc avec  $C$  et  $L$  avec la particule fictive  $M$ , de ce fait  $R^*$  va se confondre avec  $R_T$ .



5. (a)

L'action de la Terre sur la Lune étant centrale, l'accélération de la Lune sera uniquement portée par la direction  $\vec{e}_r$  :

$$\vec{a}_L = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r$$

Exprimons  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$  en fonction de  $u = \frac{1}{r}$  sachant que :  $\vec{L}^*_{\text{orb}}$  est constant.  
 $\vec{L}^*_{\text{orb}} = r \vec{e}_r \wedge r\dot{\theta} m_L \vec{e}_\theta = m_L r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$ .

On peut poser  $L_0 = m_L r^2 \dot{\theta} = \text{cte} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{L_0}{m_L r^2}$

De plus :

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} \right) \\ &= \frac{L_0}{m_L} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = -\frac{L_0}{m_L} \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{d\theta} (1/r) \right) = -\frac{L_0}{m_L} \frac{d}{dt} \left( \frac{du}{d\theta} \right) \\ &= -\frac{L_0}{m_L} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{du}{d\theta} \right) \dot{\theta} \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \ddot{r} = -\frac{L_0^2}{m_L^2} u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2}$$

L'expression de l'accélération est donc :  $\vec{a} = -\frac{L_0^2}{m_L^2} \left( u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u^3 \right) \vec{e}_r$ .

On en déduit :

$$m_L \vec{a}_L = -\frac{L_0^2}{m_L} \left( u^2 \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u^3 \right) \vec{e}_r = \vec{F}_{T \rightarrow L} = -Gm_T m_L u^2 \vec{e}_r$$

D'où :  $\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{Gm_T}{C^2}$  avec  $C = \frac{L_0}{m_L}$ , constante des aires.

Une solution de cette équation est donnée par  $u = A \cos(\theta + \theta_0) + \frac{Gm_T}{C^2}$ .

Un choix convenable de l'axe polaire permet d'avoir  $\theta_0 = 0$ .

Il s'ensuit  $\frac{1}{r} = A \cos \theta + \frac{Gm_T}{C^2} = \frac{1}{C^2} (Gm_T + AC^2 \cos \theta)$ , on en déduit :

$$r = \frac{C^2}{Gm_T + AC^2 \cos \theta} = \frac{\frac{Gm_T}{AC^2}}{1 + \frac{AC^2}{Gm_T} \cos \theta} \text{ c'est l'équation d'une conique de}$$

foyer  $T$ , on retrouve donc la forme proposée par l'énoncé si on pose :

$$\begin{cases} p = \frac{C^2}{Gm_T}, \text{ paramètre de la conique.} \\ e = \frac{AC^2}{Gm_T}, \text{ excentricité de la conique.} \end{cases}$$

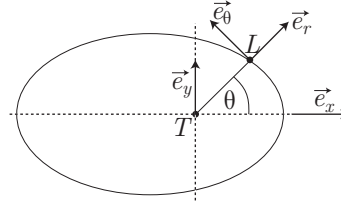
(b) Le périhélie correspond à la distance minimale à laquelle se trouve  $L$  de  $T$ ,

$$r_p = \frac{p}{1+e}, \text{ valeur obtenue pour } \theta = 0$$

L'apogée correspond à la distance maximale à laquelle se trouve  $L$  de  $T$ ,

$$r_a = \frac{p}{1-e}, \text{ valeur obtenue pour } \theta = \pi$$

$$\text{On déduit } e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p} = 0,05, p = 382,8 \cdot 10^3 \text{ km.}$$



- (c) L'excentricité de la conique est proche de 0, l'ellipse est donc proche du cercle. On peut donner  $D_L \simeq \frac{1}{2}(r_a + r_p) = 384\,000 \text{ km}$ . Toujours dans l'hypothèse de la trajectoire circulaire :

$$m_L \vec{a}(L) = -m_L D_L \omega_L^2 \vec{e}_r = -\frac{Gm_L m_T}{D_L^2} \vec{e}_r, \text{ on en déduit}$$

$$\omega_L = \sqrt{\frac{Gm_T}{D_L^3}} = 2,66 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Pour un trajectoire circulaire } 2\pi D_L = v_L T_L \Rightarrow v_L = 1\,021 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$6. \vec{L}^*_{\text{orb}} = m_L \overrightarrow{TL} \wedge \vec{V}(L)_{/R_T} = m_L r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = m_L D_L^2 \omega_L \vec{e}_z$$

$$L^*_{\text{orb}} = 2,9 \cdot 10^{34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$L_T(T)_{/R_T} = \frac{2}{5} m_T R_T^2 \Omega_{T/R_T} = 7,1 \cdot 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$L_L(L)_{/R_L} = 2,3 \cdot 10^{29} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$L^*_{\text{orb}} > L_T(T)_{/R_T} > L_L(L)_{/R_L}$$

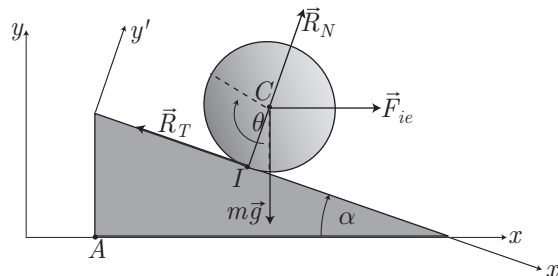
7. Si on néglige  $L_L(L)_{/R_L}$ , avec l'hypothèse du mouvement circulaire,

$$v_L = \omega_L D_L \text{ et } \vec{a} = -D_L \omega_L^2 \vec{e}_r = -\frac{Gm_T}{D_L^2} \vec{e}_r, \text{ on déduit : } \omega_L = \frac{1}{D_L} \sqrt{\frac{Gm_T}{D_L}}$$

$$\vec{L}^* = m_L D_L^2 \frac{1}{D_L} \sqrt{\frac{Gm_T}{D_L}} \vec{e}_z + J_T \Omega_T \vec{e}_z$$

$$\vec{L}^* = (m_L \sqrt{Gm_T D_L} + J_T \Omega_T) \vec{e}_z$$

## ● 9 ————— Concours Mines Ponts



1. L'accélération du prisme par rapport à  $ROxy$  vaut  $\ddot{x} \vec{e}_x$ .  
Notons  $\vec{R}_T$  et  $\vec{R}_N$ , les composantes des actions de contact du prisme sur le cylindre.  
Appliquons le théorème du centre d'inertie au prisme dans le référentiel  $ROxy$ .

$$M\ddot{x}\vec{e}_x = -\vec{R}_T - \vec{R}_N + M\vec{g} + \vec{N}$$

Le rouleau exerce sur le prisme les actions  $-\vec{R}_T$  et  $-\vec{R}_N$ , d'après le principe des actions réciproques.  $\vec{N}$  représente l'action du plan horizontal sur le prisme.

On en déduit :

$$M\ddot{x} = R_T \cos \alpha - R_N \sin \alpha$$

Il nous faut donc expliciter  $\vec{R}_T$  et  $\vec{R}_N$ .

Étudions le cylindre dans le référentiel  $R'$  non galiléen, ce dernier sera soumis à la force d'inertie d'entraînement  $\vec{F}_i = -m\ddot{x}\vec{e}_x$  en plus du poids, et des efforts de contact.

Notons  $x'$ , l'abscisse de  $C$  dans  $R'$  et appliquons le théorème du centre d'inertie au cylindre :

$$\vec{F}_i + \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N = m\vec{a}(C)/R' = m\ddot{x}'\vec{e}_x$$

Projetons cette relation sur les axes  $Ox'$  et  $Oy'$  :

$$\begin{cases} mg \sin \alpha - m\ddot{x} \cos \alpha - R_T = m\ddot{x}' \\ -mg \cos \alpha - m\ddot{x} \sin \alpha + R_N = 0 \end{cases}$$

Le moment cinétique dans  $R'$  au point  $C$  est :  $\vec{L}_C = -\left(\frac{ma^2}{2}\dot{\theta}\right)\vec{e}_z$  (attention à l'orientation de  $\theta$ ).

Le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre, au point  $C$  fournit quant

à lui :  $\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{CI} \wedge \vec{R}_T$ , puisque les moments de trois autres forces sont nuls.

Projetons cette dernière relation sur l'axe  $Oz$  :

$$\frac{ma^2}{2}\ddot{\theta} = aR_T \Rightarrow \frac{ma}{2}\ddot{\theta} = R_T.$$

Pour compléter ces équations utilisons la condition de roulement sans glissement pour le cylindre :  $\dot{x}' = a\dot{\theta}$ .

La combinaison des équations précédentes permet d'obtenir :

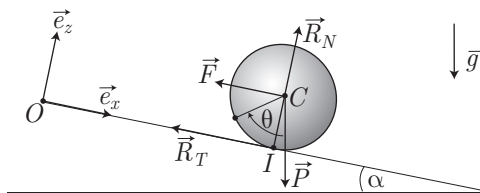
$$\ddot{x} = -\frac{2mg \cos \alpha \sin \alpha}{3M + m \cos^2 \alpha + 3m \sin^2 \alpha}$$

Cette dernière équation s'intègre en :  $x = -\frac{2mg \cos \alpha \sin \alpha}{3M + m \cos^2 \alpha + 3m \sin^2 \alpha} \left(\frac{t^2}{2}\right)$

2. La condition de roulement sans glissement donne ensuite :

$$\theta = -\frac{2mg \cos \alpha \sin \alpha}{3M + m \cos^2 \alpha + 3m \sin^2 \alpha} \left(\frac{t^2}{2a}\right)$$

● 10 **Concours Commun Polytechnique**



1. Appliquons le théorème de la résultante cinétique au cylindre, ce dernier étant soumis au poids, aux efforts de contact  $\vec{R}_T + \vec{R}_N$  et à la force de frottement  $\vec{F}$  :

$$\vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N + \vec{F} = m \vec{a}(G)_{/R}$$

- On obtient sur  $\vec{e}_x$

$$mg \sin \alpha - R_T - bm\dot{x} = m\ddot{x} \quad (26)$$

- On obtient sur  $\vec{e}_z$

$$mg \cos \alpha - R_N = 0 \quad (27)$$

Pour exprimer  $R_T$  appliquons le théorème du moment cinétique au cylindre en  $C$  :  $\frac{d}{dt} \vec{L}_C = \vec{C}\dot{I} \wedge \vec{R}_T$ , le moment du poids, de la réaction normale, ainsi que celui de  $\vec{F}$  sont nuls en  $C$ .

$\vec{L}_C = \frac{ma^2}{2} \dot{\theta} \vec{e}_y$ ,  $\vec{C}\dot{I} \wedge \vec{R}_T = aR_T \vec{e}_y$ , on a donc :

$$\frac{ma^2}{2} \ddot{\theta} = aR_T \quad (28)$$

Les inconnues sont  $R_T$ ,  $x$  et  $\theta$ , pour deux équations (27) et (28), complétons avec la condition de roulement sans glissement :

$$\dot{x} = a\dot{\theta}.$$

L'équation (28) devient :  $R_T = \frac{m}{2} \ddot{x}$ , injectée dans (26) elle permet d'obtenir :

$$m\ddot{x} = -bm\dot{x} - \frac{m}{2} \ddot{x} + mg \sin \alpha \Rightarrow \ddot{x} + \frac{2b}{3} \dot{x} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

La solution de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients constants

$$\text{est : } \dot{x}(t) = Ae^{-\frac{2b}{3}t} + \frac{g}{b} \sin \alpha$$

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow :$$

$$\dot{x}(t) = \frac{g}{b} \sin \alpha \left( 1 - e^{-\frac{2b}{3}t} \right)$$

2. La vitesse limite est atteinte au bout d'un temps très long, lorsque  $t \rightarrow \infty$  on a :
- $$\dot{x} \simeq \frac{g}{b} \sin \alpha$$

3. Dans le cas où on peut négliger les frottements de l'air, l'équation (26) devient :
- $$mg \sin \alpha - R_T = m\ddot{x}$$

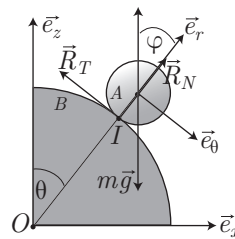


L'égalité  $\frac{m}{2}\dot{x} = R_T$  est conservée, donc :  $R_T = \frac{1}{3}mg \sin \alpha$ .

Le roulement sans glissement est assuré tant que  $R_T < \mu R_N$  donc tant que  $\frac{1}{3}mg \sin \alpha < \mu mg \cos \alpha$ , c'est-à-dire tant que  $\tan \alpha < (3\mu)$ . Soit  $\alpha_0 = \arctan(3\mu)$ , la condition sur  $\alpha$  est :

$$\alpha < \alpha_0$$

● 11 ————— Concours Mines Ponts



1. Notons  $G$ , le centre d'inertie de  $A$ . Le théorème du centre d'inertie appliqué au cylindre mobile s'écrit :

$$m\vec{a}(G) = \vec{R}_T + \vec{R}_N + m\vec{g}$$

Dans la base polaire l'accélération de  $G$  est donnée par :

$$\vec{a}(G) = -(R+a)\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + (R+a)\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

On en déduit donc les égalités :

$$\begin{cases} -m(R+a)\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + R_N \\ m(a+R)\ddot{\theta} = mg \sin \theta - R_T \end{cases}$$

Soit  $\varphi$ , l'angle qui caractérise la rotation de  $A$ , le moment cinétique du cylindre  $A$ , calculé en son centre s'écrit :  $\vec{L} = \frac{ma^2}{2}\dot{\varphi} \vec{e}_y$ . L'application du théorème du moment cinétique à  $A$  au point  $G$ , fournit l'égalité :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi} \vec{e}_y = \vec{GI} \wedge \vec{R}_T + \vec{GI} \wedge \vec{R}_N + \vec{GG} \wedge m\vec{g}$$

$I$ , étant le point de contact entre les deux cylindres. Il s'ensuit :

$$\frac{ma^2}{2}\ddot{\varphi} \vec{e}_y = aR_T \vec{e}_y$$

Nous retiendrons donc :

$$\ddot{\varphi} = \frac{2R_T}{ma}$$

La condition de roulement de  $A$  sur  $B$  s'écrit :

$$\vec{V}(I) = \vec{0} = \vec{V}(G) + \vec{\Omega} \wedge \vec{GI}, \text{ avec } \vec{\Omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_y \text{ et } \vec{V}(G) = (R+a)\dot{\theta} \vec{e}_\theta.$$

On en déduit l'égalité :

$$a\dot{\varphi} = (a+R)\dot{\theta}$$

La combinaison des équations précédentes permet d'établir :

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{3} \left( \frac{g}{R+a} \right) \sin \theta$$

Cette équation multipliée par  $\dot{\theta}$  et intégrée par rapport au temps donne :

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{2}{3} \left( \frac{g}{R+a} \right) \cos \theta + C$$

$C$  étant une constante d'intégration qui se détermine à partir des conditions initiales.

À  $t = 0$ ,  $\theta(0) = 0$  et  $\dot{\theta}(0) = 0$ .

Ce qui donne :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4}{3} \left( \frac{g}{R+a} \right) (1 - \cos \theta)$$

Les expressions de  $\ddot{\theta}$  et  $\dot{\theta}$  permettent d'établir celles de  $R_N$  et  $R_T$  :

$$\begin{cases} R_N = \frac{7}{3}mg \cos \theta - \frac{4}{3}mg \\ R_T = \frac{mg}{3} \sin \theta \end{cases}$$

2. Le roulement sans glissement a lieu jusqu'à ce que l'égalité :  $R_T = fR_N$  soit vérifiée.

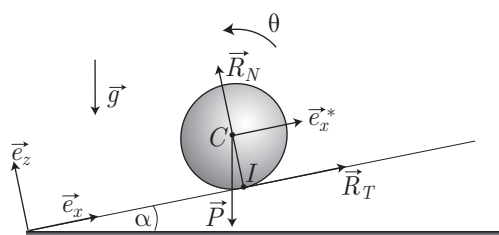
A ce moment là  $\theta$ , est solution de l'équation :

$$\sin \theta = 7f \cos \theta - 4f$$

3. Pour  $f = 0,1$  on a  $\theta_\ell \simeq 0,28$  rad. Quand le cylindre quitte son support  $R_N = 0$ , ce qui correspond à  $\cos \theta = \frac{4}{7}$ , donc  $\theta \simeq 0,96$  rad.

Le cylindre glisse donc avant de quitter le support.

## ● 12 ————— Concours Commun Polytechnique



1. Appliquons pour commencer le théorème de la résultante cinétique à la roue dans le référentiel galiléen d'étude.

$m\vec{a}(C) = \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N$ , ce qui donne en projection :

• Sur  $\vec{e}_x$  :

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + R_T \quad (29)$$

• Sur  $\vec{e}_z$  :

$$0 = R_N - mg \cos \alpha \quad (30)$$

La seconde équation donne directement  $R_N = mg \cos \alpha$ , la première fait intervenir les inconnues  $\ddot{x}$  et  $R_T$ .

Appliquons aussi à la roue le théorème du moment cinétique dans son référentiel barycentrique, en notant  $I$  le point de contact entre le cylindre et le plan :

$$\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{C}\vec{I} \wedge \vec{R}_T + \vec{C}\vec{I} \wedge \vec{R}_N + \vec{\Gamma}.$$

le moment des efforts de pesanteur étant nul au point  $C$ .

Dans  $R^*$  la roue a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe  $C\vec{e}_y$ , donc

$\vec{L}^* = -J\dot{\theta}\vec{e}_y$ , le signe négatif se justifie par l'orientation de l'angle  $\theta$ .

$\vec{C}\vec{I} \wedge \vec{R}_N = \vec{0}$ , et  $\vec{C}\vec{I} \wedge \vec{R}_T + \vec{\Gamma} = (-aR_T + \Gamma)\vec{e}_y$ .

Nous avons donc :

$$J\ddot{\theta} = aR_T - \Gamma \quad (31)$$

On obtient une nouvelle équation faisant intervenir l'inconnue  $\ddot{\theta}$ .

Pour terminer exploitons la condition de roulement sans glissement. Soit  $I_1$  le point coïncident de  $I$  sur la roue, nous pouvons écrire :

$$\vec{V}(C) = \vec{V}(I_1) + \vec{\Omega} \wedge \vec{I_1C}.$$

$\vec{\Omega}$  étant le vecteur rotation de la roue par rapport au plan, c'est aussi le vecteur rotation de la roue par rapport à son référentiel barycentrique, c'est à dire

$$\vec{\Omega} = -\dot{\theta}\vec{e}_y.$$

$\vec{V}(C) = \dot{x}\vec{e}_x$ , le roulement sans glissement implique :  $\vec{V}(I_1) = \vec{0}$ , ce qui donne :

$$\dot{x}\vec{e}_x = -\dot{\theta}\vec{e}_y \wedge a\vec{e}_z = -a\dot{\theta}\vec{e}_x \Rightarrow \dot{x} = -a\dot{\theta} \quad (32)$$

En combinant les équations (29) et (31) nous arrivons à :

$$m\ddot{x} = \frac{ma}{2}\ddot{\theta} + \frac{\Gamma}{a} - mg \sin \alpha.$$

Puis en considérant l'équation (32) nous obtenons :

$$\frac{3}{2}m\ddot{x} = \frac{\Gamma}{a} - mg \sin \alpha \Rightarrow \ddot{x} = \frac{2\Gamma}{3ma} - \frac{2}{3}g \sin \alpha \quad (33)$$

2. Comme  $\dot{x}(0) = 0$  on en déduit :  $\dot{x}(t) = \left( \frac{2\Gamma}{3ma} - \frac{2}{3}g \sin \alpha \right) t$

Pour que la roue remonte le plan incliné, il faut que  $\dot{x} > 0 \Rightarrow \Gamma > mga \sin \alpha$ , d'où l'expression du couple minimal :  $\Gamma_{\min} = mga \sin \alpha$ .

3. La roue dérape lorsqu'il y a glissement sur le plan. La condition de roulement sans glissement donnée par les lois de Coulomb est :

$$\|\vec{R}_T\| < \mu\|\vec{R}_N\|.$$

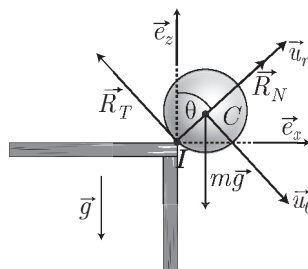
En combinant les équations (29) et (33) nous obtenons :  $R_T = \frac{1}{3}mg \sin \alpha + \frac{2\Gamma}{3a}$ .

$R_T < \mu R_N \Rightarrow \frac{1}{3}mg \sin \alpha + \frac{2\Gamma}{3a} < \mu mg \cos \alpha$ , ce qui donne :

$\Gamma < \frac{3}{2}mga \left( \mu \cos \alpha - \frac{1}{3} \sin \alpha \right)$ , d'où l'expression du couple limite :

$$\Gamma_{\text{lim}} = \frac{3}{2}mga \left( \mu \cos \alpha - \frac{1}{3} \sin \alpha \right)$$

### ● 13 ————— Concours Mines-Ponts



1. Pour exprimer la résultante des actions de contact entre le cylindre et la table, on utilise le théorème du centre d'inertie :

$$m\vec{a}(C) = \vec{R}_T + \vec{R}_N + m\vec{g}$$

L'accélération de  $C$  s'exprime simplement en coordonnées polaires, étant donné que la trajectoire de  $C$  est un cercle de centre  $I$  :

$$\vec{a}(C) = -a\dot{\theta}^2\vec{u}_r + a\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Nous obtenons donc après projection du théorème du centre d'inertie :

$$R_N - mg \cos \theta = -ma\dot{\theta}^2$$

$$-R_T + mg \sin \theta = ma\ddot{\theta}$$

Pour exprimer  $R_N$  et  $R_T$  il faut donc expliciter les fonctions  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$ .

Pendant toute la phase où le cylindre bascule, les efforts de contact ne travaillent pas (la vitesse du point  $I$  de contact étant nulle). Le théorème de l'énergie mécanique donne  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ , il s'ensuit que  $E_m = \text{cte}$ .

Pendant cette phase le cylindre a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe  $I\vec{e}_y$ .

Son moment d'inertie par rapport à cet axe s'écrit d'après le théorème de Huygens :

$$J = \frac{1}{2}ma^2 + ma^2 = \frac{3}{2}ma^2$$

D'où l'expression de son énergie cinétique :

$$E_C = \frac{3}{4}ma^2\dot{\theta}^2$$

L'énergie potentielle de pesanteur vaut quant à elle :  $E_P = mga \cos \theta + \text{cte}$ .

L'application du théorème de l'énergie mécanique conduit à :

$$\ddot{\theta} = \frac{2g}{3a} \sin \theta$$

L'égalité précédente multipliée par  $\dot{\theta}$  donne :

$\ddot{\theta} = \frac{2g}{3a} \dot{\theta} \sin \theta$ , cette dernière expression s'intègre alors par rapport au temps pour

donner :  $\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{3a} (1 - \cos \theta)$ .

Nous pouvons alors exprimer  $R_N(\theta)$  et  $R_T(\theta)$  :

$$\begin{cases} R_N(\theta) = \frac{7}{3}mg \cos \theta - \frac{4}{3}mg \\ R_T(\theta) = \frac{1}{3}mg \sin \theta \end{cases}$$

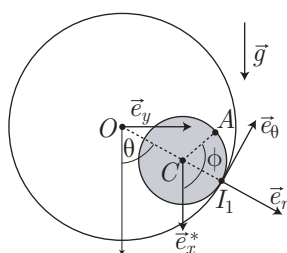
2. Le non glissement cesse lorsque  $R_T = fR_N$  pour  $f = 0,1$ , il faut donc que :  $\sin \theta_g = 0,7 \cos \theta_g - 0,4$ .

Le calcul donne :  $\theta_g \simeq 0,28 \text{ rad}$

3. Le cylindre quitte la table lorsque  $R_N = 0$ , donc pour  $\cos \theta = \frac{4}{7}$ , ce qui donne  $\theta \simeq 0,96 \text{ rad}$ , or l'angle pour lequel commence le glissement est inférieur à cette valeur, le cylindre va donc glisser avant de quitter son support.

Remarque – A partir de  $\theta_g$ , les expressions de  $R_T$  et  $R_N$ , ne sont plus valables, on ne peut donc rien dire sans calculs complémentaires sur l'angle pour lequel le cylindre va effectivement quitter la table.

● 14 ————— Concours Commun Polytechnique



1. Par définition l'énergie potentielle est donnée par  $E_p = -m \vec{g} \cdot \vec{OC} + \text{cte}$ .

$$\vec{g} \cdot \vec{OC} = gb \cos \theta \Rightarrow E_p(\theta) = -mgb \cos \theta + \text{cte}$$

L'énoncé impose  $E_p(\theta = 0) \Rightarrow \text{cte} = mgb$ , nous avons donc :

$$E_p(\theta) = mgb(1 - \cos \theta)$$

Pour les faibles valeurs de  $\theta$ , il suffit d'effectuer un développement limité au second ordre de  $\cos \theta$ ,  $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ .

$$E_p(\theta) \simeq \left(\frac{mgb}{2}\right) \theta^2$$

2. La condition de roulement sans glissement appliquée au disque nous donne, dans le référentiel du cylindre :  $\vec{V}(C) = \vec{V}(I_1) + \vec{\Omega} \wedge \vec{I_1C}$ ,

$\vec{\Omega}$  étant le vecteur rotation du disque par rapport au cylindre, et  $I_1$  le point coïncident sur le disque au point de contact entre le cylindre et le disque.

**CORRIGÉS**

Du fait du non glissement nous avons  $\vec{V}(I_1) = \vec{0}$ .

$\phi$  est l'angle qui caractérise la rotation du disque donc :  $\vec{\Omega} = \dot{\phi} \vec{e}_z$ .

Le point  $C$  ayant un mouvement de rotation de rayon  $b$ ,  $\vec{V}(C) = b\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ .

$$\vec{V}(C) = \vec{V}(I_1) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{I_1 C} \Rightarrow b\dot{\theta} \vec{e}_\theta = \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge (-a \vec{e}_r)$$

$$\text{Donc : } \dot{\theta} = - \left( \frac{a}{b} \right) \dot{\phi}$$

3. Les seuls efforts non conservatifs auxquels est soumis le disque sont ceux qui agissent au niveau du contact avec le cylindre, le contact étant ponctuel, les efforts sont équivalents à un glisseur de point d'application  $I_1$ .

Si on note  $\vec{R}$  la résultante de ces efforts, la puissance qui leur est associée est donnée par :  $\mathcal{P} = \vec{R} \cdot \vec{V}(I_1) = 0$  du fait du non glissement.

Les efforts non conservatifs ne travaillent pas, il s'ensuit que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

4.  $\frac{dE_m}{dt} = 0$  va nous donner l'équation différentielle du mouvement.

Le théorème de Koenig donne :  $E_c = E_c^* + \frac{1}{2} m V^2(G)$ .

Dans  $R^*(C \vec{e}_x \vec{e}_y)$  le disque a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe  $C_z$  donc

$$E_c^* = \frac{1}{2} J \Omega^2 = \frac{1}{4} m a^2 \dot{\phi}^2 = \frac{1}{4} m b^2 \dot{\theta}^2 \text{ puisque } \dot{\theta} = - \left( \frac{a}{b} \right) \dot{\phi}.$$

$$E_c = \frac{3}{4} m b^2 \dot{\theta}^2.$$

$$\text{On en déduit : } E_m = \frac{3}{4} m b^2 \dot{\theta}^2 + \left( \frac{m g b}{2} \right) \theta^2.$$

D'où :

$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{3}{2} m b^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + m g b \theta \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{2g}{3b} \theta = 0.$$

La solution de cette équation différentielle est donnée par :

$$\theta = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

$$\text{si on pose } \omega_0^2 = \frac{2g}{3b}.$$

$$\theta(0) = A = \theta_0 \text{ et } \dot{\theta}(0) = B \omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0.$$

La solution dans la limite des petits angles est donc donnée par :  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ .

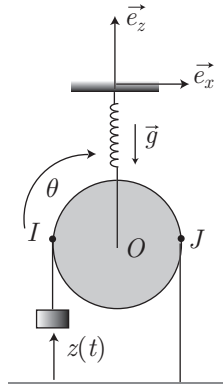
$$5. E_p = \frac{m g b}{2} \theta_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \Rightarrow \langle E_p \rangle = \frac{m g b}{4} \theta_0^2.$$

$$E_c = \frac{3}{4} m b^2 \theta_0^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \Rightarrow \langle E_c \rangle = \frac{3}{8} m b^2 \theta_0^2 \omega_0^2 = \frac{1}{4} m g b \theta_0^2.$$

Nous constatons que  $\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle$

$$6. \langle E_c \rangle = 8 \cdot 10^{-4} \text{ J.}$$

● 15 ————— Concours Commun Polytechnique



1. L'énergie mécanique s'écrit :  $E_m = E_C + E_p$ .  
 $E_C$ , étant l'énergie cinétique de la poulie et de la masse,  $E_p$ , l'énergie potentielle de la poulie, de la masse et du ressort.  
 On appelle  $\theta$ , l'angle qui mesure la rotation de la poulie autour de son centre. Nous avons pour l'énergie cinétique :

$$E_C(\text{disque}) = \underbrace{\frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2}_{\text{rotation}} + \underbrace{\frac{m \dot{Z}^2}{2}}_{\text{translation}} .$$

$$E_C(\text{masse}) = \frac{1}{2} M \dot{z}^2 .$$

Pour l'énergie potentielle :

$$E_p = \underbrace{mgZ}_{\text{poulie}} + \underbrace{Mgz}_{\text{masse}} + \underbrace{\frac{1}{2} k (L_e - Z - L_0)^2}_{\text{ressort}} + \text{cte}, L_e, \text{ étant la longueur du ressort à l'équilibre.}$$

Il faut donc exprimer  $Z$  et  $\dot{\theta}$  en fonction de  $z$  et  $\dot{z}$ .

Utilisons la condition de non glissement du fil sur la poulie pour les points  $I$  et  $J$ , posons  $\vec{\Omega} = \dot{\theta} \vec{e}_y$ , vecteur rotation de la poulie :

- $\vec{V}(I) = \dot{z} \vec{e}_z = \vec{V}(O) + \dot{\theta} \vec{e}_y \wedge \vec{OI} \Rightarrow \dot{z} \vec{e}_z = (\dot{Z} + R\dot{\theta}) \vec{e}_z \Rightarrow \dot{z} = \dot{Z} + R\dot{\theta}$
- $\vec{V}(J) = \vec{0} = \vec{V}(O) + \dot{\theta} \vec{e}_y \wedge \vec{OJ} \Rightarrow \dot{Z} = R\dot{\theta}$

Des égalités précédentes on déduit :

$$\dot{Z} = \frac{\dot{z}}{2}$$

Il s'ensuit :

- $E_C = \frac{3}{16} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}^2$
- $E_p = Mgz + mg \frac{z}{2} + \frac{1}{2} k \left( L_e - \frac{z}{2} - L_0 \right)^2$

$$\text{D'où : } E_m = \frac{3}{16} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + Mgz + mg \frac{z}{2} + \frac{1}{2} k \left( L_e - \frac{z}{2} - L_0 \right)^2$$

**CORRIGÉS**

2. Le système étant conservatif :  $\frac{dE_m}{dt} = 0$ , il s'ensuit après simplification par  $\dot{z}$  :

$$\ddot{z} + \left( \frac{k}{4M + \frac{3m}{2}} \right) z + \text{cte} = 0.$$

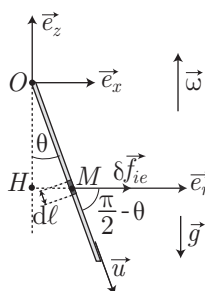
A l'équilibre  $\ddot{z} = 0$  et  $z = 0$ , ce qui implique que la constante est nulle, nous avons donc l'équation :

$$\ddot{z} + \left( \frac{k}{4M + \frac{3m}{2}} \right) z = 0$$

La période des oscillations vaut donc :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4M + \frac{3m}{2}}{k}}$$

## ● 16 ————— Concours Mines-Ponts



1. On considère l'élément de tige  $d\ell$  construit autour du point  $M$  soumis à la force d'inertie d'entraînement :  $\delta \vec{f}_{ie} = \delta m \omega^2 \overrightarrow{HM}$ .

La résultante des efforts est donc donnée par :

$$\vec{R} = \int_T \delta \vec{f}_{ie}$$

On peut supposer que la masse est uniformément répartie sur la tige avec un densité linéique constante :  $\lambda$ , l'élément de masse s'écrit donc  $\delta m = \lambda d\ell$ .

Pour un point  $M$  de la tige, on note  $\ell = OM = \frac{HM}{\sin \theta}$ , on en déduit :

$$d\ell = \frac{d(HM)}{\sin \theta}.$$

D'où :  $\delta \vec{f}_{ie} = \left( \frac{\lambda}{\sin \theta} \right) \omega^2 r dr \vec{e}_r$ , avec  $\overrightarrow{HM} = r \vec{e}_r$ .

$$\vec{R} = \int_{r=0}^{L \sin \theta} \frac{\lambda}{\sin \theta} \omega^2 r dr \vec{e}_r = \frac{\lambda}{\sin \theta} \omega^2 \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=L \sin \theta} \vec{e}_r$$



$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{\lambda}{2} \sin \theta \omega^2 L^2 \vec{e}_r$$

Comme  $m = \lambda L$ , on en déduit l'expression de la résultante :

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m L \omega^2 \sin \theta \vec{e}_r, \text{ avec } \vec{e}_r = \vec{e}_x$$

2. Exprimons le moment en  $O$  de la force  $\delta \vec{f}_{ie}$  :

$$\delta \vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \delta \vec{f}_{ie}$$

$$\delta \vec{\mathcal{M}}_O = \ell \vec{u} \wedge \frac{\lambda}{\sin \theta} \omega^2 r \, dr \, \vec{e}_r = \frac{\lambda}{\sin \theta} \ell \omega^2 r \, dr \cos \theta (-\vec{e}_y)$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \int_T \delta \vec{\mathcal{M}}_O \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = -\frac{\lambda \omega^2}{\sin^2 \theta} \cos \theta \vec{e}_y \int_T r^2 \, dr$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O = -\frac{\lambda}{\sin^2 \theta} \omega^2 \cos \theta \vec{e}_y \left[ \frac{r^3}{3} \right]_{r=0}^{L \sin \theta} = -\frac{1}{3} m L^2 \sin \theta \cos \theta \omega^2 \vec{e}_y$$

3. Si les efforts d'inertie permettent de définir une énergie potentielle, il existe une fonction  $E_P$  telle que :  $\delta W = -dE_P$ .

$\delta W$  étant le travail associé aux efforts d'inertie.

La tige étant un solide on peut écrire :

$$\delta W = \left( \vec{\mathcal{R}} \cdot \vec{V}(O) + \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{\Omega} \right) dt$$

$\vec{\Omega}$  étant le vecteur rotation de la tige par rapport au référentiel tournant.

La rotation de la tige dans le référentiel tournant est représentée par l'angle  $\theta$ , nous avons :  $\vec{\Omega} = -\dot{\theta} \vec{e}_y$ , le signe négatif étant justifié par l'orientation de  $\theta$ .

$O$  étant un point fixe dans le référentiel :

$$\delta W = -\frac{m}{3} L^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \vec{e}_y \cdot (-\dot{\theta} \vec{e}_y) dt = \frac{m}{3} L^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \underbrace{\dot{\theta} dt}_{d\theta} \Rightarrow$$

$$\delta W = \frac{m}{3} L^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$dE_P = -\frac{m}{3} L^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \Rightarrow E_P(\theta) = -\frac{m}{6} L^2 \omega^2 \sin^2 \theta + \text{cte}$$

4. Il faut compter en plus l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_P = -m \vec{g} \cdot \overrightarrow{OG} + \text{cte} = -\frac{m}{2} g L \cos \theta + \text{cte}$$

5. Les positions d'équilibres sont données par les valeurs extrémales de la fonction énergie potentielle totale. Cette dernière s'exprime comme :

$$E_P = -\frac{m}{2} g L \cos \theta - \frac{m}{6} L^2 \omega^2 \sin^2 \theta + \text{cte}$$

$$\frac{dE_P}{d\theta} = \frac{m}{2} g L \sin \theta - \frac{m}{3} L^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{Posons } \omega_0^2 = \frac{3g}{2L} \Rightarrow \frac{dE_P}{d\theta} = \frac{m}{3} L^2 \omega_0^2 \sin \theta - \frac{m}{3} L^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{dE_P}{d\theta} = 0 \Rightarrow$$

- $\cos \theta = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \Rightarrow \theta = \theta_0 = \arccos \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right)$ , possible si  $\omega > \omega_0$
- $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

6. La stabilité de l'équilibre est donnée par le signe de  $\frac{d^2 E_P}{d\theta^2}$  :

- $\frac{d^2 E_P}{d\theta^2} > 0 \Rightarrow$  équilibre stable.
- $\frac{d^2 E_P}{d\theta^2} < 0 \Rightarrow$  équilibre instable.

$$\frac{d^2 E_P}{d\theta^2} = \frac{m}{3} L^2 \omega_0^2 \cos \theta - \frac{m}{3} L^2 \omega^2 (2 \cos^2 \theta - 1)$$

Pour le cas  $\theta_{\text{eq}} = 0$  cherchons le signe de  $\frac{d^2 E_P}{d\theta^2}$  :

$$\frac{d^2 E_P}{d\theta^2}(\theta = 0) = \frac{m}{3} L^2 (\omega_0^2 - \omega^2)$$

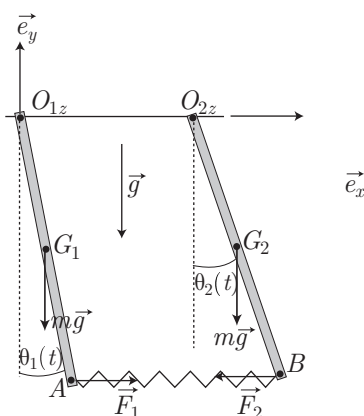
- Si  $\omega < \omega_0$ , l'équilibre est stable.
- Si  $\omega > \omega_0$ , l'équilibre est instable.

Pour le cas  $\theta_{\text{eq}} = \theta_0$  cherchons le signe de  $\frac{d^2 E_P}{d\theta^2}$  :

$$\frac{d^2 E_P}{d\theta^2}(\theta_0) = \frac{mL^2}{3\omega^2} (\omega^4 - \omega_0^4)$$

Cette position d'équilibre n'existe que pour  $\omega > \omega_0$ , elle est donc stable.

## ● 17 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes La Jolie



1. La longueur du ressort, étant donné que les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont petits s'écrit :  
 $\ell = L_0 - L\theta_1 + L\theta_2 = L_0 + L(\theta_2 - \theta_1)$ .  
 Le terme  $-L\theta_1$  correspond à la compression du ressort du fait que le pendule  $T_1$  est écarté de  $\theta_1$ .  
 $L\theta_2$  correspond à l'étirement du ressort du fait que le pendule  $T_2$  est écarté de  $\theta_2$ .
2. La tige  $T_1$  a un mouvement de rotation autour de l'axe  $O_{1z}$ . La liaison assurant la rotation est parfaite, le moment en  $O_1$  des actions de contact entre l'axe de rotation et la tige est perpendiculaire à  $O_{1z}$ .  
 Appliquons à la tige  $T_1$  le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe  $O_{1z}$ , sachant que  $\vec{L}_{T_1}(O_1) = \left(\frac{mL^2}{3}\right) \dot{\theta}_1 \vec{e}_{z1}$ .

Les efforts à considérer sont ceux de contact, de pesanteur, ainsi que la force élastique exercée par le ressort :

$$\frac{d}{dt}(L_{O_1 z}) = (\overrightarrow{O_1 G_1} \wedge m \vec{g}) \cdot \vec{e}_{z_1} + (\overrightarrow{O_1 A} \wedge \vec{F}_1) \cdot \vec{e}_{z_1} \quad (34)$$

$$(\overrightarrow{O_1 G} \wedge m \vec{g}) \cdot \vec{e}_{z_1} = \left[ \left( -\frac{L}{2} \cos \theta_1 \vec{e}_y + \frac{L}{2} \sin \theta_1 \vec{e}_x \right) \wedge (m \vec{g}) \right] \cdot \vec{e}_{z_1}$$

$(\overrightarrow{O_1 G} \wedge m \vec{g}) \cdot \vec{e}_{z_1} = -mg \frac{L}{2} \sin \theta_1 \simeq -mg \frac{L}{2} \theta_1$ , dans l'approximation des petits angles.

$\vec{F}_1$  étant la force élastique :  $\vec{F}_1 = k(\ell - L_0) \vec{e}_x = kL(\theta_2 - \theta_1) \vec{e}_x$ .

$$(\overrightarrow{O_1 A} \wedge \vec{F}_1) \cdot \vec{e}_{z_1} = [(-L \cos \theta_1 \vec{e}_y + L \sin \theta_1 \vec{e}_x) \wedge (kL(\theta_2 - \theta_1) \vec{e}_x)] \cdot \vec{e}_{z_1}$$

$(\overrightarrow{O_1 A} \wedge \vec{F}_1) \cdot \vec{e}_{z_1} = kL^2(\theta_2 - \theta_1) \cos \theta_1 \simeq kL^2(\theta_2 - \theta_1)$ , puisque pour les petits angles  $\cos \theta_1 \simeq 1$ .

L'équation (34) donne donc :

$$\frac{m}{3} L^2 \ddot{\theta}_1 = -mg \frac{L}{2} \theta_1 + kL^2(\theta_2 - \theta_1), \text{ ce qui s'écrit aussi :}$$

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{3g}{2L} \theta_1 + \frac{3k}{m} \theta_1 = \frac{3k}{m} \theta_2$$

En posant comme le propose l'énoncé :  $\omega_1^2 = \frac{3k}{m}$  et  $\omega_0^2 = \frac{3g}{2L}$ , on en déduit :

$$\ddot{\theta}_1 + (\omega_0^2 + \omega_1^2) \theta_1 = \omega_1^2 \theta_2$$

Cette équation différentielle fait intervenir les fonctions  $\theta_1$  et  $\theta_2$  à ce stade il est donc impossible de la résoudre.

Appliquons dans un second temps le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe  $O_2 z$  à la tige  $T_2$  :

$$\frac{d}{dt}(L_{O_2 z}) = (\overrightarrow{O_2 G} \wedge m \vec{g}) \cdot \vec{e}_{z_2} + (\overrightarrow{O_2 B} \wedge \vec{F}_2) \cdot \vec{e}_{z_2} \quad (35)$$

$$(\overrightarrow{O_2 G} \wedge m \vec{g}) \cdot \vec{e}_{z_2} \simeq -mg \frac{L}{2} \theta_2.$$

$$\vec{F}_2 = -k(\ell - L_0) \vec{e}_x = -kL(\theta_2 - \theta_1) \vec{e}_x.$$

$(\overrightarrow{O_2 B} \wedge \vec{F}_2) \cdot \vec{e}_{z_2} \simeq -kL^2(\theta_2 - \theta_1)$  L'équation (35) donne alors :

$$\frac{m}{3} L^2 \ddot{\theta}_2 = -mg \frac{L}{2} \theta_2 + kL^2(\theta_1 - \theta_2), \text{ ce qui s'écrit aussi :}$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{3g}{2L} \theta_2 + \frac{3k}{m} \theta_2 = \frac{3k}{m} \theta_1$$

On déduit :

$$\ddot{\theta}_2 + (\omega_0^2 + \omega_1^2) \theta_2 = \omega_1^2 \theta_1$$

Nous obtenons donc un système de deux équations différentielles :

$$\ddot{\theta}_1 + (\omega_0^2 + \omega_1^2) \theta_1 = \omega_1^2 \theta_2 \quad (36)$$

$$\ddot{\theta}_2 + (\omega_0^2 + \omega_1^2) \theta_2 = \omega_1^2 \theta_1 \quad (37)$$

Posons les fonctions  $u = \theta_1 + \theta_2$  et  $v = \theta_1 - \theta_2$ , avec  $\theta_1 = \frac{u+v}{2}$  et  $\theta_2 = \frac{u-v}{2}$

- (36)+(37) donne  $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0 \Rightarrow u = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$
- (36)-(37) donne si on pose  $\Omega^2 = \omega_0^2 + 2\omega_1^2 : \ddot{v} + \Omega^2 v = 0 \Rightarrow v = C \cos(\Omega t) + D \sin(\Omega t)$

La forme générale de solutions est donc donnée par :

$$\theta_1 = \frac{A}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{B}{2} \sin(\omega_0 t) + \frac{C}{2} \cos(\Omega t) + \frac{D}{2} \sin(\Omega t)$$

$$\theta_2 = \frac{A}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{B}{2} \sin(\omega_0 t) - \frac{C}{2} \cos(\Omega t) - \frac{D}{2} \sin(\Omega t)$$

3. Pour  $\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_0$ , on a  $u(0) = 2\theta_0$  et  $v(0) = 0$ , de plus les vitesses initiales étant nulles :

$$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \Rightarrow \dot{u}(0) = \dot{v}(0) = 0, \text{ d'où :}$$

- $u(0) = 2\theta_0 \Rightarrow A = 2\theta_0$
- $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$
- $\dot{u}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
- $\dot{v}(0) \Rightarrow D = 0$

D'où  $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$ , c'est le mode symétrique, les pendules oscillent en phase à la pulsation  $\omega_0$ .

4. Pour  $\theta_{10} = -\theta_{20} = \theta_0$ , on a  $v(0) = 2\theta_0$  et  $u(0) = 0$ , de plus les vitesses initiales restant nulles :

- $v(0) = 2\theta_0 \Rightarrow C = 2\theta_0$
- $u(0) = 0 \Rightarrow A = 0$
- $\dot{u}(0) = 0 \Rightarrow B = 0$
- $\dot{v}(0) \Rightarrow D = 0$

D'où  $\theta_1(t) = -\theta_2(t) = \theta_0 \cos(\Omega t)$ , c'est le mode antisymétrique, les pendules oscillent en opposition de phase à la pulsation  $\Omega$ .

## ● 18 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Une masse  $\delta m$  d'air, de volume  $\delta V$ , est soumise à son poids  $\delta \vec{P}$ , en plus des forces de pression. C'est pourquoi la force volumique qui s'exerce sur cette masse vaut :

$$\vec{F}_V = \frac{\delta \vec{P}}{\delta V} = \frac{\delta m}{\delta V} \vec{g} = \mu \vec{g} = -\mu g \vec{e}_z$$

où  $\vec{e}_z$  est un vecteur unitaire vertical ascendant.

Ce faisant, la loi fondamentale de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \vec{F}_V = -\mu g \vec{e}_z$$

devient, dans une base cartésienne  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z = -\mu g \vec{e}_z$$

D'une part cette équation montre que  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ , ce qui signifie que  $p$  ne dépend que de l'altitude  $z$  et d'autre part elle conduit à l'équation différentielle :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g \quad (38)$$

2. Un nombre  $n$  de moles d'air occupe, à l'altitude  $z$ , un volume  $V$  sous une pression  $p(z)$  et à une température  $T(z)$  qui vérifient l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p(z)V = nRT(z) = m \times \frac{RT(z)}{M}$$

où  $m$  désigne la masse des  $n$  moles d'air. Ainsi, la définition de la masse volumique :  $\mu(z) = \frac{m}{V}$  conduit à :

$$p(z) = \mu(z) \times \frac{RT(z)}{M} \Leftrightarrow p = \mu \times \frac{RT}{M} \Rightarrow \mu = p \times \frac{M}{RT} \quad (39)$$

qui donne à l'équation (38) la forme suivante :

$$\frac{dp}{dz} = -p \times \frac{Mg}{RT} \Rightarrow \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT} \Rightarrow \frac{d \ln p}{dz} = -\frac{Mg}{RT} \quad (40)$$

Quant à la loi polytropic, elle s'écrit :

$$\frac{p}{\mu^k} = \text{cte} \Rightarrow \ln p - k \ln \mu = \text{cte} \Rightarrow \frac{d \ln p}{dz} = k \frac{d \ln \mu}{dz}$$

équation dans laquelle le membre de droite peut être exprimé à l'aide de l'identité (39) :

$$\mu = \frac{p}{T} \times \frac{M}{R} \Rightarrow \ln \mu = \ln p - \ln T + \ln \left( \frac{M}{R} \right) \Rightarrow \frac{d \ln \mu}{dz} = \frac{d \ln p}{dz} - \frac{d \ln T}{dz}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d \ln p}{dz} = k \frac{d \ln p}{dz} - k \frac{d \ln T}{dz} \Rightarrow \frac{d \ln p}{dz} = \frac{k}{k-1} \frac{d \ln T}{dz} \quad (41)$$

Ainsi, l'équation (40) devient-elle :

$$\begin{aligned} \frac{k}{k-1} \frac{d \ln T}{dz} &= -\frac{Mg}{RT} \Rightarrow \frac{1}{T} \frac{dT}{dz} = -\frac{k-1}{k} \times \frac{Mg}{RT} \\ &\Rightarrow \frac{dT}{dz} = -\frac{k-1}{k} \times \frac{Mg}{R} = \text{cte} \end{aligned}$$

3. Le résultat précédent s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} dT &= -\alpha dz \text{ avec } \alpha = \frac{k-1}{k} \times \frac{Mg}{R} \\ \Rightarrow \int_{T_0}^{T(z)} dT &= -\alpha \int_0^z dz \Rightarrow T(z) = T_0 - \alpha z = T_0 - \frac{k-1}{k} \times \frac{Mg}{R} z \end{aligned}$$

Quant à l'équation (41), elle fournit la relation entre  $p$  et  $T$  :

$$\begin{aligned} d \ln p &= \frac{k}{k-1} d \ln T \Rightarrow \int_{p_0}^{p(z)} d \ln p = \frac{k}{k-1} \int_{T_0}^{T(z)} d \ln T \\ \Rightarrow \ln \left[ \frac{p(z)}{p_0} \right] &= \frac{k}{k-1} \ln \left[ \frac{T(z)}{T_0} \right] = \frac{k}{k-1} \ln \left[ 1 - \frac{k-1}{k} \times \frac{Mg}{R} z \right] \\ \Rightarrow p(z) &= p_0 \times \left( 1 - \frac{k-1}{k} \times \frac{Mg}{R} z \right)^{k/k-1} \end{aligned}$$

## ● 19 ————— Lycée Faidherbe, Lille

1. Dans le système de coordonnées cartésiennes, une masse  $\delta m$  d'eau est soumise à son poids :

$$\delta \vec{P} = \delta m \vec{g} = \mu \delta V \vec{g} = -\mu \delta V g \vec{e}_z$$

où  $\delta V$  désigne le volume associé à la masse d'eau  $\delta m$ . Par suite, la loi fondamentale de la statique des fluides s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \frac{\delta \vec{P}}{\delta V} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z = -\mu g \vec{e}_z$$

D'une part :  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$  indiquent que la pression  $p$  de l'eau ne dépend que de l'altitude  $z$  et d'autre part :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g \Rightarrow dp = -\mu g dz$$

Sachant qu'à l'altitude  $z = h$ , la pression s'identifie à celle de l'air ( $p_0$ ), cette équation s'intègre aisément :

$$\int_{p_0}^{p(z)} dp = -\mu g \int_h^z dz \Rightarrow p(z) = p_0 + \mu g (h - z)$$

2. Soit  $d\vec{S}_i = dS_i \vec{u}_i$  un élément de surface du barrage, immergé, situé à une altitude  $z$ , de longueur  $L$ , de largeur  $d\xi$  telle que  $dS_i = L d\xi$  et dont le vecteur unitaire normal  $\vec{u}_i$  est dirigé vers l'intérieur du barrage. La force que l'eau exerce sur cet élément de surface vaut alors :

$$\delta \vec{F}_i = p(z) \times d\vec{S}_i = [p_0 + \mu g (h - z)] L d\xi \vec{u}_i \text{ avec } \vec{u}_i = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

En remarquant que  $z = \xi \cos \alpha \Rightarrow d\xi = \frac{dz}{\cos \alpha}$ , cette force s'écrit aussi :

$$\delta \vec{F}_i = [p_0 + \mu g (h - z)] \frac{L \vec{u}_i}{\cos \alpha} dz$$

Par conséquent, l'eau exerce sur cette face une force totale :

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= \frac{L \vec{u}_i}{\cos \alpha} \times \left\{ \int_0^h p_0 dz + \mu g \int_0^h (h-z) dz \right\} \\ &= \frac{L \vec{u}_i}{\cos \alpha} \times \left\{ p_0 h + \mu g \frac{h^2}{2} \right\} \\ \Rightarrow \vec{F}_i &= Lh \times \left( p_0 + \mu g \frac{h}{2} \right) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -\tan \alpha \end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. Un élément  $dS_e = L d\xi$  de la face émergée est soumis, quant à lui, à une force de pression exercée par l'air :

$$\delta \vec{F}_e = p_0 dS_e \vec{u}_e \text{ où } \vec{u}_e = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

car, au voisinage du barrage, la pression de l'air prend une valeur uniforme  $p_0$ . À nouveau, la relation :  $d\xi = \frac{dz}{\cos \alpha}$  permet le calcul de la force  $\vec{F}_e$  qui s'exerce sur la face émergée du barrage :

$$\begin{aligned}\delta \vec{F}_e &= \frac{p_0 L}{\cos \alpha} \vec{u}_e \times dz \Rightarrow \vec{F}_e = \frac{p_0 L}{\cos \alpha} \times \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ 0 \\ -\sin \alpha \end{pmatrix} \times \int_0^h dz \\ \Rightarrow \vec{F}_e &= Lh p_0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\tan \alpha \end{pmatrix}\end{aligned}$$

4. Le barrage est soumis :

- aux forces de pression précédemment calculées :

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_i = \begin{pmatrix} -Lh \times \mu g h / 2 \\ 0 \\ -Lh \tan \alpha (2p_0 + \mu g h / 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x \\ 0 \\ F_y \end{pmatrix}$$

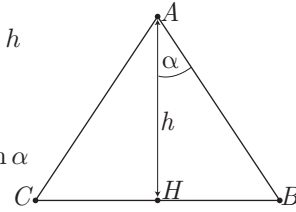
- à la réaction du sol :

$$\vec{R} = T \vec{e}_x + N \vec{e}_z = \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ N \end{pmatrix}$$

- à son poids  $\vec{P} = M \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -Mg \end{pmatrix}$ , où la masse  $M$  est accessible à partir de la masse volumique du barrage et de son volume  $V = L \times S$  :  $M = \rho V$ . Or, le triangle  $(ABC)$  constituant le coté du barrage étant isocèle, son sommet  $A$  se projète sur  $[BC]$  en un point  $H$  milieu de  $[BC]$ , de sorte que  $BC = 2BH$ .

C'est pourquoi la section du barrage a pour surface :

$$\begin{aligned} S &= AH \times HB \text{ avec } \tan \alpha = \frac{HB}{AH} \text{ et } AH = h \\ &= h^2 \tan \alpha \Rightarrow V = Lh^2 \tan \alpha \\ \Rightarrow \vec{P} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{pmatrix} \text{ où } P = \rho V g = \rho g L h^2 \tan \alpha \end{aligned}$$



Ce faisant, le barrage est soumis à la force résultante :

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{P} = \begin{pmatrix} F_x + T \\ 0 \\ F_y + N - P \end{pmatrix}$$

au demeurant nulle à l'équilibre. C'est pourquoi :

$$T = -F_x = Lh \times \frac{\mu g h}{2}$$

et :

$$\begin{aligned} N &= P - F_y = \rho g L h^2 \tan \alpha + Lh \tan \alpha \left( 2p_0 + \frac{\mu g h}{2} \right) \\ \Rightarrow N &= Lh \tan \alpha \times \left( 2p_0 + \frac{\mu g h}{2} + \rho g h \right) \end{aligned}$$

5. Pour que le barrage reste sur le sol, sans glisser, il faut que :

$$f \geq \frac{|T|}{|N|} = \frac{T}{N} = \frac{\mu g h / 2}{\tan \alpha \left( \frac{\mu g h}{2} + 2p_0 + \rho g h \right)} = f_{\min}$$

6. Si  $\alpha + \varphi > \frac{\pi}{2}$ , alors :

$$\varphi > \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \tan \varphi > \tan \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow f > \frac{1}{\tan \alpha}$$

Or, étant donné que :

$$\frac{\mu g h}{2} < \frac{\mu g h}{2} + 2p_0 + \rho g h$$

il s'ensuit que la valeur minimale  $f_{\min}$  de  $f$  vérifie :

$$f_{\min} < \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow f > \frac{1}{\tan \alpha} > f_{\min}$$

La relation  $f > f_{\min}$  révèle alors que le barrage demeure en équilibre sans glisser lorsque  $\alpha + \varphi > \frac{\pi}{2}$ .

## ● 20 ————— Lycée Janson de Sailly

1. Le fluide étant incompressible nous avons la relation :  $\operatorname{div} \vec{V} = 0$ , ce qui donne :



$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_0 r^2}{R} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z V_0}{Z_0} \right) = 0$$

Nous en déduisons :  $\frac{2V_0}{R} + \frac{V_0}{Z_0} = 0 \Rightarrow Z_0 = -\frac{R}{2}$ . La vitesse est donc donnée par :

$$\vec{V} = \frac{V_0}{R} (r \vec{u}_r - 2z \vec{u}_z)$$

2. Exprimons  $\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$  :  $d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$ .

$$\vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \frac{V_0 r}{R} dr - \frac{2V_0 z}{R} dz.$$

Si on intègre cette relation sur un contour fermé partant d'un point  $M_0(r_0, z_0)$  et revenant au même point  $M_0$ , on obtient :

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \frac{V_0}{R} \int_{r_0}^{r_0} r dr - \frac{2V_0}{R} \int_{z_0}^{z_0} z dz = 0$$

La circulation du vecteur vitesse est donc nulle le long d'un contour fermé. Du théorème de Stokes-Ampère on déduit :

$$\iint_S \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$$

Pour tout contour  $C$  qui s'appuie sur la surface  $S$ . On a alors :  $\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} = \vec{0}$ ; l'écoulement étudié est irrotationnel. Il existe donc une fonction potentiel  $\phi$  qui vérifie  $\vec{V} = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \phi$ .

Exprimons le potentiel des vitesses :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial r} = V_r = \frac{V_0 r}{R} \Rightarrow \phi(r, \theta, z) = \frac{V_0 r^2}{2R} + f(\theta, z). \\ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = V_\theta = 0 \Rightarrow \phi \text{ ne dépend pas de } \theta : f(\theta, z) = f(z). \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} = V_z = -\frac{2V_0 z}{R} = \frac{df}{dz} \Rightarrow f = -\frac{V_0 z^2}{R}. \end{cases}$$

Le potentiel des vitesses s'exprime donc comme :

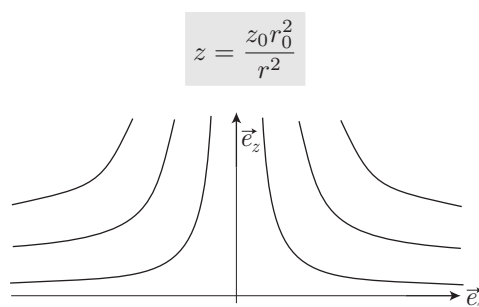
$$\phi(r, z) = \frac{V_0}{2R} (r^2 - 2z^2)$$

3. Les équations des lignes de courant sont données par :  $\vec{V} \wedge d\overrightarrow{OM} = \vec{0}$ . Nous avons donc à résoudre l'égalité  $V_z dr - V_r dz = 0$ , ce qui donne :  $2z dr + r dz = 0$ , qui s'écrit aussi  $2 \frac{dr}{r} = -\frac{dz}{z}$ . L'intégration de cette relation donne :

$$2 \ln r = -\ln z + \text{cte} \Rightarrow \ln(zr^2) = \text{cte} \Rightarrow zr^2 = A$$

$A$  est une constante.

Si on définit la ligne de courant qui passe par  $M_0(r_0, z_0)$ , l'équation est donnée par :



4. Les trajectoires sont données par  $\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$ . Considérons une particule de fluide qui, à  $t = 0$ , se trouve en  $M_0(r_0, z_0)$  :

$$\frac{V_0 r}{R} = \dot{r} \Rightarrow r(t) = r_0 e^{\frac{V_0 t}{R}}$$

$r\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \text{cte}$ , la trajectoire est incluse dans un plan  $\theta = \text{cte}$ .

$$\dot{z} = -\frac{2zV_0}{R} \Rightarrow z = z_0 e^{-\frac{2V_0 t}{R}}$$

5. Montrons que les trajectoires des particules de fluide s'identifient aux lignes de courant. De la fonction  $r(t)$ , nous déduisons :  $t = \frac{R}{V_0} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$  que nous pouvons injecter dans la fonction  $z(t)$ , ce qui donne :

$$z = z_0 \exp\left(\frac{-2V_0}{R} \left(\frac{R}{V_0}\right) \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) = z_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2.$$

6. L'écoulement étant permanent et irrotationnel, l'accélération des particules de fluide est donnée par :

$$\vec{a} = (\vec{V} \cdot \text{grad}) \vec{V} = \frac{1}{2} \text{grad} (V^2) = \frac{1}{2} \text{grad} \left( \frac{V_0^2}{R^2} (r^2 + 4z^2) \right)$$

D'où :

$$\vec{a} = \left(\frac{V_0}{R}\right)^2 (r \vec{u}_r + 4z \vec{u}_z)$$

## ● 21 ————— Concours Commun Polytechnique

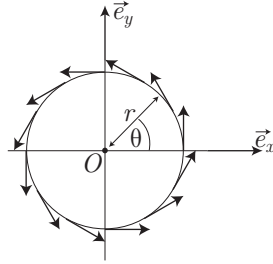
1. L'écoulement étant orthoradial, les lignes de courant sont des cercles centrés sur l'axe  $Oz$ . Nous avons  $\vec{V} = V(r) \vec{e}_\theta$ .

Le théorème de Stokes-Ampère nous permet d'écrire que :

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{OM} = \iint_S \text{rot} \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

$C$  étant un cercle de rayon  $r > a$  et  $S$  le disque qui s'appuie dessus. Nous avons donc :

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{OM} = 2\pi r V \Rightarrow \iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S} = \pi a^2 \gamma = \Gamma$$



Étant donné que  $\text{rot } \vec{V}$  est non nul seulement pour  $r < a$ .  
Il s'ensuit, pour un tourbillon ponctuel :

$$\vec{V}(M) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

On retrouve le profil du champ magnétique créée par un fil qui serait porté par l'axe  $Oz$  et parcouru par un courant d'intensité  $I$  :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

2. (a) On définit  $\vec{e}_{r_S} = \frac{\overrightarrow{S_M M}}{S_M M}$  et  $\vec{e}_{r_P} = \frac{\overrightarrow{P_M M}}{P_M M}$ ,  $S_M$  et  $P_M$  étant respectivement les projetés orthogonaux de  $M$  sur l'axe  $Sz$  et sur l'axe  $Pz$ .

L'écoulement étant radial depuis la source :  $\vec{V}_S(M) = V_S(M) \vec{e}_{r_S}$ .

Calculons le débit à travers un cylindre de hauteur  $h$ , d'axe  $Sz$  et de rayon  $r_S$  :

$$D = \iint \vec{V}_S(M) \cdot dS \vec{e}_{r_S} = 2\pi r_S h V_S(r_S)$$

On en déduit l'expression du débit par unité de longueur :

$$D = \frac{D}{h} = 2\pi r_S V_S(r_S)$$

La vitesse s'écrit donc :

$$\vec{V}_S(M) = \frac{D}{2\pi r_S} \vec{e}_{r_S}$$

L'égalité  $\vec{V}_S(M) = \text{grad } \varphi_S$  donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_S}{\partial \theta} = 0 \text{ et } \frac{\partial \varphi_S}{\partial z} = 0 \text{ le potentiel des vitesses ne dépend donc que de } r_S \\ \frac{\partial \varphi_S}{\partial r_S} = \frac{D}{2\pi r_S} \end{cases}$$

Le potentiel est donc donné par :

$$\varphi_S(M) = \frac{D}{2\pi} \ln r_S + \text{cte}_S$$

(b) Par analogie avec les résultats précédents, on a :

$$\vec{V}_P(M) = -\frac{D}{2\pi r_P} \vec{e}_{r_P}$$

$$\varphi_P(M) = -\frac{D}{2\pi} \ln r_P + \text{cte}_P$$

(c) La fonction potentiel de l'ensemble s'écrit comme la somme des deux fonctions potentiels :  $\varphi(M) = \varphi_S(M) + \varphi_P(M)$ .

$$\varphi(M) = \frac{D}{2\pi} \ln \left( \frac{r_S}{r_P} \right) + \text{cte.}$$

Nous avons de plus :

$$r_S = r \left( 1 - \frac{2d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2} \right)^{1/2} \simeq r \left( 1 - \frac{d}{r} \cos \theta \right) \text{ puisque } d \ll r$$

$$r_P = r \left( 1 + \frac{2d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{r^2} \right)^{1/2} \simeq r \left( 1 + \frac{d}{r} \cos \theta \right)$$

De même :

$$\ln \left( r \left( 1 - \frac{d}{r} \cos \theta \right) \right) \simeq \ln r - \frac{d}{r} \cos \theta$$

$$\ln \left( r \left( 1 + \frac{d}{r} \cos \theta \right) \right) \simeq \ln r + \frac{d}{r} \cos \theta$$

D'où :  $\ln r_S - \ln r_P \simeq -\frac{2d}{r} \cos \theta$ . L'expression du potentiel en découle :

$$\varphi(M) = -\frac{H \cos \theta}{2\pi r} + \text{cte}$$

La vitesse est donnée par  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$  :

$$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{H \cos \theta}{2\pi r^2} \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{H \sin \theta}{2\pi r^2} \\ V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\vec{V}(M) = \frac{H}{2\pi r^2} (\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

(d) On reconnaît le champ électrostatique créé par une association de deux fils infinis uniformément chargés avec les densités linéiques  $+\lambda$  et  $-\lambda$  :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda d}{\pi \epsilon_0 r^2} (\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

## ● 22 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Le potentiel  $\phi_u$  est donné par la relation :  $\vec{V}_0 = \overrightarrow{\text{grad}} \phi_u$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_u}{\partial y} = 0 \text{ donc } \phi_u \text{ est indépendant de } y \\ \frac{\partial \phi_u}{\partial z} = 0 \text{ donc } \phi_u \text{ est indépendant de } z \\ \frac{\partial \phi_u}{\partial x} = V_0 \Rightarrow \phi_u(x) = V_0 x + \text{cte} \end{cases}$$

Étant donné que  $x = r \cos \theta$  :

$$\phi_u = V_0 r \cos \theta + \text{cte}$$

2. Le terme  $\frac{A \cos \theta}{r}$ , correspond au potentiel des vitesses d'un doublet, association d'un puits et d'une source.

3. La vitesse est donnée par la relation :  $\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$  :

$$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \cos \theta \left( V_0 - \frac{A}{r^2} \right) \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\sin \theta \left( V_0 + \frac{A}{r^2} \right) \\ V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Nous avons donc en tout point du fluide :

$$\vec{V} = \cos \theta \left( V_0 - \frac{A}{r^2} \right) \vec{e}_r - \sin \theta \left( V_0 + \frac{A}{r^2} \right) \vec{e}_\theta$$

4. Cette vitesse doit respecter les conditions aux limites ; en tout point du cylindre la composante normale doit s'annuler :  $\vec{V}(r = R) \cdot \vec{e}_r = 0$ .

Ce qui donne  $\cos \theta \left( V_0 - \frac{A}{R^2} \right) = 0 \Rightarrow A = R^2 V_0$  L'expression de la vitesse est donc :

$$\vec{V} = V_0 \cos \theta \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \vec{e}_r - V_0 \sin \theta \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \vec{e}_\theta$$

Remarque – On retrouve qu'à l'infini  $\vec{V}(r \rightarrow \infty) = \vec{V}_0$  .

Les points d'arrêt correspondent à  $\vec{V}(r = R) = \vec{0} \Rightarrow \sin \theta = 0$ . Il y en a donc deux :

$$A_1(r = R, \theta = 0)$$

et

$$A_2(r = R, \theta = \pi)$$

5. Les lignes de courant sont données par :  $\vec{V} \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$ .

Cette égalité est équivalente pour le cas qui nous concerne à :  $rV_r d\theta = V_\theta dr$  :

$$rV_0 \cos \theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) d\theta = -V_0 \sin \theta \left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) dr$$

Il s'ensuit :

$$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = - \left( \frac{1 + \frac{R^2}{r^2}}{1 - \frac{R^2}{r^2}} \right) \frac{dr}{r}$$

Ce qui donne :  $\frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta} = - \frac{d\left(r - \frac{R^2}{r}\right)}{r - \frac{R^2}{r}}$ , une fois intégrée cette relation de-

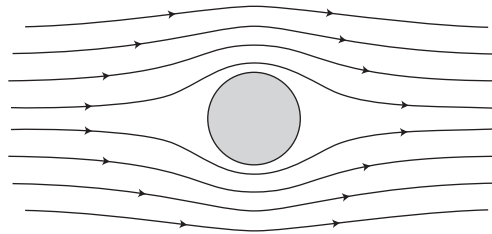
vient :

$$\ln(\sin \theta) = - \ln\left(r - \frac{R^2}{r}\right) + \text{cte}$$

On a donc :

$$\sin \theta \left(r - \frac{R^2}{r}\right) = K$$

$K$  est une constante qui définit la ligne de courant.



## ● 23 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Pour exprimer la vitesse de l'écoulement il faut se donner le champ des vitesses de l'écoulement dû au doublet :  $\vec{V}_D(M) = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_D(M)$  :

$$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{H \cos \theta}{2\pi r^2} \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{H \sin \theta}{2\pi r^2} \\ V_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

On a donc :

$$\vec{V}_D(M) = \frac{H}{2\pi r^2} (\cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

La vitesse de l'écoulement s'exprime comme :

$$\vec{V}(M) = \vec{V}_T(M) + \vec{V}_D(M) + V_0 \vec{e}_x$$

Étant donné que  $\vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$  et que  $\vec{V}_T(M) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ , on déduit :

$$\vec{V}(M) = \left( \frac{H \cos \theta}{2\pi r^2} + V_0 \cos \theta \right) \vec{e}_r + \left( \frac{H \sin \theta}{2\pi r^2} + \frac{\Gamma}{2\pi r} - V_0 \sin \theta \right) \vec{e}_\theta$$

Pour exprimer  $H$  en fonction de  $R$  et  $V_0$ , il suffit d'identifier :

$$V_r = \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) V_0 \cos \theta = \left( \frac{H \cos \theta}{2\pi r^2} + V_0 \cos \theta \right)$$

et

$$V_\theta = - \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) V_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} = \left( \frac{H \sin \theta}{2\pi r^2} + \frac{\Gamma}{2\pi r} - V_0 \sin \theta \right)$$

Nous obtenons donc :

$$H = -2\pi R^2 V_0$$

2. (a) Le fluide étant incompressible, le flux de  $\vec{V}(M)$  se conserve le long d'un tube de courant ; lorsque les lignes de courant se resserrent, la vitesse augmente et elle diminue lorsque les lignes de courant s'écartent.

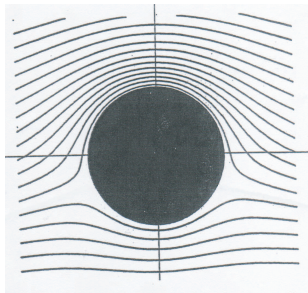
La vitesse est donc plus importante au dessus du cylindre qu'au dessous.

- (b) Exprimons la vitesse pour deux valeurs particulières de  $\theta$  :

$$\begin{cases} \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow V = - \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) V_0 + \frac{\Gamma}{2\pi r} \\ \theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow V = \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) V_0 + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$  correspond à un point au dessus du cylindre et  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ , à un point situé au dessous. La vitesse au dessus étant supérieure à la vitesse du fluide au dessous du cylindre il faut nécessairement que  $\Gamma < 0$ .

La rotation du cylindre se fait donc dans le sens horaire puisque le tourbillon tient compte de la rotation du cylindre.



(c)

On remarque, d'après le tracé des lignes de courant, l'existence de deux points d'arrêt qui sont donnés pour :

$$\alpha_1 \simeq -20^\circ \text{ et } \alpha_2 \simeq -160^\circ.$$

Ces deux angles ont un sinus commun qui est donné par :  $\sin \alpha_{1,2} = \frac{\Gamma}{4\pi R V_0}$ .

Nous en déduisons :  $|\Gamma| = -4\pi R V_0 \sin \alpha_1$

- (d) La symétrie des lignes de courant par rapport à l'axe  $Oy$  permet d'affirmer qu'au niveau de tout point  $M(x, y)$  sur le cylindre, la force  $dF_x$  sera opposée à la force  $dF'_x$  qui s'exerce au niveau du point  $M(-x, y)$ .  
On en déduit  $F_x = 0$ . Il en sera de même pour le moment.

- (e) Appliquons le théorème de Bernoulli entre un point situé à l'infini et un point sur le cylindre :

$$P(\theta) = P_0 + \frac{\mu V_0^2}{2} - \frac{\mu}{2} \left( \frac{\Gamma}{2\pi R} - 2V_0 \sin \theta \right)^2$$

- (f) La force élémentaire qu'exerce le fluide sur le cylindre est donnée par :  $d\vec{F} = -P dS \vec{e}_r$  avec  $dS = hR d\theta$ , ce qui représente une bande de hauteur  $h$  et de largeur  $R d\theta$  construite sur le cylindre. Il s'ensuit, après projection sur  $\vec{e}_y$  :

$$dF_y = d\vec{F} \cdot \vec{e}_y = -PRh \sin \theta d\theta \Rightarrow F_y = -Rh \int_0^{2\pi} P(\theta) \sin \theta d\theta$$

On en déduit :

$$F_y = -\mu V_0 h \Gamma$$

On a donc une force dirigée vers les  $y > 0$ , puisque  $\Gamma < 0$ , c'est l'effet Magnus ; qui fait que le cylindre a tendance à être porté par l'écoulement.

## ● 24 ————— Mines-Ponts

1. Pour des transformations isentropiques la relation de Laplace donne :  $PV^\gamma = \text{cte}$ , où  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  est le volume de la bulle. Nous en déduisons donc :  $P(t)R^{3\gamma} = \text{cte}$ , ce qui permet d'écrire  $\ln(P(t)R^{3\gamma}) = \ln P + 3\gamma \ln R = \text{cte}$ . Il suffit ensuite de différentier cette dernière expression pour obtenir :

$$\frac{dP}{P} + 3\gamma \frac{dR}{R} = 0$$

Considérons de faibles variations de la pression autour de  $P_0$  et du rayon autour de  $R_0$  :  $dP \simeq P_B(t) - P_0$  et  $dR \simeq R(t) - R_0 = \xi(t)$ , d'où :

$$\frac{P_B(t) - P_0}{P_0} + \frac{3\gamma \xi(t)}{R_0} = 0$$

2. L'eau est incompressible, donc  $\text{div } \vec{V} = 0$ , ou ce qui est équivalent :

$$\oiint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0, S \text{ étant une surface fermée.}$$

Choisissons pour  $S$  la coquille sphérique comprise entre les sphères  $S_r$  et  $S_{r+dr}$ , de centre  $O$  et respectivement de rayons  $r$  et  $r + dr$  :

$$\iint_{S_r} \vec{V} d\vec{S} = -4\pi r^2 V(r)$$



Le signe négatif se justifie par l'orientation de  $d\vec{S}$ , toujours de l'intérieur vers l'extérieur.

$$\iint_{S_{r+dr}} \vec{V} d\vec{S} = 4\pi(r+dr)^2 V(r+dr)$$

Ce qui donne l'égalité  $4\pi r^2 V(r) = \text{cte}$ .

Appliquée entre un point quelconque et un point de la surface de la bulle, cette relation permet d'obtenir puisque  $V(R, t) = \frac{dR}{dt}$  :

$$V(r, t) = \left( \frac{R(t)}{r} \right)^2 \frac{dR}{dt}$$

3. L'équation d'Euler est donnée avec les approximations proposées par l'énoncé par :

$$\rho_E \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho_E \overrightarrow{\text{grad}} (V^2) + \rho_E \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} = -\overrightarrow{\text{grad}} P$$

Projetons cette relation sur  $\vec{e}_r$ , direction colinéaire à la vitesse  $\vec{V}$ , sachant que  $\overrightarrow{\text{grad}} (V^2) = 2V(r, t) \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r$  et que  $(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V}) \perp \vec{V}$ .

Nous obtenons :

$$\rho_E \left( \frac{\partial V(r, t)}{\partial t} + V(r, t) \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\partial P}{\partial r}$$

En injectant dans cette dernière relation l'expression de la vitesse :  $V(r, t) = \left( \frac{R(t)}{r} \right)^2 \frac{dR}{dt}$ , nous obtenons finalement :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\rho_E}{r^2} \left( 2 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) R \dot{R}^2 + R^2 \ddot{R} \right)$$

4. Très loin de la bulle la pression tend à prendre la valeur  $P_0$  :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P(r, t) = P_0$$

et par continuité de la pression puisqu'on néglige les phénomènes de tension superficielle :

$$\lim_{r \rightarrow R(t)} P(r, t) = P_B$$

5. À partir de l'équation  $\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{\rho_E}{r^2} \left( 2 \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) R \dot{R}^2 + R^2 \ddot{R} \right)$ , dans laquelle nous injectons  $R = R_0 + \xi$ , avec  $\xi \ll R_0$ , nous avons à l'ordre le plus bas :

$$\frac{\partial P}{\partial r} \simeq -\frac{\rho_E R_0^2}{r^2} \ddot{\xi}$$

Si on intègre cette relation entre un point situé sur la bulle et un point très éloigné de cette dernière, nous obtenons :

$$\int_{P_B}^{P_0} dP = -\rho_E R_0^2 \ddot{\xi} \int_{R(t)}^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

D'où :  $P_0 - P_B \simeq -\rho_E R_0 \ddot{\xi}$ , cette dernière relation combinée à

$$\frac{P_B(t) - P_0}{P_0} + \frac{3\gamma\xi(t)}{R_0} = 0$$

donne :

$$\ddot{\xi} + \frac{3\gamma P_0}{\rho_E R_0^2} \xi = 0$$

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique de pulsation caractéristique :

$$\omega_M = \sqrt{\frac{3\gamma P_0}{\rho_E R_0^2}}$$

On trouve donc une fréquence de  $f_M = 3,3 \text{ kHz}$  et une pulsation  $\omega_M = 2,05 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$ .

6. La vitesse est donnée par la relation :

$$V(r, t) = \left(\frac{R_0 + \xi}{r}\right)^2 \frac{dR}{dt} \Rightarrow V(r, t) \simeq \left(\frac{R_0}{r}\right)^2 \frac{dR}{dt}$$

La pression en un point quelconque s'obtient par :

$$\int_{P_B}^{P(r, t)} dP = -\rho_E R_0^2 \ddot{\xi} \int_{R(t)}^r \frac{dr}{r^2} = \rho_E R_0^2 \ddot{\xi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0 + \xi}\right).$$

ce qui donne :

$$P(r, t) = P_B(t) + \rho_E R_0^2 \ddot{\xi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)$$

## ● 25 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes La Jolie

1. Pour  $r < R$ , on a  $\vec{V} = Ar \vec{e}_\theta$ . Montrer que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$  est non nul équivaut à montrer qu'il existe un contour  $C$  pour lequel  $\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$  est non nul. Choisissons comme contour un cercle de centre  $O_C$  sur l'axe  $Oz$ , de rayon  $r < R$  et contenu dans un plan  $z = \text{cte}$ ; sur ce contour :  $d\vec{l} = r d\theta \vec{e}_\theta$ .  
Nous avons donc :

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \oint_C Ar^2 d\theta = 2\pi Ar^2 \neq 0$$

Dans le domaine  $r < R$ , l'écoulement est donc à rotationnel non nul.

2. Le théorème de Stokes-Ampère donne, avec  $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}$  :

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_S 2\vec{\Omega} \cdot d\vec{S}$$

$C$  est un cercle centré sur  $Oz$ , de rayon  $r < R$ , dans un plan  $z = \text{cte}$  et  $S$ , le disque qui s'appuie dessus.

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = 2\pi r V(r) \text{ et } \iint_S 2\vec{\Omega} \cdot d\vec{S} = 2\Omega\pi r^2$$

Il s'ensuit que  $\Omega = \frac{V(r)}{r} = A$ , on écrit alors :

$$\vec{\Omega} = A \vec{e}_z$$

3. L'écoulement est permanent, incompressible et parfait et on peut négliger les effets de la pesanteur.

- Les symétries imposent  $P(r, \theta, z) = P(r)$ . Pour tout  $r > R$ , l'écoulement est de plus irrotationnel; l'égalité de Bernoulli donne en tout point puisque  $\text{rot } \vec{V} = AR^2 \text{rot} \left( \frac{\vec{e}_\theta}{r} \right) = \vec{0}$ :

$$P + \frac{\mu V^2}{2} = \text{cte}$$

Appliquons cette relation entre deux points du fluide, l'un situé à la distance  $r$  de l'axe, l'autre à  $r = \infty$  :

$$P(r = \infty) + \frac{1}{2} (\mu V^2(r = \infty)) = P(r) + \frac{\mu V^2(r)}{2}, \text{ avec } P(r = \infty) = P_0 \text{ et } V(r = \infty) = 0 :$$

$$P(r > R) = P_0 - \frac{\mu \Omega^2 R^4}{2r^2}$$

- Pour  $r < R$ , l'égalité de Bernoulli ne se vérifie plus que le long d'une ligne de courant (l'écoulement n'est plus irrotationnel). De ce fait elle ne nous permet pas d'accéder à  $P(r)$ . Il nous reste alors l'équation du mouvement de la particule :

$$\mu \left( \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (V^2) + 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{V} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} P.$$

Comme :  $\overrightarrow{\text{grad}} (V^2) = 2\Omega^2 r \vec{e}_r$  et  $\vec{\Omega} \wedge \vec{V} = -\Omega^2 r \vec{e}_r$ , l'équation du mouvement, projetée sur  $\vec{e}_r$ , donne :

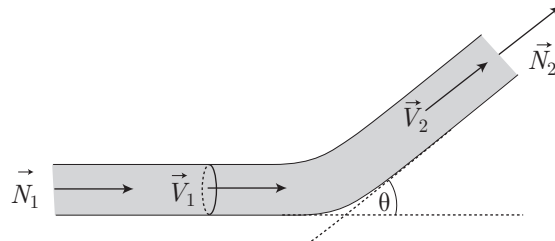
$$-\frac{\partial P}{\partial r} = -\mu \Omega^2 r \Rightarrow P(r) = \frac{1}{2} \mu \Omega^2 r^2 + \text{cte}$$

Par continuité de la pression nous avons :

$$P(r = R) = P_0 - \frac{1}{2} \mu \Omega^2 R^2 = \text{cte} + \frac{1}{2} \mu \Omega^2 R^2 \Rightarrow \text{cte} = P_0 - \mu \Omega^2 R^2.$$

$$P(r < R) = P_0 + \frac{\mu \Omega^2}{2} (r^2 - 2R^2)$$

● 26 ————— Concours Commun Polytechnique



**CORRIGÉS**

- Le fluide étant incompressible, le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant, nous avons donc :  
 $V_1 S = V_2 S \Rightarrow V_1 = V_2$   
 Le théorème de Bernoulli, appliqué sur une ligne de courant horizontale allant d'un point de l'entrée vers un point de la sortie, donne :  $P_1 + \frac{\mu V^2}{2} = P_2 + \frac{\mu V^2}{2} \Rightarrow P_1 = P_2$
- Considérons le système constitué par le fluide contenu par la conduite à l'instant  $t$ , et appliquons lui le théorème de la quantité de mouvement :

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{V}) \, d\tau + \oiint_S (\mu \vec{V}) \vec{V} \cdot d\vec{S} = \vec{F}_V$$

$\vec{F}_V$  correspond aux efforts qui agissent sur le système. L'écoulement étant permanent nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{V}) = \vec{0} \Rightarrow \oiint_S (\mu \vec{V}) \vec{V} \cdot d\vec{S} = \vec{F}_V$$

$S$  étant la surface qui délimite le système. Cette surface  $S$  se décompose en  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_{\text{Lat}}$ , surface latérale. L'intégrale de surface est non nulle seulement au niveau de  $S_1$  et  $S_2$  :

$$\oiint_S (\mu \vec{V}) \vec{V} \cdot d\vec{S} = \mu V^2 S \vec{N}_2 - \mu V^2 S \vec{N}_1 = \mu V^2 S (\vec{N}_2 - \vec{N}_1)$$

Étant donné que l'on néglige les effets de la pesanteur :

$$\mu V^2 S (\vec{N}_2 - \vec{N}_1) = \vec{F}_V = \vec{R}_{\text{conduite} \rightarrow \text{fluide}} + \vec{F}_{\text{pression}}$$

$$\vec{F}_{\text{pression}} = PS (\vec{N}_1 - \vec{N}_2)$$

En tenant compte du principe des actions réciproques on a :

$$\mu V^2 S (\vec{N}_2 - \vec{N}_1) = \vec{F}_V = -\vec{R}_{\text{fluide} \rightarrow \text{conduite}} + PS (\vec{N}_1 - \vec{N}_2).$$

Il en résulte :

$$\vec{R}_{\text{fluide} \rightarrow \text{conduite}} = (P + \mu V^2) S (\vec{N}_1 - \vec{N}_2)$$

$$\vec{R}_{\text{fluide} \rightarrow \text{conduite}} = R_x \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y \text{ Projétons sur } \vec{e}_x, \text{ pour obtenir } R_x :$$

$$R_x = S (1 - \cos \theta) (P + \mu V^2)$$

De même pour obtenir  $R_y$ , projetons sur  $\vec{e}_y$  :

$$R_y = -S \sin \theta (P + \mu V^2)$$

## ● 27 ————— Concours Mines-Ponts

- Notons  $\vec{V} = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta$ . Le fluide étant incompressible :

$$\text{div } \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) = 0$$

On en déduit la relation :  $rV_r = C$ , où  $C$  est une constante. La composante radiale de la vitesse s'écrit donc :  $V_r = \frac{C}{r}$ .

Le fluide étant réel en chaque point  $M$  où il est en contact avec un solide :

$$\vec{V}(M)_{\text{Solide}} = \vec{V}(M)_{\text{Fluide}}$$

En tout point de  $C_1$ , on a donc :  $\vec{V}(M)_{\text{Fluide}} = R_1 \Omega_1 \vec{e}_\theta$ .

En tout point de  $C_1$ , la vitesse du fluide n'a donc pas de composante radiale, d'où :

$$C = 0 \Rightarrow V_r = 0$$

2. L'énoncé propose une solution du type  $V_\theta(r) = r^n$ . L'équation du mouvement donne :

$$\mu \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{\text{grad}} V^2 + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} \right) = \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{V} - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

Étant donné que :  $\vec{V} = V(r) \vec{e}_\theta$ , les expressions des opérateurs nous permettent d'écrire :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) \vec{e}_z \text{ et } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \wedge \vec{V} = -\frac{1}{r} V_\theta \frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) \vec{e}_r$$

De même

$$\overrightarrow{\Delta} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta - \frac{V_\theta}{r^2} \vec{e}_\theta$$

En projection sur  $\vec{e}_\theta$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} = 0$$

Injectons dans cette dernière équation la solution proposée, nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} = nr^{n-1} \\ \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} = n(n-1)r^{n-2} \end{cases}$$

On en déduit l'équation :  $n(n-1)r^{n-2} + nr^{n-2} - r^{n-2} = 0$ , ce qui revient à résoudre :

$$(n-1)(n+1)r^{n-2} = 0$$

Cette dernière équation a pour solutions  $n = 1$  et  $n = -1$ .

Nous aurons donc comme solution générale :  $V_\theta(r) = Ar + \frac{B}{r}$ .

Pour exprimer  $A$  et  $B$ , utilisons les conditions aux limites :  $V_\theta(R_1) = \Omega_1 R_1$  et  $V_\theta(R_2) = \Omega_2 R_2$ .

On en déduit :

$$V_\theta(r) = \left( \frac{\Omega_2 R_2^2 - \Omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) r + \left( \frac{(\Omega_1 - \Omega_2) R_2^2 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \right) \frac{1}{r}$$

3. Dans le cas où  $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$ , on a  $V_\theta(r) = \Omega r$  : les deux cylindres tournent à la même vitesse et le fluide est entraîné en bloc.

## ● 28 Esim

1. Notons  $V_A, V_C$  et  $V_D$ , la vitesse du fluide aux points  $A, C$  et  $D$ . Appliquons le théorème de Bernoulli entre les points  $A$  et  $C$ , puis entre  $C$  et  $D$  :

- $P_A + \mu g z_1 + \frac{1}{2} \mu V_A^2 = P_C + \frac{1}{2} \mu V_C^2$ . Comme  $P_A = P_C = P_0$  et  $V_A \simeq 0$ , nous avons :  $V_C = \sqrt{2gz_1}$ .

- $P_D + \mu g z_C + \frac{1}{2} \mu V_D^2 = P_C + \frac{1}{2} \mu V_C^2$ , avec  $P_D = P_C = P_0$  et  $V_D = 0$  (régime permanent), nous avons :  $V_C = \sqrt{2gz_C}$

Il s'ensuit que :  $z_C = z_1 \Rightarrow h_0 = 0$

2. (a) Utilisons le fait que le fluide est incompressible c'est-à-dire que le débit est le même dans la galerie et dans la cheminée,  $V$  étant la vitesse dans la galerie :

$$V_s = S \frac{dh}{dt}$$

Remarque – Si  $h$  augmente nous avons bien  $V > 0$ .

- (b) Pour un fluide parfait l'équation d'Euler est donnée par :

$$\mu \frac{D\vec{V}}{Dt} = \mu \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

L'énoncé nous propose d'intégrer cette relation le long d'une ligne de courant  $A, B, C, D$  :

$$\int_A^D \mu \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \vec{dl} = - \int_A^D \overrightarrow{\text{grad}} P \cdot \vec{dl} + \int_A^D \mu \vec{g} \cdot \vec{dl}.$$

Avec :  $\int_A^D \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \vec{dl} \simeq \int_B^C \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \vec{dl}$ , d'après l'hypothèse de l'énoncé.

Nous avons :  $-\int_A^D \overrightarrow{\text{grad}} P \cdot \vec{dl} = -\int_A^D dP = P_A - P_D = 0$  . Et :

$$\int_A^D \mu \vec{g} \cdot \vec{dl} = -\mu g h.$$

Notons qu'entre  $B$  et  $C$ , la vitesse est indépendante de  $x$ , ce qui implique  $\vec{V} = V(t) \vec{e}_x$ , donc :

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})}_{\vec{0}} \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$$

D'après l'égalité  $V = \frac{S}{s} \frac{dh}{dt}$ , nous déduisons que  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{S}{s} \frac{d^2 h}{dt^2} \vec{e}_x$ , il s'ensuit :

$$\int_B^C \frac{D\vec{V}}{Dt} \cdot \vec{dl} = \frac{LS}{s} \frac{d^2 h}{dt^2}$$

L'équation différentielle vérifiée par  $h$  est donc :

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \left(\frac{gs}{LS}\right) h = 0$$

- (c) La solution de cette équation est  $h(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ , avec  $\omega^2 = \frac{gs}{LS}$ .  
Les conditions initiales sont  $h(0) = 0$  et  $\dot{h}(0) = \frac{s}{S} V(0)$ , où  $V(0) = \frac{d}{s}$ , d'où :

$$h = \frac{d}{S\omega} \sin(\omega t)$$

On en déduit :

$$h_M = \frac{d}{S\omega}$$

3. (a) Il faut résoudre l'équation :  $h_1 \sin(\omega t) = h_M$ , on obtient :

$$t_1 = \frac{1}{\omega} \arcsin\left(\frac{h_1}{h_M}\right)$$

- (b) Quand l'eau déborde de la cheminée la hauteur  $h$  est bloquée à  $h_1$ , l'équation différentielle vérifiée par  $h$ , devient :

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \left(\frac{gs}{LS}\right) h_1 = 0 \Rightarrow \frac{d^2h}{dt^2} = -\left(\frac{gs}{LS}\right) h_1$$

$$V = \frac{S}{s} \frac{dh}{dt} \Rightarrow \dot{V} = -\frac{gh_1}{L}$$

- (c) Il s'ensuit que si l'on note  $t$  le temps au bout duquel la hauteur est  $h_1$  et  $V_1$  la vitesse du fluide correspondante :

$$V = V_1 - \frac{gh_1}{L} t$$

$V_1$  est donc donnée par :

$$V_1 = \frac{S}{s} \left(\frac{dh}{dt}\right)(t_1) = \frac{d}{s} \cos(\omega t_1)$$

Le temps  $t_2$  correspond au moment où la vitesse s'annule :

$$t_2 = \frac{V_1 L}{gh_1}$$

- (d) Le volume déversé pendant  $dt$  est donné par  $\delta\mathcal{V} = d \cdot dt = s \left(V_1 - \frac{gh_1 t}{L}\right) dt$ ,  
d'où :

$$\mathcal{V} = \int_0^{t_2} \left(V_1 - \frac{gh_1 t}{L}\right) s dt$$

$$\mathcal{V} = V_1 s t_2 - \frac{gh_1 s}{2L} t_2^2$$

4. (a) Le mouvement de l'eau dans la cheminée va être oscillatoire amorti à cause de la viscosité de l'eau dont on n'a pas tenu compte pour les calculs.

- (b) La fermeture de la vanne va engendrer une surpression importante de la part du fluide. Pour éviter cela, on place une cheminée qui permet, au moment de l'arrêt, de détourner le sens d'écoulement du fluide.

## ● 29 ————— Concours Mines-Ponts

1. Appliquons le théorème de la quantité de mouvement au tube de courant, le régime étant permanent :  $\frac{\partial}{\partial t} (\mu \vec{V}) = \vec{0}$ . Nous avons alors :

$$\oiint_S (\mu \vec{V}) \vec{V} \cdot d\vec{S} = \vec{F}_V$$

D'où :  $\vec{F}_V = \mu (V_s S_s \vec{V}_s - V_e S_e \vec{V}_e) = \mu D (\vec{V}_s - \vec{V}_e)$ , avec  $D = V_e S_e = V_s S_s$ .

De plus :  $\vec{F}_V = \vec{R} + \vec{f}$ , où  $\vec{f}$  représente les efforts extérieurs de pression sur le tube de courant et  $\vec{R}$ , la résultante des efforts qu'exerce l'éolienne sur le fluide.

En tout point extérieur du tube de courant  $P = P_0$ , ainsi qu'au niveau de  $S_e$  et  $S_s$ .

Il s'ensuit que  $\vec{f} = - \oiint_S P_0 d\vec{S} = \vec{0}$ .

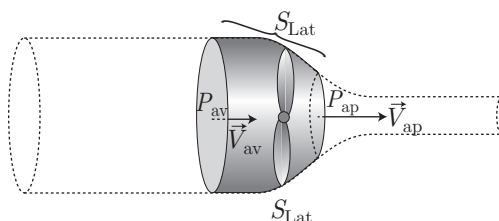
Donc la résultante est donnée par :

$$\vec{R} = \mu D (\vec{V}_s - \vec{V}_e)$$

2. Nous pouvons appliquer le théorème de la quantité de mouvement au volume élémentaire de section  $S$  qui contient l'éolienne :

$$\mu D (\vec{V}_{ap} - \vec{V}_{av}) = \vec{R} + \vec{f}$$

On note  $\vec{V}_{ap}$  et  $\vec{V}_{av}$  les vitesses du fluide au voisinage à droite et à gauche de l'hélice. Les sections avant  $S_{av}$  et après  $S_{ap}$ , sont quasi-égales à la surface  $S$ , la conservation du débit implique donc :  $\vec{V}_{ap} \simeq \vec{V}_{av}$ .



$\vec{f}$  représente les efforts de pression qui agissent sur ce volume élémentaire :

$$\vec{f} = S (P_{av} - P_{ap}) \vec{e}_x + \vec{f}_{Lat}$$

Etant donné que la surface latérale de ce volume est infiniment petite  $\vec{f}_{Lat} \simeq \vec{0}$ .

Nous avons donc :  $\vec{R} = \mu D (\vec{V}_{ap} - \vec{V}_{av}) - S (P_{av} - P_{ap}) \vec{e}_x$ .

En projection sur  $\vec{e}_x$ , nous obtenons :

$R = S (P_{ap} - P_{av})$ , il faut donc exprimer :  $(P_{ap} - P_{av})$ . Appliquons le théorème



de Bernoulli sur une ligne de courant avant l'hélice :

$$P_0 + \frac{\mu V_e^2}{2} = P_{av} + \frac{\mu V_{av}^2}{2}$$

$P_{av}$  et  $V_{av}$  sont la pression et la vitesse du fluide au voisinage à gauche de l'hélice. Tenons le même raisonnement sur une ligne de courant à droite de l'éolienne : on définira  $P_{ap}$  comme la pression au voisinage à droite de l'éolienne :

$$P_0 + \frac{\mu V_s^2}{2} = P_{ap} + \frac{\mu V_{ap}^2}{2}$$

La conservation du débit au niveau de l'éolienne implique :  $V_{av} = V_{ap}$ , d'où on déduit l'égalité :

$$P_{ap} - P_{av} = \frac{\mu}{2} (V_s^2 - V_e^2)$$

D'où :

$$R = \frac{\mu S}{2} (V_s^2 - V_e^2)$$

3. En identifiant les deux expressions de  $R$ , on obtient :

$$V_0 = \frac{V_e + V_s}{2}$$

4. Appliquons au système le théorème de l'énergie cinétique  $\frac{dE_C}{dt} = P$ . En régime permanent :

$$\frac{dE_C}{dt} = \oint_S \mu \frac{V^2}{2} \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

ce qui donne :

$$P = \frac{\mu}{2} (V_s^2 V_s S_s - V_e^2 V_e S_e) = \frac{\mu D}{2} (V_s^2 - V_e^2).$$

D'où :

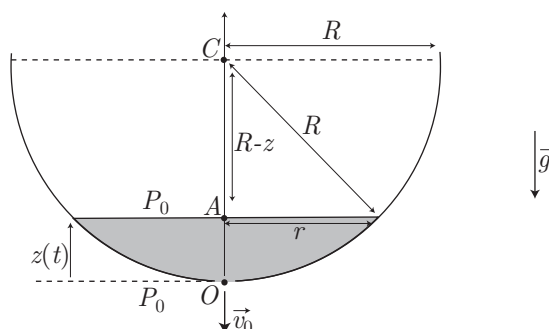
$$P = \frac{\mu S V_0}{2} (V_s^2 - V_e^2)$$

5. La puissance reçue par l'éolienne est donc égale à l'opposé de la quantité précédente :  $P' = \frac{\mu S V_0}{2} (V_e^2 - V_s^2)$ .

Nous pouvons écrire, puisque :  $V_0 = \frac{V_e + V_s}{2}$ , que :  $P = 2\mu S V_0^2 (V_e - V_0)$  ; la puissance sera maximale si :

$$\frac{dP}{dV_0} = 0 \Rightarrow V_e = \frac{3V_0}{2} \text{ et } V_s = \frac{V_0}{2}$$

● 30 ————— Lycée Janson de Sully, Paris



1. La conservation du débit impose  $v(z)S(z) = v_0 s$ ,  $v(z)$  étant la vitesse de la surface libre  $S(z)$ .

$$S(z) = \pi r^2 \text{ et } v(z) = -\dot{z} \Rightarrow v_0 = -\frac{1}{s}\pi r^2 \dot{z}$$

2. Le long d'une ligne de courant entre un point  $A$  de la surface libre  $S(z)$  et  $O$ , nous avons d'après la relation de Bernoulli :

$$p(z) + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = P_0 + \rho \frac{v_0^2}{2}$$

On a de plus :  $S(z) \gg s$  ce qui implique d'après la conservation du débit que  $v_0^2 \gg v^2(z)$ , de plus  $p(z) = P_0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gz}$

Remarquons aussi que  $r^2 = R^2 - (R - z)^2 \Rightarrow r^2 = z(2R - z)$  :

$$v_0 = -\frac{1}{s}\pi r^2 \dot{z} \Rightarrow \sqrt{2gz} = -\frac{\pi}{s}(2R - z) z \dot{z}$$

On en déduit la relation proposée par l'énoncé :  $\sqrt{z} \dot{z} (2R - z) = -\frac{s}{\pi} \sqrt{2g}$

3. Intégrons la relation obtenue par rapport au temps :

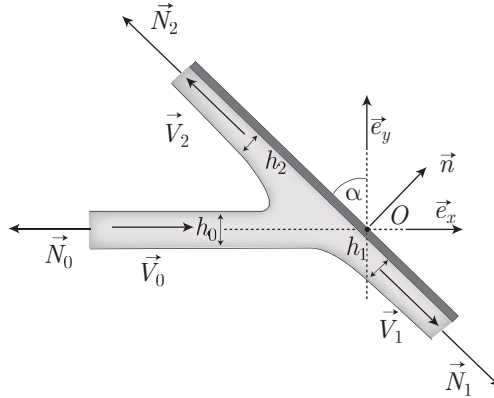
$$\int_R^z \sqrt{z} \dot{z} (2R - z) dz = - \int_0^t \frac{s}{\pi} \sqrt{2g}$$

$$\left[ \frac{4R}{3} z^{3/2} - \frac{2}{5} z^{5/2} \right]_R^z = -\frac{s}{\pi} \sqrt{2g} t, \text{ on déduit alors :}$$

$$t = \frac{\pi}{s\sqrt{2g}} \left( \frac{14}{15} R^{5/2} + \frac{2}{5} z^{5/2} - \frac{4R}{3} z^{3/2} \right)$$

Le réservoir sera vide lorsque  $z = 0$ , c'est à dire pour  $t = \frac{\pi}{s\sqrt{2g}} \frac{14}{15} R^{5/2}$

● 31 ————— Concours Commun Polytechnique



1. Le fluide étant incompressible, à travers toute surface  $S$  fermée :  $\oiint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$ .  
 Considérons la surface qui délimite les trois filets, en tout point ailleurs que  $h_0, h_1$  et  $h_2$ ,  $\vec{V} \cdot d\vec{S} = 0$ .  
 il s'ensuit :

$$\oiint_S \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iint_{h_0} \vec{V}_0 \cdot d\vec{S} + \iint_{h_1} \vec{V}_1 \cdot d\vec{S} + \iint_{h_2} \vec{V}_2 \cdot d\vec{S} = 0$$

Ce qui donne une première relation :

$$-V_0 h_0 + V_1 h_1 + V_2 h_2 = 0$$

Le fluide étant incompressible et l'écoulement irrotationnel et permanent, la relation de Bernoulli est vérifiée :

$$P + \mu \frac{V^2}{2} = \text{cte}$$

Nous pouvons appliquer cette dernière relation sur deux lignes de courant, situées chacune dans un filet différent :

$$P_0 + \frac{\mu V_0^2}{2} = P_0 + \frac{\mu V_1^2}{2} = P_0 + \frac{\mu V_2^2}{2}$$

Étant donné que l'on néglige les effets de la pesanteur, la pression dans toute section perpendiculaire à l'écoulement est constante et égale à  $P_0$ . Nous en déduisons :  $V_0 = V_1 = V_2$ , ce qui implique :

$$h_0 = h_1 + h_2$$

2. Appliquons à l'ensemble des trois filets le théorème de la quantité de mouvement :

$$\iiint_V \frac{\partial \rho \vec{V}}{\partial t} d\tau + \oiint_S (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot d\vec{S} = \vec{F}_V$$

$\vec{F}_V$  étant la résultante des efforts sur ce volume. D'après le principe des actions réciproques si on note  $\vec{R}$  la résultante des efforts du fluide sur la plaque, on

**CORRIGÉS**

a :  $\vec{R} = -\vec{F}_V$ . L'écoulement étant permanent cette équation se simplifie en :

$$\begin{aligned} \oiint_S (\mu \vec{V}) \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \vec{F}_V. \\ \oiint_S (\mu \vec{V}) \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \iint_{h_0} (\mu \vec{V}) \vec{V} \cdot d\vec{S} + \iint_{h_1} (\mu \vec{V}) \vec{V} \cdot d\vec{S} + \iint_{h_2} (\mu \vec{V}) \vec{V} \cdot d\vec{S}. \\ \oiint_S (\mu \vec{V}) \vec{V} \cdot d\vec{S} &= \mu V_0^2 (h_1 \vec{N}_1 + h_2 \vec{N}_2 + h_0 \vec{N}_0). \end{aligned}$$

D'où :

$$\vec{R} = -\mu V_0^2 (h_1 \vec{N}_1 + h_2 \vec{N}_2 + h_0 \vec{N}_0)$$

Le fluide est parfait, donc la composante de  $\vec{R}$  parallèle à la plaque est nulle. Cette condition implique :  $\vec{R} \cdot \vec{N}_2 = 0$ .

$\vec{R} \cdot \vec{N}_2 = \mu V^2 (h_0 \sin \alpha - h_1 + h_2)$ ,  $h_0$ ,  $h_1$  et  $h_2$  sont reliés par :

$$h_0 \sin \alpha = h_1 - h_2$$

D'où  $h_1 = \frac{h_0}{2} (1 + \sin \alpha)$  et  $h_2 = \frac{h_0}{2} (1 - \sin \alpha)$ .

3. La composante de la force qu'exerce le fluide sur la plaque est donc perpendiculaire à cette dernière, soit  $\vec{n} = \cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y$ , le vecteur normal à la plaque :

$$\vec{R} = (\vec{R} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

La force exercée par le fluide sur la plaque est donc donnée par :

$$\vec{R} = \mu V_0^2 h_0 \cos \alpha \vec{n}$$

### ● 32 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. Le fluide est parfait et incompressible, de plus l'écoulement est potentiel et permanent. Nous pouvons utiliser le théorème de Bernoulli :  $P + \frac{\mu V^2}{2} = \text{cte}$ .

La pesanteur n'apparaît pas puisqu'elle peut-être négligée.

En tout point de la sphère la vitesse du fluide s'écrit :

$$\vec{V}(r = R) = -\frac{3}{2} V_0 \sin \theta \vec{e}_\theta$$

On remarque que le fluide se comporte bien comme un fluide parfait : il glisse sur les obstacles. Appliquons le théorème de Bernoulli entre un point à l'infini et un point sur la sphère :

$$P(\infty) + \frac{\mu V^2(\infty)}{2} = P(R, \theta, \varphi) + \left( \frac{9\mu V_0^2}{8} \right) \sin^2 \theta$$

Avec  $P(\infty) = P_0$  et  $V(\infty) = V_0$ , nous en déduisons :

$$P(R, \theta, \varphi) = P_0 + \frac{\mu V_0^2}{2} \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right)$$

2. Chaque élément de surface de la sphère est soumis de la part du fluide à  $d\vec{F} = -P d\vec{S}$ .

Étant donné le profil de l'écoulement, la résultante des efforts de pression sera selon  $\vec{e}_z$ , ce qui donne :

$$\vec{F} = \iint_{\text{Sphère}} d\vec{F} = \left( \iint_{\text{Sphère}} d\vec{F} \cdot \vec{e}_z \right) \vec{e}_z.$$

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_z = - \iint_{\text{Sphère}} P \cos \theta dS.$$

$$\vec{F} \cdot \vec{e}_z = - \frac{\mu V_0^2}{2} \iint_{\text{Sphère}} \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right) \cos \theta dS - \iint_{\text{Sphère}} P_0 \cos \theta dS.$$

$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , on obtient, après intégration sur la variable  $\varphi$  :

$$F_z = -\mu\pi R^2 V_0^2 \int_0^\pi \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \theta \right) \cos \theta \sin \theta d\theta - 2\pi R^2 \int_0^\pi P_0 \cos \theta \sin \theta d\theta$$

Nous avons donc :

$$\vec{F} = \vec{0}$$

Dans le cas où le fluide est parfait il n'exerce aucune force sur la sphère : il glisse sans interaction sur cette dernière.

3. L'écoulement est désormais considéré comme visqueux. On constate qu'en tout point de la sphère, la vitesse du fluide est nulle ; contrairement au fluide parfait qui glissait sur les obstacles, le fluide réel s'accroche sur ces derniers.

Dans les deux cas lorsqu'on se place très loin du fluide :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{V} = V_0 \vec{e}_x$$

4. Le fluide est visqueux et l'écoulement étant potentiel et permanent, l'équation du mouvement pour une particule de fluide est donnée par :

$$\frac{\mu}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2 = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{V}$$

En négligeant le terme  $\frac{\mu}{2} \overrightarrow{\text{grad}} V^2$  par rapport à  $\eta \overrightarrow{\Delta} \vec{V}$ , puisque le nombre de Reynolds est très faible, on a l'équation :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \eta \overrightarrow{\Delta} \vec{V}$$

Avec  $\overrightarrow{\Delta} \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{V}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = -\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})$ , puisque le fluide est incompressible.

Pour exprimer la pression il faut résoudre :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = -\eta \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V})$$

Nous obtenons après calcul :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = -V_0 \sin \theta \left( \frac{3R}{2r^2} \right) \vec{e}_\varphi$$

et :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = -\frac{3RV_0}{2r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

Il s'ensuit :  $\vec{\text{grad}} P = \frac{3\eta RV_0}{2r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow P \text{ ne dépend pas de } \varphi \\ \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{3\eta RV_0}{r^3} \cos \theta \Rightarrow P = -\frac{3\eta RV_0}{2r^2} \cos \theta + f(\theta) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \frac{3\eta RV_0}{2r^3} \sin \theta = \frac{3\eta RV_0}{2r^3} \sin \theta + \frac{df}{d\theta} \Rightarrow \frac{df}{d\theta} = 0 \text{ ce qui implique } f(\theta) = \text{cte} = C. \end{cases}$$

La pression s'exprime donc :

$$P(R, \theta) = C - \frac{3\eta V_0}{2R} \cos \theta$$

Puisque  $\lim_{r \rightarrow \infty} P(r) = P_0 = C$ , alors  $C = P_0$ , ce qui donne, pour la pression :

$$P(R, \theta) = P_0 - \frac{3\eta V_0}{2R} \cos \theta$$

5. Comme pour la question 2

$$\vec{F} = - \oiint_{\text{Sphère}} P \, d\vec{S} = -P_0 \oiint_{\text{Sphère}} d\vec{S} + \frac{3\eta V_0}{2R} \oiint_{\text{Sphère}} \cos \theta \, d\vec{S}$$

Le premier terme est nul, et la force totale étant portée par  $\vec{e}_z$ , il reste :

$$\vec{F} = \frac{3\eta V_0}{2R} 2\pi R^2 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \vec{e}_z$$

$$\vec{F} = 2\eta\pi R V_0 \vec{e}_z$$

### ● 33 École de l'air

1. (a) Le nombre de Reynolds fait intervenir une dimension caractéristique de l'écoulement pour laquelle la vitesse de ce dernier doit varier de manière conséquente. Il s'agit ici de  $R$ . L'énoncé précise d'ailleurs, un peu plus loin, que la vitesse est indépendante de  $x$ .
- (b) Notons  $M$  la dimension d'une masse,  $T$ , la dimension d'un temps et  $L$  la dimension d'une longueur. Le nombre de Reynolds a donc pour dimension :  $M\gamma+1 L^{\alpha+\beta-\gamma-3} T^{-\beta-\gamma}$ . Pour que le nombre de Reynolds soit sans dimension, il faut donc que  $\gamma + 1 = \alpha + \beta - \gamma - 3 = -\beta - \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = -\gamma = 1$ . Le nombre de Reynolds s'exprime donc comme :

$$R_e = \frac{\mu V \ell}{\eta}$$

2. (a) La pesanteur intervient perpendiculairement à la direction de l'écoulement. Elle a pour conséquence des variations de pression perpendiculairement au tuyau. Donc, selon l'axe  $Oz$ , il y a compensation entre ce gradient de pression et l'action de la pesanteur.

- (b) Considérons un volume élémentaire de fluide  $d\tau = r dr d\theta dx$ .  
Les efforts de pression sont donnés par :

$$\delta \vec{f}_P = -\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau$$

Les efforts de viscosité sont quant à eux donnés par :

$$\delta \vec{f} = \eta d\theta dx \left( \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{r+dr} - \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right)_r \right) \vec{e}_x = \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) dr dx d\theta \vec{e}_x$$

En régime permanent, la somme de ces deux forces est nulle,  $\overrightarrow{\text{grad}} P$  n'a pas de composante sur  $\vec{e}_\theta$  et sur  $\vec{e}_r$ , on en déduit que la pression est indépendante de  $\theta$  et de  $r$ .

- (c) Nous avons donc l'égalité :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} P r dr d\theta dx + \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) dr dx d\theta \vec{e}_x = \vec{0}$$

Cette égalité projetée sur  $\vec{e}_x$ , donne :

$$r \frac{\partial P}{\partial x} = \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right)$$

- (d) Étant donné que  $\frac{\partial P}{\partial x}$ , ne dépend pas de  $x$  ( $V$  ne dépendant que de  $r$ ), la pression s'écrit  $P(x) = Ax + B$ , avec :

$$\begin{cases} P(0) = P_1 \Rightarrow B = P_1 \\ P(L) = P_2 \Rightarrow \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = B = \frac{P_2 - P_1}{L} \end{cases}$$

$$P(x) = \frac{P_2 - P_1}{L} x + P_1$$

- (e) Nous en déduisons donc que :

$$\begin{aligned} \frac{P_2 - P_1}{L} &= \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) = \frac{r(P_2 - P_1)}{\eta L} \\ &\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{r(P_2 - P_1)}{2\eta L} + \frac{C}{r} \end{aligned}$$

L'intégration de la relation précédente permet d'obtenir :

$$V(r) = \frac{r^2(P_2 - P_1)}{4\eta L} + C \ln r + D$$

La vitesse ne pouvant être infinie sur l'axe, on en déduit  $C = 0$ .

Le fluide étant réel sa vitesse doit être nulle au niveau de la conduite :

$$V(R) = 0 \Rightarrow D = -\frac{R^2(P_2 - P_1)}{4\eta L}, \text{ donc :}$$

$$V(r) = \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L} (R^2 - r^2)$$

La vitesse moyenne est donnée par :  $V_m = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{S=\pi R^2} V \, dS$ .

$$V_m = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{S=\pi R^2} \frac{(P_1 - P_2)}{4\eta L} (R^2 - r^2) r \, dr \, d\theta = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\eta L}.$$

Le débit volumique dans le cylindre est :

$$D_V = \pi R^2 V_m = \frac{(P_1 - P_2)\pi R^4}{4\eta L}$$

- (f) L'impédance se définit comme le rapport d'une cause sur une conséquence (excitation sur réponse), l'exemple classique en électricité est celui de la résistance d'un conducteur ohmique qui s'écrit  $R = \frac{U}{I}$ . La tension représente l'excitation et le courant la réponse à l'excitation. La différence de pression justifie l'écoulement du fluide. On peut définir :

$$K = \frac{P_1 - P_2}{D_V} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

- (g) Le travail des forces de pression est donné, dans le cas général, par  $\delta W = -P \, d\tau$ . Il se décompose ici en deux termes, un pour l'entrée de la conduite :

$$\delta W_e = \int_0^R P_1 V(r) 2\pi r \, dr \, dt$$

Et un pour la sortie :

$$\delta W_s = \int_0^R -P_2 V(r) 2\pi r \, dr \, dt$$

Le travail élémentaire total est donc :  $\delta W = \int_0^R (P_1 - P_2) 2\pi r \, dr V(r) \, dt$ .

La puissance des efforts de pression est donc donnée par :

$$P_P = \frac{\delta W}{dt} = \int_0^R (P_1 - P_2) 2\pi r V(r) \, dr$$

$$P_P = \frac{(P_1 - P_2)^2 \pi R^4}{8\eta L}$$

En régime permanent, il y a compensation entre la puissance de efforts de pression et ceux de viscosité :  $P_V = -P_P$ .

$$P_V = -\frac{(P_1 - P_2)^2 \pi R^4}{8\eta L} = -\frac{(P_1 - P_2)^2}{K}$$

3. (a) Si on peut négliger le débit d'eau, alors la pression suit approximativement les lois de l'hydrostatique :

$$P_1 = P_0 + \mu_{\text{eau}} g h = 3,5 \cdot 10^5 \text{ Pa.}$$



(b) Le débit est donné par :  $D_V = \frac{P_2 - P_1}{K} = 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ , ce qui correspond à un litre par seconde.

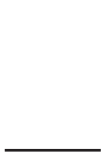
La vitesse maximale vaut  $V_{\text{max}} = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

(c) La puissance dissipée par viscosité vaut :

$$P_V = -\frac{(P_1 - P_2)^2}{K} = -250 \text{ W}.$$

L'élévation de température est donnée, d'après les lois de la thermodynamique par :

$$\mu_{\text{eau}} D_V c_{\text{eau}} \delta T = -P_V \Rightarrow \delta T = 0,06 \text{ K}, \text{ ce qui est faible.}$$



## Chapitre 2

# Électrocinétique - Électronique

### 2.1 Décomposition d'un signal en série de Fourier

#### 2.1.1 Les signaux périodiques

**Définition 1** Un signal  $s(t)$  est dit périodique s'il existe un nombre  $T$  tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, s(t + T) = s(t)$$

**Définition 2** On appelle période du signal  $s(t)$  la plus petite valeur  $T_0$  de  $T$  qui assure l'égalité précédente.

Remarque – Un signal périodique, de période  $T_0$ , vérifie :

$$s(t + nT_0) = s(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{Z}$$

**Définition 3** La pulsation d'un signal périodique, de période  $T_0$ , est définie par :

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0} \quad (\omega \text{ en Hz et } T_0 \text{ en s}).$$

La valeur moyenne d'un signal périodique  $s(t)$ , sur une période  $T_0$ , se calcule par :

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} s(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) dt$$

tandis que sa valeur efficace vaut :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle}$$

### 2.1.2 Série de Fourier

**Définition 4** À un signal périodique  $s(t)$ , de période  $T_0$ , on associe une série de Fourier :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \text{ où } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

dans laquelle les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  se calculent à l'aide des intégrales :

$$a_0 = \langle s \rangle = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} s(t) dt$$

$$a_{n \neq 0} = \frac{2}{T_0} \int_t^{t+T_0} s(t) \times \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_{n \neq 0} = \frac{2}{T_0} \int_t^{t+T_0} s(t) \times \sin(n\omega_0 t) dt$$

#### Théorème de Fourier

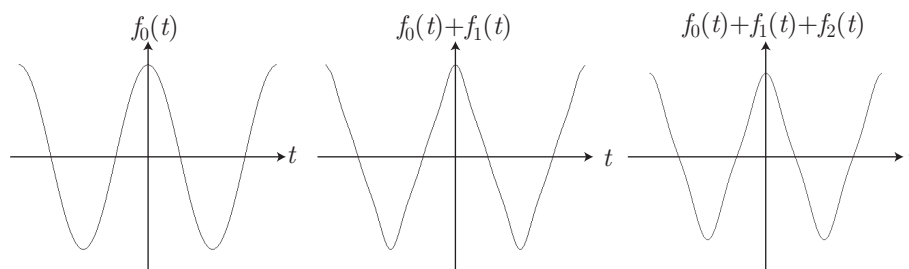
En tout point où  $s(t)$  est continu :  $s(t) = S(t)$ .

Si  $s(t)$  est discontinu en  $t = \tau$  :

$$S(\tau) = \frac{1}{2} \left[ \lim_{t \rightarrow \tau^-} s(t) + \lim_{t \rightarrow \tau^+} s(t) \right]$$

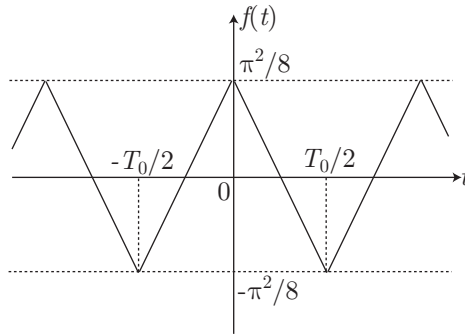
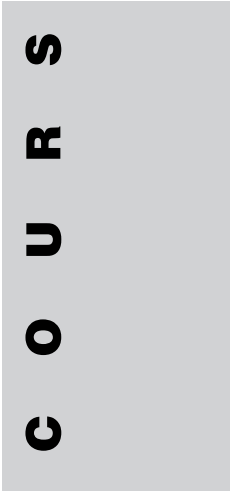
Par exemple, on peut s'intéresser à la somme :

$$S(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos[(2p+1)\omega t] = \sum_{p=0}^{\infty} f_p(t)$$



Ces représentations graphiques révèlent que la superposition des signaux  $f_0(t), f_1(t), \dots$  permet de générer une fonction  $f(t)$  périodique, de période  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$ , définie par :

$$\begin{cases} f(t) = \frac{\pi^2}{8} \left( 1 - \frac{4t}{T_0} \right) \text{ pour } t \in \left[ 0, \frac{T_0}{2} \right] \\ f(t) = \frac{\pi^2}{8} \left( 1 + \frac{4t}{T_0} \right) \text{ pour } t \in \left[ -\frac{T_0}{2}, 0 \right] \end{cases}$$



**Définition 5** Dans la série de Fourier :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

le terme d'ordre 1 :  $a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t)$  est appelé terme fondamental, tandis que les termes d'ordre  $n > 1$  sont appelés harmoniques de rang  $n$ .

### 2.1.3 Propriétés

Si la fonction  $s(t)$  est paire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0 \text{ car } s(t) = s(-t)$$

alors que si  $s(t)$  est impaire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0 \text{ car } s(-t) = -s(t)$$

On pourra également utiliser la *formule de Parseval* en vue calculer la valeur efficace  $S_{\text{eff}}$  d'un signal  $s(t)$  périodique et continu :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} \text{ avec } \langle s^2 \rangle = \frac{1}{T_0} \int_t^{t+T_0} s^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

### 2.1.4 Décomposition des signaux usuels

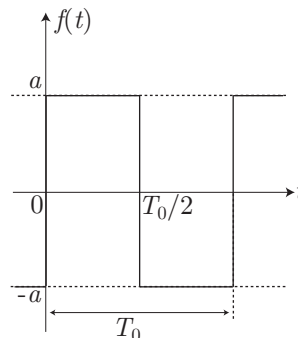
- LA FONCTION CRÉNEAUX

Elle est définie par :

$$\begin{cases} s(t) = a \text{ pour } 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ s(t) = -a \text{ pour } \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

Ce signal a pour série de Fourier (avec  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ) :

$$S(t) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \times \sin[(2n+1)\omega_0 t]$$



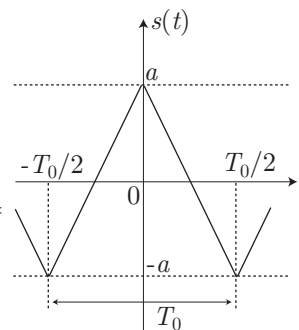
• LA FONCTION DENTS DE SCIE

Défini par :

$$\begin{cases} s(t) = a - \frac{4a}{T_0} \times t \text{ pour } t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right] \\ s(t) = a + \frac{4a}{T_0} \times t \text{ pour } t \in \left[-\frac{T_0}{2}, 0\right] \end{cases}$$

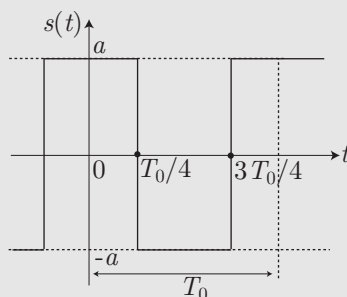
ce signal admet pour série de Fourier (avec  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ) :

$$S(t) = \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \cos[(2n+1)\omega_0 t]$$



On considère le signal périodique, de période  $T_0$ , défini par :

$$\begin{cases} s(t) = a \text{ pour } t \in \left[0, \frac{T_0}{4}\right] \cup \left[\frac{3T_0}{4}, T_0\right] \\ s(t) = -a \text{ pour } t \in \left[\frac{T_0}{4}, \frac{3T_0}{4}\right] \end{cases}$$



1. (a) Déterminer la série de Fourier  $S(t)$  associée à ce signal.
- (b) En déduire l'expression de la valeur efficace  $S_{\text{eff}}$  de  $s(t)$ .

On rappelle que :  $8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \pi^2$  ;

- (c) Comparer le résultat à celui que donnerait un calcul direct de  $\langle s^2 \rangle$ .

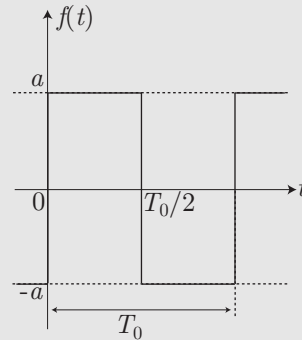
2. On rappelle que le signal périodique défini par :

$$\begin{cases} f(t) = a \text{ pour } t \in \left[0, \frac{T_0}{2}\right] \\ f(t) = -a \text{ pour } t \in \left[\frac{T_0}{2}, T_0\right] \end{cases}$$

est associé à la série de Fourier (où  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ) :

$$F(t) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\omega_0 t]}{2n+1}$$

Montrer que  $S\left(t - \frac{T_0}{4}\right) = F(t)$  et conclure.



### RÉPONSE

1. (a) La fonction  $s(t)$  étant paire, il s'ensuit que  $b_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ . D'autre part :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) dt = \frac{1}{T_0} \left\{ \int_0^{T_0/4} a dt + \int_{T_0/4}^{3T_0/4} -a dt + \int_{3T_0/4}^{T_0} a dt \right\} \\ &= \frac{a}{T_0} \left\{ \frac{T_0}{4} - \left( \frac{3T_0}{4} - \frac{T_0}{4} \right) + \left( T_0 - \frac{3T_0}{4} \right) \right\} = 0 \end{aligned}$$

et, pour  $n \neq 0$ , en posant  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} s(t) \cos(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \left\{ \int_0^{T_0/4} a \cos(n\omega_0 t) dt + \int_{T_0/4}^{3T_0/4} -a \cos(n\omega_0 t) dt + \int_{3T_0/4}^{T_0} a \cos(n\omega_0 t) dt \right\} \\ &= \frac{2a}{n\omega_0 T_0} \left\{ [\sin(n\omega_0 t)]_0^{T_0/4} - [\sin(n\omega_0 t)]_{T_0/4}^{3T_0/4} + [\sin(n\omega_0 t)]_{3T_0/4}^{T_0} \right\} \\ &= \frac{2a}{2n\pi} \left\{ \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \left[ \sin\left(n \times \frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) \right] - \sin\left(n \times \frac{3\pi}{2}\right) \right\} \\ &= \frac{2a}{n\pi} \times \left\{ \sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(n \times \frac{3\pi}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

Il convient ici de distinguer deux cas :

- Si  $n \in \mathbb{N}^*$  est pair, il existe un nombre  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n = 2p$ . Aussi :

$$\sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \sin(p\pi) = 0 \text{ et } \sin\left(n \times \frac{3\pi}{2}\right) = \sin(3p\pi) = 0$$

de sorte que  $a_{2p} = 0$ .

- Si  $n \in \mathbb{N}^*$  est impair, il existe un nombre  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2p + 1$ . Ce faisant :

$$\sin\left(n \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[(2p+1) \frac{\pi}{2}\right] = (-1)^p$$

et :

$$\begin{aligned} \sin\left(n \times \frac{3\pi}{2}\right) &= \sin\left[(2p+1) \times \frac{3\pi}{2}\right] = \sin\left[(2p+1) \frac{\pi}{2} + (2p+1)\pi\right] \\ &= -\sin\left[(2p+1) \frac{\pi}{2}\right] = -(-1)^p \end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$a_{2p+1} = \frac{2a}{(2p+1)\pi} [(-1)^p + (-1)^p] = \frac{4a}{(2p+1)\pi} \times (-1)^p$$

Par conséquent, le signal  $s(t)$  admet pour série de Fourier :

$$S(t) = \frac{4a}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} \cos[(2p+1)\omega_0 t]$$

(b) La formule de Parseval donne immédiatement :

$$\langle s^2 \rangle = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

où  $a_0 = 0$ ,  $b_n = 0$ ,  $a_{2p} = 0$  et  $a_{2p+1} = \frac{4a}{(2p+1)\pi} \times (-1)^p$  conduisent à :

$$\langle s^2 \rangle = \frac{1}{2} \times \frac{16a^2}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2p}}{(2p+1)^2} = \frac{8a^2}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'identité :  $8 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \pi^2$  :

$$\langle s^2 \rangle = a^2 \Rightarrow S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = a$$

(c) Un calcul direct de  $S_{\text{eff}}$  requiert l'évaluation de la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} \langle s^2 \rangle &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} s^2(t) dt \text{ où } s^2(t) = a^2 \\ &= a^2 \Rightarrow S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2 \rangle} = a \end{aligned}$$

2. L'expression de  $S(t)$  :

$$S(t) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos[(2n+1)\omega_0 t]$$

conduit à :

$$S\left(t - \frac{T_0}{4}\right) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos\left[(2n+1)\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

où :

$$\cos\left[x - (2n+1)\frac{\pi}{2}\right] = (-1)^n \sin(x)$$

fournit :

$$S\left(t - \frac{T_0}{4}\right) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)\omega_0 t]}{2n+1} = F(t)$$

ce qui montre que la courbe représentative de  $F(t)$  est obtenue par une translation de  $+\frac{T_0}{4}$  de celle de la fonction  $S(t)$ .

### 2.1.5 Spectre en fréquence d'un signal

Lorsque le signal périodique  $s(t)$  est continu, le théorème de Fourier stipule que :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

où :

$$\begin{aligned} &a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[ \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(n\omega t) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(n\omega t) \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant :



$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \cos \phi_n = \frac{a_n}{c_n} \quad \sin \phi_n = \frac{b_n}{c_n}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) &= c_n [\cos \phi_n \cos(\omega t) + \sin \phi_n \sin(\omega t)] \\ &= c_n \cos(n\omega t - \phi_n) \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t - \phi_n)$$

**Définition 6** On appelle spectre en fréquence du signal  $s(t)$  le diagramme en bâtons figurant  $c_n$  pour chaque valeur de  $n$ .

Remarque – Pour un signal physiquement réalisable :

$$\exists k \in \mathbb{N}^* / c_n = 0 \quad \forall n > k$$

ce qui rend compte de l'impossibilité matérielle de générer des signaux de fréquence aussi grande que souhaitée.



Le signal périodique défini par :

$$\begin{cases} s(t) = a \text{ pour } 0 \leq t < \frac{T_0}{2} \\ s(t) = -a \text{ pour } \frac{T_0}{2} \leq t < T_0 \end{cases}$$

admet pour série de Fourier :

$$S(t) = \frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin[(2n+1)\omega_0 t] \text{ avec } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

Tracer le spectre en fréquence de ce signal.

Deux signaux sinusoïdaux :  $s_1(t) = A_1 \cos(2\omega_0 t)$  et  $s_2(t) = A_2 \cos(\omega_0 t)$  sont envoyés à l'entrée d'un multiplieur qui fournit une sortie :  $s(t) = \alpha s_1(t) \times s_2(t)$ , où  $\alpha$  est une constante positive.

Tracer le spectre en fréquence de  $s(t)$ , en limitant les calculs.

#### RÉPONSE

1. Le signal  $s(t)$  a pour série de Fourier :

$$S(t) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} \sin(2n\omega_0 t) + \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n+1} \sin[(2n+1)\omega_0 t]$$

où :

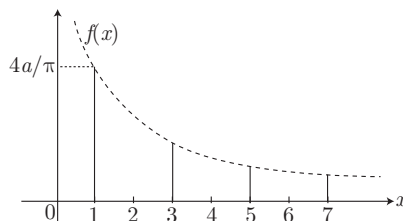
$$a_0 = 0 \quad a_n = 0 \quad b_{2n} = 0 \quad b_{2n+1} = \frac{4a}{\pi} \times \frac{1}{2n+1}$$

Aussi, en définissant les coefficients  $c_n$  par  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , on obtient :

$$c_{2n} = \sqrt{a_{2n}^2 + b_{2n}^2} = 0 \text{ et } c_{2n+1} = \frac{4a}{\pi} \times \frac{1}{2n+1}$$

Pour obtenir le spectre en fréquence de ce signal, il suffit de tracer la fonction  $f(x) = \frac{4a}{\pi x}$  et de représenter les « bâtons » correspondant à :

$$c_0 = 0 \quad c_1 = f(1) \quad c_2 = 0 \quad c_3 = f(3) \dots$$



2. Le multiplieur produit le signal :

$$s(t) = \alpha s_1(t) \times s_2(t) = \alpha A_1 A_2 \times \cos(2\omega_0 t) \cos(\omega_0 t)$$

Afin d'éviter le laborieux calcul des coefficients  $a_n$  et  $b_n$  de la série de Fourier, on peut simplement remarquer que :

$$\cos(2\omega_0 t) \cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} [\cos(2\omega_0 t - \omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 t)]$$

c'est-à-dire :

$$s(t) = \frac{\alpha A_1 A_2}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha A_1 A_2}{2} \cos(3\omega_0 t)$$

Aussi, la série de Fourier associée :

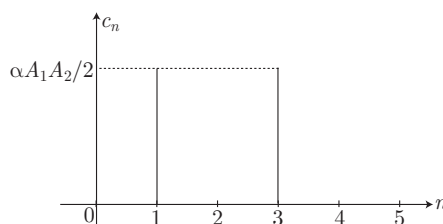
$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

admet pour coefficients :

$$a_0 = 0 \quad a_1 = \frac{\alpha A_1 A_2}{2} \quad a_2 = 0 \quad a_3 = \frac{\alpha A_1 A_2}{2} \quad a_{n \geq 4} = 0 \quad b_n = 0$$

auquel cas, les coefficients  $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  valent :

$$c_0 = 0 \quad c_1 = \frac{\alpha A_1 A_2}{2} \quad c_2 = 0 \quad c_3 = \frac{\alpha A_1 A_2}{2} \quad c_{n \geq 4} = 0$$

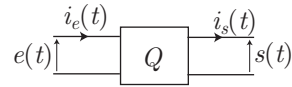


## 2.2 Systèmes électroniques linéaires

### 2.2.1 Quadripôles linéaires

Un quadripôle est un système à deux bornes d'entrée et à deux bornes de sortie, caractérisé par :

- sa tension d'entrée  $e(t)$  ;
- sa tension de sortie  $s(t)$  ;
- son courant d'entrée  $i_e(t)$  ;
- son courant de sortie  $i_s(t)$ .



**Définition 7** La sortie du quadripôle est dite ouverte si  $i_s(t) = 0$ , ce qui signifie aussi que la charge en sortie est infinie.

Soient  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  deux signaux d'entrée qui induisent les tensions respectives  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$  en sortie de  $Q$ . Le quadripôle est dit linéaire si, à une entrée :  $e(t) = \lambda e_1(t) + \beta e_2(t)$ ,  $(\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$ , est associée une tension de sortie :

$$s(t) = \lambda s_1(t) + \beta s_2(t), (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Pour assurer la linéarité du quadripôle, les signaux  $e(t)$  et  $s(t)$  doivent être liés par une équation différentielle linéaire :

$$a_0 e + a_1 \frac{de}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n e}{dt^n} = b_0 s + b_1 \frac{ds}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m s}{dt^m} \quad (1)$$

dont l'ordre sup  $\{m, n\}$  est aussi celui du quadripôle. Ce cours sera limité aux quadripôles d'ordre 1 et d'ordre 2.

Lorsque le signal  $e(t)$  est sinusoïdal :  $e(t) = E \cos(\omega t)$ , celui de sortie du quadripôle est la superposition d'un signal sinusoïdal :  $s_1(t) = S \cos(\omega t + \phi)$  et d'une solution  $s_2(t)$  de l'équation différentielle (1) dans laquelle  $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0$  :

$$s(t) = S \cos(\omega t + \phi) + s_2(t)$$

Cette dernière, caractéristique des régimes transitoires, tend rapidement vers zéro ; le régime sinusoïdal permanent est établi, pour lequel on retiendra que :

$$e(t) = E \cos(\omega t) \Rightarrow s(t) = S \cos(\omega t + \phi)$$

On remarquera que ces deux signaux présentent la même pulsation  $\omega$ .

## 2.2.2 Fonction de transfert et diagramme de Bode

Aux signaux sinusoïdaux  $e(t)$  et  $s(t)$  on associe les images complexes :

$$\underline{e} = E e^{j\omega t} \text{ et } \underline{s} = S e^{j(\omega t + \phi)}$$

telles que :

$$e(t) = \text{Re} \{ \underline{e} \} \text{ et } s(t) = \text{Re} \{ \underline{s} \}$$

Remarque – En notation complexe, on peut s'assurer que :

$$\frac{d^k \underline{e}}{dt^k} = (j\omega)^k \underline{e} \text{ et } \frac{d^k \underline{s}}{dt^k} = (j\omega)^k \underline{s}$$

de sorte que l'équation (1), limitée à l'ordre 2, devient en notation complexe :

$$a_0 \underline{e} + a_1 \times j\omega \underline{e} + a_2 \times (j\omega)^2 \underline{e} = b_0 \underline{s} + b_1 \times j\omega \underline{s} + b_2 \times (j\omega)^2 \underline{s} \quad (2)$$

**Définition 8** On appelle fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  le rapport :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$$

En notation polaire :  $\underline{H}(j\omega) = H(\omega) e^{j\phi}$  permet de poser :

$$\frac{S}{E} = H(\omega) = |\underline{H}| \text{ et } \phi = \arg \{ \underline{H} \}$$

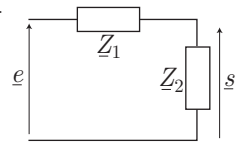
La relation (2) montre que  $\underline{H}(j\omega)$  peut se présenter sous forme d'un rapport de deux polynômes de  $j\omega$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 \times j\omega + a_2 \times (j\omega)^2}{b_0 + b_1 \times j\omega + b_2 \times (j\omega)^2}$$

Pour calculer la fonction de transfert d'un montage, on aura souvent recours à la loi du pont diviseur de tension :



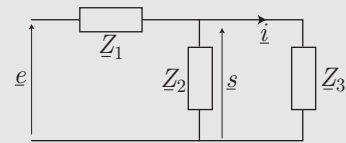
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$



**⚠** Le conseil méthodologique précédent ne prévaut que si, entre  $Z_1$  et  $Z_2$ , aucun courant ne s'échappe.

Dans le cas contraire, on aura intérêt à regrouper  $Z_2$  et  $Z_3$  en une impédance équivalente :

$$Z_e = \frac{Z_2 \times Z_3}{Z_2 + Z_3} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{Z_e}{Z_1 + Z_e}$$



**Définition 9** On appelle gain en décibels la grandeur :

$$G_{dB} = 20 \times \log |\underline{H}(j\omega)|$$

La représentation (ou diagramme) de Bode consiste à représenter une grandeur caractéristique d'un montage en fonction de  $\log \omega$ . On obtient ainsi :

- le diagramme de Bode en amplitude :  $G_{dB} = f(\log \omega)$  ;
- le diagramme de Bode en phase :  $\phi = f(\log \omega)$ .



On obtient l'allure du diagramme de Bode en amplitude par le tracé de ses asymptotes (pour  $\omega$  tendant respectivement vers zéro ou vers l'infini) ; ce tracé requiert la mise de  $G_{dB}$  sous une forme linéaire de  $\log \omega$  :

$$G_{dB} \simeq \alpha + \beta \times \log \omega$$

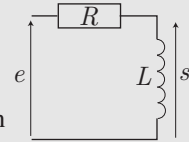
lorsque  $\omega$  tend vers zéro ou l'infini.



On s'intéresse au quadripôle représenté ci-dessous :

- Donner l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$  de ce circuit et la présenter sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}}$$



où  $\omega_0$  est une pulsation caractéristique que l'on exprimera en fonction de  $R$  et  $L$ .

- Représenter le diagramme de Bode en amplitude de ce montage.

### RÉPONSE

- La loi du pont diviseur de tension donne immédiatement :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{L\omega j}{L\omega j + R} = \frac{1}{1 + \frac{R}{L\omega j}} = \frac{1}{1 - j \frac{R}{L\omega}}$$

c'est-à-dire, en posant :  $\omega_0 = \frac{R}{L}$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}}$$

- Le module de la fonction de transfert :

$$H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2}$$

conduit à l'expression du gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log [H(\omega)] = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]$$

Deux cas doivent alors mener à l'expression des asymptotes du diagramme de Bode :

- Lorsque  $\omega \ll \omega_0$  :

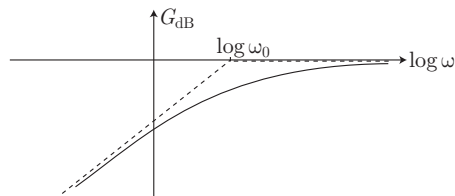
$$\frac{\omega_0}{\omega} \gg 1 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \simeq \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \Rightarrow G_{dB} \simeq -20 \log \omega_0 + 20 \log \omega$$

La représentation graphique de  $G_{dB}$  en fonction de  $\log \omega$  est alors une droite de pente positive (+20 décibels par décade).

- lorsque  $\omega \gg \omega_0$  :

$$\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \simeq 1 \Rightarrow G_{dB} \simeq 0$$

La connaissance de ces asymptotes suggère l'allure du diagramme de Bode :





La représentation graphique du diagramme de Bode en phase s'obtient souvent en calculant les limites de  $\tan \phi = \frac{\text{Im}\{H\}}{\text{Re}\{H\}}$  ou de  $\cos \phi = \frac{\text{Re}\{H\}}{H(\omega)}$  et  $\sin \phi = \frac{\text{Im}\{H\}}{H(\omega)}$ . Cependant, il arrive que les limites de  $\tan \phi$ ,  $\cos \phi$  et  $\sin \phi$  ne donnent pas une idée claire des variations de  $\phi$ . Dans ce cas, l'étude des limites peut porter sur :

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{1}{\tan \phi}$$

**Définition 10** Si  $H_{\max}$  et  $G_{dB}^{(max)}$  désignent respectivement les valeurs maximales de  $H(\omega)$  et de  $G_{dB}(\omega)$ , on définit la (ou les) pulsation(s) de coupure  $\omega_c$  comme la (les) solution(s) des deux équations suivantes, au demeurant équivalentes :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \text{ ou } G_{dB}(\omega_c) = G_{dB}^{(max)} - 3 \text{ dB}$$

**Définition 11** La bande passante désigne l'intervalle  $I$  de pulsations (ou de fréquences) telles que :

$$\forall \omega \in I, H(\omega) \geq \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

ou, ce qui est équivalent :

$$\forall \omega \in I, G_{dB} \geq G_{dB}^{(max)} - 3 \text{ dB}$$

### 2.2.3 Signal d'entrée non sinusoïdal

Soit un signal  $e(t)$ , non sinusoïdal, imposé à l'entrée d'un quadripôle linéaire dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

$e(t)$  admet pour décomposition de Fourier :

$$\begin{aligned} e(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \text{Re}\{e^{jn\omega_0 t}\} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Re}\{-j e^{jn\omega_0 t}\} \\ &= \text{Re}\left\{a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{jn\omega_0 t} - \sum_{n=1}^{\infty} j b_n e^{jn\omega_0 t}\right\} \end{aligned}$$

On peut ainsi associer à  $e(t)$  une image complexe  $\underline{e}$  telle que  $e(t) = \text{Re}\{\underline{e}\}$ , avec :

$$\underline{e} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t}$$

d'où ressort la série de Fourier en notation complexe :

$$\underline{e} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{c}_n e^{jn\omega_0 t}$$

dans laquelle :

$$\begin{aligned} \underline{c}_n &= a_n - jb_n = \frac{2}{T_0} \int_t^{t+T_0} e(t) [\cos(n\omega_0 t) - j \sin(n\omega_0 t)] dt \\ \Rightarrow \underline{c}_n &= \frac{2}{T_0} \int_t^{t+T_0} e(t) \times e^{-jn\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

Remarque – En présentant  $\underline{c}_n$  sous sa forme polaire :

$$\underline{c}_n = c_n e^{j\varphi_n} \text{ avec } c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ et } \varphi_n = \arctan\left(-\frac{b_n}{a_n}\right)$$

l'image complexe  $\underline{e}$  se présente également sous la forme :

$$\underline{e} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)}$$

Étant donné que  $\underline{e}$  se présente comme une superposition de signaux  $\underline{e}_0 = a_0$  et  $\underline{e}_{n \neq 0} = c_n e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)}$ , la linéarité du quadripôle impose qu'à chacun de ces signaux correspond un signal  $\underline{s}_n = \underline{H}(jn\omega_0) \underline{e}_n$ , c'est-à-dire :

$$\underline{s}_0 = \underline{H}(0) \times a_0 = H(0) e^{j\phi(0)} \times a_0$$

et :

$$\underline{s}_{n>0} = \underline{H}(jn\omega_0) c_n e^{j(n\omega_0 t + \varphi_n)} = H(n\omega_0) c_n e^{j[n\omega_0 t + \varphi_n + \phi(n\omega_0)]}$$

Ce faisant, le quadripôle fournit un signal  $s(t)$  d'image complexe :

$$\underline{s} = \underline{s}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{s}_n \Rightarrow \underline{s} = H(0) a_0 e^{j\phi(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} H(n\omega_0) c_n e^{j(n\omega_0 t + \psi_n)}$$

où  $\psi_n = \varphi_n + \phi(n\omega_0)$

Enfin, la définition de  $\underline{s}$  permet d'établir que :

$$s(t) = \text{Re}\{\underline{s}\} = H(0) a_0 \cos[\phi(0)] + \sum_{n=1}^{\infty} H(n\omega_0) c_n \cos(n\omega_0 t + \psi_n)$$

 Un signal :

$$s(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^2 \frac{1}{2p+1} \sin(\omega_p t) \text{ où } \omega_p = (2p+1)\omega_0$$

est envoyé à l'entrée d'un quadripôle de fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$ .

1. Lorsque  $\underline{H}(j\omega) = e^{j\omega\tau}$  ( $\tau$  est une constante), quelle opération effectuée ce quadripôle ?
2. Peut-on en dire autant lorsque  $\underline{H}(j\omega) = e^{j\theta}$  ( $\theta$  est une constante) ?

#### RÉPONSE

1. En notation complexe, le signal  $s(t)$  admet comme image :

$$\underline{s} = \frac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^2 \frac{1}{2p+1} e^{j(\omega_p t - \pi/2)} \text{ avec } \text{Re}\{\underline{s}\} = s(t)$$

Chacune des composantes de cette série est soumise à l'action du quadripôle, ce qui se traduit par un signal de sortie :

$$\underline{u} = \frac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^2 \frac{1}{2p+1} \underline{H}(j\omega_p) e^{j(\omega_p t - \pi/2)} = \frac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^2 \frac{1}{2p+1} e^{j[\omega_p(t+\tau) - \pi/2]}$$

de partie réelle :

$$u(t) = \text{Re}\{\underline{u}\} = \frac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^2 \frac{1}{2p+1} \sin[\omega_p(t+\tau)]$$

soit encore :

$$u(t) = s(t+\tau)$$

Ce circuit réalise donc une translation du signal électrique dans le temps ; il s'agit d'un *filtre à retard*.

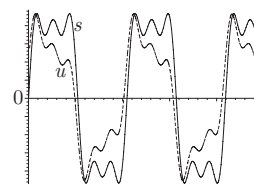
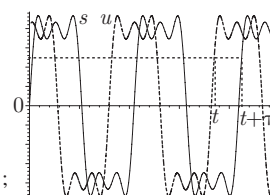
2. En revanche, lorsque la fonction de transfert vaut  $\underline{H} = e^{j\theta}$ , le signal de sortie :

$$\underline{u} = \frac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^2 \frac{e^{j\theta}}{2p+1} e^{j(\omega_p t - \pi/2)} = \frac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^2 \frac{1}{2p+1} e^{j(\omega_p t + \theta - \pi/2)}$$

admet pour partie réelle :

$$u(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{p=0}^2 \frac{\sin(\omega_p t + \theta)}{2p+1}$$

Un tel circuit ne réalise donc pas un opérateur simple.



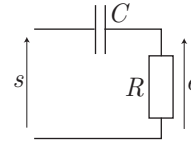
## 2.2.4 Filtres passifs

### 2.2.4.1 Filtre passe-haut d'ordre 1

Le montage représenté ci-dessous réalise un filtre passe-bas d'ordre 1, dont la fonction de transfert s'écrit (en posant  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ ) :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 - j\frac{\omega_0}{\omega}}$$



soit encore :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} e^{j\varphi} \text{ où } \tan \varphi = \frac{\omega_0}{\omega}$$

Le gain en décibels est alors défini par :

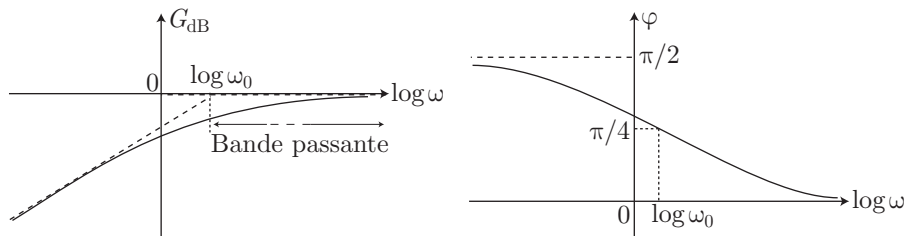
$$G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = -10 \log \left[ 1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \right]$$

Le diagramme de Bode en amplitude s'obtient à l'aide de l'expression des asymptotes :

$$\begin{cases} G_{dB}(\omega \ll \omega_0) \simeq 20 \log \omega - 20 \log \omega_0 \\ G_{dB}(\omega \gg \omega_0) \simeq 0 \end{cases}$$

tandis que celui en déphasage s'obtient à l'aide des limites :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \ll \omega_0} [\tan \varphi] = \infty \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} [\tan \varphi] = 1 \\ \lim_{\omega \gg \omega_0} [\tan \varphi] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \ll \omega_0} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \varphi = \frac{\pi}{4} \\ \lim_{\omega \gg \omega_0} \varphi = 0 \end{cases}$$



La pulsation de coupure à 3 dB,  $\omega_c$ , solution de l'équation :

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega_c) &= G_{dB}^{(max)} - 3 \text{ dB} = 0 - 10 \log 2 \\ &= -10 \log \left[ 1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2 \right] = -10 \log 2 \\ &\Rightarrow \omega_c = \omega_0 \end{aligned}$$

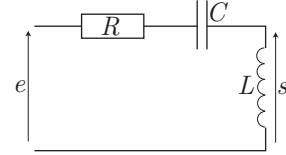
permet d'exprimer la bande passante :

$$\forall \omega \in [\omega_0, \infty[, G_{dB}(\omega) \geq G_{dB}^{(max)} - 3 \text{ dB}$$

### 2.2.4.2 Filtre passe-haut d'ordre 2

Un tel montage peut être réalisé à l'aide du circuit représenté ci-contre, dont on s'assurera aisément que la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \times \frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{j}{Q} \frac{\omega_0}{\omega}}$$



à condition de poser :  $H_0 = 1$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ .

Le module et l'argument de  $\underline{H}(j\omega)$  valent respectivement :

$$H(\omega) = H_0 \times \left[ \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2} \right]^{-1/2} \quad \text{et} \quad \phi = \arctan \left[ \frac{1}{Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \right]$$

À condition que  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ , la fonction  $H(\omega)$  est monotone croissante<sup>1</sup>. Son gain en décibels :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log [H(\omega)] = 20 \log H_0 - 10 \log \left[ \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2\omega^2} \right]$$

admet pour asymptotes :

$$\begin{cases} G_{\text{dB}} \simeq 20 \log H_0 - 40 \log \omega_0 + 40 \log \omega \text{ pour } \log \omega \ll \log \omega_0 \\ G_{\text{dB}} \simeq 20 \log H_0 \text{ pour } \log \omega \gg \log \omega_0 \end{cases} \quad (3)$$

tandis que son argument vérifie :

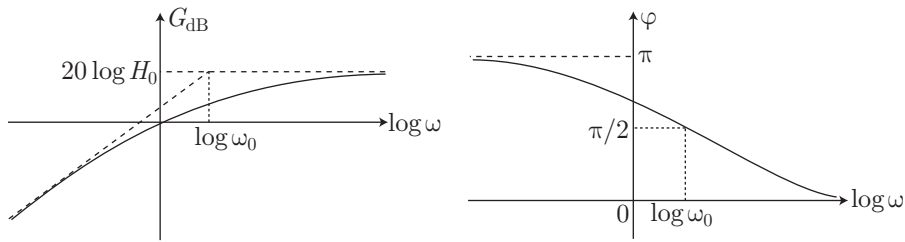
$$\tan \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) = \frac{1}{\tan \phi} = Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

de sorte que :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \ll \omega_0} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) \right] = -\infty \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) \right] = 0 \\ \lim_{\omega \gg \omega_0} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{2} - \phi \right) \right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \ll \omega_0} \phi = \pi \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \phi = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{\omega \gg \omega_0} \phi = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Les expressions limites (3) et (4) conduisent aux tracés des diagrammes de Bode asymptotiques :

<sup>1</sup>Dans le cas contraire,  $H(\omega)$  devient *maximum* pour  $\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2}{2Q^2 - 1}}$  et le circuit devient résonant.



Afin de soulager les calculs de la bande passante  $\mathcal{B}$ , nous supposons que  $Q \ll 1$  et nous posons :

$$H(X) = \frac{H_0}{\sqrt{(1-X)^2 + \frac{X}{Q^2}}} \text{ où } X = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$$

Le diagramme de Bode révèle que  $H(X)$  a pour valeur maximale  $H_{\max} = H_0$ , de sorte que la pulsation de coupure est définie par :

$$\omega_c = \frac{\omega_0}{\sqrt{X_c}} \text{ avec } H(X_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{\text{dB}}(X_c) = G_{\text{dB}}^{(\max)} - 3 \text{ dB}$$

Cette définition conduit à l'équation du second degré :

$$Q^2 X_c^2 + X_c (1 - 2Q^2) - Q^2 = 0$$

dont la seule solution positive est :

$$X_c = \frac{2Q^2 - 1 + \sqrt{\Delta}}{2Q^2} \text{ avec } \Delta = 1 - 4Q^2 + 8Q^4 \Rightarrow X_c \simeq 2Q^2$$

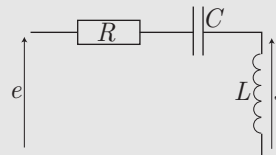
tandis que la bande passante vaut :

$$\mathcal{B} = \left[ \omega_c = \frac{\omega_0}{Q\sqrt{2}}, \infty \right[ \Rightarrow \forall \omega \in \mathcal{B}, G_{\text{dB}}(\omega) \geq G_{\text{dB}}^{(\max)} - 3 \text{ dB}$$



On considère le quadripôle  $RLC$  représenté ci-dessous. Déterminer les expressions de  $H_0$ ,  $\omega_0$  et  $Q$  permettant de présenter sa fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \times \frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$



RÉPONSE La loi du pont diviseur de tension fournit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{L\omega j}{\frac{1}{C\omega j} + L\omega j + R} = \frac{L\omega j \times C\omega j}{1 + L\omega j \times C\omega j + jRC\omega} = \frac{(j\omega\sqrt{LC})^2}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On peut alors noter :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $H_0 = 1$ , afin de présenter  $\underline{H}(j\omega)$  sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \times \frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j RC\omega}$$

Dans ce cas, il convient de remarquer que :

$$C = \frac{1}{L\omega_0^2} \Rightarrow RC\omega = \frac{R\omega}{L\omega_0^2} = \frac{R}{L\omega_0} \times \frac{\omega}{\omega_0}$$

C'est pourquoi, en introduisant le facteur de qualité :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

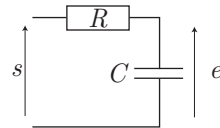
on obtient la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \times \frac{\left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

### 2.2.4.3 Filtre passe-bas d'ordre 1

La fonction de transfert de ce type de filtre se présente typiquement sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$



Le circuit représenté ci-dessus est un exemple de filtre passe-bas, dans lequel  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$  et  $H_0 = 1$ .

En présentant la fonction de transfert sous forme polaire :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega) e^{j\phi} \text{ avec } \begin{cases} H(\omega) = H_0 \left[ 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]^{-1/2} \\ \tan \phi = -\frac{\omega}{\omega_0} \end{cases}$$

on déduit le gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log [H(\omega)] = 20 \log H_0 - 10 \log \left[ 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]$$

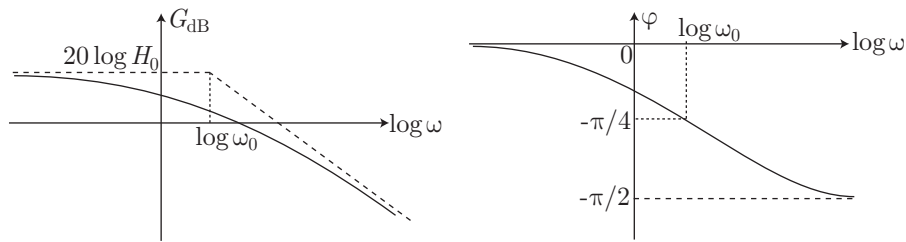
dont les limites valent :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \ll \omega_0} G_{dB} \simeq 20 \log H_0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} G_{dB} = 20 \log H_0 - 3 \text{ dB} \\ \lim_{\omega \gg \omega_0} G_{dB} = 20 \log H_0 + 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega \end{cases}$$

De plus :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \ll \omega_0} [\tan \phi] = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} [\tan \phi] = -1 \\ \lim_{\omega \gg \omega_0} G_{dB} = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \ll \omega_0} \phi = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \phi = -\frac{\pi}{4} \\ \lim_{\omega \gg \omega_0} \phi = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ainsi se déduisent les diagrammes de Bode en amplitude et en phase :



La pulsation de coupure,  $\omega_c$ , solution de l'équation :

$$G_{dB}(\omega_c) = G_{dB}^{(max)} - 3 \text{ dB} \Rightarrow -10 \log \left[ 1 + \left( \frac{\omega_c}{\omega_0} \right)^2 \right] = -10 \log 2$$

$$\Rightarrow \omega_c = \omega_0$$

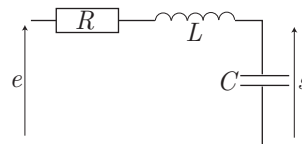
est à l'origine de l'expression de la bande passante :

$$\forall \omega \in ]0, \omega_0], G_{dB}(\omega) \geq G_{dB}^{(max)} - 3 \text{ dB}$$

#### 2.2.4.4 Filtre passe-bas d'ordre 2

La fonction de transfert présente la forme générale :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} \text{ avec } Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$



On s'assurera, par exemple, que le montage schématisé ci-dessus présente une telle fonction de transfert, en posant :

$$H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Sous la forme polaire :

$$\underline{H}(j\omega) = H(\omega) e^{j\varphi} \text{ où } \begin{cases} H(\omega) = H_0 \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2} \right]^{-1/2} \\ \cos \varphi = H_0 \times \frac{1 - \omega^2/\omega_0^2}{H(\omega)} \\ \sin \varphi = -\frac{H_0}{Q} \times \frac{\omega/\omega_0}{H(\omega)} \end{cases}$$

la fonction de transfert fournit le gain en décibels :

$$G_{\text{dB}} = 20 [H(\omega)] = 20 \log H_0 - 10 \log \left[ \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2} \right]$$

qui est une fonction monotone décroissante<sup>2</sup> tant que  $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  avec, pour limites :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \ll \omega_0} G_{\text{dB}} = 20 \log H_0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} G_{\text{dB}} = 20 \log H_0 + 20 \log Q \\ \lim_{\omega \gg \omega_0} G_{\text{dB}} = 20 \log H_0 + 40 \log \omega_0 - 40 \log \omega \end{cases}$$

En outre, les expressions de :

$$\cos \varphi = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = - \frac{\frac{\omega}{Q \omega_0}}{\sqrt{\left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}}$$

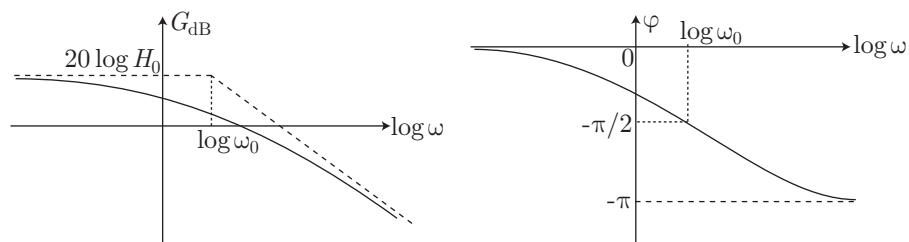
ont pour valeurs limites :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \ll \omega_0} [\cos \varphi] = 1 \\ \lim_{\omega \ll \omega_0} [\sin \varphi] = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} [\cos \varphi] = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} [\sin \varphi] = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \lim_{\omega \gg \omega_0} [\cos \varphi] = -1 \\ \lim_{\omega \gg \omega_0} [\sin \varphi] = 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{\omega \ll \omega_0} \varphi = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{\omega \gg \omega_0} \varphi = -\pi$$

Les diagrammes de Bode de ce circuit se déduisent alors de ces résultats :



La résolution de l'équation :

$$G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB}}^{(\text{max})} - 3 \text{ dB} = 20 \log H_0 - 10 \log 2$$

<sup>2</sup>Dans le cas où  $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $G_{\text{dB}}$  admet un *maximum* pour  $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ , auquel cas le montage correspond à celui d'un circuit résonant.

donne la pulsation de coupure du filtre :

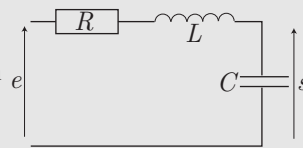
$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{\frac{2Q^2 - 1 + \sqrt{1 - 4Q^2 + 8Q^4}}{2Q^2}}$$

et donc sa bande passante :

$$\forall \omega \in [\omega_c, \infty[, G_{\text{dB}}(\omega) \geq G_{\text{dB}}^{(\text{max})} - 3 \text{ dB}$$



On s'intéresse au circuit représenté ci-contre.  
À quelle condition sur  $R$ ,  $L$  et  $C$  ce circuit réalise-t-il un filtre passe-bas d'ordre 2 ?



**RÉPONSE** La fonction de transfert du circuit vaut :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{Cj\omega}}{\frac{1}{Cj\omega} + Lj\omega + R} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + RCj\omega}$$

En posant :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad Q = \frac{1}{RC\omega_0} \quad (5)$$

le module de  $\underline{H}(j\omega)$  s'écrit :

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}} \text{ où } f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

Pour que le circuit réalise un filtre passe-bas, il est nécessaire que  $H(x)$  soit une fonction monotone décroissante, c'est-à-dire que  $\frac{df}{dx} > 0$  pour  $x \in ]0, \infty[$ . Or, la dérivée :

$$\frac{df}{dx} = -4x(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2} = 4x \left( x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right)$$

ne s'annule pour aucune valeur de  $\mathbb{R}^{+*}$  à condition que l'équation :

$$x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

n'admette aucune solution réelle, c'est-à-dire si :

$$1 - \frac{1}{2Q^2} < 0 \Rightarrow Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

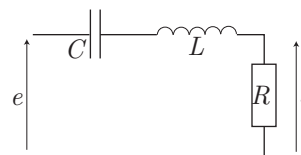
ou encore, en tenant compte des expressions (5) :

$$\frac{1}{RC} \sqrt{LC} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

### 2.2.4.5 Filtre passe-bande

On vérifiera aisément que le montage représenté ci-dessous a pour fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \times \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$



ou encore :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

avec :  $H_0 = 1$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ .

Son gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log H_0 - 10 \log \left[ 1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]$$

admet pour valeurs limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\omega \ll \omega_0} G_{dB} \simeq 20 \log H_0 - 20 \log Q - 20 \log \omega_0 + 20 \log \omega \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} G_{dB} = G_{dB}^{(max)} = 20 \log H_0 \\ \lim_{\omega \gg \omega_0} G_{dB} = 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega \end{array} \right.$$

tandis que :

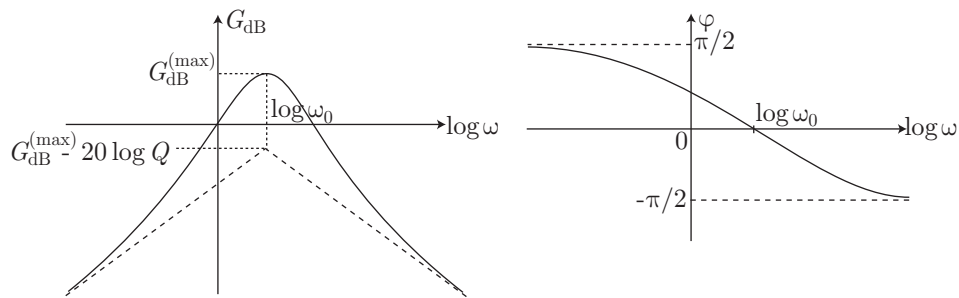
$$\phi = \arg \{ \underline{H}(j\omega) \} \Rightarrow \tan \phi = Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

admet pour valeurs limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{\omega \ll \omega_0} [\tan \phi] = +\infty \Rightarrow \lim_{\omega \ll \omega_0} \phi = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} [\tan \phi] = 0 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \phi = 0 \\ \lim_{\omega \gg \omega_0} [\tan \phi] = -\infty \Rightarrow \lim_{\omega \gg \omega_0} \phi = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

C'est pourquoi les diagrammes de Bode asymptotiques de ce montage présentent les allures suivantes :





Les pulsations de coupure  $\omega_1$  et  $\omega_2 > \omega_1$  sont solutions de l'équation :

$$\begin{aligned}
 G_{dB}(\omega) &= G_{dB}^{(max)} - 3 \text{ dB} \\
 \Rightarrow -10 \log \left[ 1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right] &= -10 \log 2 \\
 \Rightarrow Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 &= 1 \\
 \Rightarrow \begin{cases} Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - \frac{\omega}{\omega_0} - Q = 0 \\ \text{ou} \\ Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{\omega}{\omega_0} - Q = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ces deux équations du second degré n'admettent que deux solutions positives :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} \left( \sqrt{1 + 4Q^2} - 1 \right) \text{ et } \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q} \left( \sqrt{1 + 4Q^2} + 1 \right)$$

La bande passante :  $\mathcal{B} = [\omega_1, \omega_2]$  a donc pour largeur :

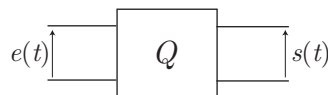
$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

ce qui montre l'influence du facteur de qualité sur l'acuité du filtre : sa sélectivité est d'autant meilleure que  $Q$  est grand.

## 2.2.5 Réponse à un échelon de tension

### 2.2.5.1 Recherche d'une équation différentielle

Considérons un quadripôle, dont la fonction de transfert se présente comme un rapport de polynômes en  $j\omega$  ( $e(t)$  et  $s(t)$  volontairement limités ici à l'ordre 2) :



$$\underline{H}(j\omega) = \frac{a_0 + a_1 \times j\omega + a_2 \times (j\omega)^2}{b_0 + b_1 \times j\omega + b_2 \times (j\omega)^2}$$

Aux signaux  $e(t) = E \cos(\omega t)$  et  $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$  sont associées des images complexes qui vérifient :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{a_0 + a_1 \times j\omega + a_2 \times (j\omega)^2}{b_0 + b_1 \times j\omega + b_2 \times (j\omega)^2} \\ \Rightarrow b_0 \underline{s} + b_1 \times j\omega \underline{s} + b_2 \times (j\omega)^2 \underline{s} &= a_0 \underline{e} + a_1 \times j\omega \underline{e} + a_2 \times (j\omega)^2 \underline{e} \end{aligned}$$

où l'on remarque que :

$$(j\omega)^p \underline{s} = \frac{d^p \underline{s}}{dt^p} \text{ et } (j\omega)^k \underline{e} = \frac{d^k \underline{e}}{dt^k}$$

de sorte que :

$$b_0 \underline{s} + b_1 \frac{ds}{dt} + b_2 \frac{d^2s}{dt^2} = a_0 \underline{e} + a_1 \frac{de}{dt} + a_2 \frac{d^2e}{dt^2}$$

La partie réelle de cette équation fournit alors l'équation différentielle qui lie  $e(t)$  et  $s(t)$  :

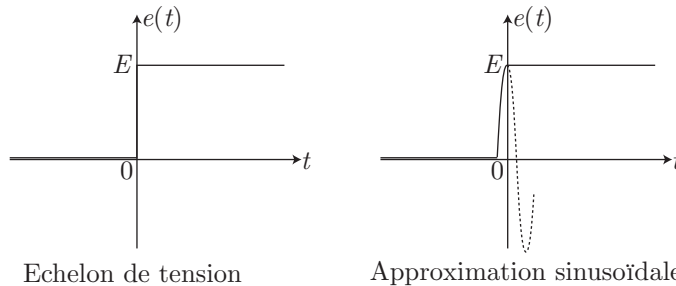
$$b_0 s + b_1 \frac{ds}{dt} + b_2 \frac{d^2s}{dt^2} = a_0 e + a_1 \frac{de}{dt} + a_2 \frac{d^2e}{dt^2}$$

### 2.2.5.2 Recherche des conditions initiales

Le quadripôle est supposé soumis à un échelon de tension d'amplitude  $E$  :

$$\begin{cases} e(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ e(t) = E \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

Le signal est alors assimilé à une tension sinusoïdale, au voisinage de  $t = 0$ , d'amplitude  $E$  et de pulsation  $\omega$  très grande (voire infinie) :



Dans le cadre de cette approximation sinusoïdale, on peut alors poser :

$$\lim_{t \rightarrow 0} [s(t)] = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\underline{H}(j\omega)] \times E$$

De même, la loi :  $\frac{d^p \underline{s}}{dt^p} = (j\omega)^p \underline{s}$  permet de retrouver rapidement les valeurs des dérivées :

$$\left. \frac{d^p s}{dt^p} \right|_{t=0} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [(j\omega)^p \times \underline{H}(j\omega)] \times E$$

**Remarque** – De nombreux exercices demandent de trouver le comportement d'un circuit en hautes et basses fréquences. Pour cela, il convient de remplacer, dans ce circuit, la bobine et le condensateur par leur dipôles équivalents :

- en basse fréquence, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé et le condensateur comme un interrupteur ouvert ;
- en haute fréquence, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un interrupteur fermé.

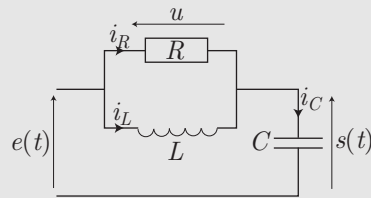
Le comportement de ces dipôles en haute fréquence permet souvent de retrouver les conditions initiales d'une équation différentielle.



Le circuit schématisé ci-dessous est alimenté par un échelon de tension d'amplitude  $E$  :

$$\begin{cases} e(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ e(t) = E \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

On posera :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = RC\omega_0$ .



- (a) Déterminer l'équation différentielle liant  $s(t)$  et  $e(t)$  en utilisant les lois de Kirchoff.  
(b) Quelle est la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$  de ce montage ?  
Retrouver l'équation différentielle liant  $s(t)$  et  $e(t)$ .
- (a) À la date  $t = 0$ , représenter le schéma équivalent à ce montage puis en déduire les expressions de  $s(t = 0)$  et de  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0}$ .  
(b) En utilisant la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega)$ , retrouver  $s(t = 0)$  et  $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0}$ .
- Calculer alors  $s(t)$  pour  $t \geq 0$ , en choisissant  $Q = \frac{1}{2}$ .

#### RÉPONSE

- (a) Soit  $u$  la tension commune aux bornes de  $R$  et  $L$  :

$$\begin{cases} u = R i_R \\ u = L \frac{di_L}{dt} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_R = \frac{u}{R} \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{u}{L} \end{cases}$$

La loi des nœuds impose alors :

$$\begin{aligned} i_C = i_R + i_L &\Rightarrow C \frac{ds}{dt} = i_R + i_L \\ &\Rightarrow C \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{di_R}{dt} + \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{R} \frac{du}{dt} + \frac{u}{L} \end{aligned}$$

En outre, la loi des mailles se traduit par :

$$\begin{aligned} e = u + s \Rightarrow u = e - s &\Rightarrow C \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{1}{R} \left( \frac{de}{dt} - \frac{ds}{dt} \right) + \frac{1}{L} (e - s) \\ &\Rightarrow \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{LC} s = \frac{1}{LC} e + \frac{1}{RC} \frac{de}{dt} \end{aligned}$$

Ainsi, en notant  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$  et  $\frac{1}{RC} = \frac{\omega_0}{Q}$ , l'équation différentielle liant  $s$  et  $e$  s'écrit :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e + \frac{\omega_0}{Q} \frac{de}{dt}$$

(b) Soit  $Z$  l'impédance équivalente à  $R$  et  $L$  en parallèle :

$$Z = \frac{R \times Lj\omega}{R + Lj\omega}$$

La loi du pont diviseur de tension fournit la fonction de transfert du circuit :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{1/Cj\omega}{Z + \frac{1}{Cj\omega}} = \frac{1}{1 + Cj\omega Z} = \frac{1}{1 + \frac{RLC(\omega j)^2}{R + Lj\omega}} \\ &= \frac{R + Lj\omega}{R + Lj\omega + RLC(\omega j)^2} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \\ \Rightarrow RLC(\omega j)^2 \underline{s} + Lj\omega \underline{s} + R \underline{s} &= R \underline{e} + Lj\omega \underline{e} \\ \Rightarrow (\omega j)^2 \underline{s} + \frac{1}{RC} \omega j \underline{s} + \frac{1}{LC} \underline{s} &= \frac{1}{LC} \underline{e} + \frac{1}{RC} \omega j \underline{e} \end{aligned}$$

Compte tenu des notations suggérées par l'énoncé, cette équation équivaut à :

$$\frac{d^2 \underline{s}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{s}}{dt} + \omega_0^2 \underline{s} = \omega_0^2 \underline{e} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\underline{e}}{dt}$$

dont la partie réelle s'écrit :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e + \frac{\omega_0}{Q} \frac{de}{dt} \quad (6)$$

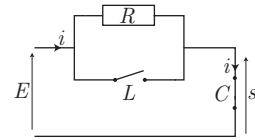
2. (a) À la date  $t = 0$ , la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert, tandis que le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé. Par conséquent, à la date  $t = 0$ , le circuit proposé par l'énoncé équivaut au schéma suivant :

Ce schéma suffit à conclure que :

$$s(t=0) = 0$$

et que :

$$E = Ri(t=0) \Rightarrow i(t=0) = \frac{E}{R}$$



Mais puisque  $i = C \frac{ds}{dt} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{i}{C}$ , il s'ensuit que :

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{RC}$$

(b) La fonction de transfert :  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \Rightarrow \underline{s} = \underline{H}(j\omega) \underline{e}$  fournit directement :

$$s(t=0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{R + Lj\omega}{R + Lj\omega + RLC(j\omega)^2} \right] \times E = 0$$

En outre,  $\frac{ds}{dt} = j\omega \underline{s} = j\omega \times \underline{H}(j\omega) \underline{e}$  conduit à :

$$\begin{aligned} \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} [j\omega \times \underline{H}(j\omega)] \times E \\ &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{Rj\omega + L(j\omega)^2}{R + Lj\omega + RLC(j\omega)^2} \right] \times E \\ \Rightarrow \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} &= \frac{E}{RC} \end{aligned}$$

3. Pour  $t \geq 0$ ,  $e(t) = E$  permet de simplifier l'équation différentielle (6) :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 E$$

Outre la solution  $s_1 = E$ , homogène au second membre, cette équation admet aussi la solution  $s_2$  de l'équation :

$$\frac{d^2 s_2}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds_2}{dt} + \omega_0^2 s_2 = 0 \Rightarrow \frac{d^2 s_2}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{ds_2}{dt} + \omega_0^2 s_2 = 0$$

dont l'équation caractéristique :  $X^2 + 2\omega_0 X + \omega_0^2 = 0$  admet une unique solution  $X = -\omega_0$ . Par conséquent, il existe deux constantes  $A$  et  $B$  telles que :

$$\begin{aligned} s_2 = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} &\Rightarrow s = s_1 + s_2 = E + (A + Bt)e^{-\omega_0 t} \\ &\Rightarrow \frac{ds}{dt} = e^{-\omega_0 t} \times (B - \omega_0 A - \omega_0 Bt) \end{aligned}$$

Or, à la date  $t = 0$ ,  $s$  et  $\dot{s}$  sont connus :

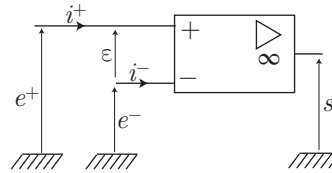
$$\begin{aligned} \begin{cases} s(0) = 0 \\ \dot{s}(0) = \frac{E}{RC} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} E + A = 0 \\ \frac{E}{RC} = B - \omega_0 A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -E \\ B = \frac{E}{RC} - \omega_0 E \end{cases} \\ &\Rightarrow s = E - E \left[ 1 + \left( \omega_0 - \frac{1}{RC} \right) \times t \right] e^{-\omega_0 t} \end{aligned}$$

## 2.3 Amplificateur opérationnel

L'amplificateur opérationnel (A.O.) est un circuit intégré qui amplifie la différence  $\varepsilon$  entre une tension  $e^+$  (à l'entrée non inverseuse) et une tension  $e^-$  (à l'entrée inverseuse) :

$$s = \mu (e^+ - e^-) = \mu \times \varepsilon$$

où  $\mu$  est une constante de l'ordre de  $10^7$  à basse fréquence.



La tension de sortie ne peut cependant excéder des valeurs  $\pm V_{\text{sat}}$  ( $\simeq \pm 12$  V), à partir desquelles l'A.O. devient saturé. On distingue ainsi deux régimes de fonctionnement :

- le fonctionnement linéaire, qui impose :

$$|s| < V_{\text{sat}} \Rightarrow \frac{V_{\text{sat}}}{\mu} > |\varepsilon| \geq 0 \Rightarrow |\varepsilon| \simeq 0 \text{ V}$$

- le fonctionnement saturé, pour lequel  $V_s = \pm V_{\text{sat}}$ .

**Définition 12** L'A.O. est dit idéal si :  $i^+ = 0$  et  $i^- = 0$ .

Dans ce qui suit, sauf mention contraire explicite, l'A.O. sera supposé linéaire et idéal.

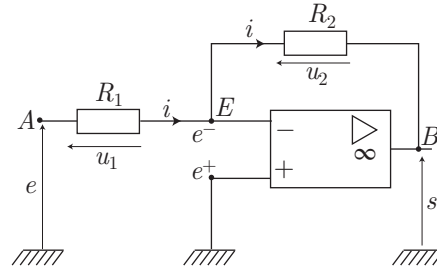
### 2.3.1 Montages amplificateurs

#### 2.3.1.1 Montage inverseur

Dans le montage ci-contre, la relation entre  $s(t)$  et  $e(t)$  peut être obtenue par deux méthodes :

- la loi des nœuds, selon laquelle :

$$\begin{cases} u_1 = e - e^- = R_1 i \\ u_2 = e^- - s = R_2 i \end{cases} \Rightarrow \frac{e - e^-}{R_1} = \frac{e^- - s}{R_2}$$



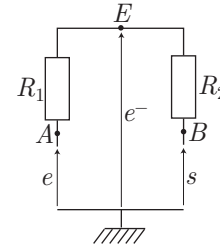
Or, en régime linéaire :

$$e^- = e^+ = 0 \Rightarrow \frac{e}{R_1} = -\frac{s}{R_2} \Rightarrow s = -\frac{R_2}{R_1} e$$

- le théorème de Millman qui impose, au préalable, la représentation du schéma équivalent à une branche.

Selon ce théorème :

$$\frac{\frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = e^- = e^+ = 0 \Rightarrow \frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2} = 0$$



On retrouve ainsi la loi :

$$s = -\frac{R_2}{R_1} e$$



Le théorème de Millman ne peut s'utiliser qu'en impliquant une seule des entrées de l'A.O.

Remarque – Si les résistances  $R_1$  et  $R_2$  sont remplacées par des impédances complexes  $Z_1$  et  $Z_2$ , les images complexes  $\underline{e}$  et  $\underline{s}$  de  $e(t)$  et  $s(t)$  sont liées par une relation que l'on obtient par une méthode analogue :

$$\underline{s} = -\frac{Z_2}{Z_1} \underline{e} \quad (7)$$

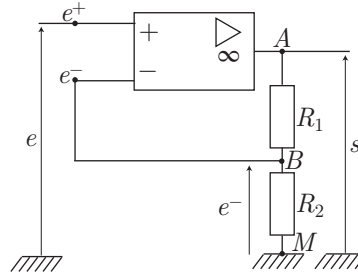
### 2.3.1.2 Montage non inverseur

Le montage de principe est représenté ci-contre. La loi du pont diviseur de tension, appliquée à la branche (A, B, M), fournit :

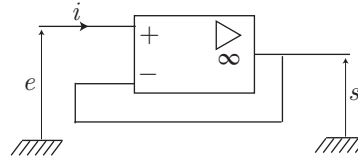
$$e^- = \frac{R_2}{R_1 + R_2} s \Rightarrow s = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) e^-$$

Or, l'A.O. étant linéaire, il s'ensuit que :

$$e^- = e^+ = e \Rightarrow s = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \times e$$



Remarque – Lorsque  $R_1 = 0$ , le montage correspondant est appelé suiveur, car la loi précédente montre que :  $s = e$ . L'intérêt d'un tel montage vient de ce que la relation  $s = e$  est vérifiée tandis que  $i \simeq 0$ .

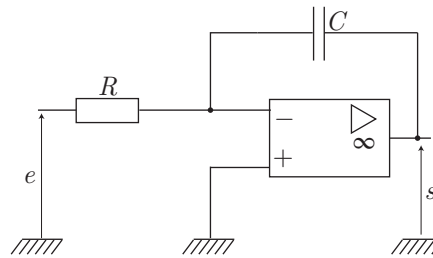


## 2.3.2 Montage intégrateur ou filtre passe-bas

### 2.3.2.1 Filtre passe-bas

Le montage théorique représenté ci-contre a une fonction de transfert dont l'expression est issue du résultat (7), dans laquelle  $\underline{Z}_2 = \frac{1}{C\omega j}$  et  $\underline{Z}_1 = R$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = -\frac{1}{RC\omega j}$$

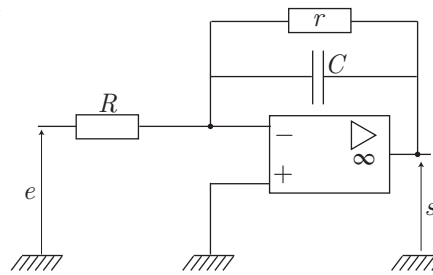


Cependant, la réalisation d'un tel montage révèle une saturation rapide de l'A.O., liée à un écart à l'idéalité : l'existence d'un courant de polarisation (cf. page 189). Pour éviter l'expression d'un tel phénomène, on introduit une résistance  $r$  en parallèle avec  $C$ , telle que  $rC\omega \gg 1$ , où  $\omega$  désigne la pulsation des signaux électriques.

Ce faisant, avec  $\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{r} + C\omega j$  et  $\underline{Z}_1 = R$ ,

la relation (7) fournit la fonction de transfert du montage :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = -\frac{r}{R + rRC\omega j} \\ &= -\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \\ &\text{avec } H_0 = \frac{r}{R} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{rC} \end{aligned}$$

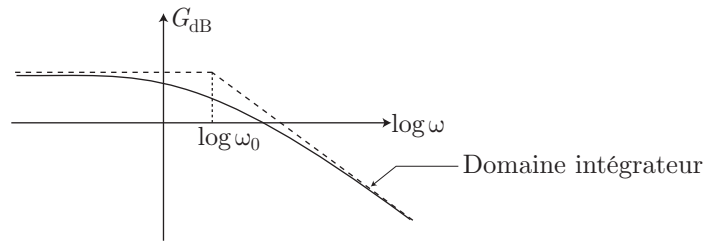


Le gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log H_0 - 10 \log \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_{dB} \simeq 20 \log H_0 & \text{pour } \omega \ll \omega_0 \\ G_{dB} \simeq 20 \log H_0 + 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega & \text{pour } \omega \gg \omega_0 \end{cases}$$

présente un diagramme de Bode compatible avec celui des filtres passe-bas d'ordre 1 :



### 2.3.2.2 Montage intégrateur

Le diagramme de Bode précédent montre que lorsque  $\omega \gg \omega_0$ , le circuit effectue une opération d'intégration. En effet, dans ce cas :

$$G_{dB} = 20 \log H_0 + 20 \log \left( \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 20 \log \left( \frac{H_0 \omega_0}{\omega} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{H_0 \omega_0}{j\omega} = \frac{s}{e}$$

$$\Rightarrow j\omega \underline{s} = H_0 \omega_0 \underline{e} \Rightarrow \frac{ds}{dt} = H_0 \omega_0 e$$

$$\Rightarrow s = H_0 \omega_0 \int e(t) dt + \text{cte}$$

Ce résultat admet d'être généralisé :

Lorsque le diagramme de Bode présente une partie linéaire décroissante, le circuit correspondant s'y comporte comme un montage intégrateur.

Dans la relation (7), les impédances  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  ont pour expressions :

$$\underline{Z}_1 = R \text{ et } \underline{Z}_2 = \frac{r \times \frac{1}{C\omega j}}{r + \frac{1}{C\omega j}} = \frac{r}{1 + rC\omega j}$$

Par conséquent, la fonction de transfert du circuit vaut :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = \frac{-r}{R + RrC\omega j} \quad (8)$$

$$\Rightarrow R \underline{s} + RrC j\omega \underline{s} = -r \underline{e} \quad (9)$$

$$\Rightarrow R \underline{s} + RrC \frac{ds}{dt} = -r \underline{e} \quad (10)$$



ce qui signifie que les tensions  $s(t)$  et  $e(t)$  vérifient l'équation différentielle :

$$R s + RrC \frac{ds}{dt} = -r e$$

En supposant que  $rC\omega \gg 1$ , l'équation (9) se simplifie :

$$\begin{aligned} R \underline{s} + RrC \omega j \underline{s} &= R (\underline{s} + rC \omega j \underline{s}) \simeq RrC \omega j \underline{s} \\ \Rightarrow RrC \omega j \underline{s} &= -r \underline{e} \Rightarrow RC \frac{ds}{dt} = -\underline{e} \end{aligned}$$

ce qui montre que, pour  $rC\omega \gg 1$ , le montage réalise une intégration ;

$$RC \frac{ds}{dt} = -e \Rightarrow s = -\frac{1}{RC} \int e(t) dt + \text{cte}$$

### 2.3.3 Montage dérivateur ou filtre passe-haut

#### 2.3.3.1 Filtre passe-haut

En posant  $Z_2 = R$  et  $Z_1 = \frac{1}{C\omega j}$ , la fonction de transfert de ce montage est donnée par la loi (7) :

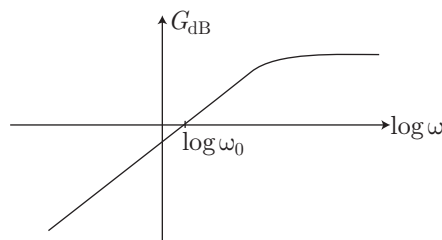
$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -RC\omega j = -j \frac{\omega}{\omega_0} \quad (11)$$

où :  $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ .

et a donc pour gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) = 20 \log \omega - 20 \log \omega_0$$

Aussi, le diagramme de Bode du montage présente l'allure caractéristique d'un filtre passe-haut :



Remarque – Étant donné la limitation de l'amplitude de  $s(t)$ , la saturation éventuelle de l'A.O. se traduit par l'existence d'une portion horizontale asymptotique dans le diagramme de Bode.

### 2.3.3.2 Montage dérivateur

La fonction de transfert (11) montre que :

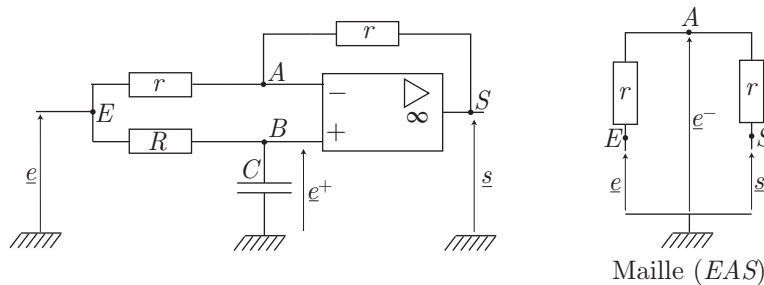
$$\frac{s}{e} = \underline{H}(j\omega) = -RC\omega j \Rightarrow s = -RC\omega j e = -RC \frac{de}{dt}$$

$$\Rightarrow s = -RC \frac{de}{dt}$$

ce qui suffit à prouver que l'A.O. réalise la dérivation du signal d'entrée.

### 2.3.4 Filtre passe-tout déphaseur

Le montage d'un tel circuit est représenté ci-dessous :



Après avoir représenté le schéma équivalent de la branche (EAS), il est possible d'y exprimer le théorème de Millman :

$$e^- = \frac{\frac{e}{r} + \frac{s}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}} \Rightarrow e^- = \frac{e + s}{2} \quad (12)$$

Quant à la tension  $e^+$ , elle s'obtient directement par l'emploi de la loi du pont diviseur de tension :

$$e^+ = \frac{1/C\omega j}{R + 1/C\omega j} e = \frac{1}{1 + RC\omega j} e$$

Or, la linéarité de l'A.O. se traduit par :

$$e^+ = e^- \Rightarrow \frac{e}{1 + RC\omega j} e = \frac{e + s}{2} \Rightarrow e \times \left( \frac{2}{1 + RC\omega j} - 1 \right) = s$$

$$\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{1 - RC\omega j}{1 + RC\omega j}$$

En notant  $\tan \phi = RC\omega$ , cette fonction de transfert s'écrit aussi :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\sqrt{1 + (RC\omega)^2} e^{-j\phi}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2} e^{j\phi}} = e^{-2j\phi}$$

soit encore :

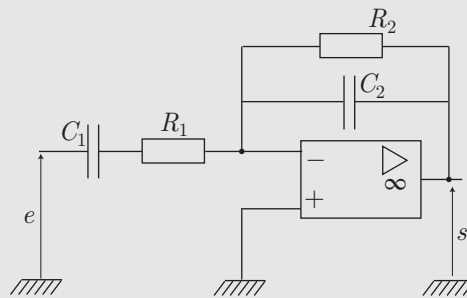
$$\underline{H}(j\omega) = e^{j\varphi} = \frac{s}{e} \text{ avec } \varphi = -2 \arctan(RC\omega)$$

De fait, si  $e(t) = E \cos(\omega t)$  :

$$\underline{s} = e^{j\varphi} \times E e^{j\omega t} = E \times e^{j(\omega t + \varphi)} \Rightarrow s(t) = E \cos(\omega t + \varphi)$$



Dans le montage schématisé ci-dessous, on posera  $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$ ,  $\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$  et  $k = \frac{R_2}{R_1}$ . L'A.O. est idéal et fonctionne en régime linéaire.



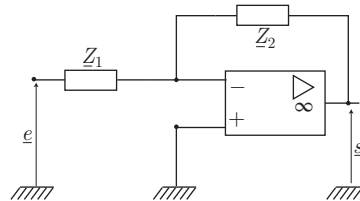
Représenter le diagramme de Bode en amplitude de ce circuit et en déduire sa nature (filtre passe-bas, passe-haut, passe-bande, dérivateur, intégrateur,...). On supposera que  $\omega_2 > \omega_1$ .

RÉPONSE Soient les impédances :

$$\underline{Z}_1 = \frac{1}{C_1 \omega j} + R_1 = \frac{1 + R_1 C_1 \omega j}{C_1 \omega j} = \frac{1}{C_1 \omega j} \left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right)$$

et :

$$\underline{Z}_2 = \frac{R_2 \times \frac{1}{C_2 \omega j}}{R_2 + \frac{1}{C_2 \omega j}} = \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 \omega j} = \frac{R_2}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}$$



La fonction de transfert de ce circuit est alors donnée par le résultat (7) de la page 182 :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= -\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = -\frac{R_2}{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}} \times \frac{C_1 \omega j}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \\ &= -\frac{R_2}{R_1} \times \frac{R_1 C_1 \omega j}{\left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \right) \left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right)} \\ &= -k \times \frac{j \frac{\omega}{\omega_1}}{\left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \right) \left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_1} \right)} = \frac{-k}{\left( 1 + j \frac{\omega}{\omega_2} \right) \left( 1 - j \frac{\omega_1}{\omega} \right)} \end{aligned}$$

Par suite, le gain en décibels de ce montage vaut :

$$G_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \left[ \frac{k}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2}} \right]$$

$$\Rightarrow G_{dB} = 20 \log k - 10 \log \left[ 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \right] - 10 \log \left[ 1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \right]$$

Deux cas limites peuvent alors être distingués :

- Si  $\omega \gg \omega_2 > \omega_1$  :

$$1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \simeq \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \text{ et } 1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \simeq 1$$

de sorte que :

$$G_{dB} \simeq 20 \log k + 20 \log \omega_2 - 20 \log \omega \text{ pour } \omega \gg \omega_2 > \omega_1$$

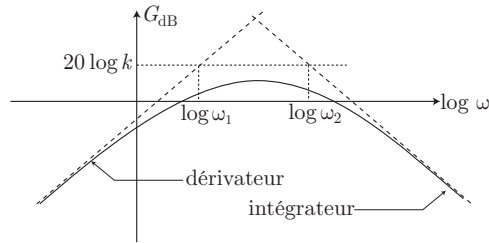
- Si  $\omega \ll \omega_1 < \omega_2$  :

$$1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 \simeq 1 \text{ et } 1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 \simeq \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2$$

conduisent à :

$$G_{dB} \simeq 20 \log k + 20 \log \omega - 20 \log \omega_1 \text{ pour } \omega \ll \omega_1 < \omega_2$$

Ces résultats fournissent alors les asymptotes du diagramme de Bode pour  $\log \omega \gg \log \omega_2$  et pour  $\log \omega \ll \log \omega_1$  :

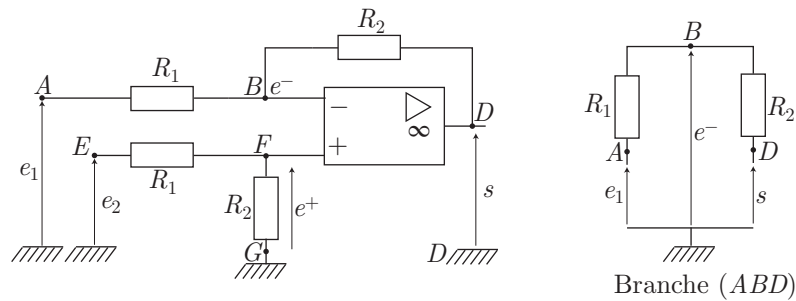


De ce diagramme, on déduit que :

- le montage constitue un filtre passe-bande ;
- lorsque  $\omega \ll \omega_1$ , ce circuit se comporte comme un dérivateur (ou filtre passe-haut) ;
- pour  $\omega \gg \omega_2$ , ce circuit réalise un intégrateur (ou filtre passe-bas).

### 2.3.5 Montage amplificateur différentiel

Considérons le montage ci-dessous :



Branche (ABD)

Le théorème de Millman peut être utilisé dans la branche  $(ABD)$ , préalablement isolée ; il fournit :

$$e^- = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_2 e_1 + R_1 s}{R_1 + R_2}$$

Quant à la branche  $(EFG)$ , elle réalise un pont diviseur de tension, dans lequel :

$$e^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_2$$

Ainsi, la linéarité de l'A.O. se traduit-elle par :

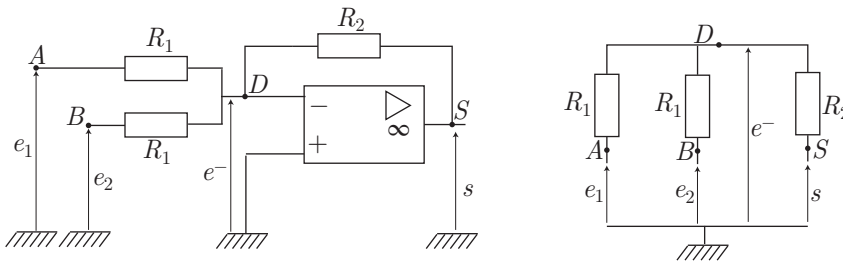
$$e^- = e^+ \Rightarrow R_2 e_1 + R_1 s = R_2 e_2 \Rightarrow s = \frac{R_2}{R_1} (e_2 - e_1)$$

Remarque - Dans le cas où  $R_1 = R_2$ , ce montage réalisera un soustracteur :

$$s = (e_2 - e_1)$$

### 2.3.6 Amplificateur sommateur

Le montage correspondant à cet opérateur est représenté sur la figure ci-dessous.



Le montage équivalent aux branches  $(ADS)$  et  $(BDS)$  suggère l'emploi du théorème de Millman :

$$e^- = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 0 \text{ (l'A.O. est linéaire)}$$

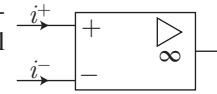
$$\Rightarrow s = -\frac{R_2}{R_1} (e_1 + e_2)$$

### 2.3.7 Les limites de l'amplificateur opérationnel

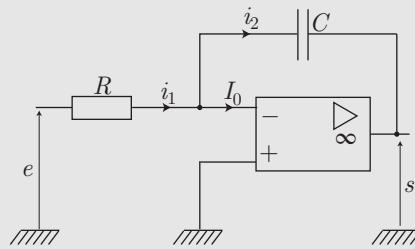
#### 2.3.7.1 Courants de polarisation

L'A.O. réel présente des courants d'entrée  $i^+$  et  $i^-$  très faibles, mais non nuls ; il s'agit des courants de polarisation, de l'ordre de 50 nA.

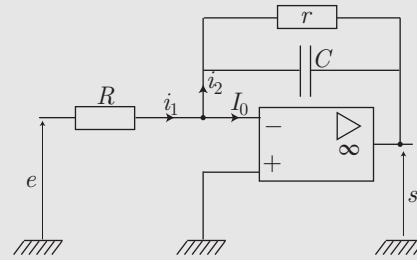
En règle générale, l'ordre de grandeur de leur intensité justifie qu'ils soient négligés, sauf lorsque le montage expérimental contredit les calculs.



On s'intéresse à l'influence de l'introduction d'une résistance  $r$  dans le montage intégrateur réalisé avec un A.O. linéaire, qui présente un courant de polarisation  $I_0 = \text{cte} \neq 0$  de très faible intensité.



Montage 1



Montage 2

- (a) Dans le montage 1, déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $s(t)$ .  
 (b) On donne :  $I_0 = 50 \mu\text{A}$ ,  $C = 1 \mu\text{F}$ . Sachant que la linéarité de l'A.O. impose  $|s| < V_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$ , estimer le temps au bout duquel s'observera la saturation de l'A.O.
- Dans le montage 2, déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $s(t)$ .
- L'allure de cette équation différentielle suggère que  $s(t)$  se décompose en un signal  $S_0$  constant et un signal  $S_1(t)$  dépendant de  $t$  :  $s(t) = S_0 + S_1(t)$ . La résistance  $r$  est choisie de manière à ce que :  $rC \frac{dS_1}{dt} \gg S_1$ . Montrer que  $s(t)$  peut se mettre sous la forme :

$$s(t) = r I_0 - \frac{1}{RC} \int e(t) dt + \text{cte}$$

puis conclure.

#### RÉPONSE

- (a) Il n'est pas possible, ici, d'utiliser la relation (7) de la page 182 car l'A.O. n'est pas idéal. Cependant, la loi des nœuds reste disponible :

$$\begin{aligned} i_1 &= I_0 + i_2 \Rightarrow \frac{e^- - e^-}{R} = I_0 + C\omega j(e^- - s) \text{ où } e^- = e^+ = 0 \\ &\Rightarrow e = RI_0 - RC\omega j s \Rightarrow \omega j s = \frac{I_0}{C} - \frac{1}{RC} e \\ &\Rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{I_0}{C} - \frac{1}{RC} e \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{I_0}{C} - \frac{1}{RC} e(t)$$

- (b) L'intégration de cette équation différentielle :

$$s(t) = \frac{I_0 \times t}{C} - \frac{1}{RC} \int e(t) dt + \text{cte}$$

montre que  $s(t)$  prend des valeurs sans cesse croissantes comme  $\frac{I_0 \times t}{C}$ . Aussi, l'A.O. sature au bout d'une durée  $t_{\text{sat}}$  telle que :

$$V_{\text{sat}} = \frac{I_0}{C} t_{\text{sat}} \Rightarrow t_{\text{sat}} = \frac{C V_{\text{sat}}}{I_0} = \frac{10^{-6} \times 15}{50 \cdot 10^{-6}} = 0,3 \text{ s}$$

2. (a) L'association en parallèle de  $r$  et  $C$  équivaut à une impédance  $Z$  telle que :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{r} + C\omega j = \frac{1 + rC\omega j}{r}$$

auquel cas :

$$i_1 = \frac{1}{R} (e - e^-) = \frac{e}{R} \text{ et } i_2 = \frac{e^- - s}{Z} = -\frac{1 + rC\omega j}{r} s$$

Ainsi, la loi des nœuds s'exprime par :

$$\begin{aligned} i_1 = I_0 + i_2 &\Rightarrow \frac{e}{R} = I_0 - \frac{1 + rC\omega j}{r} s \\ &\Rightarrow RrC \frac{ds}{dt} + R s = rRI_0 - r e \end{aligned}$$

Ce faisant,  $s(t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$R \left( rC \frac{ds}{dt} + s \right) = rRI_0 - r e$$

- (b) Cherchons la solution de cette équation sous la forme :  $s(t) = S_0 + S_1(t)$  :

$$R \left( rC \frac{dS_1}{dt} + S_1 \right) + RS_0 = rRI_0 - r e(t)$$

où l'on pose :

$$RS_0 = rRI_0 \Rightarrow S_0 = rI_0$$

et :

$$R \left( rC \frac{dS_1}{dt} + S_1 \right) = -r e(t)$$

Or, l'hypothèse selon laquelle  $rC \frac{dS_1}{dt} \gg S_1$  suggère une simplification de cette équation :

$$RrC \frac{dS_1}{dt} = -r e(t) \Rightarrow S_1(t) = -\frac{1}{RC} \int e(t) dt + \text{cte}$$

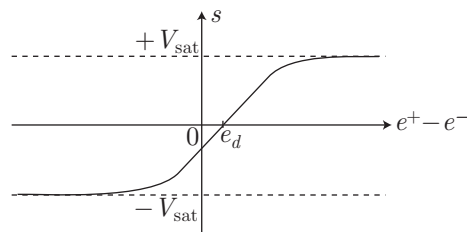
Finalement :

$$s(t) = rI_0 - \frac{1}{RC} \int e(t) dt + \text{cte}$$

montre que l'introduction de la résistance  $r$ , en parallèle avec  $C$ , évite la saturation de l'A.O. (à condition toutefois que  $rI_0 \ll V_{\text{sat}}$ ).

### 2.3.7.2 Tension de décalage

Dans la pratique, si on relie les deux bornes d'entrée de l'A.O., on constate que la tension de sortie  $s$  n'est pas nulle. Ce défaut provient d'un décalage de la caractéristique  $s = f(e^+ - e^-)$  de l'A.O. par rapport à l'origine :



**Définition 13** L'intersection de la caractéristique de l'A.O. avec l'axe des abscisses est appelée tension de décalage ( $e_d$ ), de sorte qu'en régime linéaire, la sortie  $s$  suit la loi :

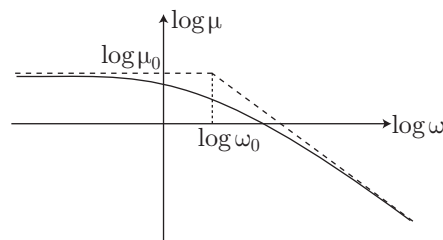
$$s = \mu (e^+ - e^- - e_d)$$

Cette tension de décalage est de l'ordre du millivolt.

### 2.3.7.3 Bande passante

Soit  $\mu$  le gain de l'A.O. en régime linéaire, à une pulsation  $\omega$  :  $s = \mu (e^+ - e^-)$  et soit  $\mu_0$  ce gain pour  $\omega = 0$ .

Le tracé du diagramme de Bode :



révèle que l'A.O. se comporte comme un filtre passe-bas, dont le gain admet pour image complexe :

$$\underline{\mu} = \frac{s}{e^+ - e^-} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

La fréquence de coupure  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$  est de l'ordre de 10 Hz.

## 2.4 Conversion électronique

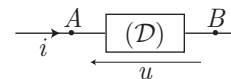
Cette section ne s'adresse qu'aux étudiants de la filière PSI.

### 2.4.1 Générateurs et récepteurs

#### 2.4.1.1 Définitions

**Définition 14** Soit  $u = V_A - V_B$  la tension aux bornes d'un dipôle ( $\mathcal{D}$ ), parcouru par un courant d'intensité  $i$  qui entre en  $A$  :

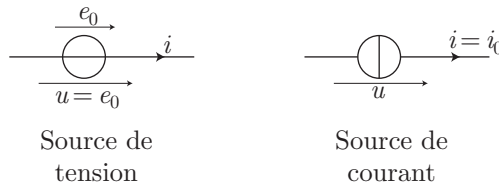
- ( $\mathcal{D}$ ) est un récepteur si  $u \times i > 0$  ;
- ( $\mathcal{D}$ ) est un générateur si  $u \times i < 0$ .



**Définition 15** Une source de tension est un dipôle qui délivre, entre ses bornes, une tension  $u = e_0$  indépendante de l'intensité du courant traversant le dipôle.

Une source de courant est un dipôle qui délivre un courant dont l'intensité  $i = i_0$  est indépendante de la tension entre ses bornes.





**Définition 16** Soit  $(\mathcal{D})$  un dipôle, dont la tension  $u$  et le courant  $i$  sont orientés selon la convention récepteur ( $u$  et  $i$  sont représentés avec des flèches inversement orientées). La puissance absorbée par  $(\mathcal{D})$  à la date  $t$  vaut :

$$P(t) = u(t) \times i(t)$$

Remarque – Si le dipôle est un récepteur,  $P(t) > 0$  montre qu'il reçoit de l'énergie électrique. Dans le cas contraire ( $P(t) < 0$ ), il délivre de l'énergie électrique au circuit.

Si  $u(t)$  et  $i(t)$  sont périodiques, la puissance moyenne absorbée par le dipôle pendant la période  $T$  vaut :

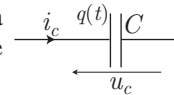
$$P = \langle P(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \times i(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(t) \times i(t) dt$$

#### 2.4.1.2 Quelques valeurs moyennes

Dans cette partie, on supposera les signaux électriques périodiques (pas nécessairement sinusoïdaux), de période  $T$ .

##### • Cas du condensateur

Soit  $u_c(t)$  la tension aux bornes du condensateur, de capacité  $C$ , à une date  $t$ , traversé par un courant d'intensité  $i_c(t)$  et portant une charge  $q(t)$ .



Pendant une période  $T$ , le condensateur est traversé par un courant, de valeur moyenne :

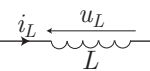
$$\begin{aligned} \langle i_c \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i_c(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{dq}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} dq \\ &= q(t+T) - q(t) \Rightarrow \langle i_c \rangle = 0 \end{aligned}$$

La puissance moyenne reçue, pendant une période  $T$ , vaut aussi :

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_c(t) \times i_c(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_c(t) \times C \frac{du_c}{dt} dt \\ &= \frac{C}{2T} [u_c^2(t+T) - u_c^2(t)] \Rightarrow P_c = 0 \end{aligned}$$

##### • Cas de la bobine

Une bobine d'inductance  $L$  est parcourue par un courant d'intensité  $i_L(t)$  et est soumise à une différence de potentiel  $u_L(t)$ , à une date  $t$ .



Par définition, la valeur moyenne de  $u_L$  sur une période vaut :

$$\begin{aligned}\langle u_L \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_L(t) dt = \frac{1}{L} \int_t^{t+T} L \frac{di_L}{dt} dt = \frac{L}{T} \int_t^{t+T} di_L \\ &= \frac{L}{T} [i_L(t+T) - i_L(t)] \Rightarrow \langle u_L \rangle = 0\end{aligned}$$

En outre, la puissance moyenne absorbée par la bobine est définie par :

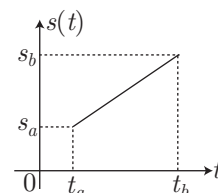
$$\begin{aligned}P_L &= \frac{1}{L} \int_t^{t+T} u_L(t) \times i_L(t) dt = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} L \frac{di_L}{dt} \times i_L(t) dt \\ &= \frac{L}{2T} [i_L^2(t+T) - i_L^2(t)] \Rightarrow P_L = 0\end{aligned}$$

### • Cas d'un signal linéaire

Soit  $s(t)$  un signal qui varie linéairement avec le temps, sur l'intervalle  $[t_a, t_b]$  :

$$s(t) = \alpha t + \beta \text{ pour } t \in [t_a, t_b]$$

En notant  $s_a = s(t_a)$  et  $s_b = s(t_b)$ , on montre que :



$$\langle s \rangle = \frac{1}{t_b - t_a} \int_{t_a}^{t_b} s(t) dt = \frac{s_b - s_a}{t_b - t_a}$$



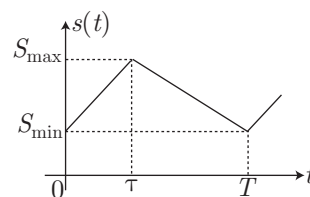
Soit  $s(t)$  une fonction périodique, de période  $T$ , définie par morceaux linéaires :

- $s(t) = \alpha + \beta \times t$  pour  $t \in [0, \tau[$ , avec  $s(0) = S_{\min}$  et  $s(\tau) = S_{\max}$  :

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} s(t) dt = \frac{S_{\min} + S_{\max}}{2}$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{\tau} s(t) dt = \frac{S_{\min} + S_{\max}}{2} \times \tau$$



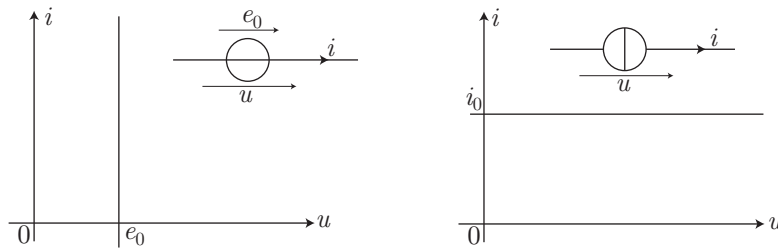
- $s(t) = \alpha' + \beta' \times t$  pour  $t \in [\tau, T[$ , avec  $s(\tau) = S_{\max}$  et  $s(T) = S_{\min}$  :

$$\frac{1}{T - \tau} \int_{\tau}^T s(t) dt = \frac{S_{\min} + S_{\max}}{2} \Rightarrow \int_{\tau}^T s(t) dt = \frac{S_{\min} + S_{\max}}{2} \times (T - \tau)$$

## 2.4.2 Fonctions de commutation

### 2.4.2.1 Association de sources

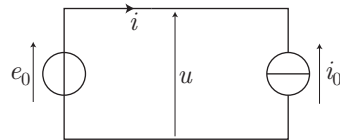
Les caractéristiques courant-tension des sources de tension et de courant :



montrent que  $u = 0$ , pour la source de tension, ou  $i = 0$ , pour la source de courant, sont impossibles :

Une source de tension ne peut-être court-circuité, tandis qu'une source de courant ne peut demeurer en circuit ouvert.

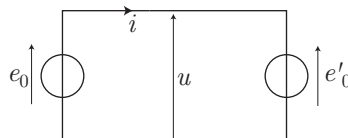
Considérons maintenant l'association d'une source de tension avec une source de courant :



Le point de fonctionnement de ce circuit a pour coordonnées :

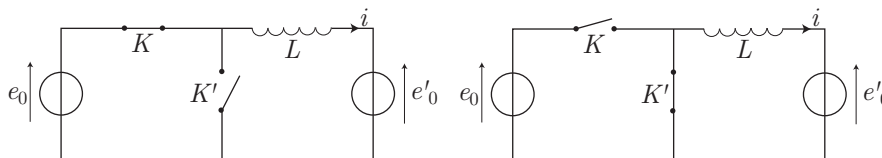
$$F(u = e_0, i = -i_0)$$

ce qui suffit à montrer qu'une telle association est physiquement réalisable. En revanche, considérons une association de deux sources de tension, de f.é.m.  $e_0$  et  $e'_0 \neq e_0$ .



Il est évident que la tension  $u$  ne pourra pas être simultanément égale à  $e_0$  et  $e'_0$ . C'est pourquoi une telle association est interdite (il en va de même d'une association directe de deux sources de courants électromoteurs différents).

Un transfert de puissance peut cependant se concevoir à travers une bobine (ou un condensateur) d'inductance  $L$ .



Lorsque l'interrupteur  $K$  est fermé, la loi des mailles révèle que :

$$e_0 - L \frac{di}{dt} = e'_0 \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{e_0 - e'_0}{L} \Rightarrow i(t) = \frac{e_0 - e'_0}{L} \times t + \text{cte}$$

Pour éviter que  $i(t)$  ne tende vers de très grandes valeurs, il est alors nécessaire d'ouvrir  $K$  et de fermer  $K'$ , afin que la bobine cède de l'énergie électrique à la source de f.é.m.  $e'_0$ .

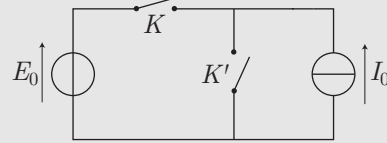
Remarque –  $K$  et  $K'$  ne peuvent être ouverts simultanément, sans quoi aucun courant ne circulerait dans le circuit, interdisant tout transfert d'énergie.

$K$  et  $K'$  ne peuvent être fermés simultanément, sans quoi la source de f.é.m.  $e_0$  serait court-circuitée.



Dans le montage suivant, l'interrupteur  $K$  fonctionne périodiquement (avec une période  $T$ ), de la manière suivante (où  $0 < \alpha < 1$ ) :

$$\begin{cases} \text{pour } t \in [0, \alpha T[ : K \text{ est fermé} \\ \text{pour } t \in [\alpha T, T[ : K \text{ est ouvert} \end{cases}$$



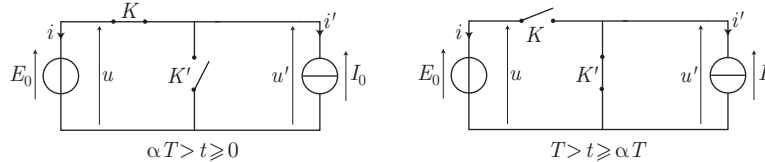
1. Trouver la séquence suivie par l'interrupteur  $K'$  pendant une période  $T$ .
2. Calculer, en fonction de  $E_0$  et  $I_0$ , les puissances moyennes  $P_e$  et  $P_c$  reçues respectivement par la source de tension et par la source de courant, pendant une période. Conclure.

#### RÉPONSE

1. Les interrupteurs  $K$  et  $K'$  ne peuvent pas être :
  - simultanément fermés, sans quoi la source de tension  $E_0$  serait court-circuitée ;
  - simultanément ouverts, sous peine de mettre la source de courant  $I_0$  en circuit ouvert.
 Par conséquent, la séquence suivie par les interrupteurs  $K$  et  $K'$  est la suivante :

	$t \in [0, \alpha T[$	$t \in [\alpha T, T[$
$K$	fermé	ouvert
$K'$	ouvert	fermé

2. Compte tenu de la séquence adoptée par les interrupteurs, le circuit proposé équivaut à :



Ces schémas permettent d'exprimer :

	$i(t)$	$u(t)$	$i'(t)$	$u'(t)$
$t \in [0, \alpha T[$	$I_0$	$E_0$	$-I_0$	$E_0$
$t \in [\alpha T, T[$	$0$	$E_0$	$-I_0$	$0$

Ce faisant, les puissances moyennes reçues par ces sources, pendant une période  $T$ , valent :

$$P_e = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \times i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} u(t) \times i(t) dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T u(t) \times \underbrace{i(t)}_{=0} dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} E_0 \times I_0 dt \Rightarrow P_e = \alpha E_0 I_0$$

et :

$$P_c = \frac{1}{T} \int_0^T u'(t) \times i'(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} u'(t) \times i'(t) dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T \underbrace{u'(t) \times i'(t)}_{=0} dt$$

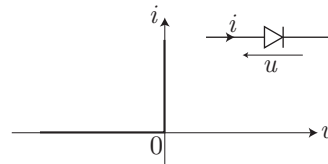
$$= \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} -E_0 \times I_0 dt = -\alpha E_0 I_0$$

On remarque ainsi l'identité :  $P_e = -P_c$ , qui signifie que toute l'énergie électrique fournie par une source est reçue par l'autre source.

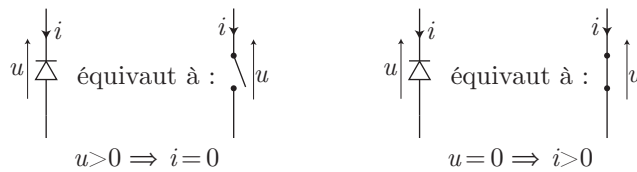
### 2.4.2.2 Réalisation des interrupteurs

Une diode idéale a pour caractéristique courant-tension :

$$\begin{cases} u < 0 \Rightarrow i = 0 \\ u = 0 \Rightarrow i > 0 \end{cases}$$

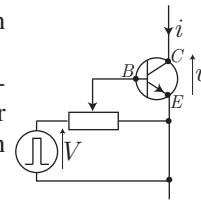


Un tel dipôle peut ainsi servir à la commutation spontanée :

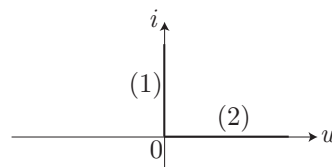


Quant à la commutation commandée, elle peut être réalisée par un *transistor* idéal (dipolaire ou à effet de champ) :

Lorsque  $V > 0$  (en fait  $V_{BE} > 0,65$  V assuré par un montage potentiométrique), le *transistor* se comporte comme un interrupteur fermé ( $i \neq 0$ ), tandis que pour  $V = 0$ , il se comporte comme un interrupteur ouvert.



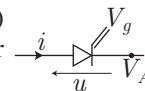
C'est pourquoi sa caractéristique courant-tension présente l'allure suivante :



- (1) :  $u = 0$  et  $i > 0$  lorsque le *transistor* est passant ( $V > 0$ ) ;
- (2) :  $u > 0$  et  $i = 0$  lorsque le *transistor* est bloqué.

Un *thyristor* peut également remplir la même fonction :

- lorsque le potentiel  $V_g$  (à l'électrode de commande : la gachette) est supérieur à  $V_A$ , le *thyristor* se comporte comme un interrupteur fermé :  $i > 0$  et  $u = 0$  ;
- lorsque  $V_g = V_A$ , le *thyristor* se comporte comme un interrupteur ouvert :  $u > 0$  et  $i = 0$ .



### 2.4.3 Transfert de puissance par hacheur

Un hacheur est un dispositif électronique permettant le transfert de puissance entre un générateur de tension continue et un récepteur de tension continue. Il contient souvent une cellule à deux interrupteurs (une diode et un *thyristor*) ainsi qu'une bobine (ou un condensateur).

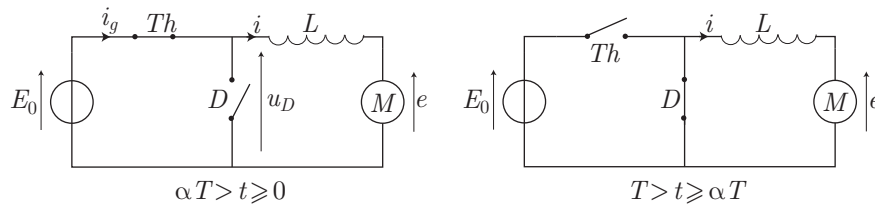
### 2.4.3.1 Hacheur abaisseur de tension

Dans le circuit schématisé ci-dessous :

- $E_0$  désigne une source de f.é.m.  $E_0$  ;
- $M$  représente un dipôle (par exemple un moteur), de f.c.é.m.  $e$  ;
- $D$  est une diode idéale ;
- $Th$  est un *thyristor*, commandé par une tension de gachette  $V_g$  imposée par un dispositif non représenté ;
- $L$  est une bobine idéale, d'auto-inductance  $L$ .

La tension de commande  $V_g$  impose au *thyristor* la séquence périodique suivante :

- $Th$  se comporte comme un interrupteur fermé pour  $t \in [0, \alpha T]$ , où  $\alpha < 1$ . La tension  $u_D$  vaut  $E_0 > 0$ . La diode est bloquée et se comporte comme un interrupteur ouvert.
- $Th$  se comporte comme un interrupteur ouvert pour  $t \in [\alpha T, T]$ . La diode se comporte comme un interrupteur fermé, de manière à laisser passer un courant  $i$  dans la bobine (l'ensemble  $(L, M)$  est assimilable à une source de courant).



Pour  $t \in [0, \alpha T]$ , la loi des mailles prévoit que :

$$E_0 = L \frac{di}{dt} + e \Rightarrow di = \frac{E_0 - e}{L} dt$$

En appelant  $I_m$  la valeur de  $i(t)$  à la date  $t = 0$ , l'intégration de cette équation conduit à :

$$\int_{I_m}^{i(t)} di = \frac{E_0 - e}{L} \int_0^t dt \Rightarrow i(t) = \frac{E_0 - e}{L} t + I_m \quad (13)$$

À la date  $t = \alpha T$ , le courant  $i(t)$  prend la valeur  $I_M$ , telle que :

$$I_M = \frac{E_0 - e}{L} \alpha T + I_m \quad (14)$$

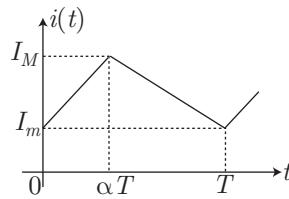
tandis que la commutation de  $Th$  et de  $D$ , pour  $t \in [\alpha T, T]$  a pour conséquence :

$$e = -L \frac{di}{dt} \Rightarrow di = -\frac{e}{L} dt \Rightarrow \int_{I_M}^{i(t)} di = -\frac{e}{L} \int_{\alpha T}^t dt \quad (15)$$

$$\Rightarrow i(t) = -\frac{e}{L} (t - \alpha T) + I_M \quad (16)$$

En outre, la continuité du courant qui traverse la bobine impose, à la date  $t = T$  :

$$i(T) = I_m \Rightarrow I_m = -\frac{e}{L} (T - \alpha T) + I_M \quad (17)$$



L'expression (17) de  $I_m$  peut alors être remplacée dans l'équation (14) qui devient, de ce fait :

$$\begin{aligned} I_M &= \frac{E_0 - e}{L} \alpha T + I_m - \frac{e}{L} (T - \alpha T) \\ \Rightarrow 0 &= \frac{\alpha E_0 T}{L} - \frac{e}{L} (T - \alpha T + \alpha T) \Rightarrow e = \alpha E_0 \text{ avec } \alpha < 1 \end{aligned}$$

La puissance moyenne délivrée par la source de tension vaut :

$$\begin{aligned} P_g &= \frac{1}{T} \int_0^T E_0 \times i_g(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} E_0 \times i_g(t) + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T E_0 \times \underbrace{i_g(t)}_{=0} dt \\ &= \frac{E_0}{T} \int_0^{\alpha T} i(t) dt \text{ car } i_g(t) = i(t) \text{ pour } t \in [0, \alpha T[ \end{aligned}$$

Or, sur l'intervalle  $[0, \alpha T[$ , le courant  $i(t)$  varie linéairement de  $I_m$  à  $I_M$ , auquel cas sa valeur moyenne y vaut :

$$\frac{1}{\alpha T} \int_0^{\alpha T} i(t) dt = \frac{I_m + I_M}{2} \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} i(t) dt = \alpha \frac{I_m + I_M}{2} \quad (18)$$

C'est pourquoi :

$$P_g = \alpha E_0 \times \frac{I_m + I_M}{2} \quad (19)$$

De même, la puissance moyenne reçue par le moteur est définie par :

$$P_m = \frac{1}{T} \int_0^T e \times i(t) dt = \frac{e}{T} \int_0^{\alpha T} i(t) dt + \frac{e}{T} \int_{\alpha T}^T i(t) dt$$

Étant donné que sur l'intervalle  $[\alpha T, T]$ ,  $i(t)$  varie linéairement de  $I_M$  à  $I_m$ , il s'ensuit que sa valeur moyenne vaut :

$$\frac{1}{T(1-\alpha)} \int_{\alpha T}^T i(t) dt = \frac{I_m + I_M}{2} \Rightarrow \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T i(t) dt = (1-\alpha) \frac{I_m + I_M}{2}$$

Compte tenu, en outre, du résultat (18), on trouve finalement :

$$P_m = \frac{I_m + I_M}{2} (\alpha + 1 - \alpha) \times e = \frac{I_m + I_M}{2} \times e$$

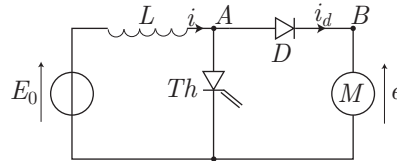
où :

$$e = \alpha E_0 \Rightarrow P_m = \alpha E_0 \times \frac{I_m + I_M}{2} = P_g$$

ce qui montre que toute l'énergie électrique délivrée par la source de tension est reçue par le moteur (pendant une période, la bobine reçoit une puissance moyenne nulle).

### 2.4.3.2 Hacheur élévateur de tension

Dans le circuit ci-dessous, les notations sont les mêmes que précédemment.

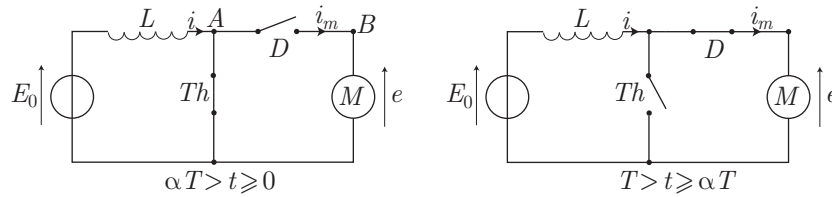


La gachette est alimentée par une tension périodique en créneaux, qui affecte au thyristor la séquence de fonctionnement suivante :

$$\begin{cases} T \text{ est passant pour } t \in [0, \alpha T[ \\ T \text{ est bloqué pour } t \in [\alpha T, T[ \end{cases}$$

De cette séquence se déduit celle de fonctionnement de la diode  $D$  :

- pour  $t \in [0, \alpha T[$ ,  $Th$  se comporte comme un interrupteur fermé, de sorte que le potentiel  $V_A$  est nul ;  $V_A - V_B = -e < 0$  suffit à bloquer la diode, qui se comporte alors comme un interrupteur ouvert.
- pour  $t \in [\alpha T, T[$ ,  $Th$  se comporte comme un interrupteur ouvert ; la diode ( $D$ ) laisse passer le courant délivré par la bobine.



Pour  $t \in [0, \alpha T[$ , la tension aux bornes de la bobine  $L$  vaut :

$$E_0 = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \int_{I_m}^{i(t)} di = \frac{E_0}{L} \int_0^t dt \Rightarrow i(t) = I_m + \frac{E_0}{L} \times t$$

À la date  $t = \alpha T$ , l'intensité  $i(t)$  vaut  $I_M$  :

$$I_M = I_m + \frac{E_0}{L} \alpha T \quad (20)$$

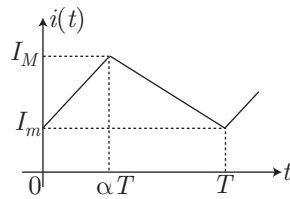
Pour  $t \in [\alpha T, T[$ , la loi des mailles indique que :

$$E_0 = L \frac{di}{dt} + e \Rightarrow \int_{I_M}^{i(t)} di = \frac{E_0 - e}{L} \int_{\alpha T}^t dt \Rightarrow i(t) = I_M + \frac{E_0 - e}{L} \times (t - \alpha T)$$

Notamment, à la date  $t = T$ , la continuité du courant qui traverse la bobine impose :

$$i(T) = I_m \Rightarrow I_m = I_M + \frac{E_0 - e}{L} \times (T - \alpha T) \quad (21)$$





L'expression (21) de  $I_m$  peut être remplacée dans l'équation (20) :

$$\begin{aligned} I_M &= I_m + \frac{E_0 - e}{L} (T - \alpha T) + \frac{E_0}{L} \alpha T \\ \Rightarrow 0 &= \frac{E_0}{L} (T - \alpha T + \alpha T) - \frac{e}{L} T(1 - \alpha) \\ \Rightarrow e &= \frac{E_0}{1 - \alpha} \text{ pour } 0 < \alpha < 1 \end{aligned}$$

En outre, la puissance moyenne délivrée par la source de tension suit la définition :

$$\begin{aligned} P_g &= \frac{1}{T} \int_0^T E_0 i(t) dt = E_0 \times \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} i(t) dt + E_0 \times \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T i(t) dt \\ &= E_0 \times \alpha \frac{I_m + I_M}{2} + E_0 \times (1 - \alpha) \frac{I_m + I_M}{2} \\ \Rightarrow P_g &= E_0 \times \frac{I_m + I_M}{2} \end{aligned}$$

tandis que la puissance moyenne reçue par le moteur vaut :

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{1}{T} \int_0^T e \times i_m(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} \underbrace{e}_{=0} \times i_m(t) dt + \frac{e}{T} \int_{\alpha T}^T i_m(t) dt \\ &= e \times (1 - \alpha) \frac{I_m + I_M}{2} \end{aligned}$$

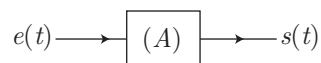
où :

$$e \times (1 - \alpha) = E_0 \Rightarrow P_m = P_g$$

## 2.5 Commande d'un système linéaire

### 2.5.1 Définitions

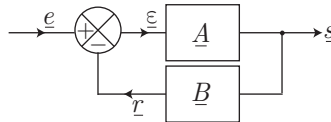
**Définition 17** Un système est linéaire si les signaux d'entrée et de sortie sont liés par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.



**Définition 18** Un système est stable si,  $e(t)$  devenant nul,  $s(t)$  tend rapidement vers zéro. Il est instable dans le cas contraire.

Remarque – Un système est oscillant si, bien que  $e(t) = 0$ ,  $s(t)$  est un signal périodique non nul.

**Définition 19** Un système bouclé présente une (contre)-réaction ramenant à l'entrée un signal dépendant du signal de sortie.

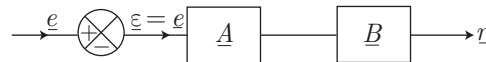


Dans le schéma-bloc ci-dessus, les systèmes (A) et (B) sont linéaires, tels que :  $\underline{s} = \underline{A}\underline{\varepsilon}$  et  $\underline{r} = \underline{B}\underline{s}$ , où  $\underline{\varepsilon} = \underline{e} - \underline{r}$ .

- Le système (A) est appelé *chaîne directe*, tandis que (B) est la *chaîne de retour*.
- Le signal  $e(t)$  constitue le *signal d'entrée*,  $s(t)$  le *signal de sortie* et  $r(t)$  le *signal de retour*.

**Définition 20** On appelle *transmittance en boucle ouverte* le rapport :

$$\underline{T} = \frac{\underline{r}}{\underline{e}}$$



Système en boucle ouverte

### 2.5.1.1 Critère de stabilité

Le système bouclé représenté précédemment possède une fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ , où :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{A}\underline{\varepsilon} = \underline{A}(\underline{e} - \underline{r}) = \underline{A}(\underline{e} - \underline{B}\underline{s}) \Rightarrow \underline{s} \times (1 + \underline{A}\underline{B}) = \underline{A}\underline{e} \\ &\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{A}}{1 + \underline{A}\underline{B}} \end{aligned}$$

On utilisera désormais la *notation de Laplace* :  $j\omega = p$  et d'autre on remarquera qu'en boucle ouverte :

$$\underline{r} = \underline{A}\underline{B}\underline{\varepsilon} \Rightarrow \underline{T}(p) = \frac{\underline{r}}{\underline{\varepsilon}} = \underline{A}\underline{B} \text{ car } \underline{\varepsilon} = \underline{e}$$

de sorte que :

$$\underline{H}(p) = \frac{\underline{A}}{1 + \underline{T}(p)} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \text{ avec } \underline{T}(p) = \underline{A} \times \underline{B} \quad (22)$$

De cette équation, il ressort que :

$$\underline{s} \times [1 + \underline{T}(p)] = \underline{A} \times \underline{e}$$

Si  $\underline{T}(t)$  est un polynôme d'ordre 2 en  $p$ ,  $1 + \underline{T}(p)$  l'est également :

$$(a_0 + a_1 p + a_2 p^2) \underline{s} = \underline{A} \times \underline{e}$$

auquel cas apparaît une équation différentielle :

$$a_0 s + a_1 \frac{ds}{dt} + a_2 \frac{d^2s}{dt^2} = \text{Re} \{ \underline{A} \times \underline{e} \} \quad (23)$$

dont la solution de l'équation dépourvue de second membre est aussi obtenue à partir des solutions (ou racines) de l'équation caractéristique :

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 = 0$$

Le discriminant :  $\Delta = a_1^2 - 4 a_0 a_2$  peut être positif ou négatif, ce qui signifie que les solutions de cette équation :

$$X_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{\Delta}}{2 a_2} \text{ et } X_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{\Delta}}{2 a_2}$$

peuvent être réelles ou complexes ; on les notera :

$$X_1 = \alpha_1 + j \beta_1 \text{ et } X_2 = \alpha_2 + j \beta_2$$

où  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  et  $\beta_2$  sont les parties réelles et imaginaires de  $X_1$  et  $X_2$ .

Ainsi, la solution de l'équation (23), dépourvue de son second membre, fait apparaître deux constantes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  telles que :

$$s(t) = \mu_1 e^{X_1 t} + \mu_2 e^{X_2 t} = \mu_1 e^{\alpha_1 t} e^{j\beta_1 t} + \mu_2 e^{\alpha_2 t} e^{j\beta_2 t}$$

Notamment, lorsque  $e(t) = 0$ , cette solution désigne la sortie  $s(t)$ . On peut alors distinguer plusieurs cas :

- si  $\alpha_1 < 0$  et  $\alpha_2 < 0$ ,  $s(t)$  tend rapidement vers zéro ; le système est stable.
- si  $\alpha_1 > 0$  ou  $\alpha_2 > 0$ ,  $s(t)$  augmente avec  $t$  ; le système est instable.
- pour les couples  $\{\alpha_1 = 0, \alpha_2 \leq 0\}$  et  $\alpha_1 \leq 0, \alpha_2 = 0$ ,  $s(t)$  est sinusoïdal ; le système devient oscillant.

En conclusion :

Un système est stable si toutes les racines de  $1 + \underline{T}(p)$  ont des parties réelles négatives.

### 2.5.1.2 Cas d'une chaîne directe à grand gain

Considérons une chaîne directe, dont le gain  $\underline{A} = A \in \mathbb{R}$  est très grand (de l'ordre de  $10^6$  ou  $10^7$ ). La fonction de transfert (22) devient :

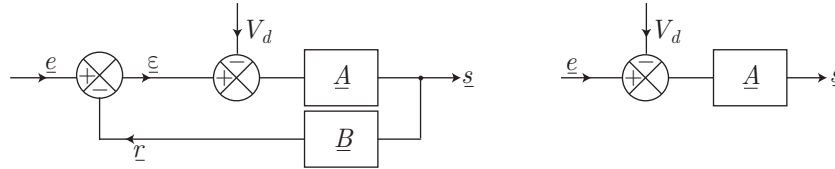
$$\underline{H}(p) = \frac{A}{1 + \underline{T}(p)} = \frac{A}{1 + A \times \underline{B}}$$

Notamment, si  $\text{Re} \{A \times \underline{B}\} \gg 1$  ;

$$\underline{H}(p) \simeq \frac{1}{\underline{B}}$$

Ce faisant,  $\underline{H}(p)$  devient insensible aux variations éventuelles de  $A$  (puisque  $\underline{H}(p)$  ne dépend plus de  $A$ ).

Supposons maintenant que la chaîne directe présente un décalage  $V_d$ , tel que  $\underline{s} = A \times (\underline{\varepsilon} - V_d)$ .



Dans ce cas, la tension de sortie du système bouclé vaut :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= A \times (\underline{\varepsilon} - V_d) = A \times (\underline{e} - \underline{r} - V_d) \text{ avec } \underline{r} = \underline{B} \underline{s} \\ \Rightarrow \underline{s} &= A \times (\underline{e} - V_d) - A \underline{B} \underline{s} \\ \Rightarrow \underline{s} &= \frac{A}{1 + A \underline{B}} (\underline{e} - V_d) \simeq \frac{1}{\underline{B}} (\underline{e} - V_d) \end{aligned}$$

Or, en l'absence de rétroaction,  $\underline{s}$  vaudrait :  $\underline{s} = A \times (\underline{e} - V_d)$ , ce qui montre que la rétroaction atténue l'influence d'un décalage.

### 2.5.1.3 Cas d'une chaîne directe passe-bas

Soit  $\underline{A} = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\underline{s}}{\underline{\varepsilon}}$  la fonction de transfert de la chaîne directe, où  $A_0$  est une

constante (souvent très supérieure à 1) et  $\omega_0$  est la pulsation de coupure à  $-3$  dB. Le gain en décibels associé à  $\underline{A}$  :

$$G_{dB} = 20 \log |\underline{A}| = 20 \log A_0 - 10 \log \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]$$

montre qu'il s'agit d'un filtre passe-bas.

Si  $\underline{B} = B = \frac{r}{s} \in \mathbb{R}$  désigne la fonction de transfert de la chaîne de retour, la transmittance en boucle fermée est donnée par la relation (22) :

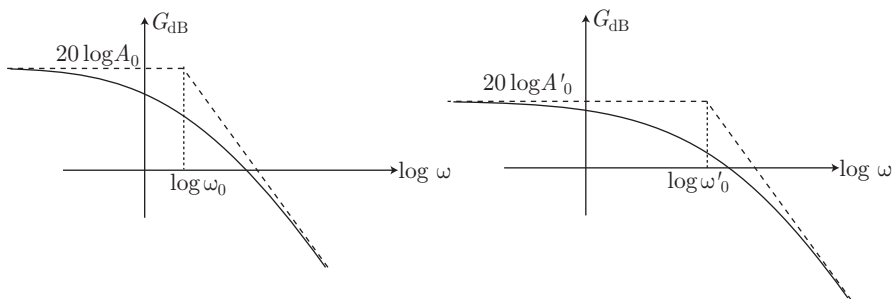
$$\begin{aligned} \underline{H}(p) &= \frac{\underline{A}}{1 + \underline{A} \underline{B}} \text{ avec } \underline{A} = \frac{A_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \\ &= \frac{A_0}{1 + \frac{p}{\omega_0}} \times \frac{1}{1 + \frac{A_0 B}{1 + \frac{p}{\omega_0}}} = \frac{A_0}{1 + A_0 B + \frac{p}{\omega_0}} \\ &= \frac{\frac{A_0}{1 + A_0 B}}{1 + \frac{p}{(1 + A_0 B) \omega_0}} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\underline{H}(p) = \frac{A'_0}{1 + \frac{p}{\omega'_0}} \text{ où } A'_0 = \frac{A_0}{1 + A_0 B} \text{ et } \omega'_0 = (1 + A_0 B) \omega_0 \quad (24)$$

Le système bouclé se comporte également comme un filtre passe-bas, de gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log A'_0 - 10 \log \left[ 1 + \left( \frac{\omega}{\omega'_0} \right)^2 \right]$$



Il apparaît ainsi que la rétroaction provoque :

- un élargissement de la bande passante, dont la pulsation de coupure passe de  $\omega_0$  à  $\omega'_0 = (1 + A_0 B) \omega_0 \gg \omega_0$  ;
- un affaiblissement du gain *maximum* qui passe de  $A_0$  à  $A'_0 = \frac{A_0}{1 + A_0 B} \ll A_0$ .

**Définition 21** Pour un système dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

on appelle produit gain  $\times$  bande la grandeur :  $H_0 \times \omega_0$ .

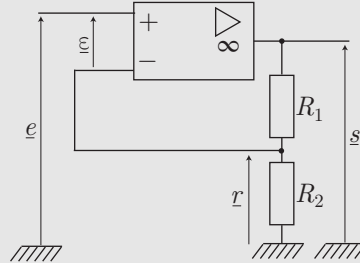
Remarque – Le produit gain  $\times$  bande d'un système linéaire n'est pas modifié par la rétro-action :

$$A'_0 \times \omega'_0 = \frac{A_0}{1 + A_0 B} \times (1 + A_0 B) \omega_0 = A_0 \times \omega_0$$



On s'intéresse au montage amplificateur non inverseur, dans lequel l'A.O. est idéal et a pour gain dynamique :

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$



On donne :  $\mu_0 = 10^7$ ,  $\omega_0 = 10$  Hz,  $R_1 = 10^4 \times R_2$ .

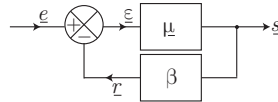
1. Montrer que ce circuit se présente comme un montage à rétro-action ; donner l'expression de la transmittance  $\beta = \frac{r}{s}$  (réelle) de la chaîne de retour, en fonction de  $R_1$  et  $R_2$ .
2. Démontrer que ce circuit est stable.
3. De l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ , déduire la bande passante de ce circuit.
4. Retrouve-t-on la loi du montage amplificateur non inverseur :  $\underline{s} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \underline{e}$  ?

#### RÉPONSE

1. Les résistances  $R_1$  et  $R_2$  constituent un pont diviseur de tension :

$$r = \frac{R_2}{R_1 + R_2} s \Rightarrow r = \beta s \text{ avec } \beta = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \simeq 10^{-4}$$

En outre, puisque  $\underline{s} = \underline{\mu} \underline{e} = \underline{\mu} (\underline{e} - \underline{r})$ , le montage proposé peut être présenté sous forme d'un schéma-bloc :



2. Étant donné que  $\underline{r} = \beta \underline{s}$ , il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{\mu} (\underline{e} - \underline{r}) = \underline{\mu} \underline{e} - \underline{\mu} \beta \underline{s} \Rightarrow \underline{s} (1 + \underline{\mu} \beta) = \underline{\mu} \underline{e} \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{\mu_0 \beta}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}\right) \underline{s} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \underline{e} \\ &\Rightarrow (1 + \mu_0 \beta) \underline{s} + \frac{\mu_0}{\omega_0} \frac{d\underline{s}}{dt} = \mu_0 \underline{e} \end{aligned}$$

Notamment, si  $e(t)$  est identiquement nul, l'équation caractéristique :

$$1 + \mu_0 \beta + \frac{\mu_0}{\omega_0} X = 0 \Rightarrow X = -\omega_0 \times \frac{1 + \mu_0 \beta}{\mu_0} \simeq -\beta \omega_0$$

génère la solution :

$$s(t) = \alpha e^{-\beta \omega_0 t} \quad (\alpha \text{ est une constante})$$

qui tend rapidement vers zéro, ce qui garantit la stabilité du montage.

3. La fonction de transfert du circuit vaut :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} &= \frac{\underline{\mu}}{1 + \underline{\mu}\beta} = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \times \frac{1}{1 + \frac{\beta\mu_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}} \\ &= \frac{\mu_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0} + \beta\mu_0} = \frac{\frac{\mu_0}{1 + \beta\mu_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0(1 + \beta\mu_0)}} \end{aligned}$$

Elle s'écrit ainsi :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \text{ où } H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \beta\mu_0} \text{ et } \omega_c = (1 + \beta\mu_0) \times \omega_0$$

ce qui montre que le circuit proposé se comporte comme un filtre passe-bas de bande passante  $]0, \omega_c]$  où la pulsation de coupure vaut :

$$\omega_c = (1 + \beta\mu_0) \times \omega_0 = (1 + 10^{-4} \times 10^7) \times 10 \simeq 10 \text{ kHz}$$

4. Tant que  $\omega$  demeure inférieur à  $\omega_c = 10 \text{ kHz}$ , la fonction de transfert se simplifie :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \simeq H_0 = \frac{\mu_0}{1 + \beta\mu_0}$$

où  $\beta\mu_0 = 10^{-4} \times 10^7 = 10^3 \gg 1$  permet de poser :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \simeq \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_1}{R_2}$$

Ce résultat confirme celui obtenu pour le montage amplificateur non inverseur.

En l'absence de rétroaction, les tensions complexes  $\underline{s}$  et  $\underline{e}$  sont liées par la relation :

$$\begin{aligned} \underline{s} = \underline{A}\underline{e} &= \frac{A_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \underline{e} \Rightarrow \underline{s} + \frac{1}{\omega_0} j\omega \underline{s} = A_0 \underline{e} \\ &\Rightarrow s + \frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} = A_0 e \end{aligned}$$

La solution  $s_0$  de l'équation différentielle sans second membre :

$$s_0(t) = \alpha e^{-\omega_0 t} = \alpha e^{-t/\tau} \text{ avec } \tau = \frac{1}{\omega_0}$$

présente un régime transitoire qui s'annule rapidement lorsque  $t$  excède quelques fois  $\tau$  ; cette grandeur est appelée *temps caractéristique* du montage (il représente le temps au bout duquel le régime transitoire disparaît).

Le bouclage du système génère la fonction de transfert :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{A'_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega'_0}} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \text{ où } \omega'_0 = (1 + A_0 B) \omega_0 \gg \omega_0 \\ &\Rightarrow \underline{s} + \frac{1}{\omega'_0} j\omega \underline{s} = A'_0 \underline{e} \Rightarrow s + \frac{1}{\omega'_0} \frac{ds}{dt} = A'_0 e \end{aligned}$$

À nouveau, un régime transitoire apparaît :

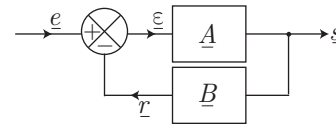
$$s_0(t) = \beta e^{-\omega'_0 t} = \beta e^{-t/\tau'} \text{ avec } \tau' = \frac{1}{\omega'_0} \ll \frac{1}{\omega_0} = \tau$$

dont le temps caractéristique  $\tau'$  est beaucoup plus petit que  $\tau$  : ce régime transitoire disparaît alors beaucoup plus rapidement qu'en l'absence de rétroaction, au profit du régime permanent.

## 2.5.2 Générateur quasi sinusoïdal

### 2.5.2.1 Généralités

Considérons le système bouclé équivalent au schéma-bloc représenté ci-contre. La fonction de transfert d'un tel système est donnée par la loi (22) et la page 202 :



$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{A}}{1 + \underline{T}} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \text{ avec } \underline{T} = \underline{A} \times \underline{B} \\ \Rightarrow (1 + \underline{T}) \underline{s} &= \underline{A} \underline{e} \end{aligned}$$

Lorsque  $e(t)$  est nul, un tel système peut générer des oscillations si  $(1 + \underline{T}) \underline{s} = 0$ , c'est-à-dire, puisque  $\underline{s} \neq 0$  :

$$1 + \underline{T} = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{1 + \underline{T}\} = 0 \text{ et } \operatorname{Im}\{\underline{T}\} = 0$$

Notamment, si  $1 + \underline{T} = a_0 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2$  :

$$\begin{aligned} (1 + \underline{T}) \underline{s} = 0 &\Rightarrow a_2 (j\omega)^2 \underline{s} + a_1 j\omega \underline{s} + a_0 \underline{s} = 0 \\ &\Rightarrow a_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s = 0 \end{aligned}$$

Cette équation admet une solution sinusoïdale non amortie, à condition que  $a_1 = 0$  (c'est-à-dire  $\operatorname{Im}\{\underline{T}\} = 0$ ), auquel cas :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{a_0}{a_2} s = 0$$

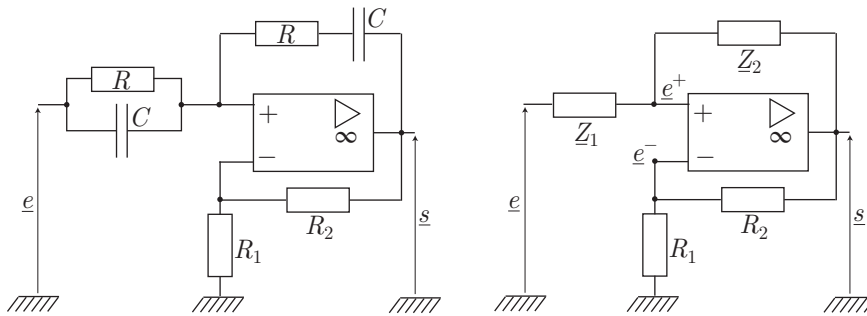
donne la pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$  des oscillations, à condition toutefois que  $a_0$  et  $a_2$  aient le même signe ; il s'ensuit que :

$$\operatorname{Re}\{1 + \underline{T}\} = -a_2 \omega^2 + a_0 = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

### 2.5.2.2 Cas de l'oscillateur à pont de Wien

Un tel montage est représenté ci-dessous :





avec :  $Z_1 = \frac{R}{1 + RC\omega j}$  et  $Z_2 = \frac{1 + RC\omega j}{C\omega j}$ .

On supposera l'A.O. idéal, de gain  $\mu_0$ , réel et très grand. On posera, en outre :  $k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$ . Les potentiels  $e^+$  et  $e^-$  sont directement accessibles à l'aide du théorème de Millman :

$$e^+ = \frac{\frac{e}{Z_1} + \frac{s}{Z_2}}{\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}} = \frac{Z_2 e}{Z_1 + Z_2} + \frac{Z_1 s}{Z_1 + Z_2}$$

et :

$$e^- = \frac{\frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s = \frac{1}{k} s$$

Par suite, lorsque l'A.O. fonctionne en régime linéaire :

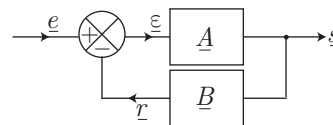
$$s = \mu_0 (e^+ - e^-) = \frac{\mu_0 Z_2}{Z_1 + Z_2} \left[ e - \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \left( \frac{1}{k} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) s \right]$$

On trouve ainsi deux nombre complexes :

$$A = \frac{\mu_0 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

et :

$$B = \frac{Z_1 + Z_2}{Z_2} \left( \frac{1}{k} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)$$



tels que :

$$s = A \times (e - B s) \Rightarrow (1 + AB) s = A e$$

justifie la représentation du circuit sous forme de schéma-bloc. On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}
 1 + \underline{T} &= 1 + \underline{A}\underline{B} = 1 + \mu_0 \left( \frac{1}{k} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) \\
 &= 1 + \frac{\mu_0}{k} - \mu_0 \times \frac{1}{3 + j \left( RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)} \\
 &= \mu_0 \left( \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{k} - \frac{3}{D} \right) + j \frac{\mu_0}{D} \times \left( RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right) \\
 &\quad \text{en posant } D = 9 + \left( RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)^2
 \end{aligned}$$

Par suite, des oscillations prennent naissance si  $1 + \underline{T} = 0$ , c'est-à-dire :

$$\text{Im}\{\underline{T}\} = 0 \Rightarrow RC\omega - \frac{1}{RC\omega} = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{RC}}$$

et :

$$\begin{aligned}
 \text{Re}\{1 + \underline{T}\} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{k} - \frac{3}{9 + \left( RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)^2} = 0 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} + \frac{1}{k} - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow k = \frac{3\mu_0}{\mu_0 - 3}
 \end{aligned}$$

Notamment, si  $\mu_0 \gg 1$ ,  $k \simeq 3$ .

*Remarque* – Dans la pratique, atteindre la valeur de  $k$  qui annule exactement  $\text{Re}\{1 + \underline{T}\}$  est peu réalisable. On s'arrange alors pour prendre  $k$  un peu inférieur à 3, de sorte que  $\text{Re}\{1 + \underline{T}\} > 0$  entraîne une saturation de l'A.O., si bien que  $s = \pm V_{sat}$  conduit aux équations :

$$e^- = \pm \frac{1}{k} V_{sat}$$

et :

$$\underline{e}^+ = \frac{1}{3 + RC\omega j + \frac{1}{RC\omega j}} s \Rightarrow \frac{d^2 e^+}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{de^+}{dt} + \omega_0^2 e^+ = 0 \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{RC}}$$

Cette dernière équation admet pour solution générale :

$$e^+(t) = \alpha_1 e^{X_1 t} + \alpha_2 e^{X_2 t} \text{ avec } \begin{cases} X_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2} \omega_0 < 0 \\ X_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \omega_0 < 0 \end{cases}$$

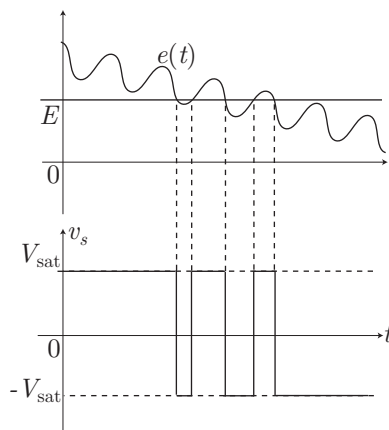
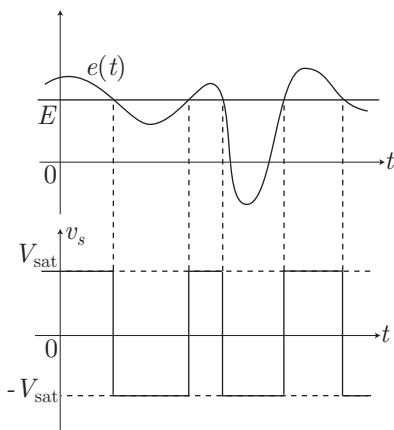
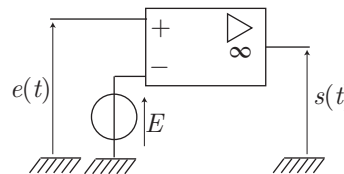
Ce faisant,  $e^+(t)$  décroît jusqu'à ce que les valeurs relatives de  $e^+$  et de  $e^-$  permettent à l'A.O. de décupérer un régime linéaire de fonctionnement.

### 2.5.3 L'amplificateur opérationnel saturé

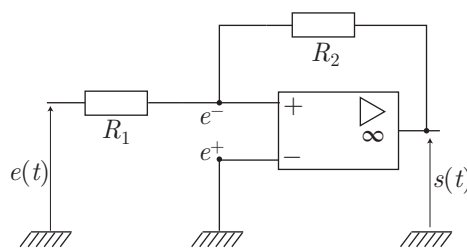
#### 2.5.3.1 Comparateur à hystérésis

L'amplificateur opérationnel peut être utilisé comme *comparateur simple* car sa tension de sortie  $s$  dépend des valeurs relatives des tensions d'entrée :

$$\begin{cases} s(t) = V_{\text{sat}} > 0 & \text{si } e(t) > E \\ s(t) = -V_{\text{sat}} < 0 & \text{si } e(t) < E \end{cases}$$



Cependant, le signal  $e(t)$  peut être affecté de signaux parasites, ce qui provoque de rapides transitions de la tension de sortie  $s(t)$  (voir deuxième schéma représenté ci-dessus). Pour éviter l'apparition d'un tel phénomène, on réalise un *comparateur à hystérésis*, schématisé ci-dessous :



Le théorème de Millman fournit directement :

$$e^+ = \frac{\frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 e + R_1 s) \quad (25)$$

C O U R S

tandis que l'A.O. est caractérisé par :

$$\begin{cases} s(t) = V_{\text{sat}} & \text{si } e^+ > e^- = 0 \\ s(t) = -V_{\text{sat}} & \text{si } e^+ < 0 \end{cases}$$

On posera désormais :  $V_0 = \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$ , de manière à étudier plusieurs cas :

- Cas (1) : si  $e > V_0$ ,  $e^+ > 0$  impose  $s = V_{\text{sat}}$ .
- Cas (2) : partant de  $s = V_{\text{sat}}$ , la relation (25) montre que :

$$e^+ = \frac{1}{R_1 + R_2} (R_2 e + R_1 V_{\text{sat}}) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (e + V_0) \quad (26)$$

Ainsi, tant que  $e > -V_0$ ,  $e^+ > 0$  maintient la tension  $s$  à la valeur  $V_{\text{sat}}$ .

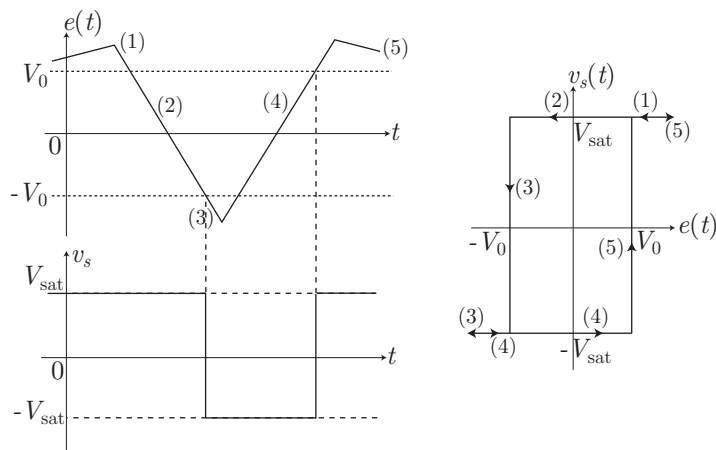
- Cas (3) : dès que  $e < -V_0$ , l'identité (26) révèle que :

$$e^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (e + V_0) < 0$$

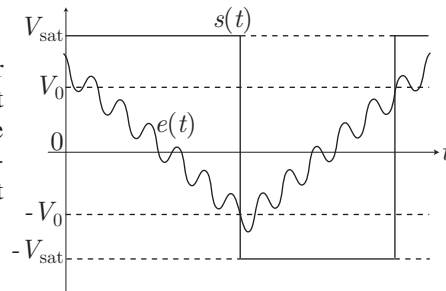
Ce faisant,  $s(t)$  prend la valeur  $-V_{\text{sat}}$  tandis que l'équation (25) devient :

$$e^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (e - V_0) \quad (27)$$

- Cas (4) : à partir de la situation précédente, supposons que  $e(t)$  augmente. Tant que  $e(t)$  demeure inférieur à  $V_0$ , la relation (27) montre que  $e^+ < 0$ , c'est-à-dire  $s(t) = -V_{\text{sat}}$ .
- Cas (5) : dès que  $e \geq V_0$ ,  $e^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (e - V_0)$  devient positif :  $s(t)$  prend la valeur  $+V_{\text{sat}}$  et l'expression de  $e^+$  prend la forme (26), jusqu'à ce que  $e(t)$  devienne à nouveau inférieur à  $-V_0$ .

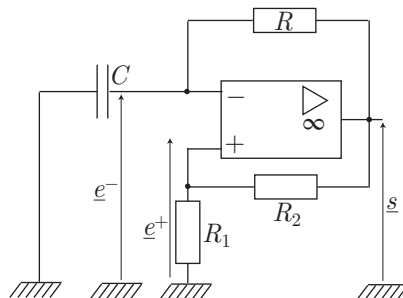


Un tel montage permet de s'affranchir des éventuels parasites qui accompagnent  $e(t)$  car le basculement de la sortie  $s(t) : V_{\text{sat}} \leftrightarrow -V_{\text{sat}}$  se réalise dès la première fois que  $e(t) < -V_0$  en décroissant ou que  $e(t) > V_0$  en croissant.



### 2.5.3.2 Générateur de signal rectangulaire

On associe, au comparateur à hystérésis décrit précédemment, un montage intégrateur  $\{R, C\}$  :



La loi du pont diviseur de tension permet d'exprimer les potentiels  $e^+$  et  $e^-$  aux entrées de l'amplificateur opérationnel :

$$e^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s \tag{28}$$

et :

$$\underline{e}^- = \frac{1}{R + \frac{1}{C\omega j}} \underline{s} = \frac{1}{1 + RC\omega j} \underline{s} \Rightarrow \underline{e}^- + RC\omega j \underline{e}^- = \underline{s}$$

soit encore :

$$e^- + RC \frac{de^-}{dt} = s \tag{29}$$

En supposant ici que  $s$  soit constant, cette équation différentielle admet pour solution générale :

$$e^-(t) = s + \alpha e^{-t/\tau} \text{ où } \tau = RC \text{ et } \alpha = \text{cte} \tag{30}$$

Étudions le comportement de ce circuit dans plusieurs configurations :

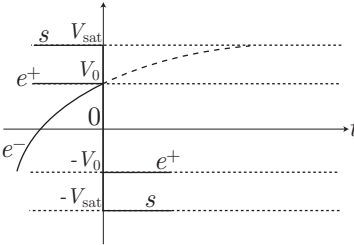
- Si  $s(t) = V_{\text{sat}} > 0$ ,  $e^+$  prend la valeur :

$$e^+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{\text{sat}} = V_0 > 0$$

tant que  $e^-$  demeure inférieur à  $V_0$ . Cependant, puisque  $s = V_{\text{sat}}$ , l'équation (29) montre que :

$$RC \frac{de^-}{dt} = s - e^- = V_{\text{sat}} - e^- > 0$$

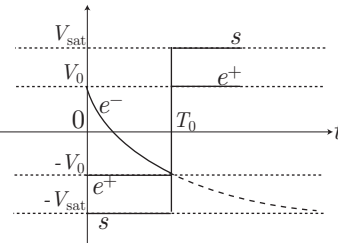
ce qui prouve que  $e^-(t)$  augmente ; lorsque  $e^-(t)$  atteint la valeur  $V_0$  de  $e^+$ , la tension  $s$  bascule à la valeur  $-V_{\text{sat}}$ . On choisira l'origine  $t = 0$  à cet instant.



- Pour  $t \geq 0$ ,  $s = -V_{\text{sat}}$ , de sorte que  $e^+ = -V_0$ . En outre l'équation (30) doit rendre compte de la valeur initiale de  $e^-$  :

$$\begin{aligned} e^-(t) &= -V_{\text{sat}} + \alpha e^{-t/\tau} \\ \Rightarrow V_0 &= -V_{\text{sat}} + \alpha \Rightarrow \alpha = V_0 + V_{\text{sat}} \\ \Rightarrow e^-(t) &= -V_{\text{sat}} + (V_0 + V_{\text{sat}}) e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

ce qui montre que la tension  $e^-(t)$  décroît avec  $t$ .



On note  $T_0$  la date pour laquelle  $e^-$  prend la valeur  $-V_0$ , ce qui fait basculer  $s$  de  $-V_{\text{sat}}$  à  $+V_{\text{sat}}$  :

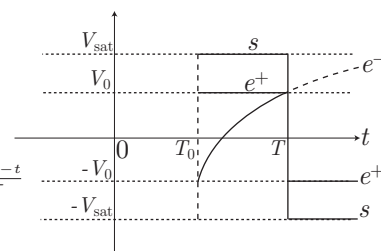
$$\begin{aligned} e^-(T_0) = -V_0 &\Rightarrow -V_0 = -V_{\text{sat}} + (V_0 + V_{\text{sat}}) e^{-T_0/\tau} \\ &\Rightarrow T_0 = \tau \ln \left( \frac{V_{\text{sat}} + V_0}{V_{\text{sat}} - V_0} \right) \end{aligned}$$

- Pour  $t \geq T_0$ ,  $s = +V_{\text{sat}}$  et  $e^+$  prend la valeur  $V_0$ . Dans ce cas, l'équation (30) montre que :

$$e^-(t) = s + \alpha e^{-t/\tau} = V_{\text{sat}} + \alpha e^{-t/\tau}$$

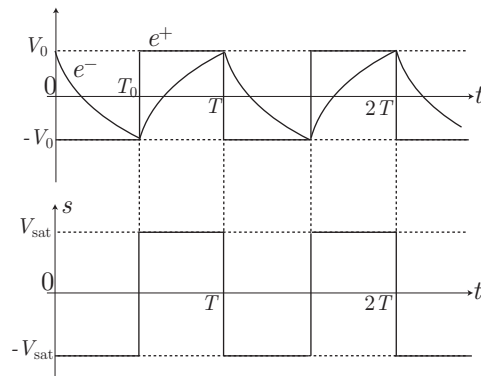
où la constante  $\alpha$  tient compte de ce que :

$$\begin{aligned} e^-(T_0) &= -V_0 \\ \Rightarrow -V_0 &= V_{\text{sat}} + \alpha e^{-T_0/\tau} \\ \Rightarrow \alpha &= -(V_0 + V_{\text{sat}}) e^{T_0/\tau} \\ \Rightarrow e^-(t) &= V_{\text{sat}} - (V_0 + V_{\text{sat}}) e^{\frac{T_0-t}{\tau}} \end{aligned}$$



Ce faisant, la tension  $e^-(t)$  augmente jusqu'à atteindre la valeur  $V_0$  qui assure à  $s(t)$  le basculement de  $+V_{\text{sat}}$  à  $-V_{\text{sat}}$ , à une date  $T$  ; on se retrouve alors dans le premier cas. Aussi, la date  $T$  à laquelle se produit le basculement de  $s(t)$  vérifie :

$$\begin{aligned} e^-(T) = V_0 &= V_{\text{sat}} - (V_0 + V_{\text{sat}}) e^{\frac{T_0-T}{\tau}} \\ \Rightarrow T &= T_0 + \tau \ln \left( \frac{V_{\text{sat}} + V_0}{V_{\text{sat}} - V_0} \right) \end{aligned}$$



Apparaissent alors, en  $s(t)$  (ou en  $e^+(t)$ ) des oscillations rectangulaires, de période :

$$T = T_0 + \tau \ln \left( \frac{V_{\text{sat}} + V_0}{V_{\text{sat}} - V_0} \right) = 2\tau \ln \left( \frac{V_{\text{sat}} + V_0}{V_{\text{sat}} - V_0} \right)$$

avec :

$$V_{\text{sat}} + V_0 = V_{\text{sat}} \times \left( 1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = V_{\text{sat}} \times \frac{2R_1 + R_2}{R_1 + R_2}$$

et :

$$V_{\text{sat}} - V_0 = V_{\text{sat}} \times \left( 1 - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right) = V_{\text{sat}} \times \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Il s'ensuit finalement que :

$$T = 2RC \ln \left( 1 + 2 \frac{R_1}{R_2} \right)$$

### ● 34 **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

20 min.

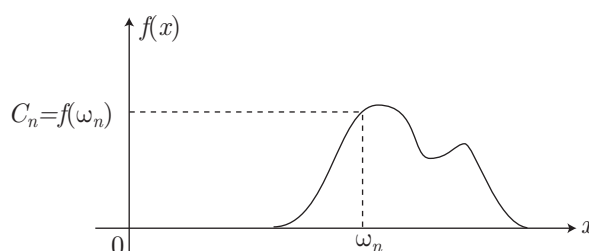
Spectres d'un signal

MP-PC-PSI-PT

Soit  $v(t)$  une tension périodique, de période  $T$ .  $v(t)$  admet une décomposition en série de Fourier de la forme :

$$v(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t)$$

où  $\omega_n = n\omega = n \times \frac{2\pi}{T}$  et  $C_n = f(n\omega)$ .



Cette tension est appliquée à l'entrée d'un multiplieur, dont l'entrée est soumise à une tension  $u(t) = \cos(\omega_0 t)$ , avec  $\omega_0 \gg \omega$  (donc  $\omega_0 > \omega_n$  sur toute la gamme du spectre de  $v(t)$ ).

1. Sachant que le multiplieur fournit une tension  $s(t) = v(t) \times u(t)$ , présenter  $s(t)$  sous la forme d'une série :

$$s(t) = D_0 \cos(\Omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\Omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} D'_n \cos(\Omega'_n t)$$

où  $D_0$  est une constante, tandis que  $D_n$  et  $D'_n$  sont des fonctions de  $\Omega_n$  et de  $\Omega'_n$  :

$$D_n = g(\Omega_n) \text{ et } D'_n = h(\Omega'_n)$$

On explicitera ces fonctions

2. Donner la relation entre  $g(\Omega_n)$  et  $f(\Omega_n)$  d'une part et entre  $h(\Omega'_n)$  et  $f(\Omega'_n)$  d'autre part.

Trouver une interprétation géométrique aux résultats obtenus puis en déduire l'allure du spectre en fréquences de  $s(t)$  (on le représentera en tenant compte du spectre de  $v(t)$ ).

### ● 35 **Lycée Faidherbe, Lille**

60 min.

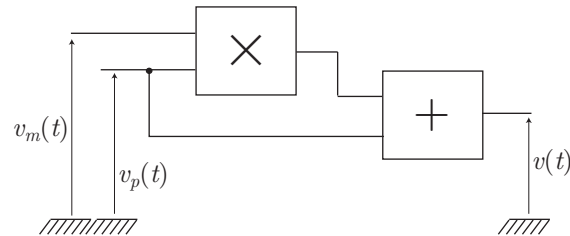
Spectre d'un signal

MP-PC-PSI-PT

Le champ électromagnétique rayonné par une antenne doit être modulé pour qu'il puisse véhiculer une information. Supposons d'abord que le signal de modulation soit sinusoïdal :  $v_m(t) = V_m \cos(\omega_m t)$ . Ce signal module la « porteuse » :  $v_p(t) = V_p \cos(\omega_p t)$  qui est la tension appliquée à l'antenne d'émission en l'absence d'ondulation. La porteuse est fournie par un oscillateur sinusoïdal haute fréquence, dont la fréquence d'oscillation  $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$  ( $f_p \gg f_m = \frac{\omega_m}{2\pi}$ ) est particulièrement stable.



1. La modulation s'effectue à l'aide d'un circuit comprenant un multiplieur de constante multiplicative  $k$  et d'un additionneur.

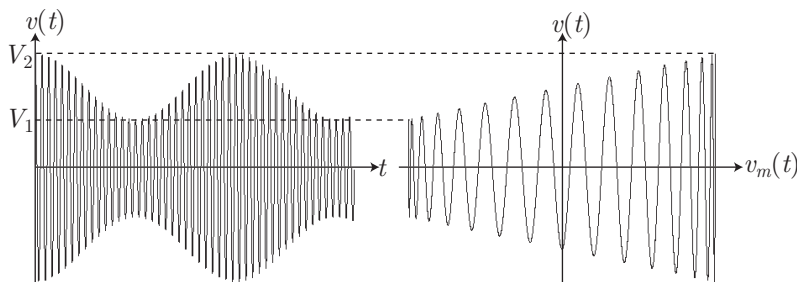


Montrer que le signal modulé est de la forme :

$$v(t) = V_p \times [1 + m \cos(\omega_m t)] \times \cos(\omega_p t)$$

où  $m$  est l'indice de modulation que l'on explicitera.

2. Afin de mesurer l'indice de modulation du signal porteur, on réalise les deux oscillogrammes représentés ci-dessous .



Quels sont les modes de l'oscilloscope utilisés pour la réalisation de chacun des oscillogrammes ? Exprimer l'indice de modulation en fonction des tensions extrémales  $V_1 = 2 \text{ V}$  et  $V_2 = 18 \text{ V}$  puis le calculer numériquement.

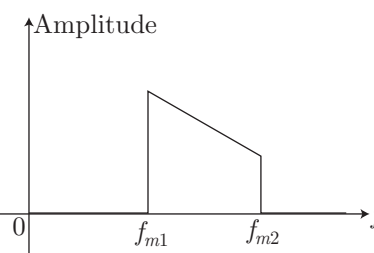
3. Déterminer le spectre de fréquences du signal modulé  $v(t)$  et le représenter. En déduire, pour ce type de modulation, la largeur du spectre de fréquences nécessaire à la transmission d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_m$ .
4. En l'absence de modulation ( $m = 0$ ), la puissance rayonnée par l'antenne est  $P = 2100 \text{ W}$ . Quelle puissance moyenne  $P_t$  rayonne cette antenne quand l'indice de modulation  $m$  a la valeur du 2. ?

On rappelle qu'un signal de tension efficace  $U_{\text{eff}}$  permet de rayonner une puissance  $P = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R}$ , où  $R = 73,3 \Omega$ .

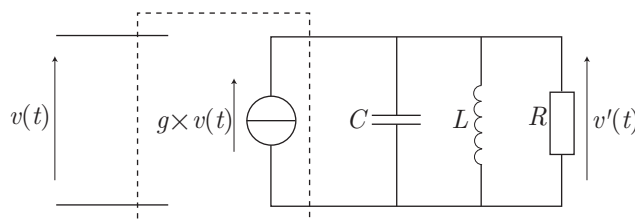
5. Plus généralement, le signal de modulation occupe une plage de fréquences  $[f_{m1}, f_{m2}]$  (figure ci-dessous). Représenter le spectre de fréquences du signal modulé.

En radiodiffusion,  $f_{m1} = 300$  Hz et  $f_{m2} = 4,5$  kHz, quelle est la largeur de la bande de fréquences occupée par le signal modulé ?

Quel écart minimal de fréquence  $\Delta f_{\min}$  doit-il exister entre les fréquences des porteuses de deux émetteurs pour que leurs émissions ne soient pas mutuellement brouillées ?



6. En fait, le signal modulé doit être amplifié avant d'être appliqué à l'antenne. Pour cela on intercale, entre la sortie du modulateur délivrant le signal  $v(t)$  et l'antenne, un amplificateur sélectif dont le circuit équivalent est donné par la figure ci-dessous.



La transmittance  $g$  de l'amplificateur est une constante réelle dans la bande de fréquences utilisée et le filtre  $RLC$  est accordé sur la fréquence  $f_p$  du signal porteur ( $LC\omega_p^2 = 1$ ). Le facteur de qualité du circuit est  $Q = \frac{R}{L\omega_p}$  où la résistance  $R$  inclut, pour l'essentiel, la résistance de rayonnement.

- (a) Calculer l'impédance complexe  $\underline{Z}$  du circuit  $RLC$  et montrer que pour les pulsations  $\omega$  telles que  $\Delta\omega = \omega - \omega_p \ll \omega_p$ , elle peut s'écrire :

$$\underline{Z}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2jQ \frac{\Delta\omega}{\omega_p}}$$

En déduire les expressions du module  $Z = |\underline{Z}|$  et de l'argument  $\varphi = \arg\{\underline{Z}\}$ .

- (b) En déduire que la tension  $v(t)$ , à la sortie de l'amplificateur, est :

$$v'(t) = V'_p \times [1 + m' \cos(\omega_m t + \varphi')] \times \cos(\omega_p t)$$

expression dans laquelle on explicitera  $V'_p$ ,  $\varphi'$  et le nouvel indice de modulation  $m'$ . Commenter l'expression de  $v'(t)$  obtenue.

- (c) À quelles conditions le signal amplifié  $v'(t)$  est-il une image non déformée du signal  $v(t)$ , lorsque la pulsation  $\omega_m$  du signal de modulation varie entre  $\omega_{m1}$  et  $\omega_{m2}$  ?

Vérifier que ces conditions sont réalisées lorsque  $\frac{\omega_m}{\omega_p} \ll \frac{1}{2Q}$ .

ÉNONCÉS

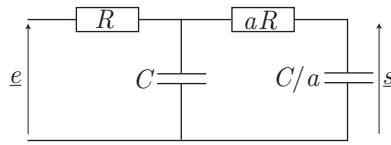
### ● 36 ————— Concours Commun Polytechnique

10 min.

Système électronique linéaire

MP-PC-PSI-PT

Dans le circuit représenté ci-dessous,  $R$  désigne une résistance,  $C$  une capacité et  $a$  une constante positive sans dimension.



Déterminer, le plus rapidement possible, la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{\varepsilon}$ .

● **37** **Concours Centrale**

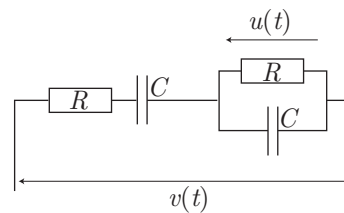
10 min.

Système électronique linéaire

MP-PC-PSI-PT

On applique, en entrée du montage ci-contre, une tension sinusoïdale  $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$ .

1. Déterminer l'expression  $\omega_0$  de  $\omega$  pour que l'amplitude  $U_0$  de  $u(t)$  soit maximale ( $U_0^{\max}$ ).
2. Tracer le diagramme de Bode :  $G_{dB}$  en fonction de  $\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ .



3. Trouver les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour lesquelles  $U_0 = \frac{U_0^{\max}}{\sqrt{2}}$ .

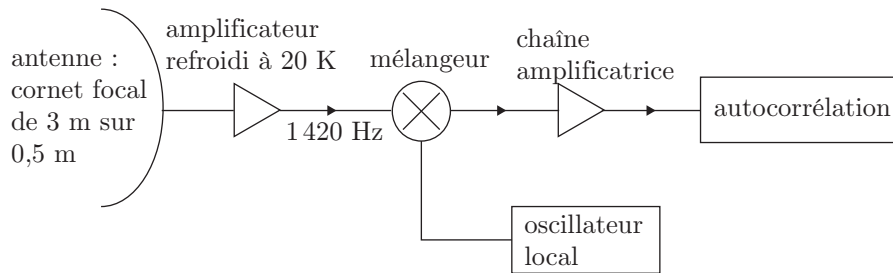
● **38** **Lycée Pissarro, Pontoise**

15 min.

Système électronique linéaire

MP-PC-PSI-PT

Inauguré en 1965, le radiotélescope de Nancey a été créé pour étudier le décalage Doppler de la raie 21 cm de l'atome d'hydrogène, due au couplage spin nucléaire - spin électronique. C'est un moyen privilégié d'étude de la cinématique de l'hydrogène interstellaire et donc des mouvements dans l'univers. De 1956 à 1967, de nombreux chercheurs ont travaillé à la très délicate mise au point de la chaîne de réception suivante.



On se propose de reproduire simplement le principe d'un mélangeur en TP, en se plaçant 6 décades plus bas en fréquence.

1. **Dédoublément de fréquence**

On a deux tensions :

$$\begin{aligned} a(t) &= A\sqrt{2} \cos(2\pi f_a t) & f_a &= 1420 \text{ Hz} \\ e_0(t) &= E_0\sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) & f_0 &= 1450 \text{ Hz} \end{aligned}$$

ÉNONCÉS

prises aux entrées d'un multiplieur AD 633 ; on obtient une tension en sortie :

$$m(t) = a(t) \times e_0(t)$$

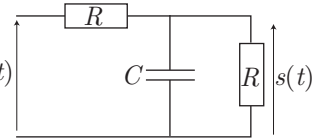
Démontrer que  $m(t)$  est la superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquences  $f$  et  $f' > f$ .

Calculer numériquement  $f$  et  $f'$ .

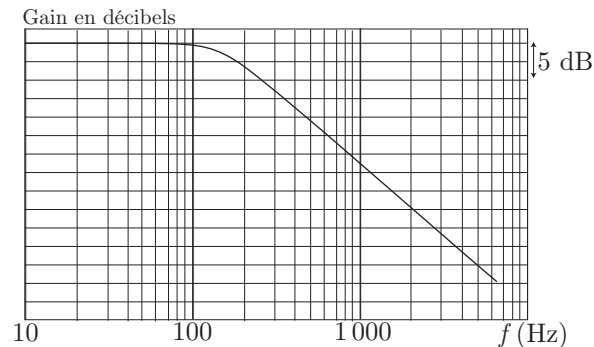
## 2. Filtrage

On utilise le filtre ci-contre.

- (a) En effectuant un schéma équivalent en B.F. (basse fréquence), puis un autre en H.F. ( $e(t)$  haute fréquence), déterminer sans calcul le type de ce filtre.



- (b) Déterminer la fonction de transfert  $H(j\omega)$  de ce filtre.  
 (c) Déterminer sa pulsation de coupure  $\omega_c$ , en fonction de  $R$  et  $C$ .  
 (d) On a tracé ci-après le diagramme de Bode en gain de ce filtre.



Déterminer un ordre de grandeur du produit  $RC$ .

- (e) En haute fréquence, pourquoi parle-t-on d'une intégration ?  
 Comment vérifie-t-on cette propriété sur le diagramme de Bode en gain ?  
 Vers quelle valeur tend alors le déphasage de  $s(t)$  par rapport à  $e(t)$  ?

## 3. Le mélangeur

On place, à l'entrée de ce filtre, le signal  $m(t)$ . La sortie est alors :

$$s(t) = S \cos(2\pi ft + \varphi_S) + S' \cos(2\pi f't + \varphi_{S'})$$

- (a) Déterminer la valeur numérique de  $\frac{S}{S'}$  à partir du diagramme de Bode.  
 (b) Sachant que l'atténuation de la véritable chaîne est bien supérieure, en déduire la valeur de la fréquence du *signal décalé* de la chaîne originale.

## ● 39 Concours Centrale

15 min.

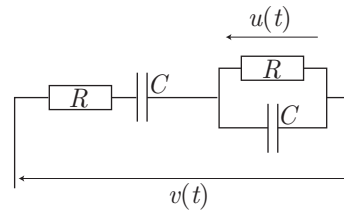
PSI

Réponse à un échelon de tension

Le circuit représenté ci-dessous est soumis à un échelon de tension :

$$\begin{cases} v(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ v(t) = R \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u}{v}$  de ce circuit.  
En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$ , pour  $t \geq 0$ . On posera :  $\tau = RC$ .



2. Donner l'expression totale de  $u(t)$  pour  $t \geq 0$ .

● **40**

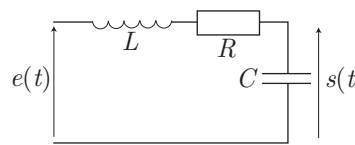
**Lycée Henri IV, Paris**

20 min.

Système électronique linéaire

MP-PC-PSI-PT

On considère le circuit ci-contre, constitué d'une inductance pure  $L$ , d'une capacité  $C$  et d'une résistance  $R$ . On pose  $\omega_c = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et  $Q = \frac{L\omega_c}{R}$ .



On note  $s(t) = \text{Re}\{s\}$  et  $e(t) = \text{Re}\{e\}$ .

1. Donner la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = H e^{j\varphi}$  en fonction de  $Q$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_c}$ .

Dans la suite, on pourra tenir compte de la valeur numérique de  $Q$  pour ne conserver, dans les calculs, que les termes importants.

2. On prendra :

$$L = 11 \text{ mH} \quad C = 2,3 \text{ nF} \quad R = 12 \Omega$$

- (a) Tracer la courbe donnant le gain en décibels  $G_{\text{dB}}$  en fonction de  $\log x$ .  
(b) Tracer, de même, la courbe donnant  $\varphi$  en fonction de  $\log x$ .

On prendra soin de préciser les valeurs caractéristiques associées à ces courbes.

- (c) Déterminer les pulsations de coupure à  $-3$  dB.

● **41**

**Concours Commun Polytechnique**

20 min.

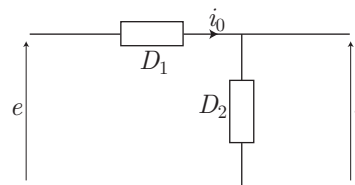
Système électronique linéaire

MP-PC-PSI-PT

Un quadripôle, constitué de deux dipôles  $D_1$  et  $D_2$ , contient une résistance  $R$ , un condensateur  $C$  et une bobine  $L$ .

On réalise les mesures suivantes :

- on relie l'entrée à une pile de force électromotrice  $E_0 = 15 \text{ V}$ , la sortie étant ouverte. On mesure, en régime établi, un courant  $i_0 = 15 \text{ mA}$  ;



- on remplace le générateur de tension continue par un générateur de tension sinusoïdale et on fait une étude en fréquence de la réponse du système. Soit  $\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$  la fonction de transfert. L'expérience montre :
  - qu'il s'agit d'un filtre passe-bande dont le gain passe par une valeur maximale pour la fréquence  $f_0 = 1,16 \text{ kHz}$  ;

- que la bande passant à  $-3$  dB vaut  $\Delta f = 0,34$  kHz.

Donner le schéma du circuit, ainsi que les valeurs numériques de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

## ● 42 ————— Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

30 min.

Système électronique linéaire

MP-PSI-PT

Pour analyser les composantes fréquentielles d'un signal sonore (analyse des phénomènes du langage par exemple), on utilise un transducteur (microphone) qui convertit le signal en une tension  $v_e(t)$ , puis un filtre passe-bande qui extrait les composantes sinusoïdales de fréquences voisines d'une fréquence  $f_0$  donnée.

On note  $v_s(t)$  la tension de sortie du filtre. Le filtre est un circuit linéaire dont la fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On se propose de déterminer les caractéristiques  $H_0$ ,  $Q$  et  $\omega_0$  du filtre à partir des oscillogrammes obtenus en régime périodique pour une tension  $v_e(t)$  rectangulaire, pour deux valeurs de fréquences.

On rappelle la décomposition de Fourier de  $v_e(t)$  dans le cas où  $v_e(t)$  est périodique, de période  $T$ , avec :

$$\begin{cases} v_e(t) = V_0 \text{ pour } 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ v_e(t) = 0 \text{ pour } \frac{T}{2} \leq t < T \end{cases}$$

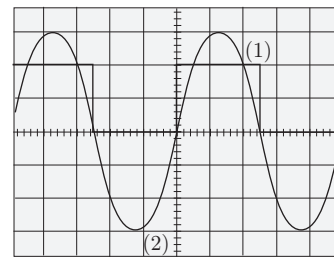
$$v_e(t) = V_0 \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin[(2k+1)\omega_1 t] \right] \text{ avec } \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$$

ÉNONCÉS

### Première expérience

- voies (1) et (2) en position DC ;
- base de temps :  $50 \mu\text{s}$  par carreau ;
- sensibilité :
 

voie (1)	0,5 V par carreau
voie (2)	2 V par carreau

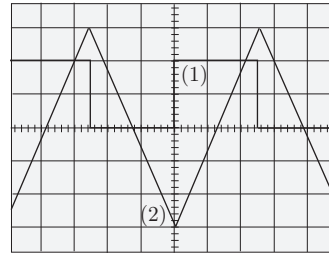


Dans cette expérience :

- la tension  $v_s(t)$  est quasi sinusoïdale ;
- si on augmente la fréquence de  $v_e(t)$  par rapport à la valeur correspondant à cet oscillogramme, on constate que l'amplitude de  $v_s(t)$  diminue ;
- si, par rapport à cette même fréquence, on diminue légèrement la fréquence de  $v_e(t)$ , on constate que l'amplitude de  $v_s(t)$  diminue également.

**Deuxième expérience**

- voies (1) et (2) en position DC ;
- base de temps :  $5 \mu\text{s}$  par carreau ;
- sensibilité :
  - voie (1) 2 V par carreau
  - voie (2) 0,2 V par carreau



1. Pourquoi, dans chaque expérience, la tension de sortie  $v_s(t)$  ne comporte-t-elle pas de composante continue, contrairement à la tension d'entrée  $v_e(t)$  ?
2. Dédurre de l'oscillogramme de la première expérience et du commentaire qui l'accompagne :
  - (a) la pulsation  $\omega_0$  ;
  - (b) la valeur de  $H_0$ .
3. Dans la deuxième expérience,  $v_s(t)$  est triangulaire alors que  $v_e(t)$  est rectangulaire. Le filtre a un comportement intégrateur.
  - (a) Donner l'expression approchée de  $\underline{H}(j\omega)$  dans le domaine de fréquences correspondant à la deuxième expérience.
  - (b) En utilisant l'oscillogramme de la deuxième expérience, déterminer, en justifiant la méthode utilisée, le rapport  $\frac{H_0\omega_0}{Q}$ . En déduire la valeur de  $Q$ .

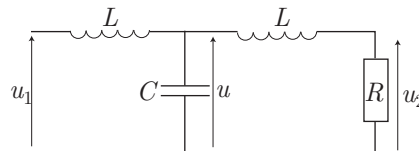
● **43** ————— **Concours Centrale-Supélec**

30 min.

MP-PC-PSI-PT

Système électronique linéaire

On considère le circuit représenté ci-dessous :



1. Calculer l'impédance équivalente  $\underline{Z}$  de ce montage.
2. À quelle condition  $\underline{Z}$  est-elle une résistance pure ?
3. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_2}{u_1}$  de ce filtre.
4. Représenter l'allure du diagramme de Bode en amplitude dans le cas où  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

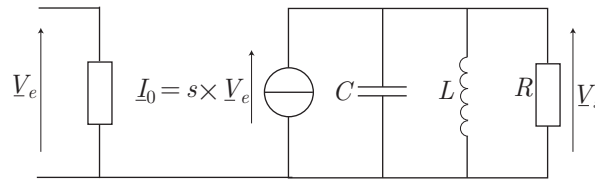
● **44** ————— **Concours Commun Polytechnique**

30 min.

MP-PSI-PT

Système électronique linéaire

Dans le circuit représenté sur le schéma ci-dessous, on se place en régime sinusoïdal forcé et l'on admet que, dans tout le domaine de fréquence où elle est utilisée, la bobine peut être assimilée à une inductance pure.



La bobine est associée, en parallèle, à un condensateur de capacité  $C$ , de façon à constituer un circuit résonant. Le circuit  $LC$  est placé dans le circuit collecteur d'un transistor à effet de champ convenablement polarisé, de façon à réaliser un amplificateur sélectif.  $V_e$  est la valeur efficace complexe de la tension d'entrée.

$I_0 = s V_e$  et  $R$  sont respectivement la valeur efficace complexe du courant électromoteur et la résistance interne du générateur équivalent au circuit de sortie du transistor. Dans le domaine de fréquences où le transistor est utilisé,  $s$  est une constante.

1. Calculer la puissance moyenne absorbée par l'impédance constituée par les éléments  $R$ ,  $L$  et  $C$  du circuit. On mettra le résultat sous la forme :

$$P = \frac{P_{\max}}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

où  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Exprimer  $P_{\max}$  et  $Q$ .

2. On définit la bande passante  $\Delta\omega_0$  du circuit comme l'intervalle de fréquence à l'intérieur duquel on a :  $P \geq \frac{P_{\max}}{2}$ . Exprimer le *coefficient de sélectivité*  $\frac{\omega_0}{\Delta\omega_0}$  du circuit.
3. Donner l'expression du gain en tension de l'amplificateur :

$$H(x, R, s, Q) = \frac{|V_s|}{|V_e|} = \frac{V_s}{V_e}$$

Quel est le domaine de variation de la tension aux bornes du circuit à l'intérieur de la bande passante ?

4. On définit le *taux d'harmonique* de rang  $n$  d'un signal périodique par le rapport  $\tau_n = \frac{V_n}{V_1}$  de l'amplitude  $V_n$  de l'harmonique de rang  $n$  à l'amplitude  $V_1$  du fondamental (harmonique de rang 1).

Si  $\tau_{n,e}$  et  $\tau_{n,s}$  sont les taux d'harmoniques de rang  $n$ , respectivement à l'entrée et à la sortie de l'amplificateur, calculer l'*atténuation*  $\delta_n = \frac{\tau_{n,s}}{\tau_{n,e}}$  du taux d'harmonique de rang  $n$  d'un signal dont la pulsation du fondamental est  $\omega_0$ . Quelle doit-être la valeur de  $Q$  pour que cette atténuation soit de  $-20$  dB pour l'harmonique de rang 2 ?

5. L'amplificateur sélectif est maintenant couplé à une charge purement résistive  $R_u$ . Exprimer la nouvelle bande passante  $\Delta\omega'_0$  de l'amplificateur, en fonction de  $\Delta\omega_0$ ,  $R$  et  $R_u$ , quand la charge  $R_u$  est directement branchée aux bornes du circuit résonant. Calculer  $\Delta\omega'_0$  lorsque  $R_u = R$ .



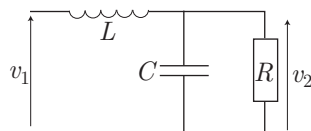
● **45** **Lycée Chaptal, Paris**

45 min.

Système électronique linéaire

MP-PC-PSI-PT

Nous supposons tous les composants du circuit ci-dessous idéaux (bobine, résistance et condensateur).



On pose :  $LC\omega_0^2 = 1$  et on prendra comme valeurs numériques :

$$L = 200 \text{ mH} \quad C = 10 \text{ } \mu\text{F} \quad R = 80 \text{ } \Omega$$

**I-** On établit, à l'entrée, une tension sinusoïdale de la forme :  $v_1(t) = V_0 \cos(\omega t)$ . La tension de sortie est alors de la forme :  $v_2(t) = V_{02} \cos(\omega t + \phi)$ . On suppose évidemment que  $V_0$  et  $V_{02}$  sont positifs.

1. On adopte la notation complexe. Déterminer la fonction de transfert de ce montage :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_{02} e^{j(\omega t + \phi)}}{V_0 e^{j\omega t}}$$

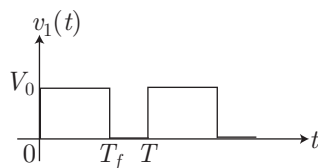
2. On pose :  $\underline{H}(j\omega) = G e^{j\phi}$ , où  $G$  est un réel positif.

(a) Étudier les variations de  $G$  et de  $\phi$  en fonction de la pulsation  $\omega$ .

(b) Représenter l'allure des courbes  $G(\omega)$  et  $\phi(\omega)$ .

(c)  $L$  et  $R$  étant imposés, montrer que lorsque  $C$  est inférieur à une certaine valeur  $C_0$ ,  $G$  est une fonction décroissante de  $\omega$ . Calculer  $C_0$  en fonction de  $L$  et de  $R$ . Vérifier qu'avec les valeurs numériques imposées ci-dessus, on a bien  $C < C_0$ .

**II-** Le filtre est maintenant alimenté par une tension rectangulaire, périodique de fréquence  $f = \frac{1}{T} = 1\,000 \text{ Hz}$ , représentée sur la figure ci-dessous. On appelle  $\alpha = \frac{T_f}{T}$  le rapport cyclique de cette tension  $v_1(t)$ .



1. On décompose  $v_1(t)$  en série de Fourier, sous la forme :

$$v_1(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t)$$

avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Déterminer les coefficients  $A_0$ ,  $A_n$  et  $B_n$  en fonction de  $V_0$  et de  $\alpha$ .

2. On écrit la série de Fourier sous la forme :

$$v_1(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \psi_n) \text{ avec } C_n \geq 0$$

Déterminer les coefficients  $C_n$  en fonction de  $V_0$  et de  $\alpha$ .

3. Nous nous proposons de déterminer la tension de sortie  $v_2(t)$  du filtre en tenant compte des calculs numériques indiquées ci-dessus pour  $C$ ,  $L$ ,  $R$  et  $f$ .

- Expliquer pourquoi la tension de sortie  $v_2(t)$  est sensiblement constante dans le temps. Déterminer la valeur  $V_{2m}$  de cette constante, en fonction de  $V_0$  et de  $\alpha$ .
- Vérifier que, pour obtenir un ordre de grandeur convenable de l'ondulation résiduelle de la tension de sortie  $v_2(t)$ , il suffit de ne considérer dans le calcul que le premier harmonique de la série de Fourier.
- Déterminer alors, dans le cadre de l'approximation ci-dessus, l'ondulation  $\Delta V_2 = v_{2\max} - v_{2\min}$  de la tension de sortie, ainsi que le taux d'ondulation  $\frac{\Delta V_2}{V_{2m}}$ ; pour exprimer l'ondulation et le taux d'ondulation, on utilisera les valeurs numériques de  $L$ ,  $C$ ,  $R$ ,  $f$  et on exprimera les résultats en fonction de  $\alpha$  et, éventuellement, de  $V_0$ . Calculer le taux d'ondulation pour  $\alpha = \frac{3}{4}$ .  
Conclusion.

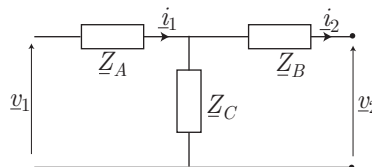
● 46 **Lycée Louis-le-Grand, Paris**

45 min.

Système électronique linéaire

MP-PC-PSI-PT

On considère le filtre « en T » de la figure ci-dessous :



Le régime étant sinusoïdal dans tout le problème, il est convenu que les lettres soulignées représenteront des grandeurs complexes.  $\underline{Z}_A$ ,  $\underline{Z}_B$  et  $\underline{Z}_C$  sont des impédances complexes.

1. On charge le filtre par une impédance (complexe)  $\underline{Z}_0$  et on désire que le dipôle chargé, « vu » de ses deux bornes d'entrée, soit équivalent à l'impédance  $\underline{Z}_0$  qui porte alors le nom d'impédance *itérative* ou *caractéristique*.

On a alors :

$$\frac{\underline{v}_1}{\underline{i}_1} = \frac{\underline{v}_2}{\underline{i}_2}$$

- Montrer qu'à  $\underline{Z}_A$ ,  $\underline{Z}_B$  et  $\underline{Z}_C$  donnés, il existe *a priori* deux valeurs possibles de  $\underline{Z}_0$ .
- Quelle est, en fonction de  $\underline{Z}_0$ , l'impédance caractéristique du système constitué de  $n$  filtres en T identiques, montés en cascade ?

2. Dans toute la suite du problème,  $\underline{Z}_A$  et  $\underline{Z}_B$  sont réalisés par deux inductances pures, identiques, de valeur  $L' = \frac{L}{2}$ ;  $\underline{Z}_C$  est réalisé par un condensateur parfait de capacité  $C$ . Calculer  $\underline{Z}_0$  est discuter des valeurs possibles de  $\underline{Z}_0$  en fonction de la pulsation  $\omega$ .  
Comment pourrait-on réaliser  $\underline{Z}_0$  ?
3. On se place dans le cas des « basses fréquences » (à préciser) où  $\underline{Z}_0$  est une résistance pure. On charge alors le filtre, à toute fréquence, par la résistance caractéristique, de valeur positive, correspondant à cette fréquence.
- (a) Calculer la fonction de transfert  $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{v_2}{v_1}$  en fonction de  $\omega$  et  $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ .
- (b) Simplifier l'expression de  $\underline{H}_1$  en posant :  $\cos \phi = 1 - \frac{LC\omega^2}{2}$  puis calculer son module et son argument en fonction de  $\phi$ .
4. On se place dans le cas des « fréquences élevées » (à préciser) où  $\underline{Z}_0$  est une inductance pure. On charge alors le filtre, à toute fréquence, par l'impédance caractéristique inductive correspond à cette fréquence.
- (a) Calculer la fonction de transfert  $\underline{H}_2(j\omega) = \frac{v_2}{v_1}$  en fonction de  $\omega$  et  $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ .
- (b) Simplifier l'expression de  $\underline{H}_2(j\omega)$  en posant :  $\cos \psi = \frac{LC\omega^2}{2} - 1$  puis calculer son module et son argument.
5. On pose :  $x = \frac{\omega}{\omega_c}$ .  
Exprimer  $H(x) = |\underline{H}|$  et  $\varphi(x) = \arg \{ \underline{H} \}$  correspondant au filtre chargé, à toute fréquence, par son impédance caractéristique.

● **47** **Concours Centrale**  
15 min.

Réponse à un échelon de tension

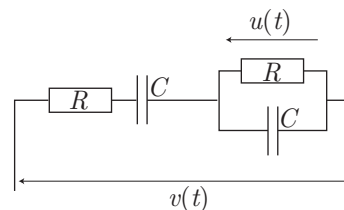
MP-PC-PSI-PT

Le circuit représenté ci-dessous est soumis à un échelon de tension :

$$\begin{cases} v(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ v(t) = R \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u}{v}$  de ce circuit.

En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$ , pour  $t \geq 0$ . On posera :  $\tau = RC$ .



2. Donner l'expression totale de  $u(t)$  pour  $t \geq 0$ .

● 48 ————— Lycée Thiers, Marseilles

10 min.

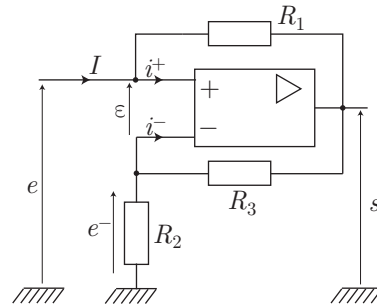
Amplificateur opérationnel

PSI

Dans le montage représenté ci-contre, l'amplificateur opérationnel est parfait ; on a alors  $s = \mu \varepsilon$  où  $\varepsilon = e^+ - e^-$ , tandis que les intensités des courants  $i^+$  et  $i^-$  sont nulles.

Déterminer l'expression de l'impédance d'entrée :

$$R_e = \frac{e}{I}$$



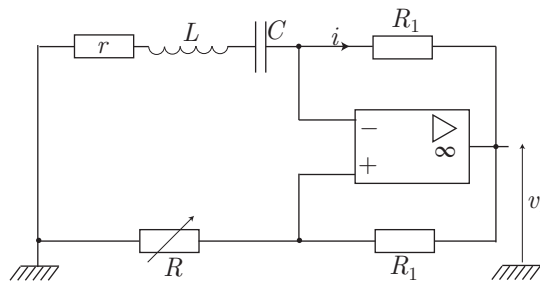
● 49 ————— Concours Commun Polytechnique

15 min.

Amplificateur opérationnel

MP-PSI

On considère le montage schématisé ci-dessous.



1. Exprimer l'équation différentielle vérifiée par  $i$ .
2. Exprimer  $v_s$  en fonction de  $R_1$ ,  $R$  et  $i$ .
3. Montrer qu'à partir d'une certaine valeur de  $R = R_0$ , on observe des oscillations.
4. Montrer que, connaissant  $\omega$ ,  $R_0$  et  $C$ , on peut déterminer  $L$  et  $r$ .

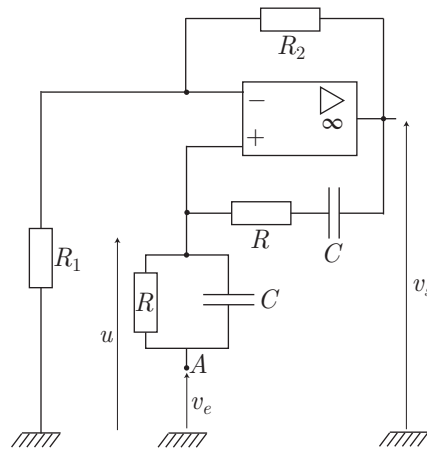
● 50 ————— Lycée Thiers, Marseille

20 min.

Amplificateur opérationnel

MP-PSI

On considère le montage représenté ci-dessous, appelé *oscillateur à pont de Wien*.



La tension  $v_e$  est une tension sinusoïdale, de pulsation  $\omega$ , fournie par un générateur dont la résistance de sortie est nulle. On admet que les autres tensions ( $u$ ,  $v_s$ ) sont également sinusoïdales et de même pulsation. Dans ces conditions, toutes ces tensions peuvent être représentées par des nombres complexes (respectivement  $\underline{V}_e$ ,  $\underline{U}$ ,  $\underline{V}_s$ ).

1. Calculer la transmittance  $K = \frac{\underline{V}_s}{\underline{U}}$  de l'opérateur construit à partir de l'amplificateur opérationnel supposé idéal et des résistances  $R_1$  et  $R_2$ .
2. Exprimer  $\underline{U}$  en fonction de  $\underline{V}_e$  et  $\underline{V}_s$ . Montrer que l'on peut écrire :

$$\underline{U} = \underline{T} \underline{V}_e + \frac{1}{3 + jX} \underline{V}_s$$

où  $X$  est une fonction de la pulsation réduite  $\frac{\omega}{\omega_0}$ ,  $\omega_0$  étant une constante que l'on exprimera en fonction de  $R$  et de  $C$ , et  $\underline{T}$  est une fonction homographe de  $jX$ .

3. Exprimer  $\underline{V}_s$  en fonction de  $\underline{V}_e$ , de  $K$  et de  $X$ .
4. Montrer qu'il existe un couple de valeurs  $(K_0, \omega_1)$  de  $K$  et  $\omega$ , pour lequel l'amplitude de la tension de sortie  $v_s$  peut avoir une valeur non nulle alors que celle de la tension  $v_e$  est infiniment petite.

On admettra que pour  $v_e = 0$ , la condition  $K = K_0$  est remplie, le système oscille de manière harmonique à la pulsation  $\omega_1$ , tandis que pour  $K > K_0$  il oscille encore mais de manière non sinusoïdale.

5. *Application numérique* :  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ,  $C = 10 \text{ nF}$ , le point  $A$  est relié à la masse.

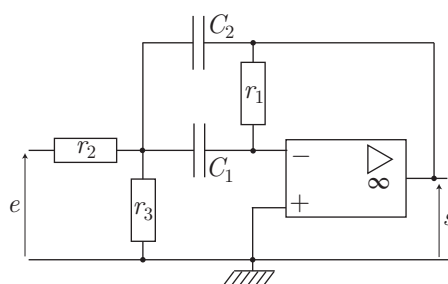
Déterminer la valeur de  $R_2$  pour que le système oscille de manière sinusoïdale et calculer la fréquence  $f_1$  de l'oscillation.

## ● 51 ————— Lycée du Parc, Lyon

20 min.  
MP-PSI

*Amplificateur opérationnel*

On considère le circuit de la figure ci-dessous.



L'étude qui suit se fera en régime sinusoïdal établi et l'on supposera que l'A.O. idéal fonctionne en régime linéaire.

1. Déterminer directement le comportement en basse fréquence et en haute fréquence d'un tel circuit.
2. Déterminer la fonction de transfert  $H(j\omega)$  et montrer que le montage proposé constitue un filtre passe-bande centré sur la valeur  $\omega_c$  de la pulsation  $\omega$  et de facteur de qualité  $Q$  que l'on déterminera.
3. *Application numérique* : calculer  $Q$  et  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ , avec les valeurs numériques suivantes :

$$r_1 = 220 \text{ k}\Omega \quad r_2 = 22 \text{ k}\Omega \quad r_3 = 1 \text{ k}\Omega \quad C_1 = 1 \text{ nF} \quad C_2 = 0,1 \text{ nF}$$

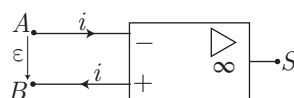
## ● 52 ————— Lycée Chateaubriand, Rennes

20 min.

Amplificateur opérationnel

MP-PC-PSI-PT

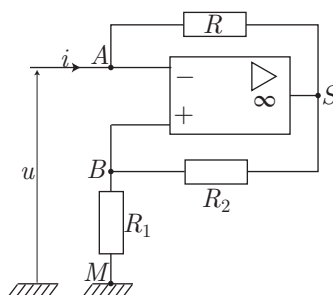
Le dispositif, schématisé par :



désigne un amplificateur opérationnel idéal et linéaire, qui possède les propriétés suivantes :

- son impédance d'entrée est infiniment grande de telle sorte que l'intensité  $i$  est pratiquement nulle ;
- dans les conditions d'utilisation, la différence de potentiel  $\varepsilon = V_B - V_A$  est pratiquement nulle.

Le système entier, schématisé sur la figure suivante :



constitue un dipôle  $D$ , de bornes  $A$  et  $M$ . On appelle  $u$  la différence de potentiel entre  $A$  et  $M$  :  $u = V_A - V_M$  et  $i$  l'intensité du courant qui entre dans ce dipôle au point  $A$ .

1. On appellera  $v_s$  le potentiel du point  $S$ .

Établir la relation entre  $u$  et  $i$ , qui constituera l'équation de la caractéristique  $u = f(i)$  de  $D$ .

2. On considère le cas particulier où  $R_1 = R_2$ . Que devient l'équation de la caractéristique  $u = f(i)$  du dipôle ?

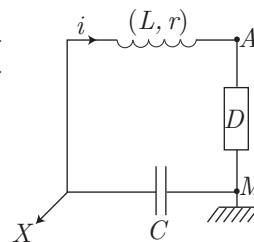
Par la suite, on ne considérera que le cas particulier où  $R_1 = R_2$ .

3. Le dipôle précédent est inséré dans un circuit, en série avec une bobine  $(L, r)$  et un condensateur de capacité  $C$ .

- (a) Établir l'équation différentielle satisfaite par l'intensité  $i$  du montage, en fonction du temps. On fera intervenir  $r, R, L$  et  $C$ .

On supposera :

$$\left| \frac{r - R}{L} \right| \ll \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$$



- (b) Si  $R < r$ , donner rapidement l'allure de  $i(t)$ , en prenant des conditions initiales quelconques.
  - (c) Si  $R > r$ , comment varie l'amplitude des oscillations ?
  - (d) Si  $R = r$ , indiquer la nature de la courbe donnant la variation de  $i(t)$ .
4. La capacité  $C$  du condensateur a une valeur connue. À l'aide d'un oscilloscope, on observe le signal aux bornes du condensateur. Montrer que la mesure de  $\omega_0$  à l'oscilloscope et le réglage de  $R$  (résistance variable) permettent de déterminer les caractéristiques  $(L, r)$  de la bobine.

*Application numérique* : avec une bobine à noyau de fer doux, on a relevé :  $C = 0,47 \mu\text{F}$ ,  $r = 80 \Omega$  et  $T_0 = 4,3 \mu\text{s}$  (période de la tension sinusoïdale). Calculer le coefficient d'inductance propre  $L$  de cette bobine.

## ● 53 ————— Lycée Thiers, Marseille

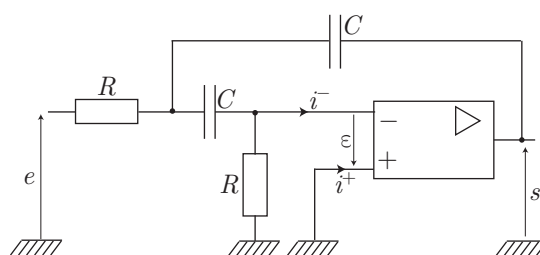
20 min.

Limites de l'A.O.

MP-PSI

On considère le montage ci-dessous qui utilise un amplificateur opérationnel dont les caractéristiques sont les suivantes :

- $i^+ = i^- = 0$  ;
- le gain  $G$ , supposé très grand devant 1, garde une valeur finie et :  $s = G \times \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant la tension qui existe entre les bornes d'entrée + et - de l'amplificateur ;
- la tension  $e(t)$  est alternative, de pulsation  $\omega$ .



Calculer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{G}{3} \frac{\omega_0}{Q} \times \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

Déterminer  $\omega_0$  et  $Q$ .

● 54

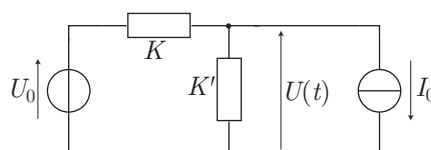
Concours de l'ENS

15 min.

Transfert de puissance

PSI

On considère une source de tension idéale  $U_0 > 0$  reliée, par un dispositif de conversion de puissance composé de deux interrupteurs  $K$  et  $K'$ , à une source de courant continu  $I_0 > 0$ .



- L'interrupteur  $K$  est fermé pendant la durée  $\alpha T$ , puis ouvert pendant  $(1 - \alpha) T$ .
  - Déterminer le cycle de fonctionnement de l'interrupteur  $K'$ .
  - Calculer la valeur moyenne de la tension  $u(t)$  délivrée par le dispositif.
  - Calculer la puissance moyenne transmise à la source de courant.
  - Quelle est la nature des interrupteurs  $K$  et  $K'$  les plus simples, convenant pour réaliser ce montage ?
- La source de courant est maintenant remplacée par une inductance  $L$  en série avec une résistance  $R$  et une source de tension  $E < U_0$ . Calculer, en régime périodique permanent, le courant dans l'inductance pour  $E = 0$  V, en fonction du temps. On utilisera, après les avoir déterminées, les valeurs *maximum* ( $I_{\max}$ ) et *minimum* ( $I_{\min}$ ) de l'intensité de ce courant

● 55

Concours Commun Polytechnique

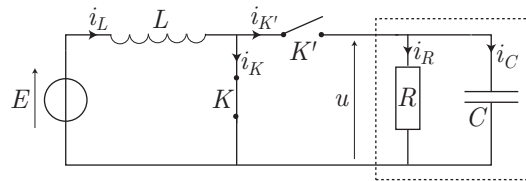
30 min.

Transfert de puissance

PSI

La structure envisagée ici correspond à celle des alimentations dites à découpage.





La séquence de commande des interrupteurs, pendant une période  $T$  est la suivante :

$$\begin{cases} 0 \leq t < \alpha T : K \text{ fermé, } K' \text{ ouvert;} \\ \alpha T \leq t < T : K \text{ ouvert, } K' \text{ fermé;} \end{cases}$$

On considère connues :  $E = 50 \text{ V}$  et  $T = 50 \mu\text{s}$ .

On suppose, dans un premier temps, que l'association  $R \parallel C$  (entourée en pointillé) se comporte comme une source de tension  $u = E'$ .

On se place dans l'hypothèse où le courant dans la bobine d'inductance  $L$  ne s'annule jamais.

- Déterminer les expressions de  $i_L(t)$ ,  $i_K(t)$  et  $i_{K'}(t)$ , intensités des courants dans la bobine  $L$  et dans les interrupteurs  $K$  et  $K'$ , sur une période (on note  $I_m$  et  $I_M$  les valeurs minimale et maximale de  $i_L$ ).
- Représenter  $i_L(t)$ ,  $i_K(t)$  et  $i_{K'}(t)$ .
- Déterminer, en fonction de  $E$  et  $\alpha$ , la valeur de  $u = E'$ .
- On règle  $\alpha$  à la valeur  $\alpha = 0,6$ . La puissance moyenne fournie par la source de tension  $E$  est alors  $P = 150 \text{ W}$ .  
On accepte une ondulation  $\Delta i_L = I_M - I_m$  maximale  $\Delta I_{L \max} = 0,3 \text{ A}$  pour cette valeur de  $\alpha = 0,6$ .
  - Déterminer la valeur minimale de l'inductance  $L$ .
  - Pour la valeur de  $L$  trouvée à la question précédente, déterminer les valeurs minimale  $I_m$  et maximale  $I_M$  de  $i_L$ .
- Choix et caractéristiques des interrupteurs.
  - Tracer les portions de caractéristiques courant-tension décrites par chaque interrupteur sur les intervalles  $[0, \alpha T[$  d'une part et  $[\alpha T, T[$  d'autre part.
  - En déduire les fonctions de commutation, *transistor* ou diode, utilisables pour  $K$  et  $K'$  (les interrupteurs sont supposés idéaux).
  - Que vaut la valeur moyenne  $V_0$  de la tension  $u_K$  aux bornes de  $K$  ?
- On se place dans la situation du 4. :  $\alpha = 0,6$  et  $P = 150 \text{ W}$ .  
En réalité, la tension  $u$  aux bornes de l'association  $R \parallel C$  n'est pas constante : c'est une fonction périodique qui présente une légère ondulation. On suppose que cela ne modifie pratiquement pas  $i_L$ ,  $i_K$  et  $i_{K'}$ , qui conservent les mêmes formes que précédemment.
  - Déterminer, littéralement et numériquement, les intensités moyennes  $I_R$  et  $I_C$  des courants dans la charge  $R$  et dans le condensateur  $C$  en fonction de  $\alpha$ ,  $P$  et  $E$ .
  - Déterminer numériquement les valeurs moyennes  $P_R$  et  $P_C$  des puissances dissipées dans  $R$  et  $C$ .

## ● 56

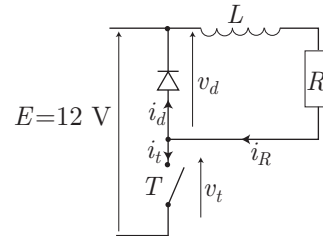
## Concours ATS

30 min.

PSI

Transfert de puissance

Dans le circuit schématisé ci-contre, la diode et l'interrupteur (*transistor*) sont supposés idéaux. Au début de la période de découpage, le courant traversant la résistance a pour intensité  $I_{\min}$ . La fréquence de découpage vaut  $f = 20 \text{ kHz} = \frac{1}{T}$ . On note  $\alpha$  le rapport du temps de conduction du *transistor* sur la période  $T$ .



1. Écrire les équations différentielles du système pour  $t \in [0, \alpha T[$ , puis pour  $t \in [\alpha T, T[$ .
2. Représenter l'allure des signaux  $v_t$ ,  $v_d$ ,  $i_R$ ,  $i_t$  et  $i_d$ . On prendra  $\alpha = 0,5$ .
3. Déterminer, de manière simple, la valeur moyenne de  $i_R$  en fonction de  $\alpha$ ,  $E$  et  $R$ ; on supposera que  $T \ll \tau = \frac{L}{R}$ .
4. Déterminer l'ondulation  $\Delta i_R = I_{\max} - I_{\min}$  en fonction de  $L$ .
5. Déterminer la valeur à donner à  $\tau$  pour que  $\Delta i_R$  soit égal à 10% de la valeur moyenne de  $i_R$ .

## ● 57

## Concours de l'ESIM

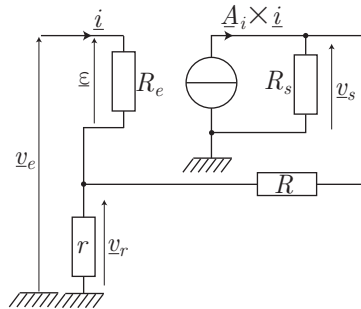
30 min.

PSI

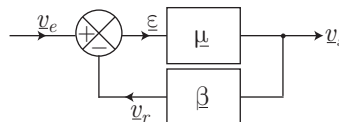
Systèmes bouclés

La figure ci-dessous représente le schéma équivalent d'un amplificateur de tension à contre-réaction.

Le générateur de courant est un générateur lié, débitant un courant d'intensité  $A_i i$ . Le coefficient d'amplification  $A_i$  est fonction de la fréquence  $f = \frac{\omega}{2\pi}$ .



1. Montrer que cet amplificateur peut être représenté par un schéma-bloc défini sur la figure ci-dessous.



On donnera les expressions des transmittances  $\underline{\mu}$  et  $\underline{\beta}$  en fonction des éléments du circuit.

2. On donne :

$$R \gg R_s \quad |\underline{A}_i| \gg \frac{r}{r+R} \quad |\underline{A}_i| R_s \gg R$$

Simplifier les expressions de  $\underline{\mu}$  et  $\underline{\beta}$  puis montrer que  $\underline{\mu} \simeq \underline{A}_i \times \frac{R_s}{R_e}$  et  $\underline{\beta} \simeq \frac{r}{r+R}$ .

3. Les éléments employés ont pour caractéristiques :

$$\underline{A}_i = \frac{A_0}{\left(1 + j \frac{f}{f_1}\right) \left(1 + j \frac{f}{f_2}\right)}$$

avec :  $f_1 = 10^3$  Hz,  $f_2 = 100 \times f_1$ ,  $A_0 = 10^5$ ,  $R_e = 10$  k $\Omega$ ,  $R_s = r = 1$  k $\Omega$  et  $R = 100$   $\Omega$ .

(a) Calculer la transmittance  $\underline{T}(f) = \underline{\mu} \times \underline{\beta}$  en boucle ouverte, avec les expressions simplifiées de  $\underline{\mu}$  et  $\underline{\beta}$ .

(b) Montrer que le système est stable.

## ● 58

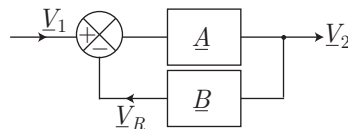
## Concours ESIM

45 min.

PSI

Systemes bouclés

I- Un amplificateur de tension à contre-réaction tension-tension peut être schématisé par le schéma-bloc sur la figure suivante.



$\underline{A}$  est la transmittance de la chaîne directe ;  $\underline{B}$  est la transmittance de la chaîne de retour.

- Calculer le rapport  $\underline{H} = \frac{V_2}{V_1}$ , appelé transmittance en boucle fermée.
- $\underline{T}(\omega) = \underline{A} \times \underline{B}$  est appelé transmittance en boucle ouverte. Justifier cette dénomination.
- On admet que  $\underline{A}$  est de la forme :

$$\underline{A} = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec  $j^2 = -1$  et  $\omega$  la pulsation de la tension appliquée.  $\underline{B} = B$  est un nombre réel positif ou négatif.

On étudie la réponse de l'amplificateur en boucle fermée, à un échelon de tension :

$$V_1(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } V_1(t) = E \text{ pour } t > 0$$

- (a) Déterminer  $V_2(t)$  en admettant que  $V_2(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ .

- (b) Conclure sur la stabilité de l'amplificateur en boucle fermée, selon la valeur de  $A_0B$ .
4. Dans la suite du problème, on admettra que  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  sont des fonctions de  $j\omega$ .  
Pour chiffrer la marge de sécurité que l'on prend par rapport à la stabilité d'un système, on définit la *marge de phase* :

$$M_\varphi = 180^\circ + \arg \{ \underline{T}(\omega_1) \}$$

où  $\omega_1$  est la pulsation pour laquelle  $|\underline{T}(\omega_1)| = 1$ .

Une marge de phase de  $45^\circ$  garantit une stabilité correcte du système :

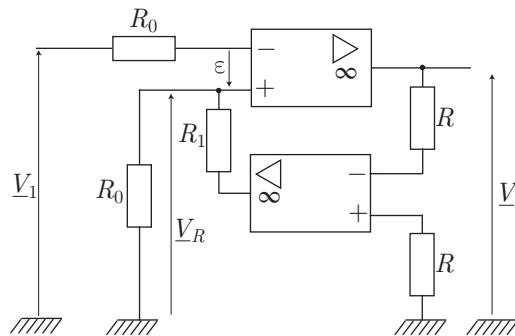
$$\begin{aligned} M_\varphi > 0, & \text{ le système est stable ;} \\ M_\varphi < 0, & \text{ le système est instable.} \end{aligned}$$

On peut aussi chiffrer la marge de sécurité par rapport à l'instabilité en définissant la *marge de gain*  $M_G$ . Soit  $\omega_c$  la pulsation pour laquelle  $\arg \{ \underline{T}(\omega_c) \} = -\pi$ , alors  $M_G = -20 \log |\underline{T}(\omega_c)|$  :

$$\begin{aligned} M_G > 0, & \text{ le système est stable en boucle fermée ;} \\ M_G < 0, & \text{ le système est instable en boucle fermée.} \end{aligned}$$

On veut appliquer ces deux critères aux systèmes de la question (3), avec  $|A_0B| = 10^2$ . Calculer la marge de phase et la marge de gain. Conclure.

II- Soit le montage schématisé sur la figure suivante :



Les amplificateurs opérationnels sont identiques et présentent une impédance d'entrée infinie et un gain  $\underline{\mu}$  tel que  $\underline{\mu} = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$ , avec  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ,  $f_0 = 10$  Hz,  $\mu_0 = 10^5$ ,

$R_0 = 100 \Omega$  et  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ .

1. Montrer que ce système peut être décrit par un schéma-bloc analogue à celui de la partie I-.  
Calculer  $\underline{A}$  et  $\underline{B}$  en fonction de  $\underline{\mu}$ ,  $R_0$  et  $R_1$ .
2. Calculer le gain en boucle ouverte  $\underline{T}(\omega)$ .
3. Calculer la marge de phase  $M_\varphi$ . Le système sera-t-il correctement stable ?

● 59 **Concours Centrale-Supélec**

30 min.

Système bouclé

PSI

Un amplificateur opérationnel (A.O.) sera représenté par le schéma ci-dessous, lorsque les conditions de fonctionnement en régime linéaire seront remplies.

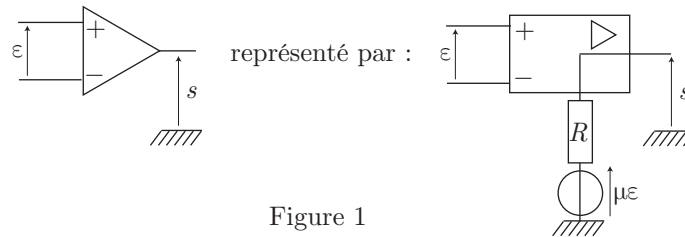


Figure 1

Selon les cas, nous prendrons  $r$  nul ou non,  $\mu$  réel ou complexe, de module infini ou fini. Les défauts de l'A.O. sont négligés. On rappelle, en particulier, que dans cette hypothèse l'intensité des courants absorbés par les entrées est considérée comme nulle.

1. On prend  $\mu$  infini.

Les conditions de fonctionnement linéaire sont supposées remplies. Quelle est alors la relation entre la tension de sortie  $\underline{s}$  complexe et la tension d'entrée  $\underline{e}$  complexe ?

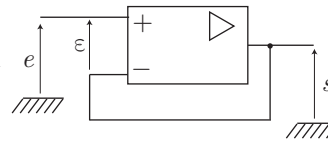


Figure 2

2. On prend  $r = 0$  et  $\mu$  fini :  $\mu = \mu_0$ . Les conditions de fonctionnement en régime linéaire sont supposées remplies. Quelle est la nouvelle relation entre la tension de sortie complexe  $\underline{s}$  et la tension d'entrée complexe  $\underline{e}$  ? Quel est l'ordre de grandeur de  $\mu_0$  ? A-t-on fait une correction intéressante en prenant pour  $\mu$  une valeur finie ?
3. Le montage suiveur entre dans le cadre de l'étude des sources commandées, munies d'une boucle de rétroaction. Préciser quelles sont les grandeurs qui jouent le rôle de : grandeur d'entrée, grandeur de retour, grandeur de sortie et expliquer, en quelques mots, pourquoi le montage suiveur entre bien dans le cadre de cette étude très générale.
4. Sans faire aucun calcul, expliquer pourquoi la résistance de sortie du suiveur est nulle avec les hypothèses faites en 1. ou en 2.
5. On prend  $r$  non nul et  $\mu$  fini :  $\mu = \mu_0$ . Le suiveur est alimenté par un générateur de tension de f.é.m.  $E_g$  et de résistance interne  $R_g$ . Il est chargé par une résistance  $R_u$ . Calculer sa résistance d'entrée  $R_e$ . Calculer également sa résistance de sortie  $R_s$ . Quel est l'ordre de grandeur de  $r$  ? Compte tenu de cette valeur, donner une excellente expression approchée de  $R_s$  et commenter ce résultat. Quel est l'intérêt de ce montage avec A.O. ?
6. On prend  $r = 0$  et  $\mu$  complexe :

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Quelle est la définition de  $\omega_0$  ? Quel est son ordre de grandeur ? Un A.O. fonctionne-t-il souvent à l'intérieur de sa bande passante ?

7. Avec les hypothèses du 6. déterminer la fonction de transfert du suiveur lorsqu'il fonctionne en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$  :  $\underline{T}(j\omega) = \frac{s}{e}$ . En déduire sa bande passante et l'expression de son produit gain  $\times$  bande.
8. On prend  $r = 0$ . Lorsque l'A.O. fonctionne en régime linéaire non sinusoïdal, quelle est l'équation différentielle liant la tension de sortie  $e$  et la tension différentielle d'entrée  $\varepsilon$  ? On pourra poser, dans ce cas :  $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ .

9. Un expérimentateur étourdi réalise le montage suivant :

Pendant le temps très court, durant lequel l'A.O. fonctionne linéairement, quelle est la valeur de  $\mu_0$  ?

Démontrer que l'A.O. ne peut fonctionner de façon stable. Quelle observation fera-t-on sur la sortie du montage ?

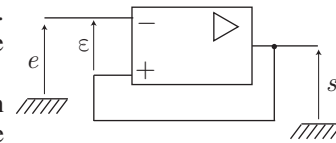


Figure 3

10. L'A.O., tel qu'il est monté dans la figure 2, est-il stable ? La condition de stabilité est-elle une condition suffisante de linéarité ?

### ● 34 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-jolie

1. Le signal de sortie du multiplieur vaut :

$$\begin{aligned} s(t) &= v(t) \times u(t) = C_0 \cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(\omega_n t) \cos(\omega_0 t) \\ &= C_0 \cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{2} \cos[(\omega_0 + \omega_n) t] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{2} \cos[(\omega_0 - \omega_n) t] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant :

$$\begin{array}{ll} \Omega_0 = \omega_0 & D_0 = C_0 \\ \Omega_n = \omega_0 + \omega_n & D_n = \frac{1}{2} C_n(\omega_n) = \frac{1}{2} C_n(\Omega_n - \omega_0) \\ \Omega'_n = \omega_0 - \omega_n & D'_n = \frac{1}{2} C_n(\omega_n) = \frac{1}{2} C_n(\omega_0 - \Omega'_n) \end{array}$$

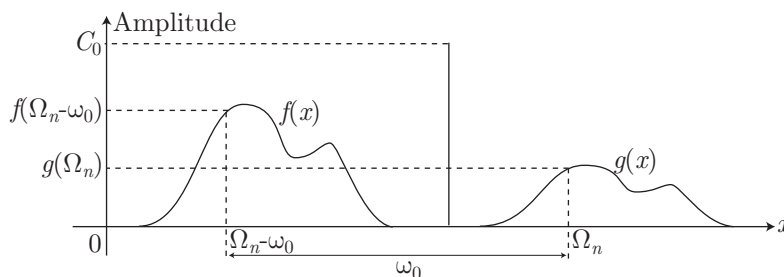
ce signal se présente globalement sous la forme :

$$s(t) = D_0 \cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(\Omega_n t) + \sum_{n=1}^{\infty} D'_n \cos(\Omega'_n t)$$

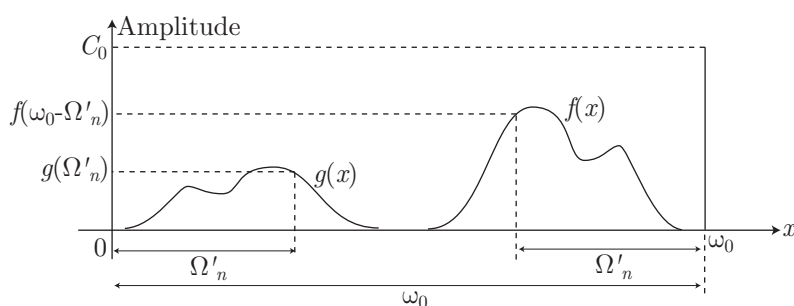
Les résultats précédents montrent que les coefficients  $D_n$  et  $D'_n$  sont des fonctions de  $\Omega_n$  et de  $\Omega'_n$  telles que :

$$\begin{cases} D_n = g(\Omega_n) = \frac{1}{2} C_n(\Omega_n - \omega_0) \\ D'_n = h(\Omega'_n) = \frac{1}{2} C_n(\omega_0 - \Omega'_n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(\Omega_n) = \frac{1}{2} f(\Omega_n - \omega_0) \\ h(\Omega'_n) = \frac{1}{2} f(\omega_0 - \Omega'_n) \end{cases}$$

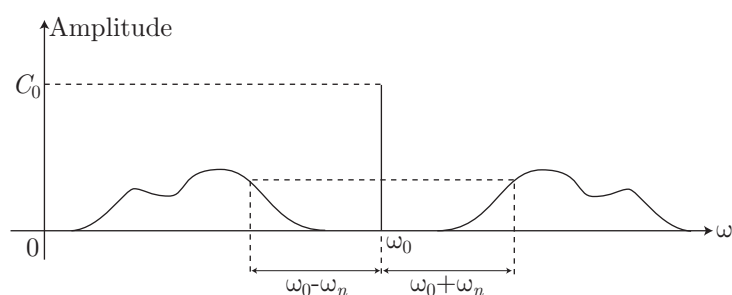
2. La relation :  $g(\Omega_n) = \frac{1}{2} f(\Omega_n - \omega_0)$  montre que la courbe représentative de la fonction  $g$  se déduit (à un facteur  $\frac{1}{2}$  près) de celle de la fonction  $f$  par une translation horizontale de  $\omega_0$  :



Quant à la relation  $h(\Omega'_n) = \frac{1}{2} f(\omega_0 - \Omega'_n)$ , elle révèle que la courbe représentative de la fonction  $h$  se déduit (à un facteur  $\frac{1}{2}$  près) de celle de  $f$  par une symétrie d'axe  $\Omega'_n = \omega_0$ , suivie d'une translation de  $-\omega_0$  :



En conclusion, le spectre en fréquences du signal  $s(t) = v(t) \times u(t)$  présente l'allure suivante :



### ● 35 **Lycée Faidherbe, Lille**

1. À la sortie du multiplieur, la tension vaut  $u(t) = k \times v_m(t) \times v_p(t)$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} v(t) &= v_p(t) + u(t) = v_p(t) + k v_m(t) \times v_p(t) \\ &= v_p(t) \times [1 + k v_m(t)] \\ &= V_p \times [1 + k V_m \cos(\omega_m t)] \times \cos(\omega_p t) \end{aligned}$$

soit encore :

$$v(t) = V_p \times [1 + m \cos(\omega_m t)] \times \cos(\omega_p t) \text{ avec } m = k V_m \quad (31)$$

2. Le premier oscillogramme est obtenu dans le mode  $X(t)$  de l'oscilloscope, tandis que le second requiert l'usage du mode  $XY$  (courbe de Lissajous).

L'expression (31) montre que (pour  $m < 1$ ) l'amplitude de  $v(t)$  varie entre les valeurs :

$$V_2 = V_p \times (1 + m) \text{ et } V_1 = V_p \times (1 - m)$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{V_2}{1 + m} = \frac{V_1}{1 - m} \Rightarrow V_2 - m V_2 = V_1 + m V_1 \Rightarrow m = \frac{V_2 - V_1}{V_2 + V_1}$$

Application numérique :

$$m = \frac{18 - 2}{18 + 2} = 0,8$$



3. Étant donné que :

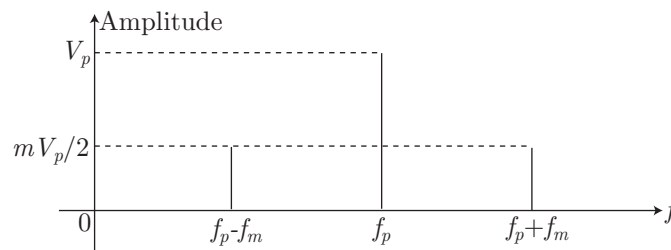
$$\cos(\omega_m t) \cos(\omega_p t) = \frac{1}{2} \cos[(\omega_p + \omega_m) t] + \frac{1}{2} \cos[(\omega_p - \omega_m) t]$$

le signal  $v(t)$  s'écrit aussi :

$$v(t) = V_p \cos(\omega_p t) + \frac{mV_p}{2} \cos[(\omega_p + \omega_m) t] + \frac{mV_p}{2} \cos[(\omega_p - \omega_m) t]$$

C'est pourquoi le spectre de  $v(t)$  contient trois bandes :

pulsations	$\omega_p - \omega_m$	$\omega_p$	$\omega_p + \omega_m$
fréquences	$f_p - f_m$	$f_p$	$f_p + f_m$
amplitudes	$\frac{mV_p}{2}$	$V_p$	$\frac{mV_p}{2}$



Ce spectre montre que, pour transmettre le signal  $v(t)$  modulé, il est nécessaire de disposer d'une largeur de fréquences :

$$\Delta f_p = (f_p + f_m) - (f_p - f_m) = 2f_m$$

4. Soient  $\omega_0 = \omega_p$ ,  $\omega_1 = \omega_p + \omega_m$  et  $\omega_2 = \omega_p - \omega_m$  les trois pulsations qui composent le signal modulé :

$$\begin{aligned} v(t) &= V_p \cos(\omega_0 t) + \frac{mV_p}{2} \cos(\omega_1 t) + \frac{mV_p}{2} \cos(\omega_2 t) \\ \Rightarrow v^2(t) &= V_p^2 \cos^2(\omega_0 t) + \left(\frac{mV_p}{2}\right)^2 \cos^2(\omega_1 t) + \left(\frac{mV_p}{2}\right)^2 \cos^2(\omega_2 t) \\ &\quad + mV_p^2 \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_1 t) + mV_p^2 \cos(\omega_0 t) \cos(\omega_2 t) \\ &\quad + \frac{m^2 V_p^2}{2} \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \end{aligned}$$

Remarquons alors que :

$$\begin{aligned} \langle \cos^2(\omega_i t) \rangle &= \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \cos^2(\omega_i t) dt \text{ avec } T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} \\ &= \frac{1}{2T_i} \int_0^{T_i} [1 + \cos(2\omega_i t)] dt \\ &= \frac{1}{2T_i} \left\{ T_i + \frac{1}{2\omega_i} [\sin(2\omega_i t)]_0^{T_i} \right\} \\ &= \frac{1}{2T_i} \left[ T_i + \frac{1}{2\omega_i} \sin(2\omega_i T_i) \right] = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

tandis que, pour  $\omega_i \neq \omega_j$  :

$$\begin{aligned} \langle \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) \rangle &= \frac{1}{2} \langle \cos[(\omega_i + \omega_j) t] \rangle + \frac{1}{2} \langle \cos[(\omega_i - \omega_j) t] \rangle \\ &= \frac{1}{2T_{ij}} \int_0^{T_{ij}} \cos[(\omega_i + \omega_j) t] dt \\ &\quad + \frac{1}{2T'_{ij}} \int_0^{T'_{ij}} \cos[(\omega_i - \omega_j) t] dt \end{aligned}$$

avec  $T_{ij} = \frac{2\pi}{\omega_i + \omega_j}$  et  $T'_{ij} = \frac{2\pi}{\omega_i - \omega_j}$ . Par conséquent :

$$\langle \cos(\omega_i t) \cos(\omega_j t) \rangle = \frac{\sin[(\omega_i + \omega_j) T_{ij}]}{2T_{ij} (\omega_i + \omega_j)} + \frac{\sin[(\omega_i - \omega_j) T'_{ij}]}{2T'_{ij} (\omega_i - \omega_j)} = 0$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \frac{V_p^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{mV_p}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{mV_p}{2} \right)^2 = \frac{V_p^2}{2} \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right) \\ \Rightarrow U_{\text{eff}}^2 = \langle v^2 \rangle &= \frac{V_p^2}{2} \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Par suite, la puissance rayonnée par l'antenne soumise au signal modulé vaut :

$$P_t = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = \frac{V_p^2}{2R} \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

En revanche, en l'absence de modulation :

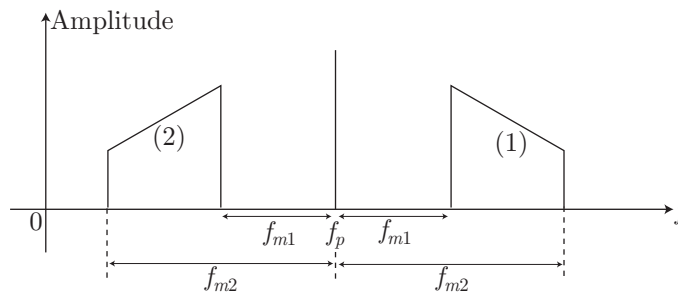
$$m = 0 \Rightarrow P = \frac{V_p^2}{2R} \Rightarrow P_t = P \times \left( 1 + \frac{m^2}{2} \right)$$

Application numérique :

$$P_t = 2100 \times 10^3 \times \left[ 1 + \frac{(0,8)^2}{2} \right] \Rightarrow P_t = 2772 \text{ kW}$$

5. Conformément à l'exercice de la page 216, on peut affirmer que le spectre du signal modulé est composé :

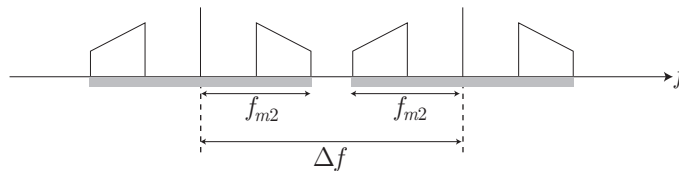
- d'une raie d'amplitude  $V_p$  à la pulsation  $\omega_p$  (c'est-à-dire à la fréquence  $f_p$ ) ;
- du spectre (1) de la tension de modulation, translatée de  $+f_p$  ;
- du symétrique (2) du spectre précédent par rapport à  $f_p$ .



Le spectre du signal modulé occupe donc une plage de fréquences  $[f_p - f_{m2}, f_p + f_{m2}]$  de largeur :

$$\Delta f_m = 2 f_{m2} = 9 \text{ kHz}$$

Considérons un autre signal modulé, dont la porteuse présente la fréquence  $f'_p$ . Le spectre de ce signal occupe également une plage de fréquences de largeur  $\Delta f'_m = \Delta f_m$ .



L'écart  $\Delta f = |f'_p - f_p|$  nécessaire pour éviter le brouillage de ces signaux doit donc excéder la valeur minimale :

$$\Delta f_{\min} = 2 f_{m2} = 9 \text{ kHz}$$

6. (a) L'impédance  $\underline{Z}$  du circuit  $RLC$  parallèle vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}} &= C\omega j + \frac{1}{L\omega j} + \frac{1}{R} = \frac{-RLC\omega^2 + R + L\omega j}{RL\omega j} \\ \Rightarrow \underline{Z} &= \frac{RL\omega j}{L\omega j - RLC\omega^2 + R} = \frac{R}{1 + jRC\omega + \frac{R}{L\omega j}} \end{aligned}$$

La définition du facteur de qualité :  $Q = \frac{R}{L\omega_p}$  conduit d'une part à :

$$\frac{R}{L} = Q\omega_p \Rightarrow \frac{R}{L\omega j} = -jQ \frac{\omega_p}{\omega}$$

et d'autre part à :

$$\begin{aligned} R = Q\omega_p \times L \Rightarrow RC = Q\omega_p \times LC = \frac{Q}{\omega_p} \text{ car } LC = \frac{1}{\omega_p^2} \\ \Rightarrow jRC\omega = jQ \frac{\omega}{\omega_p} \end{aligned}$$

Ce faisant :

$$\begin{aligned} jRC\omega + \frac{R}{L\omega j} &= jQ \left( \frac{\omega}{\omega_p} - \frac{\omega_p}{\omega} \right) = jQ \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{\omega\omega_p} \\ &= jQ \times \frac{(\omega - \omega_p)(\omega + \omega_p)}{\omega\omega_p} \end{aligned}$$

où l'hypothèse :  $\Delta\omega = \omega - \omega_p \ll \omega_p$  permet de poser :

$$\omega + \omega_p = 2\omega - \Delta\omega \simeq 2\omega$$

d'où il découle que :

$$jRC\omega + \frac{R}{L\omega j} = jQ \times \frac{\Delta\omega \times 2\omega}{\omega\omega_p} = 2jQ \frac{\Delta\omega}{\omega_p}$$

C'est pourquoi l'impédance du circuit vaut :

$$\underline{Z} = \frac{R}{1 + 2jQ \frac{\Delta\omega}{\omega_p}}$$

son module et son argument s'écrivant :

$$Z(\Delta\omega) = |\underline{Z}| = \frac{R}{\sqrt{1 + 4Q^2 \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_p} \right)^2}} \quad \text{et} \quad \varphi(\Delta\omega) = \arctan \left( -\frac{2Q\Delta\omega}{\omega_p} \right)$$

(b) À l'entrée de l'amplificateur, la tension :

$$v(t) = V_p \cos(\omega_p t) + \frac{mV_p}{2} \cos[(\omega_p + \omega_m) t] + \frac{mV_p}{2} \cos((\omega_p - \omega_m) t)$$

admet pour image complexe :

$$\underline{v} = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 + \underline{v}_3 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \underline{v}_1 = V_p e^{j\omega_p t} \\ \underline{v}_2 = \frac{mV_p}{2} e^{j(\omega_m + \omega_p)t} \\ \underline{v}_3 = \frac{mV_p}{2} e^{j(\omega_p - \omega_m)t} \end{cases}$$

Aussi, à la sortie de l'amplificateur, l'image complexe de la tension s'écrit :  $\underline{v}' = \underline{v}'_1 + \underline{v}'_2 + \underline{v}'_3$  où  $\underline{v}'_i = \underline{H}(j\omega_i) \underline{v}_i$ . Or, la fonction de transfert de l'amplificateur est définie par :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{v}'}{\underline{v}} = \frac{\underline{Z} \underline{i}}{\underline{v}} \quad \text{où} \quad \underline{i} = g \underline{v} \\ &= g \underline{Z} = g Z(\Delta\omega) e^{j\varphi(\Delta\omega)} \end{aligned}$$

C'est ainsi qu'aux signaux  $\underline{v}_i$  sont associés les signaux  $\underline{v}'_i$  dont les caractéristiques sont regroupées dans le tableaux ci-dessous, dans lequel on a posé :

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{2Q\omega_m}{\omega_p}\right) \text{ et } Z_0 = \frac{R}{\sqrt{1 + 4Q^2 \frac{\omega_m^2}{\omega_p^2}}}$$

signal	$\omega$	$\Delta\omega$	$Z(\Delta\omega)$	$\varphi(\Delta\omega)$
$v'_1$	$\omega_p$	$\Delta\omega_1 = 0$	$R$	$0$
$v'_2$	$\omega_p + \omega_m$	$\Delta\omega_2 = \omega_m$	$Z_0$	$\varphi'$
$v'_3$	$\omega_p - \omega_m$	$\Delta\omega_3 = -\omega_m$	$Z_0$	$-\varphi'$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \underline{v}' &= \underline{v}_1 Z(\Delta\omega_1) e^{j\varphi(\Delta\omega_1)} + \underline{v}_2 Z(\Delta\omega_2) e^{j\varphi(\Delta\omega_2)} + \underline{v}_3 Z(\Delta\omega_3) e^{j\varphi(\Delta\omega_3)} \\ &= gRV_p e^{j\omega_p t} + g \frac{mV_p}{2} Z_0 e^{j(\omega_m + \omega_p)t} e^{j\varphi'} + g \frac{mV_p}{2} Z_0 e^{j(\omega_p - \omega_m)t} e^{-j\varphi'} \\ &= gRV_p e^{j\omega_p t} + g \frac{mV_p Z_0}{2} e^{j\omega_p t} \left[ e^{j(\omega_m t + \varphi')} + e^{-j(\omega_m t + \varphi')} \right] \\ &= gRV_p e^{j\omega_p t} \left[ 1 + \frac{mZ_0}{R} \cos(\omega_m t + \varphi') \right] \end{aligned}$$

ce qui confirme que :

$$\begin{aligned} v'(t) &= \operatorname{Re}\{v'\} = gRV_p \cos(\omega_p t) \left[ 1 + \frac{mZ_0}{R} \cos(\omega_m t + \varphi') \right] \\ \Rightarrow v'(t) &= V'_p \times [1 + m' \cos(\omega_m t + \varphi')] \times \cos(\omega_p t) \end{aligned}$$

avec :

$$V'_p = gRV_p \quad m' = \frac{mZ_0}{R} = \frac{m}{\sqrt{1 + \frac{4Q^2\omega_m^2}{\omega_p^2}}} \quad \varphi' = \arctan\left(\frac{-2Q\omega_m}{\omega_p}\right)$$

L'expression de  $v'(t)$  montre que l'amplificateur déforme le signal  $v(t)$  en même temps qu'il l'amplifie, car il n'existe pas de réel  $\alpha$  tel que  $v'(t) = \alpha v(t)$ .

- (c) Le signal  $v(t)$  serait, en revanche, une image non déformée de  $v(t)$  si  $m'$  était proche de 1 et  $\varphi'$  proche de 0 :

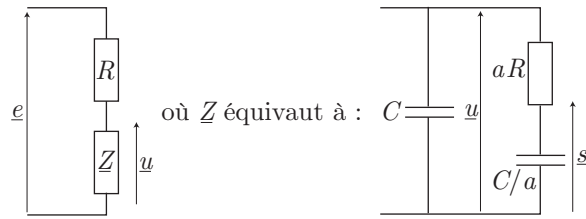
$$\frac{m'}{m} = \left[ 1 + \frac{4Q^2\omega_m^2}{\omega_p^2} \right]^{1/2} \simeq 1 \text{ et } \frac{2Q\omega_m}{\omega_p} \simeq 0$$

On remarque immédiatement que la condition :  $\frac{\omega_m}{\omega_p} \ll \frac{1}{2Q}$  permet de vérifier ces deux relations car :

$$2Q \times \frac{\omega_m}{\omega_p} \ll 2Q \times \frac{1}{2Q} = 1 \text{ et } \frac{4Q^2\omega_m^2}{\omega_p^2} = \left( 2Q \frac{\omega_m}{\omega_p} \right)^2 \ll 1$$

### ● 36 ————— Concours Commun Polytechnique

Représentons le montage de la manière suivante :



L'impédance  $\underline{Z}$  vérifie donc :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = C\omega j + \frac{1}{aR + \frac{a}{C\omega j}} = C\omega j + \frac{C\omega j}{a(1 + RC\omega j)}$$

de sorte que la loi du pont diviseur de tension fournit :

$$\frac{u}{e} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} = \frac{1}{1 + R \times \frac{1}{\underline{Z}}} = \frac{1}{1 + RC\omega j + \frac{RC\omega j}{a(1 + RC\omega j)}}$$

De même, cette loi assure la relation entre  $s$  et  $u$  :

$$\frac{s}{u} = \frac{a/C\omega j}{aR + \frac{a}{C\omega j}} = \frac{1}{1 + RC\omega j}$$

Par suite, la fonction de transfert du circuit vaut :

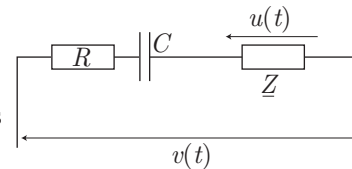
$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{s}{e} = \frac{s}{u} \times \frac{u}{e} \\ &= \frac{1}{1 + RC\omega j} \times \frac{1}{1 + RC\omega j + \frac{RC\omega j}{a(1 + RC\omega j)}} \\ &= \frac{1}{(1 + RC\omega j)^2 + \frac{RC\omega j}{a}} \\ \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 - (RC\omega)^2 + RC\omega j \left(2 + \frac{1}{a}\right)} \end{aligned}$$

### ● 37 ————— Concours Centrale

1. On note  $\underline{Z}$  l'impédance équivalente à l'association en parallèle de  $R$  et  $C$  :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + C\omega j$$

La loi du pont diviseur de tension conduit alors à :



$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{v} \times \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R + \frac{1}{C\omega j}} = \frac{\underline{v}}{1 + \left(R + \frac{1}{C\omega j}\right) \left(\frac{1}{R} + C\omega j\right)} \\ &= \frac{\underline{v}}{3 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} \end{aligned}$$

Afin de soulager les calculs, on pose :  $x = RC\omega$ , de sorte que :

$$\underline{u} = \frac{\underline{v}}{3 + j \left(x - \frac{1}{x}\right)} \Rightarrow U_0 = \frac{V_0}{\sqrt{9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \quad (32)$$

Cette expression révèle que  $U_0$  prend sa valeur maximale  $U_0^{\max}$  pour :

$$x = 1 \Rightarrow RC\omega_0 = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Dans ce cas :

$$U_0^{\max} = \frac{V_0}{\sqrt{9}} = \frac{V_0}{3} \quad (33)$$

2. Par définition, le gain en décibels du montage vaut :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log \left( \frac{U_0}{V_0} \right) = -10 \log \left[ 9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \right] \quad \text{où } x = RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0}$$

On remarque alors que :

- pour  $\log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \ll 0$  (soit  $\log x \ll 0 \Rightarrow x \ll \frac{1}{x}$ ) :

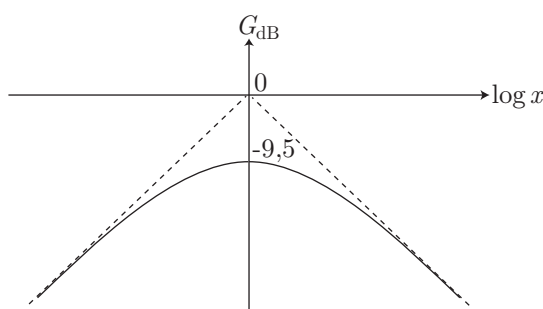
$$9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \simeq 9 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \simeq \frac{1}{x^2} \Rightarrow G_{\text{dB}} \simeq 20 \log x$$

- $G_{\text{dB}}(x = 1) = -10 \log 9 = -9,5 \text{ dB}$  ;

- lorsque  $\log \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \gg 0$  (c'est-à-dire  $\log x \gg 0 \Rightarrow x \gg \frac{1}{x}$ ) :

$$9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \simeq 9 + x^2 \simeq x^2 \Rightarrow G_{\text{dB}} \simeq -20 \log x$$

Les expressions ainsi obtenues correspondent aux asymptotes du diagramme de Bode, dont l'allure est par conséquent :



3. Compte tenu des résultats (32) et (33), l'équation :  $U_0 = \frac{U_0^{\max}}{\sqrt{2}}$  équivaut à :

$$\frac{V_0}{\sqrt{9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{V_0}{\sqrt{18}} \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 3x - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases}$$

Le discriminant commun à ces deux équations du second degré valant :

$$\Delta = 13 \Rightarrow \sqrt{\Delta} > 3$$

seules deux solutions positives peuvent convenir :

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

en conséquence de quoi :

$$\omega_1 = \omega_0 x_1 = \frac{\omega_0}{2} (\sqrt{13} - 3) \text{ et } \omega_2 = \omega_0 x_2 = \frac{\omega_0}{2} (\sqrt{13} + 3)$$

## ● 38 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

### 1. Dédoublage de fréquence

À la sortie du multiplieur se trouve une tension :

$$\begin{aligned} m(t) &= a(t) \times e_0(t) = 2AE_0 \cos(2\pi f_a t) \times \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \\ &= AE_0 \times \{\cos[2\pi(f_0 - f_a)t + \varphi_0] + \cos[2\pi(f_0 + f_a)t + \varphi_0]\} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant :

$$f = f_0 - f_a = 1450 - 1420 = 30 \text{ Hz}$$

et :

$$f' = f_0 + f_a = 1450 + 1420 = 2870 \text{ Hz}$$

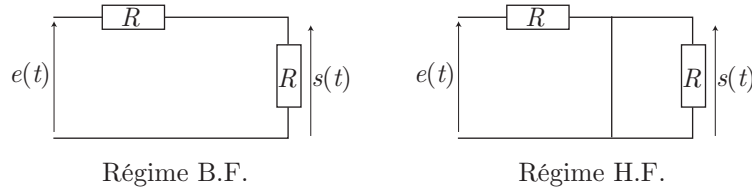
la tension  $m(t)$  apparaît comme la superposition de deux signaux :

$$m(t) = e_1(t) + e_2(t) \text{ avec } \begin{cases} e_1(t) = AE_0 \cos(2\pi f t + \varphi_0) \\ e_2(t) = AE_0 \cos(2\pi f' t + \varphi_0) \end{cases}$$

### 2. filtrage



- (a) En basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, tandis qu'en haute fréquence, il équivaut à un fil électrique. Dans ces deux cas, le filtre proposé par l'énoncé a pour schéma équivalent :



C'est pourquoi :

- en basse fréquence, ce filtre se comporte comme un pont diviseur de tension :

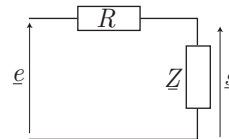
$$s(t) = \frac{1}{2} \times e(t)$$

- en haute fréquence, il interdit le passage du signal, car  $s(t) = 0$ .

Ce comportement est typique d'un filtre passe-bas.

- (b) Soit  $\underline{Z}$  l'impédance équivalente à  $R$  et  $C$  en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + C\omega j = \frac{1 + RC\omega j}{R}$$



La loi du pont diviseur de tension fournit alors :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} = \frac{1}{1 + R \times \frac{1}{\underline{Z}}} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + RC\omega j}$$

- (c) Cette fonction de transfert a pour module :

$$H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{4 + (RC\omega)^2}}$$

qui est une fonction décroissante de  $\omega$ . Aussi, sa valeur maximale vaut :

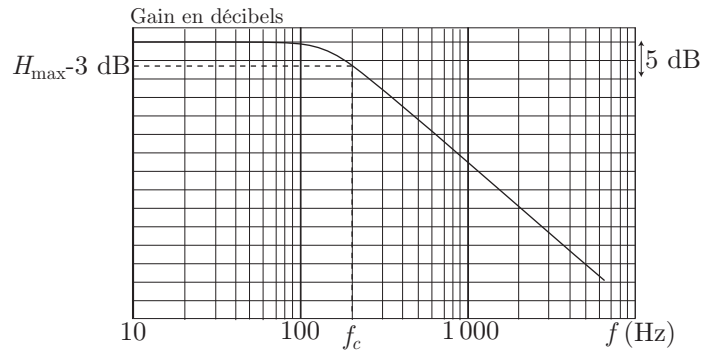
$$H_{\max} = \lim_{\omega \rightarrow 0} [H(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

Ce faisant, la définition de la pulsation de coupure  $\omega_c$  :  $H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$  s'écrit aussi :

$$\frac{1}{\sqrt{4 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \Rightarrow (RC\omega_c)^2 = 4 \Rightarrow \omega_c = \frac{2}{RC}$$

- (d) Le diagramme de Bode fourni par l'énoncé permet de repérer la pulsation  $\omega_c$  pour laquelle

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{\text{dB}}(\omega_c) = G_{\text{dB max}} - 3 \text{ dB}$$



C'est ainsi que l'on trouve  $f_c = 200$  Hz, ce qui conduit à :

$$\omega_c = 2\pi f_c = \frac{1}{RC} \Rightarrow RC = \frac{1}{2\pi f_c} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

(e) En haute fréquence, la fonction de transfert du filtre se simplifie :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + RC\omega j} \simeq \frac{1}{RC\omega j}$$

Aussi, les images complexes  $\underline{s}$  et  $\underline{e}$ , associées aux signaux  $s(t)$  et  $e(t)$ , sont liées par :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{RC\omega j} &\Rightarrow RC \times \omega j \underline{s} = \underline{e} \Rightarrow RC \frac{ds}{dt} = e \\ \Rightarrow RC \frac{ds}{dt} = e &\Rightarrow s = \frac{1}{RC} \int e(t) dt + \text{cte} \end{aligned}$$

C'est pour cette raison que le filtre réalise l'intégration du signal  $e(t)$ .

Dans ces conditions,  $H(\omega) = \frac{1}{RC\omega}$  a pour gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log \left( \frac{1}{RC\omega} \right) = 20 \log \left( \frac{1}{RC} \right) - 20 \log \omega$$

Ce faisant, sur le diagramme de Bode, le comportement intégrateur du filtre est caractérisé par la portion linéaire décroissante.

Quant au déphasage  $\phi$  de  $s(t)$  par rapport à  $e(t)$ , il est donné par :

$$\phi = \arg \{ \underline{H}(j\omega) \}$$

où :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{2 + RC\omega j} = \frac{1}{H(\omega)} - j \frac{RC\omega}{H(\omega)} \\ \Rightarrow \tan \phi &= \frac{\text{Im} \{ \underline{H}(j\omega) \}}{\text{Re} \{ \underline{H}(j\omega) \}} = -RC\omega = -\frac{\omega}{\omega_c} \end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$\lim_{\omega \gg \omega_c} [\tan \phi] = -\infty \Rightarrow \lim_{\omega \gg \omega_c} \phi = -\frac{\pi}{2}$$

### 3. Le mélangeur

(a) Le signal d'entrée du filtre étant :

$$m(t) = AE_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + AE_0 \cos(\omega' t + \varphi_0)$$

avec  $\omega = 2\pi f$  et  $\omega' = 2\pi f'$ , sa tension de sortie s'écrit :

$$s(t) = H(\omega)AE_0 \times \cos[\omega t + \varphi_0 + \phi(\omega)] + H(\omega')AE_0 \times \cos[\omega' t + \varphi_0 + \phi(\omega')]$$

c'est-à-dire :

$$s(t) = S \cos(2\pi f t + \varphi_S) + S' \cos(2\pi f' t + \varphi_{S'})$$

à condition de poser :

$$S = \frac{AE_0}{\sqrt{4 + (RC\omega)^2}} \quad S' = \frac{AE_0}{\sqrt{4 + (RC\omega')^2}}$$

et :

$$\varphi_S = \varphi_0 + \arctan(-RC\omega) \quad \varphi_{S'} = \varphi_0 + \arctan(-RC\omega')$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{S}{S'} &= \frac{H(\omega) \times AE_0}{H(\omega') \times AE_0} = \frac{H(\omega)}{H(\omega')} \\ \Rightarrow 20 \log \left( \frac{S}{S'} \right) &= 20 \log [H(\omega)] - 20 \log [H(\omega')] \\ \Rightarrow 20 \log \left( \frac{S}{S'} \right) &= G_{dB}(\omega) - G_{dB}(\omega') \end{aligned}$$

où, pour les fréquences  $f = 30$  Hz et  $f' = 2870$  Hz, le diagramme de Bode fourni par l'énoncé révèle que :

$$\begin{aligned} G_{dB}(\omega) - G_{dB}(\omega') = 25 \text{ dB} &\Rightarrow \log \left( \frac{S}{S'} \right) = \frac{25}{20} \\ &\Rightarrow \frac{S}{S'} = \sqrt{18} = 4,2 \end{aligned}$$

(b) Admettre que l'atténuation  $\frac{S}{S'}$  est très supérieure au résultat précédent revient à imposer :  $\frac{S}{S'} \gg 1$ , de sorte que :

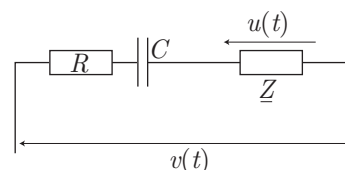
$$\begin{aligned} s(t) &= S \cos(2\pi f t + \varphi_S) + S' \cos(2\pi f' t + \varphi_{S'}) \\ \Rightarrow s(t) &\simeq S \cos(2\pi f t + \varphi_S) \end{aligned}$$

Le signal décalé présente alors la fréquence :  $f = 30$  Hz .

## ● 39 ————— Concours Centrale

1. L'association en parallèle de  $R$  et  $C$  équivaut à un dipôle d'impédance  $\underline{Z}$  qui vérifie :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + C\omega j$$



Aussi, la loi du pont diviseur de tension conduit directement à l'expression de la fonction de transfert :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) = \frac{u}{v} &= \frac{\underline{Z}}{R + \frac{1}{C\omega j} + \underline{Z}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{C\omega j}\right) \left(\frac{1}{R} + C\omega j\right)} \\ &= \frac{1}{3 + RC\omega j + \frac{1}{RC\omega j}} = \frac{RC\omega j}{(RC\omega j)^2 + 3RC\omega j + 1} \end{aligned}$$

Aussi, en posant  $\tau = RC$  :

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} = \frac{\tau\omega j}{\tau^2(\omega j)^2 + 3\tau\omega j + 1} &\Rightarrow \tau^2(\omega j)^2 u + 3\tau\omega j u + u = \tau\omega j v \\ &\Rightarrow \tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3\tau \frac{du}{dt} + u = \tau \frac{dv}{dt} \\ &\Rightarrow \tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3\tau \frac{du}{dt} + u = \tau \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

Enfin, puisqu'à  $t = 0$ ,  $v = E = \text{cte}$ , cette équation différentielle devient :

$$\tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3\tau \frac{du}{dt} + u = 0 \quad (34)$$

2. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle :

$$\tau^2 X^2 + 3\tau X + 1 = 0$$

admet pour discriminant :

$$\Delta = 9\tau^2 - 4\tau^2 = 5\tau^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \tau\sqrt{5}$$

et donc pour solutions :

$$X_1 = \frac{-3\tau + \tau\sqrt{5}}{2\tau^2} = \frac{-3}{2\tau} + \frac{\sqrt{5}}{2\tau} \text{ et } X_2 = \frac{-3}{2\tau} - \frac{\sqrt{5}}{2\tau}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} X_1 = -a + b \\ X_2 = -a - b \end{cases} \text{ en posant : } a = \frac{3}{2\tau} \text{ et } b = \frac{\sqrt{5}}{2\tau}$$

Ce faisant, l'équation différentielle (34) admet pour solution générale :

$$u = \alpha e^{X_1 t} + \beta e^{X_2 t} = e^{-at} (\alpha e^{bt} + \beta e^{-bt})$$

dans laquelle les deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  doivent rendre compte des conditions initiales :

- portant sur  $u(t=0)$  :

$$\begin{aligned} u(t=0) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{RC\omega j}{(RC\omega j)^2 + 3RC\omega j + 1} \right] \times E = 0 \\ \Rightarrow \alpha + \beta &= 0 \Rightarrow \beta = -\alpha \\ \Rightarrow u(t) &= \alpha e^{-at} (e^{bt} - e^{-bt}) \end{aligned}$$

- portant sur  $\dot{u}(t=0)$ .

En remarquant que  $\frac{du}{dt} = j\omega u$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{RC(\omega j)^2}{(RC\omega j)^2 + 3RC\omega j + 1} v = \frac{\tau(\omega j)^2}{\tau^2(\omega j)^2 + 3\tau\omega j + 1} v \\ \Rightarrow \dot{u}(t=0) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{\tau(\omega j)^2}{\tau^2(\omega j)^2 + 3\tau\omega j + 1} \right] \times E = \frac{E}{\tau} \end{aligned}$$

Or, étant donné que :

$$\begin{aligned} u(t) = \alpha e^{at} (e^{bt} - e^{-bt}) &\Rightarrow \frac{du}{dt} = \alpha e^{at} [a(e^{bt} - e^{-bt}) + b(e^{bt} + e^{-bt})] \\ \Rightarrow \dot{u}(t=0) &= 2\alpha b \end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$2\alpha b = \frac{E}{\tau} \Rightarrow \alpha = \frac{E}{2\tau} \times \frac{1}{b} = \frac{E}{2\tau} \times \frac{2\tau}{\sqrt{5}} = \frac{E}{\sqrt{5}}$$

Ce faisant :

$$u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} e^{-at} (e^{bt} - e^{-bt}) = \frac{2E}{\sqrt{5}} e^{-at} \sinh(bt)$$

soit encore :

$$u(t) = \frac{2E}{\sqrt{5}} e^{-3t/2\tau} \times \sinh\left(\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}\right)$$

## ● 40 ————— Lycée Henri IV, Paris

- La loi du pont diviseur de tension fournit immédiatement :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\frac{1}{C\omega j}}{\frac{1}{C\omega j} + L\omega j + R} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + RC\omega j}$$

où l'on remarque que :

$$LC = \frac{1}{\omega_c^2} \Rightarrow LC\omega^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 = x^2$$

tandis que :

$$R = \frac{L\omega_c}{Q} \Rightarrow RC = LC \times \frac{\omega_c}{Q} = \frac{1}{\omega_c^2} \times \frac{\omega_c}{Q} = \frac{1}{Q\omega_c}$$

$$\Rightarrow RC\omega = \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_c} = \frac{x}{Q}$$

C'est pourquoi on peut également présenter la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 - x^2 + \frac{j}{Q}x} \quad (35)$$

2. Le facteur de qualité  $Q$  a pour valeur :

$$Q = \frac{L\omega_c}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{12} \times \sqrt{\frac{11.10^{-3}}{2.3.10^{-9}}}$$

$$\Rightarrow Q = 182$$

(a) De l'expression (35), il ressort que :

$$H(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \quad (36)$$

d'où l'on déduit l'expression du gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log x = -10 \log \left[ (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \right]$$

Les asymptotes du diagramme de Bode s'obtiennent en étudiant :

- lorsque  $x \ll 1$  (soit :  $\log x \ll 0$ ) :

$$(1-x^2)^2 \simeq 1 \text{ et } \frac{x^2}{Q^2} + (1-x^2)^2 \simeq 1$$

c'est-à-dire :

$$G_{dB}(\log x \ll 0) \simeq 0$$

- lorsque  $x \gg 1$  (ou encore  $\log x \gg 0$ ) :

$$(1-x^2)^2 \simeq x^4 \text{ et } \frac{x^2}{Q^2} + (1-x^2)^2 \simeq \frac{x^2}{Q^2} + x^4 \simeq x^4$$

d'où il découle que :

$$G_{dB}(\log x \gg 0) \simeq -40 \log x$$

En outre :

$$G_{dB}(x=1) = -10 \log \left( \frac{1}{Q^2} \right) = 20 \log Q \Rightarrow G_{dB} = 45,2 \text{ dB}$$

Enfin,  $G_{dB}$  peut également s'écrire :

$$G_{dB}(x) = -10 \log [f(x)] \text{ où } f(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

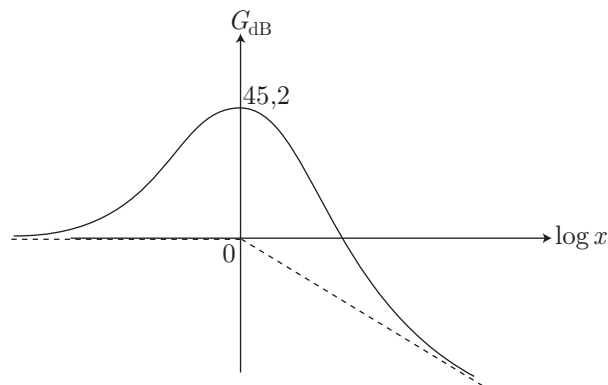
ce qui montre que  $G_{dB}(x)$  devient *maximum* pour la valeur  $x_m \neq 0$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_m} = 0 &\Rightarrow -4x_m (1 - x_m^2) + \frac{2x_m}{Q^2} = 0 \\ &\Rightarrow 4x_m \left( x_m^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow x_m = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \end{aligned}$$

Compte tenu de la grande valeur de  $Q$ , on pourra retenir que :

$$1 - \frac{1}{2Q^2} \simeq 1 \Rightarrow x_m \simeq 1 \Rightarrow \log x_m = 0 \quad (37)$$

L'ensemble de ces informations permet finalement de représenter le diagramme de Bode en amplitude du circuit :



(b) Compte tenu de l'expression de  $\underline{H}(j\omega)$  :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{(1 - x^2) + j \frac{x}{Q}} = H e^{j\varphi}$$

le déphasage  $\varphi$  vérifie l'équation :

$$\tan \varphi = -\frac{x}{Q(1 - x^2)} \Rightarrow \tan \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{1}{\tan \varphi} = Q \left( x - \frac{1}{x} \right)$$

Remarque – On étudiera de préférence  $\tan \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)$ , dont le dénominateur ne s'annule pas, notamment pour  $x = 1$ .

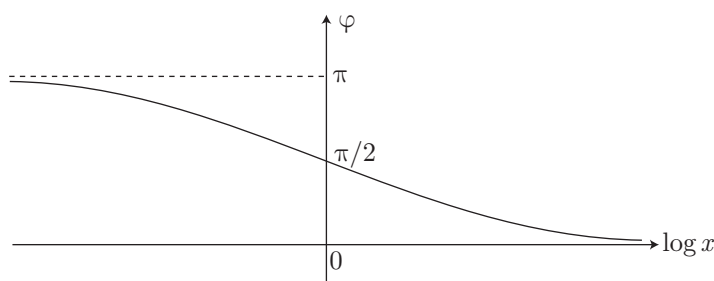
On remarque alors que :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \tan \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi = \pi \\ \lim_{x \rightarrow 1} \varphi = \frac{\pi}{2} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi = 0 \end{cases}$$

d'où l'on déduit que :

$$\lim_{\log x \rightarrow -\infty} \varphi = \pi \quad \lim_{\log x \rightarrow 0} \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{\log x \rightarrow \infty} \varphi = 0$$

c'est-à-dire encore le diagramme de Bode :



(c) Les fréquences de coupure  $\omega = x \omega_c$  sont solutions de l'équation :

$$G_{\text{dB}} = G_{\text{dB}}^{\text{max}} - 3 \text{ dB} \Leftrightarrow H(\omega) = \frac{H_{\text{max}}}{\sqrt{2}} \quad (38)$$

où  $H_{\text{max}}$  se déduit des résultats (37) et (36) :

$$x_m \simeq 1 \Rightarrow H_{\text{max}} = H(x=1) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}}$$

Par suite, l'équation (38) équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{Q^2}}} \Rightarrow (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} = \frac{2}{Q^2} \\ &\Rightarrow Q^2(1-2x^2+x^4) + x^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant  $X = x^2$  :

$$Q^2 X^2 + X(1-2Q^2) + Q^2 - 2 = 0$$

Le discriminant de cette équation :

$$\Delta = (1-2Q^2)^2 - 4Q^2(Q^2-2) = 1+4Q^2 > 0$$



montre qu'elle admet deux solutions réelles :

$$X = \frac{2Q^2 - 1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q^2}$$

où  $Q \gg 1$  permet de poser :

$$\begin{cases} 2Q^2 - 1 \simeq 2Q^2 \\ 4Q^2 + 1 \simeq 4Q^2 \end{cases} \Rightarrow X = \frac{2Q^2 \pm 2Q}{2Q^2} = 1 \pm \frac{1}{Q}$$

Ainsi, les pulsations de coupure  $\omega = \omega_c \sqrt{X}$  valent :

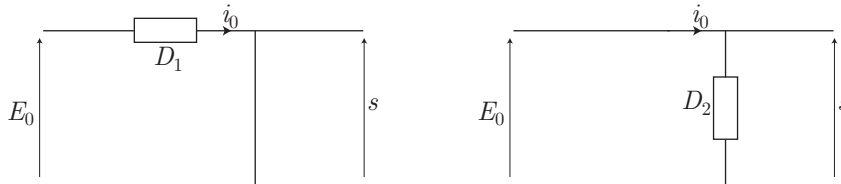
$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_c \sqrt{1 - \frac{1}{Q}} \\ \omega_2 = \omega_c \sqrt{1 + \frac{1}{Q}} \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_1 \simeq \omega_c \left(1 - \frac{1}{2Q}\right) \\ \omega_2 \simeq \omega_c \left(1 + \frac{1}{2Q}\right) \end{cases}$$

On remarque, ici, que la bande passante a pour largeur :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_c}{Q}$$

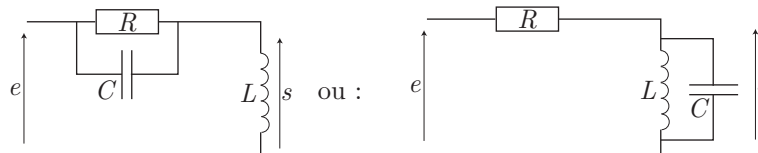
● 41 ————— Concours Commun Polytechnique

La pile fournit une tension  $E_0 = 15$  V constante, auquel cas le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur fermé. Mais puisque  $i_0 \neq 0$ , le condensateur ne peut se trouver en série dans le montage qui peut être équivalent à ceux représentés ci-dessous :



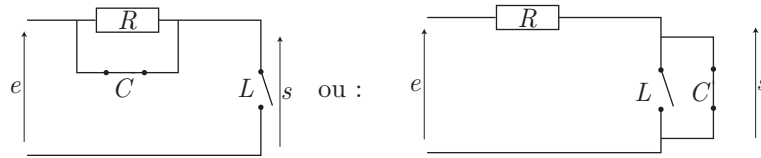
En outre, le circuit se comporte comme un filtre passe-bande, ce qui signifie qu'en basse fréquence (voire en fréquence nulle),  $s \simeq 0$ . Seul le premier de ces montages autorise cette possibilité.

D'autre part, la tension  $s(t)$  n'est pas uniformément nulle, ce qui impose l'existence d'un dipôle  $D_2$  autre qu'un fil électrique ; la bobine se trouve donc sur la branche verticale (puisque le condensateur ne peut s'y trouver seul, sous peine d'être monté en série). Il n'existe donc que deux montages susceptibles de vérifier ces contraintes :

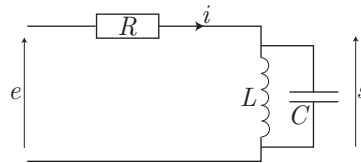


**CORRIGÉS**

Cependant, en haute fréquence, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un interrupteur fermé. Ces pourquoi ces circuits équivalent à :



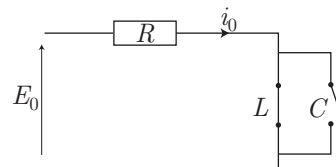
Or, le filtre passe-bande impose  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} [s(t)] = 0$ , ce qui n'est possible qu'avec le deuxième schéma. Finalement, le circuit proposé par l'énoncé est :



Évaluons alors les valeurs numériques de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

- En régime continu,  $e = E_0 = 15$  V tandis que  $i = i_0 = 15$  mA. Le schéma ci-contre indique alors que :

$$E_0 = R i_0 \Rightarrow R = \frac{E_0}{i_0} = 1 \text{ k}\Omega$$



- Soit  $\underline{Z}_2$  l'impédance du dipôle  $D_2$  ( $L$  et  $C$  en parallèle) :

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = C\omega j + \frac{1}{L\omega j}$$

La fonction de transfert du circuit s'obtient à l'aide de la loi du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + R} = \frac{1}{1 + R \times \frac{1}{\underline{Z}_2}} \\ &= \frac{1}{1 + RC\omega j + \frac{R}{L\omega j}} = \frac{1}{1 + jR \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right)} \end{aligned}$$

On posera dorénavant :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C = \frac{1}{L\omega_0^2} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\frac{R}{L} \left( \frac{\omega}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega} \right)} \\ \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{1 + j\frac{R}{L\omega_0} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, finalement :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

où :

$$x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad Q = \frac{R}{L\omega_0} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Le gain en décibels vaut alors :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = -10 \log \left[ 1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$$

et son *maximum* est obtenu pour :

$$x = \frac{1}{x} \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow 2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

soit encore :

$$LC = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2} \quad (39)$$

La valeur *maximum* de  $G_{\text{dB}}$  vaut alors  $G_{\text{dB}}^{\text{max}} = 0$ . Or, les pulsations de coupure  $\omega_1 = \omega_0 x_1$  et  $\omega_2 = \omega_0 x_2$  sont associées aux valeurs de  $x$  qui satisfont l'équation :

$$\begin{aligned} G_{\text{dB}}(x) = G_{\text{dB}}^{\text{max}} - 3 \text{ dB} &\Rightarrow -10 \log \left[ 1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 \right] = -10 \log 2 \\ &\Rightarrow Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Si  $x_2$  est solution de cette équation, c'est-à-dire :

$$f(x_2) = Q^2 \left( x_2 - \frac{1}{x_2} \right)^2 - 1 = 0 \quad (40)$$

on remarque que  $x_1 = \frac{1}{x_2}$  en est aussi solution, car :

$$f(x_1) = Q^2 \left( x_1 - \frac{1}{x_1} \right)^2 - 1 = Q^2 \left( \frac{1}{x_2} - x_2 \right)^2 - 1 = 0$$

de sorte que l'équation (40) devient :

$$Q^2 \left( x_2 - \frac{1}{x_2} \right)^2 = 1 \Rightarrow Q^2 (x_2 - x_1)^2 = 1$$

Notamment, si l'on convient que  $x_2 > x_1$  :

$$Q (x_2 - x_1) = 1 \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \Rightarrow \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

d'où il ressort que :

$$\begin{aligned}\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 2\pi \Delta f &\Rightarrow \Delta f = \frac{\omega_0}{2\pi Q} = \frac{f_0}{Q} \\ &\Rightarrow Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{R}{2\pi L f_0} \\ &\Rightarrow L = \frac{R \Delta f}{2\pi f_0^2}\end{aligned}$$

Application numérique :

$$L = \frac{10^3 \times 0,34 \cdot 10^3}{2\pi \times (1,16 \cdot 10^3)^2} \Rightarrow L = 40 \text{ mH}$$

Quant au résultat (39), il conduit à :

$$C = \frac{1}{L} \times \frac{1}{4\pi^2 f_0^2} \Rightarrow C = \frac{1}{2\pi R \Delta f}$$

Application numérique :

$$C = \frac{1}{2\pi \times 10^3 \times 0,34 \cdot 10^3} \Rightarrow C = 468 \text{ nF}$$

## ● 42 ————— Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

1. La fonction de transfert s'écrit :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = H(\omega) e^{j\phi(\omega)}$$

avec :

$$H(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \text{ et } \tan \phi = Q \left( \frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

tandis que la tension d'entrée  $v_e(t)$  se présente sous la forme :

$$\begin{aligned}v_e(t) &= \frac{V_0}{2} \sin(\Omega_0 t) + \frac{2V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\Omega_k t) \\ &\text{où } \Omega_0 = 0 \text{ et } \Omega_k = (2k + 1) \omega_1\end{aligned}$$

Aussi, le signal de sortie se présente comme une série :

$$v_s(t) = \frac{V_0}{2} \times H(\Omega_0) \sin(\Omega_0 t + \phi_0) + \frac{2V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H(\Omega_k)}{2k + 1} \sin(\Omega_k t + \phi_k)$$

Le premier terme de cette décomposition se calcule aisément, car :

$$H(\Omega_0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} [H(\omega)] = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[ \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \right] = 0$$

Ce faisant, puisque ce terme est nul, il reste :

$$v_s(t) = \frac{2V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H(\Omega_k)}{2k+1} \sin(\Omega_k t + \phi_k) \quad (41)$$

ce qui justifie l'absence de composante continue dans l'expression de  $v_s(t)$ .

2. (a) L'expression de  $H(\Omega_k)$  :

$$H(\Omega_k) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\Omega_k}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega_k} \right)^2}}$$

devient *maximum* lorsque  $\Omega_k = \omega_0$ . En outre, la décomposition (41) montre que le terme d'ordre  $k = 0$  est le plus important. C'est pourquoi on peut considérer que le premier oscillogramme a été obtenu avec  $k = 0 \Rightarrow \Omega_{k=0} = \omega_1$  et  $\Omega_{k=0} = \omega_0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_0$ . Dans ce cas, en effet,  $v_s(t)$  admet pour décomposition :

$$v_s(t) = \frac{2V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{H_0}{(2k+1) \sqrt{1 + Q^2 \left( 2k+1 - \frac{1}{2k+1} \right)^2}} \sin[(2k+1)\omega_0 t + \phi_k]$$

Ce faisant, le terme prépondérant de cette série vaut :

$$\frac{2V_0}{\pi} \times H_0 \times \sin(\omega_0 t + \phi_0) \text{ où } \tan \phi_k = Q \left[ \frac{1}{2k+1} - (2k+1) \right] \Rightarrow \phi_0 = 0$$

Ceci justifie l'observation, sur l'oscillogramme, d'un signal sinusoïdal :

$$s_1(t) = \frac{2V_0 H_0}{\pi} \sin(\omega_0 t) = S_1 \sin(\omega_0 t) \quad (42)$$

La période de ce signal vaut alors :

$$T_0 = 50.10^{-6} \times 5 = 25.10^{-5} \text{ s} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 25\,120 \text{ Hz}$$

(b) L'amplitude  $S_1$  de  $s_1(t)$  est donnée par l'oscillogramme :

$$S_1 = 3 \times 2 = 6 \text{ V}$$

tandis que  $V_0 = 2 \times 0,5 = 1$  V. Aussi, l'identité (42) conduit-elle à :

$$\begin{aligned} S_1 = \frac{2V_0 H_0}{\pi} &\Rightarrow H_0 = \frac{\pi S_1}{2V_0} = \frac{\pi \times 6}{2 \times 1} \\ &\Rightarrow H_0 = 9,42 \end{aligned}$$

3. (a) Le deuxième oscillogramme montre que le signal  $v_e(t)$  a pour période :

$$\begin{aligned} T_1 = 5 \times 5 \cdot 10^{-6} = 25 \cdot 10^{-6} \text{ s} &\Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 251\,200 \text{ Hz} \\ &\Rightarrow \omega_1 = 10 \times \omega_0 \end{aligned}$$

Aussi, pour une pulsation  $\Omega_k = (2k + 1) \omega_1$  :

$$\begin{cases} \frac{\Omega_k}{\omega_0} = (2k + 1) \frac{\omega_1}{\omega_0} = 10 \times (2k + 1) \\ \frac{\omega_0}{\Omega_k} = \frac{\omega_0}{(2k + 1) \omega_1} = \frac{1}{10 \times (2k + 1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{\Omega_k}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega_k} \simeq \frac{\Omega_k}{\omega_0}$$

Ce faisant :

$$\underline{H}(j\Omega_k) = \frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\Omega_k}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\Omega_k} \right)} \simeq \frac{H_0}{1 + jQ \frac{\Omega_k}{\omega_0}} \Rightarrow \underline{H}(j\Omega_k) \simeq \frac{H_0 \omega_0}{jQ \Omega_k} \quad (43)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\Omega_k) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{H_0}{jQ \frac{\Omega_k}{\omega_0}} &\Rightarrow \frac{Q}{\omega_0} \times j\Omega_k v_s = H_0 v_e \\ &\Rightarrow \frac{Q}{\omega_0} \frac{dv_s}{dt} = H_0 v_e \\ &\Rightarrow \frac{dv_s}{dt} = \frac{H_0 \omega_0}{Q} v_e \end{aligned}$$

Le montage apparaît bien comme un intégrateur :

$$v_s = \frac{H_0 \omega_0}{Q} \int v_e dt + \text{cte} \quad (44)$$

(b) Le deuxième oscillogramme révèle que lorsque  $v_e = 2 \times 2 = 4$  V, le signal  $v_s(t)$  est linéaire, de pente :

$$a = \frac{6 \times 0,2}{2,5 \times 5 \cdot 10^{-6}} = 96\,000 \text{ V} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ce résultat est du reste confirmé par l'identité (44) :

$$v_s(t) = \frac{H_0 \omega_0 v_e}{Q} \times t + \text{cte}$$

qui présente une pente :

$$a = \frac{H_0 \omega_0 v_e}{Q} \Rightarrow \frac{H_0 \omega_0}{Q} = \frac{a}{v_e} = \frac{96\,000}{4} = 24\,000 \text{ s}^{-1}$$

Compte tenu des valeurs déjà obtenues pour  $\omega_0$  et  $H_0$ , ce résultat mène à :

$$Q = \frac{H_0 \omega_0}{24\,000} = \frac{9,42 \times 25\,120}{24\,000} \Rightarrow Q = 9,86$$

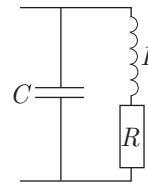
Remarque – Cette valeur de  $Q$  permet de confirmer la simplification opérée pour obtenir le résultat (43) :

$$\begin{aligned} \frac{Q \Omega_k}{\omega_0} &= 9,86 \times 10 \times (2k+1) \geq 98,6 \gg 1 \\ \Rightarrow 1 + jQ \frac{\Omega_k}{\omega_0} &\simeq jQ \frac{\Omega_k}{\omega_0} \end{aligned}$$

### ● 43 ————— Concours Centrale-Supélec

1. Soit  $\underline{Z}_e$  l'impédance équivalente au condensateur branché en parallèle avec  $\{L, R\}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}_e} &= C\omega j + \frac{1}{R + L\omega j} = \frac{1 - LC\omega^2 + RC\omega j}{R + L\omega j} \\ \Rightarrow \underline{Z}_e &= \frac{R + L\omega j}{1 - LC\omega^2 + RC\omega j} \end{aligned}$$



Il apparaît ainsi que ce circuit équivaut à une association en série de la bobine d'inductance  $L$  et de  $\underline{Z}_e$  ; son impédance vaut :

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= L\omega j + \underline{Z}_e = L\omega j + \frac{R + L\omega j}{1 - LC\omega^2 + RC\omega j} \\ \Rightarrow \underline{Z} &= \frac{L\omega j (2 - LC\omega^2) + R (1 - LC\omega^2)}{RC\omega j + (1 - LC\omega^2)} \end{aligned}$$

2.  $\underline{Z}$  s'identifie à une résistance pure  $r$  signifie que :

$$\underline{Z} = r \Rightarrow L\omega j (2 - LC\omega^2) + R (1 - LC\omega^2) = rRC\omega j + r (1 - LC\omega^2)$$

L'identification des parties réelles et imaginaires de cette équation conduit à :

$$L\omega (2 - LC\omega^2) = rRC\omega \Rightarrow r = \frac{L (2 - LC\omega^2)}{RC} \text{ si } \omega \neq 0$$

et :

$$\begin{aligned} R (1 - LC\omega^2) = r (1 - LC\omega^2) &\Rightarrow (R - r) (1 - LC\omega^2) = 0 \\ \Rightarrow \frac{R^2 C - 2L + L^2 C \omega^2}{RC} \times (1 - LC\omega^2) &= 0 \end{aligned}$$

Aussi, trois pulsations permettent de rendre  $\underline{Z}$  réel :

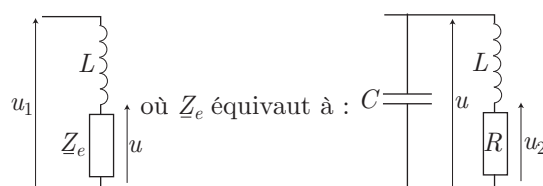
$$\omega = 0 \text{ ou } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ ou } \omega = \sqrt{\frac{2}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

à condition toutefois que  $\frac{2}{LC} > \frac{R^2}{L^2}$ .

3. L'introduction de l'impédance  $\underline{Z}_e$  telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = C\omega j + \frac{1}{R + L\omega j}$$

permet de présenter le circuit sous la forme suivante :



Aussi, la loi du pont diviseur de tension fournit :

$$\frac{u_2}{u} = \frac{R}{R + L\omega j}$$

et :

$$\frac{u}{u_1} = \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_e + L\omega j} = \frac{1}{1 + L\omega j \times \frac{1}{\underline{Z}_e}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + \frac{L\omega j}{R + L\omega j}}$$

Ce faisant, la fonction de transfert de la totalité du circuit vaut :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_2}{u} \times \frac{u}{u_1} \\ &= \frac{R}{R + L\omega j} \times \frac{1}{1 - LC\omega^2 + \frac{L\omega j}{R + L\omega j}} \\ &= \frac{R}{(R + L\omega j)(1 - LC\omega^2) + L\omega j} \\ &= \frac{R}{R(1 - LC\omega^2) + L\omega j(2 - LC\omega^2)} \end{aligned}$$

Pour simplifier les calculs, on posera :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ , de sorte que :

$$LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \text{ et } L\omega = \frac{RQ}{\omega_0} \omega = RQx$$

Finalement, on obtient :

$$\underline{H}(jx) = \frac{1}{(1 - x^2) + jQx(2 - x^2)} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$



4. Le module  $H(x)$  de  $\underline{H}(jx)$  valant :

$$H(x) = \left[ (1 - x^2)^2 + Q^2 x^2 (2 - x^2)^2 \right]^{-1/2}$$

le gain en décibels prend la valeur :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log [H(x)] \Rightarrow G_{\text{dB}} = -10 \log \left[ (1 - X)^2 + Q^2 X (2 - X)^2 \right] \text{ en posant } X = x^2$$

c'est-à-dire :

$$G_{\text{dB}} = -10 \log [f(X)] \text{ avec } f(X) = (1 - X)^2 + Q^2 X (2 - X)^2$$

Or,  $f(X)$  devient *extremum* aux valeurs de  $X$  solutions de l'équation :

$$\begin{aligned} f' = \frac{df}{dX} = 0 &\Rightarrow -2 + 2X + Q^2 (2 - X)^2 - 2Q^2 X (2 - X) = 0 \\ &\Rightarrow 3Q^2 X^2 + 2X (1 - 4Q^2) + 4Q^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

dont le discriminant réduit :

$$\begin{aligned} \Delta' &= (1 - 4Q^2)^2 - 3Q^2 (4Q^2 - 2) \\ &= (1 - 4Q^2)^2 - 6Q^2 (2Q^2 - 1) > (1 - 4Q^2)^2 \text{ si } Q < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

révèle l'existence de deux solutions :

$$X_1 = \frac{4Q^2 - 1 - \sqrt{\Delta'}}{6Q^2} < 0 \text{ et } X_2 = \frac{4Q^2 - 1 + \sqrt{\Delta'}}{6Q^2} > 0$$

On en déduit alors les variations de  $f(X)$  et par conséquent celles de  $G_{\text{dB}} = -10 \log [f(X)]$  :

$X$	$-\infty$	$X_1$	$X_2$	$\infty$
$f'$	+	-	+	
$f(X)$	↗		↘	↗
$G_{\text{dB}}$	↘		↗	↘

Cependant,  $X = x^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$  impose à  $X$  d'être strictement positif, de sorte que les variations de  $G_{\text{dB}}$  sont plutôt données par le tableau ci-dessous :

$X$	0	$x_2 = \sqrt{X_2}$	$\infty$
$G_{\text{dB}}$	↗		↘

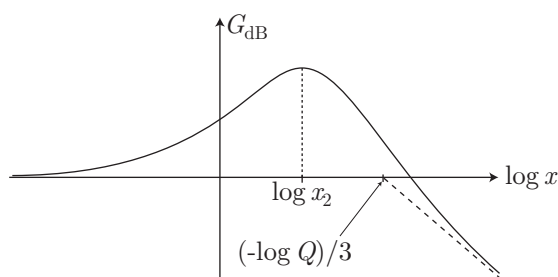
Quant aux asymptotes de  $G_{dB}$ , elles s'obtiennent en calculant :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (G_{dB}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ -10 \log \left\{ (1-x^2)^2 + Q^2 x^2 (2-x^2)^2 \right\} \right] \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (G_{dB}) = 0 \end{aligned}$$

et, pour  $x \gg 1$  :

$$\begin{aligned} (1-x^2)^2 + Q^2 x^2 (2-x^2)^2 &\simeq x^4 + Q^2 x^6 \simeq Q^2 x^6 \\ &\Rightarrow G_{dB}(\log x \gg 0) = -20 \log Q - 60 \log x \end{aligned}$$

Cette étude permet alors le tracé du diagramme de Bode :



#### ● 44 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Soit  $\underline{Z}$  l'impédance d'un dipôle traversé par un courant efficace  $I_{\text{eff}}$  ; la puissance moyenne absorbée par ce dipôle vaut :

$$P = \text{Re} \{ \underline{Z} \} \times I_{\text{eff}}^2 \quad (45)$$

Pour le dipôle proposé par l'énoncé :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{L\omega j} + C\omega j = \frac{1}{R} + j \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) = \frac{1}{R} \left[ 1 + jR \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right]$$

On convient alors de poser :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow C\omega = \frac{\omega}{L\omega_0^2} = \frac{1}{L\omega_0} \times x \text{ où } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Par suite :

$$R \left( C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) = R \left( \frac{x}{L\omega_0} - \frac{1}{L\omega} \right) = \frac{R}{L\omega_0} \left( x - \frac{1}{x} \right)$$

c'est-à-dire, en définissant le facteur de qualité par :

$$Q = \frac{R}{L\omega_0}$$

on obtient :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} \left[ 1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right) \right] \Rightarrow \underline{Z} = \frac{R}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

soit encore :

$$\underline{Z} = \frac{R - jRQ \left(x - \frac{1}{x}\right)}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} \Rightarrow \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} = \frac{R}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

Aussi, en remarquant que :

$$I_{\text{eff}} = |\underline{I}_0| = I_0$$

la relation (45) devient :

$$P = \frac{RI_0^2}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

Cette expression révèle que  $P$  devient *maximum* lorsque  $x = 1$ , auquel cas :

$$P_{\max} = RI_0^2 \Rightarrow P = \frac{P_{\max}}{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}$$

2. Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les pulsations de coupure, définies par :

$$P(\omega_i) = \frac{P_{\max}}{2} \text{ où } i = 1 \text{ ou } 2.$$

À ces pulsations  $\omega_i$  sont alors associées les grandeurs  $x_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$ , solutions de l'équation :

$$P(x_i) = \frac{P_{\max}}{2} \Rightarrow \frac{P_{\max}}{1 + Q^2 \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right)^2} = \frac{P_{\max}}{2} \Rightarrow Q^2 \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right)^2 = 1$$

Définissons ici la fonction :

$$f(x) = Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 1$$

et admettons que  $x_2$  soit solution de l'équation  $f(x_2) = 0$ . Dans ce cas :

$$f\left(\frac{1}{x_2}\right) = Q^2 \left(\frac{1}{x_2} - x_2\right)^2 - 1 = 0$$

montre que  $\frac{1}{x_2}$  est également une racine de  $f$ . Partant, les solutions  $x_i$  ( $x_1$  et

$x_2 > x_1 = \frac{1}{x_2}$  vérifient :

$$\begin{aligned} f(x_2) = 0 &\Rightarrow Q^2 \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)^2 = 1 \Rightarrow Q^2 (x_2 - x_1)^2 = 1 \\ &\Rightarrow Q (x_2 - x_1) = 1 \text{ avec } x_2 - x_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \\ &\Rightarrow Q \times \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} = 1 \Rightarrow \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0} = Q \end{aligned}$$

3. L'impédance  $\underline{Z}$  est définie par :

$$\underline{Z} = \frac{V_s}{I_0} = \frac{V_s}{sV_e} \Rightarrow \frac{V_s}{V_e} = s\underline{Z} = \frac{sR}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Le gain de l'amplificateur vaut alors :

$$H(x) = \left| \frac{V_s}{V_e} \right| = \frac{sR}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

À l'intérieur de la bande passante :

$$Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \leq 1 \Rightarrow H(x) \geq \frac{sR}{\sqrt{2}}$$

En outre,  $H(x)$  devient *maximum* lorsque  $x$  prend la valeur 1 :

$$H_{\max} = sR$$

en conséquence de quoi, à l'intérieur de la bande passante :

$$\frac{sR}{\sqrt{2}} \leq H(x) \leq sR$$

4. Si la pulsation du fondamental vaut  $\omega_0$ , les signaux  $V_e(t)$  et  $V_s(t)$  admettent les décompositions :

$$V_e(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{n,e} \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \text{ et } V_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{n,s} \cos(n\omega_0 t + \varphi'_n)$$

où :

$$V_{n,s} = H(n\omega_0) V_{n,e} = H(x_n = n) V_{n,e} = \frac{sR V_{n,e}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(n - \frac{1}{n}\right)^2}}$$

et :

$$V_{1,s} = H(x_n = 1) V_{1,e} = sR V_{1,e}$$

Les taux d'harmoniques de rang  $n$  valent alors :

$$\begin{aligned}\tau_{n,s} &= \frac{V_{n,s}}{V_{1,s}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(n - \frac{1}{n}\right)^2}} \times \frac{V_{n,e}}{V_{1,e}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(n - \frac{1}{n}\right)^2}} \tau_{n,e}\end{aligned}$$

C'est pourquoi l'atténuation de l'harmonique de rang  $n$  vaut :

$$\delta_n = \frac{\tau_{n,s}}{\tau_{n,e}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(n - \frac{1}{n}\right)^2}}$$

Lorsque l'atténuation  $\delta_n$  vaut  $-3$  dB, cela signifie que :

$$\begin{aligned}20 \log \delta_n = -3 \text{ dB} &\Rightarrow -10 \log \left[ 1 + Q^2 \left(n - \frac{1}{n}\right)^2 \right] = -10 \log 2 \\ &\Rightarrow Q^2 \left(n - \frac{1}{n}\right)^2 = 1\end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}n = 2 &\Rightarrow \left(n - \frac{1}{n}\right)^2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \\ &\Rightarrow Q^2 \times \frac{9}{4} = 1 \Rightarrow Q = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

5. Lorsque l'amplificateur est couplé à une charge  $R_u$ , il convient de remplacer  $R$  par la résistance  $R_e$  équivalente à  $R$  et  $R_u$  en parallèle :  $R_e = \frac{RR_u}{R + R_u}$ . Ce faisant, la largeur de la bande passante de l'amplificateur vaut :

$$\Delta\omega'_0 = \frac{\omega_0}{Q'} \text{ où } Q' = \frac{R_e}{L\omega_0}$$

tandis que :

$$\Delta\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} \text{ où } Q = \frac{R}{L\omega_0}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{\Delta\omega'_0}{\Delta\omega_0} = \frac{R_e}{R} \Rightarrow \Delta\omega'_0 = \Delta\omega_0 \times \frac{R_u}{R + R_u}$$

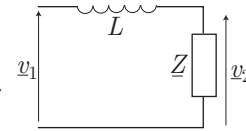
Notamment :

$$\Delta\omega'_0 = \frac{\Delta\omega_0}{2} \text{ lorsque } R_u = R$$

● 45 ————— Lycée Chaptal, Paris

1. Le condensateur et la résistance, montés en parallèle, équivalent à un dipôle d'impédance  $\underline{Z}$  telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + C\omega j = \frac{1 + RC\omega j}{R}$$



Ce faisant, le circuit se présente comme un pont diviseur de tension, pour lequel :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + L\omega j} = \frac{1}{1 + L\omega j \times \frac{1}{\underline{Z}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{L\omega j}{R} - LC\omega^2} \text{ avec } LC = \frac{1}{\omega_0^2} \\ \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + j \frac{L\omega}{R}} \end{aligned}$$

2. La fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = G e^{j\phi}$  admet :

- pour module :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{f(\omega)}} \text{ où } f(\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}$$

- pour argument,  $\phi$  tel que :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{f(\omega)} \left[ \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) - j \frac{L\omega}{R} \right] = \frac{1}{\sqrt{f(\omega)}} [\cos \phi + j \sin \phi]$$

c'est-à-dire :

$$\cos \phi = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}}} \text{ et } \sin \phi = - \frac{\frac{L\omega}{R}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}}} \quad (46)$$

- (a) Les variations de  $G(\omega)$  sont déterminées par celles de la fonction  $f(\omega)$ , avec :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} [f(\omega)] = 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} [f(\omega)] = \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} [G(\omega)] = 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} [G(\omega)] = 0 \end{cases}$$

En outre :

$$\frac{df}{d\omega} = \frac{4\omega}{\omega_0^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right) + 2\omega \frac{L^2}{R^2} = \frac{4\omega}{\omega_0^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1 + \frac{L^2\omega_0^2}{2R^2}\right)$$

En plus de la solution  $\omega = 0 \Rightarrow \frac{df}{d\omega} = 0$ , la fonction  $f(\omega)$  admet un *extremum* pour une pulsation  $\omega_r$  qui vérifie :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{L^2 \omega_0^2}{2R^2} \right)$$

Deux cas se présentent alors :

- si  $1 - \frac{L^2 \omega_0^2}{2R^2} > 0$  :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{L^2 \omega_0^2}{2R^2}} \Rightarrow \left. \frac{df}{d\omega} \right|_{\omega_r} = 0$$

- si  $1 - \frac{L^2 \omega_0^2}{2R^2} < 0$ , cette équation n'admet pas de solution réelle, de sorte que la fonction  $G(\omega)$  est monotone croissante.

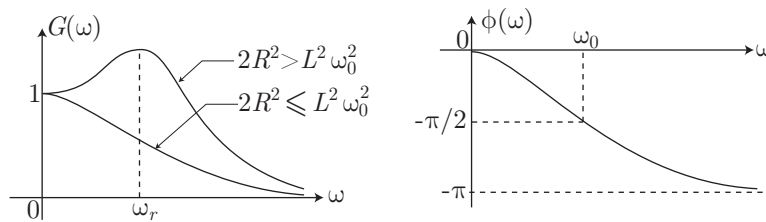
Quant aux identités (46), elles révèlent que :

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} [\cos \phi] = 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow 0} [\sin \phi] = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} \phi = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} [\cos \phi] = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} [\sin \phi] = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\cos \phi] = -1 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\sin \phi] = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi = -\pi$$

(b) L'étude précédente permet alors le tracé des courbes  $G(\omega)$  et  $\phi(\omega)$  :



(c) Compte tenu des conclusions tirées dans la question I-2(a), la fonction  $G(\omega)$  est monotone décroissante lorsque  $\frac{L^2 \omega_0^2}{2R^2} > 1$ , avec :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow \frac{L}{2CR^2} > 1 \Rightarrow C < \frac{L}{2R^2} = C_0$$

Application numérique :

$$C_0 = \frac{L}{2R^2} = \frac{200 \cdot 10^{-3}}{2 \times (80)^2} \Rightarrow C_0 = 15,6 \mu\text{F}$$

On s'assurera aisément que la valeur choisie pour  $C = 10 \mu\text{F}$  nous projette dans ce cas :  $G(\omega)$  est une fonction décroissante de  $\omega$ .

## II-

1. Les coefficients de la série de Fourier :

$$v_1(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\omega t) \quad (47)$$

s'obtiennent en calculant (avec  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ) :

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T v_1(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{T_f} V_0 dt = V_0 \times \frac{T_f}{T} \Rightarrow A_0 = \alpha V_0$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T v_1(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T_f} V_0 \cos(n\omega t) dt \\ &= \frac{2V_0}{T} \left[ \frac{\sin(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^{T_f} = \frac{2V_0}{n\omega T} \sin \left( n \times \frac{2\pi}{T} \times T_f \right) \text{ où } \omega T = 2\pi \\ &\Rightarrow A_n = \frac{V_0}{n\pi} \sin(2n\alpha\pi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T v_1(t) \sin(n\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T_f} V_0 \sin(n\omega t) dt \\ &= \frac{2V_0}{T} \left[ -\frac{\cos(n\omega t)}{n\omega} \right]_0^{T_f} = \frac{2V_0}{n\omega T} \left[ 1 - \cos \left( n \times \frac{2\pi}{T} \times T_f \right) \right] \\ &\Rightarrow B_n = \frac{V_0}{n\pi} [1 - \cos(2n\alpha\pi)] \end{aligned}$$

2. Le développement en série (47) s'écrit aussi :

$$v_1(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)]$$

où, en posant :

$$\frac{A_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \cos \psi_n \text{ et } \frac{-B_n}{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}} = \sin \psi_n$$

on remarque que :

$$\begin{aligned} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \times [\cos \psi_n \cos(n\omega t) - \sin \psi_n \sin(n\omega t)] \\ &= \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \times \cos(n\omega t + \psi_n) \end{aligned}$$

On définit alors les coefficients :

$$\begin{aligned} C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} &= \frac{V_0}{n\pi} \sqrt{\sin^2(2n\alpha\pi) + [1 - \cos(2n\alpha\pi)]^2} \\ &= \frac{V_0}{n\pi} \sqrt{2 [1 - \cos(2n\alpha\pi)]} \end{aligned}$$



où l'on peut utiliser l'identité :  $2 \sin^2 x = 1 - \cos(2x)$  afin d'écrire :

$$C_n = \frac{V_0}{n\pi} \sqrt{4 \sin^2(2n\alpha\pi)} \Rightarrow C_n = \frac{2V_0}{n\pi} |\sin(2n\alpha\pi)|$$

3. (a) Compte tenu des résultats précédents,  $v_1(t)$  admet pour série de Fourier :

$$v_1(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \psi_n)$$

de sorte que  $v_2(t)$  est associé à la série de Fourier :

$$\begin{aligned} v_2(t) &= G(0) \times A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G(n\omega) C_n \cos[n\omega t + \psi_n + \phi(n\omega)] \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \text{ avec } A_0 = \alpha V_0 \end{aligned}$$

où :

$$D_n = G(n\omega) C_n = \left\{ \left[ 1 - n^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + \frac{L^2}{R^2} \times n^2 \omega^2 \right\}^{-1/2} \times \frac{2V_0}{n\pi} |\sin(2n\alpha\pi)|$$

c'est-à-dire, en posant :

$$\omega = 2\pi f = 6\,280 \text{ Hz} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 707 \text{ Hz} \quad \frac{L}{R} = 0,0025$$

on obtient :

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{(1 - 78,9n^2)^2 + 246,5n^2}} \times \frac{2V_0}{n\pi} |\sin(2n\alpha\pi)|$$

ce qui montre que :

$$D_1 = 0,008 \times V_0 |\sin(2\alpha\pi)|, D_2 = 0,001 \times V_0 |\sin(4\alpha\pi)|, \dots \quad (48)$$

Aussi, dans la décomposition de  $v_2(t)$  :

$$v_2(t) = \alpha V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \quad (49)$$

les termes  $D_1, D_2$  (et *a fortiori*  $D_{n>2}$  car  $G(n\omega)$  est monotone décroissant) sont très petits devant la grandeur  $\alpha V_0$  :

$$v_2(t) \simeq V_{2m} = \alpha V_0$$

(b) En outre, les expressions numériques (48) de  $D_1$  et  $D_2$  montrent que :

$$D_1 \gg D_2 > D_3 \dots$$

Ce faisant, la série (49) peut être simplifiée en ne retenant que le premier harmonique ( $n = 1$ ) :

$$v_2(t) = \alpha V_0 + D_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ avec } D_1 = 0,008 V_0 |\sin(2\alpha\pi)|$$

(c) Compte tenu de ce résultat,  $v_2(t)$  admet pour *minimum* et pour *maximum* :

$$v_{2 \min} = \alpha V_0 - 0,008 V_0 |\sin(2\alpha\pi)| \text{ et } v_{2 \max} = \alpha V_0 + 0,008 V_0 |\sin(2\alpha\pi)|$$

de sorte que :

$$\Delta V_2 = v_{2 \max} - v_{2 \min} = 0,016 V_0 |\sin(2\alpha\pi)|$$

Le taux d'ondulation du signal  $v_2(t)$  est alors défini par :

$$\frac{\Delta V_2}{V_{2m}} = \frac{0,016}{\alpha} \times |\sin(2\alpha\pi)|$$

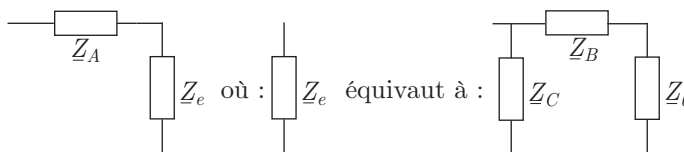
Application numérique : avec  $\alpha = \frac{3}{4}$ , le taux d'ondulation devient :

$$\frac{\Delta V_2}{V_{2m}} = \frac{0,016}{0,75} \times \left| \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right| = 0,02 = 2\%$$

La faible valeur de ce taux montre que  $v_2(t)$  peut être assimilé à une tension constante  $V_{2m}$  (à 2% près).

## ● 46 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

1. (a) On appelle  $\underline{Z}_e$  l'impédance équivalente à l'association de  $\underline{Z}_B$ ,  $\underline{Z}_C$  et  $\underline{Z}_0$  :



Ce faisant, l'impédance d'entrée du montage vaut :  $\underline{Z} = \underline{Z}_A + \underline{Z}_e$ , où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}_e} &= \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_B} \Rightarrow \underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}_C (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_B)}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C} \\ &\Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{Z}_A (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C) + \underline{Z}_C (\underline{Z}_0 + \underline{Z}_B)}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C} \end{aligned}$$

Or, par définition,  $\underline{Z}_0$  désigne l'impédance itérative si  $\underline{Z} = \underline{Z}_0$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_0 &= \frac{\underline{Z}_A \underline{Z}_0 + \underline{Z}_A \underline{Z}_B + \underline{Z}_A \underline{Z}_C + \underline{Z}_C \underline{Z}_0 + \underline{Z}_B \underline{Z}_C}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}_B + \underline{Z}_C} \\ &\Rightarrow \underline{Z}_0^2 + \underline{Z}_0 (\underline{Z}_B + \underline{Z}_C) = \underline{Z}_0 (\underline{Z}_A + \underline{Z}_C) + \underline{Z}_A \underline{Z}_C + \underline{Z}_B \underline{Z}_C + \underline{Z}_A \underline{Z}_B \\ &\Rightarrow \underline{Z}_0^2 + \underline{Z}_0 (\underline{Z}_B - \underline{Z}_A) - (\underline{Z}_A \underline{Z}_B + \underline{Z}_A \underline{Z}_C + \underline{Z}_B \underline{Z}_C) = 0 \end{aligned}$$

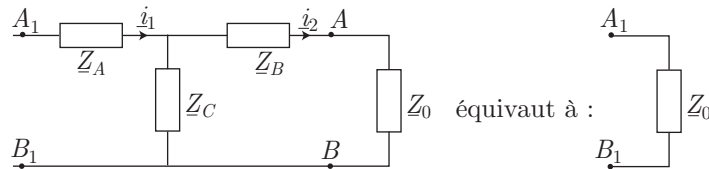
Cette équation du second degré admet pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= (\underline{Z}_B - 2\underline{Z}_A \underline{Z}_B + \underline{Z}_A^2) + 4 (\underline{Z}_A \underline{Z}_B + \underline{Z}_A \underline{Z}_C + \underline{Z}_B \underline{Z}_C) \\ &= \underline{Z}_B^2 + 2\underline{Z}_A \underline{Z}_B + \underline{Z}_A^2 + 4\underline{Z}_C \underline{Z}_A + 4\underline{Z}_C \underline{Z}_B \\ &= (\underline{Z}_A + \underline{Z}_B)^2 + 4\underline{Z}_C (\underline{Z}_A + \underline{Z}_B) \\ &\Rightarrow \Delta = (\underline{Z}_A + \underline{Z}_B) \times (\underline{Z}_A + \underline{Z}_B + 4\underline{Z}_C) \end{aligned}$$

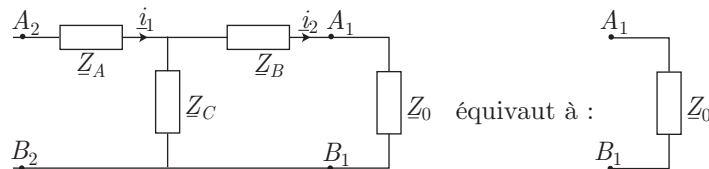
auquel cas  $\underline{Z}_0$  peut prendre *a priori* deux valeurs :

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{Z}_A - \underline{Z}_B + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ ou } \underline{Z}_0 = \frac{\underline{Z}_A - \underline{Z}_B - \sqrt{\Delta}}{2}$$

(b) Soit  $\underline{Z}_0$  l'impédance équivalente à une seule cellule en T chargée par  $\underline{Z}_0$  :



Par définition, l'impédance entre les points  $A_1$  et  $B_1$  vaut  $\underline{Z}_0$ . L'ajout d'une nouvelle cellule en T en amont de  $(A_1, A_2)$  ne modifie donc pas l'impédance totale du circuit :



Cette opération peut être effectuée avec  $n$  cellules en T montées en cascade, dont l'impédance vaut par conséquent  $\underline{Z}_0$  quel que soit  $n$ .

2. Les impédances  $\underline{Z}_A$  et  $\underline{Z}_B$  valent  $\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = L'\omega j = \frac{L\omega j}{2}$ , tandis que  $\underline{Z}_C = \frac{1}{C\omega j}$ . Par conséquent :

$$\Delta = (\underline{Z}_A + \underline{Z}_B) (\underline{Z}_A + \underline{Z}_B + 4\underline{Z}_C) = L\omega j \times \left( L\omega j + \frac{4}{C\omega j} \right) = -(L\omega)^2 + \frac{4L}{C}$$

de sorte que :

$$\underline{Z}_0 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-(L\omega)^2 + \frac{4L}{C}}$$

Pour la suite du problème, on choisira :

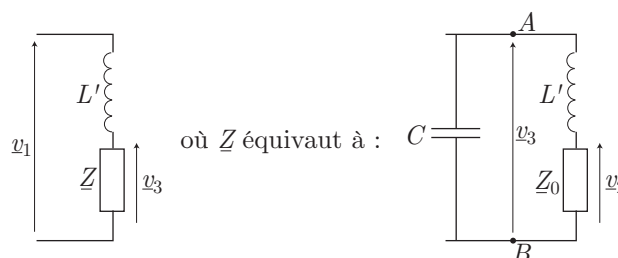
$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{2} \sqrt{-(L\omega)^2 + \frac{4L}{C}}$$

afin d'identifier  $\underline{Z}_0$  à des impédances connues, selon la valeur de  $\omega$  :

- si  $\omega$  est très faible :  $\underline{Z}_0 \simeq \sqrt{\frac{L}{C}} \in \mathbb{R}$  s'apparente à l'impédance d'une résistance :  $R_0 = \underline{Z}_0$  ;
- si  $\omega$  est très important,  $\underline{Z}_0 \simeq \frac{L\omega j}{2} = L'\omega j$  s'identifie à celle d'une bobine pure.

Ce faisant, une association en série d'une résistance  $R_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$  et d'une bobine d'inductance  $\frac{L}{2}$  présenterait un comportement comparable aux basses et aux hautes fréquences.

3. Le filtre en T, chargé sur une impédance  $\underline{Z}_0$ , équivaut au montage ci-dessous :



Les tensions  $v_1$  et  $v_3$  sont liées par la loi du pont diviseur de tension :

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{\underline{Z}}{L'\omega j + \underline{Z}} = \frac{1}{1 + \frac{L'\omega j}{\underline{Z}}}$$

avec :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = C\omega j + \frac{1}{L'\omega j + \underline{Z}_0} \Rightarrow 1 + \frac{L'\omega j}{\underline{Z}} = 1 - LC\omega^2 + \frac{L'\omega j}{L'\omega j + \underline{Z}_0}$$

d'où il ressort que :

$$\frac{v_3}{v_1} = \frac{1}{1 - \frac{LC\omega^2}{2} + \frac{L'\omega j}{L'\omega j + \underline{Z}_0}}$$

De même, les tension  $v_2$  et  $v_3$  sont liées par la loi du pont diviseur de tension :

$$\frac{v_2}{v_3} = \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 + L'\omega j}$$

Par conséquent, la fonction de transfert du montage vaut :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2}{v_3} \times \frac{v_3}{v_1} \\ &= \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}_0 + L'\omega j} \times \frac{1}{1 - \frac{LC\omega^2}{2} + \frac{L'\omega j}{L'\omega j + \underline{Z}_0}} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}_0}{\left(\underline{Z}_0 + \frac{L\omega j}{2}\right) \left(1 - \frac{LC\omega^2}{2}\right) + \frac{L\omega j}{2}} \quad (50)$$

(a) À basse fréquence, c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{4L}{C} \gg L^2\omega^2 \Rightarrow \omega^2 \ll \frac{4}{LC} \Rightarrow \omega \ll \frac{2}{\sqrt{LC}} = \omega_c$$

l'impédance  $Z_0 = \frac{1}{2} \sqrt{-(L\omega)^2 + \frac{4L}{C}}$  devient :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \frac{L}{2Z_0} = \frac{L}{2} \times \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{\sqrt{LC}}{2} = \frac{1}{\omega_c}$$

Aussi, l'expression (50) devient-elle :

$$\begin{aligned} \underline{H}_1(j\omega) &= \frac{1}{\left(1 + j \frac{L\omega}{2Z_0}\right) \left(1 - \frac{LC\omega^2}{2}\right) + j \frac{L\omega}{2Z_0}} \\ &= \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c}\right) \left(1 - \frac{LC\omega^2}{2}\right) + j \frac{\omega}{\omega_c}} \end{aligned}$$

où l'on remarque que :

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} \Rightarrow LC = \frac{4}{\omega_c^2} \Rightarrow 1 - \frac{LC\omega^2}{2} = 1 - 2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \quad (51)$$

Finalement, il ressort que :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c}\right) \left(1 - 2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right) + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

(b) En posant :  $1 - \frac{LC\omega^2}{2} = \cos \phi$ , cette expression devient :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c}\right) \cos \phi + j \frac{\omega}{\omega_c}} \Rightarrow \underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{\cos \phi + j \frac{\omega}{\omega_c} (1 + \cos \phi)}$$

Ainsi présentée, la fonction de transfert du circuit a pour module :

$$|\underline{H}_1(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \phi + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 (1 + \cos \phi)^2}}$$

et pour argument  $\varphi_1$  tel que :

$$\tan \varphi_1 = -\frac{\omega}{\omega_c} \times \frac{1 + \cos \phi}{\cos \phi} \Rightarrow \varphi_1 = -\arctan \left[ \frac{\omega}{\omega_c} \times \frac{1 + \cos \phi}{\cos \phi} \right]$$

4. (a) Dans le cas des hautes fréquences, c'est-à-dire lorsque :

$$\omega \gg \omega_c \Rightarrow \omega^2 \gg \frac{4}{LC} \Rightarrow L^2\omega^2 \gg \frac{4L}{C}$$

l'impédance  $\underline{Z}_0 = \frac{1}{2} \sqrt{(-L\omega)^2 + \frac{L}{C}}$  se simplifie :  $\underline{Z}_0 = \frac{L\omega j}{2}$  de sorte que l'identité (50) devient :

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{L\omega j}{2\underline{Z}_0}\right) \left(1 - \frac{LC\omega^2}{2}\right) + \frac{L\omega j}{2\underline{Z}_0}} = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{LC\omega^2}{2}\right) + 1}$$

où  $\omega_c^2 = \frac{4}{LC} \Rightarrow LC = \frac{4}{\omega_c^2}$  conduit à :

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 + 2 \left(1 - 2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)}$$

(b) En remplaçant  $1 - 2 \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = 1 - \frac{LC\omega^2}{2}$  par  $-\cosh \psi$ , la fonction de transfert se présente sous la forme :

$$\underline{H}_2(j\omega) = \frac{1}{1 - 2 \cosh \psi}$$

dont le module vaut :

$$|\underline{H}_2(\omega)| = \frac{1}{|1 - 2 \cosh \psi|}$$

et l'argument  $\varphi_2 = \pi$  car  $\underline{H}_2(j\omega) \in \mathbb{R}^-$ .

5. L'impédance caractéristique vaut :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4L}{C} - (L\omega)^2} \text{ où } \omega = x \omega_c = \frac{2x}{\sqrt{LC}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4L}{C} - L^2 \times \frac{4x^2}{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \times \sqrt{1 - x^2} \\ &\Rightarrow \frac{L\omega}{2\underline{Z}_0} = \frac{\omega \sqrt{LC}}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\omega}{\omega_c \sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Aussi, la fonction de transfert du circuit est donnée, dans ce cas, par la relation (50) :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{\left(1 + j \frac{L\omega}{2\underline{Z}_0}\right) \left(1 - \frac{LC\omega^2}{2}\right) + j \frac{L\omega}{2\underline{Z}_0}} \\ &= \frac{1}{\left(1 + j \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \left(1 - \frac{LC\omega^2}{2}\right) + j \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\omega = \frac{2x}{\sqrt{LC}} &\Rightarrow \frac{LC\omega^2}{2} = \frac{LC}{2} \times \frac{4x^2}{LC} = 2x^2 \\ \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{\left(1 + j \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) (1-2x^2) + j \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} \\ \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{(1-2x^2) + j \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} (1+1-2x^2)} \\ \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{(1-2x^2) + 2jx \times \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}} \\ \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{1}{(1-2x^2) + 2jx \sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

Deux cas peuvent dès lors être distingués :

- Si  $x \leq 1$ ,  $\sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R}$ , de sorte que :

$$\begin{aligned}H(x) &= \frac{1}{\sqrt{(1-2x^2)^2 + 4x^2(1-x^2)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-4x^2+4x^4+4x^2-4x^4}} \\ \Rightarrow H(x \leq 1) &= 1\end{aligned}$$

tandis que :

$$\tan \varphi = -\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$

- Si  $x > 1$ ,  $\sqrt{1-x^2} = j\sqrt{x^2-1} \in \mathbb{C}$  fournit :

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{(1-2x^2) - 2x\sqrt{x^2-1}}$$

où l'on remarque que :

$$\begin{aligned}(x + \sqrt{x^2-1})^2 &= x^2 + 2x\sqrt{x^2-1} + x^2 - 1 = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{x^2-1} \\ &= -(1 - 2x^2 - 2x\sqrt{x^2-1})\end{aligned}$$

de sorte que :

$$\underline{H}(x) = -\frac{1}{(x + \sqrt{x^2-1})^2} = \frac{e^{j\pi}}{(x + \sqrt{x^2-1})^2}$$

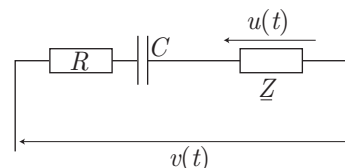
Il s'ensuit que :

$$H(x > 1) = \frac{1}{(x + \sqrt{x^2 - 1})^2} \text{ et } \varphi = \arg \{H\} = \pi$$

### ● 47 ————— Concours Centrale

1. L'association en parallèle de  $R$  et  $C$  équivaut à un dipôle d'impédance  $\underline{Z}$  qui vérifie :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + C\omega j$$



Aussi, la loi du pont diviseur de tension conduit directement à l'expression de la fonction de transfert :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) = \frac{u}{v} &= \frac{\underline{Z}}{R + \frac{1}{C\omega j} + \underline{Z}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{C\omega j}\right) \left(\frac{1}{R} + C\omega j\right)} \\ &= \frac{1}{3 + RC\omega j + \frac{1}{RC\omega j}} = \frac{RC\omega j}{(RC\omega j)^2 + 3RC\omega j + 1} \end{aligned}$$

Aussi, en posant  $\tau = RC$  :

$$\begin{aligned} \frac{u}{v} &= \frac{\tau\omega j}{\tau^2(\omega j)^2 + 3\tau\omega j + 1} \Rightarrow \tau^2(\omega j)^2 u + 3\tau\omega j u + u = \tau\omega j v \\ &\Rightarrow \tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3\tau \frac{du}{dt} + u = \tau \frac{dv}{dt} \\ &\Rightarrow \tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3\tau \frac{du}{dt} + u = \tau \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

Enfin, puisqu'à  $t = 0$ ,  $v = E = \text{cte}$ , cette équation différentielle devient :

$$\tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 3\tau \frac{du}{dt} + u = 0 \quad (52)$$

2. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle :

$$\tau^2 X^2 + 3\tau X + 1 = 0$$

admet pour discriminant :

$$\Delta = 9\tau^2 - 4\tau^2 = 5\tau^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \tau\sqrt{5}$$

et donc pour solutions :

$$X_1 = \frac{-3\tau + \tau\sqrt{5}}{2\tau^2} = \frac{-3}{2\tau} + \frac{\sqrt{5}}{2\tau} \text{ et } X_2 = \frac{-3}{2\tau} - \frac{\sqrt{5}}{2\tau}$$



c'est-à-dire :

$$\begin{cases} X_1 = -a + b \\ X_2 = -a - b \end{cases} \text{ en posant : } a = \frac{3}{2\tau} \text{ et } b = \frac{\sqrt{5}}{2\tau}$$

Ce faisant, l'équation différentielle (52) admet pour solution générale :

$$u = \alpha e^{X_1 t} + \beta e^{X_2 t} = e^{-at} (\alpha e^{bt} + \beta e^{-bt})$$

dans laquelle les deux constantes  $\alpha$  et  $\beta$  doivent rendre compte des conditions initiales :

- portant sur  $u(t=0)$  :

$$\begin{aligned} u(t=0) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{RC\omega j}{(RC\omega j)^2 + 3RC\omega j + 1} \right] \times E = 0 \\ &\Rightarrow \alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -\alpha \\ &\Rightarrow u(t) = \alpha e^{-at} (e^{bt} - e^{-bt}) \end{aligned}$$

- portant sur  $\dot{u}(t=0)$ .

En remarquant que  $\frac{du}{dt} = j\omega \underline{u}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{u}}{dt} &= \frac{RC(\omega j)^2}{(RC\omega j)^2 + 3RC\omega j + 1} \underline{u} = \frac{\tau(\omega j)^2}{\tau^2(\omega j)^2 + 3\tau\omega j + 1} \underline{u} \\ &\Rightarrow \dot{u}(t=0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[ \frac{\tau(\omega j)^2}{\tau^2(\omega j)^2 + 3\tau\omega j + 1} \right] \times E = \frac{E}{\tau} \end{aligned}$$

Or, étant donné que :

$$\begin{aligned} u(t) = \alpha e^{at} (e^{bt} - e^{-bt}) &\Rightarrow \frac{du}{dt} = \alpha e^{at} [a(e^{bt} - e^{-bt}) + b(e^{bt} + e^{-bt})] \\ &\Rightarrow \dot{u}(t=0) = 2\alpha b \end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$2\alpha b = \frac{E}{\tau} \Rightarrow \alpha = \frac{E}{2\tau} \times \frac{1}{b} = \frac{E}{2\tau} \times \frac{2\tau}{\sqrt{5}} = \frac{E}{\sqrt{5}}$$

Ce faisant :

$$u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} e^{-at} (e^{bt} - e^{-bt}) = \frac{2E}{\sqrt{5}} e^{-at} \sinh(bt)$$

soit encore :

$$u(t) = \frac{2E}{\sqrt{5}} e^{-3t/2\tau} \times \sinh\left(\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}\right)$$

## ● 48 ————— Lycée Thiers, Marseilles

La tension  $e^-$ , aux bornes de la résistance  $R_2$ , est donnée par la loi du pont diviseur de tension :

$$e^- = \frac{R_2}{R_2 + R_3} s$$

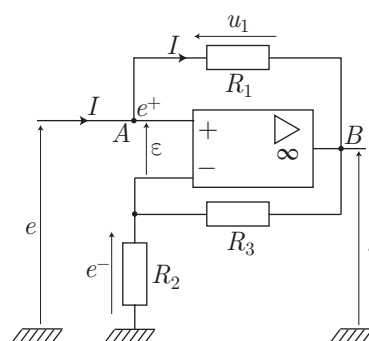
Aussi, la tension de sortie vaut-elle :

$$s = \mu (e^+ - e^-) = \mu \left( e - \frac{R_2}{R_2 + R_3} s \right)$$

car  $e^+ = e$

$$\Rightarrow s \left( 1 + \frac{\mu R_2}{R_2 + R_3} \right) = \mu e$$

$$\Rightarrow s = \frac{\mu (R_2 + R_3) e}{R_3 + (1 + \mu) R_2}$$



En outre, la loi d'Ohm fournit la tension  $u_1 = e^+ - s = e - s$  aux bornes de la résistance  $R_1$  :

$$\begin{aligned} u_1 = R_1 I \Rightarrow I &= \frac{1}{R_1} (e - s) = \frac{1}{R_1} \left[ 1 - \frac{\mu (R_2 + R_3)}{R_3 + (1 + \mu) R_2} \right] e \\ &= \frac{R_2 + R_3 (1 - \mu)}{R_3 + R_2 (1 + \mu)} \times \frac{e}{R_1} \end{aligned}$$

Par conséquent, l'impédance d'entrée du montage vaut :

$$R_e = \frac{e}{I} = R_1 \times \frac{R_3 + R_2 (1 + \mu)}{R_2 + R_3 (1 - \mu)}$$

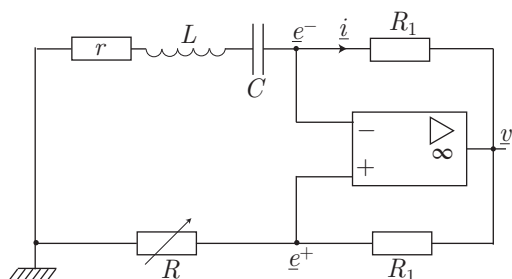
Remarque – Lorsque  $\mu$  tend vers l'infini (l'A.O. est alors idéal et fonctionne en régime linéaire), cette impédance devient :

$$R_e = -R_1 \times \frac{R_2}{R_3}$$

Le montage réalise alors une résistance négative.

## ● 49 ————— Concours Commun Polytechnique

- Notons  $\underline{Z} = r + L\omega j + \frac{1}{C\omega j}$  l'impédance équivalente à l'association en série de  $r$ ,  $L$  et  $C$ ,  $e^+$  et  $e^-$  les potentiels aux entrées de l'A.O.



La loi du pont diviseur de tension, appliquée à la branche  $\{R, R_1\}$ , impose :

$$\underline{e}^+ = \frac{R}{R + R_1} v_s = \underline{e}^- \text{ car } \underline{e}^- = \underline{e}^+ \quad (53)$$

En outre, la tension aux bornes des dipôles de la branche  $\{Z, R_1\}$  vaut :

$$\underline{e}^- = -Z \underline{i} \text{ et } \underline{e}^- - v_s = R_1 \underline{i} \quad (54)$$

Il s'ensuit que :

$$-Z \underline{i} - v_s = R_1 \underline{i}$$

tandis que l'équation (53) fournit :

$$\frac{R}{R + R_1} v_s = \underline{e}^- = -Z \underline{i} \Rightarrow v_s = - \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) Z \underline{i}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} -Z \underline{i} + \left(1 + \frac{R_1}{R}\right) Z \underline{i} = R_1 \underline{i} &\Rightarrow Z \underline{i} = R \underline{i} \\ &\Rightarrow \left(r + L\omega j + \frac{1}{C\omega j}\right) \underline{i} = R \underline{i} \\ &\Rightarrow LC(\omega j)^2 \underline{i} + (r - R)C\omega j \underline{i} + \underline{i} = 0 \\ &\Rightarrow LC \frac{d^2 \underline{i}}{dt^2} + (r - R)C \frac{d \underline{i}}{dt} + \underline{i} = 0 \end{aligned}$$

C'est pourquoi  $i(t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r - R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \quad (55)$$

2. L'équation (53) fournit l'expression de  $\underline{e}^- = \frac{R}{R + R_1} v_s$ , qui peut être remplacée dans la seconde des équations (54) :

$$\begin{aligned} \underline{e}^- - v_s = R_1 \underline{i} &\Rightarrow v_s \times \left(\frac{R}{R + R_1} - 1\right) = R_1 \underline{i} \Rightarrow v_s \times \frac{-R_1}{R + R_1} = R_1 \underline{i} \\ &\Rightarrow v_s(t) = -(R + R_1) \times i(t) \end{aligned}$$

3. L'équation différentielle (55) montre que des oscillations non amorties peuvent prendre naissance lorsque :

$$R = R_0 = r \Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0$$

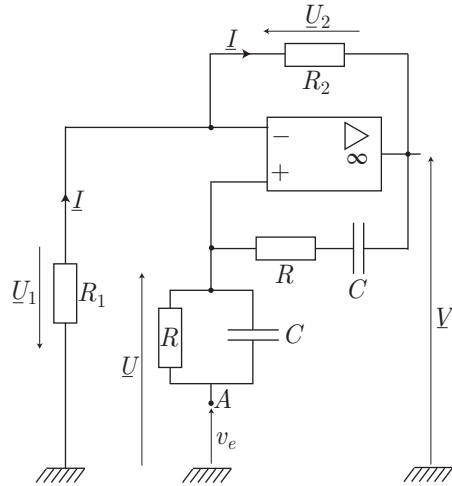
La pulsation de ces oscillations vaut alors :  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

4. La connaissance de  $R_0$  entraîne immédiatement celle de  $r = R_0$ .

En outre,  $L = \frac{1}{C\omega^2}$  montre que  $L$  s'obtient à partir des valeurs connues de  $C$  et  $\omega$ .

● 50 **Lycée Thiers, Marseille**

1. Soit  $\underline{I}$  l'intensité complexe du courant qui circule simultanément à travers  $R_1$  et  $R_2$ .



Les images complexes des tensions  $\underline{U}_1 = -\underline{U}$  et  $\underline{U}_2 = \underline{U} - \underline{V}_s$  vérifient la loi d'Ohm :

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = R_1 \underline{I} \\ \underline{U}_2 = R_2 \underline{I} \end{cases} \Rightarrow \frac{\underline{U}_1}{R_1} = \frac{\underline{U}_2}{R_2} \Rightarrow -\frac{\underline{U}}{R_1} = \frac{\underline{U} - \underline{V}_s}{R_2} \quad (56)$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{V}_s}{R_2} = \underline{U} \times \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (57)$$

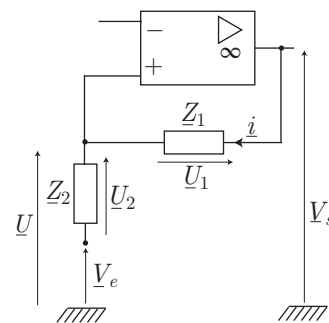
$$\Rightarrow K = \frac{\underline{V}_s}{\underline{U}} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad (58)$$

2. Soient  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$  les impédances équivalentes aux association en série et en parallèle de la résistance  $R$  et du condensateur  $C$  :

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{C\omega j} \text{ et } \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R} + C\omega j$$

En notant  $\underline{i}$  le courant complexe qui traverse  $\underline{Z}_1$  et  $\underline{Z}_2$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{V}_s &= \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{V}_e = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) \underline{i} + \underline{V}_e \\ \Rightarrow \underline{i} &= \frac{\underline{V}_s - \underline{V}_e}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \end{aligned}$$



et :

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{V}_e + \underline{U}_2 = \underline{V}_e + \underline{Z}_2 \underline{i} = \underline{V}_e + \underline{Z}_2 \times \frac{\underline{V}_s - \underline{V}_e}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \\ \Rightarrow \underline{U} &= \left( 1 - \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \right) \underline{V}_e + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{V}_s \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} &= \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \times \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{C\omega j}\right) \times \left(\frac{1}{R} + C\omega j\right)} \\ &= \frac{1}{3 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}\end{aligned}$$

Aussi, en posant :

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \Rightarrow X = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \Rightarrow \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = \frac{1}{3 + jX}$$

on obtient :

$$\underline{U} = \left(1 - \frac{1}{3 + jX}\right) \underline{V}_e + \frac{1}{3 + jX} \underline{V}_s$$

soit encore :

$$\underline{U} = \underline{T} \underline{V}_e + \frac{1}{3 + jX} \underline{V}_s \text{ avec } \underline{T} = \frac{2 + jX}{3 + jX}$$

3. La relation (58) fournit :

$$\begin{aligned}\underline{U} = \frac{\underline{V}_s}{K} &\Rightarrow \underline{V}_s \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{3 + jX}\right) = \underline{T} \underline{V}_e = \frac{2 + jX}{3 + jX} \underline{V}_e \\ &\Rightarrow \underline{V}_s \times \frac{(3 - K) + jX}{K(3 + jX)} = \frac{2 + jX}{3 + jX} \underline{V}_e \\ &\Rightarrow \underline{V}_s = \frac{2 + jX}{(3 - K) + jX} \underline{V}_e\end{aligned}$$

4. De cette expression, il ressort que :

$$(3 - K + jX) \underline{V}_s = (2 + jX) \underline{V}_e$$

de sorte que  $\underline{V}_e$  peut être nul, avec  $\underline{V}_s \neq 0$ , à condition que :

$$3 - K + jX = 0 \Rightarrow 3 - K + j \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 0$$

c'est-à-dire :  $K = K_0 = 3$  et :

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega_1} \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

5. Application numérique : compte tenu du résultat (58) :

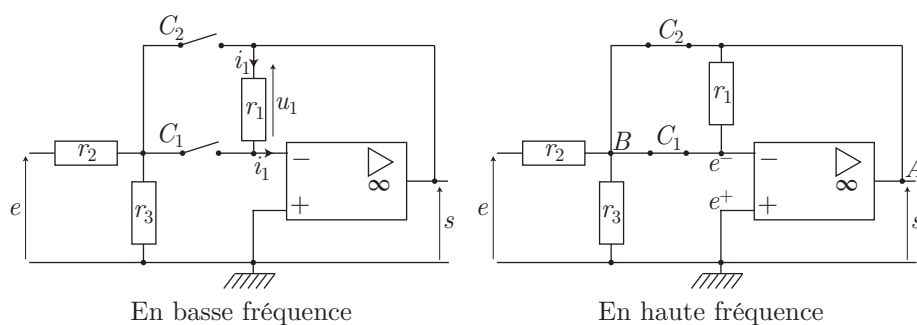
$$1 + \frac{R_2}{R_1} = K_0 \Rightarrow R_2 = R_1 \times (K_0 - 1) = 20 \text{ k}\Omega$$

et :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \times 10^4 \times 10.10^{-9}} \Rightarrow f_1 = 1592 \text{ Hz}$$

## ● 51 ————— Lycée du Parc, Lyon

1. • En basse fréquence, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, tandis qu'ils se comportent comme des fils en haute fréquence. Par conséquent, le circuit proposé équivaut à ceux présentés ci-dessous :



- En basse fréquence, la résistance  $r_1$  est soumise à la différence de potentiel :

$$u_1 = r_1 i_1 = s - e^-$$

Or, l'A.O. est idéal ( $i_1 = 0$ ) et fonctionne en régime linéaire ( $e^- = e^+ = 0$ ), de sorte que :

$$s = 0 \text{ en basse fréquence.}$$

En haute fréquence, les points  $A$  et  $B$  se trouvent aux potentiels  $V_B = e^-$  et  $V_A = s$ . Or, puisque ces points sont reliés par un fil conducteur :

$$V_A = V_B \Rightarrow s = e^-$$

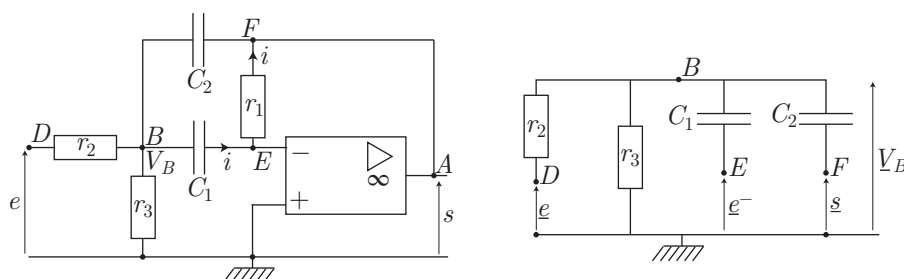
Enfin, le régime linéaire adopté par l'A.O. a pour corollaire :

$$e^- = e^+ = 0 \Rightarrow s = 0 \text{ en haute fréquence.}$$

En conclusion :

le circuit se comporte comme un filtre passe-bande.

2. Soit  $V_B$  le potentiel au nœud  $B$ , où peut s'appliquer le théorème de Millman :



Conformément à ce théorème :

$$\underline{V}_B = \frac{\frac{\underline{e}}{r_2} + C_1 \omega j \underline{e}^- + C_2 \omega j \underline{s}}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + (C_1 + C_2) \omega j} = \frac{r_3 \underline{e} + r_3 r_2 C_2 \omega j \underline{s}}{r_2 + r_3 + r_2 r_3 (C_1 + C_2) \omega j}$$

car, en régime linéaire :  $\underline{e}^- = \underline{e}^+ = 0$ .

En outre, l'A.O. étant idéal, le courant  $i$  qui traverse  $C_1$  est aussi celui qui alimente  $r_1$ . Aussi, les différences de potentiel aux bornes de ces dipôles valent :

$$\begin{cases} \underline{V}_B - \underline{V}_E = \frac{1}{C_1 \omega j} \underline{i} \\ \underline{V}_E - \underline{V}_F = r_1 \underline{i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{V}_B = \frac{1}{C_1 \omega j} \underline{i} \\ \underline{s} = -r_1 \underline{i} \end{cases} \text{ car } \underline{V}_E = \underline{e}^- = 0 \text{ et } \underline{V}_F = \underline{s}$$

$$\Rightarrow \underline{V}_B = -\frac{1}{r_1 C_1 \omega j} \underline{s}$$

Ce faisant :

$$\begin{aligned} \frac{-\underline{s}}{r_1 C_1 \omega j} &= \frac{r_3 \underline{e} + r_3 r_2 C_2 \omega j \underline{s}}{r_2 + r_3 + r_2 r_3 (C_1 + C_2) \omega j} \\ \Rightarrow -\left[ \frac{r_2 + r_3}{r_1 C_1 \omega j} + \frac{r_2 r_3 (C_1 + C_2)}{r_1 C_1} \right] \underline{s} &= r_3 \underline{e} + r_3 r_2 C_2 \omega j \underline{s} \end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction de transfert de ce montage a pour expression :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} &= \frac{-r_3}{\frac{r_2 r_3}{r_1 C_1} (C_1 + C_2) + r_3 r_2 C_2 \omega j + \frac{r_2 + r_3}{r_1 C_1 \omega j}} \\ &= \frac{-1}{\frac{r_2 (C_1 + C_2)}{r_1 C_1} + j \left( r_2 C_2 \omega - \frac{r_2 + r_3}{r_1 r_3 C_1 \omega} \right)} \\ &= \frac{-H_0}{1 + j \frac{r_1 C_1}{r_2 (C_1 + C_2)} \left( r_2 C_2 \omega - \frac{r_2 + r_3}{r_1 r_3 C_1 \omega} \right)} \end{aligned}$$

en posant :  $H_0 = \frac{r_1 C_1}{r_2 (C_1 + C_2)}$ . En outre, on définit les grandeurs  $\omega_0$  et  $Q$  de manière à présenter la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{H_0}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad (59)$$

Cette opération n'est légitime qu'à condition que :

$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{r_1 C_1}{r_2 (C_1 + C_2)} \times r_2 C_2 \text{ et } Q \omega_0 = \frac{r_1 C_1}{r_2 (C_1 + C_2)} \times \frac{r_2 + r_3}{r_1 r_3 C_1}$$

Le produit de ces deux équations fournit :

$$Q^2 = \left[ \frac{r_1 C_1}{r_2 (C_1 + C_2)} \right]^2 r_2 C_2 \frac{r_2 + r_3}{r_1 r_3 C_1} = r_1 \frac{r_2 + r_3}{r_2 r_3} \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2} \quad (60)$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{\left( \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{r_3} \right) \times \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2}} \quad (61)$$

tandis que leur rapport mène à :

$$\omega_0^2 = \frac{r_2 + r_3}{r_1 C_1 r_2 C_2 r_3} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{r_2 + r_3}{r_1 C_1 r_2 C_2 r_3}} \quad (62)$$

L'expression (59) de  $\underline{H}(j\omega)$  conduit à celle du gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log H_0 - 10 \log \left[ 1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]$$

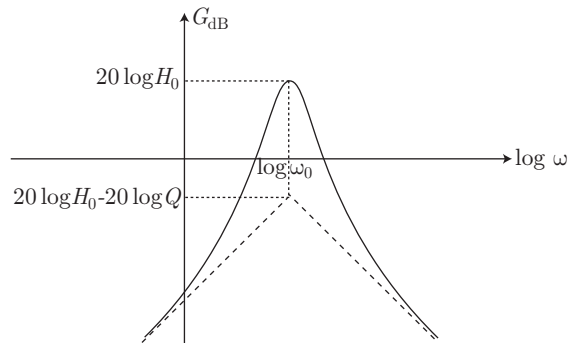
D'une part, ce gain en décibels est *maximum* pour une pulsation :

$$\omega = \omega_c = \omega_0 \Rightarrow G_{dB}^{\max} = 20 \log H_0 = 20 \log \left[ \frac{r_1 C_1}{r_2 (C_1 + C_2)} \right]$$

et d'autre part :

$$\begin{cases} G_{dB}(\omega \ll \omega_0) \simeq 20 \log H_0 - 20 \log Q - 20 \log \omega_0 + 20 \log \omega \\ G_{dB}(\omega \gg \omega_0) \simeq 20 \log H_0 - 20 \log Q + 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega \end{cases}$$

révèlent l'allure du diagramme de Bode du circuit :



et confirme le comportement du circuit en filtre passe-bande.

3. Le résultat (61) fournit :

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\left( \frac{r_1}{r_2} + \frac{r_1}{r_3} \right) \times \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)^2}} \\ &= \sqrt{\left( \frac{220}{22} + \frac{220}{1} \right) \times \frac{10^{-9} \times 10^{-10}}{(10^{-9} + 10^{-10})^2}} \Rightarrow Q = 4,36 \end{aligned}$$



tandis que le résultat (62) conduit à :

$$\begin{aligned}
 f_c &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{r_2 + r_3}{r_1 r_2 r_3 C_1 C_2}} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{22 \cdot 10^3 + 10^3}{220 \cdot 10^3 \times 22 \cdot 10^3 \times 10^3 \times 10^{-9} \times 10^{-10}}} \\
 &\Rightarrow f_c = 34\,712 \text{ Hz}
 \end{aligned}$$

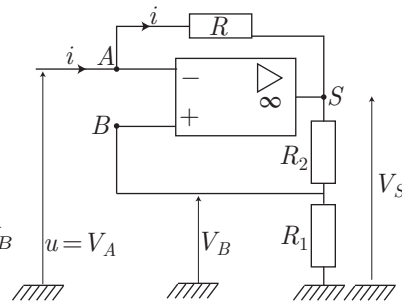
● 52 **Lycée Chateaubriand, Rennes**

1. Dans le circuit proposé, la résistance  $R$ , aux bornes de laquelle règne une tension  $u_R = V_A - V_S$ , est traversée par le courant d'intensité  $i$  (l'A.O. est supposé idéal). La loi d'Ohm stipule que :

$$u_R = V_A - V_S = R i = u - V_S$$

Quant aux résistances  $R_1$  et  $R_2$ , elles sont disposées de manière à constituer un pont diviseur de tension, dans lequel :

$$V_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_S \Rightarrow V_S = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_B$$



où  $V_B = V_A = u$  dans le cas où l'A.O. fonctionne en régime linéaire. C'est pourquoi :

$$R i = u - V_S = u - \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u = -\frac{R_2}{R_1} u \Rightarrow u = -\frac{R_1}{R_2} R i$$

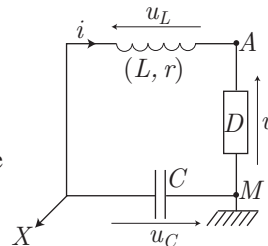
2. Le cas particulier pour lequel  $R_1 = R_2$  est choisi de telle manière que :

$$u = -R i$$

3. (a) Soient  $u_L = L \frac{di}{dt} + r i$ ,  $u = -R i$  et  $u_C$  les tensions aux bornes des divers dipôles du circuit, dans lequel peut s'appliquer la loi des mailles :

$$u_C + u_L + u = 0 \Rightarrow u_C + L \frac{di}{dt} + (r - R) i = 0$$

Étant donné que  $i = C \frac{du_C}{dt}$ , la dérivée de cette équation conduit à :



$$\begin{aligned}
 \frac{du_C}{dt} + L \frac{d^2 i}{dt^2} + (r - R) \frac{di}{dt} &= 0 \Rightarrow L \frac{d^2 i}{dt^2} + (r - R) \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \\
 &\Rightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{r - R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0
 \end{aligned}$$

**CORRIGÉS**

Pour la suite des calculs, on posera :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ et } \frac{r-R}{L} = 2\lambda\omega_0$$

de sorte que :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad (63)$$

Ce faisant, l'hypothèse de l'énoncé :  $\left| \frac{r-R}{L} \right| \ll \omega_0$  équivaut à :

$$2|\lambda|\omega_0 \ll \omega_0 \Rightarrow \lambda^2 \ll \frac{1}{4} \quad (64)$$

Or, l'équation différentielle (63) est associée à l'équation caractéristique :  $X^2 + 2\lambda\omega_0 X + \omega_0^2 = 0$ , dont le discriminant réduit vaut :

$$\begin{aligned} \Delta' &= \lambda^2\omega_0^2 - \omega_0^2 \simeq -\omega_0^2 \text{ d'après l'hypothèse (64)} \\ \Rightarrow \Delta' &\simeq (j\omega_0)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = j\omega_0 \end{aligned}$$

Les deux solutions de l'équation caractéristique :

$$X_1 = -\lambda\omega_0 + \sqrt{\Delta'} = -\lambda\omega_0 + j\omega_0 \text{ et } X_2 = -\lambda\omega_0 - j\omega_0$$

sont à l'origine de la solution générale de l'équation (63) :

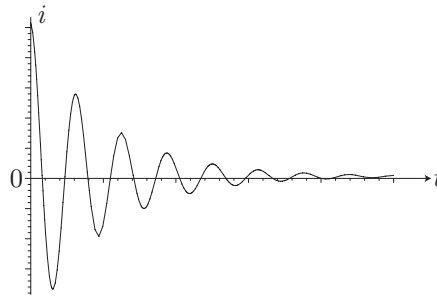
$$i(t) = \alpha e^{X_1 t} + \beta e^{X_2 t} = e^{-\lambda\omega_0 t} (\alpha e^{j\omega_0 t} + \beta e^{-j\omega_0 t})$$

que l'on peut aussi écrire :

$$i(t) = A e^{-\lambda\omega_0 t} \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (65)$$

où  $A, \phi$  ( $\alpha$  et  $\beta$ ) sont des constantes qui dépendent des conditions initiales.

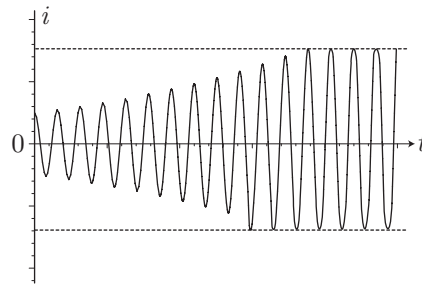
- (b) Dans le cas où  $R < r$ , la définition de  $\lambda$  :  $\lambda\omega_0 = \frac{r-R}{2L} > 0$  montre que l'amplitude de  $i(t)$  décroît dans le temps :



- (c) En revanche, lorsque  $R > r$ ,  $\lambda\omega_0 = \frac{r-R}{2L} < 0$  révèle que :

$$i(t) = A e^{-\lambda\omega_0 t} \cos(\omega_0 t + \phi) = A e^{|\lambda\omega_0| t} \cos(\omega_0 t + \phi)$$

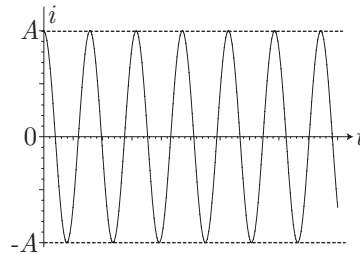
présente une amplitude qui augmente avec  $t$ , jusqu'à atteindre une valeur maximale imposée par la saturation de l'A.O.



(d) Enfin, lorsque  $R = r$ ,  $\lambda\omega_0 = \frac{r - R}{L} = 0$  affecte au résultat (65) la forme :

$$i(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

dont la représentation graphique prend l'allure d'une sinusoïde :



4. Le réglage de  $R$  permet d'accéder à la valeur numérique de  $r$  : c'est seulement lorsque  $R = r$  que l'on observe, à l'écran de l'oscilloscope, une sinusoïde d'amplitude constante.

En outre, la mesure de la période  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  des oscillations ainsi observées conduit à :

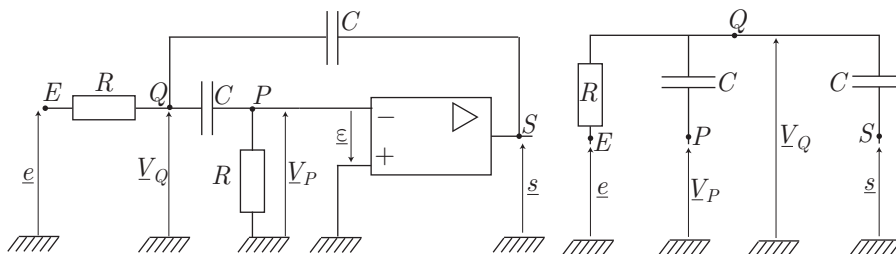
$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \Rightarrow L = \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}$$

5. Application numérique :

$$L = \frac{(4,3 \cdot 10^{-3})^2}{4\pi^2 \times 0,47 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow L = 1 \text{ H}$$

● 53 **Lycée Thiers, Marseille**

Représentons le montage équivalent permettant d'utiliser le théorème de Millman :



**CORRIGÉS**

Selon ce théorème :

$$\underline{V}_Q = \frac{\frac{\underline{e}}{R} + C\omega j \underline{s} + C\omega j \underline{V}_P}{\frac{1}{R} + 2C\omega j} = \frac{\underline{e} + RC\omega j (\underline{s} + \underline{V}_P)}{1 + 2RC\omega j}$$

tandis que la loi des mailles impose :

$$\begin{aligned} \underline{V}_P + \underline{\varepsilon} = 0 &\Rightarrow \underline{V}_P = -\underline{\varepsilon} \Rightarrow \underline{V}_P = -\frac{\underline{s}}{G} \text{ car } \underline{s} = G\underline{\varepsilon} \\ &\Rightarrow \underline{V}_Q = \frac{1}{1 + 2RC\omega j} \left( \underline{e} + RC\omega j \times \frac{G-1}{G} \underline{s} \right) \end{aligned}$$

En outre, la loi du pont diviseur de tension peut s'appliquer en  $P$  :

$$\begin{aligned} \underline{V}_P &= \frac{R}{\frac{1}{C\omega j} + R} \underline{V}_Q = \frac{RC\omega j}{1 + RC\omega j} \underline{V}_Q \\ &\Rightarrow \underline{V}_Q = \frac{1 + RC\omega j}{RC\omega j} \underline{V}_P = -\frac{1 + RC\omega j}{GRC\omega j} \underline{s} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} -\frac{1 + RC\omega j}{GRC\omega j} \underline{s} &= \frac{G\underline{e} + RC\omega j (G-1) \underline{s}}{G(1 + 2RC\omega j)} \\ &\Rightarrow -\underline{s} (1 + RC\omega j) (1 + 2RC\omega j) = G\underline{e} RC\omega j + (RC\omega j)^2 (G-1) \underline{s} \\ &\Rightarrow \underline{s} [1 + 3RC\omega j - 2R^2C^2\omega^2 - R^2C^2\omega^2 (G-1)] \underline{s} = -GRC\omega j \underline{e} \\ &\Rightarrow \underline{s} [1 + 3RC\omega j - R^2C^2\omega^2 (G+1)] = -GRC\omega j \underline{e} \\ &\Rightarrow \underline{s} \times \left[ \frac{1}{R^2C^2(G+1)} + \frac{3RC\omega j}{R^2C^2(G+1)} - \omega^2 \right] = -G \times j\omega \frac{RC}{R^2C^2(G+1)} \underline{e} \end{aligned}$$

Aussi, en posant :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{R^2C^2(G+1)} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC\sqrt{G+1}}$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{3RC}{R^2C^2(G+1)} = \frac{\omega_0}{Q} &\Rightarrow Q = \frac{R^2C^2(G+1)}{3RC} \times \frac{1}{RC\sqrt{G+1}} \\ &\Rightarrow Q = \frac{\sqrt{G+1}}{3} \end{aligned}$$

l'équation reliant  $\underline{s}$  et  $\underline{e}$  s'écrit :

$$\underline{s} \times \left[ \omega_0^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} - \omega^2 \right] = -G \times j\omega \frac{\omega_0}{3Q} \underline{e}$$

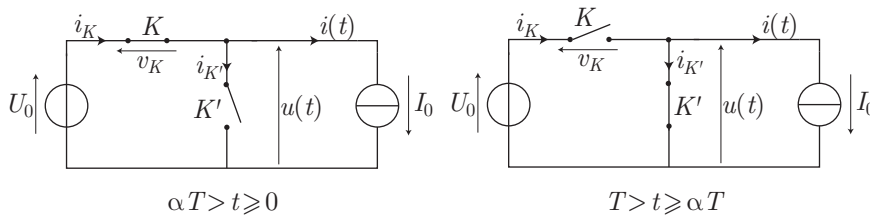
d'où l'on déduit la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = -\frac{G}{3} \frac{\omega_0}{Q} \times \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}$$

● 54 ————— Concours de l'ENS

1. (a) Les interrupteurs  $K$  et  $K'$  ne peuvent pas être simultanément fermés, sans quoi la source de tension  $U_0$  serait court-circuitée, de même qu'ils ne peuvent pas être simultanément ouverts, sous peine de laisser la source de courant  $I_0$  en circuit ouvert. C'est pourquoi :

l'interrupteur  $K'$  est ouvert pour  $t \in [0, \alpha T[$  et est fermé pour  $[\alpha T, T[$ .



- (b) De ces schémas, il ressort que :

$$\begin{cases} u(t) = U_0 \text{ pour } t \in [0, \alpha T[ \\ u(t) = 0 \text{ pour } t \in [\alpha T, T[ \end{cases}$$

Par suite, la valeur moyenne de la tension  $u(t)$  vaut :

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} \underbrace{u(t)}_{U_0} dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T \underbrace{u(t)}_0 dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} U_0 dt \Rightarrow \langle u \rangle = \alpha U_0 \end{aligned}$$

- (c) Des schémas précédents, il découle de même que :  $i(t) = I_0 \forall t \in [0, T[$ , en conséquence de quoi la valeur moyenne de la puissance reçue par la source de courant vaut :

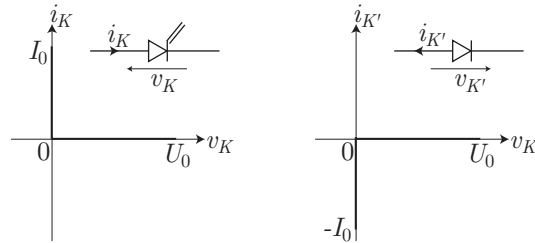
$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \times i(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} \underbrace{u(t)}_{U_0} \times i(t) dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T \underbrace{u(t)}_0 \times i(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} U_0 \times I_0 dt \Rightarrow P = \alpha U_0 I_0 \end{aligned}$$

- (d) Les tensions aux bornes des interrupteurs  $K$  et  $K'$ , ainsi que les courants qui les traversent, sont directement donnés par les schémas précédents :

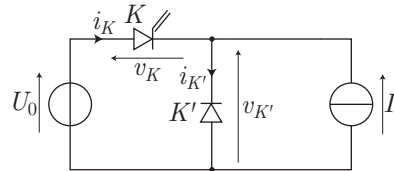
	$t \in [0, \alpha T[$	$t \in [\alpha T, T[$
$v_K$	0	$U_0$
$i_K$	$I_0$	0
$v_{K'} = u$	$U_0$	0
$i_{K'}$	0	$-I_0$

**CORRIGÉS**

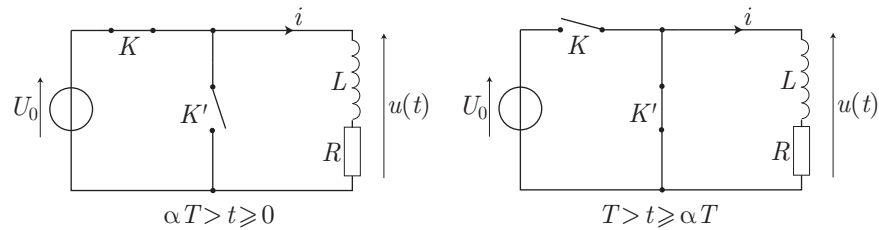
Ces résultats conduisent aux caractéristiques courant-tension, que l'on peut associer à celles d'un *thyristor* ou d'une diode :



Il ressort de ces caractéristiques que  $K$  peut être un *thyristor* et que  $K'$  peut être une diode :



2. Pour  $E = 0$  V, le circuit est équivalent à :



Pour  $t \in [0, \alpha T[$ ,  $u(t) = U_0$ , tandis que la loi des mailles impose :

$$u(t) = L \frac{di}{dt} + Ri \Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = U_0$$

La solution de cette équation différentielle :

$$i(t) = \frac{U_0}{R} + A e^{-t/\tau} \text{ où } \tau = \frac{L}{R}$$

présente une constante  $A$  adaptée à la valeur initiale de  $i(t)$  ; on choisit d'appeler  $I_{\min}$  cette valeur :

$$i(t=0) = I_{\min} \Rightarrow \frac{U_0}{R} + A = I_{\min} \Rightarrow A = I_{\min} - \frac{U_0}{R}$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{U_0}{R} + \left( I_{\min} - \frac{U_0}{R} \right) e^{-t/\tau} \text{ pour } t \in [0, \alpha T[$$

En revanche, pour  $t \in [\alpha T, T[$ ,  $u(t) = 0$  conduit à :

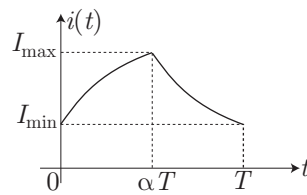
$$u(t) = L \frac{di}{dt} + Ri \Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = 0$$

À nouveau, la solution de cette équation différentielle :

$$i(t) = B e^{-t/\tau}$$

présente une constante  $B$  adaptée à la valeur initiale de  $i(t)$  ; on choisit ainsi de poser :  $i(\alpha T) = I_{\max}$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} I_{\max} &= B e^{-\alpha T/\tau} \Rightarrow B = I_{\max} e^{\alpha T/\tau} \\ \Rightarrow i(t) &= I_{\max} e^{\frac{\alpha T - t}{\tau}} \text{ pour } t \in [\alpha T, T[ \end{aligned}$$



Or, le courant qui traverse la bobine est nécessairement continu, en raison de quoi :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \alpha T^-} [i(t)] &= \lim_{t \rightarrow \alpha T^+} [i(t)] \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \alpha T} \left[ \frac{U_0}{R} + \left( I_{\min} - \frac{U_0}{R} \right) e^{-t/\tau} \right] &= \lim_{t \rightarrow \alpha T} \left[ I_{\max} e^{\frac{\alpha T - t}{\tau}} \right] \\ \Rightarrow \frac{U_0}{R} + \left( I_{\min} - \frac{U_0}{R} \right) e^{-\alpha T/\tau} &= I_{\max} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T^-} [i(t)] &= \lim_{t \rightarrow T^+} [i(t)] \Rightarrow \lim_{t \rightarrow T} \left[ I_{\max} e^{\frac{\alpha T - t}{\tau}} \right] = I_{\min} \\ \Rightarrow I_{\min} &= I_{\max} e^{\frac{\alpha T - T}{\tau}} \end{aligned}$$

Ces deux équations fournissent alors :

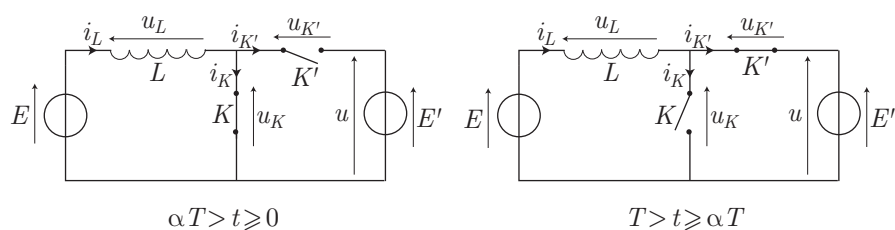
$$\begin{aligned} I_{\max} &= \frac{U_0}{R} + I_{\max} e^{\frac{\alpha T - T}{\tau}} e^{-\alpha T/\tau} - \frac{U_0}{R} e^{-\alpha T/\tau} \\ &= \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-\alpha T/\tau} \right) + I_{\max} e^{-T/\tau} \\ \Rightarrow I_{\max} \left( 1 - e^{-T/\tau} \right) &= \frac{U_0}{R} \left( 1 - e^{-\alpha T/\tau} \right) \\ \Rightarrow I_{\max} &= \frac{U_0}{R} \times \frac{1 - e^{-\alpha T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \end{aligned}$$

tandis que  $I_{\min} = I_{\max} e^{\frac{\alpha T - T}{\tau}}$  conduit à :

$$I_{\min} = \frac{U_0}{R} \times \frac{1 - e^{-\alpha T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \times \frac{e^{\alpha T/\tau}}{e^{T/\tau}} \Rightarrow I_{\min} = \frac{U_0}{R} \times \frac{e^{\alpha T/\tau} - 1}{e^{T/\tau} - 1}$$

### ● 55 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Compte tenu de la séquence suivie par les interrupteurs  $K$  et  $K'$ , le montage électrique équivaut à :



- Pour  $t \in [0, \alpha T[$ , la tension  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ , aux bornes de la bobine, est donnée par la loi des mailles :

$$E = L \frac{di_L}{dt} \Rightarrow di_L = \frac{E}{L} dt \Rightarrow \int_{I_m}^{i_L(t)} di_L = \frac{E}{L} \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow i_L(t) = I_m + \frac{E}{L} t \text{ pour } t \in [0, \alpha T[$$

- Pour  $t \in [\alpha T, T[$ , la loi des mailles fournit encore  $u_L(t)$  :

$$E - u_L - E' = 0 \Rightarrow u_L = L \frac{di_L}{dt} = E - E' \Rightarrow di_L = \frac{E - E'}{L} dt$$

$$\Rightarrow \int_{I_m}^{i_L(t)} di_L = \frac{E - E'}{L} \int_{\alpha T}^t dt$$

$$\Rightarrow i_L(t) = I_m + \frac{E - E'}{L} (t - \alpha T) \text{ pour } t \in [\alpha T, T[$$

En outre, les schémas précédents montrent que :

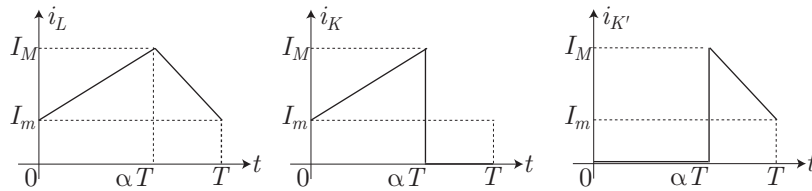
$$\begin{cases} i_K = i_L = I_m + \frac{E}{L} t \text{ pour } t \in [0, \alpha T[ \\ i_K = 0 \text{ pour } t \in [\alpha T, T[ \end{cases}$$

et que :

$$\begin{cases} i_{K'} = 0 \text{ pour } t \in [0, \alpha T[ \\ i_{K'} = i_L = I_m + \frac{E - E'}{L} (t - \alpha T) \text{ pour } t \in [\alpha T, T[ \end{cases}$$

2. Les expressions précédentes conduisent aux représentations graphiques des courants  $i_L(t)$ ,  $i_K(t)$  et  $i_{K'}(t)$  :





3. Dans la bobine, le courant  $i_L$  est nécessairement continu, sans quoi  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$  tendrait vers l'infini. C'est pourquoi :

$$\lim_{t \rightarrow \alpha T^-} i_L = \lim_{t \rightarrow \alpha T^+} i_L \quad (66)$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \alpha T} \left( I_m + \frac{E}{L} t \right) = \lim_{t \rightarrow \alpha T} \left[ I_M + \frac{E - E'}{L} (t - \alpha T) \right] \quad (67)$$

$$\Rightarrow I_m + \frac{E}{L} \alpha T = I_M \quad (68)$$

et :

$$\lim_{t \rightarrow T^-} i_L = \lim_{t \rightarrow T^+} i_L \Rightarrow \lim_{t \rightarrow T} \left[ I_M + \frac{E - E'}{L} (t - \alpha T) \right] = I_m \quad (69)$$

$$\Rightarrow I_M + \frac{E - E'}{L} T \times (1 - \alpha) = I_m \quad (70)$$

Les équations (68) et (70) ne peuvent être vérifiées qu'à condition que :

$$I_m = \underbrace{I_m + \frac{E}{L} \alpha T}_{I_M} + \frac{E - E'}{L} T (1 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \frac{ET}{L} - \frac{E'T}{L} (1 - \alpha) = 0 \Rightarrow E' = \frac{E}{1 - \alpha}$$

4. (a) De la relation (68), il ressort que :

$$\Delta i_L = I_M - I_m = \frac{E}{L} \alpha T \leq \Delta i_{Lmax}$$

$$\Rightarrow L \geq L_{min} = \frac{E \alpha T}{\Delta i_{Lmax}}$$

Application numérique :

$$L_{min} = \frac{50 \times 0,6 \times 50 \cdot 10^{-6}}{0,3} \Rightarrow L_{min} = 5 \text{ mH}$$

(b) La valeur moyenne de la puissance fournie par la source de tension  $E$  est définie par :

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T E \times i_L(t) dt = \frac{E}{T} \left\{ \int_0^{\alpha T} i_L(t) dt + \int_{\alpha T}^T i_L(T) dt \right\}$$

**CORRIGÉS**

Or, la forme linéaire adoptée par  $i_L$  sur les intervalles  $[0, \alpha T[$  et  $[\alpha T, T[$  conduit à :

$$\frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} i_L(t) dt = \frac{I_m + I_M}{2} \text{ et } \frac{1}{T(1-\alpha)} \int_{\alpha T}^T i_L(t) dt = \frac{I_m + I_M}{2} \quad (71)$$

Par suite :

$$P = \frac{E}{T} \left\{ T \frac{I_m + I_M}{2} + T(1-\alpha) \frac{I_m + I_M}{2} \right\} = E \times \frac{I_m + I_M}{2} \quad (72)$$

$$\Rightarrow I_m + I_M = \frac{2P}{E} \quad (73)$$

C'est pourquoi il apparaît un système de deux équations :

$$\begin{cases} I_M + I_m = \frac{2P}{E} \\ I_M - I_m = \Delta i_{L\max} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_M = \frac{P}{E} + \frac{\Delta i_{L\max}}{2} \\ I_m = \frac{P}{E} - \frac{\Delta i_{L\max}}{2} \end{cases}$$

Application numérique :

$$\begin{cases} I_M = \frac{150}{50} + \frac{0,3}{2} \\ I_m = \frac{150}{50} - \frac{0,3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_M = 3,15 \text{ A} \\ I_m = 2,85 \text{ A} \end{cases}$$

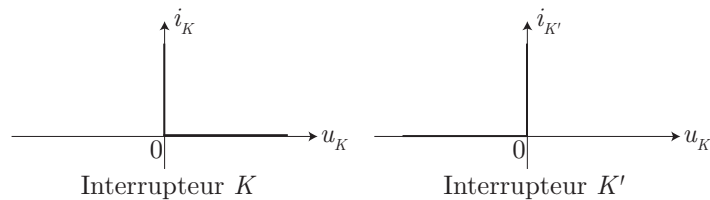
5. (a) Les deux schémas de la question 1. montrent que :

$$t \in [0, \alpha T[ \Rightarrow \begin{cases} i_K = i_L > 0 \\ u_K = 0 \end{cases} \text{ et } t \in [\alpha T, T[ \Rightarrow \begin{cases} i_K = 0 \\ u_K = E' \end{cases} \quad (74)$$

de même que :

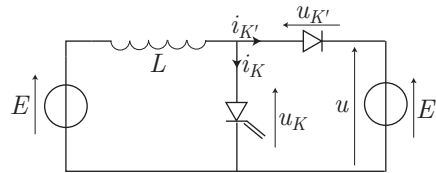
$$t \in [0, \alpha T[ \Rightarrow \begin{cases} i_{K'} = 0 \\ u_{K'} = -E \end{cases} \text{ et } t \in [\alpha T, T[ \Rightarrow \begin{cases} i_{K'} = i_L > 0 \\ u_{K'} = 0 \end{cases}$$

C'est pourquoi les caractéristiques courant-tension des interrupteurs  $K$  et  $K'$  prennent les allures suivantes :



(b) Ces caractéristiques permettent de prévoir que :

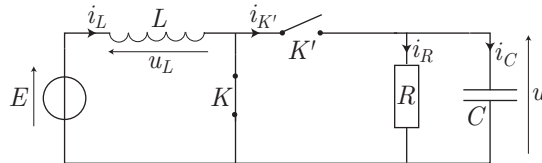
- l'interrupteur  $K$  se comporte comme un *thyristor* (ou un *transistor*) ;
- l'interrupteur  $K'$  se comporte comme une diode.



(c) Les valeurs prises par la tension  $u_K$  sont fournies par les expressions (74), auquel cas la valeur moyenne de  $u_K$  prend la valeur :

$$\begin{aligned} \langle u_K \rangle &= V_0 = \frac{1}{T} \int_0^T u_K(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} \underbrace{u_K(t)}_{=0} dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T \underbrace{u_K(t)}_{=E'} dt \\ \Rightarrow V_0 = \langle u_K \rangle &= (1 - \alpha) E' = E \end{aligned}$$

6. (a) On note  $i_R(t)$  et  $i_L(t)$  les intensités des courants qui traversent la résistance et le condensateur respectivement.



En appelant  $q(t)$  la charge portée par le condensateur, laquelle charge varie périodiquement :  $q(t + T) = q(t)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle i_C \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i_C(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dq}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^T dq \\ &= \frac{1}{T} [q(T) - q(0)] \Rightarrow i_C = 0 \end{aligned}$$

En revanche :

$$i_{K'} = i_C + i_R \Rightarrow \langle i_R \rangle = \langle i_{K'} \rangle - \langle i_C \rangle \Rightarrow \langle i_R \rangle = \langle i_{K'} \rangle$$

c'est-à-dire :

$$I_R = \frac{1}{T} \int_0^T i_{K'} dt = \frac{1}{T} \left\{ \int_0^{\alpha T} \underbrace{i_{K'}}_{=0} dt + \int_{\alpha T}^T i_{K'} dt \right\} = \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T i_{K'} dt$$

Or, la fonction  $i_{K'}(t)$  est linéaire dans l'intervalle  $[\alpha T, T]$ , ce qui a pour conséquence :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T(1-\alpha)} \int_{\alpha T}^T i_{K'} dt &= \frac{I_m + I_M}{2} \Rightarrow \int_{\alpha T}^T i_{K'} dt = T(1-\alpha) \times \frac{I_m + I_M}{2} \\ \Rightarrow I_R &= (1-\alpha) \times \frac{I_m + I_M}{2} \end{aligned}$$

où la relation (73) conduit à :

$$I_m + I_M = \frac{2P}{E} \Rightarrow I_R = (1-\alpha) \frac{P}{E}$$

Application numérique :

$$i_R = (1 - 0,6) \times \frac{150}{50} = 1,2 \text{ A}$$

(b) La puissance moyenne dissipée dans le condensateur est définie par :

$$\begin{aligned} P_C &= \frac{1}{T} \int_0^T i_C(t) \times u(t) dt \text{ avec } i_C(t) = C \frac{du}{dt} \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T C \frac{du}{dt} \times u(t) dt = \frac{C}{2T} [u^2(T) - u^2(0)] \\ &\Rightarrow P_C = 0 \text{ car } u(t) \text{ est périodique.} \end{aligned}$$

La puissance  $P$  fournie par la source vérifie :

$$P = P_L + P_R + P_C$$

où :

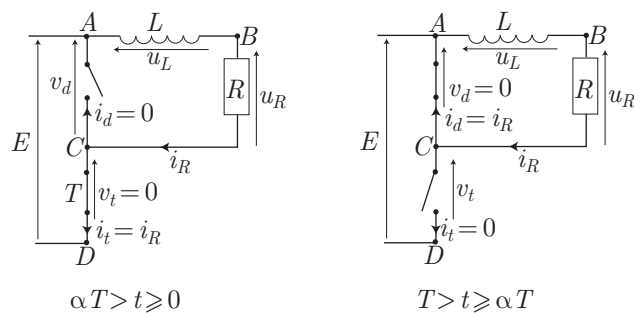
$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{T} \int_0^T u_L \times i_L dt = \frac{1}{T} \int_0^T L \frac{di_L}{dt} \times i_L dt = \frac{L}{T} \int_0^T i_L di_L \\ &= \frac{L}{2T} [i_L^2(T) - i_L^2(0)] = 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$P_R = P = 150 \text{ W}$$

## ● 56 ————— Concours ATS

1. Lorsque  $t \in [0, \alpha T]$ , le *transistor* est passant, ce qui signifie que l'interrupteur  $T$  est fermé, tandis que pour  $t \in [\alpha T, T]$ , le *transistor* est bloqué, ce qui se traduit par l'ouverture de  $T$  (dans ce cas, la diode devient passante et donc équivalente à un interrupteur fermé).



- Pour  $t \in [0, \alpha T]$  la loi des mailles, appliquée à  $(ABCD)$ , impose :

$$E - u_L - u_R = 0 \Rightarrow u_L + u_R = E \Rightarrow L \frac{di_R}{dt} + R i_R = E \quad (75)$$

- Pour  $t \in [\alpha T, T]$ , la même loi des mailles conduit à :

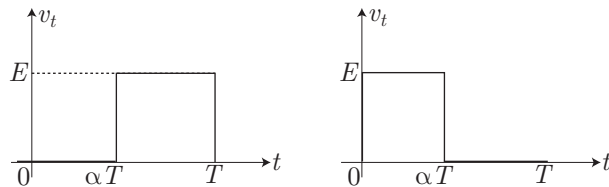
$$v_d - u_L - u_R = 0 \Rightarrow u_L + u_R = v_d = 0 \Rightarrow L \frac{di_R}{dt} + R i_R = 0 \quad (76)$$

2. Les schémas précédents révèlent que :

$$\begin{cases} v_t = 0 \text{ pour } t \in [0, \alpha T[ \\ v_d = 0 \text{ pour } t \in [\alpha T, T[ \end{cases}$$

Or, puisque  $E = v_d + v_t$ , il s'ensuit que :

$$\begin{cases} v_t = E \text{ pour } t \in [\alpha T, T[ \\ v_d = E \text{ pour } t \in [0, \alpha T[ \end{cases}$$



Pour  $t \in [0, \alpha T]$ ,  $i_R$  est solution de l'équation différentielle (75) :

$$L \frac{di_R}{dt} + R i_R = E \Rightarrow i_R = \frac{E}{R} + A e^{-t/\tau} \text{ où } \tau = \frac{L}{R}$$

Or, l'énoncé précise qu'à  $t = 0$ ,  $i_R$  prend la valeur  $I_{\min}$  :

$$I_{\min} = \frac{E}{R} + A \Rightarrow A = I_{\min} - \frac{E}{R}$$

Par suite :

$$i_R = \frac{E}{R} + \left( I_{\min} - \frac{E}{R} \right) e^{-t/\tau} \text{ pour } t \in [0, \alpha T[ \quad (77)$$

En revanche, pour  $t \in [\alpha T, T]$ ,  $i_R$  est solution de l'équation différentielle (76) :

$$L \frac{di_R}{dt} + R i_R = 0 \Rightarrow i_R = B e^{-t/\tau}$$

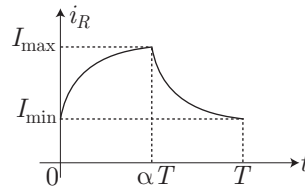
On peut alors poser :

$$i_R(t = \alpha T) = I_{\max} \Rightarrow I_{\max} = B e^{-\alpha T/\tau} \Rightarrow B = I_{\max} e^{\alpha T/\tau}$$

de sorte que :

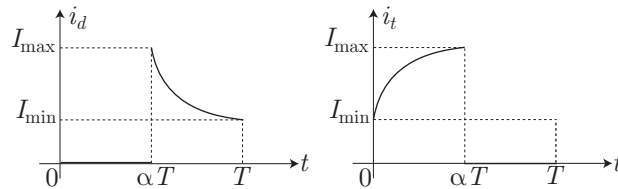
$$i_R = I_{\max} e^{\frac{\alpha T - t}{\tau}} \text{ pour } t \in [\alpha T, T[ \quad (78)$$

Les équations (77) et (78) conduisent à la représentation suivante de  $i_R(t)$  :

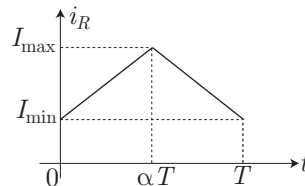


Enfin, les schémas équivalents au circuit pour  $t \in [0, \alpha T[$  et pour  $t \in [\alpha T, T[$  révèlent que :

$$\begin{cases} i_d = 0 \text{ pour } t \in [0, \alpha T[ \\ i_d = i_R \text{ pour } t \in [\alpha T, T[ \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} i_t = i_R \text{ pour } t \in [0, \alpha T[ \\ i_t = 0 \text{ pour } t \in [\alpha T, T[ \end{cases}$$



3. L'hypothèse  $T \ll \tau$ , c'est-à-dire  $\frac{t}{\tau} \ll 1$ , permet une linéarisation de la fonction exponentielle :  $e^{-t/\tau} \simeq 1 - \frac{t}{\tau}$ , de sorte que  $i_R$  varie linéairement, en fonction de  $t$ , sur les intervalles  $[0, \alpha T[$  et  $[\alpha T, T[$ .



Or, une fonction linéaire  $f(x) = ax + b$ , entre  $x_1$  et  $x_2$ , prend la valeur moyenne :

$$\langle f \rangle = \frac{f(x_2) + f(x_1)}{2}$$

ce qui signifie que, sur les intervalles  $[0, \alpha T[$  et  $[\alpha T, T[$ ,  $i_R$  a pour valeurs moyennes respectives :

$$\langle i_R \rangle_1 = \frac{1}{\alpha T} \int_0^{\alpha T} i_R(t) dt = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} \Rightarrow \int_0^{\alpha T} i_R(t) dt = \alpha T \times \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2}$$

et :

$$\langle i_R \rangle_2 = \frac{1}{T(1-\alpha)} \int_{\alpha T}^T i_R(t) dt = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} \Rightarrow \int_{\alpha T}^T i_R(t) dt = (1-\alpha) T \times \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2}$$

Ce faisant, sur une période  $T$ ,  $i_R$  prend la valeur moyenne :

$$\begin{aligned}\langle i_R \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T i_R(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} i_R(t) dt + \frac{1}{T} \int_{\alpha T}^T i_R(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \times \alpha T \times \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} + \frac{1}{T} \times (1 - \alpha) T \times \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} \\ \Rightarrow \langle i_R \rangle &= \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2}\end{aligned}$$

Or, la linéarisation :  $e^{-t/\tau} \simeq 1 - \frac{t}{\tau}$  peut s'appliquer à l'expression (77) de  $i_R(t)$  :

$$\begin{aligned}i_R(t) &= \frac{E}{R} + \left( I_{\min} - \frac{E}{R} \right) e^{-t/\tau} \simeq \frac{E}{R} + \left( I_{\min} - \frac{E}{R} \right) \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right) \\ \Rightarrow i_R(t) &\simeq I_{\min} \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right) + \frac{E}{R} \frac{t}{\tau}\end{aligned}$$

Or, à la date  $t = \alpha T$ ,  $i_R(t)$  est continu, ce qui a pour conséquence :

$$i_R(\alpha T) = I_{\max} \Rightarrow I_{\max} \simeq I_{\min} \left( 1 - \frac{\alpha T}{\tau} \right) + \frac{E}{R} \frac{\alpha T}{\tau} \quad (79)$$

De même, la linéarisation de l'exponentielle peut s'appliquer à l'expression (78) de  $i_R$  :

$$i_R(t) = I_{\max} e^{\frac{\alpha T - t}{\tau}} \simeq I_{\max} \times \left( 1 + \frac{\alpha T}{\tau} - \frac{t}{\tau} \right)$$

tandis que la continuité de la fonction  $i_R(t)$  en  $t = T$  impose :

$$i_R(T) = I_{\min} \Rightarrow I_{\min} = I_{\max} \times \left[ 1 + \frac{(\alpha - 1)T}{\tau} \right] \quad (80)$$

Aussi, les équations (79) et (80) imposent-elles :

$$\begin{aligned}I_{\max} &= I_{\max} \left[ 1 + \frac{(\alpha - 1)T}{\tau} \right] \left( 1 - \frac{\alpha T}{\tau} \right) + \frac{E}{R} \frac{\alpha T}{\tau} \\ &= I_{\max} \left[ 1 - \frac{T}{\tau} + \frac{\alpha(1 - \alpha)T^2}{\tau^2} \right] + \frac{E}{R} \frac{\alpha T}{\tau}\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en ne conservant que les termes d'ordre 1 en  $\frac{T}{\tau}$  :

$$\begin{aligned}I_{\max} &= I_{\max} \left( 1 - \frac{T}{\tau} \right) + \frac{E}{R} \frac{\alpha T}{\tau} \Rightarrow I_{\max} \times \frac{T}{\tau} = \frac{E}{R} \times \frac{\alpha T}{\tau} \\ \Rightarrow I_{\max} &= \frac{\alpha E}{R}\end{aligned}$$

Quant à l'expression de  $I_{\min}$ , elle se déduit de la relation (80) :

$$\begin{aligned}I_{\min} &= I_{\max} \times \left( 1 + \frac{\alpha - 1}{\tau} T \right) \\ \Rightarrow I_{\max} + I_{\min} &= I_{\max} \left( 2 + \frac{\alpha - 1}{\tau} T \right) = \frac{\alpha E}{R} \left( 2 + \frac{\alpha - 1}{\tau} T \right)\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\langle i_R \rangle = \frac{\alpha E}{R} \times \left( 1 + \frac{\alpha - 1}{2\tau} T \right)$$

c'est-à-dire, étant donné que  $\frac{T}{\tau} \ll 1$  :

$$\langle i_R \rangle \simeq \frac{\alpha E}{R} \quad (81)$$

4. L'ondulation :  $\Delta i_R = I_{\max} - I_{\min}$  s'obtient à nouveau à l'aide de la relation (80) :

$$I_{\min} = I_{\max} + I_{\max} \times \frac{(\alpha - 1)T}{\tau} \Rightarrow \Delta i_R = I_{\max} \times \frac{(1 - \alpha)T}{\tau}$$

où  $\tau = \frac{L}{R}$ ,  $I_{\max} = \frac{\alpha E}{R}$  et  $T = \frac{1}{f}$  conduisent à :

$$\Delta i_R = \frac{\alpha E}{R} \times \frac{R}{L} \times \frac{1 - \alpha}{f} \Rightarrow \Delta i_R = \frac{\alpha(1 - \alpha) E}{Lf} \quad (82)$$

Application numérique :

$$\Delta i_R = \frac{(0,5)^2 \times 12}{20 \cdot 10^3 \times L} = \frac{15 \cdot 10^{-5}}{L}$$

5. Les résultats (81) et (82) permettent de trouver le rapport :

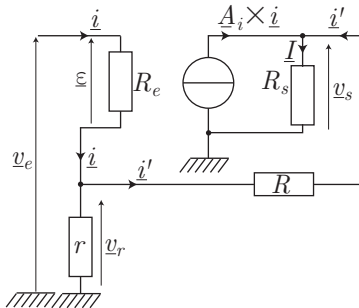
$$\frac{\Delta i_R}{\langle i_R \rangle} = \frac{\alpha(1 - \alpha) E}{Lf} \times \frac{R}{\alpha E} = \frac{1 - \alpha}{\tau f}$$

que l'on souhaite égal à 0,1 :

$$\frac{1 - \alpha}{\tau f} = 0,1 \Rightarrow \tau = \frac{1 - \alpha}{0,1 \times f} = \frac{0,5}{2 \cdot 10^3} \Rightarrow \tau = 25 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

## ● 57 ————— Concours de l'ESIM

1. Soient  $\underline{i}'$  et  $\underline{I}$  les intensités complexes des courants qui traversent respectivement les résistances  $R$  et  $R_s$ .





La loi d'Ohm et la loi des mailles imposent :

$$\underline{v}_r = r (\underline{i} - \underline{i}') \text{ et } \underline{v}_r - \underline{v}_s = R \underline{i}' \quad (83)$$

de même que  $\underline{I} = \underline{A}_i \underline{i} + \underline{i}'$  permet de poser :

$$\underline{v}_s = R_s \underline{I} = R_s (\underline{A}_i \underline{i} + \underline{i}') \quad (84)$$

Les lois (83) conduisent à :

$$\underline{i}' = \frac{\underline{v}_r - \underline{v}_s}{R} \text{ et } \underline{i} = \underline{i}' + \frac{\underline{v}_r}{r} = \underline{v}_r \times \frac{r + R}{rR} - \frac{\underline{v}_s}{R}$$

Ce faisant, l'équation (84) devient :

$$\begin{aligned} \underline{v}_s &= R_s \left[ \underline{v}_r \times \frac{\underline{A}_i (r + R)}{rR} - \frac{\underline{A}_i}{R} \underline{v}_s + \frac{\underline{v}_r}{R} - \frac{\underline{v}_s}{R} \right] \\ \Rightarrow R \underline{v}_s &= R_s \underline{v}_r \left( \underline{A}_i \frac{R + r}{r} + 1 \right) - R_s (1 + \underline{A}_i) \underline{v}_s \\ \Rightarrow [R + R_s (1 + \underline{A}_i)] \underline{v}_s &= \frac{R_s}{r} [r + \underline{A}_i (r + R)] \underline{v}_r \end{aligned}$$

Il apparaît alors que :

$$\underline{v}_r = \underline{\beta} \underline{v}_s \text{ avec } \underline{\beta} = \frac{r}{R_s} \times \frac{R + R_s (1 + \underline{A}_i)}{r + (r + R) \underline{A}_i}$$

Quant à la tension  $\underline{\varepsilon}$ , elle vaut :

$$\underline{\varepsilon} = R_e \underline{i} \Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{\varepsilon}}{R_e}$$

tandis que les équations (83) ont pour conséquence :

$$\begin{aligned} \underline{v}_r = r \underline{i} - r \underline{i}' = R \underline{i}' + \underline{v}_s &\Rightarrow (R + r) \underline{i}' = r \underline{i} - \underline{v}_s = r \frac{\underline{\varepsilon}}{R_e} - \underline{v}_s \\ \Rightarrow \underline{i}' &= \frac{r \underline{\varepsilon}}{R_e (R + r)} - \frac{\underline{v}_s}{R + r} \end{aligned}$$

Les expressions de  $\underline{i}$  et  $\underline{i}'$  ainsi obtenues peuvent être utilisées dans l'équation (84), qui adopte alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \underline{v}_s &= R_s (\underline{A}_i \underline{i} + \underline{i}') = R_s \left[ \frac{\underline{A}_i \underline{\varepsilon}}{R_e} + \frac{r \underline{\varepsilon}}{R_e (R + r)} - \frac{\underline{v}_s}{R + r} \right] \\ \Rightarrow (R + r) \underline{v}_s &= \frac{R_s}{R_e} [r + (R + r) \underline{A}_i] \underline{\varepsilon} - R_s \underline{v}_s \\ \Rightarrow (R + r + R_s) \underline{v}_s &= \frac{R_s}{R_e} [r + (R + r) \underline{A}_i] \underline{\varepsilon} \end{aligned}$$

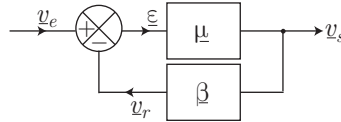
Il existe donc un nombre complexe  $\underline{\mu}$  tel que :

$$\underline{\mu} = \frac{R_s}{R_e} \times \frac{r + (R + r) \underline{A}_i}{R + r + R_s} \Rightarrow \underline{v}_s = \underline{\mu} \underline{\varepsilon}$$

Les définitions de  $\underline{\mu}$  et  $\underline{\beta}$  :

$$\underline{v}_s = \underline{\mu} \underline{\varepsilon} \text{ et } \underline{v}_r = \underline{\beta} \underline{v}_s \text{ avec } \underline{\varepsilon} = \underline{v}_e - \underline{v}_r$$

sont par conséquent compatibles avec le schéma-bloc représenté ci-dessous :



2. L'expression de  $\underline{\mu}$  peut aussi s'écrire :

$$\begin{aligned} \underline{\mu} &\simeq \frac{R_s}{R_e} \times \frac{r + (R+r) \underline{A}_i}{R+r} \text{ car } R \gg R_s \\ &= \frac{R_s}{R_e} \times \left( \frac{r}{R+r} + \underline{A}_i \right) \end{aligned}$$

où  $|\underline{A}_i| \gg \frac{r}{R+r}$  autorise à poser :

$$\underline{\mu} \simeq \frac{R_s}{R_e} \times \underline{A}_i$$

De même, l'expression de  $\underline{\beta}$  se simplifie :

$$\begin{aligned} \underline{\beta} &= \frac{r}{R_s} \times \frac{R + R_s + R_s \underline{A}_i}{(r+R) \left( \underline{A}_i + \frac{r}{r+R} \right)} \simeq \frac{r}{R_s} \times \frac{R + R_s \underline{A}_i}{(r+R) \underline{A}_i} \text{ car } \begin{cases} R \gg R_s \\ |\underline{A}_i| \gg \frac{r}{r+R} \end{cases} \\ \Rightarrow \underline{\beta} &\simeq \frac{r}{R_s} \times \frac{R_s \underline{A}_i}{(r+R) \underline{A}_i} \text{ puisque } R_s |\underline{A}_i| \gg R \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$\underline{\beta} \simeq \frac{r}{r+R}$$

3. (a) Afin de simplifier les calculs, on posera  $x = \frac{f}{f_1}$ , de sorte que  $f_2 = 100 f_1$

s'écrit aussi  $\frac{f}{f_2} = 10^{-2} x$  :

$$\begin{aligned} \underline{\mu} &= \frac{R_s}{R_e} \times \underline{A}_i = \frac{10^3}{10^4} \times \frac{10^5}{(1+jx)(1+10^{-2}jx)} \\ &= \frac{10^6}{(1+jx)(100+jx)} \end{aligned}$$

et :  $\underline{\beta} = \frac{10^3}{100+10^3} \simeq 1$ . Ce faisant, la transmittance en boucle ouverte vaut :

$$\underline{T}(x) = \underline{\mu} \times \underline{\beta} = \frac{10^6}{(1+jx)(100+jx)}$$

(b) Le résultat précédent fournit :

$$1 + \underline{T} \simeq \frac{(jx)^2 + 101 jx + 10^6}{(jx)^2 + 101 jx + 100}$$

de sorte que l'équation :  $(1 + \underline{T}) \underline{s} = 0$  équivaut à l'équation :

$$\frac{1}{\omega_0^2} (j\omega)^2 \underline{s} + \frac{101}{\omega_0} j\omega \underline{s} + 10^6 \underline{s} = 0 \text{ où } \omega_0 = 2\pi f_0 \text{ et } \omega = 2\pi f$$

c'est-à-dire à l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{101}{\omega_0} \frac{ds}{dt} + 10^6 s = 0$$

dont l'équation caractéristique :

$$\frac{1}{\omega_0^2} X^2 + \frac{101}{\omega_0} X + 10^6 = 0 \Rightarrow X^2 + 101 \omega_0 X + 10^6 \omega_0^2 = 0$$

admet pour solutions :

$$X = \frac{-101 \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{(101)^2 - 4 \cdot 10^6}}{2} \simeq -50 \omega_0 \pm 1000 \omega_0 j$$

Il apparaît ainsi que les deux racines du polynôme caractéristique de  $(1 + \underline{T}) \underline{s}$  ont leur partie réelle négative, ce qui suffit à prouver que le système est stable.

## ● 58 ————— Concours ESIM

I-

1. La chaîne directe fournit un signal  $\underline{V}_2 = \underline{A} \times (\underline{V}_1 - \underline{V}_R)$ , tandis que la chaîne de retour fournit :  $\underline{V}_R = \underline{B} \underline{V}_2$ . Il s'ensuit que :

$$\underline{V}_2 = \underline{A} \underline{V}_1 - \underline{A} \underline{B} \underline{V}_2 \Rightarrow \underline{V}_2 (1 + \underline{A} \underline{B}) = \underline{A} \underline{V}_1 \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{\underline{A}}{1 + \underline{A} \underline{B}}$$

2. En boucle ouvert, le système fournirait le signal  $\underline{V}_R$  :



Aussi :

$$\begin{cases} \underline{V}_R = \underline{B} \underline{V}_2 \\ \underline{V}_2 = \underline{A} \underline{V}_1 \end{cases} \Rightarrow \underline{V}_R = \underline{A} \underline{B} \underline{V}_1 \Rightarrow \underline{T}(\omega) = \frac{\underline{V}_R}{\underline{V}_1} = \underline{A} \times \underline{B} \quad (85)$$

Cette relation justifie la dénomination de  $\underline{T}(\omega)$  ; il s'agit d'une transmittance en boucle ouvert.

3. (a) En choisissant  $\underline{B} = B \in \mathbb{R}$  et  $\underline{A} = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$ , la fonction de transfert  $\underline{H}$  devient :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{\underline{A}}{1 + \underline{A}\underline{B}} = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \times \frac{1}{1 + \frac{A_0 B}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}} \\ &= \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} + A_0 B} = \frac{A_0}{1 + j \frac{\omega}{(1 + A_0 B) \omega_0}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant :  $H_0 = \frac{A_0}{1 + A_0 B}$  et  $\omega'_0 = (1 + A_0 B) \omega_0$  :

$$\begin{aligned} \underline{H} = \frac{V_2}{V_1} &= \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega'_0}} \Rightarrow j \frac{\omega}{\omega'_0} V_2 + V_2 = H_0 V_1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\omega'_0} \frac{dV_2}{dt} + V_2 = H_0 V_1 \end{aligned}$$

Par conséquent, les tensions  $V_1(t)$  et  $V_2(t)$  sont liées par l'équation différentielle :

$$\frac{1}{\omega'_0} \frac{dV_2}{dt} + V_2 = H_0 V_1 = H_0 E \text{ pour } t > 0$$

Outre la solution homogène au second membre :  $V_{2h} = H_0 E$ , cette équation admet une solution de l'équation :

$$\frac{1}{\omega'_0} \frac{dV_{2s}}{dt} + V_{2s} = 0 \Rightarrow V_{2s} = \alpha e^{-\omega'_0 t}$$

Il s'ensuit que :

$$V_2(t) = V_{1s} + V_{2s} = H_0 E + \alpha e^{-\omega'_0 t}$$

où  $\alpha$  est une constante dont l'expression doit rendre compte de la valeur nulle de  $V_2(t = 0)$  :

$$\begin{aligned} 0 &= H_0 E + \alpha \Rightarrow \alpha = -H_0 E \Rightarrow V_2(t) = H_0 E \left( 1 - e^{-\omega'_0 t} \right) \\ &\Rightarrow \text{avec } H_0 = \frac{A_0}{1 + A_0 B} \text{ et } \omega'_0 = (1 + A_0 B) \omega_0 \end{aligned}$$

- (b) L'amplificateur en boucle fermée est stable à condition que  $V_2(t)$  ne tende pas vers l'infini avec  $t$ , c'est-à-dire à condition que :

$$\omega'_0 \geq 0 \Rightarrow A_0 B \geq -1$$

4. Dans le cas présent, la transmittance en boucle ouverte vaut :

$$\underline{T}(\omega) = \underline{A} \times \underline{B} = \frac{A_0 B}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Pour présenter  $\underline{T}(\omega)$  sous forme polaire, il convient de distinguer deux cas :

- Si  $A_0 B \geq 0$  :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{|A_0 B|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e^{j\phi} \text{ avec } \tan \phi = \frac{\omega}{\omega_0}$$

auquel cas :

$$|\underline{T}(\omega)| = \frac{|A_0 B|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \text{ et } \varphi = \arg \{ \underline{T}(\omega) \} \Rightarrow \tan \varphi = -\tan \phi = -\frac{\omega}{\omega_0}$$

- Si  $A_0 B < 0$  :

$$\underline{T}(\omega) = -\frac{|A_0 B|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e^{j\phi} = \frac{|A_0 B|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} e^{j(-\pi - \phi)}$$

d'où il s'ensuit que :

$$|\underline{T}(\omega)| = \frac{|A_0 B|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \text{ et } \varphi = -\pi - \phi = \arg \{ \underline{T}(\omega) \} \text{ avec } \tan \phi = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Il s'agit alors de calculer  $M_\varphi$  et  $M_G$  dans ces deux cas.

- Si  $A_0 B \geq 0$ ,  $\omega_1$  est la pulsation telle que :

$$\begin{aligned} |\underline{T}(\omega_1)| = 1 &\Rightarrow \frac{|A_0 B|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}} = 1 \Rightarrow 1 + \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = |A_0 B|^2 = 10^4 \\ &\Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_0} \simeq 10^2 \end{aligned}$$

Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \tan \phi &= -\frac{\omega_1}{\omega_0} = -10^2 \Rightarrow \phi \simeq 89,4^\circ \Rightarrow \varphi = -89,4^\circ \\ &\Rightarrow M_\varphi = 180^\circ + \varphi = 180^\circ - 89,4^\circ = 90,6^\circ \end{aligned}$$

Selon ce critère, le système est stable.

En revanche, pour  $\omega$  variant dans l'intervalle  $[0, \infty[$ ,  $\tan \varphi = -\frac{\omega}{\omega_0}$  varie de 0 à  $-\infty$ , c'est-à-dire que  $\varphi \in \left[0, -\frac{\pi}{2}\right]$ . Il est donc impossible de trouver  $\omega_c$  tel que  $\varphi = \arg \{\underline{T}(\omega_c)\} = -\pi$ ; la marge de gain n'est donc pas calculable.

- Si  $A_0 B \leq 0$ , la pulsation  $\omega_1$  est la même que précédemment :  $\frac{\omega_1}{\omega_0} = 10^2$ , de sorte que  $\tan \phi = -\frac{\omega_1}{\omega_0} \Rightarrow \phi = 89,4^\circ$  et donc :

$$\begin{aligned} \varphi = \arg \{\underline{T}(\omega_1)\} &= -180^\circ - 89,4^\circ \Rightarrow M_\varphi = 180^\circ + (-180^\circ - 89,4^\circ) \\ &\Rightarrow M_\varphi = -89,4^\circ \end{aligned}$$

Le résultat :  $M_\varphi < 0$  suggère l'instabilité du système.

Quant à l'argument  $\varphi$  de  $\underline{T}(\omega)$  :  $\varphi = -\pi - \phi$ , il peut s'identifier à  $-\pi$  pour une pulsation  $\omega_c$  :

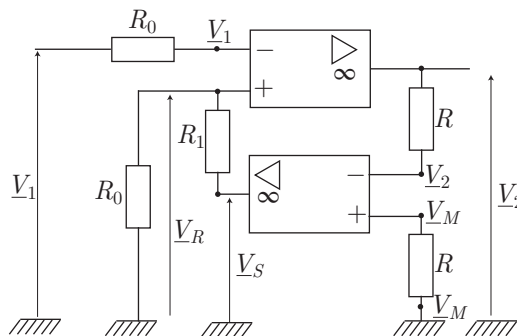
$$\begin{aligned} \arg \{\underline{T}(\omega_c)\} = -\pi &\Rightarrow -\pi - \phi = -\pi \Rightarrow \phi = 0 \\ &\Rightarrow \tan \phi = 0 \Rightarrow \frac{\omega_c}{\omega_0} = 0 \\ &\Rightarrow |\underline{T}(\omega_c)| = \frac{|A_0 B|}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_c}{\omega_0}\right)^2}} = |A_0 B| = 10^2 \\ &\Rightarrow M_G = -20 \log |\underline{T}(\omega_c)| = -40 \end{aligned}$$

Selon le critère relatif à la marge de gain, le système en boucle fermée est instable.

De ces deux résultats, il ressort que le calcul de la marge de gain et de la marge de phase donnent des prédictions compatibles concernant l'instabilité du système.

## II-

1. Les A.O. présentant une impédance d'entrée infinie, les différences de potentiel aux bornes des résistances  $R$  et  $R_0$  sont nulles.



Ce faisant :

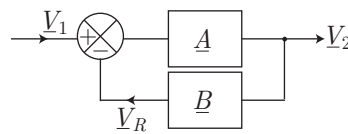
$$V_2 = \underline{\mu} (V_R - V_1) = -\underline{\mu} (V_1 - V_R)$$

tandis que les résistances  $R_1$  et  $R_2$  constituent un pont diviseur de tension, pour lequel :

$$\begin{aligned} \underline{V}_R &= \frac{R_0}{R_0 + R_1} \underline{V}_S \text{ et } \underline{V}_S = \underline{\mu} (\underline{V}_M - \underline{V}_2) \text{ où } \underline{V}_M = 0 \text{ V} \\ \Rightarrow \underline{V}_R &= -\frac{\underline{\mu} R_0}{R_0 + R_1} \underline{V}_2 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que ce système peut être décrit par un schéma-bloc, en posant :

$$\underline{A} = -\underline{\mu} \text{ et } \underline{B} = -\frac{R_0}{R_0 + R_1} \underline{\mu}$$



2. Le résultat (85) donne le gain en boucle ouverte :

$$\underline{T}(\omega) = \underline{A} \times \underline{B} = \frac{R_0}{R_0 + R_1} \times (\underline{\mu})^2 = \frac{R_0}{R_0 + R_1} \times \left( \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \right)^2$$

3. En notant  $\phi$  l'argument du nombre complexe :

$$1 + j \frac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} e^{j\phi} \text{ avec } \tan \phi = \frac{\omega}{\omega_0}$$

le gain en boucle ouverte vaut :

$$|\underline{T}(\omega)| = \frac{R_0}{R_0 + R_1} \times \frac{\mu_0^2}{1 + \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2} \text{ et } \arg \{ \underline{T}(\omega) \} = \varphi = -2\phi = -2 \arctan \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

La pulsation  $\omega_1$  pour laquelle  $|\underline{T}(\omega_1)| = 1$  vérifie donc :

$$1 = \frac{100}{10100} \times \frac{10^{10}}{1 + \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2} \simeq \frac{10^8}{1 + \left( \frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2} \Rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_0} \simeq 10^4$$

Dans ce cas :

$$\tan \phi = \frac{\omega_1}{\omega_0} = 10^4 \Rightarrow \phi \simeq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = -\pi$$

Ce faisant :

$$M_\varphi = 180^\circ + \underbrace{\arg \{ \underline{T}(\omega_1) \}}_{\varphi} \Rightarrow M_\varphi = 0$$

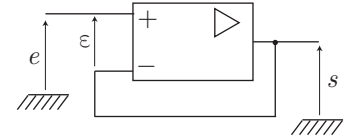
Étant donné que  $M_\varphi$  est très différent de  $45^\circ$ , le système sera peu stable.

## ● 59 ————— Concours Centrale-Supélec

1. En choisissant  $\mu$  infini, le fonctionnement en régime linéaire de l'A.O. impose :  
 $\underline{\varepsilon} = 0$ , sans quoi  $\underline{s} = \mu \underline{\varepsilon}$  tendrait vers l'infini.

Or,  $\underline{\varepsilon} = \underline{e} - \underline{s}$  conduit directement à :

$$\underline{s} = \underline{e}$$



2. En considérant maintenant que  $\mu = \mu_0$  est fini, la linéarité de l'A.O. suggère que :

$$\begin{aligned} \underline{s} = \mu_0 \underline{\varepsilon} = \mu_0 (\underline{e} - \underline{s}) &\Rightarrow (1 + \mu_0) \underline{s} = \mu_0 \underline{e} \\ &\Rightarrow \underline{s} = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} \times \underline{e} \end{aligned}$$

Compte tenu de l'ordre de grandeur de  $\mu_0 \simeq 10^7$ , cette relation s'écrit aussi :

$$\underline{s} = \underline{e}$$

ce qui rend peu intéressant le choix de  $\mu$  fini.

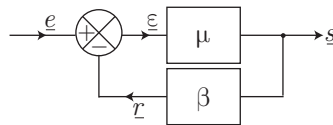
3. Les relations entre les tensions du montage inverseur :

$$\underline{s} = \mu \underline{\varepsilon} \text{ avec } \underline{\varepsilon} = \underline{e} - \underline{s}$$

permettent d'identifier :

la grandeur d'entrée :  $\underline{e}$   
 la grandeur de retour :  $\underline{s}$   
 la grandeur de sortie :  $\underline{s}$

Le montage suiveur rentre bien dans le cadre des systèmes linéaires bouclés, à condition que  $\mu$  désigne la transmittance de la chaîne directe et  $\beta = 1$  celle de la chaîne de retour.



4. Dans les questions 1. et 2. la tension  $\underline{s}$  ne dépend pas du courant de sortie, ce qui suggère la valeur nulle de la résistance de sortie du suiveur.
5. Soit  $R_e$  la résistance d'entrée de l'A.O. (résistance permettant d'appliquer la loi d'Ohm entre le potentiel  $\underline{e}^+$  de l'entrée non inverseuse et le courant  $\underline{i}$  qui entre dans l'A.O. :  $\underline{e}^+ = R_e \underline{i}$ ). La tension  $\underline{e}^+$  est donnée par la loi du pont diviseur de tension :

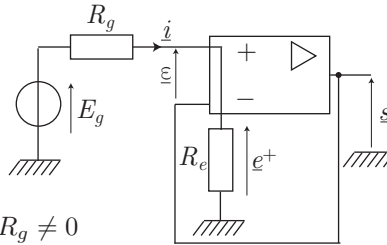


$$e^+ = \frac{R_e}{R_g + R_e} E_g \Rightarrow E_g = \left(1 + \frac{R_g}{R_e}\right) e^+$$

tandis que l'hypothèse de l'A.O. idéal impose  $i = 0$ , c'est-à-dire :

$$e^+ = E_g - R_g i = E_g \Rightarrow 1 + \frac{R_g}{R_e} = 1$$

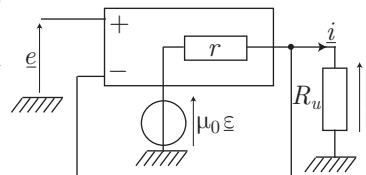
$$\Rightarrow \frac{R_g}{R_e} = 0 \text{ avec } R_g \neq 0$$



Il s'ensuit que  $R_e$  tend vers l'infini .

En tenant compte de la résistance  $r$ , le montage proposé se présente comme indiqué ci-contre. Ce faisant, la loi du pont diviseur de tension fournit :

$$s = \frac{R_u}{r + R_u} \mu_0 \varepsilon$$



où :

$$\varepsilon = e - s \Rightarrow s = \frac{\mu_0 R_u}{r + R_u} (e - s)$$

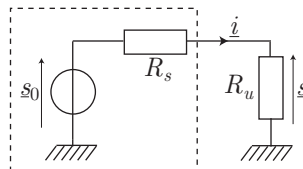
$$\Rightarrow s \times \left(1 + \frac{\mu_0 R_u}{r + R_u}\right) = \frac{\mu_0 R_u}{r + R_u} e$$

$$\Rightarrow s = \frac{\mu_0 R_u}{r + (1 + \mu_0) R_u} e$$

Cette loi montre qu'en circuit ouvert ( $R_u \rightarrow \infty$ ) :

$$s_0 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} e$$

Ce faisant, le montage suiveur se comporte comme un générateur de tension, de force électromotrice  $s_0$  et de résistance interne  $R_s$  :



Dans ce cas, la loi du pont diviseur de tension fournit :

$$s = \frac{R_u}{R_u + R_s} s_0 = \frac{R_u}{R_u + R_s} \times \frac{\mu_0 e}{1 + \mu_0}$$

La comparaison des deux expressions obtenues pour  $\underline{s}$  amène à poser :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 R_u \underline{e}}{r + (1 + \mu_0) R_u} &= \frac{R_u \mu_0 \underline{e}}{(R_u + R_s) (1 + \mu_0)} \\ \Rightarrow r + (1 + \mu_0) R_u &= R_s (1 + \mu_0) + R_u (1 + \mu_0) \\ \Rightarrow R_s &= \frac{r}{1 + \mu_0} \end{aligned}$$

La résistance  $r$  est de l'ordre de  $10 \Omega$  tandis que  $\mu_0$  est de l'ordre de  $10^7$ . C'est pourquoi :

$$R_s \simeq \frac{r}{\mu_0} = 10^{-6} \Omega \simeq 0 \Omega$$

L'intérêt du montage suiveur à A.O. vient de ce qu'il permet de générer une tension  $\underline{s} \simeq \underline{e}$  :

- avec une résistance d'entrée  $R_e$  infinie : aucun courant ne rentre dans l'entrée non inverseuse de l'A.O.
- avec une résistance de sortie nulle, de sorte que  $\underline{s} \simeq \underline{e}$ , quelle que soit l'intensité du courant de sortie.

6. Dans l'expression :  $\mu = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$ , la pulsation  $\omega_0$  désigne la pulsation de coupure,

telle que :

$$\forall \omega \leq \omega_0, |\mu(\omega)| \geq \frac{\mu_0}{\sqrt{2}}$$

Pour un amplificateur opérationnel usuel,  $\omega_0$  est de l'ordre de 50 Hz. Une telle bande passant :  $[0, \omega_0 = 50 \text{ Hz}]$  montre que l'A.O. fonctionne, dans la plupart des circuits, hors de sa bande passante.

7. Le schéma-bloc de la question 3. révèle que :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \mu \underline{e} = \mu (\underline{e} - \underline{r}) \text{ où } \underline{r} = \beta \underline{s} = \underline{s} \\ \Rightarrow \underline{s} &= \mu \underline{e} - \mu \underline{s} \Rightarrow \underline{s} \times (1 + \mu) = \mu \underline{e} \end{aligned}$$

Ce faisant, la fonction de transfert du montage suiveur vaut :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\mu}{1 + \mu} \text{ avec } \mu = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

c'est-à-dire :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \times \frac{1}{1 + \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0} + \mu_0} = \frac{\frac{\mu_0}{1 + \mu_0}}{1 + j \frac{\omega}{(1 + \mu_0)\omega_0}}$$

On peut ainsi écrire :

$$\underline{T}(j\omega) = \frac{T_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \text{ avec } \begin{cases} T_0 = \frac{\mu_0}{1 + \mu_0} \\ \omega_c = (1 + \mu_0) \omega_0 \end{cases}$$

ce qui permet de mettre en évidence le nouveau gain ( $T_0$ ) du montage, ainsi que sa nouvelle pulsation de coupure  $\omega_c$ . Ainsi, le produit gain  $\times$  bande du montage vaut-il :

$$\text{gain} \times \text{bande} = T_0 \times \omega_c = \mu_0 \times \omega_0$$

8. La relation :  $\underline{s} = \mu \underline{\varepsilon}$  équivaut à :

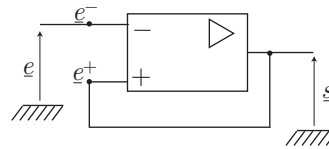
$$\begin{aligned} \underline{s} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \underline{\varepsilon} &\Rightarrow \underline{s} + \tau \times j\omega \underline{s} = \mu_0 \underline{\varepsilon} \text{ où } \tau = \frac{1}{\omega_0} \\ &\Rightarrow \underline{s} + \tau \frac{d\underline{s}}{dt} = \mu_0 \underline{\varepsilon} \end{aligned}$$

de sorte que les tensions  $s(t)$  et  $\varepsilon(t)$  sont liées par l'équation différentielle :

$$s + \tau \frac{ds}{dt} = \mu_0 \varepsilon$$

9. Le montage schématisé ci-dessous conduit à poser :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \mu (\underline{e}^+ - \underline{e}^-) = \mu (\underline{s} - \underline{e}) \\ &= \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} (\underline{s} - \underline{e}) \\ \Rightarrow \underline{s} + \frac{1}{\omega_0} j\omega \underline{s} &= \mu_0 \underline{s} - \mu_0 \underline{e} \\ \Rightarrow (1 - \mu_0) \underline{s} + \frac{1}{\omega_0} j\omega \underline{s} &= -\mu_0 \underline{e} \end{aligned}$$



d'où découle l'équation différentielle :

$$(1 - \mu_0) s + \frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} = -\mu_0 \frac{de}{dt}$$

Or, l'ordre de grandeur de  $\mu_0$  ( $\simeq 10^7$ ) conduit à simplifier cette équation :

$$-\mu_0 s + \frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} = -\mu_0 \frac{de}{dt}$$

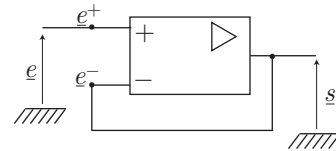
et, notamment, lorsque  $e = 0$ , cette équation a pour solution :

$$s(t) = A e^{\mu_0 \omega_0 t} \quad (A = \text{cte})$$

La grande valeur du produit  $\mu_0 \times \omega_0 \simeq 5.10^8$  montre que  $s(t)$  diverge très rapidement, en dépit de la valeur nulle de  $e$  ; ce montage n'est pas stable : l'A.O. atteint rapidement la saturation :  $s = \pm V_{\text{sat}}$ .

10. En revanche, pour le montage suivant, on observe que :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \mu (\underline{e}^+ - \underline{e}^-) = \mu (\underline{e} - \underline{s}) \\ &= \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} (\underline{e} - \underline{s}) \\ \Rightarrow \underline{s} + \frac{1}{\omega_0} j \omega \underline{s} &= \mu_0 \underline{e} - \mu_0 \underline{s} \\ \Rightarrow (1 + \mu_0) \underline{s} + \frac{1}{\omega_0} j \omega \underline{s} &= \mu_0 \underline{e} \end{aligned}$$



Aussi, l'équation différentielle liant  $s(t)$  et  $e(t)$  :

$$(1 + \mu_0) s + \frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} = \mu_0 e \Rightarrow \mu_0 s + \frac{1}{\omega_0} \frac{ds}{dt} \simeq \mu_0 e$$

admet pour solution, lorsque  $e(t) = 0$  :

$$s = B e^{-\omega_0 \mu_0 t} \quad (B = \text{cte})$$

ce qui prouve la stabilité du montage : lorsque  $e(t)$  est identiquement nul,  $s(t)$  tend rapidement vers zéro.

Cependant, pour assurer un fonctionnement linéaire à l'A.O., il est nécessaire que  $|s| < V_{\text{sat}}$ . Par exemple, le montage diviseur non inverseur, bien que stable, peut ne pas fonctionner en régime linéaire si  $\left| \left( 1 + \frac{R_1}{R_2} \right) \times e \right|$  excède la valeur  $V_{\text{sat}}$ .

## Chapitre 3

# Électromagnétisme

### 3.1 Opérateurs vectoriels

Excepté en coordonnées cartésiennes, les expressions des opérateurs présentés dans cette section ne sont pas exigibles ; en cas de besoin, un énoncé les rappellerait. En revanche, les relations entre opérateurs, ainsi que les théorèmes de Stokes-Ampère et de Green-Ostrogradski sont à connaître.

#### 3.1.1 Opérateurs en coordonnées cartésiennes

Soit  $f(x, y, z)$  un champ scalaire et soit  $\vec{V}(x, y, z)$  un champ vectoriel :

$$\vec{V}(x, y, z) = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z$$

dont les composantes  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  dépendent des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  du point de mesure  $M(x, y, z)$ . On définit les opérateurs vectoriels :

- **gradient de  $f$  :**

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

- **divergence de  $\vec{V}$  :**

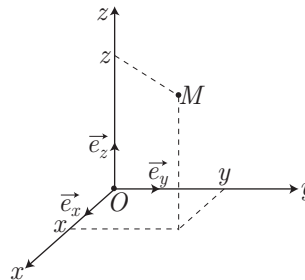
$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- **rotationnel de  $\vec{V}$  :**

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

- **Laplacien de  $f$  ou de  $\vec{V}$  :**

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \text{ et } \Delta \vec{V} = (\Delta V_x) \vec{e}_x + (\Delta V_y) \vec{e}_y + (\Delta V_z) \vec{e}_z$$



### 3.1.2 Opérateurs en coordonnées cylindriques

Soit  $M$  un point de l'espace repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

dont dépendent un champ scalaire  $f(r, \theta, z)$  et un champ vectoriel  $\vec{V}(r, \theta, z) = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z$ . Les opérateurs vectoriels sont alors :

- le gradient de  $f$

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

- la divergence de  $\vec{V}$  :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- le rotationnel de  $\vec{V}$  :

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left( \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

- le Laplacien de  $f$  et de  $\vec{V}$  :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

et :

$$\Delta \vec{V} = \begin{cases} \Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \Delta V_z \end{cases}$$

### 3.1.3 Opérateurs en coordonnées sphériques

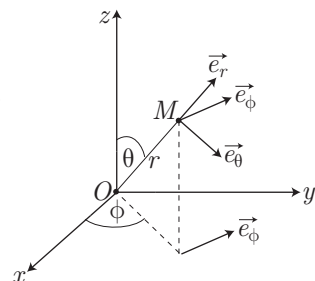
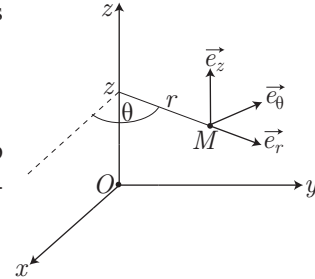
Un champ scalaire  $f(r, \theta, \phi)$  ou un champ vectoriel :

$$\vec{V}(r, \theta, \phi) = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\phi \vec{e}_\phi$$

dépendent du point  $M$  où ils sont repérés par leurs coordonnées sphériques  $r, \theta$  et  $\phi$ . Les opérateurs vectoriels correspondants sont :

- le gradient de  $f$  :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$



- la divergence de  $\vec{V}$  :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

- le rotationnel de  $\vec{V}$  : avec :

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial (\sin \theta V_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right] \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r V_\phi)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \end{pmatrix}$$

- le Laplacien de  $f$  :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r f)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

À nouveau, le Laplacien du champ vectoriel  $\vec{V}$  est défini par :

$$\Delta \vec{V} = \begin{pmatrix} \Delta V_r - \frac{2 V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta V_\theta = \frac{V_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta V_\phi = \frac{V_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

### 3.1.4 L'opérateur vectoriel *nabla*

En coordonnées cartésiennes, on définit l'opérateur vectoriel *nabla* ( $\vec{\nabla}$ ) par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

Ainsi, le gradient, la divergence, le rotationnel et le Laplacien de champs scalaires ou vectoriels apparaissent comme des opérations géométriques simples :

- le gradient d'un champ scalaire  $f$  se présente comme une multiplication :

$$\vec{\operatorname{grad}} f \equiv \vec{\nabla} f$$

- la divergence d'un champ vectoriel  $\vec{V}$  apparaît comme un produit scalaire :

$$\operatorname{div} \vec{V} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

- le rotationnel d'un champ vectoriel  $\vec{V}$  est assimilable à un produit vectoriel :

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{V} \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$

- le Laplacien d'un champ scalaire  $f$  peut s'écrire à l'aide du carré scalaire de  $\vec{\nabla}$  :

$$\Delta f = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f = \vec{\nabla}^2 f$$

ou d'un produit scalaire :

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f)$$

- le Laplacien d'un champ vectoriel  $\vec{V}$  ne peut, quant à lui, s'exprimer qu'à l'aide du carré scalaire de  $\vec{\nabla}$  :

$$\Delta \vec{V} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

### 3.1.5 Relations entre opérateurs

L'introduction de l'opérateur *nabla* conduit rapidement aux relations suivantes, où  $f$  et  $g$  sont des champs scalaires,  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  des champs vectoriels :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) &= \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0} \\ \operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}) &= 0 \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0 \end{aligned}$$

de même que :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V}) = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{V}) - \Delta \vec{V} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

On pourra également s'assurer que :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}}(f \times g) = f \overrightarrow{\operatorname{grad}} g + g \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(f \times \vec{V}) = f \operatorname{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} f \quad (2)$$

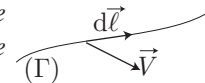
$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(f \times \vec{V}) = f \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} + (\overrightarrow{\operatorname{grad}} f) \wedge \vec{V} \quad (3)$$

$$\operatorname{div}(\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{U} - \vec{U} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} \quad (4)$$

### 3.1.6 Circulation et flux d'un vecteur

#### 3.1.6.1 Circulation d'un champ vectoriel

**Définition 1** Soit  $d\vec{\ell}$  un déplacement élémentaire le long d'une courbe  $(\Gamma)$ . On appelle *circulation* ( $\mathcal{C}$ ) d'un champ vectoriel  $\vec{V}$  le long de  $(\Gamma)$  l'intégrale :



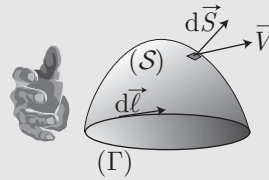
$$\mathcal{C} = \int_{(\Gamma)} \vec{V} \cdot d\vec{\ell}$$



**Théorème de Stokes-Ampère**

Soit  $(\Gamma)$  une courbe fermée, sur laquelle prend appui une surface  $(S)$  et soit  $d\vec{S}$  un élément orienté de  $S$ . Pour tout champ vectoriel  $\vec{V}$ , on montre que :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} (\text{rot } \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$



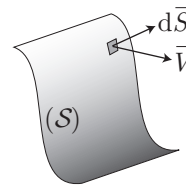
L'orientation de la surface  $d\vec{S}$  est déterminée par la « règle de la main droite » : l'ensemble des doigts de la main droite tournant dans le sens de parcours de  $(\Gamma)$ , le pouce tendu indique le sens de  $d\vec{S}$ .

**3.1.6.2 Flux d'un champ vectoriel**

**Définition 2**

Soit  $d\vec{S}$  un élément d'une surface  $(S)$  et soit  $\vec{V}$  un champ vectoriel. Le flux  $\Phi_S$  de  $\vec{V}$  à travers  $(S)$  est défini par :

$$\Phi_S = \iint_{(S)} \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

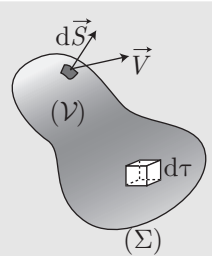


**Théorème de Green-Ostrogradski**

Soit  $(\Sigma)$  une surface fermée et  $d\vec{S}$  un élément de  $(\Sigma)$ , orienté vers l'extérieur du volume  $(V)$  circonscrit par  $(\Sigma)$ . On montre que :

$$\Phi_\Sigma = \oiint_{(\Sigma)} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{V} \cdot d\tau$$

où  $d\tau$  désigne un élément de  $(V)$ .



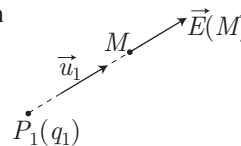
**3.2 Électrostatique**

**3.2.1 Loi de Coulomb**

**3.2.1.1 Champ créé par des charges**

Soit un point  $P_1$ , portant une charge  $q_1$ . Cette charge crée en un point  $M$  un champ électrique :

$$\vec{E}(M) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 P_1 M^3} \overrightarrow{P_1 M} \text{ (en } V \cdot m^{-1}\text{)}$$



où  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} F \cdot m^{-1}$  est la permittivité électrique du vide.

Si  $\vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{P_1M}}{P_1M}$  désigne le vecteur unitaire de  $\overrightarrow{P_1M}$ , l'expression du champ est aussi écrite :

$$\vec{E}(M) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 P_1M^2} \vec{u}_1$$

Soit un ensemble de  $n$  points portant les charges respectives  $q_i$ . Chacun de ces points crée en  $M$  un champ électrique :

$$\vec{E}_i(M) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_iM^3} \overrightarrow{P_iM}$$

tandis que le champ électrique produit en  $M$  par la totalité de ces points vaut :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 P_iM^3} \overrightarrow{P_iM}$$

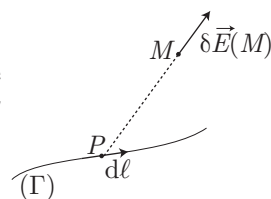
Les charges électriques peuvent également être distribuées de manière continue.

- Soit une courbe  $(\Gamma)$  chargée. Chaque élément  $d\ell$  de  $(\Gamma)$  porte une charge  $\delta q$  à l'origine de la définition de la densité linéique de charges :

$$\lambda = \frac{\delta q}{d\ell} \Rightarrow \delta q = \lambda d\ell$$

Étant donné que  $d\ell$  est infiniment petit, on considère que cet élément s'identifie à un point  $P$  portant la charge  $\delta q$  et qui produit en  $M$  le champ :

$$\delta\vec{E}(M) = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM} = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM}$$



Le champ total produit en  $M$  par  $(\Gamma)$  est alors la somme des contributions  $\delta\vec{E}(M)$  de tous les points  $P$  de  $(\Gamma)$  :

$$\vec{E}(M) = \int_{(\Gamma)} \frac{\lambda(P)}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \overrightarrow{PM} d\ell$$

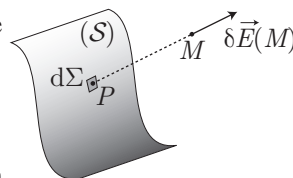
⚠ Le champ peut ainsi être calculé en tout point, sauf ceux qui appartiennent à  $(\Gamma)$ .

- Soit une surface  $(S)$  chargée. Cette surface peut être décomposée en surfaces élémentaires  $d\Sigma$ , centrées sur des points  $P$  de  $(S)$ , portant la charge  $\delta q$  calculable à partir de la densité surfacique  $\sigma(P)$  en chaque point  $P$  :

$$\sigma(P) = \frac{\delta q}{d\Sigma} \Rightarrow \delta q = \sigma(P) d\Sigma$$

Chaque point  $P$  crée ainsi en  $M$  un champ électrique élémentaire :

$$\delta\vec{E}(M) = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM} = \frac{\sigma(P) d\Sigma}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM}$$



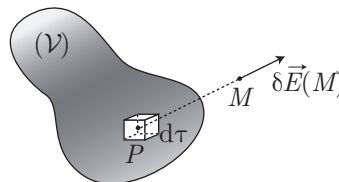
Le champ total produit en  $M$  par  $(S)$  est alors la somme de toutes les contributions  $\delta\vec{E}(M)$  étendue à tous les points de  $(S)$  :

$$\vec{E} = \iint_{(S)} \frac{\sigma(P)}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM} dS$$

- Soit  $(V)$  un volume chargé, décomposable en éléments de volume  $d\tau$  centrés sur des points  $P$  de  $(V)$  et portant la charge  $\delta q$ .

La densité volumique de charges en  $P$  étant définie par :

$$\rho(P) = \frac{\delta q}{d\tau} \Rightarrow \delta q = \rho(P) d\tau$$



le champ élémentaire créé en  $M$  par  $P$  vaut :

$$\delta\vec{E}(M) = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM} = \frac{\rho(P) d\tau}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \overrightarrow{PM}$$

et le champ total  $\vec{E}(M)$  créé par  $(V)$  est la résultante de toutes les contributions  $\delta\vec{E}(M)$  des points  $P$  de  $(V)$  :

$$\vec{E}(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)}{4\pi\epsilon_0 PM^3} d\tau$$

L'additivité des champs vectoriels permet d'énoncer le *théorème de superposition* :

Si une distribution de charges  $(D)$  peut être décomposée en  $n$  distributions  $(D_i)$ , créant chacune en  $M$  un champ électrique  $\vec{E}_i(M)$ , le champ  $\vec{E}(M)$  créé par  $(D)$  vaut :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i(M)$$

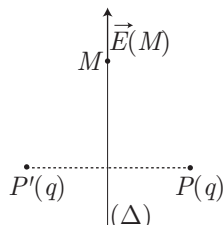
Pour des répartitions continues de charges, ce théorème devient :

$$\vec{E}(M) = \int_{\text{distribution}} \delta\vec{E}$$

où l'intégrale est simple, double ou triple, selon la modélisation retenue pour la distribution de charges.

### 3.2.1.2 Symétries

**Définition 3** Un axe  $(\Delta)$  est appelé *axe de symétrie électrostatique* si tout couple de points  $\{P, P'\}$ , géométriquement symétriques par rapport  $(\Delta)$ , portent des charges identiques.



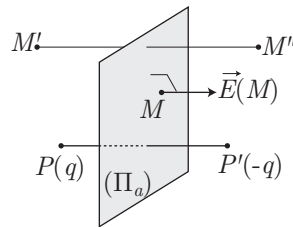
Dans ce cas :

le champ électrique  $\vec{E}(M)$ , produit par la distribution de charges sur un point de  $(\Delta)$ , est colinéaire à l'axe  $(\Delta)$

**Définition 4** Soient  $P$  et  $P'$  deux points géométriquement symétriques par rapport à un plan  $(\Pi_a)$  et portant des charges  $q$  et  $q' = -q$ . Le plan  $(\Pi_a)$  est alors un plan d'antisymétrie électrostatique pour l'ensemble des couples de points  $\{P, P'\}$ .

On montre que, dans ces conditions :

le champ électrique produit, en tout point  $M$  d'un plan  $(\Pi_a)$  d'antisymétrie électrostatique, est perpendiculaire à  $(\Pi_a)$ .



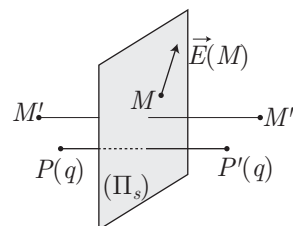
Remarque – On montre également que si deux points  $M'$  et  $M''$  sont symétriques par rapport à un plan d'antisymétrie électrostatique, les champs  $\vec{E}(M')$  et  $\vec{E}(M'')$  vérifient :

$$\vec{E}(M'') = -\text{sym} \left\{ \vec{E}(M') \right\} \text{ pour } M'' = \text{sym} \{ M' \}$$

**Définition 5** Soient  $P$  et  $P'$  deux points géométriquement symétriques par rapport à un plan  $(\Pi_s)$  ; le plan  $(\Pi_s)$  est appelé plan de symétrie électrostatique si les charges  $q$  et  $q'$ , portées par tout couple  $\{P, P'\}$ , sont identiques.

On montre que :

le champ électrique produit par une distribution  $(\mathcal{D})$  de charges, en tout point  $M$  d'un plan de symétrie électrostatique  $(\Pi_s)$ , appartient à  $(\Pi_s)$ .



Remarque – Si  $M'$  et  $M''$  sont deux points symétriques par rapport à un plan de symétrie électrostatique, on montre aussi que les champs  $\vec{E}(M')$  et  $\vec{E}(M'')$  qui y règnent sont symétriques par rapport à ce plan :

$$\vec{E}(M'') = \text{sym} \left\{ \vec{E}(M') \right\} \text{ pour } M'' = \text{sym} \{M'\}$$



Pour déterminer la direction du champ électrique  $\vec{E}$  produit en un point  $M$  par une distribution ( $\mathcal{D}$ ) de charges :

- chercher, dans un premier temps, s'il existe un axe ( $\Delta$ ) de symétrie électrostatique passant par  $M$  ; dans ce cas :  $\vec{E}(M) \parallel (\Delta)$ .
- sinon, chercher si  $M$  appartient à un plan ( $\Pi_a$ ) d'antisymétrie électrostatique pour ( $\mathcal{D}$ ). S'il existe :  $\vec{E}(M) \perp (\Pi_a)$ .
- à défaut d'un plan d'antisymétrie ou d'un axe de symétrie, trouver un plan ( $\Pi_s$ ) de symétrie pour ( $\mathcal{D}$ ), passant par  $M$ . Le cas échéant,  $\vec{E}(M)$  appartient à ( $\Pi_s$ ) mais, pour autant, la direction de  $\vec{E}(M)$  n'est pas encore accessible. Il faut alors trouver un autre plan ( $\Pi'_s$ ) de symétrie électrostatique pour ( $\mathcal{D}$ ), passant par  $M$ . Dans ce cas, la direction de  $\vec{E}(M)$  est celle de l'intersection de ( $\Pi_s$ ) et ( $\Pi'_s$ ).

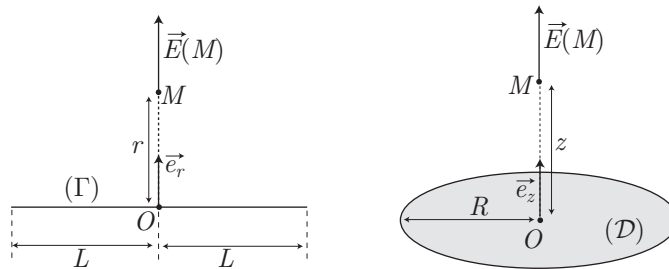
**⚠** Les éléments de symétrie (axes ou plans) doivent nécessairement contenir le point  $M$  où est déterminée la direction du champ  $\vec{E}(M)$ .

Cet algorithme peut être employé au calcul de champs électriques produits par des distributions de géométries simples, telles que celui produit sur l'axe médiateur d'un segment de longueur  $2L$  situé à une distance  $r$  de  $M$ , portant une densité linéique  $\lambda$  de charges uniforme (cf. exercice de la page 387) :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \times \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \vec{e}_r \quad (5)$$

ou celui produit par un disque uniformément chargé, avec une densité surfacique ( $\sigma$ ), en un point  $M$  de son axe :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z \quad (6)$$



Un plan infini peut être modélisé par un disque de rayon infini, qui crée le champ  $\vec{E}_\infty(M)$  tel que :

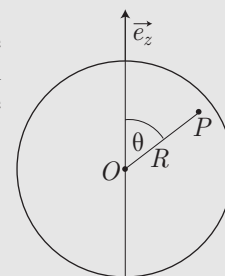
$$\vec{E}_\infty(M) = \lim_{R \rightarrow \infty} [\vec{E}(M)] \Rightarrow \vec{E}_\infty(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \frac{z}{|z|} \vec{e}_z \quad (7)$$

Remarque – En tout point de distributions linéiques ou surfaciques de charges, le champ électrique n'est pas défini. En revanche, il est possible de le calculer à l'intérieur d'une distribution volumique de charges.



On considère une sphère ( $\mathcal{S}$ ) de centre  $O$ , de rayon  $R$  et d'axe vertical ( $Oz$ ) de vecteur directeur unitaire  $\vec{e}_z$ . ( $\mathcal{S}$ ) est chargé en surface avec une densité  $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$  où  $\sigma_0$  est une constante et où  $\theta = (\vec{OP}, \vec{e}_z)$ .

1. Calculer la charge totale portée par la sphère.
2. Calculer le champ électrique  $\vec{E}(O)$  qu'elle produit en  $O$ .



#### RÉPONSE

1. Soit une couronne contenant le point  $P(R, \theta, \phi)$ , de largeur  $R d\theta$ , située sur la surface de ( $\mathcal{S}$ ). Tout élément de cette couronne, centré sur  $P$ , présente une surface  $dS = R d\theta \times R \sin \theta d\phi$  et donc une charge élémentaire :

$$\delta q = \sigma dS = \sigma_0 R^2 \times \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi$$

Aussi, la charge totale portée par ( $\mathcal{D}$ ) vaut :

$$\begin{aligned} q &= \iint_{(\mathcal{D})} \delta q = \sigma_0 R^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \\ &= \sigma_0 R^2 \int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= 2\pi \sigma_0 R^2 \times \left[ -\frac{\cos(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

2. Tout point  $P$  de ( $\mathcal{S}$ ) admet un symétrique  $P''$  par rapport à l'axe ( $Oz$ ), qui porte la même charge, ce qui signifie que l'axe ( $Oz$ ) est un axe de symétrie électrostatique et donc que le champ électrique produit en  $O$  est colinéaire à l'axe ( $Oz$ ) :

$$\vec{E}(O) = E(O) \vec{e}_z$$

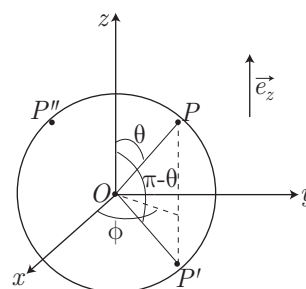
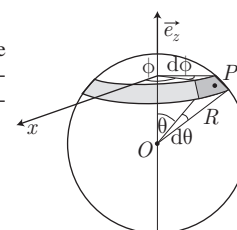
Bien que la méthode employée ci-dessus soit la plus efficace, il est intéressant de retrouver ce résultat en exploitant les éventuels plans d'antisymétrie des charges ; cet exercice illustre un exemple d'utilisation de ces plans, auquel cas il convient de procéder de la manière suivante :

Soient  $P$  et  $P'$  deux points symétriques par rapport au plan ( $Oxy$ ),  $P$  est repéré par  $\theta$ ,  $P'$  par  $\pi - \theta$ . Aussi, en notant  $\sigma(P) = \sigma_0 \cos \theta$ , on obtient :

$$\sigma(P') = \sigma_0 \cos(\pi - \theta) = -\sigma_0 \cos \theta = -\sigma(P)$$

ce qui fait du plan ( $Oxy$ ) un plan d'antisymétrie électrostatique. Par conséquent :

$$\vec{E}(O) = E(O) \vec{e}_z \Rightarrow E(O) = \vec{E}(O) \cdot \vec{e}_z \quad (8)$$



Un élément  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ , centré sur  $P$ , porte la charge  $\delta q = \sigma dS$  responsable de l'apparition d'un champ électrique en  $O$  :

$$\begin{aligned} \delta \vec{E}(O) &= \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PO^3} \vec{PO} = \frac{\sigma_0 R^2 \times \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{PO} \\ &= \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0 R} \times \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \vec{PO} \end{aligned}$$

Aussi, le champ électrique total produit en  $O$  vaut-il :

$$\vec{E}(O) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0 R} \iint_{(S)} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \vec{PO}$$

Or, conformément au résultat (8) et puisque l'indépendance de  $\vec{e}_z$  à l'égard de la position du point  $P$  permet de distribuer le produit scalaire dans l'intégrale, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} E(O) &= \vec{E}(O) \cdot \vec{e}_z = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0 R} \iint_{(S)} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \underbrace{\vec{PO} \cdot \vec{e}_z}_{-R \cos \theta} \\ &= \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi -\sin \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \times 2\pi \times \left[ \frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^\pi \\ &= \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \times \frac{-2}{3} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\vec{E}(O) = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_z$$

### 3.2.1.3 Invariants

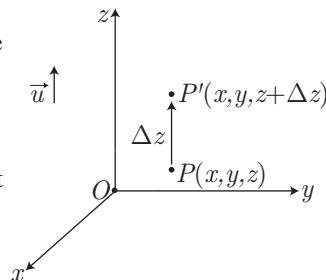
• **Invariance par translation**

Une distribution de charges  $\rho$  est dite invariante par translation dans la direction  $\vec{u}$  si :

$$\rho(x, y, z + \Delta z) = \rho(x, y, z)$$

Dans ces conditions, la norme du champ  $\vec{E}$  est aussi indépendante de la variable  $z$  :

$$E(x, y, z) \equiv E(x, y)$$



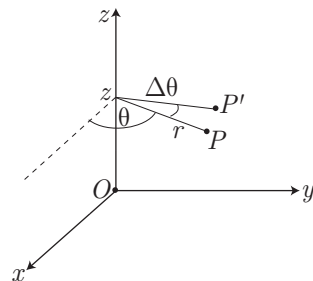
• **Invariance par rotation autour d'un axe**

Une distribution  $\rho$  de charges est dite invariante par rotation autour de l'axe ( $Oz$ ) si :

$$\rho(r, \theta + \Delta\theta, z) = \rho(r, \theta, z)$$

ce qui permet d'écrire :

$$E(r, \theta, z) \equiv E(r, z)$$



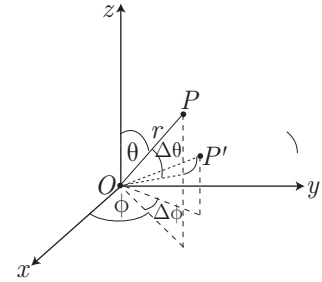
• **Invariance par rotation autour d'un point**

Une distribution  $\rho$  est dite invariante par rotation autour d'un point  $O$  si :

$$\rho(r, \theta + \Delta\theta, \phi + \Delta\phi) = \rho(r, \theta, \phi)$$

Il s'ensuit que :

$$E(r, \theta, \phi) \equiv E(r)$$



### 3.2.2 Équation de Maxwell-Gauss

#### 3.2.2.1 Théorème de Gauss

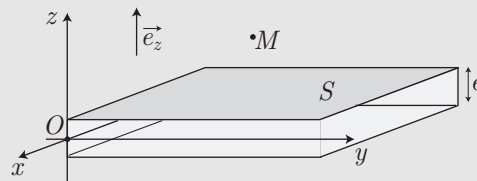
Si, en un point  $M$ , se trouve une densité volumique de charges  $\rho(M)$ , le champ électrique  $\vec{E}(M)$  en  $M$  vérifie l'équation locale de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0}$$



Une plaque, dont les faces parallèles au plan  $(Oxy)$  ont une surface  $S$  supposée très grande, contient des charges électriques de densité volumique  $\rho$  uniforme.

Les deux plaques sont espacées d'une distance  $e$  et sont situées en  $z = +\frac{e}{2}$  et en  $z = -\frac{e}{2}$ .



1. Déterminer les caractéristiques (direction et variables) du champ électrique  $\vec{E}(M)$  produit en tout point  $M(x, y, z)$  de l'espace par cette distribution de charges.
2. En déduire l'expression de  $\vec{E}(M)$  entre les plaques ( $|z| < \frac{e}{2}$ ).
3. On admet la continuité de  $\vec{E}$  à la traversée de chacune des faces. Exprimer, dans ces conditions,  $\vec{E}(z \geq \frac{e}{2})$  et  $\vec{E}(z \leq -\frac{e}{2})$  en supposant vide l'espace extérieur aux plaques.
4. On fait tendre  $e$  vers zéro, en maintenant constante la charge totale ; on modélise ainsi un plan chargé en surface, avec une densité  $\sigma$ . Après avoir exprimé  $\sigma$  en fonction de  $\rho$  et  $e$ , retrouver les champs :

$$\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

RÉPONSE



1. Tout axe  $(\Delta)$  passant par  $M$  parallèlement à l'axe  $(Oz)$  est un axe de symétrie pour la distribution de charges, en raison de quoi  $\vec{E}(M)$  est colinéaire à  $(\Delta)$  et donc à  $\vec{e}_z$  :  $\vec{E}(M) = E \vec{e}_z$ . En outre, puisque la plaque peut être considérée comme infinie selon les directions de  $(Ox)$  et  $(Oy)$ , les paramètres  $x$  et  $y$  laissent invariante la distribution de charges ; la norme  $E$  du champ ne dépend que de  $z$  :

$$\vec{E}(M) = E(z) \times \vec{e}_z$$

2. En raison du théorème local de Gauss, on trouve entre les plaques :

$$\text{div} [\vec{E}(M)] = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{dE}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

ce qui montre l'existence d'une constante  $K$  telle que :

$$E(z) = \frac{\rho}{\epsilon_0} z + K$$

De plus, lorsque  $M$  se trouve dans le plan  $(Oxy)$ , ce plan est un plan de symétrie pour la distribution de charges, auquel cas  $\vec{E}(z = 0)$  appartient à ce plan. Or,  $\vec{E}(z = 0)$  est également colinéaire à l'axe  $(\Delta)$  parallèle à  $(Oz)$ . Donc  $\vec{E}(z = 0)$  appartient simultanément au plan  $(Oxy)$  et à l'axe  $(Oz)$ , c'est-à-dire à leur intersection, qui se réduit à un point :

$$\vec{E}(z = 0) = \vec{0} \Rightarrow K = 0 \Rightarrow E(z) = \frac{\rho}{\epsilon_0} z \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho}{\epsilon_0} z \vec{e}_z$$

3. La continuité de  $\vec{E}(M)$  à la traversée des plaques se traduit par :

$$\lim_{z \rightarrow e/2} [E(z)] = E\left(\frac{e}{2}\right) \Rightarrow E\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{\rho e}{2\epsilon_0}$$

et :

$$\lim_{z \rightarrow -e/2} [E(z)] = E\left(-\frac{e}{2}\right) \Rightarrow E\left(-\frac{e}{2}\right) = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0}$$

En outre, pour  $|z| \geq \frac{e}{2}$ , le théorème local de Gauss stipule que :

$$\text{div} [\vec{E}(M)] = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \frac{dE_z}{dz} = 0 \Rightarrow E(z) = \text{cte}$$

c'est pourquoi :

$$\vec{E}\left(z \geq \frac{e}{2}\right) = \frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}\left(z \leq -\frac{e}{2}\right) = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \tag{9}$$

4. La charge totale  $Q = \rho \times S e$  de la distribution ne varie pas tandis que  $e$  devient de plus en plus petit ; la plaque est alors assimilée à un plan de densité surfacique de charges :

$$\sigma = \frac{Q}{S} = \rho e$$

Ce faisant, les résultats (9) deviennent :

$$\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

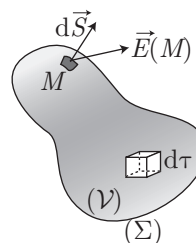
### 3.2.2.2 Théorème de Gauss

Soit  $(V)$  un volume contenant la charge :

$$q_{\text{int}} = \iiint_{(V)} \rho \, d\tau$$

et qui est limité par une surface fermée  $(\Sigma)$ . Le flux de  $\vec{E}$  à travers  $(\Sigma)$  est défini à partir du champ  $\vec{E}(M)$  en chaque point  $M$  de  $(\Sigma)$  :

$$\Phi_{\Sigma} = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$$



c'est-à-dire, compte tenu du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} \operatorname{div} \vec{E} d\tau = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau \text{ car } \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

C'est ainsi que l'on retrouve la forme intégrale du théorème de Gauss :

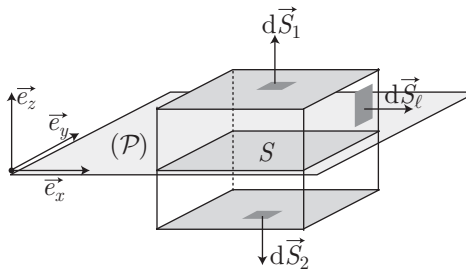
$$\Phi_{\Sigma} = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad (10)$$



L'emploi de la relation (10) en vue de calculer le champ  $\vec{E}(M)$  créé en  $M$  par une distribution ( $\mathcal{D}$ ) de charges doit respecter l'algorithme suivant :

- déterminer la direction de  $\vec{E}(M)$  en  $M$  ainsi que les éventuels invariants de ( $\mathcal{D}$ ) ;
- trouver une surface fermée ( $\Sigma$ ) qui contient  $M$  et sur laquelle  $E(M) = \|\vec{E}(M)\|$  est souvent constant (généralement, ( $\Sigma$ ) présente les mêmes symétries que ( $\mathcal{D}$ )) ;
- s'assurer que pour tout point  $M$  de ( $\Sigma$ ),  $\vec{E}(M) \cdot d\vec{S}$  s'exprime de manière simple (les cas fréquemment rencontrés sont :  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E(M) \times dS$  ou  $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ ) ;
- calculer  $\Phi_{\Sigma}$  à travers ( $\Sigma$ ) ;
- déterminer la charge  $q_{\text{int}}$  contenue dans le volume ( $\mathcal{V}$ ) circonscrit dans ( $\Sigma$ ) ;
- utiliser enfin la relation (10).

Le théorème de Gauss peut ainsi être employé au calcul du champ électrique produit par une distribution de charges de géométrie simple, comme celui produit par un plan  $\mathcal{P}$  infini, portant une charge uniforme, de densité surfacique  $\sigma = \text{cte}$ .



Tout axe perpendiculaire à ( $\mathcal{P}$ ) est un axe de symétrie pour cette distribution de charges, auquel cas le champ  $\vec{E}$  qu'elle produit est colinéaire à  $\vec{e}_z \perp (\mathcal{P})$  :  $\vec{E} = E \times \vec{e}_z$ . De plus, toute translation de ( $\mathcal{P}$ ) dans les directions de  $\vec{e}_x$  ou de  $\vec{e}_y$  laisse invariante la distribution de charges, ce qui signifie que  $E$  ne dépend que de la cote  $z$  de ( $\mathcal{P}$ ) :

$$\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$$

On désigne alors par ( $\Sigma$ ) la surface fermée composée des surfaces  $S_1 = S$  et  $S_2 = S$  parallèles à ( $\mathcal{P}$ ) et des quatre faces, de surface totale  $S_l$ , perpendiculaires à ( $\mathcal{P}$ ). Le

flux de  $\vec{E}$  à travers  $(\Sigma)$  vaut ainsi :

$$\Phi_{\Sigma} = \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \underbrace{\iint_{(S_{\ell})} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\ell}}_{=0} \text{ car } \vec{E} \perp d\vec{S}_{\ell}$$

et où  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = E(z) dS_1$ ,  $\vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = -E(-z) dS_2 = E(z) dS_2$  car  $d\vec{S}_2 = -dS_2 \vec{e}_z$  tandis que  $E(-z) = -E(z)$  pour des raisons de symétrie. C'est pourquoi :

$$\Phi_{\Sigma} = 2 E(z) \times S$$

tandis que la charge  $q_{\text{int}}$  comprise dans  $(\Sigma)$  coïncide avec celle portée par une surface  $S$  de  $(\mathcal{P})$  :  $q_{\text{int}} = \sigma S$ . Par conséquent, le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2 E(z) \times S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

d'où l'on déduit que :

$$\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z \quad (11)$$

Remarque – Ce résultat montre que le champ électrique n'est pas défini en un point de la surface chargée ; il subit une discontinuité à la traversée de cette surface.

### 3.2.3 Équation de Maxwell-Faraday

#### 3.2.3.1 Équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire

Cette équation établit qu'en régime stationnaire (c'est-à-dire si le temps n'intervient pas dans les phénomènes physiques), le champ électrostatique vérifie, en tout point de l'espace :

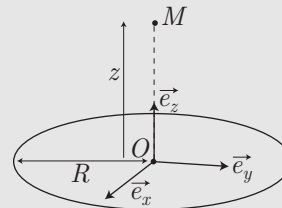
$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \quad (\text{Maxwell-Faraday})$$



On rappelle que le champ produit par une disque uniformément chargé, sur un point  $M$  de son axe  $(O, \vec{e}_z)$ , est donné par la relation (6) de la page 325 :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} \left( \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \vec{e}_z$$

Calculer, par une méthode directe,  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(M)$ .



RÉPONSE La formule du rotationnel, en coordonnées cartésiennes, doit être connue des étudiants de classe préparatoire :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

où  $E_x$ ,  $E_y$  et  $E_z$  sont les composantes de  $\vec{E}(M)$  :

$$\vec{E}(M) = E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z$$

En remarquant ici que seul  $E_z$  et non nul, on simplifie le calcul du rotationnel :

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{e}_x = \vec{0}$$

car  $E_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left( \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} \right)$  est indépendant de  $x$  et  $y$ .

### 3.2.3.2 Potentiel électrostatique

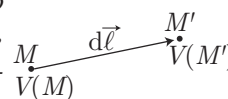
Étant donné que, pour tout champ scalaire  $V$  :  $\text{rot}(\text{grad } V) = \vec{0}$ , l'équation de Maxwell-Faraday montre qu'il existe une fonction  $V(M)$  telle que :

$$\vec{E}(M) = -\text{grad } V(M) \Leftrightarrow \text{rot } \vec{E}(M) = \vec{0}$$

La fonction  $V(M)$  est alors appelée *potentiel électrique* au point  $M$ , dont dérive le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  au même point.

**Remarque** – De l'équation  $\vec{E}(M) = -\text{grad } V(M)$  découle la non unicité de la fonction  $V(M)$ , qui peut être définie à une constante arbitraire près. De manière générale, cette constante sera calculée à partir de conditions limites imposées ou suggérées par les énoncés.

**Définition 6** Soient  $V(M')$  et  $V(M)$  les valeurs d'un champ scalaire  $V$  aux points respectifs  $M'$  et  $M$ , infiniment proches, tels que  $\overrightarrow{MM'} = d\vec{\ell}$ . La variation  $dV = V(M') - V(M)$  définit le gradient du champ  $V$  en  $M$  :



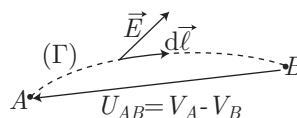
$$dV = \text{grad } V \cdot d\vec{\ell}$$

**Définition 7** On appelle *tension*  $U_{AB}$  entre deux points  $A$  et  $B$  la différence de potentiel entre  $A$  et  $B$  :

$$U_{AB} = V(A) - V(B) \text{ (en volts)}$$

La circulation  $\mathcal{C}_{AB}$  de  $\vec{E}$  le long de n'importe quelle courbe passant par  $A$  et  $B$  est définie par :

$$\mathcal{C}_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



avec :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B (\text{grad } V) \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B dV \Rightarrow \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_B = U_{AB}$$

**Remarque** – La circulation  $C_{AB} = V_A - V_B$  ne dépend pas du chemin liant les points  $A$  et  $B$ .

Si, de surcroît, le champ  $\vec{E}$  est uniforme le long d'une courbe  $(\Gamma)$  :

$$\int_{(\Gamma)} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \vec{E} \cdot \vec{AB} \Rightarrow U_{AB} = \vec{E} \cdot \vec{AB}$$

**⚠** Le résultat :  $C_{AB} = V_A - V_B$  n'est valable qu'en régime stationnaire. Dès que les paramètres physiques dépendent du temps, cette relation cesse d'être vraie. Notamment, nous montrerons ultérieurement que l'identité :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

ne sera plus vérifiée lorsque  $\vec{E}$  dépendra du temps.

**Définition 8** On appelle ligne de champ une ligne  $(\Gamma)$  en tout point  $M$  de laquelle le champ  $\vec{E}(M)$  est tangent à  $(\Gamma)$ .

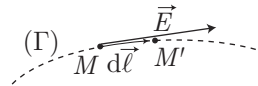


Pour déterminer l'expression d'une ligne de champ, il suffit de trouver les points  $M$  de l'espace qui vérifient :

$$\vec{E}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$$

**Remarque** – Soient deux points  $M$  et  $M'$  d'une même ligne de champ  $(\Gamma)$ , infiniment proches l'un de l'autre ( $\vec{MM}' = d\vec{\ell}$ ). Si  $V(M)$  et  $V(M')$  désignent la valeur du potentiel en  $M$  et en  $M'$ , l'égalité :

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -dV = V(M) - V(M')$$



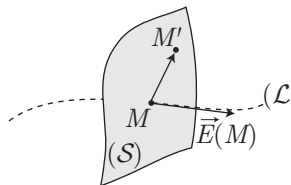
montre que si  $\vec{E}$  et  $d\vec{\ell} = \vec{MM}'$  ont le même sens,  $V(M) > V(M')$ . Ceci prouve que  $\vec{E}$  est toujours orienté dans le sens des potentiels décroissants.

**Définition 9** On appelle surface équipotentielle une surface dont tous les points possèdent le même potentiel électrique.

Soient  $M$  et  $M'$  deux points infiniment proches, qui appartiennent à une même surface équipotentielle  $(S)$ , ce qui signifie aussi que  $V(M') = V(M)$ .

On note  $(\mathcal{L})$  une ligne de champ qui coupe  $(S)$  en  $M$ . Par définition, le champ en  $M$  vérifie :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= -\vec{\text{grad}} V \\ \Rightarrow \vec{E}(M) \cdot \vec{MM}' &= (-\vec{\text{grad}} V) \cdot \vec{MM}' \\ \Rightarrow \vec{E}(M) \cdot \vec{MM}' &= V(M) - V(M') = 0 \\ \Rightarrow \vec{E}(M) &\perp \vec{MM}' \end{aligned}$$



Cette identité devant être vérifiée pour tout point  $M' \in (S)$ , alors que  $\vec{E}(M)$  est localement tangent à  $(\mathcal{L})$  en  $M$ , on en déduit que :

en leurs points d'intersection, les surfaces équipotentielles et les lignes de champs qui en dérivent sont perpendiculaires.

On retiendra, par ailleurs, que :

en l'absence de charge à l'infini, le potentiel électrique est conventionnellement choisi nul à l'infini.

### 3.2.3.3 Équation de Poisson

La relation de Maxwell-Gauss, associée à la définition du potentiel électrique :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ et } \vec{E} = -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V$$

conduisent à l'équation de Poisson :

$$\operatorname{div} \left( -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow -\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$



Dans l'espace règne un potentiel électrostatique à symétrie sphérique :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-r/a}$$

où  $a, q$  désignent des constantes et  $r$  la distance au centre du référentiel de cet espace.

1. Déterminer le champ électrique  $\vec{E}(M)$  créé en un point  $M$  de l'espace.
2. Déterminer la densité volumique de charges à l'origine du potentiel  $V(r)$ .

On rappelle qu'en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

et :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

#### RÉPONSE

1. Puisque  $V(r)$  ne dépend que de  $r$ , la définition du potentiel s'écrit :

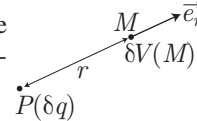
$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\overrightarrow{\operatorname{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-r/a}}{r} \right) \vec{e}_r \\ &\Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{ar} \right) e^{-r/a} \vec{e}_r \end{aligned}$$

2. De même, l'équation de Poisson fournit :

$$\begin{aligned} \rho &= -\varepsilon_0 \Delta V = -\frac{q}{4\pi r} \frac{d^2}{dr^2} \left( r \times \frac{e^{-r/a}}{r} \right) = \frac{q}{4\pi r} \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-r/a}}{a} \right) \\ &\Rightarrow \rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2} \times \frac{e^{-r/a}}{r} \end{aligned}$$

### 3.2.3.4 Calcul de potentiels

Soit  $P$  un point de l'espace, portant la charge  $\delta q$  responsable de l'apparition d'un champ électrique en un point  $M$  et donc d'un potentiel  $\delta V(M)$  :



$$\delta V(M) = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PM} \quad (12)$$

où  $\delta q = \lambda dl$ ,  $\delta q = \sigma dS$ ,  $\delta q = \rho d\tau$  selon que la distribution de charges est linéique, surfacique ou volumique.



Le calcul du potentiel électrique créé par une distribution ( $\mathcal{D}$ ) de charges peut s'effectuer de deux manières :

- l'intégration sur tous les points de ( $\mathcal{D}$ ) de la relation (12) :

$$V(M) = \int_{(\mathcal{D})} \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PM}$$

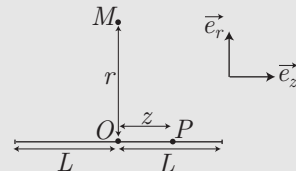
Cette relation ne permet pas le calcul de  $V(M)$  lorsqu'il existe des charges à l'infini ; elle diverge. Dans ce cas, pour déterminer  $V(M)$ , l'unique possibilité reste :

- la résolution des équations différentielles issues de la définition du potentiel ou de l'équation de Poisson :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \text{ ou } \Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$$



Un segment linéaire, de longueur  $2L$ , porte une charge répartie avec une densité linéique  $\lambda$  uniforme. Le point  $O$  désigne le centre de ce segment et on note  $M$  un point de la médiatrice du segment, tel que  $OM = r$



1. Soit  $P$  un point du segment chargé, tel que  $\overline{OP} = z$ , au voisinage duquel se trouve une charge  $\delta q$  répartie sur un élément de longueur  $dz$ . Déterminer l'expression du potentiel électrique  $\delta V(M)$  que  $\delta q$  produit en  $M$ .

En déduire l'expression du potentiel  $V(M)$  que crée la totalité du segment chargé en  $M$ .

2. En déduire le champ électrique  $\vec{E}(M)$  produit en  $M$  par cette distribution de charges ; on utilisera le système de coordonnées cylindriques de vecteurs de base  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ .

On rappelle que :

$$\text{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

RÉPONSE

1. Un élément  $dz$  du segment chargé, centré sur  $P$ , porte la charge  $\delta q = \lambda dz$ , responsable de l'apparition, en  $M$ , du potentiel :

$$\delta V(M) = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PM} = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}}$$

Aussi, le potentiel produit en  $M$  vaut :

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

Afin de calculer ce potentiel, effectuons le changement de variable :

$$z = r \sinh u \Rightarrow dz = r \cosh u du \text{ et } r^2 + z^2 = r^2 (1 + \sinh^2 u) = r^2 \cosh^2 u$$

avec :

$$u_1 = \operatorname{argsh} \left( -\frac{L}{r} \right) \text{ et } u_2 = \operatorname{argsh} \left( \frac{L}{r} \right)$$

de manière à poser :

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} &= \int_{u_1}^{u_2} \frac{r \cosh u du}{r \cosh u} = u_2 - u_1 \\ &= \operatorname{argsh} \left( \frac{L}{r} \right) - \operatorname{argsh} \left( -\frac{L}{r} \right) \\ &= \ln \left( \frac{L}{r} + \sqrt{1 + \frac{L^2}{r^2}} \right) - \ln \left( -\frac{L}{r} + \sqrt{1 + \frac{L^2}{r^2}} \right) \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\ln \left( \frac{L}{r} + \sqrt{1 + \frac{L^2}{r^2}} \right) = \ln \left[ \frac{1}{r} (L + \sqrt{r^2 + L^2}) \right]$$

et que :

$$\ln \left( -\frac{L}{r} + \sqrt{1 + \frac{L^2}{r^2}} \right) = \ln \left[ \frac{1}{r} (-L + \sqrt{r^2 + L^2}) \right]$$

de sorte que :

$$\int_{-L}^L \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \ln \left( \frac{L + \sqrt{r^2 + L^2}}{r} \right) - \ln \left( \frac{-L + \sqrt{r^2 + L^2}}{r} \right) \quad (13)$$

on déduit que :

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{L + \sqrt{r^2 + L^2}}{-L + \sqrt{r^2 + L^2}} \right)$$

**Remarque** – Lorsque  $L$  tend vers l'infini (fil infini),  $V(M)$  ne peut se déduire de cette relation, en référence au conseil méthodologique précédent.

2. En coordonnées cylindriques, la définition de  $V$  s'écrit :

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

où  $V(M)$  ne dépend que de  $r$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r = -\frac{d}{dr} \left[ \ln \left( \frac{L + \sqrt{r^2 + L^2}}{r} \right) - \ln \left( \frac{-L + \sqrt{r^2 + L^2}}{r} \right) \right] \times \frac{\lambda \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0} \\ &= -\left[ \frac{\frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}}}{L + \sqrt{r^2 + L^2}} - \frac{\frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}}}{-L + \sqrt{r^2 + L^2}} \right] \times \frac{\lambda \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0} \\ &= -\frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}} \times \left[ \frac{-2L}{-L^2 + (r^2 + L^2)} \right] \times \frac{\lambda \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0} \\ \Rightarrow \vec{E}(M) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{L}{r \sqrt{r^2 + L^2}} \vec{e}_r \end{aligned}$$



Remarque – Lorsque  $L$  tend vers l'infini :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$$

et la relation :  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  permet de remonter au potentiel créé par un fil infini :

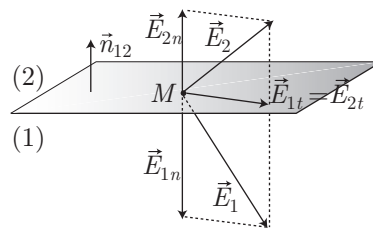
$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + \text{cte}$$

On remarque que ce potentiel ne peut être choisi nul en l'infini, étant donné l'existence de charges. On peut, en revanche, le supposer nul pour un point conventionnel ( $r = r_A$ ), auquel cas :

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_A}{r}\right)$$

### 3.2.3.5 Continuité du champ électrostatique

Considérons une surface ( $\mathcal{S}$ ) séparant deux milieux (1) et (2) où règnent les champs électriques  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  de composantes normales  $E_{1n}$ ,  $E_{2n}$  et de composantes tangentielles  $E_{1t}$ ,  $E_{2t}$  au voisinage d'un point  $M$  de ( $\mathcal{S}$ ).



En calculant la circulation de  $\vec{E}$  sur un parcours fermé qui passe dans (1) et (2), on montre que :

$$E_{2t} = E_{1t}$$

Cette relation montre que la composante tangentielle du champ électrique est continue lors du passage à travers toute surface.

De même, le calcul du flux à travers une surface interceptant  $\mathcal{S}$  montre que :

$$E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0}$$

Cette relation montre que la composante normale de  $\vec{E}$  subit une discontinuité à la traversée d'une surface chargée.

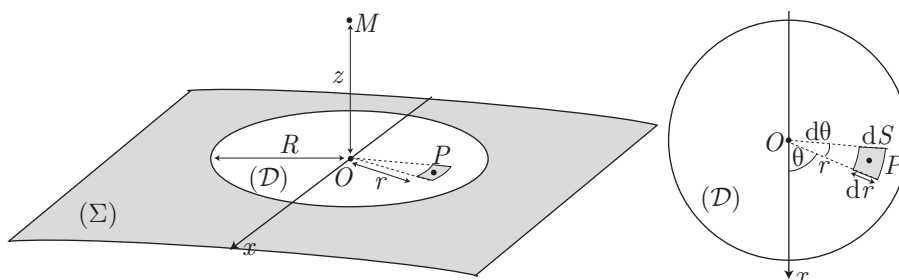
De ces deux relations, il découle qu'à la traversée de l'interface :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{12}(M)$$

où  $\vec{n}_{12}(M)$  est le vecteur unitaire normal à ( $\mathcal{S}$ ), dirigé vers le milieu (2).

### 3.2.3.6 Continuité du potentiel

Soit  $(\Sigma)$  une surface chargée, de densité surfacique  $\sigma$ . Considérons un point  $M$  n'appartenant pas à  $(\Sigma)$  et un point  $O$  son projeté orthogonal sur  $(\Sigma)$ , tel que  $OM = z$ .



Au voisinage de  $O$ , il est toujours possible de découper, par la pensée au moins, un disque  $(\mathcal{D})$  de centre  $O$  et de rayon  $R$  assez petit pour que  $(\mathcal{D})$  soit perpendiculaire à  $(OM)$ . On note  $(\mathcal{S})$  le complément de  $(\mathcal{D})$  à  $(\Sigma)$  :  $(\Sigma) = (\mathcal{S}) \cup (\mathcal{D})$ .

En l'absence de  $(\mathcal{D})$ , le point  $O$  se trouverait dans une région de l'espace vide de charge, auquel cas le champ électrique  $\vec{E}_1(O)$  en  $O$  existerait et serait simplement celui produit en  $O$  par les charges portées par  $(\mathcal{S})$ . Par suite, l'existence d'un champ  $\vec{E}_1(O)$  montre que le potentiel  $V_1$  produit par  $(\mathcal{S})$  est continu en  $O$ , sans quoi la relation  $\vec{E}_1(O) = -\text{grad } V_1(O)$  serait un non-sens mathématique. On peut rendre compte de cette continuité par la relation :

$$\lim_{M \rightarrow O} [V_1(M)] = V_1(O)$$

Soit, maintenant, un point  $P$  de  $(\mathcal{D})$ , repéré par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , au voisinage duquel une surface élémentaire  $dS_P = r d\theta \times dr$  contient une charge  $\delta q_P = \sigma(r, \theta) dS_P$ , laquelle charge produit en  $M$  et en  $O$  les potentiels :

$$\delta V_2(M) = \frac{\delta q_P}{4\pi\epsilon_0 PM} = \frac{\sigma(r, \theta) \times r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + z^2}}$$

et :

$$\delta V_2(O) = \frac{\delta q_P}{4\pi\epsilon_0 OP} = \frac{\sigma(r, \theta) \times r dr d\theta}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\sigma(r, \theta)}{4\pi\epsilon_0} dr d\theta$$

Ce faisant, les potentiels  $V_2(M)$  et  $V_2(O)$  produits par les charges situées sur  $\mathcal{D}$  valent :

$$V_2(M) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\sigma(r, \theta)}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{r dr d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} \text{ et } V_2(O) = \iint_{\mathcal{D}} \frac{\sigma(r, \theta)}{4\pi\epsilon_0} dr d\theta$$

Si  $R$  est assez petit pour que  $\sigma(r, \theta)$  soit uniforme du  $\mathcal{D}$ , ces relations conduisent à :

$$V_2(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \left( \sqrt{R^2 + z^2} - |z| \right)$$

et :

$$V_2(O) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dr = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0}$$

Il paraît alors évident que la fonction  $V_2$  est continue en  $O$  car :

$$\lim_{z \rightarrow 0} [V_2(M)] = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} = V_2(O) \Leftrightarrow \lim_{M \rightarrow O} [V_2(M)] = V_2(O)$$

Dans ce cas, le potentiel  $V = V_1 + V_2$  vérifie :

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow O} [V(M)] &= \lim_{M \rightarrow O} [V_1(M) + V_2(M)] = V_1(O) + V_2(O) \\ &\Rightarrow \lim_{M \rightarrow O} [V(M)] = V(O) \end{aligned}$$

ce qui signifie également que :

le potentiel est continu à la traversée d'une surface chargée avec une densité surfacique  $\sigma$  uniforme.

Remarque – Le résultat précédent s'étend au cas où  $\sigma(r, \theta)$  n'est pas uniforme, à condition toutefois que l'intégrale :  $V_2(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\mathcal{D}} \frac{\sigma(r, \theta) r \, dr \, d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}}$  soit uniformément convergente. Dans ce cas seulement, il sera possible d'écrire :

$$\lim_{z \rightarrow 0} \iint_{\mathcal{D}} \frac{\sigma(r, \theta) r \, dr \, d\theta}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \iint_{\mathcal{D}} \sigma(r, \theta) \, dr \, d\theta \Rightarrow \lim_{M \rightarrow O} [V_2(M)] = V_2(O)$$

Un raisonnement analogue permet de montrer que :

le potentiel est continu à la traversée d'un volume chargé avec une densité volumique  $\rho$  uniforme.

### 3.2.4 Énergie électrostatique

#### 3.2.4.1 Énergie d'une distribution de charges

Soient  $q_1$  et  $q_2$  deux charges localisées en des points  $M_1$  et  $M_2$  de l'espace. L'énergie potentielle du système ainsi constitué vaut :

$$\mathcal{E}_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2}$$

Aussi, en notant :  $V(M_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2}$  et  $V(M_2) = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 M_1 M_2}$  les potentiels que créent respectivement les charges  $q_2$  et  $q_1$  aux points  $M_1$  et  $M_2$  :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} [q_1 V(M_1) + q_2 V(M_2)]$$

Ce résultat se généralise à un système de  $n$  points  $M_i$  portant des charges  $q_i$  et se trouvant aux potentiels  $V(M_i)$  :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(M_i)$$

Lorsque les charges sont réparties dans une distribution continue ( $\mathcal{D}$ ), avec une densité volumique  $\rho$ , la loi précédente devient :

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \iiint_{(\mathcal{D})} \rho(M) V(M) d\tau \quad (14)$$

### 3.2.4.2 Énergie d'un champ électrostatique

On peut déduire de la relation (14) l'expression de l'énergie produite, dans l'espace, par un champ électrostatique :

$$\mathcal{E}_p = \iiint_{\text{espace}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau$$

Cette relation conduit à définir une densité volumique d'énergie  $u_E$  à partir de l'énergie  $d\mathcal{E}_p$  contenue dans un volume  $d\tau$  de l'espace :

$$u_E = \frac{d\mathcal{E}_p}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

## 3.2.5 Dipôle électrostatique

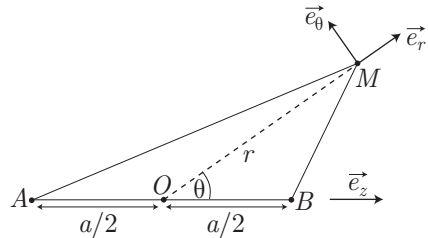
### 3.2.5.1 Potentiel et champ créés

**Définition 10** Soit  $A$  un point portant une charge  $-q$  et soit  $B$  un point portant une charge  $q$ ; ce couple est appelé dipôle électrostatique, auquel est associé le moment dipolaire  $\vec{p}$  est défini par :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{AB}$$



Considérons un dipôle électrostatique, dont le centre  $O$  est pris comme origine d'un repère polaire. Dans ce repère, un point  $M$  est repéré par  $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$ . Ce faisant :  $OA = OB = \frac{a}{2}$  et  $AB = a \Rightarrow \vec{p} = qa \vec{e}_z$ . En un point  $M$  très éloigné de  $O$  ( $r \gg a$ ), ce dipôle crée le potentiel :



$$\vec{p} = qa \vec{e}_z \Rightarrow p = \|\vec{p}\| = qa \Rightarrow V(M) = \frac{\|\vec{p}\|}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\cos\theta}{r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (15)$$

De ce potentiel dérive un champ  $\vec{E}(M)$  qui vérifie<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V &\Rightarrow E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \\ &\Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \text{ et } E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Les résultats fournis ici sont limités à l'ordre 1 en  $\frac{a}{r}$ ; certains exercices requièrent cependant une extension des calculs à des ordres supérieurs (ce cas se produit, notamment, lorsqu'à l'ordre choisi, apparaît le résultat dénué d'intérêt :  $V(M) = 0$ ).

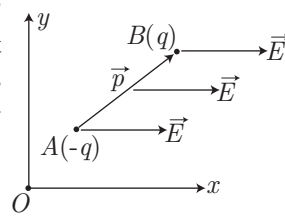
d'où il découle que :

$$\begin{cases} E_r = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

### 3.2.5.2 Dipôle dans un champ uniforme

Considérons un dipôle, de moment dipolaire  $\vec{p} = q \vec{AB}$  plongé dans un champ électrostatique  $\vec{E}$  uniforme. Soient  $\vec{f}_A = -q \vec{E}$  et  $\vec{f}_B = q \vec{E}$  les forces subies par les charges situées aux points  $A$  et  $B$  ; la résultante des forces électrostatiques qui s'appliquent sur le dipôle vaut :

$$\vec{F} = \vec{f}_A + \vec{f}_B = \vec{0}$$



Soit  $O$  un point fixe de l'espace. Les forces  $\vec{f}_A$  et  $\vec{f}_B$  sont à l'origine des moments, par rapport à  $O$  :

$$\vec{M}_O(\vec{f}_A) = \vec{OA} \wedge \vec{f}_A = -q \vec{OA} \wedge \vec{E}$$

et :

$$\vec{M}_O(\vec{f}_B) = \vec{OB} \wedge \vec{f}_B = q \vec{OB} \wedge \vec{E}$$

Aussi, le moment des forces électrostatiques en  $O$  est défini par :

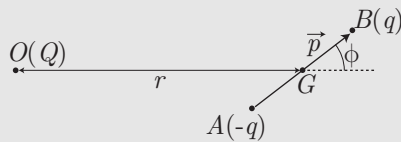
$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{M}_O(\vec{f}_A) + \vec{M}_O(\vec{f}_B) = q (\vec{OB} - \vec{OA}) \wedge \vec{E} = q \vec{AB} \wedge \vec{E} \\ \Rightarrow \vec{M}_O &= \vec{p} \wedge \vec{E} \end{aligned}$$

De surcroît, le dipôle plongé dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  acquiert l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \tag{16}$$



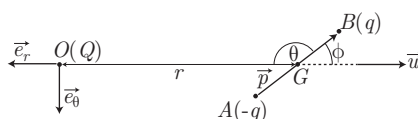
Une charge ponctuelle  $Q$  est placée en un point  $O$  de l'espace, tandis qu'un dipôle électrostatique, de moment dipolaire  $\vec{p} = q \vec{AB}$  (avec  $q > 0$ ) a son centre  $G$  placé à une distance  $r$  de  $O$ .



On supposera que  $r \gg AB$ , de sorte que le champ électrostatique créé par  $Q$  sur le dipôle est supposé uniforme :  $\vec{E}(A) = \vec{E}(B) = \vec{E}(G)$ . On note également  $\phi = (\vec{OG}, \vec{p})$ .

1. Rappeler l'expression du champ électrique  $\vec{E}(G)$  que la charge  $Q$  produit en  $G$ . En déduire l'expression de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{\text{dip}}$  du dipôle.
2. Que vaut le potentiel électrostatique  $V(O)$  que le dipôle produit en  $O$ ? En déduire l'expression de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_Q$  de la charge  $Q$ . Comparer  $\mathcal{E}_{\text{dip}}$  et  $\mathcal{E}_Q$ .
3. Comment s'oriente le dipôle en équilibre stable, selon que  $Q$  est positif ou négatif?

**RÉPONSE** Il convient de reprendre le schéma proposé par l'énoncé et d'y introduire une base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , d'origine  $G$ , afin de pouvoir exprimer le potentiel produit par le dipôle dans l'espace.



1. Compte tenu de cette représentation, le champ électrique que la charge  $Q$  produit en  $G$  vaut :

$$\vec{E}(G) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \text{ avec } \vec{u} = \frac{\vec{OG}}{OG}$$

Ce faisant, l'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle et le champ produit par  $Q$  est donnée par la relation (16) :

$$\mathcal{E}_{\text{dip}} = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -\frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \phi$$

2. Le choix de la base polaire  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  a été motivé par le souci d'utiliser l'expression (15) du potentiel  $V(O)$  que le dipôle produit en  $O$  :

$$V(O) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Ainsi, l'énergie potentielle d'interaction de la charge et du champ électrostatique produit en  $O$  par le dipôle vaut :

$$\mathcal{E}_Q = Q \times V(O) \Rightarrow \mathcal{E}_Q = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

On remarque en outre sur le schéma précédent que :

$$\theta + \phi = \pi \Rightarrow \theta = \pi - \phi \Rightarrow \cos \theta = -\cos \phi \Rightarrow \mathcal{E}_Q = \mathcal{E}_{\text{dip}}$$

3. L'orientation du dipôle est déterminée par l'angle  $\phi$ , avec :

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{dip}}}{d\phi} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \phi \Rightarrow \frac{d^2\mathcal{E}_{\text{dip}}}{d\phi^2} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \phi$$

Aussi, les positions d'équilibre correspondent aux angles  $\phi$  qui affectent à  $\mathcal{E}_{\text{dip}}$  un *extremum*, c'est-à-dire qui sont solutions de l'équation :

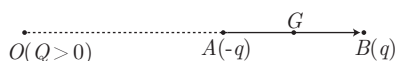
$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{dip}}}{d\phi} = 0 \Rightarrow \phi = 0 \text{ ou } \phi = \pi$$

Il convient ici de distinguer deux cas :

- Si  $Q > 0$ , on trouve :

$$\left. \frac{d^2\mathcal{E}_{\text{dip}}}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} > 0 \text{ et } \left. \frac{d^2\mathcal{E}_{\text{dip}}}{d\phi^2} \right|_{\phi=\pi} = -\frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} < 0$$

C'est donc en  $\phi = 0$  que la position d'équilibre du dipôle est stable :



- Si  $Q < 0$  (avec  $q > 0$ ), les valeurs :

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{E}_{\text{dip}}}{d\phi^2} \right|_{\phi=0} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} < 0 \text{ et } \left. \frac{d^2 \mathcal{E}_{\text{dip}}}{d\phi^2} \right|_{\phi=\pi} = -\frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} > 0$$

montrent que l'énergie potentielle du dipôle est *minimum* pour  $\phi = \pi$  ; il s'agit d'une orientation stable pour le dipôle.



**Remarque** – Les positions d'équilibre stable correspondent donc au cas où le dipôle s'aligne sur les lignes de champ, avec les vecteurs  $\vec{p}$  et  $\vec{E}$  dans le même sens ; si ces vecteurs sont de sens opposé, l'équilibre est instable.

### 3.2.5.3 Polarisation des milieux diélectriques

Cette section ne s'adresse qu'aux étudiants de la filière PC.

**Définition 11** On appelle milieu diélectrique un milieu parfaitement isolant, c'est-à-dire ne comportant que des charges liées aux molécules constituant le milieu.

Cette définition autorise l'existence de charges, dites plus rapidement *charges liées*, de densité volumique  $\rho_{\text{liées}}$  et de densité surfacique  $\sigma_{\text{liées}}$ .

**Définition 12** Soit  $d\tau$  un volume élémentaire d'un milieu diélectrique ( $\mathcal{D}$ ), qui présente un moment dipolaire  $\delta\vec{p}$ . On appelle vecteur polarisation  $\vec{P}$  de ( $\mathcal{D}$ ) la densité volumique des moments dipolaires :

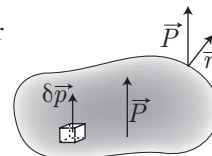
$$\vec{P} = \frac{\delta\vec{p}}{d\tau} \Rightarrow \delta\vec{p} = \vec{P} d\tau$$

Dans ce qui suit, on supposera le matériau diélectrique ( $\mathcal{D}$ ) globalement neutre, dépourvu de *charges libres*. La densité volumique de charges liées vaut alors :

$$\rho_{\text{liées}} = -\text{div } \vec{P} \quad (17)$$

Les charges issues de la polarisation peuvent également se répartir en surface, avec une densité :

$$\sigma_{\text{liées}} = \vec{P} \cdot \vec{n}$$



où  $\vec{n}$  est un vecteur unitaire normal à la surface, dirigé vers l'extérieur de celle-ci.

**Remarque** – Pour une polarisation uniforme, les charges liées se répartissent en surface (car  $\text{div } \vec{P} = 0$  entraîne que  $\rho_{\text{liées}} = 0$ ).

**Définition 13** Un milieu diélectrique est dit *linéaire* s'il existe un nombre  $\chi$ , appelé *susceptibilité électrique*, qui rend la polarisation  $\vec{P}$  colinéaire au champ électrique  $\vec{E}$  :

$$\vec{P} = \chi\epsilon_0 \vec{E}$$

Remarque – Dans un milieu diélectrique ( $\mathcal{D}$ ), le champ total  $\vec{E}$  peut avoir deux origines distinctes :

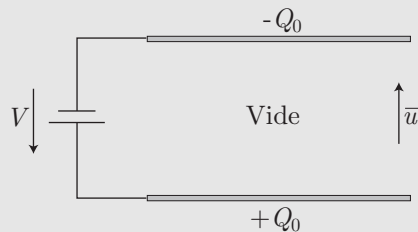
- un champ  $\vec{E}_{\text{ext}}$  provenant d'une distribution de charges extérieure à ( $\mathcal{D}$ ) ;
- un champ  $\vec{E}_p$  produit par les charges liées.

C'est pourquoi :

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{ext}} + \vec{E}_p$$



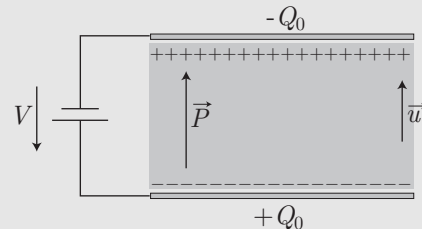
Un condensateur plan est constitué de deux armatures métalliques planes, de surface  $S$  et espacées d'une distance  $e$  telle que l'on négligera les effets de bord : dans l'espace situé entre les armatures le champ électrique est supposé uniforme.



1. Initialement, les armatures du condensateur portent les charges  $+Q_0$  et  $-Q_0$ , tandis que l'espace qui les sépare est vide. Déterminer l'expression du champ électrostatique  $\vec{E}_0$  produit par ces charges dans l'espace compris entre les armatures du condensateur ; sa capacité vaut alors  $C_0$
2. On introduit maintenant, entre les armatures, un matériau diélectrique linéaire de susceptibilité électrique  $\chi$ , les charges portées par les armatures étant maintenues constantes.

Sous l'influence du champ  $\vec{E}_0$  apparaissent des charges liées dans le diélectrique, à l'origine d'une polarisation  $\vec{P}$  uniforme.

- (a) Montrer que les charges liées n'apparaissent qu'à la surface du matériau diélectrique.



- (b) Soit  $\sigma_{\text{liées}}$  la densité surfacique de ces charges. Déterminer le champ électrique  $\vec{E}_p$  produit par ces charges, d'abord en fonction de  $\sigma_{\text{liées}}$ , puis en fonction de  $\vec{P}$ .
- (c) Montrer que le champ électrique total  $\vec{E}$  qui règne entre les armatures s'exprime d'une manière simple en fonction de  $\vec{E}_0$  et de  $\chi$ .
- (d) En supposant que la tension  $V$  entre les armatures du condensateur soit proportionnelle à la norme du champ qui règne entre les armatures, montrer que le condensateur, équipé du diélectrique, a pour capacité :

$$C = (1 + \chi) C_0 > C_0$$

RÉPONSE

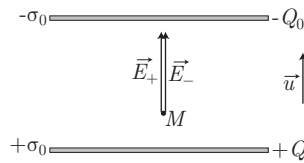


1. Notons  $\sigma_+ = \sigma_0 = \frac{Q_0}{S}$  et  $\sigma_- = -\sigma_0 = -\frac{Q_0}{S}$  les densités surfaciques de charges portées par les armatures du condensateur. Conformément au résultat (7) établi à la page 325, les charges  $Q_0$  et  $-Q_0$  produisent en un point  $M$  les champs respectifs :

$$\vec{E}_+ = \frac{\sigma_+}{2\epsilon_0} \vec{u} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u} \text{ et } \vec{E}_- = -\frac{\sigma_-}{2\epsilon_0} \vec{u} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{u}$$

C'est pourquoi, entre les armatures du condensateur règne un champ électrique :

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \vec{u}$$



2. (a) La densité volumique des charges liées,  $\rho_{liées}$ , dépend de  $\vec{P}$  selon la loi :  $\rho_{liées} = -\text{div } \vec{P}$ . Or,  $\vec{P}$  étant uniforme, il s'ensuit que :

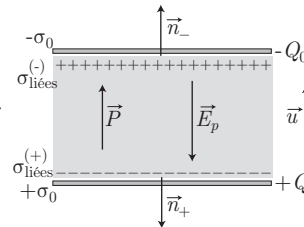
$$\text{div } \vec{P} = 0 \Rightarrow \rho_{liées} = 0$$

ce qui signifie que les charges liées sont réparties exclusivement en surface avec des densités surfaciques :

$$\sigma_{liées}^{(+)} = \vec{P} \cdot \vec{n}_+ \text{ et } \sigma_{liées}^{(-)} = \vec{P} \cdot \vec{n}_-$$

où  $\vec{n}_+ = -\vec{u}$  et  $\vec{n}_- = \vec{u}$  désignent les vecteurs unitaires normaux aux surfaces portant respectivement les densités  $\sigma_{liées}^{(+)}$  et  $\sigma_{liées}^{(-)}$ , dirigés vers l'extérieur du volume diélectrique. Par conséquent :

$$\sigma_{liées}^{(+)} = -P \text{ et } \sigma_{liées}^{(-)} = P$$



- (b) En reproduisant les calculs de la première question, on est amené à trouver que le champ  $\vec{E}_p$  produit par les charges liées entre les armatures du condensateur vaut :

$$\vec{E}_p = \frac{\sigma_{liées}^{(-)}}{\epsilon_0} \vec{u} \Rightarrow \vec{E}_p = -\frac{P}{\epsilon_0} \vec{u} = -\frac{\vec{P}}{\epsilon_0}$$

- (c) La linéarité du diélectrique impose :

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E}_p = -\chi \vec{E}$$

d'où il découle que le champ total produit en un point situé entre les armatures du condensateur vaut :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \vec{E}_0 - \chi \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{1 + \chi} \quad (18)$$

- (d) La tension  $V$  aux bornes du condensateur étant supposée proportionnelle à la norme du champ électrique, il convient de distinguer deux états :

- en l'absence de diélectrique, les armatures présentent une charge  $Q_0$  et sont soumises à une différence de potentiel  $V_0 = \alpha \|\vec{E}_0\| = \alpha E_0$ , à partir de laquelle est définie la capacité  $C_0$  du condensateur :

$$Q_0 = C_0 V_0 = C_0 \alpha E_0$$

- l'introduction du diélectrique dans le condensateur ne modifie pas la charge  $Q_0$  portée par ses armatures, mais plutôt la différence de potentiel entre ses armatures :  $V = \alpha \|\vec{E}\| = \alpha E$ . Sa capacité  $C$  vérifie alors :

$$Q_0 = CV = C \alpha E$$

Par suite :  $Q_0 = C_0 \alpha E_0 = C \alpha E \Rightarrow C_0 E_0 = C E$ , c'est-à-dire, en tenant compte du résultat (18) :

$$\begin{aligned} E_0 = (1 + \chi) E &\Rightarrow C_0 (1 + \chi) E = C E \Rightarrow C = (1 + \chi) C_0 \\ &\Rightarrow C = \epsilon_r \times C_0 \text{ avec } \epsilon_r = 1 + \chi \end{aligned}$$

### 3.3 Conducteurs à l'équilibre électrostatique

#### 3.3.1 Équilibre électrostatique

##### 3.3.1.1 Conducteurs

Dans un conducteur, on distingue les charges mobiles, susceptibles de se déplacer facilement (sous l'action d'un champ électrique, par exemple) des charges liées, qui n'ont pour mouvement que les faibles vibrations autour de positions d'équilibre.

En chaque point  $M$ , on peut poser :

$$\rho(M) = \rho_{\text{libres}}(M) + \rho_{\text{liées}}(M)$$

Si le matériau est électriquement neutre en chaque point  $M$ , on peut écrire :  $\rho(M) = 0$ , ce qui ne signifie pas qu'il n'existe pas de charges, mais que les fonctions  $\rho_{\text{libres}}(M)$  et  $\rho_{\text{liées}}(M)$  sont opposées.

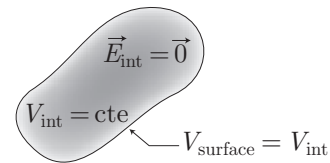
##### 3.3.1.2 Équilibre

**Définition 14** *Un conducteur est à l'équilibre électrostatique dans un référentiel  $\mathcal{R}$  quand ses charges mobiles n'ont pas de vitesse d'ensemble dans  $\mathcal{R}$  :*

$$\langle \vec{v}_{\text{libres}} \rangle = \vec{0} \text{ (à l'équilibre.)}$$

En conséquence, il ne peut pas exister de champ électrostatique dans le volume conducteur, sans quoi celui-ci déplacerait les charges sous l'action de la force  $\vec{f} = q\vec{E}$  :

$$\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$$



ce qui implique que le potentiel y est constant. En effet,  $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$  conduit à  $\text{grad } V_{\text{int}} = \vec{0}$ , donc :

$$\begin{aligned} V_{\text{int}} &= \text{cte} \text{ (le conducteur est un volume équipotentiel) ;} \\ V_{\text{int}} &= V_{\text{surface}} \text{ (la fonction potentiel est continue).} \end{aligned}$$

D'après la forme locale de l'équation de Maxwell-Gauss :  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{int}}}{\epsilon_0}$ , on en déduit que la densité volumique de charge dans un conducteur est nulle. Autrement dit, si un conducteur porte une charge non nulle, celle-ci se répartit, à l'équilibre, nécessairement sur sa surface ( $S$ ) et est caractérisée par sa densité surfacique  $\sigma$ . On retiendra, pour un conducteur à l'équilibre électrostatique :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{int}} &= \vec{0} & V_{\text{int}} &= V_{\text{surface}} = \text{cte} \\ \rho_{\text{int}} &= 0 & Q_{\text{conducteur}} &= \iint_{(S)} \sigma \, dS \end{aligned}$$



On considère une sphère métallique creuse, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , qui porte la charge  $Q$  répartie selon la densité uniforme  $\sigma$ . Exprimer le potentiel de cette sphère, en fonction de  $\sigma$ ,  $R$  et  $\epsilon_0$ .

**RÉPONSE**

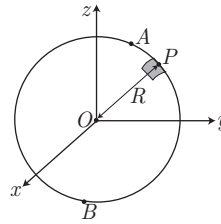
Le champ électrique est nul en tout point intérieur à la sphère métallique. Aussi, il découle de la relation  $\vec{E} = -\text{grad } V$  que le potentiel est uniforme dans la sphère, ce qui signifie qu'en tout point  $M$  :  $V(M) = V(O)$ .

Soit  $P$  un point de la sphère ( $S$ ), où se trouvent des charges de densité surfacique  $\sigma$ . Le potentiel du point  $O$  est défini par :

$$V(O) = \iint_{(S)} \frac{\sigma dS(P)}{4\pi\epsilon_0 PO} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \iint_{(S)} dS(P) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R} \times 4\pi R^2$$

Enfin, puisque le potentiel  $V(O)$  vaut aussi  $V_0$  :

$$V_0 = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \tag{19}$$



**3.3.1.3 Théorème de Coulomb**

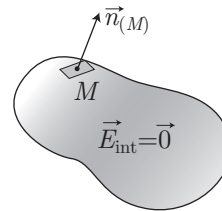
Soit  $M$  un point à la surface d'un conducteur,  $\vec{n}_{(M)}$  le vecteur normal à ce conducteur (dirigé vers l'extérieur) au point  $M$  et  $\sigma(M)$  la densité surfacique de charges au même point.

Si  $\vec{E}_{\text{ext}}$  désigne le champ électrique au voisinage extérieur du conducteur et  $\vec{E}_{\text{int}} = \vec{0}$  celui au voisinage intérieur, la relation de passage impose :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \vec{E}_{\text{int}} + \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{(M)}$$

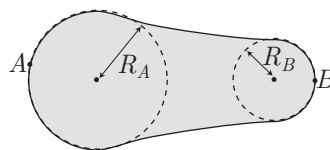
c'est-à-dire :

$$\vec{E}_{\text{ext}} = \frac{\sigma(M)}{\epsilon_0} \vec{n}_{(M)}$$



**3.3.1.4 Effet de pointe**

On considère le conducteur schématisé ci-dessous, à l'équilibre, dont le potentiel prend la valeur  $V_0$ . Comparons les densités surfaciques de charge aux points  $A$  et  $B$ .



Au niveau des points  $A$  et  $B$  on peut localement assimiler ce dernier à des sphères de rayons  $R_A$  et  $R_B < R_A$ . Or, conformément à la loi (19) de la page 347 :  $\sigma R = \epsilon_0 V_0 = \text{cte}$ , ce qui se traduit par :

$$\sigma(B) > \sigma(A)$$

Un conducteur a donc tendance à porter une densité de charges d'autant plus importante que le rayon de courbure local est petit.

À la limite, une courbure infinie représente une pointe, d'où l'appellation « effet de pointe » attribué à ce phénomène.

En conséquence, l'intensité du champ  $\vec{E}$  sera, d'après le théorème de Coulomb, plus importante au niveau des pointes. Un champ électrique trop intense au niveau d'une pointe pourra ioniser le milieu environnant ; cette propriété est utilisée dans les paratonnerres.

### 3.3.1.5 Capacité d'un conducteur dans l'espace

**Définition 15** Soit un conducteur dans l'espace, infiniment éloigné de tout autre conducteur. On admet qu'il existe une relation de proportionnalité entre sa charge et son potentiel :

$$Q = C \times V$$

$C$  est appelé capacité du conducteur et s'exprime en farad (F).



Une sphère métallique, de rayon  $R$  et de centre  $O$ , porte une charge  $Q$  uniformément répartie sur sa surface.

1. Déterminer le champ électrique  $\vec{E}(M)$  en un point  $M$  tel que :  $OM = r > R$ .
2. En déduire l'expression du potentiel  $V$  de la sphère, puis de sa capacité  $C$ .

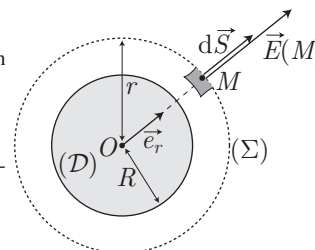
#### RÉPONSE

1. L'axe  $(OM)$ , de vecteur unitaire directeur  $\vec{e}_r$ , est un axe de symétrie pour la distribution  $(\mathcal{D})$  de charges, auquel cas  $\vec{E}(M)$  est colinéaire à  $\vec{e}_r$  :  $\vec{E}(M) = E \vec{e}_r$ .

En outre, toute rotation de  $(\mathcal{D})$  autour de  $O$  laisse  $(\mathcal{D})$  invariant, en conséquence de quoi  $E$  ne dépend que de  $r$  :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$

Soit alors  $(\Sigma)$  une surface sphérique, de rayon  $r$ , sur laquelle tout élément  $d\vec{S}$  est colinéaire à  $\vec{e}_r$ , ce qui se traduit par :



$$\Phi_{\Sigma} = \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} E(r) \times dS = E(r) \iint_{(\Sigma)} dS = E(r) \times 4\pi r^2$$

Or, conformément au théorème de Gauss :

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

2. Le potentiel  $V = V(M)$  en  $M$  est lié à  $\vec{E}(M)$  par :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_{\varphi}$$

ce qui suffit à montrer d'une part que  $V$  ne dépend pas des angles  $\theta$  et  $\varphi$  (car  $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$  et  $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ ) et d'autre part que :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + K$$

où  $K = 0$  pour tenir compte de la condition :  $\lim_{r \rightarrow \infty} [V(M)] = 0$ . Ce faisant, lorsque  $M$  se trouve

à la surface du conducteur,  $r = R$  fournit le potentiel de ce conducteur :  $V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ , où

$Q = C \times V(R)$  conduit à :

$$V(R) = \frac{C \times V(R)}{4\pi\varepsilon_0 R} \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

### 3.3.2 Condensateurs

#### 3.3.2.1 Définitions

**Définition 16** On dit que deux surfaces sont en influence totale si toutes les lignes de champ partant de l'une arrivent sur l'autre.

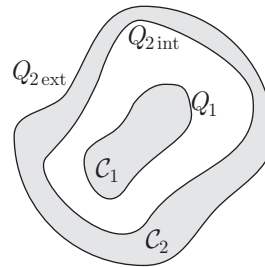
**Définition 17** On appelle condensateur un ensemble de deux surfaces métalliques en influence totale.

On peut alors définir :

- la charge  $Q_1$  portée par le conducteur  $C_1$  ;
- la charge  $Q_{2\text{int}}$  portée par la surface intérieure du conducteur  $C_2$  ;
- la charge  $Q_{2\text{ext}}$ , celle portée par la surface extérieure du conducteur  $C_2$ .

Le champ électrique étant nul dans les volumes conducteurs, le théorème de Gauss, appliqué à une surface passant à l'intérieur du conducteur  $C_2$ , permet de trouver que :

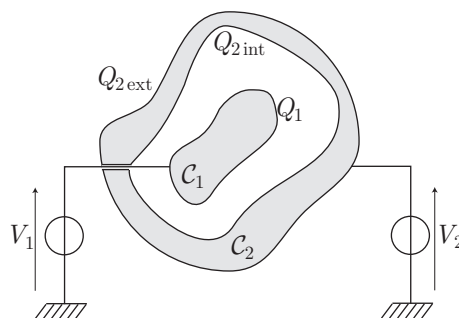
$$Q_{2\text{int}} = -Q_1$$



#### 3.3.2.2 Capacité d'un condensateur

**Définition 18** Soient deux conducteurs, portés aux potentiels  $V_1$  et  $V_2$ , dont le premier présente la charge  $Q_1$ . Si ces deux conducteurs sont en influence totale, l'ensemble constitue un condensateur de capacité :

$$C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$$



Pour déterminer une capacité, on doit exprimer  $V_1 - V_2 = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{OM}$ , ce qui impose le calcul préalable de  $\vec{E}$ , que l'on effectuera généralement à l'aide du théorème de Gauss.

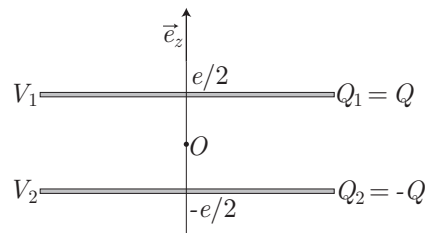
Rappelons que l'intégrale  $\int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot d\vec{OM}$  est indépendante du chemin suivi. De plus, les conducteurs  $C_1$  et  $C_2$  étant équipotentiels, le point (1) peut être n'importe où sur  $C_1$  (de même que pour le point (2) sur  $C_2$ ).

Remarque – En notant :  $Q_{2\text{ int}} = C (V_2 - V_1)$ , la charge totale portée par  $C_2$  vaut :

$$Q_2 = Q_{2\text{ int}} + Q_{2\text{ ext}}$$

### 3.3.2.3 Capacité d'un condensateur plan

On considère deux plans, de surface  $S$ , uniformément chargés, le premier à  $+Q$  et le second à  $-Q$ .



En vertu du résultat (7) de la page 325 :

- le plan en  $z = \frac{e}{2}$  crée le champ :

$$\vec{E}_1 \left( z > \frac{e}{2} \right) = \frac{Q}{2S\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}_1 \left( z < \frac{e}{2} \right) = -\frac{Q}{2S\epsilon_0} \vec{e}_z$$

- le plan en  $z = -\frac{e}{2}$  crée le champ :

$$\vec{E}_2 \left( z > -\frac{e}{2} \right) = \frac{-Q}{2S\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}_2 \left( z < -\frac{e}{2} \right) = \frac{Q}{2S\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Par superposition, nous avons  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  :

$$\vec{E} \left( |z| > \frac{e}{2} \right) = \vec{0} \text{ et } \vec{E} \left( |z| < \frac{e}{2} \right) = -\frac{Q}{S\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Pour exprimer la capacité  $C = \frac{Q_1}{V_1 - V_2}$ , déterminons :

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= \int_{(1)}^{(2)} \vec{E} \cdot \vec{e}_z dz = e \times \frac{Q}{S\epsilon_0} = \frac{e Q_1}{S\epsilon_0} \\ \Rightarrow C &= \frac{Q_1}{e Q_1} S\epsilon_0 = \frac{S\epsilon_0}{e} \end{aligned}$$

En conclusion :

$$\text{la capacité d'un condensateur plan vaut : } C = \epsilon_0 \frac{S}{e}$$

### 3.3.3 Énergie d'un condensateur

**Définition 19** On appelle énergie d'un condensateur la grandeur :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{Q_1^2}{2C}$$

Cette dernière s'identifie à l'énergie du champ électrostatique entre les plaques :

$$\mathcal{E} = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_{(V)} E^2(P) d\tau(P)$$

(V) étant le volume entre les plaques.

## 3.4 Magnétostatique

### 3.4.1 Densités de courant

#### 3.4.1.1 Densité volumique de courant

Considérons un milieu contenant des charges mobiles, de densité volumique  $\rho_m$  (en  $C \cdot m^{-3}$ ). Nous admettrons que ces charges se déplacent toutes avec la même vitesse  $\vec{v}$  et qu'elles se déplacent alors d'une distance  $v dt$  pendant une durée  $dt$ . Soit  $dV$  le volume du parallélépipède de section de base  $dS$  (à laquelle est associé un vecteur  $d\vec{S}$ , de norme  $dS$  et dirigé selon la normale à la section) et de hauteur  $h = v dt \cos \alpha$ . Pendant la durée  $dt$ , seules les charges contenues dans  $dV = h dS$  peuvent atteindre ou traverser  $dS$ . Aussi, la charge  $\delta q$  qui traverse  $dS$  pendant  $dt$  vaut-elle :

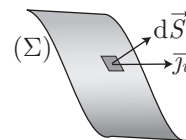
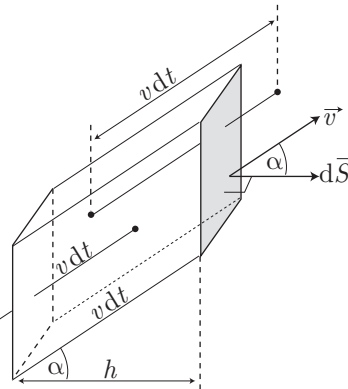
$$\begin{aligned} \delta q &= \rho_m dV = \rho_m h dS = \rho_m v dS \cos \alpha dt \\ &= \rho_m \vec{v} \cdot d\vec{S} dt \end{aligned}$$

Aussi, le courant  $\delta i$  qui traverse la surface  $dS$  est défini par :

$$\delta i = \frac{\delta q}{dt} = \vec{j}_v \cdot d\vec{S} \text{ avec } \vec{j}_v = \rho_m \vec{v} \quad (20)$$

L'intensité  $i$  du courant qui traverse une surface ( $\Sigma$ ) est alors définie à partir de la loi (20) :

$$i = \iint_{(\Sigma)} \vec{j}_v \cdot d\vec{S}$$





Un condensateur est composé d'une anode rectiligne ( $\mathcal{A}$ ) et d'une cathode cylindrique ( $\mathcal{C}$ ), de rayon  $R$  et d'axe ( $\mathcal{A}$ ).

Le régime est permanent, ce qui se traduit par l'absence de charge accumulée dans le condensateur : le courant  $I$  qui arrive à l'anode est le même que celui qui part de la cathode.

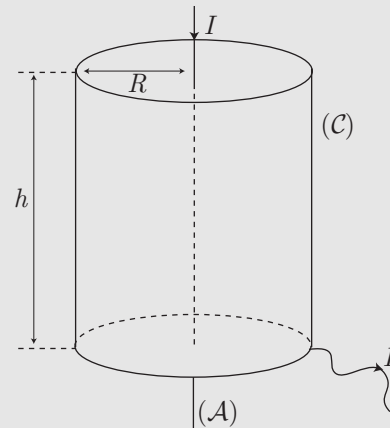
On admettra que les charges se déplacent, de manière radiale :  $\vec{v} = v(r) \vec{e}_r$ , à l'intérieur d'un fluide conducteur qui occupe la totalité de la hauteur  $h$  de la cathode.

1. Montrer que la densité volumique de courant  $j_v$  vérifie l'équation :

$$j_v + r \frac{dj_v}{dr} = 0$$

où  $r$  désigne la distance à ( $\mathcal{A}$ ).

2. En déduire l'expression de  $j_v(r)$  en fonction de  $I$ ,  $h$  et  $r$ .



#### RÉPONSE

1. Isolons, dans le condensateur, un cylindre d'axe ( $\mathcal{A}$ ), de hauteur  $h$  et de rayon  $r$ . La surface  $S(r) = 2\pi r h$  de ce cylindre est alors traversée par un courant d'intensité :

$$I(r) = j_v(r) \times S(r) = [j_v(r) \times r] \times 2\pi h$$

De même, un cylindre identique au premier, mais de rayon  $r + dr$  est traversé par un courant d'intensité :

$$\begin{aligned} I(r + dr) &= j_v(r + dr) \times S(r + dr) \text{ où } S(r + dr) = 2\pi h \times (r + dr) \\ &= [j_v(r + dr) \times (r + dr)] \times 2\pi h \end{aligned}$$

Aussi, en définissant une fonction  $\psi(r) = j_v(r) \times r$ , les courants  $I(r)$  et  $I(r + dr)$  s'écrivent :

$$I(r) = \psi(r) \times 2\pi h \text{ et } I(r + dr) = \psi(r + dr) \times 2\pi h$$

Or, le volume compris entre les deux cylindres reçoit, pendant  $dt$ , une charge  $\delta q(r) = I(r) dt$ , tandis qu'une charge  $\delta q(r + dr) = I(r + dr) dt$  s'en échappe. C'est pourquoi le régime permanent impose :

$$\delta q(r + dr) = \delta q(r) \Rightarrow I(r + dr) = I(r) \Rightarrow \psi(r + dr) = \psi(r) \Rightarrow \psi(r) + dr \frac{d\psi}{dr} = \psi(r)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\psi}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} [j_v(r) \times r] = 0 \Rightarrow j_v(r) + r \frac{dj_v}{dr} = 0 \quad (21)$$

2. L'équation (21) montre qu'il existe une constante  $\alpha$  telle que :

$$\frac{d}{dr} [j_v(r) \times r] = 0 \Rightarrow j_v(r) \times r = \alpha \Rightarrow j_v(r) = \frac{\alpha}{r}$$

En outre, la cathode de rayon  $R$  est traversée par un courant d'intensité  $I$  définie par :

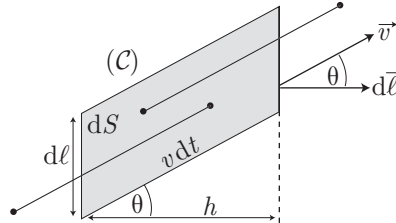
$$I = j_v(R) \times 2\pi R h = \frac{\alpha}{R} \times 2\pi R h = \alpha \times 2\pi h \Rightarrow \alpha = \frac{I}{2\pi h} \Rightarrow j_v(r) = \frac{I}{2\pi r h}$$



### 3.4.1.2 Densité surfacique de courant

Considérons des charges mobiles à la surface d'un corps  $(C)$ , de densité surfacique  $\sigma_m$  (en  $C \cdot m^{-2}$ ).

Soit  $\vec{v}$  la vitesse des porteurs de charge, supposée identique pour tous les porteurs. Pendant une durée  $dt$ , seuls les porteurs de charge situés à l'intérieur de la surface  $dS = dl \times h$  peuvent traverser un segment  $dl$  situé sur la surface de  $(C)$ . Or, dans  $dS$  se trouve une charge  $\delta q = \sigma_m dS$ , avec :



$$h = v dt \cos \theta \Rightarrow dS = v dl \cos \theta \times dt = \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \times dt$$

$$\Rightarrow \delta q = \sigma_m \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \times dt$$

Aussi, le courant qui traverse  $dl$  a pour intensité :

$$\delta i = \frac{\delta q}{dt} = \vec{j}_s \cdot d\vec{\ell} \text{ avec } \vec{j}_s = \sigma_m \vec{v}$$

$\vec{j}_s$  est alors appelé *densité surfacique de courant*.

**⚠** On remarquera que le vecteur  $d\vec{\ell}$  est perpendiculaire au segment de longueur  $dl$ . Pour vous en souvenir, rappelez-vous qu'il en va de même avec le vecteur surface  $d\vec{S}$  et de la surface  $dS$  qui en est la norme.

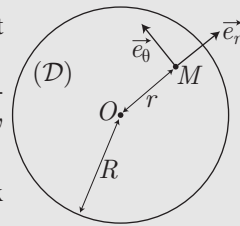
**👉** Soit  $(D)$  un disque de centre  $O$  et de rayon  $R$ , portant sur une de ses faces des charges de densité surfacique  $\sigma$ . Le disque  $(D)$  est libre de tourner autour de son axe passant par  $O$ , avec une vitesse angulaire  $\omega$ .

1. On suppose d'abord que  $\sigma = \sigma_0$  est uniforme.

Donner l'expression de la densité surfacique de courant  $\vec{j}_s(r)$  en un point  $M$  situé à une distance  $r$  de  $O$ .

En déduire l'expression de l'intensité  $I$  du courant électrique généré par la rotation de  $(D)$ , en fonction de  $\sigma$ ,  $\omega$  et  $R$ .

2. On suppose maintenant que  $\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{R} \times r$ . Répondre aux mêmes questions.

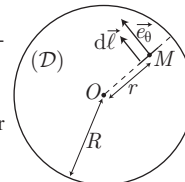


#### RÉPONSE

1. La vitesse d'un porteur de charge à une distance  $r$  de  $O$  est donnée, en coordonnées polaires, par :

$$\vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{j}_s = \sigma r\omega \vec{e}_\theta$$

Soit  $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_\theta$  un élément de rayon de  $(D)$ . Cet élément est alors traversé par un courant élémentaire d'intensité :



$$\delta I = \vec{j}_s \cdot d\vec{\ell} = \sigma \omega r dr \tag{22}$$

Aussi, le courant qui traverse la totalité d'un rayon de ( $\mathcal{D}$ ) a pour intensité :

$$I = \int_0^R \sigma \omega r \, dr = \sigma \omega \int_0^R r \, dr \Rightarrow I = \frac{\sigma \omega}{2} R^2$$

2. Dans le cas où  $\sigma = \sigma(r) = \frac{\sigma_0}{R} \times r$ , l'intensité du courant qui traverse  $d\vec{r}$  est toujours donnée par la relation (22) :

$$\delta I = \sigma(r) \times \omega r \, dr = \frac{\sigma_0 \omega}{R} r^2 \, dr$$

Par suite, le courant qui traverse la totalité d'un rayon de ( $\mathcal{D}$ ) présente l'intensité :

$$I = \int_0^R \frac{\sigma_0 \omega}{R} \times r^2 \, dr = \frac{\sigma_0 \omega}{R} \int_0^R r^2 \, dr = \frac{\sigma_0 \omega}{R} \times \frac{R^3}{3} \Rightarrow I = \frac{\sigma_0 \omega R^2}{3}$$

### 3.4.1.3 Conservation de la charge

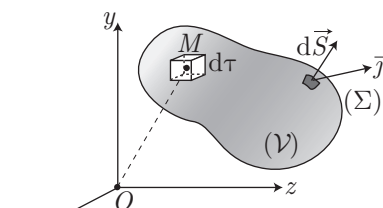
La charge  $q(t)$  contenue dans une distribution ( $\mathcal{D}$ ) de charge de volume ( $\mathcal{V}$ ) est définie, à toute date  $t$ , par :

$$q(t) = \iiint_{(\mathcal{V})} \rho(\overrightarrow{OM}, t) \, d\tau$$

où la fonction  $\rho(\overrightarrow{OM}, t)$  désigne la densité volumique de charges au point  $M$ , à la date  $t$ .

Quant au courant qui traverse vers l'extérieur la surface ( $\Sigma$ ) de ( $\mathcal{D}$ ), son intensité est définie par :

$$i = -\frac{dq}{dt} = \oiint_{(\Sigma)} \vec{j}_v \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} \operatorname{div} \vec{j}_v \, d\tau$$



Il en découle la loi locale de conservation de la charge :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_v = 0$$

### Cas des milieux diélectriques

Cette partie fait suite à celle abordée à la page 343 et, à ce titre, elle ne s'adresse qu'aux étudiants de la filière PC.

La densité volumique des charges liées, dans un milieu de polarisation  $\vec{P}$ , vérifie :

$$\rho_{\text{liées}} = -\operatorname{div} \vec{P}$$

Sa variation est alors associée à un courant de densité volumique  $\vec{j}_p$  telle que :

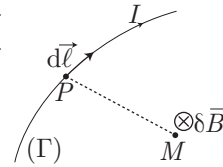
$$\frac{\partial \rho_{\text{liées}}}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_p = 0 \Rightarrow \vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

### 3.4.2 Le champ magnétostatique

#### 3.4.2.1 Loi de Biot et Savart

Soit un fil électrique  $(\Gamma)$ , parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Le champ magnétique  $\delta\vec{B}$  produit en  $M$  par un élément infinitésimal  $d\vec{\ell}$  de  $(\Gamma)$ , centré sur  $P \in (\Gamma)$ , est donné par la loi empirique de Biot et Savart :

$$\delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$



Pour calculer le champ  $\vec{B}$  produit par la totalité de  $(\Gamma)$  sur  $M$ , il suffit alors d'additionner toutes les contributions  $\delta\vec{B}$ , ce qui se traduit par le calcul de :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{I(P) d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

où  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  désigne la perméabilité magnétique du vide.

Remarque – Cette relation ne permet pas le calcul de  $\vec{B}$  sur  $(\Gamma)$  ; une discontinuité est observée.



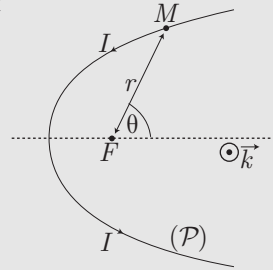
Soit une parabole  $(\mathcal{P})$ , de foyer  $F$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$ .

Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}(F)$  au foyer  $F$  de  $(\mathcal{P})$ .

On rappelle la paramétrisation de  $(\mathcal{P})$  :

$$r = \frac{p}{1 - \cos \theta}$$

On exprimera  $\vec{B}(F)$  en fonction de  $I$ ,  $p$  et  $\vec{k}$  (vecteur unitaire perpendiculaire au plan qui contient  $\mathcal{P}$ ).

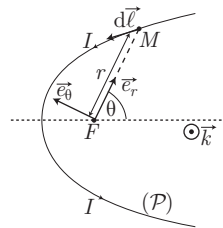


RÉPONSE Soit  $M$  un point de  $(\mathcal{P})$ , repéré par le vecteur  $\overrightarrow{FM} = r \vec{e}_r$ . Un déplacement élémentaire de  $M$  sur  $(\mathcal{P})$  s'écrit alors, en coordonnées polaires :

$$d\vec{\ell} = d\overrightarrow{FM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

tandis que  $\overrightarrow{MF} = -r \vec{e}_r$  conduit à :

$$\begin{aligned} d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{MF} &= (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta) \wedge (-r \vec{e}_r) \\ &= -r dr \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r}_{=\vec{0}} - r^2 d\theta \underbrace{\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r}_{=-\vec{k}} \\ &= r^2 d\theta \vec{k} \end{aligned}$$



Aussi, conformément à la loi de Biot et Savart, le champ élémentaire produit par  $d\vec{\ell}$  en  $F$  vaut :

$$\delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{MF}}{MF^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{r^2 d\theta \vec{k}}{r^3} = \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi} \frac{d\theta}{r}$$

où  $r$  est paramétré par  $\theta$  selon :

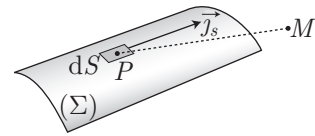
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 - \cos \theta) \Rightarrow \delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi p} (1 - \cos \theta) d\theta$$

Or, puisque  $(P)$  est décrit pour  $\theta$  variant de 0 à  $2\pi$ , il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\vec{B}(F) &= \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi p} \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta - \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right\} \\ &= \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi p} \left\{ 2\pi - [\sin \theta]_0^{2\pi} \right\} \Rightarrow \vec{B}(F) = \frac{\mu_0 I}{2p} \vec{k}\end{aligned}$$

Si le courant électrique est réparti en surface, avec une densité surfacique  $\vec{j}_s(P)$ , on trouve de la même manière :

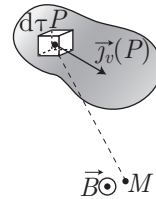
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(\Sigma)} \frac{\vec{j}_s(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} dS$$



Remarque – Le champ magnétique calculé par cette méthode présente, en tout point de  $(\Sigma)$ , une discontinuité finie. Cette méthode ne permet pas de définir le champ magnétique en chaque point de la surface.

De même, lorsque le courant est réparti selon une densité volumique  $\vec{j}_v(P)$ , le champ magnétique produit en  $M$  peut s'obtenir par le calcul de :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \frac{\vec{j}_v(P) \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau$$



Cependant, ce dernier calcul sera peu utilisé ; on lui préférera l'emploi du théorème d'Ampère, présenté ultérieurement.

Remarque – Le champ magnétique calculé par cette méthode est en général défini en tout point de la distribution volumique.

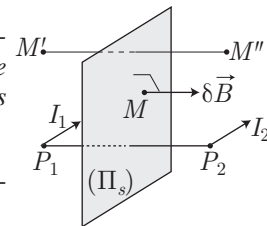
### 3.4.2.2 Symétries et invariants

**Définition 20** On dit qu'un plan  $(\Pi_s)$  est un plan de symétrie pour une distribution de courant si, en tout couple de points  $\{P_1, P_2\}$  symétriques par rapport à  $(\Pi_s)$ , circulent des courants  $I_1$  et  $I_2$  symétriques par rapport à  $(\Pi_s)$ .

Le champ magnétique créé en tout point  $M$  d'un plan de symétrie électrique  $(\Pi_s)$  est perpendiculaire à  $(\Pi_s)$ .

Soient  $M'$  et  $M''$  deux points symétriques par rapport à  $(\Pi_s)$ . On peut montrer que :

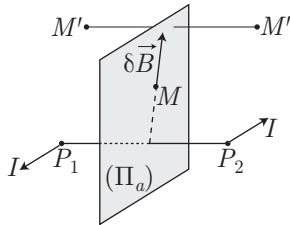
$$\vec{B}(M'') = -\text{sym} \left\{ \vec{B}(M') \right\} \text{ lorsque } M'' = \text{sym} \{ M' \}$$



**Définition 21** On dit qu'un plan  $(\Pi_a)$  est un plan d'antisymétrie pour une distribution de courant si en tout couple de points  $\{P_1, P_2\}$ , symétriques par rapport à  $(\Pi_a)$ , circulent des courants d'égale intensité  $I$ , mais de sens opposés.

Le champ magnétique créé en tout point  $M$  d'un plan d'antisymétrie électrique  $(\Pi_a)$  est contenu dans  $(\Pi_a)$ . De plus, on peut montrer que :

$$M'' = \text{sym} \{M'\} \Rightarrow \vec{B}(M'') = \text{sym} \{ \vec{B}(M') \}$$

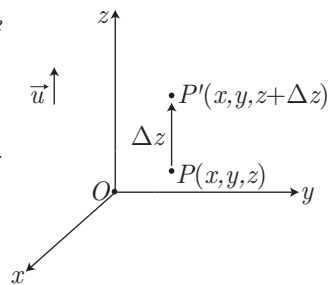


**Définition 22** Une distribution de courant  $I$  est dite invariante par translation dans la direction  $\vec{u}$  si :

$$I(x, y, z + \Delta z) = I(x, y, z)$$

Dans ce cas, la norme  $B$  du champ magnétique ne dépend pas de la variable  $z$  :

$$B(x, y, z) \equiv B(x, y)$$

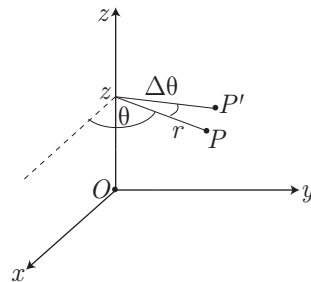


**Définition 23** Une distribution de courant  $I$  est invariante par rotation autour de l'axe  $(Oz)$  si :

$$I(r, \theta + \Delta\theta, z) = I(r, \theta, z)$$

ce qui a pour conséquence :

$$B(r, \theta, z) \equiv B(r, z)$$

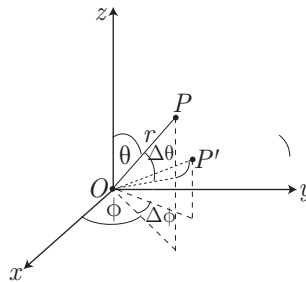



**Définition 24** L'invariance d'une distribution de courant  $I$  par rotation autour d'un point  $O$  est assurée dès que :

$$I(r, \theta + \Delta\theta, \phi + \Delta\phi) = I(r, \theta, \phi)$$

et se traduit par l'identité :

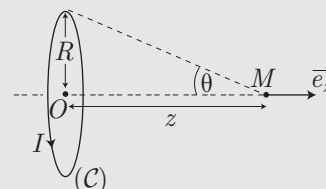
$$I(r, \theta, \phi) \equiv I(r)$$



 Une spire ( $\mathcal{C}$ ), de rayon  $R$  et d'axe ( $Oz$ ), est parcourue par un courant d'intensité  $I$ .

On note  $\vec{e}_z$  le vecteur unitaire directeur de ( $Oz$ ) et  $M$  un point de cet axe, situé à une abscisse  $z$  de  $O$ .

1. Trouver la direction du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  créé par ( $\mathcal{C}$ ) en  $M$ .
2. Exprimer  $\vec{B}(M)$  en fonction de  $I$ ,  $R$  et  $\theta$  (angle du cône de sommet  $M$ , qui prend appui sur ( $\mathcal{C}$ )).

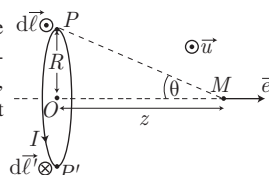


### RÉPONSE

1. Soient  $P$  et  $P'$  deux points de ( $\mathcal{C}$ ) symétriques par rapport à ( $Oz$ ).

En ces points, le courant électrique circule dans le sens de  $d\vec{\ell}$  et de  $d\vec{\ell}' = -d\vec{\ell}$ , de sorte que tout plan passant par ( $Oz$ ) est un plan d'antisymétrie électrique. Soient alors  $(\Pi_1)$  et  $(\Pi_2)$  deux de ces plans, distincts. Le champ  $\vec{B}(M)$  doit appartenir simultanément à  $(\Pi_1)$  et  $(\Pi_2)$ , c'est-à-dire à leur intersection ( $Oz$ ).

C'est pourquoi  $\vec{B}(M)$  est colinéaire à  $\vec{e}_z$  :



$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_z \quad (23)$$

2. La portion  $d\vec{\ell} = dl \vec{u}$  de ( $\mathcal{C}$ ) produit en  $M$  le champ élémentaire :

$$\delta \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(\mathcal{C})} \frac{d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

où  $PM = \sqrt{R^2 + z^2}$  est indépendant du point  $P$ . En outre, il ressort de la relation (23) que :

$$\begin{aligned} B(M) &= \vec{B}(M) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} \oint_{(\mathcal{C})} (d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} \oint_{(\mathcal{C})} (\overrightarrow{PM} \wedge \vec{e}_z) \cdot d\vec{\ell} \end{aligned}$$

où :

$$\overrightarrow{PM} \wedge \vec{e}_z = PM \sin \theta \vec{u} \Rightarrow (\overrightarrow{PM} \wedge \vec{e}_z) \cdot d\vec{\ell} = (PM \sin \theta \vec{u}) \cdot (dl \vec{u}) = PM \sin \theta \times dl$$

C'est pourquoi :


$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{MP^2} \oint_{(\mathcal{C})} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{MP^2} \times 2\pi R = \frac{\mu_0 IR}{2} \times \frac{\sin \theta}{MP^2}$$

Enfin, le triangle ( $OMP$ ) est rectangle en  $O$ , ce qui implique que :

$$\sin \theta = \frac{R}{MP} \Rightarrow \frac{1}{MP^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \Rightarrow B(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \times \sin^3 \theta$$

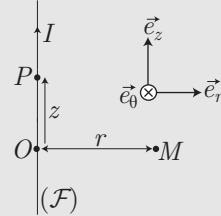
d'où il découle que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \times \sin^3 \theta \vec{e}_z \quad (24)$$

 Soit  $(\mathcal{F})$  un fil rectiligne infini, parcouru par un courant d'intensité  $I$  uniforme, et dirigé selon le vecteur unitaire  $\vec{e}_z$ .

Un point  $M$  de l'espace se trouve à une distance  $r = OM$  non nulle de  $(\mathcal{F})$  et l'on note  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire de  $\vec{OM}$  :  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ .

Une base cylindrique  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$  est constituée en adjoignant le vecteur unitaire  $\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r$ .



Un point  $P$  de  $(\mathcal{F})$  sera repéré par sa position  $\vec{OP} = z \vec{e}_z$ .

1. En appliquant la loi de Biot et Savart, déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  produit par  $(\mathcal{F})$  en  $M$ , comme une intégrale sur  $d\vec{OP}$ .
2. Par des arguments de symétrie, déterminer la direction de  $\vec{B}(M)$  et en déduire son expression.
3. On rappelle qu'un vecteur  $\vec{B}$ , de composantes  $(B_x, B_y, B_z)$  dans une base cartésienne  $\mathcal{B}' = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  a pour divergence :

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Calculer la divergence de  $\vec{B}(M)$ .

**RÉPONSE**

1. Un élément  $d\vec{OP} = dOP \vec{e}_z$  de  $(\mathcal{F})$  produit en  $M$  un champ magnétique élémentaire :

$$\delta \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{OP} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

Ce faisant, le champ magnétique produit en  $M$  par la totalité de  $(\mathcal{F})$  vaut :

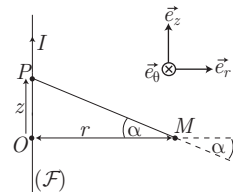
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(\mathcal{F})} \frac{d\vec{OP} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

2. Le plan (de la feuille) qui passe par  $M$  et qui contient  $(\mathcal{F})$  est un plan de symétrie pour le courant électrique, en conséquence de quoi  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire à ce plan :

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_\theta \Rightarrow B(M) = \vec{e}_\theta \cdot \vec{B}(M)$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} B(M) &= \vec{e}_\theta \cdot \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(\mathcal{F})} \frac{d\vec{OP} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(\mathcal{F})} \frac{(d\vec{OP} \wedge \vec{PM}) \cdot \vec{e}_\theta}{PM^3} \end{aligned}$$



Aussi, en notant  $\alpha = (\vec{PM}, \vec{e}_z)$ , on remarque que :

$$\begin{aligned} (d\vec{OP} \wedge \vec{PM}) \cdot \vec{e}_\theta &= (\vec{e}_\theta \wedge d\vec{OP}) \cdot \vec{PM} \\ &= (\vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_z dz) \cdot \vec{PM} \text{ car } \vec{OP} = z \vec{e}_z \Rightarrow d\vec{OP} = dz \vec{e}_z \\ &= dz \vec{e}_r \cdot \vec{PM} = dz \times PM \cos \alpha \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz \times \cos \alpha}{PM^2}$$

où l'on peut effectuer le changement de variable :

$$z = r \tan \alpha \Rightarrow dz = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha} \text{ et } \cos \alpha = \frac{r}{PM} \Rightarrow \frac{1}{PM^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{r^2}$$

Il s'ensuit alors que :

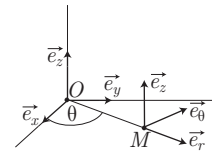
$$\begin{aligned} B(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha} \times \cos \alpha \times \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ &\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

3. Le rappel de l'énoncé est une invitation au calcul de  $\text{div } \vec{B}$  dans le système de coordonnées cartésiennes, de base  $\mathcal{B} \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ , dans lequel le point  $M$  est repéré par le vecteur :

$$\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y \Rightarrow r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$$

En remarquant que :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{e}_r = \frac{\vec{OM}}{r} = \frac{x}{r} \vec{e}_x + \frac{y}{r} \vec{e}_y$$



la définition de  $\vec{e}_\theta$  conduit, dans  $\mathcal{B}$ , à :

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{r} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y) = B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z$$

$$\text{avec } B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \frac{y}{x^2 + y^2}, B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ et } B_z = 0$$

Par suite, les expressions :

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

suffisent à se convaincre que :

$$\text{div } \vec{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

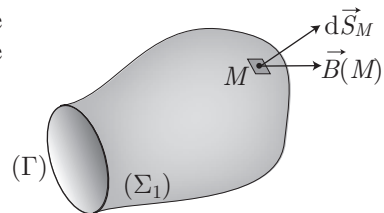
Le résultat précédent se généralise à tout champ magnétique, dépendant éventuellement du temps :

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

### 3.4.2.3 Champ à flux conservatif

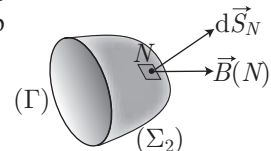
Soit  $(\Sigma_1)$  une surface qui prend appui sur le contour fermé  $(\Gamma)$ . Le flux du champ magnétique à travers  $(\Sigma)$  est alors défini par :

$$\phi_1 = \iint_{(\Sigma_1)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M$$



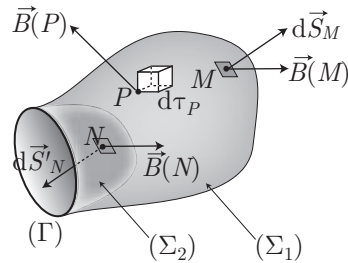
Considérons, de même, une surface  $(\Sigma_2)$  qui prend appui sur le même contour fermé  $(\Gamma)$ . À nouveau, le flux du champ magnétique à travers  $(\Sigma_2)$  est défini par :

$$\phi_2 = \iint_{(\Sigma_2)} \vec{B}(N) \cdot d\vec{S}_N$$





Réalisons maintenant une surface fermée ( $\Sigma$ ) en réunissant ( $\Sigma_1$ ) et ( $\Sigma_2$ ) par leur contour commun ( $\Gamma$ ) :



Le flux du champ magnétique à travers ( $\Sigma$ ) = ( $\Sigma_1$ )  $\cup$  ( $\Sigma_2$ ) se calcule alors en orientant les surfaces élémentaires  $d\vec{S}$  vers l'extérieur du volume circonscrit par ( $\Sigma$ ) :

$$\begin{aligned} \phi &= \oiint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma_1)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M + \iint_{(\Sigma_2)} \vec{B}(N) \cdot d\vec{S}'_N \text{ avec } d\vec{S}'_N = -d\vec{S}_N \\ &= \iint_{(\Sigma_1)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M - \iint_{(\Sigma_2)} \vec{B}(N) \cdot d\vec{S}_N = \phi_1 - \phi_2 \end{aligned}$$

Du reste, la formule de Sockes-Ampères fournit :

$$\oiint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(V)} \text{div } \vec{B}(P) d\tau_P = 0 \text{ car } \text{div } \vec{B}(P) = 0$$

Il s'ensuit que :

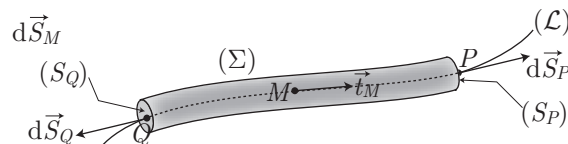
le champ magnétique est à flux conservatif, c'est-à-dire que le flux à travers une surface ouverte ne dépend pas de cette surface, mais seulement du contour qui la sous-tend :

$$\phi_1 = \phi_2$$

Remarque – On peut également concevoir la nature conservative du flux magnétique de la manière suivante : le flux  $\phi_1$  du champ magnétique qui « entre » dans un volume ( $V$ ) s'identifie toujours au flux  $\phi_2$  du champ magnétique qui en « sort ».

### 3.4.2.4 Lignes de champ

On ne peut déduire de l'équation  $\text{div } \vec{B} = 0$  que les lignes de champ se referment sur elles-mêmes. En effet, la solution  $\vec{B} = c\vec{t}_M$  est solution de cette équation bien que les lignes de champ correspondantes soient parallèles les unes aux autres. En revanche, considérons une ligne de champ ( $\mathcal{L}$ ) passant par un point  $M$  :



Choisissons alors une surface ( $\Sigma$ ) en forme de tube, infiniment fin et entourant localement ( $\mathcal{L}$ ), dont les sections droites  $S_P$  et  $S_Q$  sont perpendiculaires à ( $\mathcal{L}$ ) aux points respectifs  $P$  et  $Q$ . Étant donné que, pour tout point  $M$  d'une ligne de champ,  $\vec{B}(M)$  est localement tangent à ( $\mathcal{L}$ ), on peut poser :

$$\vec{B}(P) = B(P) \vec{t}_P \text{ et } \vec{B}(Q) = B(Q) \vec{t}_Q$$

où les vecteurs unitaires  $\vec{t}_P$  et  $\vec{t}_Q$  sont à l'origine de la définition des vecteurs surface :

$$d\vec{S}_P = dS_P \vec{t}_P \text{ et } d\vec{S}_Q = dS_Q \vec{t}_Q \text{ avec } dS_P > 0 \text{ et } dS_Q > 0$$

Il s'ensuit que le flux du champ magnétique à travers ( $\Sigma$ ) vaut :

$$\phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P + \vec{B}(Q) \cdot d\vec{S}_Q = B(P) dS_P + B(Q) dS_Q$$

De fait, l'équation  $\text{div } \vec{B} = 0$  a pour conséquence :

$$\phi = 0 \Rightarrow B(P) dS_P + B(Q) dS_Q \Rightarrow B(P) = -\frac{dS_Q}{dS_P} B(Q)$$

ce qui suffit à montrer que  $B(P)$  et  $B(Q)$  sont de signe opposé, c'est-à-dire que  $\vec{B}(P)$  et  $\vec{B}(Q)$  sont de sens inverse. On peut alors énoncer ce résultat de la manière suivante :

de part et d'autre d'un point  $M$  d'une ligne de champ, le champ magnétique peut ni converger, ni diverger : d'un côté de  $M$  le champ est dirigé vers  $M$  tandis qu'il s'en éloigne de l'autre côté.

Remarque – Ce résultat traduit l'absence de source ponctuelle de champ magnétique, d'où pourraient diverger toutes les lignes de champ.

### 3.4.2.5 Le potentiel vecteur

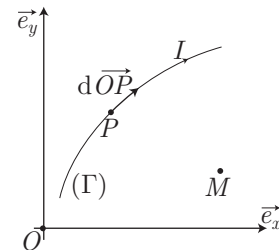
Étant donné que pour tout champ vectoriel  $\vec{u}$ ,  $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{u}) = 0$ , l'équation  $\text{div } \vec{B} = 0$  suffit à montrer l'existence d'un champ vectoriel  $\vec{A}(M)$ , appelé *potentiel vecteur*, tel que :

$$\vec{B}(M) = \vec{\text{rot}} [\vec{A}(M)] \Leftrightarrow \text{div } \vec{B}(M) = 0 \quad (25)$$

On peut noter qu'il existe un potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$  dont le rotationnel redonne la loi de Biot et Savart :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{d\vec{O}\vec{P}}{MP}$$

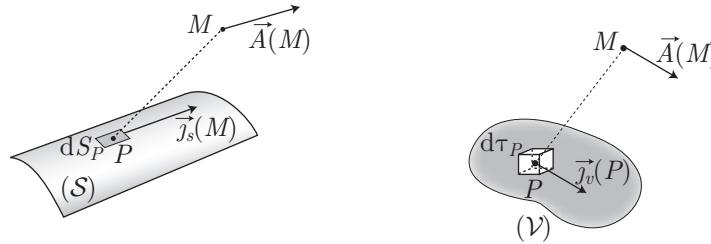
$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \vec{\text{rot}} [\vec{A}(M)] = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{d\vec{O}\vec{P} \wedge \vec{P}\vec{M}}{PM^3}$$



Si le courant électrique est réparti en surface ou en volume, avec des densités respectives  $\vec{j}_s(P)$  et  $\vec{j}_v(P)$ , les potentiels vecteurs :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(S)} \frac{\vec{j}_s(P)}{PM} dS_P \text{ et } \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \frac{\vec{j}_v(P)}{PM} d\tau_P$$

sont des solutions de l'équation (25) compatibles avec la loi de Biot et Savart.



Le calcul du potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$ , dont dérive le champ magnétique  $\vec{B}(M)$ , peut se mener de plusieurs manières :

- par un calcul direct des intégrales :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{(\Gamma)} \frac{d\vec{OP}}{PM} \quad \text{ou} \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{(S)} \frac{\vec{j}_s(P)}{PM} dS_P$$

$$\text{ou} \quad \vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \frac{\vec{j}_v(P)}{PM} d\tau_P$$

à condition que les courants aient une extension spatiale finie, sans quoi ces intégrales divergent ;

- par la résolution des équations différentielles qui émanent de la relation :

$$\vec{B}(M) = \text{rot } \vec{A}(M)$$

à condition que l'expression du rotationnel soit connue (un étudiant de deuxième année de classe préparatoire est supposé connaître cette expression en coordonnées cartésiennes, mais pas en coordonnées cylindriques ou sphériques) ;

- par l'expression explicite des intégrales :

$$\iint_{(S)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = \oint_{(\Gamma)} \vec{A}(P) \cdot d\vec{OP}$$

### 3.4.2.6 Équation de Maxwell-Ampère

Si, en un point  $M$ , circule un courant de densité volumique  $\vec{j}_v(M)$ , le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  produit en  $M$  vérifie l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}} [\vec{B}(M)] = \mu_0 \vec{j}_v(M)$$

Considérons un contour fermé  $(\Gamma)$  sur lequel un point courant  $P$  se déplace de  $d\vec{\ell}$ . Ce contour délimite une surface  $(\Sigma)$  traversée par un courant  $I_{\text{int}}$ . Le sens choisi par  $P$  pour décrire  $(\Gamma)$  détermine l'orientation de la surface élémentaire  $d\vec{S}$  de  $(\Sigma)$  :

les doigts de la main droite tournant dans le sens de parcours de  $(\Gamma)$ , le pouce tendu donne l'orientation de  $d\vec{S}$ . Ce faisant, le théorème de Stokes-Ampère indique que :

$$\begin{aligned} \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell} &= \int_{(\Sigma)} \overrightarrow{\text{rot}} [\vec{B}(M)] \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} \mu_0 \vec{j}_v(M) \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \iint_{(\Sigma)} \vec{j}_v(M) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

d'où découle le *théorème d'Ampère* :  $\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}$



L'utilisation du théorème d'Ampère en vue de calculer le champ magnétique  $\vec{B}(P)$  en un point  $P$  doit respecter le protocole suivant :

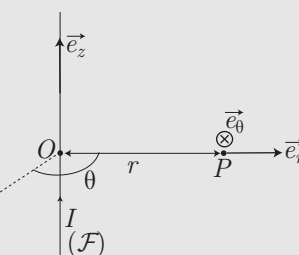
- Déterminer les caractéristiques de  $\vec{B}(P)$  en  $P$  (éléments de symétrie passant par  $P$ , invariants éventuels).
- Trouver un contour  $(\Gamma)$  sur lequel : soit  $\|\vec{B}(P)\|$  est constant en tout point  $P$ , soit  $\vec{B}(P) \perp d\vec{\ell}$  aux points  $P$  où  $\|\vec{B}(P)\|$  n'est pas constant.
- Calculer la circulation de  $\vec{B}$  le long de  $(\Gamma)$  :  $\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell}$ .
- Déterminer  $I_{\text{int}}$  en ayant soin de respecter l'orientation de la surface  $(\Sigma)$ .



Un fil infini rectiligne  $(\mathcal{F})$  est parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

On note  $\vec{e}_z$  un vecteur unitaire directeur de  $(\mathcal{F})$ . Les composantes des divers vecteurs seront exprimées dans la base cylindrique  $(0, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ .

1. Quelles sont les caractéristiques du champ magnétique  $\vec{B}(P)$  en un point  $P$  situé à une distance  $r$  de  $(\mathcal{F})$  ?
2. En utilisant le théorème d'Ampère, déterminer  $\vec{B}(P)$ .



#### RÉPONSE

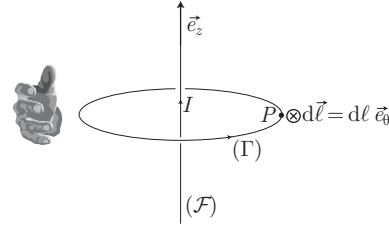
1. Le plan contenant  $(\mathcal{F})$  et passant par  $P$  est évidemment un plan de symétrie pour  $(\mathcal{F})$ , ce qui signifie que  $\vec{B}(P)$  est perpendiculaire à ce plan :  $\vec{B}(P) = B \vec{e}_\theta$ . En outre, toute rotation de  $(\mathcal{F})$  et toute translation dans la direction de  $\vec{e}_z$  laissent invariante la distribution de courant, ce qui se traduit par l'indépendance de  $B$  à l'égard des paramètres  $\theta$  et  $z$  :

$$\vec{B}(P) = B(r) \vec{e}_\theta$$

2. La norme  $\|\vec{B}(P)\| = B(r)$  est constante sur tout cercle d'axe  $(\mathcal{F})$ , auquel cas le parcours  $(\Gamma)$  choisi est un cercle d'axe  $(\mathcal{F})$ , qui contient  $P$ .

Ce faisant, la circulation du champ  $\vec{B}(P) = B(r)\vec{e}_\theta$  le long de  $(\Gamma)$  est définie par :

$$\begin{aligned} C &= \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(P) \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(\Gamma)} B(r) \times d\ell \\ &= B(r) \oint_{(\Gamma)} d\ell = B(r) \times 2\pi r \end{aligned}$$



En outre, le sens le parcours de  $(\Gamma)$  a été choisi de manière à ce que  $(\Gamma)$  englobe le courant d'intensité algébrique  $I_{\text{int}} = +I$ , en conséquence de quoi le théorème d'Ampère se traduit par :

$$C = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow \vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

Étant donné que  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  :

$$\text{rot } [\text{rot } \vec{A}] = \mu_0 \vec{j}_v \Rightarrow \text{grad } (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}_v$$

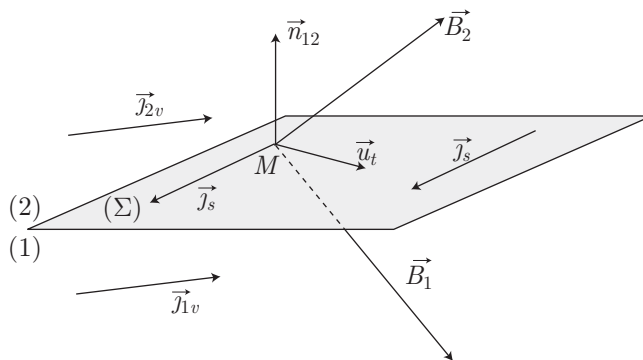
Ainsi, la jauge de Coulomb :  $\text{div } \vec{A} = 0$  conduit à une définition locale du potentiel vecteur :

$$\Delta \vec{A}(M) + \mu_0 \vec{j}_v(M) = \vec{0}$$

La similitude de cette équation avec l'équation de Poisson (dont la solution est connue), justifie le choix de la jauge de Coulomb.

### 3.4.2.7 Continuité du champ magnétique

Considérons deux milieux (1) et (2) dans lesquels peuvent circuler des courants de densités volumiques  $\vec{j}_{1v}$  et  $\vec{j}_{2v}$ . Ces milieux sont séparés par une surface  $(\Sigma)$  sur laquelle circule un courant de densité surfacique  $\vec{j}_s$ .



On note  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  les champs magnétiques dans (1) et (2), au voisinage d'un point  $M$  de  $(\Sigma)$ . Soit  $\vec{n}_{12}$  un vecteur unitaire normal à  $(\Sigma)$  en  $M$ , dirigé du milieu (1) vers le milieu (2) et soit  $\vec{u}_t$  le vecteur unitaire tel que  $\vec{u}_t = \frac{1}{\|\vec{j}_s\|} \vec{n}_{12} \wedge \vec{j}_s$ . La projection de  $\vec{B}_1$

et  $\vec{B}_2$  sur les directions de  $\vec{u}_n$  et de  $\vec{u}_t$  valent :

$$\begin{cases} \vec{B}_1 \cdot \vec{n}_{12} = B_{1n} \\ \vec{B}_2 \cdot \vec{u}_t = B_{1t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{B}_2 \cdot \vec{n}_{12} = B_{2n} \\ \vec{B}_2 \cdot \vec{u}_t = B_{2t} \end{cases}$$

En calculant le flux du champ magnétique à travers une surface fermée infiniment petite, qui traverse ( $\Sigma$ ), on montre qu'il y a continuité des composantes normales du champ magnétique :

$$B_{1n} = B_{2n}$$

En revanche, le calcul de la circulation du champ magnétique le long d'un parcours fermé infinitésimal, qui traverse ( $\Sigma$ ), conduit à :

$$B_{2t} - B_{1t} = \mu_0 j_s$$

D'une manière plus générale, si  $\vec{u}_t$  n'est pas perpendiculaire à  $\vec{j}_s$ , on montre, de la même façon, que :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$$

### 3.4.3 Forces de Laplace

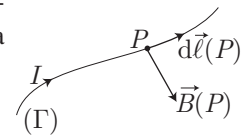
#### 3.4.3.1 Action d'un champ magnétique sur un courant

On a évoqué, dans le cours de première année, l'existence d'une *force de Lorentz* qui s'exerce sur une charge  $q$ , animée d'une vitesse  $\vec{v}$  et plongée dans un champ magnétique  $\vec{B}$  :

$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Aussi, un élément  $d\vec{\ell}$  d'un circuit parcouru par un courant d'intensité  $I$ , plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , est soumis à la *force de Laplace*

$$\delta \vec{f} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$



Par conséquent, un fil ( $\Gamma$ ), parcouru par un courant d'intensité  $I$ , est soumis à une force totale :

$$\vec{f} = \int_{(\Gamma)} I d\vec{\ell}(P) \wedge \vec{B}(P)$$

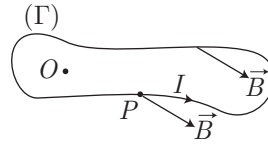
Remarque – Si un milieu ( $\mathcal{D}$ ) est parcouru par un courant de densité surfacique  $\vec{j}_s(P)$  ou volumique  $\vec{j}_v(P)$  en chaque point  $P$  de sa surface ou de son volume, la force de Laplace qui s'exerce sur ( $\mathcal{D}$ ) vaut :

$$\vec{f} = \iint_{(\mathcal{D})} \vec{j}_s(P) \wedge \vec{B}(P) dS \quad \text{ou} \quad \vec{f} = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}_v(P) \wedge \vec{B}(P) d\tau_P$$

### 3.4.3.2 Résultante des forces magnétiques

#### CAS D'UN CHAMP UNIFORME

Soit  $(\Gamma)$  un circuit fermé, dans lequel circule un courant d'intensité  $I$ . On note  $P$  un point courant de  $(\Gamma)$ , où règne un champ magnétique  $\vec{B}(P) = \vec{B}$  supposé uniforme. La résultante des forces de Laplace qui s'exercent sur  $(\Gamma)$  vaut :



$$\vec{\mathcal{R}} = \oint_{(\Gamma)} I d\vec{OP} \wedge \vec{B}(P) = I \times \underbrace{\left( \oint_{(\Gamma)} d\vec{OP} \right)}_{=\vec{0}} \wedge \vec{B} \quad (26)$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{R}} = \vec{0} \text{ si } \vec{B} \text{ est uniforme.} \quad (27)$$

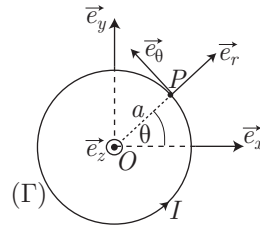
#### CAS D'UN CHAMP NON UNIFORME

Considérons maintenant une spire circulaire  $(\Gamma)$ , de centre  $O$ , de rayon  $a$ , parcourue par un courant d'intensité  $I$  et placée dans un champ magnétique extérieur  $\vec{B}$ . Un point  $P$  de  $(\Gamma)$  est repéré par ses coordonnées polaires  $(R, \theta, z = 0)$  dans la base  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ .

Dans cette base, définissons un champ magnétique par :

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta + B_z \vec{e}_z$$

où  $B_r = 0$ ,  $B_\theta = Kr \sin \theta$  et  $B_z = -Kz \cos \theta$  ( $K$  est une constante réelle non nulle) assurent à  $\vec{B}(P)$  de ne pas être uniforme.



Dans ces conditions :

$$\begin{aligned} d\vec{OP} \wedge \vec{B}(P) &= \begin{pmatrix} 0 \\ a d\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ Kr \sin \theta \\ -Kz \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Kaz \cos \theta d\theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -Kaz \cos \theta d\theta \vec{e}_r \end{aligned}$$

où le vecteur  $\vec{e}_r$  a pour composantes, dans la base cartésienne  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$  :

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{OP} \wedge \vec{B}(P) = -Kaz \cos^2 \theta d\theta \vec{e}_x - Kaz \cos \theta \sin \theta d\theta \vec{e}_y$$

Ce faisant, la résultante :

$$\vec{\mathcal{R}} = I \oint_{(\Gamma)} d\vec{OP} \wedge \vec{B}(P) = \mathcal{R}_x \vec{e}_x + \mathcal{R}_y \vec{e}_y + \mathcal{R}_z \vec{e}_z$$

a pour composantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x &= -IKaz \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = -\frac{IKaz}{2} \times 2\pi = -\pi IKaz \\ \mathcal{R}_y &= -IKaz \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{IKaz}{4} [\cos(2\theta)]_0^{2\pi} = 0 \\ \mathcal{R}_z &= 0 \end{aligned}$$

On admettra la généralisation de ce résultat :

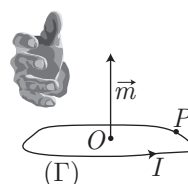
La résultante des forces de Laplace n'est en général pas nulle lorsque le champ magnétique n'est pas uniforme.

### 3.4.3.3 Moment des forces magnétiques

**Définition 25** Soit  $(\Gamma)$  un circuit fermé, plan, parcouru par un courant d'intensité  $I$ . En notant  $\vec{S}$  un vecteur perpendiculaire à  $(\Gamma)$  et dont la norme s'identifie à la surface  $S$  circonscrite par  $(\Gamma)$ , on définit le moment magnétique de  $(\Gamma)$  par :

$$\vec{m} = I \vec{S}$$

Remarque – Le moment magnétique de  $(\Gamma)$  est orienté par la « règle de la main droite » : l'ensemble des doigts de la main droite tournant dans le sens de circulation du courant électrique, le pouce tendu donne l'orientation de  $\vec{m}$ .



Dans un champ magnétique  $\vec{B}$  uniforme, le moment des forces de Laplace est donné par le produit vectoriel :

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad (28)$$

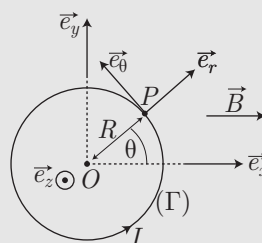


Un circuit circulaire  $(\Gamma)$ , de rayon  $R$  et de centre  $O$ , est parcouru par un courant d'intensité  $I$ .  $(\Gamma)$  est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B} = B \vec{e}_x$ , comme l'indique la figure ci-dessous.

1. (a) Soit  $\delta \vec{\mathcal{M}}_O$  le moment de la force de Laplace qui s'exerce en un point  $P$  de  $(\Gamma)$  :  $\delta \vec{f} = I d\vec{OP} \wedge \vec{B}$ . Déterminer, en coordonnées polaires, les composantes de  $\delta \vec{\mathcal{M}}_O$ .

(b) En déduire, dans la base  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ , les composantes de  $\delta \vec{\mathcal{M}}_O$  puis calculer le moment  $\vec{\mathcal{M}}_O$  en  $O$  des forces de Laplace qui s'exercent sur la totalité de  $(\Gamma)$ .

2. Après avoir donné l'expression du moment magnétique  $\vec{m}$  de  $(\Gamma)$ , retrouver l'expression de  $\vec{\mathcal{M}}_O$ .



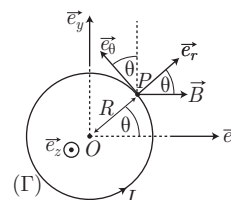
#### RÉPONSE

1. (a) Un point  $P$  de  $(\Gamma)$  est caractérisé par son vecteur position :

$$\vec{OP} = R \vec{e}_r \Rightarrow d\vec{OP} = R d\vec{e}_r = R d\theta \vec{e}_\theta$$

Ainsi, le moment de la force de Laplace qui s'exerce sur  $P$  vaut :

$$\begin{aligned} \delta \vec{\mathcal{M}}_O &= \vec{OP} \wedge [I d\vec{OP} \wedge \vec{B}] \\ &= I [d\vec{OP} \times (\vec{B} \cdot \vec{OP}) - \vec{B} \times (\vec{OP} \cdot d\vec{OP})] \end{aligned}$$





Or :

$$\vec{OP} \cdot d\vec{OP} = (R \vec{e}_r) \cdot (R d\theta \vec{e}_\theta) = 0$$

tandis que  $\vec{B} \cdot \vec{OP} = RB \cos \theta$  conduit à :

$$\delta \vec{\mathcal{M}}_O = IR d\theta \vec{e}_\theta \times RB \cos \theta = IR^2 B \cos \theta d\theta \vec{e}_\theta$$

(b) Dans la base  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ , les composantes du vecteur  $\vec{e}_\theta \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$  conduisent à celles de  $\delta \vec{\mathcal{M}}_O$  :

$$\delta \vec{\mathcal{M}}_O = \begin{pmatrix} \delta \mathcal{M}_{Ox} \\ \delta \mathcal{M}_{Oy} \\ \delta \mathcal{M}_{Oz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -IR^2 B \cos \theta \sin \theta d\theta \\ IR^2 B \cos^2 \theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, les composantes du moment  $\vec{\mathcal{M}}_O$  des forces de Laplace qui s'exercent sur la totalité de  $(\Gamma)$  sont données par :

$$\mathcal{M}_{Ox} = -IR^2 B \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{IR^2 B}{2} \left[ \frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Oy} &= IR^2 B \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = IR^2 B \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \frac{IR^2 B}{2} \times \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta + \int_0^{2\pi} \cos(2\theta) d\theta \right\} \\ &= \frac{IR^2 B}{2} \times \left\{ 2\pi + \left[ \frac{\sin(2\theta)}{2} \right]_0^{2\pi} \right\} = I\pi R^2 B \end{aligned}$$

et  $\mathcal{M}_{Oz} = 0$ . Il s'ensuit que :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = I\pi R^2 B \vec{e}_y$$

2. D'après sa définition :  $\vec{m} = I \vec{S}$ , où  $\vec{S} = \pi R^2 \vec{e}_z$ , le moment magnétique de  $(\Gamma)$  vaut :

$$\vec{m} = I\pi R^2 \vec{e}_z$$

Par suite :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{m} \wedge \vec{B} = I\pi R^2 B \vec{e}_z \wedge \vec{e}_x \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = I\pi R^2 B \vec{e}_y$$

### 3.4.4 Énergie magnétostatique

On peut montrer que la densité volumique d'énergie magnétostatique vaut, en un point  $M$  de l'espace :

$$u_B = \frac{\|\vec{B}(M)\|^2}{2\mu_0}$$

de sorte que l'énergie magnétostatique vaut, dans la totalité de l'espace :

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_{\text{espace}} \|\vec{B}(M)\|^2 d\tau_M$$

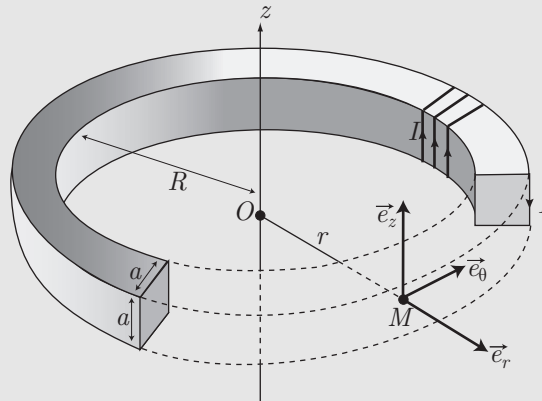


Une bobine torique est composée de  $N$  spires jointives carrées, de côté  $a$ , situées à une distance  $R$  d'un axe  $(Oz)$  : Un point  $M$  de l'espace sera repéré par ses coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . On peut montrer que, la bobine étant parcourue par un courant d'intensité  $I$ , elle produit un champ magnétique nul à l'extérieur :

$$\vec{B}_{\text{ext}} = \vec{B}(r, \theta, z) = \vec{0} \text{ pour } r < R \text{ ou } r > R + a \text{ ou } |z| > \frac{a}{2}$$

et un champ magnétique non nul à l'intérieur :

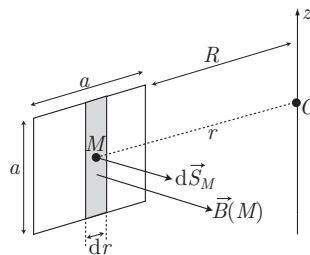
$$\vec{B}_{\text{int}} = \vec{B}(r, \theta, z) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \text{ pour } \begin{cases} R < r < R + a \\ |z| < \frac{a}{2} \end{cases}$$



1. Montrer que le flux du champ magnétique, à travers la totalité des  $N$  spires, s'écrit :  $\phi = L \times I$ , où l'on exprimera le coefficient d'auto-inductance  $L$  en fonction de  $N$ ,  $a$  et  $R$ .
2. Déterminer l'énergie magnétostatique  $\mathcal{E}_B$  produite par la bobine dans l'espace, en utilisant l'expression de sa densité volumique  $u_B$ . On exprimera le résultat en fonction de  $L$  et  $I$  seulement.
3. En électrocinétique, la bobine est assimilée à un dipôle aux bornes duquel règne une tension  $U = L \frac{di}{dt}$  lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité  $i$ . En exprimant la puissance électrique absorbée par ce dipôle, montrer que la bobine emmagasine une énergie dont l'expression est compatible avec  $\mathcal{E}_B$ .

#### RÉPONSE

1. Isolons, dans une spire, une bande ( $\mathcal{B}$ ) de longueur  $a$ , d'épaisseur  $dr$ , située à une distance  $r$  de ( $Oz$ ) :



Une telle bande présente un vecteur surface  $d\vec{S}_M = a dr \vec{e}_\theta$ , tandis que le champ magnétique y prend la valeur :  $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ . Par suite, le flux magnétique à travers ( $\mathcal{B}$ ) vaut :

$$\delta\phi_0 = \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \times \frac{dr}{r}$$

de sorte que le flux du champ magnétique à travers une spire vaut :

$$\phi_0 = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \int_R^{R+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N I a}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{R} \right)$$

Aussi, le flux magnétique à travers la totalité des  $N$  spires qui composent la bobine est donné par :

$$\phi = N \times \phi_0 = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{R} \right) \times I$$

expression que l'on peut aussi écrire :

$$\phi = L \times I \text{ avec } L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{R} \right) \quad (29)$$

2. La bobine sépare l'espace en deux régions : celle (int) qui lui est intérieure et celle (ext) qui lui est extérieure. Par conséquent, l'énergie magnétostatique que la bobine produit dans l'espace vaut :

$$\mathcal{E}_B = \iiint_{\text{espace}} u_B(M) d\tau_M = \iiint_{(\text{int})} u_B(M) d\tau_M + \iiint_{(\text{ext})} u_B(M) d\tau_M$$

où  $u_B(M) = \frac{1}{2\mu_0} \|\vec{B}(M)\|^2$ , c'est-à-dire :

- à l'extérieur de la bobine :

$$\|\vec{B}_{\text{ext}}(M)\| = 0 \Rightarrow u_B(M) = 0 \Rightarrow \iiint_{(\text{ext})} u_B(M) d\tau_M = 0$$

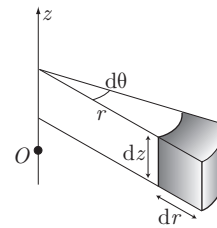
- à l'intérieur de la bobine :

$$\|\vec{B}_{\text{int}}(M)\| = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \Rightarrow u_B(M) = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

Soit  $d\tau$  un volume élémentaire exprimé en coordonnées cylindriques :

$$d\tau = dz \times r d\theta \times dr$$

à partir duquel s'exprime  $\mathcal{E}_B$  :



$$\begin{aligned} \mathcal{E}_B &= \iiint_{(\text{int})} u_B(M) \times r dr d\theta dz \\ &= \int_{r=R}^{R+a} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-a/2}^{a/2} \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2} \times \frac{dr}{r} \times d\theta dz \\ &= \frac{\mu_0 N^2 I^2}{8\pi^2} \ln \left( \frac{R+a}{R} \right) \times 2\pi \times a = \frac{\mu_0 N^2 a}{4\pi} \ln \left( 1 + \frac{a}{R} \right) \times I^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}_B = \frac{1}{2} L I^2 \quad (30)$$

3. La puissance  $\mathcal{P}$  reçue par une bobine traversée par un courant d'intensité  $i$ , aux bornes de laquelle règne une tension  $U = L \frac{di}{dt}$ , est liée à l'énergie  $dE$  emmagasinée par la bobine pendant  $dt$  :

$$\mathcal{P} = U \times i \Rightarrow \frac{dE}{dt} = L \frac{di}{dt} \times i \Rightarrow dE = L i di$$

Notamment, si l'énergie  $E$  est nulle lorsque  $i$  est nul, cette énergie prend la valeur  $\mathcal{E}'_B$  lorsque  $i = I \neq 0$  :

$$\int_0^{\mathcal{E}'_B} dE = L \int_0^I i di \Rightarrow \mathcal{E}'_B = \frac{1}{2} L I^2$$

On s'assurera que la compatibilité de ce résultat avec la relation (30) prouve que l'énergie emmagasinée par la bobine l'est sous forme d'énergie magnétostatique.

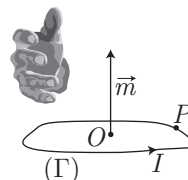
### 3.4.5 Le dipôle magnétique

#### 3.4.5.1 Potentiel vecteur et champ créés

**Définition 26** On appelle *dipôle magnétique* un circuit plan ( $\Gamma$ ), parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Le moment magnétique de ce dipôle vaut alors :

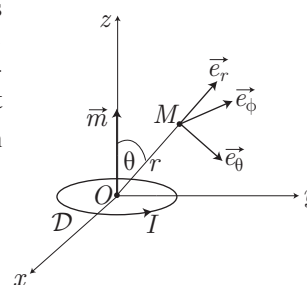
$$\vec{m} = I \times \vec{S}$$

$$\text{où } \vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} \vec{OP} \wedge d\vec{OP}.$$



Soit ( $\mathcal{D}$ ) un dipôle magnétique de centre  $O$ , situé dans un plan ( $Oxy$ ), de moment magnétique  $\vec{m} = IS \vec{e}_z$  et de rayon  $R$ . Un point  $M$  de l'espace est caractérisé par ses coordonnées sphériques  $r = OM \gg R$  et  $\theta = (\vec{OM}, \vec{e}_z)$ . Le potentiel vecteur produit par ( $\mathcal{D}$ ) en  $M$  a pour expression :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{\vec{m} \wedge \vec{OM}}{OM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{\vec{m} \wedge \vec{e}_r}{r^2}$$



Le vecteur  $\vec{m}$  ayant pour composante :  $\vec{m} = m \vec{e}_z$ , on obtient :

$$\vec{m} \wedge \vec{e}_r = m \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = m \vec{e}_\phi \Rightarrow \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{\vec{e}_\phi}{r^2}$$

Quant au champ magnétique produit par le dipôle magnétique, il s'obtient à l'aide de la relation :

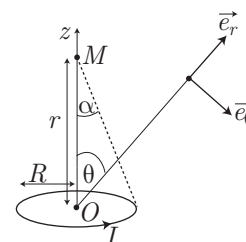
$$\vec{B}(M) = \text{rot} \left[ \vec{A}(M) \right] = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{2m \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{m \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta \right) \quad (31)$$

Le calcul du champ magnétique produit par une boucle de courant en un point  $M$  de son axe a été réalisé à la page 358 et a fourni le résultat (24) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$

où  $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{r^2 + R^2}} \simeq \frac{R}{r}$  lorsque  $r \gg R$ . Il s'ensuit que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \times \frac{R^3}{r^3} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} \vec{e}_z \quad (32)$$



Du reste, lorsque le point  $M$  se trouve sur l'axe du dipôle magnétique, l'angle  $\theta$  est nul tandis que  $\vec{e}_r$  s'identifie à  $\vec{e}_z$ , auquel cas la relation (31) devient :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{2m}{r^3} \vec{e}_r = \frac{\mu_0 m}{2\pi r^3} \vec{e}_z$$

avec :

$$m = I \times \pi R^2 \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2r^3} \vec{e}_z$$

ce qui confirme l'identité (32).

Remarque – *Tout aimant de taille assez petite possède un moment magnétique  $\vec{m}$  qui crée, à grande distance, un champ magnétique de même structure que celui créé par une spire de petite dimension ; un aimant est assimilable à un très grand nombre de dipôles magnétiques.*

### 3.4.5.2 Interactions avec un champ uniforme

Conformément au résultat (27) de la page 367, la résultante des forces de Laplace qui s'exercent sur le dipôle vaut :

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{0} \text{ si } \vec{B} \text{ est uniforme.}$$

De même, le résultat (28) de la page 368 s'applique au cas du dipôle magnétique de moment  $\vec{m}$  plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  ; le moment des forces de Laplace vaut :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

Sous l'influence d'un champ magnétique uniforme, un dipôle magnétique acquiert l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$$

Remarque – *En interagissant avec des champs extérieurs, les dipôles électriques et magnétiques montrent des analogies :*

Moment électrique	Moment magnétique
$\vec{\mathcal{R}} = \vec{0}$	$\vec{\mathcal{R}} = \vec{0}$
$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}$	$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{m} \wedge \vec{B}$
$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

## 3.5 Les équations de Maxwell en régime non stationnaire

### 3.5.1 Équation de Maxwell-Faraday

En régime dépendant du temps, l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit sous sa forme locale :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E}(M) = -\frac{\partial \vec{B}(M)}{\partial t}$$

Remarque – *Dans le cadre des régimes indépendants du temps :*

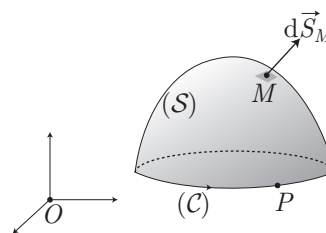
$$\frac{\partial \vec{B}(M)}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E}(M) = \vec{0}$$

On retrouve ainsi l'équation de Maxwell-Faraday en régime permanent.

Il est possible d'expliciter cette équation sous forme intégrale. Considérons un contour fermé,  $(C)$ , orienté, sur lequel s'appuie une surface  $(S)$ ,  $(C)$  et  $(S)$  étant fixes.

Le sens de  $d\vec{S}$  est corrélé à l'orientation de  $(C)$  selon la « règle de la main droite ».

Nous avons l'égalité :



$$\iint_{(S)} \operatorname{rot} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \iint_{(S)} -\frac{\partial \vec{B}(M)}{\partial t} \cdot d\vec{S}_M = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M.$$

D'après le théorème de Stokes-Ampère nous déduisons que :

$$\iint_{(S)} \operatorname{rot} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \oint_{(C)} \vec{E}(P) \cdot d\vec{OP}$$

Il s'ensuit que :

$$\oint_{(C)} \vec{E}(P) \cdot d\vec{OP} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Nous retiendrons les formulations locales et intégrales de la relation de Maxwell-Faraday :

$$\operatorname{rot} \vec{E}(M) = -\frac{\partial \vec{B}(M)}{\partial t} \text{ et } \oint_{(C)} \vec{E}(P) \cdot d\vec{OP} = -\frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Remarque – La formulation intégrale de cette relation sera très utile lorsque l'opérateur rotationnel sera difficile à expliciter.

Une conséquence importante de cette équation, est que le champ électrique n'est pas, en général, à circulation conservative. En régime variable :

$$\vec{E} \neq -\operatorname{grad} V$$

### 3.5.2 Équation de Maxwell-Ampère

Cette dernière s'exprime aussi sous sa forme locale :

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_v + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

et sous sa forme intégrale :

$$\oint_{(C)} \vec{B}(P) \cdot d\vec{OP} = \mu_0 \iint_{(S)} \vec{j}_v(M) \cdot d\vec{S}_M + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \iint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Une fois de plus on passe d'une formulation à l'autre en utilisant le théorème de Stokes-Ampère.

Remarque – Dans le cadre des régimes permanents :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_v$$

On retrouve à nouveau l'équation de Maxwell-Ampère des régimes permanents.

**Définition 27** On appelle courant de déplacement le vecteur :

$$\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

L'équation de Maxwell-Ampère peut s'écrire alors :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_v + \vec{j}_d)$ .

### 3.5.3 Équation de Maxwell-Gauss et du flux magnétique

Ces équations ne sont pas modifiées par rapport à celles des régimes permanents. Nous rappelons donc les formes locales et intégrales de ces équations :

- l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ et } \iint_{(S)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

- l'équation du flux magnétique :

$$\text{div } \vec{B}(M) = 0 \text{ et } \iint_{(S)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = 0$$

Le champ magnétique est toujours à flux conservatif.

Le champ électrique satisfait toujours au théorème de Gauss.

### 3.5.4 Relations champs-potentiels

L'équation  $\text{div } \vec{B} = 0$  implique toujours l'existence du potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ .

Les équations :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  et  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$  donnent, quant à elles :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{rot}} \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Cette dernière égalité suggère l'existence d'un potentiel scalaire  $V$  tel que :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

On retiendra donc les deux relations champs-potentiels :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \text{ et } \vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Remarque – Comme en régime permanent, les potentiels ne sont pas uniques.

### 3.5.5 Équations aux potentiels

De l'équation  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  nous déduisons que :

$$\text{div} \left( -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \Delta V + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Nous avons là une première relation entre les potentiels. À partir de l'égalité :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

et de :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{B}$ , nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= \mu_0 \vec{j}_v + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \Rightarrow \mu_0 \vec{j}_v + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \Rightarrow \mu_0 \vec{j}_v - \mu_0 \varepsilon_0 \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} &= \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A} \\ \Rightarrow \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j}_v &= \overrightarrow{\text{grad}} \left( \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right) \text{ avec } c^2 \varepsilon_0 \mu_0 = 1 \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une seconde relation entre les potentiels.

Rappelons que  $\vec{A}$  et  $V$  ne sont pas uniques. Il est possible, en se plaçant dans une jauge particulière, de simplifier les équations précédentes. Il s'agit de la *Jauge de Lorentz* dans laquelle :

$$\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{A}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

Remarque – Cette jauge n'assure pas l'unicité des deux potentiels.

On retiendra les équations valables dans la jauge de Lorentz :

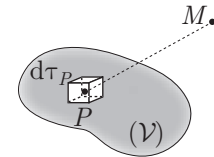
$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \text{ et } \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \mu_0 \vec{j}_v = \vec{0}$$

### 3.5.6 Potentiels retardés

On admettra pour la suite que ces équations ont pour solutions :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} d\tau_P$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\vec{j}_v(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} d\tau_P$$



La notion de potentiels retardés est à associer au fait que le potentiel au point  $M$  à l'instant  $t$ , dépend des valeurs de la fonction caractéristique des sources  $\rho$  ou  $\vec{j}_v$  aux



points  $P$  de la distribution à l'instant  $t - \frac{PM}{c}$ .  $\frac{PM}{c}$  représente le temps que met le signal électromagnétique pour se propager de  $P$  à  $M$ .

### 3.5.7 Approximations

#### 3.5.7.1 Approximation des régimes quasi permanents

Dans le cas où les évolutions temporelles des potentiels ne sont pas trop rapides, ces derniers sont donnés par :

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho(P, t)}{PM} d\tau_P$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{(V)} \frac{\vec{j}_v(P, t)}{PM} d\tau_P$$

Remarque –  $\vec{A}$  et  $V$  se calculent donc comme en régime stationnaire, il suffit de remplacer  $\rho(P)$  par  $\rho(P, t)$  et  $\vec{j}_v(P)$  par  $\vec{j}_v(P, t)$ .

Une fois les potentiels déterminés il est possible d'obtenir les champs par les relations champs-potentiels.

La relation entre  $\vec{B}$  et  $\vec{A}$  :  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  n'étant pas modifiée par rapport au cas des régimes permanents, dans l'A.R.Q.P.<sup>2</sup>  $\vec{B}$  se calcule en utilisant les relations de magnéto-statique.

Par contre pour  $\vec{E}$  la situation est différente, à cause du terme supplémentaire  $-\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  :

$$\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Les relations d'électrostatique ne pourront plus être utilisées pour le déterminer.

#### 3.5.7.2 Approximation des régimes quasi permanents dans un conducteur

Dans tout conducteur qui obéit à la loi d'Ohm nous avons les relations :

$$\vec{j}_v = \gamma \vec{E}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Dans le cadre de l'A.R.Q.P. il sera possible de négliger  $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  par rapport à  $\gamma \vec{E}$ . Cette approximation sera d'autant plus justifiée que  $\gamma$  sera élevé et que les variations temporelles de  $\vec{E}$  seront faibles. Pour une évolution temporelle sinusoïdale du champ électrique nous avons  $\left| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right| = \omega |E|$ . L'approximation des régimes quasi permanents dans le conducteur est vérifiée si  $\epsilon_0 \omega \ll \gamma$ ,  $\gamma$  étant de l'ordre de  $10^7$  et  $\epsilon_0$  de l'ordre de  $10^{-12}$ , ceci laisse une bonne marge de manœuvre. Dans le cadre des régimes quasi permanents dans un conducteur qui obéit à la loi d'Ohm, on retiendra que :

<sup>2</sup>Abbréviation pour Approximation des Régimes Quasi Permanents.

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_v$$

### 3.6 Induction électromagnétique

#### 3.6.1 Loi de transformation des champs

Soit  $\mathcal{R}_2$  un référentiel en mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_1$ . On note  $\vec{V}_e$  la vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}_2$  par rapport à  $\mathcal{R}_1$ . Supposons qu'il existe dans chaque référentiel un champ électromagnétique :  $(\vec{E}_1, \vec{B}_1)$  dans  $\mathcal{R}_1$  et  $(\vec{E}_2, \vec{B}_2)$  dans  $\mathcal{R}_2$ . Une particule de charge  $q$ , de vitesse  $\vec{V}_1$  dans  $\mathcal{R}_1$  et  $\vec{V}_2$  dans  $\mathcal{R}_2$ , va subir respectivement dans ces référentiels les forces  $\vec{f}_1 = q\vec{E}_1 + q\vec{V}_1 \wedge \vec{B}_1$  et  $\vec{f}_2 = q\vec{E}_2 + q\vec{V}_2 \wedge \vec{B}_2$ . L'invariance de la force en relativité galiléenne permet d'écrire :

$$\vec{f}_1 = q\vec{E}_1 + q\vec{V}_1 \wedge \vec{B}_1 = q\vec{E}_2 + q\vec{V}_2 \wedge \vec{B}_2$$

Couplée à la loi de composition des vitesses :  $\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_e$ , cette égalité des forces permet de déduire la loi de transformation du champ électromagnétique :

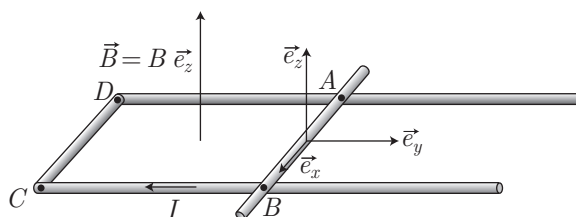
$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \vec{V}_e \wedge \vec{B}_2 \text{ et } \vec{B}_1 = \vec{B}_2$$

Remarque – Cette loi de transformation des champs n'est vraie qu'en relativité galiléenne.

#### 3.6.2 Circuit mobile dans un champ permanent, induction de Lorentz

##### 3.6.2.1 Expérience du rail de Laplace

Soit  $(AB)$  un rail conducteur qui peut glisser le long d'un cadre métallique. L'ensemble  $(A, B, C, D)$  constitue un circuit fermé, placé dans un champ magnétique permanent :  $B\vec{e}_z$ .



Lorsqu'on communique au rail une vitesse  $\vec{V} = V\vec{e}_y$ , on constate l'existence d'un courant induit dirigé de A vers B. On peut expliquer ce phénomène en faisant référence à la loi de transformation des champs. Effectivement, dans le référentiel lié à la tige, apparaît un champ électrique :  $\vec{E} = \vec{V} \wedge \vec{B} = BV\vec{e}_x$  qui déplace les électrons par l'intermédiaire de la force  $\vec{F} = q\vec{E} = -eBV\vec{e}_x$  donc de B vers A.

### 3.6.2.2 Induction de Lorentz

L'exemple précédent illustre un fait général : lorsqu'un circuit se déplace dans un champ magnétique permanent, il est soumis au phénomène d'induction de Lorentz :

**Définition 28** En tout point  $P$  d'un circuit qui se déplace dans un champ magnétique permanent  $\vec{B}$ , apparaît le champ électromoteur de Lorentz :  $\vec{E}(P)$ . Dans toute branche  $AB$  du circuit mobile apparaît la force électromotrice induite  $e_{AB}$  dirigée de  $A$  vers  $B$ .

On retiendra les relations :

$$\vec{E}(P) = \vec{V}(P) \wedge \vec{B}(P) \text{ et } e_{AB} = \int_A^B \vec{E}(P) \cdot d\vec{\ell}(P)$$



Exprimer la force électromotrice induite dans l'expérience des rails de Laplace en fonction de  $B$ ,  $V$  et  $\ell = AB$ .

RÉPONSE

$$e_{AB} = \int_A^B (BV \vec{e}_x) \cdot (dx \cdot \vec{e}_x) = BV\ell$$

### 3.6.2.3 Bilan de puissance

Soit une portion  $AB$  de circuit, parcourue par un courant d'intensité  $I_{AB}$ , en mouvement dans un champ magnétique permanent.  $AB$  subit des efforts de Laplace, dont la puissance  $P_L$  vérifie :

$$P_L = -e_{AB} \times I_{AB}$$

Remarque – Cette relation pourra être très utile pour la détermination de la force électromotrice



Dans l'étude des rails de Laplace, retrouver l'expression de la force électromotrice induite à partir d'un bilan de puissance

RÉPONSE Le mouvement de la tige étant une simple translation, la puissance des efforts  $\vec{F}_L$  de Laplace est donnée par  $P_L = \vec{F}_L \cdot \vec{V}$ . Il faut donc, pour commencer, exprimer la résultante des efforts de Laplace :

$$\vec{F}_L = \int_A^B I_{AB} d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \int_A^B I_{AB} (dx \vec{e}_x) \wedge (B \vec{e}_z) = -BI_{AB}\ell \vec{e}_y$$

On en déduit alors que  $P_L = -BI_{AB}\ell V$  et donc que  $e_{AB} = BV\ell$ .

### 3.6.2.4 Loi de Faraday

Dans le cas où le circuit est constitué d'une seule maille, la force électromotrice est donnée par la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

$\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$  étant le flux du champ magnétique appliqué, à travers une surface qui s'appuie sur le circuit. La force électromotrice est orientée dans le sens positif de parcours du circuit.

Remarque – Le signe de  $\phi$  dépend du sens positif choisi pour l'orientation du circuit.

### 3.6.3 Circuit fixe dans un champ magnétique variable, induction de Neumann

Tout circuit fixe placé dans un champ magnétique variable  $\vec{B}(t)$  subit le phénomène d'induction de Neumann. Il apparaît au sein du circuit une force électromotrice toujours donnée par la loi de Faraday. Toutefois dans ce cas les causes de variation du flux sont les variations temporelles du champ magnétique. Comme pour l'induction de Lorentz, il est possible de définir un champ électromoteur.

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = -\frac{d}{dt} \left( \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \right) = -\oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}$$

Ce qui permet de définir le champ électromoteur associé à l'induction de Neumann :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

On retiendra les relations :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\oint_C \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{\ell}$$

### 3.6.4 Induction dans le cas général

Pour un circuit qui se déplace dans un champ magnétique variable, la cause des variations du flux est double : il y a à la fois le déplacement du circuit et les variations temporelles de  $\vec{B}$ .

On définit le champ électromoteur résultant :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \vec{B}$$

La loi de Faraday reste vérifiée.

#### 3.6.4.1 Force électromotrice induite

Le champ  $\vec{E}$  est à l'origine d'une force électromotrice  $e$  induite par la variation du flux magnétique :

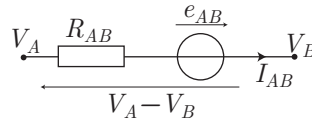
$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \int_C \left( -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{V} \wedge \vec{B} \right) \cdot d\vec{\ell}$$

### 3.6.4.2 Loi d'Ohm généralisée

Soit  $R_{AB}$  la résistance d'une portion de circuit, parcourue par  $I_{AB}$ . On note  $e_{AB}$  la force électromotrice induite.

Le schéma électrique équivalent permet de déduire la loi d'Ohm généralisée :

$$V_A - V_B = R_{AB}I_{AB} - e_{AB}$$



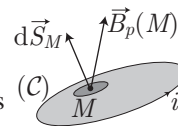
Remarque – Pour une maille  $V_A = V_B$  donc  $I_{AB} = \frac{e_{AB}}{R_{AB}}$

### 3.6.5 Auto-induction

#### 3.6.5.1 Inductance propre d'un circuit

Considérons un circuit  $(C)$  orienté parcouru par un courant  $i$ , on appelle flux propre :

$$\phi_p = \iint_S \vec{B}_p(M) \cdot d\vec{S}_M$$



$\vec{B}_p$  étant le champ magnétique créé par le circuit lui-même. Nous avons la relation :

$$\phi_p = Li$$

$L$  étant l'inductance propre du circuit, coefficient toujours positif, qui ne dépend que de la géométrie de ce dernier.  $L$  s'exprime en Henry (H). Ce coefficient se calcule comme le rapport de  $\frac{\phi_p}{i}$  lorsque le calcul de  $\phi_p$  est aisé. Dans le cas contraire on peut l'obtenir

par la relation  $\frac{1}{2}Li^2 = \iiint_V \frac{B_p^2(M)}{2\mu_0} d\tau_M$ .



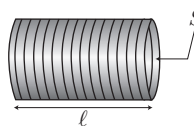
Exprimer l'inductance propre d'un solénoïde idéal de section  $S$ , de longueur  $\ell$  et de nombre de spires par unité de longueur  $n$  :

1. à partir de l'expression du flux propre ;
2. à l'aide d'un raisonnement énergétique.

#### RÉPONSE

1. Le flux propre associé à la spire  $k$  du solénoïde s'écrit  $\phi_k = \mu_0 niS$ . Le flux total à travers le solénoïde est donc  $\phi = n\ell\phi_k = \mu_0 n^2 \ell Si \Rightarrow L = \mu_0 n^2 \ell S$ .

2. Le champ magnétique produit par un solénoïde  $(S)$  est nul à l'extérieur de  $(S)$  et a pour intensité  $B_p = \mu_0 ni$  à l'intérieur de  $(S)$ . Donc  $B$  est non nul uniquement à l'intérieur du volume  $V = S \times \ell$  de  $(S)$ , en conséquence de quoi :



$$B_p = \mu_0 ni \Rightarrow \iint \frac{B_p^2(M)}{2\mu_0} d\tau_M = \frac{(\mu_0 ni)^2}{2\mu_0} V = \frac{\mu_0 n^2 i^2 S \ell}{2}$$

$$\Rightarrow L = \frac{2}{i^2} \iint_V \frac{B_p^2(M)}{2\mu_0} d\tau_M = \mu_0 n^2 \ell S$$

Remarque – L'inductance propre d'un circuit ne sera considérable que lorsque ce dernier sera constitué d'un grand nombre de spires ; pour une simple boucle de courant elle pourra être négligée

### 3.6.5.2 Force électromotrice d'auto-induction

La force électromotrice d'auto-induction se déduit de la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d(Li)}{dt}$$

Remarque – Si le circuit est rigide  $L$  est constant, de sorte que :  $e = -L \frac{di}{dt}$ .

## 3.6.6 Inductance mutuelle

### 3.6.6.1 Coefficient de mutuelle inductance

**Définition 29** Les circuits  $C_1$  et  $C_2$  sont couplés par mutuelle inductance si le flux du champ magnétique créée par  $C_1$  à travers  $C_2$  est non nul.

Considérons deux circuits  $C_1$  et  $C_2$  orientés, respectivement parcourus par les courants  $I_1$  et  $I_2$ , créant les champs  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$ .

Le flux du champ magnétique à travers  $C_1$  a pour origine le champ propre à  $C_1$  :  $\phi_{1p}$ , mais aussi le champ appliqué par  $C_2$  :  $\phi_{1a}$ .

$$\phi_1 = \phi_{1p} + \phi_{1a} \text{ avec } \begin{cases} \phi_{1p} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 = L_1 I_1 \\ \phi_{1a} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 \end{cases}$$

De même pour le circuit  $C_2$  :

$$\phi_2 = \phi_{2p} + \phi_{2a} \text{ avec } \begin{cases} \phi_{2p} = \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 = L_2 I_2 \\ \phi_{2a} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 \end{cases}$$

$\phi_{1a}$ , dépendant de  $\vec{B}_2$ , sera proportionnel à  $I_2$  de même que  $\phi_{2a}$ , dépendant de  $\vec{B}_1$ , sera proportionnel à  $I_1$ . Ces proportionnalités permettent d'introduire le coefficient de mutuelle inductance :

$$M = \frac{\phi_{1a}}{I_2} = \frac{\phi_{2a}}{I_1}$$

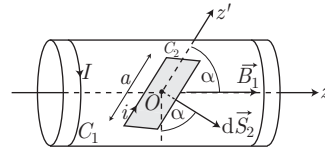
Comme l'inductance propre  $M$  s'exprime en Henry, ce coefficient (qui dépend de la géométrie de l'ensemble des deux circuits) est algébrique, son signe change chaque fois que l'on modifie l'orientation d'un des deux circuits.



On considère un solénoïde infini d'axe  $Oz$  portant  $n$  spires par unité de longueur. On dispose à l'intérieur de ce dernier une spire carrée de côté  $a$  et d'axe  $Oz'$  faisant un angle  $\alpha$  avec  $Oz$ . Déterminer le coefficient de mutuelle inductance entre les deux circuits.

**RÉPONSE**

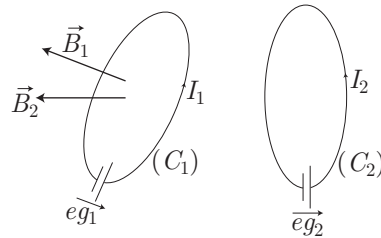
Orientons le solénoïde (noté  $C_1$ ) et la spire (notée  $C_2$ ) et notons  $I$  et  $i$  les courants dans ces deux circuits. Le flux du champ créé par la spire à travers le solénoïde étant compliqué à définir nous choisissons la relation :  $M = \frac{\phi_{2a}}{I}$ , où  $\phi_{2a}$  désigne le flux du champ  $\vec{B}_1$  créé par  $C_1$ , à travers  $C_2$ .



$$\begin{aligned} \phi_{2a} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2 &= \iint_{S_2} B_1 dS_2 \sin \alpha = \mu_0 n I \sin \alpha \iint_{S_2} dS_2 = \mu_0 n I a^2 \sin \alpha \\ \Rightarrow M &= \mu_0 n a^2 \sin \alpha \end{aligned}$$

**3.6.6.2 Circuits couplés**

Les circuits  $C_1$  et  $C_2$  sont de résistances  $R_1$  et  $R_2$ , d'inductances propres  $L_1$  et  $L_2$  et comportent respectivement les générateurs  $eg_1$  et  $eg_2$ .



Exprimons les équations électriques qui leur sont associés : dans  $C_1$  apparaît la force électromotrice d'induction totale :  $e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -\frac{\phi_{1p}}{dt} - \frac{\phi_{1a}}{dt} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} - M \frac{dI_2}{dt}$ . L'équation électrique est donc :

$$eg_1 + e_1 = R_1 I_1 \Rightarrow eg_1 = R_1 I_1 + L_1 \frac{dI_1}{dt} + M \frac{dI_2}{dt}$$

Un raisonnement équivalent pour  $C_2$ , nous permettra d'obtenir :

$$eg_2 = R_2 I_2 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + M \frac{dI_1}{dt}$$

Nous obtenons là un système de deux équations différentielles couplées.

**3.6.6.3 Aspect énergétique**

Multiplions les équations précédentes par  $I_1$  et  $I_2$  :

$$\begin{cases} eg_1 I_1 = R_1 I_1^2 + L_1 I_1 \frac{dI_1}{dt} + M I_1 \frac{dI_2}{dt} \\ eg_2 I_2 = R_2 I_2^2 + L_2 I_2 \frac{dI_2}{dt} + M I_2 \frac{dI_1}{dt} \end{cases}$$

La somme de ces deux équations donne :

$$eg_1 I_1 + eg_2 I_2 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \right)$$

### 3.6.7 Énergie électromagnétique

#### 3.6.7.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Tout volume de l'espace où existe un champ possède une énergie électromagnétique. On note  $u_e(M)$  la densité volumique d'énergie électromagnétique en un point  $M$  et  $\mathcal{E}(V)$  l'énergie associée contenue dans le volume  $V$ .

$$u_e(M) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \text{ et } \mathcal{E}(V) = \iiint_V u_e(M) d\tau_M$$

Remarque – Dans ces deux expressions, on distingue les termes associés aux composantes électrique et magnétique du champ

#### 3.6.7.2 Énergie échangée entre le champ et la matière

Nous savons qu'il est possible d'accélérer des charges en les soumettant à un champ électrique. Il s'agit là d'un exemple de transfert d'énergie entre le champ et la matière. Plus généralement, considérons une distribution volumique ( $\rho$ ) de charges mobiles dans un champ électromagnétique. La charge  $\delta q = \rho d\tau$  qui possède la vitesse  $\vec{v}$  subit la force :

$$\delta \vec{f} = \rho d\tau (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Le travail de cette force au cours d'un déplacement élémentaire  $d\vec{OM}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \delta^2 W &= \rho d\tau (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{OM} \text{ où } d\vec{OM} = \vec{v} dt \\ &= \rho d\tau \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{v} dt + (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} dt}_{=0} \end{aligned}$$

Remarque – Le terme magnétique est effectivement nul, puisqu'il implique un produit mixte faisant apparaître deux fois le vecteur vitesse.

La densité volumique de courant :  $\vec{j}_v = \rho \vec{v}$  conduit à l'expression du travail :

$$\delta^2 W = \vec{j}_v \cdot \vec{E} d\tau \times dt$$

à partir de laquelle est définie une puissance élémentaire :

$$d\mathcal{P} = \frac{\delta^2 W}{dt} = \vec{j}_v \cdot \vec{E} d\tau$$

On peut alors exprimer la puissance totale échangée entre le champ électromagnétique et les charges d'un volume  $V$  comme :

$$\mathcal{P} = \iiint_V \vec{j}_v(M) \cdot \vec{E}(M) d\tau_M$$

Remarque – D'après nos conventions si  $\mathcal{P} > 0$ , les charges gagnent de l'énergie, dans le cas contraire elles cèdent de l'énergie électromagnétique au champ.



### 3.6.7.3 Énergie électromagnétique rayonnée, vecteur de Poynting

Le soleil émet des ondes électromagnétiques qui se propagent dans l'espace jusqu'à nous. Ces dernières transportent de l'énergie nécessaire à la vie sur Terre. Cette propagation se fait dans une direction et un sens qu'il est possible de préciser à l'aide d'un vecteur.

**Définition 30** On appelle vecteur de Poynting associé au champ électromagnétique :

$$\vec{R} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

La puissance élémentaire rayonnée par le champ à travers une surface  $dS$ , dans le sens de  $d\vec{S}$  s'écrit :

$$d\mathcal{P} = \vec{R} \cdot d\vec{S}$$

Ce résultat se généralise alors pour une surface quelconque, ce qui permet de définir la puissance totale rayonnée par le champ à travers une surface :

$$\mathcal{P}_r = \iint_S \vec{R}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

### 3.6.7.4 Bilan d'énergie électromagnétique

On considère un volume  $V$ , fixe dans l'espace, limité par une surface  $S$ .

L'énergie électromagnétique contenue dans ce volume est susceptible de varier, soit parce que le champ va échanger de l'énergie avec les charges, soit parce qu'il va rayonner à travers  $S$ .

L'énergie étant une grandeur conservative, il est possible d'établir une équation traduisant ces différents échanges.

Soit  $\mathcal{E}(t)$  l'énergie électromagnétique du volume  $V$  à la date  $t$ ; la variation de  $\mathcal{E}$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$  vaut :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= \mathcal{E}(t + dt) - \mathcal{E}(t) \\ &= \iiint_V u_e(M, t + dt) d\tau_M - \iiint_V u_e(M, t) d\tau_M = \iiint_V \frac{\partial u_e(M, t)}{\partial t} dt d\tau_M \end{aligned}$$

Cette variation s'écrit aussi :

$$d\mathcal{E} = - \iiint_V \vec{j}_v(M) \cdot \vec{E}(M) dt d\tau_M - \oiint_S \vec{R}(P) \cdot d\vec{S}_P dt$$

le premier terme traduisant l'énergie échangée entre le champ et les charges, le second l'énergie rayonnée à travers la surface  $S$  qui délimite  $V$ .

On a alors l'égalité :

$$\iiint_V \frac{\partial u_e(M, t)}{\partial t} dt d\tau_M = - \iiint_V \vec{j}_v(M) \cdot \vec{E}(M) dt d\tau_M - \oiint_S \vec{R}(P) \cdot d\vec{S}_P dt \quad (33)$$

qui s'écrit aussi, après application du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V \frac{\partial u_e(M, t)}{\partial t} dt d\tau_M = - \iiint_V \vec{j}_v(M) \cdot \vec{E}(M) dt d\tau_M - \iiint_V \operatorname{div} \vec{R}(M) dt d\tau_M$$

d'où il découle que :

$$\iiint_V \left( \frac{\partial u_e(M, t)}{\partial t} + \vec{j}_v(M) \cdot \vec{E}(M) + \operatorname{div} \vec{R}(M) \right) d\tau_M = 0$$

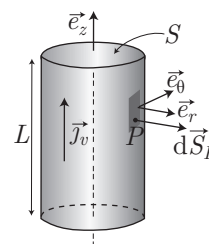
Cette dernière relation devant être vérifiée pour tout volume  $V$ , on en déduit la forme locale de l'équation (33) :

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + \vec{j}_v \cdot \vec{E} + \operatorname{div} \vec{R} = 0$$

Par exemple, intéressons-nous au cas d'un conducteur ohmique ( $\mathcal{C}$ ) cylindrique, de longueur  $L$ , de section  $S$  et de conductivité  $\gamma$ , parcouru par un courant permanent d'intensité  $I$ , de densité volumique  $\vec{j}_v = J_v \vec{e}_z$ .

La loi locale d'Ohm :  $\vec{j}_v = \gamma \vec{E}$  permet d'exprimer le terme :

$$\iiint_V \vec{j}_v(M) \cdot \vec{E}(M) d\tau_M = \iiint_V \frac{J_v^2}{\gamma} d\tau_M = \frac{J_v^2}{\gamma} \times S \times L$$



La puissance échangée entre le champ et les charges vaut donc :

$$\frac{J_v^2 S \times L}{\gamma} = \frac{I^2 \times S \times L}{\gamma S^2} = \frac{L}{\gamma S} \times I^2 = R_0 I^2$$

où  $R_0$  désigne la résistance électrique du conducteur ohmique ; on reconnaît le terme classique associé à l'effet Joule.

Exprimons maintenant la puissance rayonnée à travers la résistance :  $\oiint \vec{R}(P) \cdot d\vec{S}_P$ , en rappelant au préalable que le champ magnétique à la surface du cylindre s'écrit :  $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{e}_\theta$ ,  $a$  étant le rayon du cylindre :

$$\vec{R}(P) = \vec{E}(P) \wedge \frac{\vec{B}(P)}{\mu_0} = -\frac{J_v}{\gamma} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi a \mu_0} = \frac{-I^2}{2\pi a \gamma S} \vec{e}_r$$

Par conséquent :

$$\oiint_S \vec{R}(P) \cdot d\vec{S}_P = \oiint_S \frac{-I^2}{2\pi a \gamma S} \times dS_P = -\frac{I^2 \times 2\pi a L}{2\pi a \gamma S} = -\frac{I^2 L}{\gamma S} = -R_0 I^2$$

La puissance rayonnée par le champ est donc opposée à la puissance échangée entre le champ et les charges. La relation (33) est donc vérifiée puisqu'en régime permanent le

terme  $\iiint \frac{\partial u_e(M, t)}{\partial t} dt d\tau_M$  est nul.

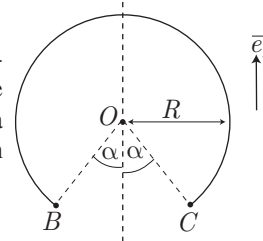
● **60** ————— **Lycée Poincaré, Nancy**

5 min.

Loi de Coulomb

MP-PC-PSI-PT

Calculer le champ électrostatique créé en  $O$  par une distribution linéique de charges de densité uniforme  $\lambda$ , sur l'arc de circonférence  $BC$  (c'est-à-dire la circonférence complète à laquelle on a retranché l'arc d'angle  $2\alpha$ ). On note  $R$  le rayon du cercle :  $OB = OC = R$ .



● **61** ————— **Lycée Saint-Louis, Paris**

20 min.

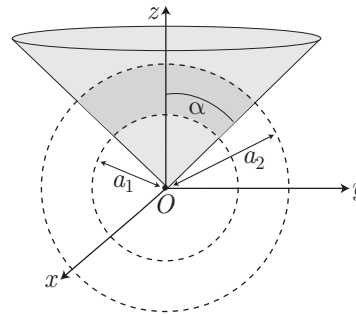
Loi de Coulomb

MP-PC-PSI-PT

On considère deux sphères de centre  $O$ , de rayons  $a_1$  et  $a_2$  ( $a_1 < a_2$ ) et un cône de révolution, d'axe  $(Oz)$  et de demi-angle au sommet  $\alpha$ .

Le volume grisé (intersection du cône et de la couronne sphérique) contient des charges réparties uniformément en volume et de densité volumique  $\rho$ .

Déterminer le champ électrostatique en  $O$  (on utilisera les coordonnées sphériques  $r, \theta$  et  $\phi$ ).



● **62** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

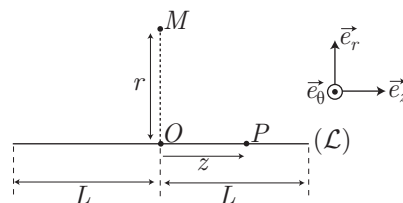
20 min.

Calcul direct de champs électrostatiques

MP-PC-PSI-PT

**I- Distribution linéique de charges**

Un segment linéaire  $(\mathcal{L})$ , de centre  $O$  et de longueur  $2L$ , contient en chacun de ses points  $P$  une densité linéique de charge  $\lambda(P)$ . Chaque point de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques dans la base  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$ , dont  $O$  est l'origine.



On cherche à déterminer le champ électrostatique  $\vec{E}(M)$  produit par  $(\mathcal{L})$  en un point  $M$  de l'axe médiateur de  $(\mathcal{L})$  :  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ , dans les deux cas suivants.

**1. Densité linéique uniforme**

On considère que  $\lambda(P)$  est uniforme, que l'on notera simplement  $\lambda$ .

- (a) Le point  $P$  étant repéré par son vecteur position  $\vec{OP} = z \vec{e}_z$ , exprimer les composantes du vecteur  $\vec{PM}$  dans  $\mathcal{B}$ .

- (b) Déterminer, à l'aide des éléments de symétrie de  $(\mathcal{L})$ , la direction de  $\vec{E}(M)$  ; on notera :

$$\vec{E}(M) = E(M) \vec{u}$$

où  $\vec{u}$  est un vecteur de base que l'on précisera.

- (c) Montrer que :

$$E(M) = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

- (d) En effectuant le changement de variable :  $z = r \times \tan u$ , trouver l'expression de  $\vec{E}(M)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $r$ ,  $L$  et  $\vec{e}_r$ .

## 2. Densité linéique non uniforme

On suppose maintenant que  $\lambda$  dépend de  $z$  selon une loi de type :

$$\lambda = \alpha \times |z|$$

où  $\alpha$  est une constante.

Le segment  $(\mathcal{L})$  porte une charge totale  $Q$ .

- (a) Trouver l'expression de  $\alpha$  en fonction de  $Q$  et  $L$ .  
 (b) Compte tenu de la symétrie de  $(\mathcal{L})$ , donner la direction de  $\vec{E}(M)$  ; on posera :

$$\vec{E}(M) = E(M) \times \vec{v}$$

où  $\vec{v}$  est un vecteur unitaire que l'on précisera.

- (c) En déduire que :

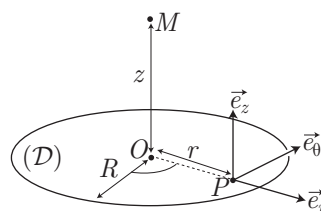
$$E(M) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 L^2} \int_{-L}^L \frac{|z| dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

- (d) Déterminer alors l'expression de  $\vec{E}(M)$  en fonction de  $Q$ ,  $L$ ,  $r$  et  $\vec{e}_r$ .

## II- Distribution surfacique de charges

Un disque  $(\mathcal{D})$  plan, de centre  $O$  et de rayon  $R$ , est chargé en surface avec une densité uniforme  $\sigma$ . Une base cylindrique  $\mathcal{B} = \{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\}$  servira encore à repérer chaque point  $P$  de  $(\mathcal{D})$  :  $\vec{OP} = r \vec{e}_r$  et un point  $M$  de l'axe de  $(\mathcal{D})$  :  $\vec{OM} = z \vec{e}_z$ .

On rappelle qu'une surface élémentaire peut être définie au voisinage de  $P$  par :  $dS_P = r dr d\theta$ , où  $\theta$  peut varier dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  pour décrire chaque point  $P$  de  $(\mathcal{D})$ .



1. Compte tenu de la symétrie de  $(\mathcal{D})$ , donner la direction du champ  $\vec{E}(M)$  que  $(\mathcal{D})$  produit en  $M$ .
2. Déterminer l'expression de  $\vec{E}(M)$  en fonction de  $\sigma$ ,  $z$ ,  $|z|$ ,  $R$ ,  $\vec{e}_z$ .

3. Comment peut-on obtenir rapidement l'expression du champ électrique que produit en  $M$  un plan infini  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , chargé uniformément avec une densité surfacique  $\sigma$  uniforme.

Représenter les vecteurs  $\vec{E}(M_1)$  et  $\vec{E}(M_2)$  en deux points  $M_1$  et  $M_2$  situés de part et d'autre d'un tel plan.

● **63** **Lycée Hoche, Versailles**

30 min.

Loi de Coulomb

MP-PC-PSI-PT

On considère un cylindre de révolution d'axe  $(Oz)$  illimité qu'on partage en deux par un plan contenant  $(Oz)$ .

Le demi-cylindre est chargé uniformément en volume avec la densité  $\rho > 0$ .

On veut déterminer le champ électrostatique créé en  $O$  par ces charges.

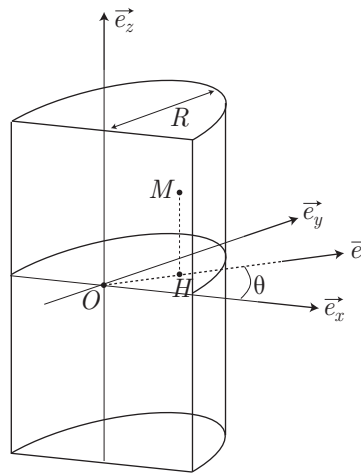
1. Montrer que  $\vec{E}(O)$  est colinéaire à  $\vec{e}_y$ , vecteur unitaire de l'axe  $(Oy)$ .
2. Calculer  $\vec{E}(O)$ .

On utilisera les coordonnées cylindriques  $M(r, \theta, z)$ .

Au cours des calculs, on obtiendra une intégrale double qu'on calculera en commençant par intégrer par rapport à  $z$ .

Les coordonnées cylindriques choisies seront définies par :

$$\vec{OH} = r \vec{e}_r \quad (\vec{e}_x, \vec{e}_r) = \theta \quad \vec{HM} = z \vec{e}_z$$



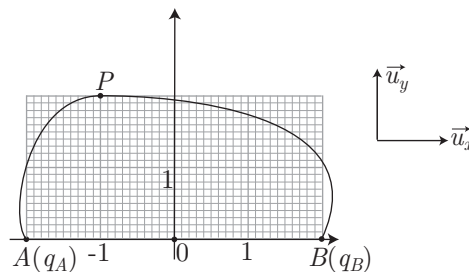
● **64** **Concours Commun Polytechnique**

15 min.

Lignes de champ

MP-PC-PSI-PT

Le schéma ci-dessous représente une ligne de champ.



La charge  $q_A > 0$  est supposée connue. Calculer  $q_B$  en fonction de  $q_A$ .

ÉNONCÉS

## ● 65 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

Potentiel électrostatique

MP-PC-PSI-PT

Une distribution de charges produit le potentiel électrostatique :

$$V(r) = \frac{qe}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\lambda r}}{r} \left(1 + \frac{\lambda r}{2}\right)$$

On rappelle les expressions du gradient et du Laplacien d'un champ scalaire  $f$ , en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

et :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

1. Sachant que la distribution est à symétrie sphérique, déterminer l'expression du champ électrostatique engendré par ce potentiel.
2. Calculer la charge  $Q(r)$  contenue dans une sphère de rayon  $r$  et l'exprimer sous la forme d'une charge centrale et d'une distribution volumique  $\rho_1(r)$ .

## ● 66 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

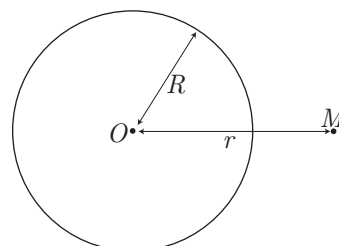
15 min.

Théorème de Gauss

MP-PC-PSI-PT

Une charge  $q$  est répartie uniformément dans un volume sphérique, de rayon  $R$  et de centre  $O$ , ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} \rho = \text{cte pour } r < R \\ \rho = 0 \text{ pour } r > R \end{cases}$$



1. En coordonnées sphériques, le champ électrique  $\vec{E}(r, \theta, \phi)$ , produit en  $M(r, \theta, \phi)$  par cette distribution, dépend *a priori* des coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $\phi$ .  
En utilisant les symétries et invariants, donner les caractéristiques de ce champ (direction et variables influentes).  
Trouver, de même, le champ  $\vec{E}(O)$  en  $O$ .
2. On rappelle l'expression de la divergence d'un champ  $\vec{E}$  en coordonnées sphériques :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta E_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}$$

En déduire, pour  $r < R$ , l'expression du champ électrique en fonction de  $q$ ,  $r$  et  $R$ .

3. On admettra la continuité de  $E = \|\vec{E}\|$  en  $r = R$ . Montrer qu'en tout point  $M$  extérieur à la sphère, le champ électrique a la même expression que celui que produirait la charge  $q$  concentrée en  $O$ .

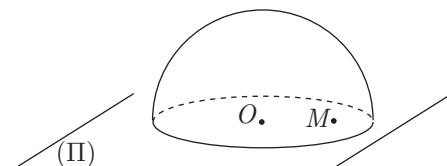
● **67** **Lycée du Parc, Lyon**

20 min.

Théorème de Gauss

MP-PC-PSI-PT

Soit une demi-sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$ , chargée uniformément en surface (densité surfacique de charges :  $\sigma = \text{cte}$ ).



Montrer que le champ électrostatique en un point  $M$  quelconque du plan équatorial (II) est orthogonal à (II), si  $M$  est contenu dans le cercle intersection de (II) et de la demi-sphère.

● **68** **Concours de l'ENAC**

30 min.

Théorème de Gauss et potentiel

MP-PC-PSI-PT

Du point de vue du potentiel et du champ électriques qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre  $O$  et de rayon  $a$ . On désigne par  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  le vecteur position d'un point  $P$  quelconque de l'espace. Pour  $r < a$ , la charge volumique  $\rho(P)$  qui représente le noyau varie en fonction de  $r = OP$  suivant la loi :

$$\rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

où  $\rho_0$  est une constante positive.

1. Exprimer la charge totale  $Q$  du noyau.

$$(a) Q = \frac{1}{3} \pi \varepsilon_0 \rho_0 a^3 \quad (b) Q = \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3$$

$$(c) Q = \frac{3}{5} \pi \varepsilon_0 \rho_0 a^2 \quad (d) Q = \frac{\rho_0 a^2}{2\pi}$$

2. Les propriétés de symétrie du champ électrostatique permettent d'affirmer que :

- (a) le champ électrique est contenu dans les plans de symétrie des charges ;
- (b) le champ électrique est orthogonal aux plans d'antisymétrie des charges ;
- (c) le champ électrique est orthogonal aux plans de symétrie des charges ;
- (d) le champ électrique est contenu dans les plans d'antisymétrie des charges.

3. Calculer le champ électrique  $\vec{E}_e(P)$  en tout point  $P$  extérieur à la sphère ( $r > a$ ).

$$(a) \vec{E}_e(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15 \varepsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (b) \vec{E}_e(P) = \frac{\rho_0 a^3}{2\pi \varepsilon_0 r^3} \vec{r}$$

$$(c) \vec{E}_e(P) = \frac{2\pi \rho_0 a^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{r} \quad (d) \vec{E}_e(P) = \vec{0}$$

4. Calculer le champ électrique  $\vec{E}_i(P)$  en tout point  $P$  intérieur à la sphère ( $r < a$ ).

$$(a) \vec{E}_i(P) = \frac{\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{2}{3} - \frac{3r^2}{4a^2} \right) \vec{r} \quad (b) \vec{E}_i(P) = \frac{3\rho_0}{2\pi\epsilon_0} \left( \frac{3}{4} - \frac{4r^2}{3a^2} \right) \vec{r}$$

$$(c) \vec{E}_i(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \vec{r} \quad (d) \vec{E}_i(P) = \vec{0}$$

5. Exprimer le potentiel  $V_e(P)$  créé par le noyau lorsque  $r > a$ .

$$(a) V_e(P) = \frac{\rho_0 a^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (b) V_e(P) = \frac{4\rho_0 a^2}{3\pi\epsilon_0 r}$$

$$(c) V_e(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r} \quad (d) V_e(P) = \frac{\pi\rho_0 a^2}{3\epsilon_0 r}$$

6. Exprimer le potentiel  $V_i(P)$  créé par le noyau lorsque  $r < a$ .

$$(a) V_i(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2} \right)$$

$$(b) V_i(P) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{a^2}{3} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{a} \right)$$

$$(c) V_i(P) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{a^2}{6} - \frac{r^2}{3} + \frac{r}{3a} \right)$$

$$(d) V_i(P) = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \left( \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{4a^2} \right)$$

## ● 69 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

30 min.

Énergie électrostatique

MP-PC-PSI-PT

Une sphère ( $S$ ), de rayon  $R$  et de centre  $O$ , porte une charge répartie uniformément en volume, avec une densité  $\rho$ . Un point  $M$  de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  telles que  $\vec{OM} = r\vec{e}_r$ .

- Déterminer, en fonction de  $q$  et  $R$ , l'expression de  $\rho(r)$ .
- Quelle est l'expression du volume élémentaire  $d\tau$  compris entre deux sphères de centre  $O$  et de rayons  $r$  et  $r + dr$ .
- On note  $\vec{E}(M)$  et  $V(M)$  le champ électrique que produit ( $S$ ) en un point  $M$ , ainsi que le potentiel au même point.
  - Trouver les expressions de  $\vec{E}(M)$  pour  $r > R$  et pour  $r < R$ .
  - Trouver les expressions de  $V(M)$  pour  $r > R$  et pour  $r < R$ .
- Déterminer la densité volumique d'énergie électrostatique produite par ( $S$ ). En déduire l'énergie électrostatique  $\mathcal{E}$  produite par ( $S$ ) dans l'espace, en fonction de  $q$  et  $R$ .
- Calculer l'intégrale :

$$I = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \rho V d\tau$$

et conclure.



● **70** **Lycée Saint-Louis, Paris**

20 min.

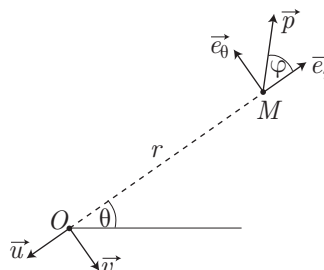
Dipôle électrostatique

MP-PC-PSI-PT

Une charge ponctuelle  $Q$  est à l'origine  $O$  des coordonnées cylindriques et crée un champ :

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

Un dipôle, de moment  $\vec{p}$ , est placé en un point  $M$  tel que  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$



1. (a) Démontrer que la force  $\vec{F}$  subie par le dipôle est donnée par  $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E}$ .

On rappelle que si  $\vec{p}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} \psi$  s'écrivent, dans une base  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  :

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^3 p_i \vec{e}_i \text{ et } \overrightarrow{\text{grad}} \psi = \sum_{i=1}^3 (\nabla_i \psi) \vec{e}_i$$

l'opérateur  $(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})$  est défini par :

$$(\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} = \sum_{i=1}^3 p_i \nabla_i \vec{E}$$

- (b) Calculer la force  $\vec{F}$  exercée par la charge  $Q$  sur le dipôle. On rappelle que  $\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta$ .
2. Retrouver ce résultat à partir du principe des actions réciproques et de l'expression du champ électrique  $\vec{E}(O)$  que le dipôle produit en  $O$ .

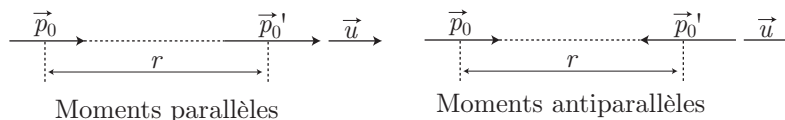
● **71** **Lycée Saint-Louis, Paris**

30 min.

Dipôle électrostatique

MP-PC-PT-PSI

On considère deux dipôles permanents, dont les moments  $\vec{p}_0$  et  $\vec{p}'_0$  (de normes éventuellement différentes) sont portés sur un même axe de vecteur unitaire  $\vec{u}$ , sont à la distance  $r$  l'un de l'autre. Nous nous plaçons dans l'hypothèse restrictive où il n'y a que deux orientations possibles :  $\vec{p}_0$  et  $\vec{p}'_0$  peuvent être soit parallèles soit antiparallèles.



1. Calculer, dans chaque cas, la force qui s'exerce entre les dipôles, en fonction de  $p_0 = \|\vec{p}_0\|$ ,  $p'_0 = \|\vec{p}'_0\|$ ,  $r$  et  $\vec{u}$ .

**ÉNONCÉS**

On donne, pour  $\varepsilon \ll 1$  :

$$(1 + \varepsilon)^{-2} \simeq 1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2$$

2. On rappelle que l'énergie potentielle d'un dipôle rigide de moment  $\vec{p}$ , dans un champ électrostatique  $\vec{E}$ , est :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Nous supposons que l'agitation thermique est assez forte pour faire passer sans cesse les dipôles de moments  $\vec{p}_0$  et  $\vec{p}'_0$  d'une position à l'autre. Calculer la force moyenne qui s'exerce entre les deux dipôles.

On utilisera la loi de répartition statistique de Boltzmann qui donne le nombre de dipôles  $n(\mathcal{E}_p)$  d'énergie  $\mathcal{E}_p$  en fonction de la température :

$$n(\mathcal{E}_p) = A e^{-\mathcal{E}_p/kT}$$

où  $A$  est une constante et  $k$  est la constante de Boltzmann. On supposera ici que

$$\left| \frac{\mathcal{E}_p}{kT} \right| \ll 1.$$

● 72 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

60 min.

Dipôles électrostatiques

MP-PC-PT-PSI

On propose ici une introduction à l'étude microscopique des interactions entre les molécules d'un gaz ; ces molécules sont assimilables à des dipôles électriques permanents. Soient deux dipôles permanents, de moments dipolaires respectifs  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$ , localisés respectivement sur les points  $O_1$  et  $O_2$  ; soit  $\vec{r} = \vec{O}_1\vec{O}_2$  le rayon vecteur joignant ces deux dipôles, de norme  $r = O_1O_2$  (figure 1).

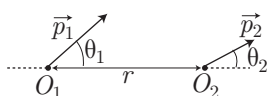


Figure 1

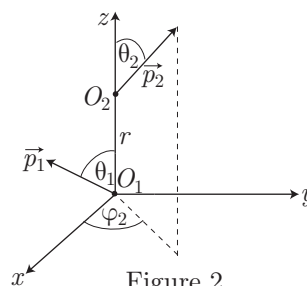


Figure 2

1. Donner l'expression du potentiel et du champ électrostatiques au point  $O_2$ , dus au dipôle situé en  $O_1$ .
2. On rappelle l'expression de l'énergie d'un dipôle électrostatique dans un champ électrique  $\vec{E}$  :  $\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ . Montrer alors que l'énergie d'interaction des deux dipôles est :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left[ \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3 \times \left( \vec{p}_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \times \left( \vec{p}_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \right]$$

Comme indiqué à la figure 2, le système est paramétré de la façon suivante : le vecteur  $\vec{p}_1$ , situé dans le plan  $(xOz)$ , fait un angle  $\theta_1$  avec l'axe  $(Oz)$ , qui porte le vecteur  $\vec{r}$ ; le vecteur  $\vec{p}_2$  est repéré par ses coordonnées sphériques angulaires  $\theta_2$  et  $\varphi_2$ .

1. On considère d'abord le cas où  $\varphi_2$  est nul. Indiquer alors les configurations correspondant à un *extremum* d'énergie ; commenter la nature (stable ou instable, *maximum* ou *minimum* d'énergie potentielle) de chacun de ces *extrema*.
2. On considère maintenant le cas général. Calculer  $\mathcal{E}_p(p_1, p_2, r, \theta_1, \theta_2, \varphi_2)$ .
3. Montrer que si les orientations des vecteurs  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  étaient libres et indépendantes entre elles, la moyenne, calculée sur toutes les orientations possibles, de l'énergie d'interaction serait nulle.

On admettra qu'à l'équilibre thermodynamique à une température  $T$ , la probabilité élémentaire de trouver le système dans une configuration angulaire donnée s'écrit :

$$\delta\mathcal{P} = \frac{1}{Z} \sin\theta_1 \sin\theta_2 e^{-\beta \mathcal{E}(\theta_1, \theta_2, \varphi_2)} d\theta_1 d\theta_2 d\varphi_2$$

où  $Z$  (fonction de partition) est une constante de normalisation et  $\beta = \frac{1}{kT}$  ( $k = 1,35 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  désigne la constante de Boltzmann).

On suppose, dans ce qui suit, que la distance  $r$  est fixe et que  $\beta \mathcal{E}$  est très petit devant 1.

4. Montrer alors que l'énergie moyenne du système,  $\langle \mathcal{E} \rangle$ , varie comme :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \mathcal{E}_0 \frac{a(T)}{r^6}$$

On se bornera, pour les calculs, à donner le signe de  $\mathcal{E}_0$  et la dépendance en température de la fonction  $a(T)$ .

## ● 73 ————— Concours Centrale-Supélec

20 min.

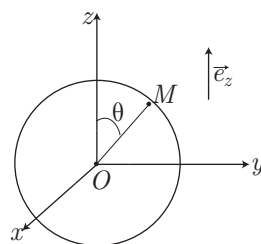
PC

*Polarisation d'un diélectrique*

Une sphère d'un matériau conducteur est placée dans un champ électrique  $\vec{E}_a = E_a \vec{e}_z$  et il en résulte l'apparition de charges en surface, de densité  $\sigma(M) = \sigma_0 \cos\theta$  ( $\sigma_0$  est une constante).

1. Déterminer le champ  $\vec{E}_m(O)$  que produit cette distribution de charges au centre  $O$  de la sphère, ainsi que le champ total  $\vec{E}(O)$ .

On admettra par la suite que le champ électrique  $\vec{E}$  est uniforme à l'intérieur de cette sphère.



2. On modélise la sphère par une succession de dipôle (deux surfaces élémentaires symétriques par rapport au plan  $(Oxy)$ ).
  - (a) Déterminer le moment dipolaire  $\vec{P}$  de la distribution de charges et le moment dipolaire volumique (vecteur polarisation  $\vec{p}$ ).

- (b) À l'équilibre, le champ total  $\vec{E}$  est nul à l'intérieur de la sphère. Quelle relation y a-t-il entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}_a$  ?
3. Maintenant, le conducteur est supposé mauvais, de conductivité  $\gamma$  et  $E_a$  dépend du temps. On suppose que la relation trouvée entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}_a$  reste valable. Montrer que la densité volumique de courant dans le conducteur est donnée par :  $\vec{J} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ .

● **74** ————— **Lycée Louis-le-Grand, Paris**

20 min.

*Polarisation de la matière*

PC

Une sphère ( $S$ ), composée d'un matériau diélectrique linéaire, homogène et isotrope, est placée dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0$ . On admet que, dans ces conditions, le champ électrique est uniforme dans la sphère de volume ( $V$ ). On note  $\vec{P}$  le vecteur polarisation de la sphère et  $\vec{\mathcal{P}}$  le moment dipolaire total créé par la distribution de charges :

$$\vec{\mathcal{P}} = \iiint_{(V)} \vec{P} \, d\tau$$

- Déduire des hypothèses de l'énoncé que :
  - $\vec{P}$  est uniforme dans ( $S$ ) ;
  - les charges liées sont exclusivement réparties à la surface de ( $S$ ), avec une densité surfacique que l'on exprimera en fonction de  $P = \|\vec{P}\|$  et de l'angle  $\theta$  entre  $\vec{P}$  et un élément de surface  $d\vec{S}$  de ( $S$ ) ;
  - ( $S$ ) est globalement neutre électriquement.
- Exprimer le champ  $\vec{E}_p(M)$  produit par cette distribution surfacique de charges en tout point  $M$  intérieur à ( $S$ ), en fonction de  $\vec{P}$ .  
En déduire l'expression du champ électrique  $\vec{E}(M)$  en fonction de  $\vec{E}_0$  et de la susceptibilité électrique  $\chi$  du diélectrique.
- Montrer que pour un point  $N$  extérieur à la sphère, le champ électrique  $\vec{E}_p(N)$  se réduit au champ électrique créé par un dipôle placé au centre  $O$  de la sphère ; exprimer son moment dipolaire en fonction de  $\vec{P}$ .

● **75** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

*Capacité d'un conducteur*

MP-PT

Une sphère métallique, de rayon  $R$  et de centre  $O$ , porte une charge  $Q$ .

- À l'aide du théorème de Gauss, déterminer l'expression du champ électrique  $\vec{E}(M)$  en un point  $M$  tel que  $OM = r > R$ .
- En déduire l'expression du potentiel  $V$  de la sphère, puis de la capacité  $C$  de ce conducteur.

● 76 ————— Lycée Henri Wallon, Valenciennes

30 min.

Condensateurs

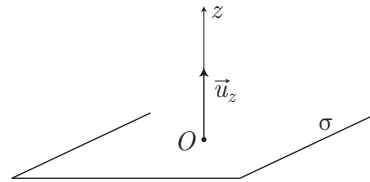
MP-PT

Dans cet exercice,  $\vec{E}$  représente le champ électrique.

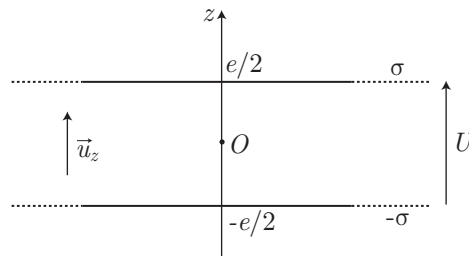
1. On considère un plan infini, uniformément chargé en surface avec une densité surfacique  $\sigma$ . L'axe  $(Oz)$  est un axe perpendiculaire au plan et tel que  $O$  appartient à ce plan.

- (a) Montrer que le champ électrique  $\vec{E}$  est parallèle à  $(Oz)$ .
- (b) Calculer le champ  $\vec{E}$  en tout point de l'espace, en fonction de  $\sigma$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\vec{u}_z$  (vecteur unitaire de l'axe  $(Oz)$ ).

On distinguera le cas où  $z$  est positif et le cas où  $z$  est négatif.



- (c) Représenter la courbe  $E = f(z)$  où  $E = \vec{E} \cdot \vec{u}_z$ .
- (d) Quelle est la discontinuité subie par  $\vec{E}$  à la traversée du plan  $z = 0$ ? cela était-il prévisible?
- (e) Déterminer le potentiel électrostatique  $V(z)$ ; on prendra  $V(0) = 0$ .
2. On considère maintenant deux plans identiques au précédent, parallèles entre eux, perpendiculaires à un axe  $(Oz)$ , situés aux abscisses  $z = \frac{e}{2}$  et  $z = -\frac{e}{2}$ . Le plan supérieur est chargé uniformément avec une densité  $\sigma$ , le plan inférieur est chargé avec une densité uniforme  $-\sigma$ .



- (a) Déterminer le champ électrostatique  $\vec{E}$ , dans tout l'espace, en fonction de  $\sigma$ ,  $\varepsilon_0$  et  $\vec{u}_z$ .
- (b) Déterminer le potentiel électrostatique  $V(z)$  pour  $|z| < \frac{e}{2}$ . On imposera toujours  $V(0) = 0$ .
- (c) Calculer la différence de potentiel  $U$  entre la plaque supérieure et la plaque inférieure.
- (d) Quelle relation existe-t-il entre  $E$ ,  $U$  et  $e$ ?
- (e) Soit  $Q$  la charge d'une surface  $S$  de l'armature supérieure. On rappelle que la capacité  $C$  du condensateur est définie par  $Q = C \times U$ . En déduire l'expression de la capacité  $C$ .

ÉNONCÉS

- (f) Déterminer l'énergie électrostatique emmagasinée dans un cylindre d'axe  $(Oz)$ , de surface de base  $S$ , contenu entre les plans  $z = -\frac{e}{2}$  et  $z = \frac{e}{2}$ . On exprimera cette énergie  $W_e$  en fonction de  $U$  et  $C$ , puis en fonction de  $Q$  et  $C$ ,  $Q$  étant la charge de l'armature supérieure, de surface  $S$ .

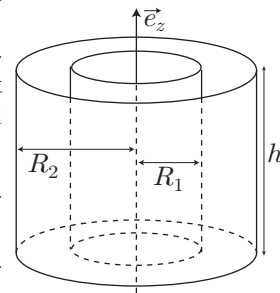
● **77** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

20 min.

Condensateurs

MP-PC-PSI-PT

On considère un condensateur cylindrique formé de deux armatures coaxiales de hauteur  $h$  et de rayons respectifs  $R_1$  et  $R_2$  avec  $h \gg R_2$ . L'armature interne porte la charge électrique  $Q$ . Les potentiels des armatures sont respectivement  $V_1$  et  $V_2$ . Soit un point  $M$  situé à la distance  $r$  de l'axe tel que  $R_1 < r < R_2$ .



1. Calculer la composante  $E(r)$  du champ  $\vec{E}$  entre les armatures.
2. Calculer la circulation du champ électrique entre les armatures en fonction de  $Q$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $h$ ,  $R_2$  et  $R_1$ .
3. Exprimer la capacité  $C$  du condensateur en fonction de  $\varepsilon_0$ ,  $h$ ,  $R_2$  et  $R_1$ .
4. Calculer  $C$  pour  $R_1 = 0,1$  cm,  $R_2 = 0,2$  cm,  $\varepsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12}$  u.s.i et  $h = 10$  cm.
5. Que devient l'expression de  $C$  si les rayons des armatures sont très voisins c'est à dire si  $R_2 - R_1 = e \ll R_1$ .
6. Le champ électrique ne doit pas dépasser la valeur  $E_0$  afin d'éviter le claquage du condensateur. Calculer la valeur  $U_{max}$  de la différence de potentiel pouvant être appliquée entre les armatures en fonction de  $E_0$ ,  $R_1$  et  $R_2$ . Faire l'application numérique pour  $E_0 = 3$  MV  $\cdot$  m $^{-1}$ .
7. Exprimer l'énergie électrostatique stockée par le condensateur, retrouver alors l'expression de sa capacité.

● **78** ————— **Concours Polytechnique**

30 min.

Loi de Biot et Savart

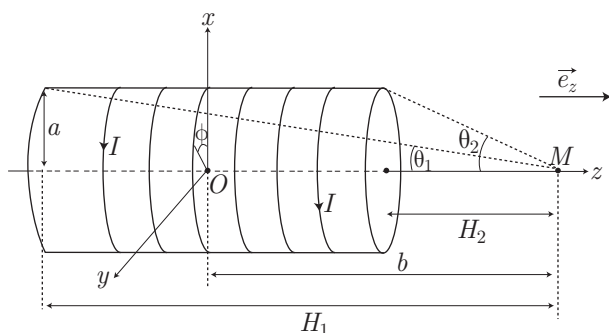
MP-PC-PSI-PT

On cherche à déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un fil hélicoïdal, parcouru par un courant d'intensité  $I$  et d'équation paramétrique :

$$x = a \cos \phi \quad y = a \sin \phi \quad z = a \tan \alpha \times \phi$$

avec :  $-N\pi \leq \phi \leq N\pi$ .

On se place en un point  $M$  de l'axe  $(Oz)$ , de cote  $b$  et l'on note  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  les angles sous lesquels sont vues, depuis  $M$ , les faces de la bobine ainsi créée.



1. On pose :

$$u_1 = \arctan\left(\frac{b}{a} + N\pi \tan \alpha\right) \text{ et } u_2 = \arctan\left(\frac{b}{a} - N\pi \tan \alpha\right)$$

Déterminer la longueur  $L = H_1 - H_2$  de la bobine en fonction de  $a$ ,  $\tan \alpha$  et  $N$ .

Calculer également le nombre  $n$  de spires par mètre, en fonction de  $a$  et  $\tan \alpha$ .

2. Calculer la composante  $B_z = \vec{B}(M) \cdot \vec{e}_z$  du champ magnétique produit en  $M$  et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$B_z = \frac{\mu_0 I n}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

● **79** **Concours ESIM**  
15 min.

*Théorème d'Ampère*

MP-PC-PSI-PT

- Calculer le champ magnétique  $\vec{B}$  créé par un fil infini parcouru par un courant d'intensité  $I$ , à une distance  $a$  (on commencera par étudier les symétries et on utilisera le théorème d'Ampère).
- (a) On considère un ruban infini d'épaisseur  $e$  négligeable (cf. figure 1).

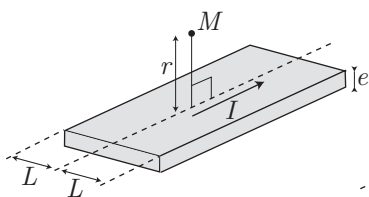


Figure 1

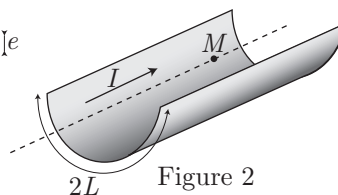


Figure 2

Calculer le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  que produit ce ruban en un point  $M$ .

(b) Même question dans le cas de la gouttière présentée sur la figure 2.

● **80** **QCM**  
20 min.

*Théorème d'Ampère et potentiel vecteur*

MP-PC-PSI-PT

- On considère un conducteur, d'extension infinie selon son axe ( $z'z$ ) et de rayon  $R$ . Un courant  $I$ , de densité volumique uniforme  $\vec{j}_v = j_v \vec{e}_z$ , parcourt le cylindre. Tous

**ÉNONCÉS**

les points de l'espace sont repérés par leurs coordonnées  $(r, \theta, z)$  dans le repère cylindro-polaire  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . Calculer le champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en un point  $M$  quelconque à l'intérieur du conducteur cylindrique. On note  $\mu_0$  la perméabilité du vide.

$$(a) \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} r \vec{e}_\theta \quad (b) \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{\pi R^2} r \vec{e}_z$$

$$(c) \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R^2} r \vec{e}_\theta \quad (d) \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{e}_\theta$$

2. En prenant l'origine du potentiel vecteur sur l'axe du conducteur ( $z'z$ ), quelle est l'expression du potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$  en un point  $M$  quelconque à l'intérieur du conducteur cylindrique ?

$$(a) \vec{A}(M) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} r^2 \vec{e}_z \quad (b) \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} r^2 \vec{e}_z$$

$$(c) \vec{A}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r^2 \vec{e}_z \quad (d) \vec{A}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r^2 \vec{e}_z$$

## ● 81 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

*Théorème d'Ampère*

MP-PC-PSI-PT

- On considère une plaque métallique infinie dans les directions des vecteurs  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$  de la base cartésienne  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ . Cette plaque, d'épaisseur  $dx$ , est parcourue par un courant de densité volumique  $\vec{j}_v = j \vec{e}_y$  (où  $j$  est une constante). À l'aide du théorème d'Ampère, déterminer l'expression du champ magnétique produit en un point  $M$  extérieur à la plaque (on précisera de quel côté de la plaque se trouve  $M$ ).
- On s'intéresse maintenant à une distribution de courant, de densité volumique :

$$\begin{cases} \vec{j}_v = j_0 e^{-x/a} \vec{e}_y \text{ pour } x > 0 \\ \vec{j}_v = \vec{0} \text{ pour } x < 0 \end{cases}$$

où  $j_0$  et  $a$  sont des constantes.

- En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer le champ  $\vec{B}(x < 0)$  que produit cette distribution de courant.
- À l'aide de la formulation locale du théorème d'Ampère, en déduire l'expression de  $\vec{B}(x > 0)$ .
- Donner l'expression d'un potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$  produit en tout point  $M$  de l'espace.



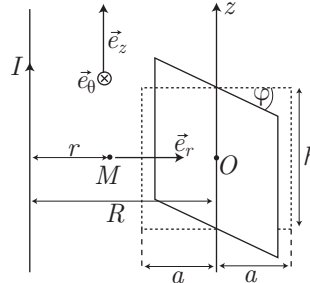
● **82** **Concours Centrale-Supélec**

30 min.

*Théorème d'Ampère*

MP-PC-PSI-PT

Un fil infini est parcouru par un courant d'intensité  $I$ . Un cadre, de centre  $O$ , de hauteur  $h$  et de longueur  $2a$ , est situé à une distance  $R$  de ce fil. Le plan du cadre est incliné d'un angle  $\varphi$  par rapport au plan contenant le fil et l'axe  $(Oz)$ .



- Déterminer l'expression du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en tout point  $M$  séparé du fil d'une distance  $r$ .
- On suppose ici que  $\varphi = 0$ . Calculer le flux  $\Phi_0$  du champ magnétique créé par le fil à travers le cadre.
- Répondre à la même question pour  $\varphi \neq 0$ . Retrouve-t-on  $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \Phi = \Phi_0$  ?

On rappelle que la fonction réciproque de  $\sinh x$  est définie par :

$$\operatorname{argsh} x = \ln \left( x + \sqrt{1 + x^2} \right)$$

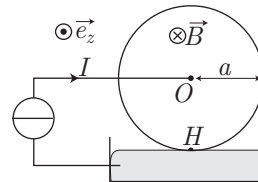
● **83** **Concours Commun Polytechnique**

10 min.

*Forces de Laplace*

MP-PC-PSI-PT

Le schéma ci-contre représente une roue de Barlow : une roue conductrice, de rayon  $a$ , d'axe  $(O, \vec{e}_z)$  et de moment d'inertie  $J$  par rapport à cet axe, peut tourner autour de son axe avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ . Une source de courant achemine un courant d'intensité  $I$  en  $O$ , lequel courant est récupéré par un bain de mercure, en un point  $H$ .



La roue de Barlow est plongée dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = -B \vec{e}_z$  et l'on suppose que  $\omega = 0$  à la date  $t = 0$ .

- Déterminer l'expression du moment des forces de Laplace qui s'exercent sur la roue.
- Sachant que le moment, par rapport à  $O$ , de la force de frottement est noté :  $\vec{M}_O(\vec{f}) = -k \vec{\omega}$  (où  $k$  est une constante), trouver  $\omega(t)$ .

● **84** **Concours Mines-Ponts**

20 min.

*Force de Laplace*

MP-PC-PSI-PT

Une spire circulaire de rayon  $R$  et d'axe  $Oz$  est parcourue par un courant  $I$  constant.

- Le champ en un point  $M$  n'appartenant pas à la spire s'écrit :

$$\vec{B}(M) = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta + B_z \vec{e}_z$$

Montrer en utilisant le théorème d'Ampère que :  $B_\theta = 0$ .

2. Démontrer que pour tout point  $M$  au voisinage de l'axe de révolution de la spire :
- $$B_r \simeq -\frac{r}{2} \frac{dB_r}{dz}.$$
3. On place à la cote  $z = z_0$  une spire de rayon  $a \ll R$  parcourue par un courant  $i$ . Calculer la force exercée par la grande spire sur la petite. Dans quels cas cette force est-elle attractive ou répulsive ? Faire une analogie remarquable.

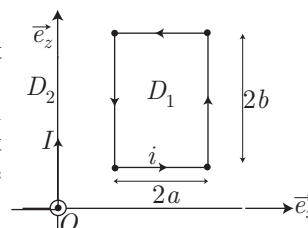
### ● 85 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

Force de Laplace

MP-PC-PSI-PT

Un cadre rectangulaire  $D_1$ , de dimension  $2a$  selon  $Ox$  et  $2b$  selon  $Oz$  est parcouru par un courant  $i$  constant. On place à une distance  $x_0 > a$  de ce cadre, un fil infini  $D_2$ , confondu avec l'axe  $(O, \vec{e}_z)$  parcouru par un courant constant  $I$ . Exprimer la résultante des efforts de Laplace s'exerçant sur  $D_1$ .



### ● 86 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

30 min.

Forces de Laplace

MP-PC-PSI-PT

1. Un circuit fermé  $(\Gamma)$ , contenu dans un plan perpendiculaire à un vecteur unitaire  $\vec{e}_z$ , est parcouru par un courant d'intensité  $I$ .

Ce circuit est plongé dans un champ magnétique  $\vec{B}$  non uniforme :  $\vec{B}(P)$  dépend du point  $P$  où il est mesuré.

- (a) On note  $\vec{\mathcal{R}} = \sum_{\alpha} \mathcal{R}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$  la résultante des forces

de Laplace qui s'exercent sur  $(\Gamma)$ , de composantes  $(\mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y, \mathcal{R}_z)$  dans une base cartésienne  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ . Montrer que :

$$\mathcal{R}_{\alpha} = I \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{B} \wedge \vec{e}_{\alpha}) \cdot d\vec{S}$$

où  $(S)$  désigne la surface de contour  $(\Gamma)$ .

- (b) On rappelle que pour tout couple de vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\vec{U} \wedge \vec{V}) = \vec{U} \times \text{div } \vec{V} - \vec{V} \times \text{div } \vec{U} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{U} - (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{V}$$

où :

$$(\vec{V} \cdot \nabla) \vec{U} = \sum_{\alpha} V_{\alpha} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x_{\alpha}}$$

En déduire que :

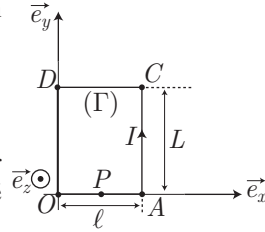
$$\vec{\mathcal{R}} = I \iint_{(S)} (\overrightarrow{\text{grad}} B_z) \times d\vec{S} \quad (34)$$

2. On cherche à vérifier la relation (34) sur un cas particulier :

un cadre rectangulaire ( $OACD$ ) est plongé dans un champ magnétique de composantes cartésiennes :

$$B_x = \frac{B_0}{a} x \quad B_y = -\frac{B_0}{a} y \quad B_z = \frac{B_0}{a} x$$

Ce cadre, de largeur  $OA = CD = \ell$  et de longueur  $AC = DO = L$ , est parcouru par un courant d'intensité  $I$ .



(a) Déterminer, par un calcul direct, la résultante des forces de Laplace :

$$\vec{R} = \oint_{(\Gamma)} I d\vec{OP} \wedge \vec{B} = I \oint_{(\Gamma)} d\vec{OP} \wedge \vec{B}$$

(b) Retrouver ce résultat à l'aide de la relation (34).

● 87 **Concours Centrale-Supélec**

30 min.

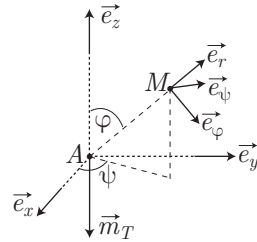
MP

Dipôle magnétique

On admet que le champ magnétique terrestre  $\vec{B}$  est assimilable au champ magnétique d'un dipôle magnétique situé au centre  $A$  de la Terre, de moment :

$$\vec{m}_T = -m_T \vec{e}_z$$

$m_T$  est positif et  $\vec{e}_z$  désigne le vecteur unitaire de l'axe géomagnétique de la Terre, qui est légèrement incliné par rapport à l'axe de rotation terrestre ; le signe négatif tient compte du fait que sud et nord magnétiques sont inversés par rapport aux sud et nord géographiques.



Un point  $M$  de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques  $(r, \varphi, \psi)$  par rapport à l'axe géomagnétique  $(A, \vec{e}_z)$ .

En un point  $M$  suffisamment éloigné de  $A$ , les composantes de  $\vec{B}$  s'écrivent :

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\varphi \vec{e}_\varphi + B_\psi \vec{e}_\psi \text{ avec } \begin{cases} B_r = -\frac{\mu_0 m_T}{4\pi} \times \frac{2 \cos \varphi}{r^3} \\ B_\varphi = -\frac{\mu_0 m_T}{4\pi} \times \frac{\sin \varphi}{r^3} \\ B_\psi = 0 \end{cases}$$

$\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$  et  $\vec{e}_\psi$  sont les vecteurs unitaires de la base sphérique.

- Établir l'équation différentielle d'une ligne de champ. En intégrant cette équation, montrer que l'équation d'une ligne de champ est donnée par l'expression :  $r = r_0 \sin^2 \varphi$ , où  $r_0$  désigne une constante.
- Tracer l'allure de quelques lignes de champ dans un plan méridien (plan défini par  $\psi = \text{constante}$ ).

3. Calculer l'intensité  $B = B(\varphi)$  du champ magnétique sur une ligne de champ ; en désignant par  $B_0$  l'intensité correspondante dans le plan équatorial magnétique (plan défini par  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ), écrire  $B$  sous la forme  $B = B_0 \times f(\varphi)$ .  
Exprimer  $B_0$  en fonction de  $m_T, r_0, \mu_0$  puis expliciter la fonction  $f(\varphi)$ .
4. Pour quelle valeur de  $\varphi$  l'intensité  $B(\varphi)$  est-elle minimale ? Exprimer la valeur  $B_{\min}$  correspondante, en fonction de  $B_0$ .
5. Vérifier que  $f(\pi - \varphi) = f(\varphi)$ .
6. Représenter le graphe de  $f(\varphi)$  en précisant le domaine de variation de  $\varphi$ .
7. On se propose de déterminer, en un point  $P$  (défini par l'angle  $\varphi = \varphi_P$ ) situé à la surface de la Terre, l'intensité de la composante horizontale  $B_h = |B_\varphi|$  du champ magnétique terrestre, en mesurant les petites oscillations dans un plan horizontal d'une aiguille aimantée.

L'aiguille aimantée est un petit solide qui peut tourner sans frottements autour de son axe vertical. Elle est assimilable à un dipôle magnétique de moment magnétique  $\vec{m}$  horizontal et de moment d'inertie  $J$  par rapport à son axe de rotation. On pose :

$$\alpha = (\vec{e}_\varphi, \vec{m})$$

- (a) Quelle est la position d'équilibre stable de l'aiguille aimantée dans le champ magnétique terrestre ? justifier brièvement la réponse.
- (b) Établir l'équation différentielle du mouvement de l'aiguille soumise au champ magnétique terrestre.
- (c) En déduire la période  $\tau_0$  des petites oscillations de cette aiguille, en fonction de  $B_h, J$  et  $m = \|\vec{m}\|$ .
- (d) Les valeurs de  $m$  et  $J$  n'étant pas connues, on utilise le champ magnétique  $\vec{B}_e$ , créé par une bobine parcourue par un courant électrique, pour s'en affranchir. On place d'abord la bobine telle que  $\vec{B}_e$  et la composante horizontale du champ terrestre soient parallèles et de même sens ; on mesure la période  $\tau_1$  des petites oscillations de l'aiguille aimantée. On change ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle valeur  $\tau_2$  de la période des petites oscillations. En déduire  $B_h$  en fonction de l'intensité  $B_e$  du champ  $\vec{B}_e$  créé par la bobine et du rapport  $\frac{\tau_1}{\tau_2}$  (on supposera que  $B_h < B_e$ ).
- (e) *Application numérique* : en un point  $P$ , défini par  $\varphi_P = 50^\circ$ , on a mesuré  $B_e = 100 \mu\text{T}$  et  $\frac{\tau_1}{\tau_2} = 0,78$ . Calculer  $B_h$ .

## ● 88 ————— Concours Commun Polytechnique

30 min.

Équations de Maxwell

MP-PC-PSI-PT

On désignera par  $i$  le nombre complexe de module unité et d'argument  $\frac{\pi}{2}$  et, à toute grandeur harmonique de pulsation  $\omega$  :  $a(M, t) = a(M) \cos[\omega t + \phi(M)]$ , on associera le nombre complexe  $\underline{a}(M, t) = \underline{A}(M) e^{i\omega t}$  où  $\underline{A}(M)$  représente l'amplitude complexe :  $\underline{A}(M) = a(M) e^{i\phi(M)}$ .

La perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$  doit être systématiquement remplacée, dans un matériau métallique, par la perméabilité magnétique absolue du métal :  $\mu = \mu_0 \times \mu_r$ .

On tiendra compte aussi de la conductivité électrique  $\gamma$  des métaux. Les données sont :

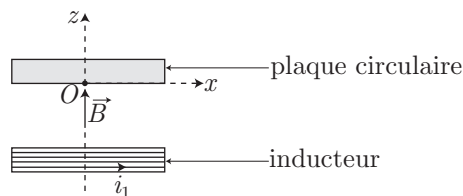
$$\begin{array}{lll} \text{acier amagnétique} & \mu_r = 1 & \gamma = 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1} \\ \text{acier magnétique} & \mu_r = 350 & \gamma = 5 \cdot 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1} \end{array}$$

La permittivité électrique du vide sera prise égale à :  $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Enfin, l'expression donnée ci-après du Laplacien vectoriel d'un vecteur  $\vec{j}$  pourra être utilisée sans démonstration :

$$\Delta \vec{j} = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div } \vec{j}) - \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{j})$$

Un conducteur, alimenté par un courant  $i$ , génère un champ magnétique  $\vec{B}$  sinusoïdal, de fréquence compatible avec l'approximation des régimes quasi stationnaires. Ce champ est globalement orienté suivant un axe ( $Oz$ ) autour duquel il conserve une symétrie de révolution. Il agit sur un disque métallique coaxial, d'épaisseur  $d = 1 \text{ cm}$ , dont la face en regard vers l'inducteur est centrée en  $O$ .



1. Exprimer la loi qui permet de prévoir globalement le sens de rotation des courants induits dans la plaque circulaire. Préciser celui-ci. Quelle est la fréquence des courants induits ?
2. Pour modéliser ces courants, on cherche une solution conforme aux équations de Maxwell et compatible avec l'hypothèse de charges mobiles entraînées, en rotation autour de l'axe ( $Oz$ ), avec une vitesse angulaire  $\Omega(z)$ , uniforme dans chaque section droite de la plaque circulaire.

Toute l'étude se fera en coordonnées cartésiennes dans le référentiel orthonormé ( $Ox, y, z$ ), l'axe ( $Oy$ ), non représenté sur la figure précédente, étant orienté normalement au plan du dessin, vers l'arrière.

- (a) Exprimer la vitesse linéaire  $\vec{v}$  des charges électriques en un point  $M(x, y, z)$  du disque, sous forme d'un produit vectoriel fonction du rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$  et du vecteur axial  $\vec{\Omega}(z)$  représentant la vitesse de rotation, orienté selon ( $Oz$ ).
- (b) En déduire les composantes  $j_x$  et  $j_y$  de la densité de courant  $\vec{j}$ , en fonction du nombre  $n$  de charges élémentaires  $e$  mobiles par unité de volume, de la vitesse angulaire  $\Omega(z)$  et des coordonnées du point  $M$ .

- (c) Calculer les dérivées partielles  $\frac{\partial^2 j_x}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 j_x}{\partial y^2}$ ,  $\frac{\partial^2 j_y}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 j_y}{\partial y^2}$ .

### 3. Équations de Maxwell

- (a) Exprimer la loi d'Ohm locale pour un métal de conductivité  $\gamma$ .
- (b) Écrire les équations de Maxwell pour un métal de perméabilité absolue  $\mu$ .

- (c) À partir de ces équations de Maxwell, retrouver l'équation locale de conservation de la charge.
- (d) Si les conditions initiales étaient telles qu'une densité volumique de charges  $\rho_0$  soit présente à l'instant  $t = 0$ , montrer qu'elle disparaîtrait en un temps très court. Évaluer ce temps et conclure qu'en régime établi, le conducteur reste globalement neutre en tout point de son volume. Donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Gauss.
- (e) Montrer que, lorsque la fréquence imposée est égale à 25 kHz, les courants de déplacement sont tout à fait négligeables devant les courants de conduction. Dans ce cas, donner l'expression simplifiée de l'équation de Maxwell-Ampère.
- (f) Réécrire les équations de Maxwell ainsi obtenues, en utilisant la notation complexe pour les dérivations en fonction du temps. En déduire une relation exprimant la proportionnalité entre la densité de courant  $\vec{j}$  et son Laplacien vectoriel  $\Delta \vec{j}$ .
4. On cherche, pour les composantes  $j_x$  et  $j_y$  de la densité volumique de courant, des expressions complexes qui puissent s'écrire :  $\underline{J}_x(z) e^{i\omega t}$  et  $\underline{J}_y(z) e^{i\omega t}$ .  
Montrer alors, en utilisant les résultats obtenus en 2-(c), que ces expressions sont régies par des équations différentielles de la forme :

$$\frac{d^2 \underline{J}_x}{dz^2} = f(\underline{J}_x) \text{ et } \frac{d^2 \underline{J}_y}{dz^2} = f(\underline{J}_y)$$

5. Résoudre ces équations et écrire l'expression générale des amplitudes complexes  $\underline{J}_x$  et  $\underline{J}_y$  en faisant apparaître, dans chaque cas, deux constantes d'intégration.
6. Introduire une grandeur  $\delta$  homogène à une longueur et caractéristique de l'atténuation suivant l'axe ( $Oz$ ). Quel nom donne-t-on habituellement à cette grandeur ? Montrer qu'elle peut s'écrire :

$$\delta \simeq \frac{503,5}{\sqrt{\gamma \mu_r f}}$$

7. L'inducteur est alimenté par un générateur délivrant une fréquence  $f = 25$  kHz. La plaque a une épaisseur égale à 1 cm.
- (a) Calculer la profondeur des courants dans les deux cas : acier amagnétique puis acier magnétique, compte tenu des valeurs numériques données en début de problème.
- (b) Justifier que, malgré la petitesse de son épaisseur, on puisse considérer la plaque comme illimitée selon  $z$ .
- (c) Simplifier alors les expressions de  $\underline{J}_x$  et de  $\underline{J}_y$ .
8. Donner, en notation réelle, l'expression de la norme du vecteur densité de courant  $\vec{j}(z)$ . On désignera par  $J_0$  son amplitude en  $z = 0$ .

● **89** **Concours Centrale-Supélec**

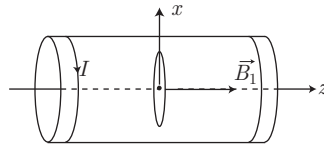
20 min.

Induction

MP-PC-PSI-PT

Une bobine plate de  $N$  spires, de section  $S$ , de résistance  $R$  et d'inductance négligeable est placée à l'intérieur d'un solénoïde idéal comportant  $n$  spires par unité de longueur, parcouru par un courant  $I$  constant.

Un opérateur fait tourner la bobine à la vitesse angulaire  $\omega$  constante autour d'un axe parallèle à  $(Ox)$ , portant le diamètre de la bobine et perpendiculaire à l'axe  $(Oz)$  du solénoïde.



1. Décrire qualitativement ce qui se passe dans la bobine.
2. Exprimer le courant induit dans la bobine.
3. Exprimer les actions mécaniques du solénoïde sur la bobine.

● **90** **Concours Mines-Ponts 2002**

20 min.

Induction

MP-PC-PSI-PT

On introduit une particule  $(m, q)$  dans une région où règne le champ uniforme  $\vec{B}$ , définissant la direction  $Oz$ .

La vitesse  $\vec{v}$  de la particule est dans le plan passant par l'origine  $O$ , perpendiculaire à  $\vec{B}$ .

On note respectivement  $v$  et  $B$  les normes de la vitesse et du champ magnétique ; ces deux dernières grandeurs dépendent du temps. Les variations du champ  $\vec{B}$  sont suffisamment lentes pour qu'à un instant donné, la trajectoire puisse être considérée comme circulaire, de période de révolution  $T$ . On se propose d'abord d'exprimer dans ces conditions le champ électrique  $\vec{E}$  associée aux variations temporelles de  $\vec{B}$  par deux méthodes différentes.

1. On admet que ce champ électrique, possédant la symétrie cylindrique, est orthoradial ; trouver alors sa mesure algébrique sur le vecteur unitaire  $\vec{e}_\theta$ .  
Si  $\vec{B}$  pointe vers les  $z$  positifs et si sa norme augmente avec le temps, une particule de charge électrique positive sera-t-elle accélérée ou ralentie par la force associée au champ  $\vec{E}$  ?
2. Vérifier que le champ magnétique à l'instant  $t$  au point  $M$  peut-être décrit par le potentiel vecteur :  $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{OM}$ .  
En admettant que le potentiel scalaire soit nul, exprimer le champ électrique  $\vec{E}$  associé au potentiel choisi.
3. Exprimer le rayon  $R$  du cercle trajectoire en fonction de  $v$ ,  $B$ ,  $m$  et  $q$ .
4. Établir que l'énergie cinétique de la particule  $E_c(t)$  est proportionnelle à  $B$ .
5. Le champ électrique induit dépend lui aussi du temps,  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  n'est pas identiquement nul ; or, la relation  $\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  force la conclusion que le champ  $\vec{B}$  étant homogène dans l'espace, le champ  $\vec{E}$  ne saurait dépendre du temps.  
Quelle est l'origine de cette contradiction ? Comment la résoudre ?

**ÉNONCÉS**

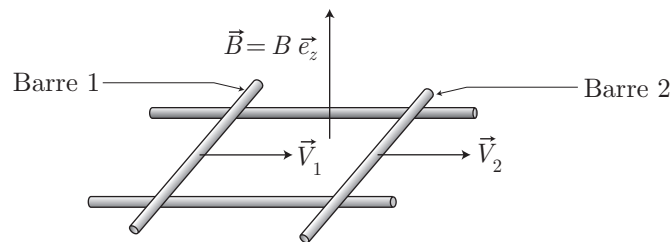
## ● 91 ————— Concours Commun Polytechnique

30 min.

Induction

MP-PC-PSI-PT

Sur deux rails conducteurs parallèles à l'axe  $(Ox)$ , dans un même plan horizontal, séparés d'une distance  $d$ , peuvent glisser deux barres conductrices parallèles, perpendiculaires aux rails. On négligera les frottements entre les barres et les rails. L'ensemble constitue un circuit fermé de résistance totale  $R_0$  que l'on admettra indépendante de la position des barres. Ce dispositif est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, orthogonal au plan du circuit. À  $t = 0$ , on lance la barre 1, avec la vitesse  $\vec{V} = V_0 \vec{e}_x$ , la barre 2 étant immobile.



1. Par une étude qualitative, montrer que la barre 2 se met en mouvement. Comment vont évoluer les vitesses des deux barres ?
2. Exprimer l'intensité du courant induit dans le circuit.
3. Exprimer  $\vec{V}_1(t)$  et  $\vec{V}_2(t)$
4. Montrer qu'entre  $t = 0$  et  $t$  très grand, la puissance dissipée par effet Joule correspond à la variation d'énergie cinétique. Conclure.

## ● 92 ————— Lycée Saint-Exupéry

30 min.

Induction

MP-PC-PSI-PT

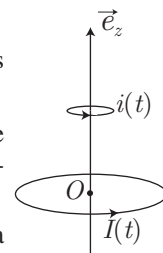
On considère deux spires de rayons  $R$  et  $a$ , ( $R \gg a$ ) ayant même axe  $(Oz)$ .

La spire de rayon  $R$  est parcourue par le courant  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ .

On appelle  $z$  la distance qui sépare les deux spires. On se place dans l'approximation des régimes quasi permanents

1. On cherche à exprimer le champ magnétique,  $\vec{B}_1$ , créé par la grande spire au niveau de la petite. Montrer que ce champ n'a pas de composante orthoradiale.
2. Exprimer ce champ en tout point de l'axe  $(Oz)$ , on admettra pour la suite que  $\vec{B}_1(r, z) = B_{1r} \vec{u}_r + B_{1z}(r=0, z) \vec{u}_z$ .
3. En déduire  $M$ , inductance mutuelle entre les deux circuits.
4. En assimilant la petite spire à un dipôle magnétique, de moment que l'on précisera, exprimer le flux du champ magnétique créé par cette dernière au niveau de la grande spire, retrouver la valeur de  $M$ .

On donne pour un dipôle magnétique de moment  $\vec{M}$ , situé en  $P$ , le potentiel vecteur créé en tout point de l'espace repéré par ses coordonnées sphériques





$M(r, \theta, \varphi) :$

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \wedge P\vec{M}}{PM^3}$$

5. Exprimer, en régime établi, le courant induit dans la spire de rayon  $a$ .

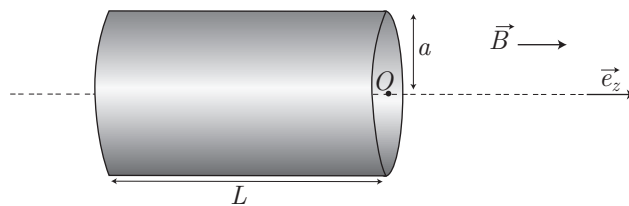
● **93** ————— **Concours Centrale-Supélec**

30 min.

Induction

MP-PC-PSI-PT

On place un cylindre de rayon  $a$ , de longueur  $L$ , d'axe  $(Oz)$  et de conductivité  $\gamma$  dans un champ magnétique uniforme :



$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

1. Quel dispositif permet d'obtenir un tel champ ?
2. Justifier qu'il va apparaître dans le milieu un champ électrique.
3. En admettant que ce dernier est orthoradial, l'exprimer en fonction de  $B_0$ ,  $r$  et  $\omega$  pour  $r < a$ .
4. Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le matériau.

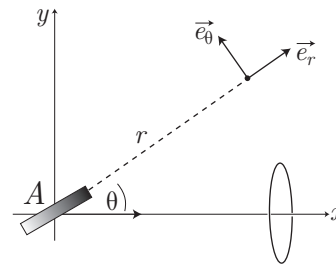
● **94** ————— **Concours Commun Polytechnique**

40 min.

Induction

MP-PC-PSI-PT

Un aimant  $A$ , de moment magnétique  $\vec{M}$ , de moment d'inertie  $J$ , situé dans le plan  $(Oxy)$ , tourne autour de l'axe  $(Oz)$  à la vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ . Une spire de rayon  $a$ , d'inductance propre négligeable et de résistance  $R$ , est centrée sur l'axe  $(Ox)$  à l'abscisse  $r \gg a$ .



1. Exprimer le courant induit dans la spire. On utilisera l'expression du champ magnétique créé par un aimant à grande distance.
2. En déduire le champ magnétique créé par la spire au point  $O$ .
3. Exprimer le moment des efforts qu'exerce la spire sur l'aimant.
4. En supposant que l'aimant, entraîné par un moteur, tourne à vitesse angulaire constante, exprimer le moment du couple exercé par le moteur sur l'aimant.

**ÉNONCÉS**

5. À  $t = 0$  le moteur débraye,  $\theta = 0$  et  $\omega = \omega_0$ . Déterminer l'angle  $\alpha$  dont tourne  $A$  avant de s'immobiliser, en supposant d'abord que le moteur exerce un frein négligeable, puis que le moteur freine fortement  $A$ .

On rappelle que le champ magnétique créé par un aimant de moment  $M$  en un point  $P$  de l'espace vaut :

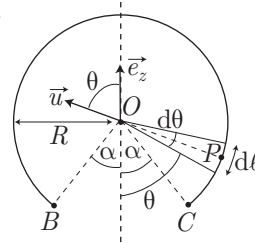
$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 M}{4\pi AP^3} [2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta]$$

**ÉNONCÉS**

● **60** ————— **Lycée Poincaré, Nancy**

Soit  $d\ell$  un élément de longueur, centré sur un point  $P$ , correspondant à un arc  $d\ell = R d\theta$  et portant donc une charge  $\delta q = \lambda d\ell = \lambda R d\theta$ . Une telle charge produit en  $O$  un champ électrique élémentaire :

$$\begin{aligned} \delta \vec{E} &= \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PO^2} \vec{u} \text{ où } \vec{PO} = R \vec{u} \\ &= \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} d\theta \vec{u} \end{aligned}$$



Aussi, le champ produit en  $O$  par la totalité de la distribution ( $\theta$  varie de  $\alpha$  à  $2\pi - \alpha$ ) vaut :

$$\vec{E}(O) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} d\theta \vec{u}$$

Or, l'axe  $(O, \vec{e}_z)$  est un axe de symétrie pour cette distribution de charges, passant par  $O$ , en conséquence de quoi  $\vec{E}(O)$  est colinéaire à  $\vec{e}_z$  :

$$\vec{E}(O) = E(O) \vec{e}_z \Rightarrow E(O) = \vec{E}(O) \cdot \vec{e}_z = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \vec{u} \cdot \vec{e}_z d\theta$$

où  $\vec{u} \cdot \vec{e}_z = \cos \theta$  permet d'écrire :

$$\begin{aligned} E(O) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ \underbrace{\sin(2\pi - \alpha) - \sin \alpha}_{= -\sin \alpha} \right] \\ &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \alpha \\ \Rightarrow \vec{E}(O) &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \sin \alpha \vec{e}_z \end{aligned}$$

● **61** ————— **Lycée Saint-Louis, Paris**

Un point  $M(r, \theta, \phi)$  de la distribution de charges est repéré par ses coordonnées sphériques :

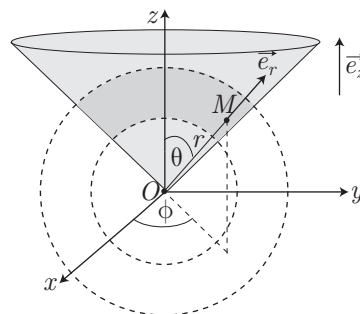
$$r \in [a_1, a_2], \theta \in [0, \alpha], \phi \in [0, 2\pi]$$

et par le vecteur unitaire  $\vec{e}_r$  :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r \text{ avec } \theta = (\vec{e}_r, \vec{e}_z)$$

Or, au voisinage de  $M$ , un volume élémentaire  $\delta\tau = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$  contient la charge :

$$\delta q = \rho d\tau = \rho \times r^2 dr \times \sin \theta d\theta d\phi$$



**CORRIGÉS**

à l'origine du champ électrique  $\delta\vec{E}(O)$  en  $O$  :

$$\delta\vec{E}(O) = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} dr \times \sin\theta d\theta \times d\phi \vec{u}$$

où  $\vec{u} = \frac{\vec{MO}}{OM}$  est le vecteur unitaire directeur de  $\vec{MO}$ .

Ainsi, le champ électrique créé en  $O$  par l'ensemble de la distribution ( $\mathcal{D}$ ) vaut :

$$\vec{E}(O) = \iiint_{(\mathcal{D})} \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \times dr \times \sin\theta d\theta \times d\phi \vec{u}$$

Or, l'axe ( $Oz$ ) est un axe de symétrie électrique, qui passe par  $O$ , en conséquence de quoi le champ électrique est colinéaire à ( $Oz$ ) :

$$\vec{E}(O) = E(O) \vec{e}_z \Rightarrow E(O) = \vec{E}(O) \cdot \vec{e}_z$$

Enfin, les définitions des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{e}_r$  conduisent à :

$$\begin{cases} \vec{OM} = r \vec{e}_r \\ \vec{MO} = r \vec{u} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = -\vec{e}_r \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{e}_z = -\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = -\cos\theta$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} E(O) &= \vec{E}(O) \cdot \vec{e}_z \\ &= \iiint_{(\mathcal{D})} \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \times dr \times \sin\theta d\theta \times d\phi \times \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{e}_z}_{-\cos\theta} \\ &= -\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi \int_{a_1}^{a_2} dr \int_0^\alpha \sin\theta \cos\theta d\theta \\ &= -\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \times 2\pi \times (a_2 - a_1) \times \frac{1}{2} \left[ -\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^\alpha \end{aligned}$$

soit encore :

$$E(O) = -\frac{\rho}{8\epsilon_0} (a_2 - a_1) [1 - \cos(2\alpha)]$$

Par suite :

$$\vec{E}(O) = -\frac{\rho}{8\epsilon_0} (a_2 - a_1) \times [1 - \cos(2\alpha)] \vec{e}_z$$

## ● 62 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

### I- Distributions linéiques de charge

#### 1. Densité linéique uniforme

(a) Dans la base cylindrique, le vecteur  $\vec{PM}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{PM} &= \vec{PO} + \vec{OM} \text{ avec } \begin{cases} \vec{OP} = z \vec{e}_z \\ \vec{OM} = r \vec{e}_r \end{cases} \\ &\Rightarrow \vec{PM} = r \vec{e}_r - z \vec{e}_z \end{aligned}$$

d'où se déduit également sa norme :

$$PM = \left\| \overrightarrow{PM} \right\| = \sqrt{r^2 + z^2}$$

- (b) Soient  $P$  et  $P'$  deux points de  $(\mathcal{L})$ , symétriques par rapport à l'axe  $(OM)$ . Étant donné que  $\lambda$  est uniforme, les densités  $\lambda(P)$  et  $\lambda(P')$  sont égales, en conséquence de quoi  $(OM)$  est un axe de symétrie électrostatique. Par suite  $\vec{E}(M)$  présente la même direction que  $(OM)$ , de vecteur directeur  $\vec{e}_r$  :

$$\vec{E}(M) = E(M) \times \vec{e}_r$$

d'où il découle que :

$$\vec{E}(M) \cdot \vec{e}_r = E(M) \times \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \Rightarrow E(M) = \vec{E}(M) \cdot \vec{e}_r \quad (35)$$

- (c) Un élément de longueur  $dz$  centré sur  $P$  possède une charge  $\delta q_P = \lambda dz$  qui produit en  $M$  le champ élémentaire :

$$\delta \vec{E}(M) = \frac{\delta q_P}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{PM}}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

Par conséquent, l'ensemble des points de  $(\mathcal{L})$ , décrit par  $z \in [-L, L]$ , produit en  $M$  un champ électrique :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\overrightarrow{PM}}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

De la relation (35), il découle alors que :

$$E(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \times \vec{e}_z \cdot \int_{-L}^L \frac{\overrightarrow{PM}}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \vec{e}_z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

Compte tenu de l'expression obtenue pour  $\overrightarrow{PM}$ , le produit scalaire :

$$\overrightarrow{PM} \cdot \vec{e}_r = (r \vec{e}_r - z \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_r = r$$

conduit à :

$$E(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz \Rightarrow E(M) = \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

- (d) Le changement de variable proposé par l'énoncé :  $z = r \tan u$ , se traduit par :

$$dz = r \frac{du}{\cos^2 u}$$

et :

$$r^2 + z^2 = r^2 \times (1 + \tan^2 u) = \frac{r^2}{\cos^2 u} \Rightarrow \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\cos^3 u}{r^3}$$

De plus, lorsque  $z$  prend la valeur  $\pm L$ , la variable  $u$  adopte la valeur :

$$u_0 = \pm \arctan\left(\frac{L}{r}\right)$$

De ce fait :

$$\begin{aligned} E(M) &= \frac{\lambda r}{4\pi\epsilon_0} \int_{-u_0}^{u_0} \frac{r \, du}{\cos^2 u} \times \frac{\cos^3 u}{r^3} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_{-u_0}^{u_0} \cos u \, du \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \times 2 \sin u_0 \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\sin u_0 = \frac{\tan u_0}{\sqrt{1 + \tan^2 u_0}} = \frac{\frac{L}{r}}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{r}\right)^2}} \Rightarrow E(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \times \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}}$$

on obtient finalement :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \times \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \vec{e}_r$$

## 2. Densité linéique non uniforme

(a) Un élément de longueur  $dz$ , centré sur  $P$ , possède une charge élémentaire :

$$\delta q_P = \sigma(P) \, dz = \alpha |z| \, dz$$

de sorte que la charge totale  $Q$  portée par  $(\mathcal{L})$  s'obtient en additionnant toutes les contributions  $\delta q_P$  pour  $z \in [-L, L]$  :

$$Q = \int_{-L}^L \alpha |z| \, dz = 2\alpha \int_0^L |z| \, dz$$

car la fonction  $|z|$  est paire, de sorte que :

$$Q = 2\alpha \int_0^L z \, dz = 2\alpha \times \frac{L^2}{2} = \alpha L^2 \Rightarrow \alpha = \frac{Q}{L^2} \Rightarrow \delta q_P = \frac{Q}{L^2} |z| \, dz$$

(b) À nouveau, si  $P'(-z)$  est un point symétrique de  $P(z)$ , on constate que :

$$\lambda(P') = \frac{Q}{L^2} |-z| = \frac{Q}{L^2} |z| = \lambda(P)$$

ce qui suffit à prouver que l'axe  $(OM)$  est un axe de symétrie électrostatique, de vecteur unitaire  $\vec{e}_r$ . Pour les mêmes raisons que précédemment, il s'ensuit que :

$$\vec{E}(M) = E(M) \times \vec{e}_r \Rightarrow E(M) = \vec{E}(M) \cdot \vec{e}_r \quad (36)$$

(c) Chaque élément  $\delta q_P$  étant à l'origine, en  $M$ , d'un champ électrique :

$$\delta \vec{E}(M) = \frac{\delta q_P}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \times \frac{|z| \, dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{PM}$$

le champ total produit par  $(\mathcal{L})$  en  $M$  vaut :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \int_{-L}^L \frac{|z| \, dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \vec{PM}$$

c'est-à-dire, compte tenu de la relation (36) :

$$\begin{aligned} E(M) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \vec{e}_r \cdot \int_{-L}^L \frac{|z| dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \overrightarrow{PM} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 L^2} \int_{-L}^L \frac{|z| dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \overrightarrow{PM} \cdot \vec{e}_r \end{aligned}$$

car le vecteur de base uniforme  $\vec{e}_r$  peut être distribué dans l'intégrale. Aussi, en remarquant que  $\overrightarrow{PM} \cdot \vec{e}_r = r$ , indépendamment du paramètre  $z$ , on obtient :

$$E(M) = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 L^2} \int_{-L}^L \frac{|z| dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$$

(d) La parité de la fonction  $\frac{|z|}{\sqrt{(r^2 + z^2)^{3/2}}}$  permet aussi d'écrire cette intégrale sous la forme :

$$\begin{aligned} E(M) &= \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 L^2} \times 2 \int_0^L \frac{|z| dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{Qr}{2\pi\epsilon_0 L^2} \times \int_0^L \frac{z dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \text{ car } |z| = z \text{ pour } z \geq 0 \\ &= \frac{Qr}{2\pi\epsilon_0 L^2} \times \left[ -\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_{z=0}^{z=L} \\ &= \frac{Qr}{2\pi\epsilon_0 L^2} \times \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right) \end{aligned}$$

en conséquence de quoi :

$$\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L^2} \left( 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right) \vec{e}_r$$

## II- Distribution surfacique de charges

1. Étant donné l'uniformité de  $\sigma$ , les densités surfaciques de charges  $\sigma(P)$  et  $\sigma(P')$ , en des points  $P$  et  $P'$  symétriques par rapport à  $(OM)$ , sont égales ; l'axe  $(OM)$  est un axe de symétrie électrostatique, dont la direction  $\vec{e}_z$  est aussi celle du champ  $\vec{E}(M)$  :

$$\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_z \Rightarrow E(M) = \vec{E}(M) \cdot \vec{e}_z \quad (37)$$

2. Une surface  $dS_P = r dr d\theta$ , centrée sur  $P$ , contient une charge :

$$\delta q_P = \sigma dS_P = \sigma r dr d\theta$$

à l'origine d'un champ électrostatique en  $M$  :

$$\delta \vec{E}(M) = \frac{\delta q_P}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{r dr d\theta}{PM^3} \overrightarrow{PM}$$

où le vecteur :

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} = z \vec{e}_z - r \vec{e}_r$$

a pour norme :

$$PM = \|\overrightarrow{PM}\| = \sqrt{z^2 + r^2} \Rightarrow \delta \vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{r \, dr \, d\theta}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \overrightarrow{PM}$$

Par conséquent, le champ total produit par  $(\mathcal{D})$  en  $M$  vaut :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\mathcal{D})} \frac{r \, dr \, d\theta}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \overrightarrow{PM}$$

Ce faisant, l'identité (37) devient, en distribuant le vecteur de base  $\vec{e}_z$  dans l'intégrale :

$$E(M) = \vec{E}(M) \cdot \vec{e}_z = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(\mathcal{D})} \frac{r \, dr \, d\theta}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \overrightarrow{PM} \cdot \vec{e}_z$$

où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} \cdot \vec{e}_z &= (z \vec{e}_z - r \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_z = z \\ \Rightarrow E(M) &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \frac{z \, r \, dr \, d\theta}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Compte tenu de l'indépendance des paramètres d'intégration  $r$  et  $\theta$ , cette intégrale vaut aussi :

$$\begin{aligned} E(M) &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^R \frac{r \, dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \times 2\pi \times \left[ -\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right]_{r=0}^{r=R} \end{aligned}$$

où l'identité :  $\sqrt{z^2} = |z|$  conduit à :

$$E(M) = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \times \left( \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

C'est pourquoi :

$$\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_z = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \times \left( \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \vec{e}_z$$

3. Un plan  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  infini peut être assimilé à un disque  $(\mathcal{D})$  dont le rayon  $R$  tend vers l'infini, avec :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) = \frac{1}{|z|}$$

à la suite de quoi le champ électrique créé en  $M$  par ce plan infini s'écrit :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \times \frac{z}{|z|} \vec{e}_z \quad (38)$$

Soient  $M_1(z_1 > 0)$  et  $M_2(z_2 < 0)$  deux points situés de part et d'autre du plan  $(\Pi)$  infini ; les champs produits en ces points s'obtiennent à partir de la loi précédente,



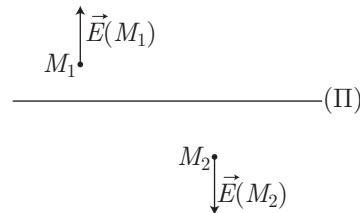
dans laquelle :

$$z_1 > 0 \Rightarrow z_1 = |z_1| \Rightarrow \vec{E}(M_1) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

tandis que :

$$z_2 < 0 \Rightarrow z_2 = -|z_2| \Rightarrow \vec{E}(M_2) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

En représentant la trace de  $(\Pi)$  sur la feuille, perpendiculaire à  $(\Pi)$ , les champs  $\vec{E}(M_1)$  et  $\vec{E}(M_2)$  apparaissent alors symétriques par rapport à  $(\Pi)$  :



Remarque – Le résultat (38) montre non seulement qu'à la traversée du plan chargé, le champ électrostatique subit la discontinuité :

$$\Delta \vec{E} = \vec{E}(M_1) - \vec{E}(M_2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

mais également qu'en tout point de  $(\Pi)$ , le champ électrostatique ne peut être calculé.

### 63 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. L'axe  $(Oy)$  étant un axe de symétrie, il s'ensuit que  $\vec{E}(O)$  présente la même direction, c'est-à-dire celle de  $\vec{e}_y$  :

$$\vec{E}(O) = E(O) \vec{e}_y \Rightarrow E(O) = \vec{E}(O) \cdot \vec{e}_y \quad (39)$$

Notamment, si  $\delta\tau$  désigne un volume élémentaire, centré sur  $M$  et produisant un champ  $\delta\vec{E}(O)$  en  $O$ , le champ électrique total produit en  $O$  par la distribution  $(\mathcal{D})$  de charges vaut :

$$\vec{E}(O) = \iiint_{(\mathcal{D})} \delta\vec{E}(O)$$

Aussi, la relation (39) a-t-elle pour conséquence :

$$E(O) = \vec{e}_y \cdot \iiint_{(\mathcal{D})} \delta\vec{E}(O) = \iiint_{(\mathcal{D})} \delta\vec{E}(O) \cdot \vec{e}_y \quad (40)$$

2. Le volume  $\delta\tau = r \, d\theta \times dr \times dz$  évoqué précédemment contient la charge élémentaire :

$$\delta q = \rho \delta\tau = \rho \times r \, dr \times dz \times d\theta$$

responsable de l'apparition, en  $O$ , du champ électrique :

$$\delta \vec{E}(O) = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 MO^3} \vec{MO}$$

où :

$$\vec{MO} = \vec{MH} + \vec{HO} = -z \vec{e}_z - r \vec{e}_r \Rightarrow MO = \sqrt{z^2 + r^2}$$

et :

$$\vec{MO} \cdot \vec{e}_y = (-z \vec{e}_z - r \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_y = -r \vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = -r \sin \theta$$

Par suite, la relation (40) devient :

$$E(O) = - \iiint_{(\mathcal{D})} \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} r \sin \theta = - \iiint_{(\mathcal{D})} \frac{\rho r dr dz d\theta}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + r^2)^{3/2}} r \sin \theta$$

Or, la distribution  $(\mathcal{D})$  étant décrite par  $r \in [0, R]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$  et  $z \in ]-\infty, +\infty[$ , il s'ensuit que :

$$E(O) = \int_{\theta=0}^{\pi} -\sin \theta d\theta \int_{r=0}^R \left( \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} r^2 dr \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right)$$

avec :

$$\int_0^{\pi} -\sin \theta d\theta = [\cos \theta]_0^{\pi} = -2$$

tandis que le changement de variable :

$$z = r \tan u \Rightarrow z^2 + r^2 = r^2 (1 + \tan^2 u) = \frac{r^2}{\cos^2 u} \text{ et } dz = r \frac{du}{\cos^2 u}$$

fournit :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \frac{du}{\cos^2 u} \times \frac{\cos^3 u}{r^3} = \frac{1}{r^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos u du \\ &= \frac{1}{r^2} [\sin u]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{r^2} \end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} E(O) &= -2 \times \int_{r=0}^R \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} r^2 \times \frac{2}{r^2} dr = -\frac{\rho}{\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^R dr \\ &= -\frac{\rho R}{\pi\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(O) = -\frac{\rho R}{\pi\epsilon_0} \vec{e}_y \end{aligned}$$

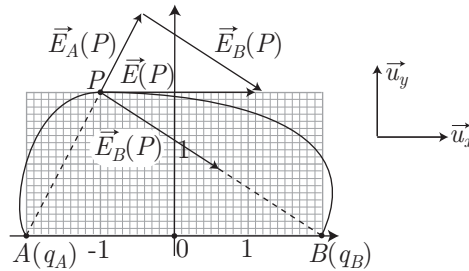
## ● 64 ————— Concours Commun Polytechnique

Les charges  $q_A$  et  $q_B$  produisent, au point  $P$ , des champs électriques respectifs :

$$\vec{E}_A(P) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AP}}{AP^3} \text{ et } \vec{E}_B(P) = \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{BP}}{BP^3}$$

de résultante :

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_A(P) + \vec{E}_B(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_A \frac{\vec{AP}}{AP^3} + q_B \frac{\vec{BP}}{BP^3} \right)$$



Or, en  $P$ , la ligne de champ présente une tangente parallèle à l'axe  $(O, \vec{u}_x)$ , ce qui signifie que  $\vec{E}(P)$  est colinéaire à  $\vec{u}_x$ , ce qui impose également :

$$\vec{E}(P) \cdot \vec{u}_y = 0 \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_A}{AP^3} \vec{AP} \cdot \vec{u}_y + \frac{q_B}{BP^3} \vec{BP} \cdot \vec{u}_y \right) = 0$$

où, en notant  $y$  l'ordonnée du point  $P$  :

$$\begin{cases} \vec{AP} \cdot \vec{u}_y = y \\ \vec{BP} \cdot \vec{u}_y = y \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_A}{AP^3} + \frac{q_B}{BP^3} \right) = 0$$

$$\Rightarrow q_B = - \left( \frac{BP}{AP} \right)^3 \times q_A$$

*Application numérique :*

Avec :  $BP = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$  et  $AB = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ , on trouve :

$$q_B = - \left( \frac{13}{5} \right)^{3/2} q_A \simeq -4,2 \times q_A$$

## ● 65 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Le potentiel  $V(r)$  est associé au champ électrostatique  $\vec{E}$  par l'intermédiaire de la relation :

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\text{grad } V &= -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \\ &= -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r \text{ car } V \equiv V(r) \\ &= -\frac{qe}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dr} \left[ e^{-\lambda r} \left( \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{2} \right) \right] \vec{e}_r \\ &= -\frac{qe}{4\pi\epsilon_0} e^{-\lambda r} \left[ -\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda}{r} - \frac{\lambda^2}{2} \right] \vec{e}_r \end{aligned}$$

soit encore :

$$\vec{E} = \frac{qe}{4\pi\epsilon_0 r^2} e^{-\lambda r} \times \left(1 + \lambda r + \frac{1}{2} \lambda^2 r^2\right) \vec{e}_r$$

2. La densité volumique de charges,  $\rho(r)$ , vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow \rho = -\epsilon_0 \Delta V$$

où le potentiel  $V$  ne dépend que de la variable  $r$ , en conséquence de quoi

$$\begin{aligned} \Delta V = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2}(rV) &= \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} \left[ e^{-\lambda r} \left(1 + \frac{\lambda r}{2}\right) \right] \times \frac{qe}{4\pi\epsilon_0} \\ &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ e^{-\lambda r} \left(\frac{\lambda}{2} - \lambda - \frac{\lambda^2}{2} r\right) \right] \times \frac{qe}{4\pi\epsilon_0} \\ &= -\frac{\lambda}{2r} \frac{d}{dr} [e^{-\lambda r} (1 + \lambda r)] \times \frac{qe}{4\pi\epsilon_0} \\ &= -\frac{\lambda}{2r} e^{-\lambda r} (\lambda - \lambda - \lambda^2 r) \times \frac{qe}{4\pi\epsilon_0} \\ &= \frac{qe \lambda^3}{8\pi\epsilon_0} e^{-\lambda r} \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\rho(r) = -\frac{qe \lambda^3}{8\pi} e^{-\lambda r}$$

Aussi, dans le volume élémentaire compris dans une coquille sphérique centrée sur  $O$  et de rayons  $r$  et  $r + dr$ , se trouve une charge :

$$\delta Q = \rho(r) \times 4\pi r^2 dr = -\frac{qe \lambda^3}{2} r^2 e^{-\lambda r} dr$$

Par suite, dans une sphère de rayon  $r$  est confinée une charge :

$$Q(r) = \int_0^r \delta Q = -\frac{qe \lambda^3}{2} \int_0^r u^2 e^{-\lambda u} du$$

où une intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^r u^2 e^{-\lambda u} du = \frac{2}{\lambda^3} - e^{-\lambda r} \left(\frac{r^2}{\lambda} + \frac{2r}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3}\right) \\ \Rightarrow Q(r) &= -qe + qe e^{-\lambda r} \left(\frac{\lambda^2 r^2}{2} + \lambda r + 1\right) \end{aligned}$$

Cette expression montre que la charge  $Q(r)$  est la somme d'une charge centrale :

$$Q_0 = -qe$$

et d'une charge :

$$Q_1 = qe e^{-\lambda r} \left(\frac{\lambda^2 r^2}{2} + \lambda r + 1\right)$$

qui provient d'une distribution volumique de charges  $\rho_1$  telle que :

$$Q_1 = \int_0^r 4\pi u^2 \rho_1(u) du$$

c'est-à-dire :

$$\frac{qe}{4\pi} e^{-\lambda r} \left( \frac{\lambda^2 r^2}{2} + \lambda r + 1 \right) = \int_0^r u^2 \rho_1(u) du$$

Il s'ensuit que :

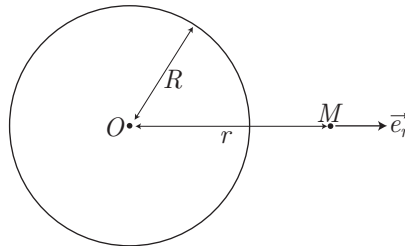
$$\begin{aligned} r^2 \rho_1(r) &= \frac{qe}{4\pi} \frac{d}{dr} \left[ e^{-\lambda r} \left( \frac{\lambda^2 r^2}{2} + \lambda r + 1 \right) \right] \\ &= \frac{qe}{4\pi} e^{-\lambda r} \left( \lambda^2 r + \lambda - \frac{\lambda^3}{2} r^2 - \lambda^2 r - \lambda \right) \\ &= -\frac{\lambda^3 qe}{8\pi} r^2 e^{-\lambda r} \\ \Rightarrow \rho_1(r) &= -\frac{\lambda^3 qe}{8\pi} e^{-\lambda r} \end{aligned}$$

## ● 66 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. L'axe  $(OM)$ , de vecteur directeur  $\vec{e}_r$ , tel que  $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$ , est un axe de symétrie électrique qui passe par  $M$ , en raison de quoi  $\vec{E}(M)$  est colinéaire à  $\vec{e}_r$  :

$$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta, \phi) \vec{e}_r$$

De plus, une rotation de la distribution de charges autour de  $O$  n'entraîne aucune modification de cette distribution. C'est pourquoi la composante  $E_r$  de  $\vec{E}$  est indépendante de  $\theta$  et de  $\phi$  :



$$\vec{E}(M) = E_r(r) \vec{e}_r$$

2. Pour  $r < R$ ,  $\rho$  est constant et est défini par :

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \frac{\rho}{3} = \frac{q}{4\pi R^3} \quad (41)$$

Ce faisant, l'équation locale de Maxwell-Gauss impose :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} &\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ car } E_\theta = 0 \text{ et } E_\phi = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d}{dr} (r^2 E_r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} r^2 \text{ car } E_r = E_r(r) \\ &\Rightarrow r^2 E_r = \frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + \alpha \end{aligned}$$

où  $\alpha$  est une constante que l'on peut calculer en écrivant cette relation en  $r = 0$  :

$$0 = 0 + \alpha \Rightarrow E_r = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'expression (41) :

$$E_r = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \Rightarrow \vec{E} = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \vec{e}_r$$

3. En admettant la continuité de  $E_r$  en  $r = R$ , on suppose que :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R^-} [E_r(r)] &= E_r(R) = \lim_{r \rightarrow R^+} [E_r(r)] \\ \Rightarrow E_r(R) &= \lim_{r \rightarrow R^+} [E_r(r)] = \lim_{r \rightarrow R} \left[ \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \right] \\ \Rightarrow E_r(R) &= \lim_{r \rightarrow R^+} [E_r(r)] = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \end{aligned}$$

En outre, pour  $r > R$ ,  $\rho = 0$  confère à l'équation de Maxwell-Gauss la forme suivante :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E_r) = 0 \Rightarrow r^2 E_r = \beta$$

où  $\beta$  est une constante accessible en faisant tendre  $r$  vers  $R^+$  :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R^+} [E_r(r)] &= \lim_{r \rightarrow R} \left( \frac{\beta}{r^2} \right) \Rightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\beta}{R^2} \Rightarrow \beta = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \\ \Rightarrow E_r &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 OM^3} \overrightarrow{OM}$$

qui correspond à l'expression du champ électrique que produirait en  $M$  une charge ponctuelle  $q$  située en  $O$ .

### ● 67 ————— Lycée du Parc, Lyon

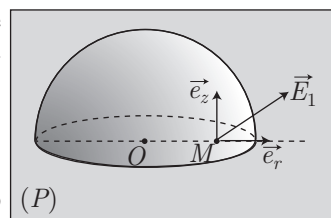
Soit  $(\Sigma_1)$  la demi-sphère évoquée dans l'énoncé, qui produit en  $M$  un champ électrique  $\vec{E}_1$ .

Le plan  $(P)$  qui passe simultanément par  $O$  et  $M$  est un plan de symétrie pour la distribution de charges étudiée, auquel cas  $\vec{E}_1 \in (P)$ . Aussi, en notant  $\vec{e}_r \in (P)$  le vecteur unitaire de  $\overrightarrow{OM}$  :

$$\overrightarrow{OM} = OM \vec{e}_r$$

et  $\vec{e}_z$  le vecteur unitaire orthogonal à  $(\Pi)$ , le champ  $\vec{E}_1$  a pour composantes :

$$\vec{E}_1 = E_{1r} \vec{e}_r + E_{1z} \vec{e}_z \quad (42)$$



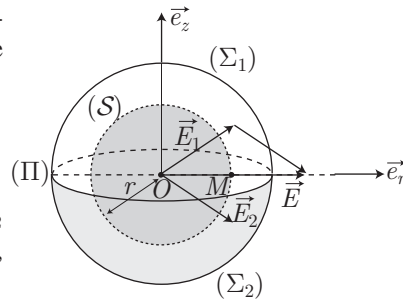
Adjoignons à  $(\Sigma_1)$  une demi-sphère  $(\Sigma_2)$  identique à  $(\Sigma_1)$  de manière à constituer une sphère  $(\Sigma)$  complète.

La demi-sphère  $(\Sigma_2)$  produit en  $M$  un champ :

$$\vec{E}_2 = E_{2r} \vec{e}_r + E_{2z} \vec{e}_z$$

symétrique de  $\vec{E}_1$  par rapport à  $(\Pi)$  (car si  $\Sigma_2$  prenait la place de  $(\Sigma_1)$ ,  $\vec{E}_2$  s'identifierait à  $\vec{E}_1$ ), ce qui s'exprime par :

$$\begin{cases} E_{2z} = -E_{1z} = -E_z \\ E_{1r} = E_{2r} = E_r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_1 = E_z \vec{e}_z + E_r \vec{e}_r \\ \vec{E}_2 = -E_z \vec{e}_z + E_r \vec{e}_r \end{cases}$$



C'est pourquoi le champ résultant  $\vec{E}$  vaut :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2 E_r \vec{e}_r$$

Considérons, en outre, une sphère  $(S)$  de rayon  $r = OM$ , centrée sur  $O$  et de surface totale  $S = 4\pi r^2$ . Soit  $\vec{E} = 2 E_r \vec{e}_r$  un champ radial, de norme  $E_r$  constante, colinéaire à tout élément  $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$  de  $(S)$ . Le théorème de Gauss impose :

$$\Phi_E = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0$$

car aucune charge ne se trouve dans le volume circonscrit par  $(S)$ . C'est pourquoi :

$$0 = \iint_{(S)} 2E_r dS = 2E_r \iint_{(S)} dS = 2E_r \times 4\pi r^2 \Rightarrow E_r = 0$$

Compte tenu de cette identité, le champ  $\vec{E}_1$  décrit par la relation (42) devient :

$$\vec{E}_1 = E_z \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}_1 \perp (\Pi) \text{ car } \vec{e}_z \perp (\Pi)$$

## ● 68 ————— Concours de l'ENAC

1. Une coquille sphérique, de centre  $O$  et dont les rayons valent  $r$  et  $r + dr$ , présente un volume  $d\tau = 4\pi r^2 dr$  et donc une charge :

$$\delta Q = \rho d\tau = 4\pi \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr$$

C'est pourquoi, dans la sphère de rayon  $a$  se trouve la charge :

$$Q = 4\pi \rho_0 \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^4}{a^2}\right) dr = 4\pi \rho_0 \left(\frac{a^3}{3} - \frac{1}{a^2} \times \frac{a^5}{5}\right) \quad (43)$$

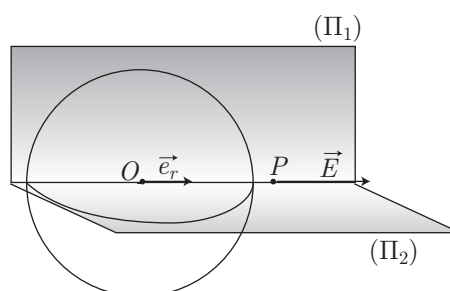
$$= 4\pi \rho_0 a^3 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \quad (44)$$

$$\Rightarrow Q = \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3 \quad (\text{réponse b}) \quad (45)$$

2. Les propriétés de symétrie du champ électrostatique permettent d'affirmer que :

le champ électrique  $\vec{E}$  est contenu dans le plan de symétrie des charges et est orthogonal à leurs plans d'antisymétrie (réponses a et b).

Soient ainsi deux plans,  $(\Pi_1)$  et  $(\Pi_2)$  passant par  $O$  et  $P$ , qui sont plans de symétrie pour la distribution de charges. Par suite, le champ  $\vec{E}(P)$  appartient simultanément à  $(\Pi_1)$  et  $(\Pi_2)$ , c'est-à-dire à leur intersection.



Cette intersection coïncidant avec le rayon  $(OP)$ , de vecteur directeur unitaire  $\vec{e}_r$ , il s'ensuit que :

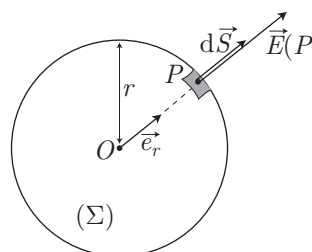
$$\vec{E}(P) = E(P) \vec{e}_r$$

3. Considérons une sphère  $(\Sigma)$  de rayon  $r$ , passant par le point  $P$  au voisinage duquel un élément de surface  $d\vec{S}$  est défini par :  $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$ .

Par conséquent :

$$\vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = E(P) \times dS$$

En outre, toute rotation de la distribution  $(\mathcal{D})$  de charges autour de  $O$  laisse invariante  $(\mathcal{D})$ , ce qui signifie que le champ électrique ne dépend que de  $r$ .



$$\vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = E(r) \times dS$$

Ce faisant, le flux du champ électrique à travers  $(\Sigma)$  est défini par :

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma} &= \iint_{(\Sigma)} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} E(r) \times dS = E(r) \times \iint_{(\Sigma)} dS \\ &\Rightarrow \Phi_{\Sigma} = E(r) \times 4\pi r^2 \end{aligned}$$

Notamment, lorsque  $r > a$ , la charge  $q_{\text{int}}$  contenue à l'intérieur de  $(\Sigma)$  s'identifie à



$Q = \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3$ . Ce faisant, le théorème de Gauss stipule que :

$$\Phi_\Sigma = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_e(r) \times 4\pi r^2 = \frac{8\pi}{15} \frac{\rho_0 a^3}{\varepsilon_0} \quad (46)$$

$$\Rightarrow E_e(r) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2} \quad (47)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_e(P) = E_e(r) \vec{e}_r = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (48)$$

avec :

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \Rightarrow \vec{E}_e(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (\text{réponse a})$$

4. Si maintenant la sphère ( $\Sigma$ ) se trouve à l'intérieur de la distribution de charges ( $r < a$ ), son volume contient une charge  $q_{\text{int}}$  calculable à partir de la relation (43) :

$$q_{\text{int}} = 4\pi\rho_0 \int_0^r \left( r^2 - \frac{r^4}{a^2} \right) dr = 4\pi\rho_0 \left( \frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5a^2} \right) = 4\pi\rho_0 \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) r^3$$

Aussi, l'application du théorème de Gauss conduit à :

$$\Phi_\Sigma = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) r^3 \quad (49)$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) r \quad (50)$$

$$\Rightarrow \vec{E}_i(P) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \times r \vec{e}_r \quad (51)$$

c'est-à-dire, en remarquant que  $r \vec{e}_r = \vec{r}$  :

$$\vec{E}_i(P) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \vec{r} \quad (\text{réponse c})$$

5. Le champ électrique ne dépendant que de  $r$  et étant radial :  $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ , la définition du potentiel électrique s'écrit, en coordonnées sphériques :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E(r) \vec{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

Cette équation révèle non seulement que  $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$  et  $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$  (c'est-à-dire que  $V$  ne dépend que de  $r$ ), mais également que :

$$\frac{dV}{dr} = -E(r) \quad (52)$$

Lorsque  $r > a$ , le champ électrique adopte la forme (47) :

$$E_e(r) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V_e(r) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r} + V_0$$

où la constante  $V_0$  tient compte de la valeur nulle de  $V_e(r)$  à l'infini, où ne se trouve aucune charge électrique :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [V(r)] = 0 \Rightarrow V_0 = 0$$

C'est pourquoi :

$$V_e(r) = \frac{2\rho_0 a^3}{15 \varepsilon_0 r} \quad (\text{réponse c})$$

6. Lorsque  $r < a$ , l'expression (50) du champ électrique donne à l'équation (52) la forme suivante :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) \Rightarrow V_i(r) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2} \right) + V_1$$

La constante d'intégration  $V_1$  doit rendre compte de la continuité de la fonction  $V(r)$  en  $r = a$  :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow a^-} [V(r)] &= \lim_{r \rightarrow a^+} [V(r)] \Rightarrow -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left( \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{20} \right) + V_1 = \frac{2\rho_0 a^2}{15 \varepsilon_0} \\ &\Rightarrow -\frac{7}{60} \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0} + V_1 = \frac{2a^2}{15} \times \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \\ &\Rightarrow V_1 = \frac{\rho_0 a^2}{\varepsilon_0} \times \left( \frac{2}{15} + \frac{7}{60} \right) = \frac{a^2}{4} \times \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$V_i(r) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \times \left( \frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2} \right) \quad (\text{réponse a})$$

## ● 69 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Dans un volume  $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi R^3$ , la charge  $q$  est répartie de manière uniforme avec une densité définie par :

$$\rho = \frac{q}{\mathcal{V}} \Rightarrow \rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$$

2. Une sphère  $S_1$  de rayon  $r$  renferme un volume  $\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3} \pi r^3$  tandis qu'une sphère  $S_2$  de rayon  $r + dr$  renferme un volume :

$$\mathcal{V}_2 = \frac{4}{3} \pi (r + dr)^3 = \frac{4}{3} \pi (r^3 + 3r^2 dr + 3r dr^2 + dr^3)$$

soit, au premier ordre en  $dr$  :  $\mathcal{V}_2 = \frac{4}{3} \pi r^3 + 4\pi r^2 dr$ . C'est pourquoi le volume compris entre  $S_1$  et  $S_2$  vaut :

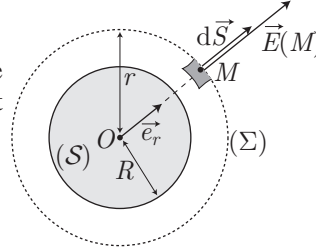
$$d\tau = \mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1 \Rightarrow d\tau = 4\pi r^2 dr$$

3. (a) L'axe  $(OM)$ , de vecteur unitaire directeur  $\vec{e}_r$ , est un axe de symétrie pour la distribution sphérique de charges, en raison de quoi  $\vec{E}(M)$  est colinéaire à  $\vec{e}_r$  :

$$\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_r$$

En outre, toute rotation de  $(S)$  autour de  $O$  laisse invariante la distribution de charges. Il s'ensuit que  $E(M)$  ne dépend que de  $r$  :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$



On désigne par  $(\Sigma)$  la surface d'une sphère de rayon  $r$ , dont un élément  $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$  permet le calcul du flux de  $\vec{E}$  à travers  $(\Sigma)$  :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} E(r) \times dS = E(r) \iint_{(\Sigma)} dS = E(r) \times 4\pi r^2$$

Le calcul de la charge  $q_{\text{int}}$  contenue à l'intérieur de  $(\Sigma)$  doit se mener en distinguant deux cas :

- Pour  $r > R$ ,  $q_{\text{int}} = q$ , de sorte que le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (53)$$

Par suite :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \text{ pour } r > R$$

- Pour  $r < R$ , la charge  $q_{\text{int}}$  représente la charge comprise dans une sphère de volume  $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi r^3$  :

$$q_{\text{int}} = \rho \mathcal{V} = \frac{3q}{4\pi R^3} \times \frac{4\pi r^3}{3} \Rightarrow q_{\text{int}} = \frac{q}{R^3} r^3$$

Ce faisant, le théorème de Gauss établit que :

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0 R^3} r^3 \Rightarrow E(r) = \frac{q r}{4\pi\epsilon_0 R^3} \quad (54)$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{e}_r \text{ pour } r < R \quad (55)$$

- (b) La définition du potentiel électrostatique :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E(r) \vec{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \vec{e}_{\phi}$$

montre que  $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$  et  $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$ , ce qui signifie que  $V$  ne dépend que de  $r$ . C'est pourquoi :

$$\frac{dV}{dr} = -E(r) \quad (56)$$

La résolution de cette équation doit être conduite en distinguant deux cas :

- Pour  $r > R$  :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

où  $V_0$  est une constante accessible à partir de la convention selon laquelle, en l'absence de charge à l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [V(r)] = 0 \Rightarrow V_0 = 0 \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ pour } r > R \quad (57)$$

- Pour  $r < R$ ,  $E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$  donne à l'équation (56) la forme :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \Rightarrow V(r) = -\frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} r^2 + V_1$$

où la constante  $V_1$  doit assurer la continuité de la fonction  $V(r)$  en  $r = R$  (on ne peut utiliser ici la convention  $\lim_{r \rightarrow \infty} [V(r)] = 0$  car le calcul de  $V(r)$  est effectué pour  $r < R$ ) :

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow R^-} [V(r)] &= \lim_{r \rightarrow R^+} [V(r)] \Rightarrow V_1 - \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^3} \times R^2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \\ &\Rightarrow V_1 = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

Par suite :

$$V(r) = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \text{ pour } r < R \quad (58)$$

4. La densité volumique d'énergie électrostatique est définie par :

$$u = \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \frac{\epsilon_0}{2} \times E^2$$

où l'expression de  $E(r)$  correspond aux résultats (53) et (54) selon que  $r > R$  ou que  $r < R$ .

Pour  $r < R$  :

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \Rightarrow u(r < R) = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^6} r^2$$

et, pour  $r > R$  :

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow u(r > R) = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0} \times \frac{1}{r^4}$$

Étant donné l'expression de  $d\tau = 4\pi r^2 dr$ , l'énergie électrostatique  $\mathcal{E}$  créée dans

l'espace vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \iiint_{r < R} u(r) \, d\tau + \iiint_{r > R} u(r) \, d\tau \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R^6} \int_0^R r^4 \, dr + \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} \\ &= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{R^6} \times \frac{R^5}{5} + \frac{1}{R} \right\} = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \times \frac{6}{5R}\end{aligned}$$

soit encore :

$$\mathcal{E} = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R}$$

5. En remarquant que pour  $r > R$ ,  $\rho(r)$  est nul, on obtient :

$$I = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \rho V \, d\tau = \frac{1}{2} \iiint_{r < R} \rho V \, d\tau$$

où  $d\tau = 4\pi r^2 \, dr$ ,  $\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$  et, conformément au résultat (58) :

$$\begin{aligned}V(r < R) &= \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \rho V \, d\tau &= \frac{1}{2} \times \frac{3q}{4\pi R^3} \times \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \times 4\pi r^2 \, dr \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \rho V \, d\tau &= \frac{3q^2}{16\pi\epsilon_0 R^4} \times \left( 3r^2 - \frac{r^4}{R^2} \right) \, dr\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}I &= \frac{3q^2}{16\pi\epsilon_0 R^4} \left[ \int_0^R 3r^2 \, dr - \frac{1}{R^2} \int_0^R r^4 \, dr \right] \\ &= \frac{3q^2}{16\pi\epsilon_0 R^4} \left[ R^3 - \frac{R^3}{5} \right] = \frac{3q^2}{16\pi\epsilon_0 R} \times \frac{4}{5} \\ \Rightarrow I &= \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$

La comparaison de ce résultat avec  $\mathcal{E}$  conduit à poser :  $I = \mathcal{E}$ , c'est-à-dire à confirmer l'identité :

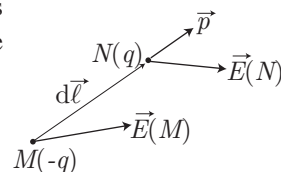
$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \rho V \, d\tau = \iiint_{\text{espace}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \, d\tau$$

## ● 70 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

1. (a) Le dipôle est constitué de deux charges opposées,  $+q$  et  $-q$ , situées en des points respectifs  $M$  et  $N$ , de sorte que  $\vec{p} = q \overrightarrow{MN}$ .

Soient  $\vec{E}(M)$  et  $\vec{E}(N)$  les champs électrostatiques aux points  $M$  et  $N$ ; la force  $\vec{F}$  qui s'exerce sur le dipôle vaut :

$$\vec{F} = q\vec{E}(N) - q\vec{E}(M) = q [\vec{E}(N) - \vec{E}(M)]$$



En coordonnées cartésiennes, le vecteur  $\overrightarrow{MN} = d\vec{l}$  peut s'écrire :

$$\overrightarrow{MN} = d\vec{l} = dl_x \vec{e}_x + dl_y \vec{e}_y + dl_z \vec{e}_z$$

de sorte que le moment dipolaire  $\vec{p}$  a pour composantes  $(p_x, p_y, p_z)$  telles que :

$$\vec{p} = q d\vec{l} \quad (59)$$

$$\Rightarrow p_x \vec{e}_x + p_y \vec{e}_y + p_z \vec{e}_z = q dl_x \vec{e}_x + q dl_y \vec{e}_y + q dl_z \vec{e}_z \quad (60)$$

$$\Rightarrow p_x = q dl_x, p_y = q dl_y, p_z = q dl_z \quad (61)$$

En outre, les points  $M(x, y, z)$  et  $N(x_N, y_N, z_N)$  sont liés par :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} = d\vec{l} &\Rightarrow (x_N - x) \vec{e}_x + (y_N - y) \vec{e}_y + (z_N - z) \vec{e}_z \\ &= dl_x \vec{e}_x + dl_y \vec{e}_y + dl_z \vec{e}_z \\ &\Rightarrow x_N = x + dl_x, y_N = y + dl_y, z_N = z + dl_z \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\vec{E}(N) = E_x(x_N, y_N, z_N) \vec{e}_x + E_y(x_N, y_N, z_N) \vec{e}_y + E_z(x_N, y_N, z_N) \vec{e}_z$$

et :

$$\vec{E}(M) = E_x(x, y, z) \vec{e}_x + E_y(x, y, z) \vec{e}_y + E_z(x, y, z) \vec{e}_z$$

Or, les composantes  $E_\alpha$  du champ électrique en  $M$  et  $N$  vérifient :

$$\begin{aligned} E_\alpha(x_N, y_N, z_N) &= E_\alpha(x + dl_x, y + dl_y, z + dl_z) \\ &= E_\alpha(x, y, z) + dl_x \frac{\partial E_\alpha}{\partial x} + dl_y \frac{\partial E_\alpha}{\partial y} + dl_z \frac{\partial E_\alpha}{\partial z} \end{aligned}$$

ce qui signifie aussi que :

$$\vec{E}(N) = \vec{E}(M) + dl_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + dl_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + dl_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{F} = q [\vec{E}(N) - \vec{E}(M)] = q dl_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + q dl_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + q dl_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

c'est-à-dire, en tenant compte des composantes (61) :

$$\vec{E} = p_x \frac{\partial \vec{E}}{\partial x} + p_y \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} + p_z \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} \Rightarrow \vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E} \quad (62)$$

(b) En coordonnées polaires, l'opérateur  $\overrightarrow{\text{grad}} \equiv \vec{\nabla}$  a pour composantes :

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

tandis que le vecteur  $\vec{p}$  s'écrit :

$$\vec{p} = p \cos \varphi \vec{e}_r + p \sin \varphi \vec{e}_\theta$$

auquel cas :

$$\vec{F} = p \cos \varphi \frac{\partial \vec{E}}{\partial r} + \frac{p \sin \varphi}{r} \frac{\partial \vec{E}}{\partial \theta}$$

où l'expression  $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$  est fournie par l'énoncé. Il s'ensuit que :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \right] = \frac{-2Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r \text{ car } \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial r} = \vec{0}$$

et :

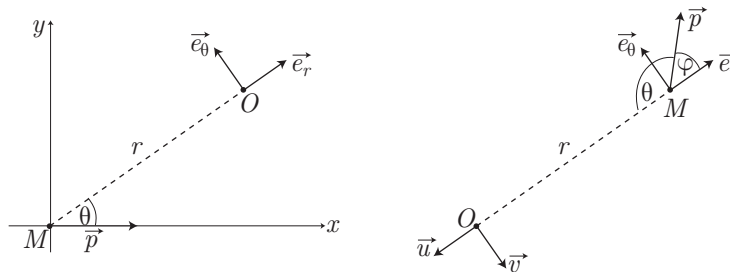
$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_\theta$$

Ce faisant :

$$\vec{E} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-2 \cos \varphi \vec{e}_r + \sin \varphi \vec{e}_\theta)$$

2. Le cours a permis d'établir que, dans une base  $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ , le champ  $\vec{E}(O)$  produit par le dipôle vaut :

$$\vec{E}(O) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{v}) \quad (63)$$



Il convient cependant d'adapter les notations au cas étudié ici. Notamment,  $\theta = (\vec{p}, \overrightarrow{MO})$  vérifie :

$$\theta + \varphi = \pi \Rightarrow \theta = \pi - \varphi \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = -\cos \varphi \\ \sin \theta = \sin \varphi \end{cases}$$

tandis que  $\vec{E} = E_u \vec{u} + E_v \vec{v}$ , avec  $u = -\vec{e}_r$ ,  $v = -\vec{e}_\theta$  et :

$$\begin{aligned} E_u &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times 2 \cos \theta = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times 2 \cos \varphi \\ E_v &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times \sin \theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times \sin \varphi \end{aligned}$$

Ce faisant, la relation (63) doit être remplacée par :

$$\begin{aligned}\vec{E}(O) &= -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times 2 \cos \varphi \times (-\vec{e}_r) + \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times \sin \varphi \times (-\vec{e}_\theta) \\ \Rightarrow \vec{E}(O) &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\theta)\end{aligned}$$

Aussi, la charge  $Q$  placée en  $O$  est soumise à la force :

$$\vec{F}' = Q \times \vec{E}(O) \Rightarrow \vec{F}' = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \varphi \vec{e}_r - \sin \varphi \vec{e}_\theta)$$

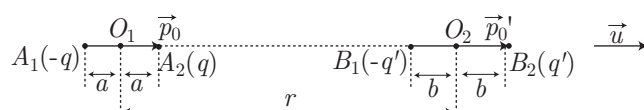
de sorte que le principe des actions réciproques conduit à :

$$\vec{F} = -\vec{F}' \Rightarrow \vec{F} = \frac{pQ}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-2 \cos \varphi \vec{e}_r + \sin \varphi \vec{e}_\theta)$$

## ● 71 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

1. Considérons les dipôles dont les moments dipolaires  $\vec{p}_0$  et  $\vec{p}'_0$  proviennent de couples de charges  $(q, -q)$  et  $(q', -q')$  séparées par les distances  $2a$  et  $2b$ . Deux cas doivent être distingués :

- Si les moments dipolaires sont parallèles :  $\vec{p}_0 = p_0 \vec{u}$  et  $\vec{p}'_0 = p'_0 \vec{u}$  avec  $p_0 = 2aq$  et  $p'_0 = 2bq'$ , où  $q > 0$  et  $q' > 0$ .



Le champ électrique  $\vec{E}(B_1)$  en  $B_1$  provient des champs  $\vec{E}_{A_1}(B_1)$  et  $\vec{E}_{A_2}(B_1)$  produits par les charges portées par les points  $A_1$  et  $A_2$  :

$$\vec{E}_{A_1}(B_1) = -\frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 (r+a-b)^2} = -\frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \times \left(1 + \frac{a-b}{r}\right)^{-2}$$

et :

$$\vec{E}_{A_2}(B_1) = \frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 (r-a-b)^2} = \frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{a+b}{r}\right)^{-2}$$

Or, l'énoncé rappelle le développement limité de  $(1 + \varepsilon)^{-2} \simeq 1 - 2\varepsilon + 3\varepsilon^2$ , ce qui conduit à :

$$\vec{E}_{A_1}(B_1) = -\frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 - 2 \frac{a-b}{r} + 3 \left(\frac{a-b}{r}\right)^2\right]$$

et :

$$\vec{E}_{A_2}(B_1) = \frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 + 2 \frac{a+b}{r} + 3 \left(\frac{a+b}{r}\right)^2\right]$$



Ce faisant,  $\vec{E}(B_1) = \vec{E}_{A_1}(B_1) + \vec{E}_{A_2}(B_1)$  produit une force  $\vec{f}(B_1) = -q' \vec{E}(B_1)$  en  $B_1$  :

$$\begin{aligned}\vec{f}(B_1) &= -q' \left[ \vec{E}_{A_1}(B_1) + \vec{E}_{A_2}(B_1) \right] \\ &= -\frac{qq' \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left\{ \frac{4a}{r} + \frac{3}{r^2} [(a+b)^2 - (a-b)^2] \right\}\end{aligned}$$

soit encore :

$$\vec{f}(B_1) = -\frac{qq' \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \frac{4a}{r} + \frac{3}{r^2} \times 2a \times 2b \right]$$

De même, le point  $B_2$  est soumis aux champs électriques :

$$\vec{E}_{A_1}(B_2) = \frac{-q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 (r+a+b)^2} = \frac{-q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 + \frac{a+b}{r} \right)^{-2}$$

et :

$$\vec{E}_{A_2}(B_2) = \frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 (r-a+b)^2} = \frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( 1 + \frac{b-a}{r} \right)^{-2}$$

c'est-à-dire, en tenant compte du développement :  $(1 + \epsilon)^{-2} \simeq 1 - 2\epsilon + 3\epsilon^2$  :

$$\vec{E}_{A_1}(B_2) = \frac{-q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ 1 - 2 \frac{a+b}{r} + 3 \left( \frac{a+b}{r} \right)^2 \right]$$

et :

$$\vec{E}_{A_2}(B_2) = \frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ 1 - 2 \frac{b-a}{r} + 3 \left( \frac{b-a}{r} \right)^2 \right]$$

Aussi, le champ électrique :  $\vec{E}(B_2) = \vec{E}_{A_1}(B_2) + \vec{E}_{A_2}(B_2)$ , produit en  $B_2$ , est à l'origine de la force :

$$\vec{f}(B_2) = q' \vec{E}(B_2)$$

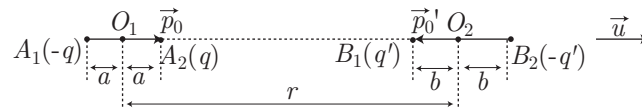
soit encore :

$$\begin{aligned}\vec{f}(B_2) &= \frac{qq' \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \frac{4a}{r} + 3 \times \frac{(b-a)^2 - (b+a)^2}{r^2} \right] \\ &= \frac{qq' \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[ \frac{4a}{r} - \frac{3}{r^2} \times 2a \times 2b \right]\end{aligned}$$

Par conséquent, le dipôle de moment  $\vec{p}'_0$  est soumis à la force :

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \vec{f}(B_1) + \vec{f}(B_2) = -3 \times 2 \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^4} \times 2a \times 2b \vec{u} \\ &= -3 \times \frac{2qa \times 2q'b}{2\pi\epsilon_0 r^4} \vec{u} \Rightarrow \vec{f} = -\frac{3p_0 p'_0}{2\pi\epsilon_0 r^4} \vec{u}\end{aligned}$$

- Si les moments dipolaires sont anti-parallèles :  $\vec{p}_0 = p_0 \vec{u}$  et  $\vec{p}'_0 = -p'_0 \vec{u}$ , avec :  $p_0 = 2qa$  et  $p'_0 = 2q'b$ .



Les champs électriques produits en  $B_1$  et  $B_2$  par les charges portées par  $A_1$  et  $A_2$  sont les mêmes que précédemment, car  $A_1$  et  $A_2$  portent les mêmes charges tandis que les points  $B_1$  et  $B_2$  se trouvent encore aux distances respectives  $r - b$  et  $r + b$  de  $O_1$  :

$$\vec{E}'(B_1) = \vec{E}(B_1) \text{ et } \vec{E}'(B_2) = \vec{E}(B_2)$$

C'est pourquoi les points  $B_1$  et  $B_2$  sont soumis aux forces :

$$\vec{f}'(B_1) = q' \vec{E}'(B_1) = q' \vec{E}(B_1) = -\vec{f}(B_1)$$

et :

$$\vec{f}'(B_2) = -q' \vec{E}'(B_2) = -q' \vec{E}(B_2) = -\vec{f}(B_2)$$

Par suite, la force  $\vec{f}'$  qui s'exerce sur le dipôle de moment  $\vec{p}'_0$  vaut :

$$\vec{f}' = \vec{f}'(B_1) + \vec{f}'(B_2) = -[\vec{f}(B_1) + \vec{f}(B_2)]$$

$$\Rightarrow \vec{f}' = -\vec{f} = 3 \frac{p_0 p'_0}{2\pi\epsilon_0 r^4} \vec{u}$$

2. Quelle que soit la configuration adoptée par le dipôle de moment  $\vec{p}'_0$ , le champ électrique  $\vec{E}(O_2)$ , que les charges situées en  $A_1$  et  $A_2$  produisent en  $O_2$ , vaut :

$$\vec{E}(O_2) = \vec{E}_{A_1}(O_2) + \vec{E}_{A_2}(O_2)$$

avec :

$$\vec{E}_{A_1}(O_2) = \frac{-q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 (r+a)^2} = \frac{-q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 + \frac{a}{r}\right)^{-2}$$

et :

$$\vec{E}_{A_2}(O_2) = \frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 (r-a)^2} = \frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-2}$$

c'est-à-dire, en utilisant le développement limité :  $(1 + \epsilon)^{-2} \simeq 1 - 2\epsilon + 3\epsilon^2$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}_{A_1}(O_2) &\simeq -\frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 - 2\frac{a}{r} + 3\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \\ &= \frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[-1 + 2\frac{a}{r} - 3\left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \end{aligned}$$

et :

$$\vec{E}_{A_2}(O_2) \simeq \frac{q \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 + 2\frac{a}{r} + 3\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{E}(O_2) = \frac{4qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{u} = \frac{\vec{p}_0}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

Ce faisant, selon le sens adopté par  $\vec{p}'_0$ , le dipôle  $\{B_1, B_2\}$  prend les énergies :

- $\mathcal{E}_p^+ = -\vec{E}(O_2) \cdot \vec{p}'_0 = -\frac{p_0 p'_0}{2\pi\epsilon_0 r^3}$  si  $\vec{p}'_0 = p'_0 \vec{u}$ ;
- $\mathcal{E}_p^- = -\vec{E}(O_2) \cdot \vec{p}'_0 = \frac{p_0 p'_0}{2\pi\epsilon_0 r^3}$  si  $\vec{p}'_0 = -p'_0 \vec{u}$ .

c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}_p^+ = -\mathcal{E}_0 \text{ et } \mathcal{E}_p^- = \mathcal{E}_0 \text{ avec } \mathcal{E}_0 = \frac{p_0 p'_0}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

On note  $n^+ = n(\mathcal{E}_p^+)$  le nombre de dipôles de moment  $\vec{p}'_0 = p'_0 \vec{u}$  (et donc d'énergie  $\mathcal{E}_p^+$ ) et  $n^- = n(\mathcal{E}_p^-)$  le nombre de dipôles de moment  $\vec{p}'_0 = -p'_0 \vec{u}$  (d'énergie  $\mathcal{E}_p^-$ ). Ce faisant, la loi de répartition statistique de Boltzmann indique que :

$$n^+ = A e^{-\mathcal{E}_p^+/kT} = A e^{\mathcal{E}_0/kT} \text{ et } n^- = A e^{-\mathcal{E}_p^-/kT} = A e^{-\mathcal{E}_0/kT}$$

Aussi, le nombre total de dipôles vaut :

$$n_{\text{tot}} = n^+ + n^- = A \left( e^{\mathcal{E}_0/kT} + e^{-\mathcal{E}_0/kT} \right) = 2A \cosh \left( \frac{\mathcal{E}_0}{kT} \right)$$

De fait, les probabilités que  $\vec{p}'_0$  soit orienté selon  $\vec{u}$  ou  $-\vec{u}$  valent respectivement :

$$\mathcal{P}_+ = \frac{n^+}{n_{\text{tot}}} = \frac{e^{\mathcal{E}_0/kT}}{2 \cosh(\mathcal{E}_0/kT)} \text{ et } \mathcal{P}_- = \frac{e^{-\mathcal{E}_0/kT}}{2 \cosh(\mathcal{E}_0/kT)}$$

Conformément aux résultats de la première question :

$$\begin{cases} \vec{f}' = -\frac{3p_0 p'_0}{2\pi\epsilon_0 r^4} \vec{u} \text{ pour } \vec{p}'_0 = p'_0 \vec{u} \\ \vec{f}' = \frac{3p_0 p'_0}{2\pi\epsilon_0 r^4} \vec{u} \text{ pour } \vec{p}'_0 = -p'_0 \vec{u} \end{cases}$$

auquel cas la force moyenne qui s'exerce entre les dipôles vaut :

$$\begin{aligned} \langle \vec{f}' \rangle &= \mathcal{P}_+ \times \vec{f}' + \mathcal{P}_- \times \vec{f}' \\ &= -\frac{3p_0 p'_0}{2\pi\epsilon_0 r^4} (\mathcal{P}_+ - \mathcal{P}_-) \vec{u} \\ &= -\frac{3p_0 p'_0 \vec{u}}{2\pi\epsilon_0 r^4} \times \frac{e^{\mathcal{E}_0/kT} - e^{-\mathcal{E}_0/kT}}{2 \cosh(\mathcal{E}_0/kT)} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\langle \vec{f}' \rangle = -\frac{3p_0 p'_0}{2\pi\epsilon_0 r^4} \vec{u} \times \tanh \left( \frac{\mathcal{E}_0}{kT} \right) \text{ avec } \mathcal{E}_0 = \frac{p_0 p'_0}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

Enfin, l'hypothèse :  $\left| \frac{\mathcal{E}_p}{kT} \right| \ll 1$  suggère l'emploi d'un développement limité :

$$\tanh \left( \frac{\mathcal{E}_0}{kT} \right) \simeq \frac{\mathcal{E}_0}{kT} = \frac{1}{kT} \times \frac{p_0 p'_0}{2\pi\epsilon_0 r^3}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\langle \vec{f} \rangle = -\frac{1}{kT} \times \frac{3p_0^2 p_0'^2}{4\pi^2 \varepsilon_0^2 r^7} \vec{u}$$

● 72 ————— Lycée Charlemagne, Paris

1. Considérons une charge fixe  $-q$  située en un point  $O$  et une charge mobile  $+q$  située en  $M$ , l'ensemble étant situé dans le champ uniforme  $\vec{E}$ .



Le point  $M$  est soumis :

- à la force de rappel  $\vec{f}$ ;
- à la force électrostatique  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Or, le dipôle  $\{O, M\}$  présente un moment dipolaire  $\vec{p} = q\vec{OM}$  colinéaire à  $\vec{E}$  :

$$\vec{p} = \alpha\varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow q\vec{OM} = \alpha\varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{q}{\alpha\varepsilon_0} \vec{OM}$$

Ce faisant, l'équilibre du point  $M$  est conditionné par l'équation :

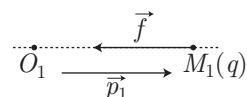
$$\vec{f} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{f} = -\vec{F} = -q\vec{E} = -\frac{q^2}{\alpha\varepsilon_0} \vec{OM}$$

c'est-à-dire :

$$\vec{f} = -k\vec{OM} \text{ avec } k = \frac{q^2}{\alpha\varepsilon_0}$$

2. Considérons désormais un point  $M_1$ , de charge  $q$  et de masse  $m$ , soumis à une force de rappel :

$$\vec{f} = -k\vec{O_1M_1} \text{ avec } k = \frac{q^2}{\alpha\varepsilon_0}$$



La loi fondamentale de la dynamique impose alors :

$$m \frac{d^2\vec{O_1M_1}}{dt^2} = \vec{f} = -k\vec{O_1M_1} \Rightarrow \frac{d^2\vec{O_1M_1}}{dt^2} + \frac{k}{m}\vec{O_1M_1} = \vec{0}$$

Cette équation différentielle admet une solution sinusoïdale :

$$\vec{O_1M_1} = \vec{A} \cos(\omega t + \phi)$$

où  $\vec{A}$  est un vecteur constant,  $\phi$  une phase constante et :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{q^2}{m\alpha\varepsilon_0}}$$

Ce faisant, le moment dipolaire du système  $\{O, M_1\}$  est défini par :

$$\vec{p}_1 = q\vec{O_1M_1} \Rightarrow \vec{p}_1 = \vec{p}_0 \cos(\omega t + \phi) \text{ avec } \vec{p}_0 = q\vec{A} = \text{cte}$$

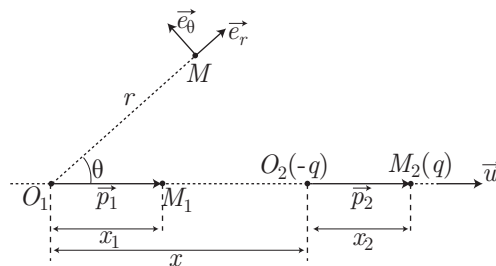
et admet pour valeur moyenne pendant une période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  :

$$\begin{aligned} \langle \vec{p}_1 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \vec{p}_1 dt = \frac{\vec{p}_0}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \phi) dt \\ &= \frac{\vec{p}_0}{\omega T} [\sin(\omega t + \phi)]_0^T = \frac{\vec{p}_0}{2\pi} [\sin(\omega T + \phi) - \sin \phi] \end{aligned}$$

Ainsi,  $\omega T = 2\pi$  impose :

$$\sin(\omega T + \phi) = \sin \phi \Rightarrow \langle \vec{p}_1 \rangle = \vec{0}$$

3. On s'intéresse maintenant à deux systèmes analogues aux précédents :



On montre qu'en un point  $M$ , de coordonnées polaires  $(r, \theta)$ , le dipôle  $\vec{p}_1$  crée en  $M$  un champ électrique de composantes :

$$E_r = \frac{2p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \text{ et } E_\theta = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta$$

où  $r = O_1M$ . Aussi, au point  $O_2$ , le dipôle crée le champ de composantes :

$$E_r(O_2) = \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 x^3} \cos(0) = \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 x^3} \text{ et } E_\theta(O_2) = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 x^3} \sin(0) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\vec{E}(O_2) = \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 x^3} \vec{u} \text{ car } \vec{e}_r = \vec{u} \text{ pour } \theta = 0$$

De même, le dipôle crée en  $M_2$  le champ électrique :

$$\vec{E}(M_2) = \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 (x + x_2)^3} \vec{u}$$

Aussi, les points  $O_2$  (de charge  $-q$ ) et  $M_2$  (de charge  $+q$ ) sont-ils soumis aux forces :

$$\vec{f}(O_2) = -q \vec{E}(O_2) = \frac{-p_1 q}{2\pi\epsilon_0 x^3} \vec{u}$$

et :

$$\begin{aligned} \vec{f}(M_2) &= q \vec{E}(M_2) = \frac{p_1 q}{2\pi\epsilon_0 x^3} \left(1 + \frac{x_2}{x}\right)^{-3} \vec{u} \\ &\simeq \frac{p_1 q}{2\pi\epsilon_0 x^3} \left(1 - 3 \frac{x_2}{x}\right) \vec{u} \text{ car } x \ll x_2 \end{aligned}$$

Par conséquent, le dipôle  $\{O_2, M_2\}$  est soumis à la force :

$$\vec{f} = \vec{f}(O_2) + \vec{f}(M_2) \Rightarrow \vec{f} = -3 \frac{p_1 q x_2}{2\pi\epsilon_0 x^4} \vec{u}$$

où l'on remarque que :

$$q x_2 = p_2 \Rightarrow \vec{f} = -3 \frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 x^4} \vec{u} \quad (64)$$

4. En admettant que le champ produit en  $M_2$  par le dipôle  $\{O_1, M_1\}$  soit le même que celui produit en  $O_2$ , c'est-à-dire :

$$\vec{E}(M_2) = \vec{E}(O_2) = \frac{p_1}{2\pi\epsilon_0 x^3} \vec{u} = \frac{q x_1}{2\pi\epsilon_0 x^3} \vec{u}$$

on en déduit que le point  $M_2$  est soumis à :

- la force :

$$\vec{f}_2 = q \vec{E}(M_2) = \frac{q^2 x_1}{2\pi\epsilon_0 x^3} \vec{u}$$

- la force électrique due à la charge en  $O_2$  :

$$\vec{f}'_2 = -k \overrightarrow{O_2 M_2} = -k x_2 \vec{u} \text{ avec } k = \frac{q^2}{\alpha\epsilon_0}$$

Ce faisant, la loi fondamentale de la dynamique impose :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{O_2 M_2}}{dt^2} = \vec{f}'_2 + \vec{f}_2 \Rightarrow m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k x_2 + \frac{q^2 x_1}{2\pi\epsilon_0 x^3} \quad (65)$$

De même, le dipôle  $\{O_2, M_2\}$  produit en  $M_1$  un champ qui s'identifie à celui en  $O_1$  :

$$\vec{E}(M_1) \simeq \vec{E}(O_1) = \frac{p_2}{2\pi\epsilon_0 x^3} \vec{u}$$

Par conséquent, le point  $M_1$  est soumis :

- à la force :

$$\vec{f}_1 = q \vec{E}(M_1) = \frac{q^2 x_2}{2\pi\epsilon_0 x^3} \vec{u}$$

- à la force électrique exercée par le point  $O_1$  :

$$\vec{f}'_1 = -k \overrightarrow{O_1 M_1} = -k x_1 \vec{u} \text{ avec } k = \frac{q^2}{\alpha\epsilon_0}$$

Par suite, l'équation du mouvement de  $M_1$  est fournie par la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{O_1 M_1}}{dt^2} = \vec{f}'_1 + \vec{f}_1 \Rightarrow m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k x_1 + \frac{q^2 x_2}{2\pi\epsilon_0 x^3} \quad (66)$$

Les équations (65) et (66) constituent un système :

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k x_2 + \frac{q^2 x_1}{2\pi\epsilon_0 x^3} \\ m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k x_1 + \frac{q^2 x_2}{2\pi\epsilon_0 x^3} \end{cases} \quad (67)$$

La somme de ces équations s'écrit :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} &= -k (x_1 + x_2) + \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 x^3} (x_1 + x_2) \\ \Rightarrow m \frac{d^2 u_1}{dt^2} &= \left( \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 x^3} - k \right) u_1 \text{ avec } u_1 = x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Or, en posant :  $\lambda = \frac{\alpha}{2\pi x^3} \Rightarrow \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 x^3} = \lambda \frac{q^2}{\alpha\epsilon_0} = \lambda k$ , cette équation devient :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 u_1}{dt^2} = k(\lambda - 1) u_1 &\Rightarrow \frac{d^2 u_1}{dt^2} = \frac{k}{m} (\lambda - 1) u_1 \\ &\Rightarrow \frac{d^2 u_1}{dt^2} + \frac{q^2}{m\alpha\epsilon_0} (\lambda - 1) u_1 = 0 \end{aligned}$$

où  $\lambda \ll 1$  permet d'affirmer que  $\frac{q^2}{m\alpha\epsilon_0} (1 - \lambda) > 0$ , en conséquence de quoi cette équation admet une solution de la forme :

$$u_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) \text{ avec } \omega_1^2 = \frac{q^2}{m\alpha\epsilon_0} (1 - \lambda)$$

De même, la différence des équations du système (67) s'écrit :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 (x_2 - x_1)}{dt^2} &= -k (x_2 - x_1) + \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 x^3} (x_1 - x_2) \\ \Rightarrow m \frac{d^2 u_2}{dt^2} &= - \left( k + \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 x^3} \right) u_2 \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\lambda = \frac{\alpha}{2\pi x^3} \Rightarrow \frac{1}{2\pi x^3} = \frac{\lambda}{\alpha} \Rightarrow \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 x^3} = \lambda \frac{q^2}{\alpha\epsilon_0} = \lambda k$$

cette équation devient :

$$m \frac{d^2 u_2}{dt^2} = -k(\lambda + 1) u_2 \Rightarrow \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{q^2}{m\alpha\epsilon_0} (\lambda + 1) u_2 = 0$$

et génère une solution de la forme :

$$u_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2) \text{ avec } \omega_2^2 = \frac{q^2}{m\alpha\epsilon_0} (1 + \lambda)$$

5. Les définitions de  $u_1$  et  $u_2$  conduisent aux expressions de  $x_1$  et  $x_2$  :

$$\begin{cases} u_1 = x_1 + x_2 \\ u_2 = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_2 = 2x_1 \\ u_1 - u_2 = 2x_2 \end{cases}$$

d'où l'on déduit que :

$$x_1 = \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

et :

$$x_2 = \frac{u_1 - u_2}{2} = \frac{A_1}{2} \cos(\omega_1 t + \phi_1) - \frac{A_2}{2} \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

On posera désormais :  $\psi_i = \omega_i t + \phi_i$  afin de présenter ces solutions sous les formes :

$$x_1 = \frac{A_1 \cos \psi_1 + A_2 \cos \psi_2}{2} \text{ et } x_2 = \frac{A_1 \cos \psi_1 - A_2 \cos \psi_2}{2}$$

En outre, la force qui s'exerce sur les deux dipôles est donnée par le résultat (64) :

$$\vec{f} = \frac{3p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 x^4} \vec{u} = -\frac{3q^2 \vec{u}}{2\pi\epsilon_0 x^4} \times x_1 x_2 \quad (68)$$

avec :

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{1}{4} (A_1 \cos \psi_1 + A_2 \cos \psi_2) (A_1 \cos \psi_1 - A_2 \cos \psi_2) \\ &= \frac{1}{4} (A_1^2 \cos^2 \psi_1 - A_2^2 \cos^2 \psi_2) \end{aligned}$$

Aussi, la valeur moyenne de  $x_1 x_2$  dans le temps est définie par :

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \frac{A_1^2}{4T_1} \int_0^{T_1} \cos^2(\omega_1 t + \phi_1) dt - \frac{A_2^2}{4T_2} \int_0^{T_2} \cos^2(\omega_2 t + \phi_2) dt$$

où  $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$  et  $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$  sont les périodes des fonctions  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ . Aussi :

$$\begin{aligned} \langle x_1 x_2 \rangle &= \frac{A_1^2}{4T_1} \int_0^{T_1} \frac{1 + \cos(2\omega_1 t + 2\phi_1)}{2} dt - \frac{A_2^2}{4T_2} \int_0^{T_2} \frac{1 + \cos(2\omega_2 t + 2\phi_2)}{2} dt \\ &= \frac{A_1^2}{8T_1} \left[ t + \frac{1}{2\omega_1} \sin(2\omega_1 t + 2\phi_1) \right]_0^{T_1} - \frac{A_2^2}{8T_2} \left[ t + \frac{1}{2\omega_2} \sin(2\omega_2 t + 2\phi_2) \right]_0^{T_2} \\ &= \frac{A_1^2 - A_2^2}{8} \end{aligned}$$

Or, les expressions de  $A_1$  et  $A_2$  issues de la mécanique quantique sont :

$$A_i = \sqrt{\frac{h}{\pi m \omega_i}} \Rightarrow A_i^2 = \frac{h}{\pi m \omega_i} \text{ avec } \omega_i = \sqrt{\frac{q^2}{m \alpha \epsilon_0}} (1 \pm \lambda)^{1/2}$$



C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} A_1^2 - A_2^2 &= \frac{h}{\pi m} \sqrt{\frac{m\alpha\varepsilon_0}{q^2}} \left[ (1-\lambda)^{-1/2} - (1+\lambda)^{-1/2} \right] \text{ avec } \frac{\alpha\varepsilon_0}{q^2} = \frac{1}{k} \\ &= \frac{h}{\pi\sqrt{km}} \left[ \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) - \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \right] \text{ pour } \lambda \ll 1 \\ &= \frac{h}{\pi\sqrt{km}} \times \lambda = \frac{h}{\pi\sqrt{km}} \frac{\alpha}{2\pi x^3} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\langle x_1 x_2 \rangle = \frac{A_1^2 - A_2^2}{8} = \frac{h\alpha}{16\pi^2\sqrt{km} x^3}$$

associé à la relation (68), conduit à :

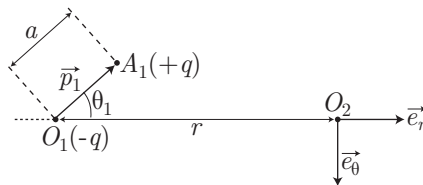
$$\langle \vec{f} \rangle = -\frac{3q^2 \vec{u}}{2\pi\varepsilon_0 x^4} \langle x_1 x_2 \rangle = -\frac{3q^2}{2\pi\varepsilon_0 x^4} \times \frac{h\alpha}{16\pi^2\sqrt{km} x^3} \vec{u}$$

En remarquant que :  $q^2 = k\alpha\varepsilon_0$  et en posant  $\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi\nu_0$ , il vient finalement :

$$\begin{aligned} \langle \vec{f} \rangle &= -\frac{3k\alpha\varepsilon_0}{2\pi\varepsilon_0 x^4} \times \frac{h\alpha}{16\pi^2\sqrt{km} x^3} \vec{u} \\ &= -\frac{3\alpha^2 h}{16\pi^2 x^7} \times \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}}_{\nu_0} \vec{u} \\ \Rightarrow \langle \vec{f} \rangle &= -\frac{3\alpha^2 h\nu_0}{16\pi^2 x^7} \vec{u} \end{aligned}$$

● **73** ————— **Lycée Saint-Louis, Paris**

- Supposons le dipôle, de moment dipolaire  $\vec{p}_1$ , constitué par deux charges opposées,  $-q$  et  $+q$ , situées respectivement en des points  $O_1$  et  $A_1$ , espacés de  $a = O_1A_1 \ll r$ .



La charge  $-q$  produit, en  $O_2$ , le potentiel :

$$V_O(O_2) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 O_1O_2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

tandis que la charge  $+q$  produit, en  $O_2$ , le potentiel :

$$V_A(O_2) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 A_1O_2}$$

avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1O_2} &= \overrightarrow{A_1O_1} + \overrightarrow{O_1O_2} \Rightarrow (A_1O_2)^2 = (A_1O_1)^2 + 2\overrightarrow{A_1O_1} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} + (O_1O_2)^2 \\ &= a^2 - 2ar \cos \theta_1 + r^2 \\ &= r^2 \left( 1 - \frac{2a}{r} \cos \theta_1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

Ce faisant :

$$A_1O_2 = r \left( 1 - \frac{2a}{r} \cos \theta_1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{A_1O_2} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2a}{r} \cos \theta_1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/2}$$

Or, l'hypothèse  $a \ll r$  suggère l'emploi d'un développement limité d'ordre 1 en  $\frac{a}{r}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1O_2} &\simeq \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a}{r} \cos \theta_1 \right) = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2} \cos \theta_1 \\ &\Rightarrow V_A(O_2) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta_1}{r^2} \end{aligned}$$

Par conséquent le dipôle  $\{O_1, A_1\}$ , de moment :

$$\vec{p}_1 = q\overrightarrow{O_1A_1} \Rightarrow p_1 = \|\vec{p}_1\| = qa$$

produit en  $O_2$  le potentiel :

$$\begin{aligned} V(O_2) &= V_O(O_2) + V_A(O_2) = \frac{qa}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta_1}{r^2} \\ &\Rightarrow V(O_2) = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta_1}{r^2} \end{aligned}$$

De ce potentiel dérive, en  $O_2$ , un champ électrostatique défini, en coordonnées polaires par :

$$\vec{E}(O_2) = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E_r(O_2) \vec{e}_r + E_\theta(O_2) \vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

d'où il découle que :

$$E_r(O_2) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta_1}{r^2} \right) \Rightarrow E_r(O_2) = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times 2 \cos \theta_1$$

et :

$$E_\theta(O_2) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta_1}{r^2} \right) \Rightarrow E_\theta(O_2) = \frac{p_1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times \sin \theta_1$$

On peut alors poser :

$$\vec{E}(O_2) = E_r(O_2) \vec{e}_r + E_\theta(O_2) \vec{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p_1 \cos \theta_1 \vec{e}_r + p_1 \sin \theta_1 \vec{e}_\theta)$$

Or, le moment dipolaire  $\vec{p}_1$  vérifie :

$$\vec{p}_1 = p_1 \cos \theta_1 \vec{e}_r - p_1 \sin \theta_1 \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{p}_1 \cdot \vec{e}_r = p_1 \cos \theta_1$$

où  $\vec{r} = \overrightarrow{O_1 O_2} \Rightarrow \vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$  conduit à :

$$p_1 \cos \theta_1 = \vec{p}_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (69)$$

En outre :

$$p_1 \sin \theta_1 \vec{e}_\theta = p_1 \cos \theta_1 - \vec{p}_1 \Rightarrow \vec{E}(O_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3 p_1 \cos \theta_1 \vec{e}_r - \vec{p}_1)$$

c'est-à-dire, compte tenu de la relation (69) :

$$\vec{E}(O_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ 3 \times \left( \vec{p}_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \times \frac{\vec{r}}{r} - \vec{p}_1 \right]$$

2. Le dipôle de moment  $\vec{p}_2$  présente ainsi une énergie potentielle  $\mathcal{E}$  (qui est aussi l'énergie d'interaction des deux dipôles) :

$$\mathcal{E} = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}(O_2) \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3 \times \left( \vec{p}_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \times \left( \vec{p}_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \right] \quad (70)$$

3. Si  $\varphi_2$  est nul, les moments dipolaires sont compris dans le plan  $(xO_1z)$ .

Ils ont alors pour composantes, dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  :

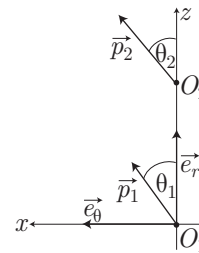
$$\vec{p}_1 = p_1 \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{p}_2 = p_2 \begin{pmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

d'où il découle que :

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1 p_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

et que :

$$(\vec{p}_1 \cdot \vec{e}_r) \times (\vec{p}_2 \cdot \vec{e}_r) = p_1 p_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2$$



Par conséquent :

$$\mathcal{E} = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2)$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{E} = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times (\sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2)$$

L'extremum de  $\mathcal{E}$  s'obtient pour les valeurs de  $\theta_1$  et  $\theta_2$  qui satisfont à l'équation :

$$d\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta_2} d\theta_2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta_1} = 0 \text{ et } \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta_2} = 0$$

soit encore :

$$\cos \theta_1 \sin \theta_2 + 2 \sin \theta_1 \cos \theta_2 = 0 \Rightarrow \cos \theta_1 \sin \theta_2 = -2 \sin \theta_1 \cos \theta_2$$

et :

$$\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2 = 0 \Rightarrow \sin \theta_1 \cos \theta_2 = -2 \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

Par conséquent :

$$\cos \theta_1 \sin \theta_2 = -2 \times (-2 \cos \theta_1 \sin \theta_2) \Rightarrow \begin{cases} 5 \cos \theta_1 \sin \theta_2 = 0 \\ \sin \theta_1 \cos \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Apparaissent alors quatre couples  $(\theta_1, \theta_2)$  susceptibles de rendre  $\mathcal{E}$  *extremum* :  $A_1(0, 0)$ ,  $A_2(0, \pi)$ ,  $A_3(\pi, 0)$  et  $A_4(\pi, \pi)$ . Du reste :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \theta_1^2} &= -\sin \theta_1 \sin \theta_2 + 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \theta_2^2} &= -\sin \theta_1 \sin \theta_2 + 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} &= \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} = \cos \theta_2 \cos \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

permettent de remplir le tableau suivant, qui représente les valeurs des dérivés secondes de  $\mathcal{E}$  en fonction des couples  $(\theta_1, \theta_2)$  qui rendent  $\mathcal{E}$  *extremum* :

	$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \theta_1^2}$	$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \theta_2^2}$	$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}$
$A_1(0, 0)$	2	2	1
$A_2(0, \pi)$	-2	-2	-1
$A_3(\pi, 0)$	-2	-2	-1
$A_4(\pi, \pi)$	2	2	1

Un tel tableau permet de conclure que :

- pour les couples de valeurs  $A_1(0, 0)$  et  $A_4(\pi, \pi)$ , l'énergie potentielle est *minimum*, ce qui signifie également que, pour ces orientations, les dipôles sont en équilibre stable ;
  - les orientations définies par les couples  $A_2(0, \pi)$  et  $A_3(\pi, 0)$  rendent  $\mathcal{E}$  *maximum*, ce qui traduit l'instabilité de l'équilibre des dipôles.
4. Dans le cas général, l'angle  $\varphi_2$  est non nul, auquel cas les moments dipolaires ont pour composantes, dans le repère  $(Oxyz)$  :

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} p_1 \sin \theta_1 \\ 0 \\ p_1 \cos \theta_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} p_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \\ p_2 \sin \theta_2 \sin \varphi_2 \\ p_2 \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

d'où il découle que :

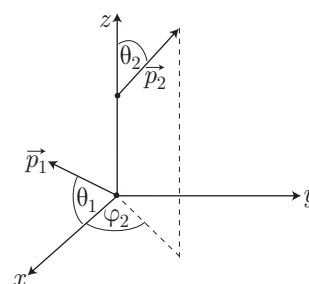
$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_1 p_2 (\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2)$$

tandis que :

$$\begin{cases} \vec{p}_1 \cdot \vec{e}_r = p_1 \sin \theta_1 \\ \vec{p}_2 \cdot \vec{e}_r = p_2 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \left( \vec{p}_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \times \left( \vec{p}_2 \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) = p_1 p_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2$$

Ce faisant, l'expression (70) de  $\mathcal{E}$  devient :

$$\mathcal{E} = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2 - 3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2)$$



soit encore :

$$\mathcal{E}(\theta_1, \theta_2, \varphi_2) = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2)$$

Dans la suite des calculs, nous adopterons les notations suivantes :

- $\psi = \psi(\theta_1, \theta_2, \varphi_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2$
- $\chi = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$
- $d\Omega = \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi_2$

de sorte que :

$$\mathcal{E}(\theta_1, \theta_2, \varphi_2) = \chi \times \psi(\theta_1, \theta_2, \varphi_2)$$

Si les orientations des vecteurs  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_2$  étaient libres et indépendantes, la probabilité élémentaire de trouver le système dans une configuration angulaire donnée serait proportionnelle à  $d\Omega$  :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{P}_0 \propto d\Omega &\Rightarrow \langle \mathcal{E} \rangle \propto \iiint \mathcal{E} d\Omega \\ &\Rightarrow \langle \mathcal{E} \rangle \propto \chi \times \iiint \psi(\theta_1, \theta_2, \varphi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi_2 \end{aligned}$$

où, pour éviter de décrire deux fois une même configuration,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  varient dans  $[0, \pi]$  et  $\varphi_2 \in [0, 2\pi]$ .

On notera désormais  $I_1$  l'intégrale :

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint \psi d\Omega \\ &= \iiint (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi_2 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} &\int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \cos \theta_1 \cos \theta_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi_2 \\ &= \int_0^{\pi} \cos \theta_1 \sin \theta_1 d\theta_1 \times \int_0^{\pi} \cos \theta_2 \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \\ &= \underbrace{\left[ \frac{-\cos(2\theta_1)}{2} \right]_0^{\pi}}_{=0} \times \underbrace{\left[ \frac{-\cos(2\theta_2)}{2} \right]_0^{\pi}}_{=0} \times 2\pi = 0 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} &\int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \cos \varphi_2 d\theta_1 d\theta_2 d\varphi_2 \\ &= \int_0^{\pi} \sin^2 \theta_1 d\theta_1 \times \int_0^{\pi} \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \times \int_0^{2\pi} \cos \varphi_2 d\varphi_2 \\ &= \frac{\pi}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \underbrace{[\sin \varphi_2]_0^{2\pi}}_{=0} = 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$I_1 = \iiint \psi \, d\Omega = 0 \quad (71)$$

de sorte que :

$$\langle \mathcal{E} \rangle \propto \chi \times I_1 = 0$$

5. Compte tenu des notations adoptées, la probabilité élémentaire de trouver le système dans une configuration angulaire donnée vaut en fait :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{P} &= \frac{1}{Z} e^{-\beta\mathcal{E}} \, d\Omega \simeq \frac{1}{Z} (1 - \beta\mathcal{E}) \, d\Omega \text{ car } \beta\mathcal{E} \ll 1 \\ &\simeq \frac{1}{Z} (1 - \beta\chi\psi) \, d\Omega \end{aligned}$$

Calculons au préalable les intégrales :

$$\begin{aligned} I_0 &= \iiint d\Omega = \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \int_{\varphi_2=0}^{2\pi} \sin\theta_1 \sin\theta_2 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\varphi_2 \\ &= \int_0^{\pi} \sin\theta_1 \, d\theta_1 \times \int_0^{\pi} \sin\theta_2 \, d\theta_2 \times \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \\ &= [-\cos\theta_1]_0^{\pi} \times [-\cos\theta_2]_0^{\pi} \times 2\pi \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$I_0 = \iiint d\Omega = 8\pi \quad (72)$$

et :

$$\begin{aligned} I_2 &= \iiint \psi^2 \, d\Omega \\ &= \iiint (\cos\theta_1 \cos\theta_2 - 2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\varphi_2)^2 \sin\theta_1 \sin\theta_2 \, d\theta_1 \, d\theta_2 \, d\varphi_2 \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2\theta_1 \sin\theta_1 \, d\theta_1 \int_0^{\pi} \cos^2\theta_2 \sin\theta_2 \, d\theta_2 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \\ &\quad - 4 \int_0^{\pi} \cos\theta_1 \sin^2\theta_1 \, d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin^2\theta_2 \cos\theta_2 \, d\theta_2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\varphi_2 \, d\varphi_2}_{=0} \\ &\quad + 4 \int_0^{\pi} \sin^3\theta_1 \, d\theta_1 \int_0^{\pi} \sin^3\theta_2 \, d\theta_2 \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi_2 \, d\varphi_2 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos^2\theta_i \sin\theta_i \, d\theta_i &= -\frac{1}{3} [\cos^3\theta_i]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \\ \int_0^{\pi} \sin^3\theta_i \, d\theta_i &= -\frac{1}{3} [2 \cos\theta_i + \sin^2\theta_i \cos\theta_i]_0^{\pi} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

et :

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi_2 \, d\varphi_2 = \left[ \frac{\varphi_2}{2} - \frac{\sin(2\varphi_2)}{2} \right]_0^{2\pi} = \pi$$

Par conséquent :  $I_2 = \frac{8\pi}{9} + \frac{64\pi}{9} = 8\pi$ . Ce faisant, la condition de normalisation de  $\delta\mathcal{E}$  impose :

$$\begin{aligned} \iiint \delta\mathcal{P} = 1 &\Rightarrow \frac{1}{Z} \iint (1 - \beta\chi\psi) d\Omega = 1 \\ &\Rightarrow Z = \iint d\Omega - \beta\chi \iint \psi d\Omega = I_0 - \beta\chi \times I_1 \\ &\Rightarrow Z = 8\pi - \beta\chi \times 0 = 8\pi \end{aligned}$$

tandis que la valeur moyenne de  $\mathcal{E}$  est définie par :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle &= \iiint \mathcal{E} \times \delta\mathcal{P} = \iint \chi\psi \times \frac{1}{Z} (1 - \beta\chi\psi) d\Omega \\ &= \frac{\chi}{Z} \iint \psi d\Omega - \frac{\beta\chi^2}{Z} \iint \psi^2 d\Omega \\ &= \frac{\chi}{Z} I_1 - \frac{\beta}{Z} \chi^2 I_2 \end{aligned}$$

Avec :

$$\beta = \frac{1}{kT} \quad Z = 8\pi \quad \chi = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad I_1 = 0 \quad I_2 = 8\pi$$

on obtient :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = -\frac{1}{kT} \times \frac{1}{8\pi} \times \left( \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{r^6} \times 8\pi \Rightarrow \langle \mathcal{E} \rangle = -\frac{p_1^2 p_2^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 k} \times \frac{1}{T} \times \frac{1}{r^6}$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \epsilon_0 \frac{a(T)}{r^6} \text{ avec } \epsilon_0 = -\frac{p_1^2 p_2^2}{16\pi^2 \epsilon_0^2 k} < 0 \text{ et } a(T) = \frac{1}{T}$$

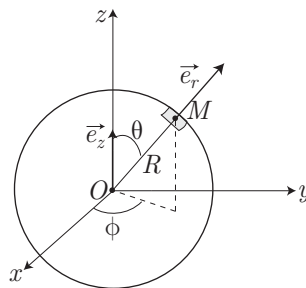
## 74 ————— Concours Centrale-Supélec

1. Soit  $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$  un élément de surface de la sphère, dont l'expression en coordonnées sphériques est :

$$dS = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$$

où  $R$  désigne le rayon de la sphère ( $S$ ). L'élément  $dS$  étant centré sur un point  $M$ , il contient une charge  $\delta q = \sigma dS$ , à l'origine d'un champ électrique en  $O$  :

$$\begin{aligned} \delta\vec{E}_m(O) &= \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\vec{MO}}{MO^3} = -\frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r \\ &= -\frac{\sigma_0 \cos\theta \times R^2 \sin\theta d\theta d\phi}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r \\ &= -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi \vec{e}_r \end{aligned}$$



Aussi, le champ total produit en  $O$  vaut-il :

$$\vec{E}_m(O) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S)} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{e}_r$$

Or, l'axe  $(Oz)$  est un axe de symétrie pour la distribution de charges, il s'ensuit que  $\vec{E}_m(O)$  est colinéaire à  $\vec{e}_z$  :

$$\begin{aligned} \vec{E}_m(O) = E_m(O) \vec{e}_z &\Rightarrow E_m(O) = \vec{E}_m(O) \cdot \vec{e}_z \\ &\Rightarrow E_m(O) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S)} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\phi \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z}_{\cos\theta} \\ &\Rightarrow E_m(O) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &\Rightarrow E_m(O) = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \times \left[ \frac{-\cos^3\theta}{3} \right]_0^\pi \times 2\pi = -\frac{\sigma_0}{3} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\vec{E}_m(O) = -\frac{\sigma_0}{3} \vec{e}_z \quad (73)$$

Le champ total qui règne en  $O$  est la superposition du champ  $\vec{E}_m(O)$  et du champ extérieur  $\vec{E}_a = E_a \vec{e}_z$  :

$$\vec{E}(O) = \vec{E}_m(O) + \vec{E}_a \Rightarrow \vec{E}(O) = \left( E_a - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \right) \vec{e}_z$$

En outre, puisque le champ électrique est uniforme à l'intérieur de la sphère, on y trouve en tout point  $M$  :

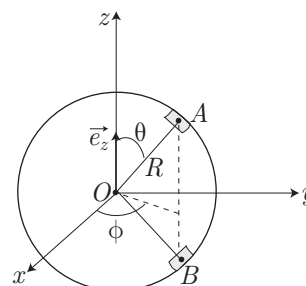
$$\vec{E}(M) = \left( E_a - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \right) \vec{e}_z \quad (74)$$

2. (a) Soient deux points  $A$  et  $B$ , symétriques par rapport au plan  $(Oxy)$ , sur lesquels sont centrées des charges  $\delta q = \sigma \, dS$ , avec :  $dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$ .

Compte tenu de la distribution des charges, les charges portées par  $A$  et  $B$  valent respectivement :

$$\begin{aligned} \delta q_A &= \sigma_0 \cos\theta \, dS > 0 \\ \delta q_B &= \sigma_0 \cos(\pi - \theta) \, dS = -\delta q_A < 0 \end{aligned}$$

C'est pourquoi le couple de points  $\{A, B\}$  constitue un dipôle, de moment :





$$\begin{aligned}
 \delta \vec{P} &= \delta q_A \times \overrightarrow{BA} \text{ avec } \overrightarrow{BA} = BA \vec{e}_z = 2R \cos \theta \vec{e}_z \\
 &= \sigma_0 \cos \theta \times R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \times 2R \cos \theta \vec{e}_z \\
 &= 2\sigma_0 R^3 \vec{e}_z \times \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \times d\phi \\
 \Rightarrow \vec{P} &= 2\sigma_0 R^3 \vec{e}_z \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 2\sigma_0 R^3 \vec{e}_z \times \frac{1}{3} \times 2\pi \\
 \Rightarrow \vec{P} &= \frac{4}{3} \pi R^3 \times \sigma_0 \vec{e}_z
 \end{aligned}$$

Le volume  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$  est à l'origine du vecteur polarisation :

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}}{V} \Rightarrow \vec{P} = \sigma_0 \vec{e}_z \tag{75}$$

(b) Le résultat précédent, associé au résultat (74) permet de conclure qu'en tout point  $M$  intérieur à la sphère :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_a - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}_a - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Or, à l'équilibre,  $\vec{E}(M)$  est nul, ce qui a pour conséquence :

$$\vec{E}_a = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \Rightarrow \vec{P} = 3\epsilon_0 \vec{E}_a$$

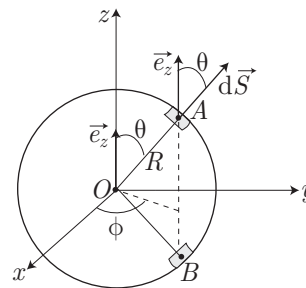
3. Soit  $A$  un point de la surface du conducteur, sur lequel est centrée une surface  $dS$ , contenant une charge  $\delta q$ .

À cette surface est associé un vecteur  $d\vec{S}$ , tel que :

$$d\vec{S} = dS \vec{e}_r \text{ avec } \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OA}}{OA}$$

Du reste, la relation (75) permet de poser :

$$\vec{P} \cdot \vec{e}_r = \sigma_0 \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = \sigma_0 \cos \theta = \sigma$$



de sorte que :

$$\delta q = \sigma \, dS = \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

Or, l'intensité du courant qui circule à travers  $d\vec{S}$  est définie par :

$$\delta I = \frac{d(\delta q)}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{P} \cdot d\vec{S}) = \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

tandis que le vecteur densité de courant  $\vec{J}$  vérifie :

$$\delta I = \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{d\vec{P}}{dt} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \vec{J} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

**CORRIGÉS**

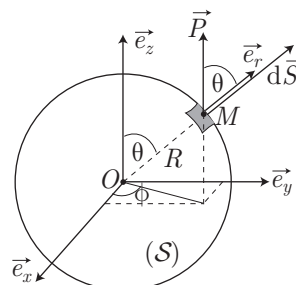
● 75 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

1. Dans la suite, nous adopterons les coordonnées sphériques  $(r, \theta, \phi)$  pour caractériser les différents vecteurs.

Ainsi, un élément  $d\vec{S}$  de la surface de  $(S)$  s'écrira :

$$\begin{aligned} d\vec{S} = dS \vec{e}_r &= R d\theta \times R \sin \theta d\phi \vec{e}_r \\ &= R^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r \end{aligned}$$

avec :  $\theta \in [0, \pi]$  et  $\phi \in [0, 2\pi]$ .



- (a) Soit  $\vec{E}_p$  le champ produit par la polarisation du matériau diélectrique. Le champ électrique en tout point  $M$  intérieur à  $(S)$  vaut :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0 + \vec{E}_p(M)$$

où  $\vec{E}(M) = \vec{E}$  car l'énoncé précise que le champ électrique est uniforme dans  $(S)$ . Or, un matériau diélectrique linéaire, homogène et isotrope est caractérisé par une susceptibilité  $\chi$  constante, telle que :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

Par suite,  $\vec{P}$  est uniforme à l'intérieur de  $(S)$ .

- (b) La densité volumique des charges liées valant :

$$\rho_{\text{liées}} = -\text{div } \vec{P} = 0 \text{ car } \vec{P} \text{ est uniforme}$$

il s'ensuit que les charges liées sont nécessairement réparties en surface.

Soit  $\vec{e}_r$  le vecteur unitaire directeur de l'élément de surface  $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$  et  $\vec{P} = P \vec{e}_z$  le vecteur polarisation. La densité surfacique des charges liées vaut alors :

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{e}_r = P \cos \theta$$

- (c) Une surface élémentaire  $dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$  porte une charge liée :

$$\delta q = \sigma_p dS = PR^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \quad (76)$$

C'est pourquoi  $(S)$  contient la charge totale :

$$\begin{aligned} q &= PR^2 \times \int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{PR^2}{2} \int_0^\pi \sin(2\theta) d\theta \times 2\pi = P\pi R^2 [-\cos(2\theta)]_0^\pi \\ &\Rightarrow q = 0 \end{aligned}$$

Ce résultat révèle que  $(S)$  est globalement neutre.

2. Soit  $\vec{u} = -\vec{e}_r$  le vecteur unitaire directeur de  $\overrightarrow{MO}$  :

$$\overrightarrow{MO} = MO \times \vec{u} = -R \vec{e}_r$$

Une surface  $dS$ , centrée sur  $M(r, \theta, \phi)$ , porte la charge  $\delta q$  donnée par l'identité (76), à l'origine d'un champ électrique  $\delta \vec{E}_p(O)$ , qui vérifie la loi de Coulomb :

$$\delta \vec{E}_p(O) = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u} = -\frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{e}_r = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \vec{e}_r$$

Aussi, au point  $O$  règne le champ électrique :

$$\vec{E}_p(O) = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S)} \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \vec{e}_r \quad (77)$$

Or, l'axe  $(O, \vec{e}_z)$  est un axe de symétrie pour la distribution surfacique de charges, ce qui signifie que  $\vec{E}_p(O)$  est colinéaire à cet axe et donc au vecteur unitaire  $\vec{e}_z$  :

$$\vec{E}_p(O) = E_p(O) \vec{e}_z \Rightarrow E_p(O) = \vec{E}_p(O) \cdot \vec{e}_z$$

Par suite, la relation (77) conduit à :

$$E_p(O) = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \iint \sin \theta \cos^2 \theta d\theta d\phi \text{ car } \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos \theta$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E_p(O) &= -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \times \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \times \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi \times 2\pi = -\frac{P}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2}{3} \times 2\pi \\ \Rightarrow E_p(O) &= -\frac{P}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

Aussi, en remarquant que  $\vec{E}(O) = E(O) \vec{e}_z$  et que  $\vec{P} = P \vec{e}_z$  :

$$\vec{E}_p(O) = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Enfin, puisque  $\vec{E}_p(M) = \vec{E}(M) - \vec{E}_0 = \vec{E} - \vec{E}_0$  est uniforme à l'intérieur de  $(S)$  :

$$\vec{E}_p(M) = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \text{ pour } M \subset (S)$$

Ce faisant, le champ électrique total  $\vec{E}(M)$ , en tout point  $M \subset (S)$ , représente la résultante :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

Quant à la linéarité du diélectrique, elle impose que :

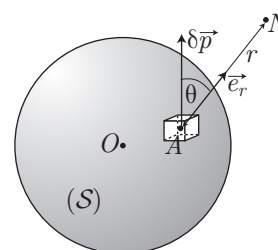
$$\begin{aligned}\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}(M) &\Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{E}_0 - \frac{\chi}{3} \vec{E}(M) \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{\chi}{3}\right) \vec{E}(M) = \vec{E}_0 \\ &\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{3\vec{E}_0}{\chi + 3} \text{ pour } M \subset (S)\end{aligned}$$

3. Soit  $A$  un point situé à l'intérieur de  $(S)$  et soit  $N$  un point situé à l'extérieur, tel que  $\overrightarrow{AN} = r \vec{e}_r$ . Un volume  $d\tau_A$ , centré sur  $A$ , présente un moment dipolaire élémentaire :

$$\delta \vec{p}_A = \vec{P}(A) d\tau_A = \vec{P} d\tau_A$$

qui produit en  $N$  un potentiel :

$$dV = \frac{\delta \vec{p}_A \cdot \vec{e}_r}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{P} \cdot \vec{e}_r}{4\pi \varepsilon_0 r^2} d\tau_A$$



Aussi, le potentiel électrique produit en  $N$  par la distribution de charges liées vaut :

$$V(N) = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\vec{P} \cdot \vec{e}_r}{4\pi \varepsilon_0 r^2} d\tau_A$$

où  $(\mathcal{V})$  désigne le volume compris à l'intérieur de  $(S)$ . Aussi, en tenant compte de l'uniformité de  $\vec{P}$  :

$$V(N) = \vec{P} \cdot \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\vec{e}_r}{4\pi \varepsilon_0 r^2} d\tau_A = \vec{P} \cdot \vec{I}$$

l'intégrale  $\vec{I}$  s'identifiant au champ électrique que produirait une distribution uniforme de charges, de densité volumique  $\rho_0 = 1$  :

$$\vec{I} = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\vec{e}_r}{4\pi \varepsilon_0 r^2} d\tau_A = \iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\rho_0 d\tau_A}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

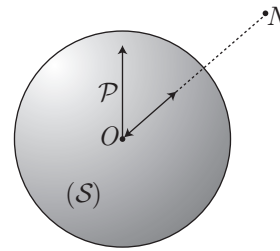
Ce champ est alors donné par le théorème de Gauss, à partir duquel on montre que  $\vec{I}$  équivaut au champ que produirait la charge de  $(S)$  qui serait concentrée en  $O$  :

$$\vec{I} = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\overrightarrow{ON}}{ON^3} = \frac{q_{\text{int}}}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\vec{u}}{ON^2}$$

où  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{ON}}{ON}$  désigne un vecteur unitaire de  $\overrightarrow{ON}$  et  $q_{\text{int}}$  est la charge totale, de densité volumique  $\rho_0 = 1$ , contenue à l'intérieur du volume  $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi R^3$  limité par  $(S)$ . C'est pourquoi :

$$\vec{I} = \frac{\rho_0 \mathcal{V}}{4\pi\epsilon_0 ON^2} \vec{u} = \frac{\mathcal{V}}{4\pi\epsilon_0 ON^2} \vec{u}$$

$$\Rightarrow V(N) = \vec{P} \cdot \vec{I} = \frac{\vec{P} \times \mathcal{V}}{4\pi\epsilon_0 ON^2} \vec{u}$$



Enfin, la définition de  $\vec{P}$  (lorsque  $\vec{P}$  est uniforme) conduit à :

$$\vec{P} = \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{P} d\tau = \vec{P} \times \iiint_{(\mathcal{V})} d\tau = \vec{P} \times \mathcal{V}$$

$$\Rightarrow V(N) = \frac{\vec{P} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 ON^2}$$

Ce résultat s'identifie au potentiel que produirait en  $N$  un dipôle, situé en  $O$ , de moment dipolaire  $\vec{P}$ .

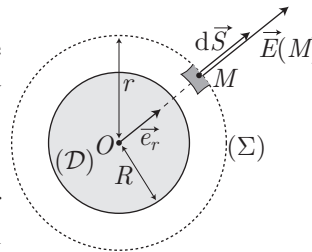
● **76** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

1. L'axe  $(OM)$ , de vecteur unitaire directeur  $\vec{e}_r$ , est un axe de symétrie pour la distribution de charges  $(\mathcal{D})$ , auquel cas  $\vec{E}(M)$  est colinéaire  $\vec{e}_r$  :

$$\vec{E}(M) = E \vec{e}_r$$

En outre, toute rotation de  $(\mathcal{D})$  autour de  $O$  laisse  $(\mathcal{D})$  invariant, en conséquence de quoi  $E$  ne dépend que de  $r$  :

$$\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$$



$(\Sigma)$  désigne une surface sphérique, de rayon  $r$  sur laquelle tout élément  $d\vec{S}$  est colinéaire à  $\vec{e}_r$ , ce qui se traduit par :

$$\Phi_\Sigma = \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} E(r) \times dS = E(r) \times \iint_{(\Sigma)} dS = E(r) \times 4\pi r^2$$

Or, conformément au théorème de Gauss :

$$\Phi_\Sigma = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

2. Le potentiel  $V = V(M)$  en  $M$  est lié à  $\vec{E}(M)$  par :

$$\vec{E}(M) = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

ce qui suffit à montrer, d'une part, que  $V$  ne dépend pas des angles polaires  $\theta$  et  $\varphi$  (car  $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$  et  $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ ) et d'autre part que :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(M) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + K$$

**CORRIGÉS**

où  $K = 0$  afin de tenir compte de la condition :  $\lim_{r \rightarrow \infty} [V(M)] = 0$ . Ce faisant, lorsque  $M$  se trouve à la surface du conducteur,  $r = R$  fournit le potentiel de ce conducteur :  $V(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ , où  $Q = C \times V(R)$  conduit finalement à :

$$V(R) = \frac{C \times V(R)}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R$$

### ● 77 ————— Lycée Henri Wallon, Valenciennes

1. (a) Soient  $(Ox)$ ,  $(Oy)$  et  $(Oz)$  les axes d'un repère, tel que  $(Ox)$  et  $(Oy)$  appartiennent au plan chargé. L'axe  $(Oz)$  étant un axe de symétrie pour la distribution de charges, le champ  $\vec{E}(M)$ , produit en tout point  $M \in (Oz)$ , est colinéaire à  $\vec{u}_z$  :

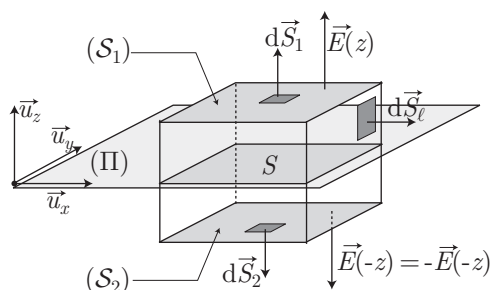
$$\vec{E}(M) = E \vec{u}_z$$

En outre, le plan chargé étant infini, toute translation de ce plan selon les directions de  $\vec{u}_x$  ou de  $\vec{u}_y$  laisse invariante la distribution de charges, auquel cas  $E$  ne dépend que de  $z$  :

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z$$

- (b) Considérons une surface fermée ( $\Sigma$ ) composée :

- d'une face ( $S_1$ ), de surface  $S$ , parallèle au plan chargé ( $\Pi$ ), située à une cote  $z$ , de manière que  $E$  y prennent une valeur constante :  $E(z)$  ;
- d'une face ( $S_2$ ), de surface  $S$ , parallèle à ( $\Pi$ ), située à la cote  $-z$ , de manière que  $E$  y adopte la valeur constante  $E(-z)$ . Pour des raisons de symétrie, on remarque que  $E(-z) = -E(z)$  ;
- de quatre faces latérales ( $S_\ell$ ), perpendiculaires à ( $\Pi$ ).



Le flux de  $\vec{E}$  à travers  $(\Sigma)$  est alors défini par :

$$\begin{aligned} \Phi_{\Sigma} &= \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint_{(S_1)} \vec{E}(z) \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E}(-z) \cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint_{(S_{\ell})} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\ell}}_{=0} \\ &= \iint_{(S_1)} E(z) \times dS_1 + \iint_{(S_2)} E(z) \times dS_2 \\ &= E(z) \times \left[ \iint_{(S_1)} dS_1 + \iint_{(S_2)} dS_2 \right] = E(z) \times 2S \end{aligned}$$

En outre, la charge contenue dans le volume de frontière  $(\Sigma)$  vaut :  $q_{\text{int}} = \sigma S$ , auque cas le théorème de Gauss impose :

$$\Phi_{\Sigma} = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z) \times 2S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

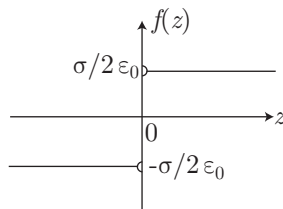
d'où l'on déduit que :

$$\vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \text{ et } \vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad (78)$$

(c) De ce qui précède, on déduit que  $\vec{E}$  peut s'écrire :

$$\vec{E} = f(z) \vec{u}_z \text{ avec } \begin{cases} f(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ pour } z > 0 \\ f(z) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{ pour } z < 0 \end{cases}$$

Aussi, la fonction  $f(z)$  admet pour représentation graphique :



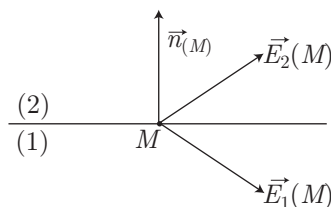
(d) À la traversée du plan  $z = 0$ , le champ électrique subit la discontinuité :

$$\Delta \vec{E} = \lim_{z \rightarrow 0^+} [\vec{E}(z)] - \lim_{z \rightarrow 0^-} [\vec{E}(z)] = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$$

Ce résultat est compatible avec celui énoncé dans le cours :

Soient  $\vec{E}_1(M)$  et  $\vec{E}_2(M)$  les champs situés de part et d'autre d'un plan chargé en surface, avec une densité  $\sigma$ . La relation de passage à travers ce plan est donnée par :

$$\vec{E}_2(M) - \vec{E}_1(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{(M)}$$



où  $\vec{n}_{(M)}$  est un vecteur unitaire normal au plan, dirigé du milieu (1) vers le milieu (2) dans lesquels règnent les champs respectifs  $\vec{E}_1(M)$  et  $\vec{E}_2(M)$ .

En posant :

$$\begin{cases} \vec{E}_2(M) = \vec{E}(z > 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \\ \vec{E}_1(M) = \vec{E}(z < 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \end{cases}$$

et  $\vec{n}_{(M)} = \vec{u}_z$ , on retrouve bien :

$$\Delta \vec{E} = \vec{E}(z > 0) - \vec{E}(z < 0) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{(M)}$$

(e) En coordonnées cartésiennes, la relation :  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  s'écrit :

$$E(z) \vec{u}_z = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z$$

d'où il apparaît que  $V$  ne dépend que de  $z$  (car  $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ ) :

$$\frac{dV}{dz} = -E(z)$$

On peut *a priori* distinguer deux cas :

- Pour  $z > 0$  :

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow V(z \geq 0) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + K$$

- Pour  $z < 0$  :

$$E(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{dV}{dz} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \Rightarrow V(z \leq 0) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} z + K'$$

En remarquant que  $z = |z|$  pour  $z \geq 0$  et que  $z = -|z|$  pour  $z \leq 0$ , ces deux relations deviennent simplement :

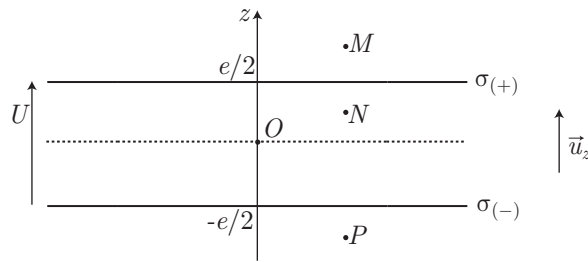
$$V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |z| + K$$

où  $K$  (ainsi que  $K'$ ) est une constante qui tient compte de la condition :

$$V(z = 0) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \times 0 + K \Rightarrow K = 0 \Rightarrow V(z) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} |z|$$

2. (a) Soient trois points  $M$ ,  $N$  et  $P$  situés respectivement aux abscisses  $z > \frac{e}{2}$ ,  $|z| < \frac{e}{2}$  et  $z < -\frac{e}{2}$ . On note  $\sigma_{(+)} = \sigma$  et  $\sigma_{(-)} = -\sigma$  les densités de charge portées par les armatures.





La loi de superposition des champs électriques implique que le champ  $\vec{E}$  qui règne en un point de l'espace est la résultante vectorielle des champs  $\vec{E}_{(+)}$  et  $\vec{E}_{(-)}$  créés par chacune des plaques. Les résultats (78) permettent alors de poser :

- Au point  $M \left( z > \frac{e}{2} \right)$  :

$$\begin{cases} \vec{E}_{(+)}(M) = \frac{\sigma(+)}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \\ \vec{E}_{(-)}(M) = \frac{\sigma(-)}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{E} \left( z > \frac{e}{2} \right) = \vec{E}_{(+)}(M) + \vec{E}_{(-)}(M) = \vec{0}$$

- Au point  $N \left( |z| < \frac{e}{2} \right)$  :

$$\begin{cases} \vec{E}_{(+)}(N) = -\frac{\sigma(+)}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \\ \vec{E}_{(-)}(N) = \frac{\sigma(-)}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{E} \left( |z| < \frac{e}{2} \right) = \vec{E}_{(+)}(N) + \vec{E}_{(-)}(N) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z$$

- Au point  $P \left( z < -\frac{e}{2} \right)$  :

$$\begin{cases} \vec{E}_{(+)}(P) = -\frac{\sigma(+)}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \\ \vec{E}_{(-)}(P) = -\frac{\sigma(-)}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{u}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{E} \left( z < -\frac{e}{2} \right) = \vec{E}_{(+)}(P) + \vec{E}_{(-)}(P) = \vec{0}$$

(b) À nouveau, l'équation :  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$  fournit l'équation différentielle :

$$E(z) \vec{u}_z = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{u}_z \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow E(z) = -\frac{dV}{dz}$$

que l'on peut intégrer pour  $|z| < \frac{e}{2}$  :

$$dV = -E \left( |z| < \frac{e}{2} \right) dz = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dz \Rightarrow V(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z + K''$$

où la constante  $K''$  est nulle, de manière à assurer  $V(z=0) = 0$ . C'est pourquoi :

$$V(z) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} z \text{ pour } |z| < \frac{e}{2}$$

(c) Étant donné que la fonction  $V(z)$  est continue en toute valeur de  $z$  (sans quoi  $E(z) = -\frac{dV}{dz}$  deviendrait infini), les valeurs de  $V(z)$  en  $z = \pm \frac{e}{2}$  s'obtiennent grâce aux résultats précédents :

$$V\left(z = \frac{e}{2}\right) = \frac{\sigma e}{2\varepsilon_0} \text{ et } V\left(z = -\frac{e}{2}\right) = -\frac{\sigma e}{2\varepsilon_0}$$

Aussi, la tension  $U$  est définie par :

$$U = V\left(z = \frac{e}{2}\right) - V\left(z = -\frac{e}{2}\right) \Rightarrow U = \frac{\sigma e}{\varepsilon_0} \quad (79)$$

(d) Étant donné que, pour  $|z| < \frac{e}{2}$ ,  $E = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ , il s'ensuit que :

$$U = -E \times e \quad (80)$$

(e) Soit  $Q$  la charge portée par l'armature supérieure, de surface  $S$  ; la définition de  $\sigma = \frac{Q}{S}$  donne à la relation (79) la forme suivante :

$$U = Q \times \frac{e}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{C} \Rightarrow C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$$

(f) En un point  $M$ , où règne un champ électrique  $\vec{E}(M)$ , est associée une densité volumique d'énergie électrostatique :

$$\frac{\delta W_e}{d\tau} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \Rightarrow \delta W_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau$$

où  $\delta W_e$  est l'énergie électrostatique confinée dans le volume  $d\tau$ . Notamment, dans un cylindre ( $\mathcal{C}$ ), situé entre  $z = \frac{e}{2}$  et  $z = -\frac{e}{2}$ , de section  $S$  (le volume de

(C) vaut donc  $V = Se$ , l'énergie électrostatique vaut alors :

$$\begin{aligned} W_e &= \iiint_{(C)} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau \text{ avec } E = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \text{ pour } |z| < \frac{e}{2} \\ &= \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \times \iiint_{(C)} d\tau = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \times V \end{aligned}$$

Or, en utilisant le résultat (80) :  $E = -\frac{U}{e}$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned} W_e &= \frac{\varepsilon_0}{2} \times \frac{U^2}{e^2} \times Se = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \times \frac{U^2}{2} \\ \Rightarrow W_e &= \frac{1}{2} CU^2 \text{ car } C = \frac{\varepsilon_0 S}{e} \end{aligned}$$

En outre, la définition de  $C$  :  $U = \frac{Q}{C}$  conduit à :

$$W_e = \frac{Q^2}{2C}$$

## ● 78 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Étant donné que  $h \gg R_2$  le condensateur peut être considéré de longueur infini.

Soit un point  $M$  de l'espace, le plan portant  $M$  et l'axe  $Oz$  est plan de symétrie ainsi que le plan portant  $M$  et perpendiculaire à  $Oz$ . La direction de  $\vec{E}$  est donnée par l'intersection de ces deux plans. On en déduit :  $\vec{E} = E \vec{e}_r$ .

Les invariances par rotation autour de  $Oz$  et par translation le long de  $Oz$  permettent d'écrire :  $E(r, \theta, z) = E(r)$ . Pour exprimer  $E(r)$  utilisons le théorème de Gauss. Comme surface de Gauss choisissons un cylindre, d'axe  $Oz$ , de hauteur  $h$  et de rayon  $r$  tel que  $R_1 < r < R_2$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S E(r) dS = E(r) \iint_S dS = E(r) 2\pi r h$$

$$\text{Étant donné que } Q_{\text{int}} = Q : E(r) = \frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0}$$

2. Soit  $\mathcal{C}$  la circulation de  $\vec{E}$  entre deux points des armatures :

$$\mathcal{C} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_1 - V_2.$$

Le résultat de cette intégrale est indépendant du chemin choisi entre les armatures. Choisissons un chemin direct pour lequel :  $d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}_r$ .

$$\mathcal{C} = \int_1^2 E(r) dr = \int_1^2 \frac{Q dr}{2\pi \varepsilon_0 r h} = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 h} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right)$$

3. La capacité  $C$  est définie par :  $Q = C(V_1 - V_2)$ , on en déduit :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

4. L'application numérique donne :  $C = \frac{2\pi \cdot 8,8 \cdot 10^{-12} \cdot 0,5}{\ln 2} = 4 \cdot 10^{-11} \text{F}$

5. Dans le cas où  $R_2 - R_1 = e \ll R_1$ , l'expression de  $C$  devient :

$$\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \ln\left(\frac{R_1 + e}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{e}{R_1}\right) \simeq \frac{e}{R_1} \Rightarrow C \simeq \frac{2\pi\varepsilon_0 h R_1}{e}$$

On note  $S = 2\pi R_1 h$ , la surface de la première armature qui est aussi approximativement celle de la seconde.

On a donc  $C \simeq \frac{S\varepsilon_0}{e}$ , ce qui correspond à la capacité d'un condensateur plan.

6. La valeur maximale  $E_{\max}$  est donnée pour  $(E)_{r=R_1}$ . Il faut donc que :

$$\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h R_1} < E_0 \Rightarrow Q < 2\pi\varepsilon_0 h R_1 E_0.$$

De l'égalité relative au condensateur  $Q = CU$ , on déduit que la tension aux bornes du condensateur doit donc vérifier :

$$U < \frac{R_1 E_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

L'application numérique donne :  $U_{\max} = 207\,944 \text{ V}$

7. L'énergie stockée par le condensateur vaut :

$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C} = \iiint_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2\mu_0} d\tau$$

Le calcul de cette intégrale se fait sur le volume situé entre les deux armatures du condensateur :

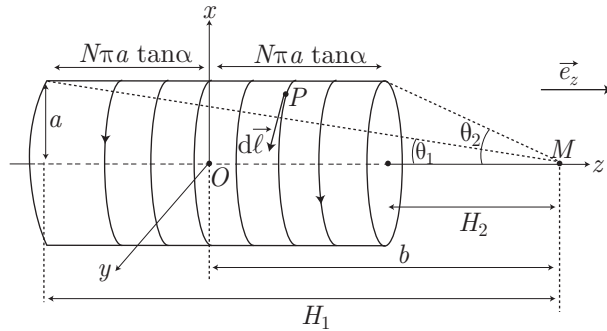
$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \iiint_V \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0}\right)^2 r dr d\theta dz \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0}\right)^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{Q}{2\pi r h \varepsilon_0}\right)^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) h 2\pi \\ &= \frac{Q^2}{4\pi h \varepsilon_0} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \frac{Q^2}{2C} \end{aligned}$$

On en déduit que  $C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$ , ce qui est bien l'expression trouvée plus haut.

● 79 **Concours Polytechnique**

1. Les distances  $H_2$  et  $H_1$  valent :

$$H_1 = b + N\pi a \tan \alpha \text{ et } H_2 = b - N\pi a \tan \alpha$$



Ainsi, la bobine a pour longueur :

$$L = H_1 - H_2 = 2N\pi a \tan \alpha$$

En outre, une spire est décrite lorsque l'angle  $\phi$  varie de  $\Delta\phi = 2\pi$ , auquel cas une spire occupe, sur l'axe  $(Oz)$ , une longueur :  $\Delta z = a \tan \alpha \times \Delta\phi = 2\pi a \tan \alpha$ . Ce faisant, le nombre de spires par unité de longueur vaut :

$$n = \frac{1}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi a \tan \alpha} \tag{81}$$

2. Soit  $P(x, y, z)$  un point de la bobine, tel que :

$$\overrightarrow{PM} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \cos \phi \\ -a \sin \phi \\ b - a \tan \alpha \times \phi \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que :

$$PM^2 = a^2 + (b - a \tan \alpha \times \phi)^2$$

D'autre part, un déplacement élémentaire  $d\vec{\ell}$  de  $P$  le long du fil de la bobine s'exprime par :

$$d\vec{\ell} = d\overrightarrow{OP} \text{ avec } \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a \cos \phi \\ a \sin \phi \\ a \tan \alpha \phi \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ a \cos \theta \\ a \tan \alpha \end{pmatrix} d\phi$$

Ainsi, le champ magnétique créé par le point  $P$  en  $M$  vérifie la loi de Biot et Savart :

$$\delta\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

auquel cas :

$$\begin{aligned} \delta B_z &= \delta\vec{B}(M) \cdot \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} \left( d\vec{\ell} \wedge \overrightarrow{PM} \right) \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi PM^3} \times \left( \overrightarrow{PM} \wedge \vec{e}_z \right) \cdot d\vec{\ell} \end{aligned}$$

**CORRIGÉS**

où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM} \wedge \vec{e}_z &= \begin{pmatrix} -a \cos \phi \\ -a \sin \phi \\ b - a \tan \alpha \phi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \sin \phi \\ a \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (\overrightarrow{PM} \wedge \vec{e}_z) \cdot d\vec{\ell} &= \begin{pmatrix} -a \sin \phi \\ a \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin \phi \\ a \cos \phi \\ a \tan \alpha \end{pmatrix} d\phi = a^2 d\phi\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\delta B_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{a^2 d\phi}{PM^3} = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi} \times \frac{d\phi}{[a^2 + (b - a \tan \alpha \phi)^2]^{3/2}} \\ \Rightarrow B_z &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi} \int_{-N\pi}^{N\pi} \frac{d\phi}{[a^2 + (b - a \tan \alpha \phi)^2]^{3/2}}\end{aligned}$$

Le calcul de cette intégrale peut être mené en effectuant le changement de variable :

$$\begin{aligned}a \tan u = b - a \tan \alpha \phi \Rightarrow a^2 + (b - a \tan \alpha \phi)^2 &= a^2 (1 + \tan^2 u) \\ &= \frac{a^2}{\cos^2 u}\end{aligned}$$

et d'autre part :

$$a \frac{du}{\cos^2 u} = -a \tan \alpha d\phi \Rightarrow d\phi = -\frac{du}{\cos^2 u \tan \alpha}$$

Quant aux bornes d'intégration :  $\phi_1 = -N\pi$  et  $\phi_2 = N\pi$ , elles correspondent aux valeurs  $u_1$  et  $u_2$  telles que :

$$\begin{cases} a \tan u_1 = b - a \tan \alpha \phi_1 \\ a \tan u_2 = b - a \tan \alpha \phi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tan u_1 = \frac{b}{a} + N\pi \tan \alpha = \frac{H_1}{a} \\ \tan u_2 = \frac{b}{a} - N\pi \tan \alpha = \frac{H_2}{a} \end{cases}$$

On trouve ainsi :

$$\begin{aligned}B_z &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi} \int_{u_1}^{u_2} \frac{-du}{\tan \alpha \cos^2 u} \times \frac{\cos^3 u}{a^3} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a \tan \alpha} \int_{u_1}^{u_2} -\cos u du \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi a \tan \alpha} (\sin u_1 - \sin u_2)\end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\sin u_i = \frac{\tan u_i}{\sqrt{1 + \tan^2 u_i}} = \frac{H_i/a}{\sqrt{1 + H_i^2/a^2}} = \frac{H_i}{\sqrt{a^2 + H_i^2}} = \cos \theta_i$$

on trouve finalement :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi a \tan \alpha} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

où le résultat (81) fournit :

$$\frac{1}{2\pi a \tan \alpha} = n \Rightarrow B_z = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

● 80 **Concours ESIM**

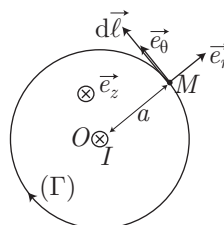
1. Soit  $(\mathcal{F})$  un fil infini, parcouru par un courant d'intensité  $I$ , dirigé selon un axe  $(O, \vec{e}_z)$  ;

Tout plan contenant  $(\mathcal{F})$  et  $M$  est un plan de symétrie pour le courant électrique, auquel cas  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire à un tel plan :

$$\vec{B}(M) = B \times \vec{e}_\theta$$

D'autre part, une rotation de  $(\mathcal{F})$  autour de l'axe  $(O, \vec{e}_z)$ , ou une translation de  $(\mathcal{F})$  dans la direction de  $\vec{e}_z$ , laissent invariante la distribution de courant, ce qui signifie que  $B$  ne dépend que de la distance  $a = OM$  :

$$\vec{B}(M) = B(a) \vec{e}_\theta$$



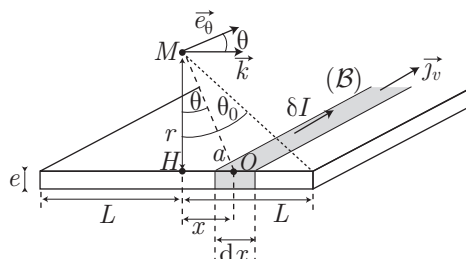
Cette expression montre que  $B(a)$  demeure constant le long d'un parcours  $(\Gamma)$  circulaire, de rayon  $a$  et de centre  $O$ . Sur un tel parcours, la circulation du champ magnétique vaut :

$$C = \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{l} = \oint_{(\Gamma)} B(a) \times dl = B(a) \times \oint_{(\Gamma)} dl = B(a) \times 2\pi a$$

En outre, la surface de contour  $(\Gamma)$  est traversée par le courant d'intensité  $I$ . C'est pourquoi le théorème d'Ampère s'écrit :

$$C = \mu_0 I \Rightarrow B(a) \times 2\pi a = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{e}_\theta \quad (82)$$

2. (a) Soit  $(\mathcal{B})$  une bande élémentaire, d'épaisseur  $e$ , de largeur  $dx$ , parcourue par un courant d'intensité  $\delta I$ .



**CORRIGÉS**

Le ruban conducteur est alors parcouru par un courant de densité volumique  $\vec{j}_v$  supposée uniforme et donc d'intensité :

$$\begin{aligned} I &= j_v \times 2Le \text{ où } j_v = \|\vec{j}_v\| \\ \Rightarrow j_v &= \frac{I}{2Le} \end{aligned}$$

Aussi, la section  $ds = e dx$  de la bande ( $\mathcal{B}$ ) est-elle traversée par un courant d'intensité :

$$\delta I = j_v ds = \frac{I}{2Le} \times e dx = \frac{I}{2L} dx$$

Ainsi, ( $\mathcal{B}$ ) produit en  $M$  un champ magnétique  $\delta \vec{B}(M)$  dont l'expression se déduit du résultat (82) :

$$\delta \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \delta I}{2\pi a} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi La} dx \vec{e}_\theta$$

C'est pourquoi le champ magnétique produit par la totalité du ruban conducteur vaut :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \int_{x=-L}^L \frac{dx}{a} \vec{e}_\theta \quad (83)$$

Du reste, le plan médiateur (qui passe par  $M$  et  $H$ ) du ruban est un plan de symétrie pour la distribution de courant et est alors perpendiculaire à  $\vec{B}(M)$  :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) = B \vec{k} \Rightarrow B &= \vec{B}(M) \cdot \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \int_{x=-L}^L \frac{dx}{a} \vec{e}_\theta \cdot \vec{k} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \int_{x=-L}^L \frac{dx}{a} \cos \theta \end{aligned}$$

Il convient dès lors de remarquer que :

$$\tan \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \tan \theta \Rightarrow dx = r \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

et :

$$\cos \theta = \frac{r}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{\cos \theta}{r}$$

Aussi, en posant  $\sin \theta_0 = \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}}$ , on obtient :

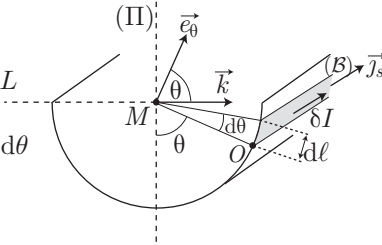
$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{r d\theta}{\cos^2 \theta} \times \frac{\cos \theta}{r} \times \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} d\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \times 2\theta_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \arcsin \left( \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right) \\ \Rightarrow \vec{B} &= \frac{\mu_0 I \vec{k}}{2\pi L} \times \arcsin \left( \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right) \end{aligned}$$

- (b) Considérons maintenant un élément  $d\ell$  de la gouttière, centré sur un point  $O$ , délimitant une bande  $\mathcal{B}$  dans laquelle circule un courant d'intensité  $\delta I$ .



La densité surfacique de courant  $j_s$  (supposée uniforme) qui circule sur la gouttière est alors définie par :

$$\begin{aligned} j_s &= \frac{\delta I}{d\ell} \Rightarrow \delta I = j_s d\ell \Rightarrow I = j_s \times 2L \\ &\Rightarrow \delta I = \frac{I}{2L} d\ell \text{ avec } d\ell = a d\theta \\ &\Rightarrow \delta I = \frac{Ia}{2L} d\theta \end{aligned}$$



Dans la suite, le résultat (83) donne le champ magnétique  $\delta \vec{B}(M)$  produit par  $(B)$  en  $M$  :

$$\delta \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 \delta I}{2\pi a} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} d\theta \vec{e}_\theta$$

d'où se déduit le champ  $\vec{B}(M)$  produit en  $M$  par la totalité de la gouttière :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \vec{e}_\theta$$

Enfin, en remarquant que le plan médiateur  $(\Pi)$  de la gouttière, qui passe par  $M$ , est un plan de symétrie pour le courant, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= B \vec{k} \Rightarrow B = \vec{B}(M) \cdot \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \underbrace{\vec{e}_\theta \cdot \vec{k}}_{\cos \theta} \\ &\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi L} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \\ &\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \vec{k} \end{aligned}$$

81

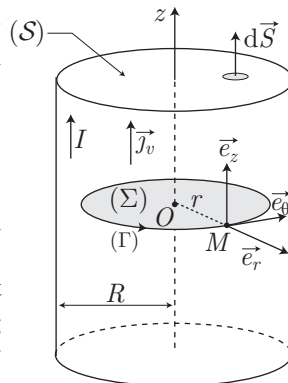
QCM

1. Soit  $M$  un point situé à une distance  $r$  de l'axe du cylindre, tel que  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$  et  $r < R$ .

Le plan  $(\Pi)$  contenant les vecteurs  $\vec{e}_z$  et  $\vec{e}_r$  est un plan de symétrie pour la distribution de courant, en conséquence de quoi  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire à  $(\Pi)$ , ce qui s'exprime par :

$$\vec{B}(M) = B \vec{e}_\theta$$

En outre, toute rotation du cylindre autour de  $(Oz)$ , ainsi que toute translation du cylindre dans la direction de  $(Oz)$  laissent invariante la distribution de courant. Par suite,  $B$  ne dépend que de  $r$  :  $\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$  et c'est pourquoi on calcule la circulation  $\mathcal{C}$  de  $\vec{B}$  le long d'un parcours  $(\Gamma)$  circulaire, de centre  $O$  et de rayon  $r$  ( $B(r)$  y demeure constant).



CORRIGÉS

Ce faisant, si  $d\vec{OM}$  désigne un déplacement élémentaire le long de  $(\Gamma)$ , on constate que :  $d\vec{OM} = dl \vec{e}_\theta$  de sorte que :

$$C = \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \oint_{(\Gamma)} B(r) \times dl = B(r) \oint_{(\Gamma)} dl = B(r) \times 2\pi r$$

Introduisons maintenant le vecteur densité volumique de courant  $\vec{j}_v$ , uniforme d'après l'énoncé. La surface de base :  $S = \pi R^2$  est alors traversée par un courant d'intensité :

$$I = \iiint_{(S)} \vec{j}_v \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} j_v \times dS \text{ car } \vec{j}_v = j_v \vec{e}_z \text{ et } d\vec{S} = dS \vec{e}_z$$

c'est-à-dire :

$$I = j_v \times \iint_{(S)} dS = j_v \times \pi R^2 \Rightarrow j_v = \frac{I}{\pi R^2}$$

De même, le parcours  $(\Gamma)$  circonscrit une surface  $\Sigma = \pi r^2$ , traversée par un courant :

$$\begin{aligned} I_{\text{int}} &= \iint_{\Sigma} \vec{j}_v \cdot d\vec{S} = j_v \times \Sigma = j_v \times \pi r^2 \\ \Rightarrow I_{\text{int}} &= \frac{I}{\pi R^2} \times \pi r^2 = \frac{I r^2}{R^2} \end{aligned}$$

Le théorème d'Ampère impose alors :

$$\begin{aligned} C = \mu_0 I_{\text{int}} &\Rightarrow B \times 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{R^2} r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \times r \\ &\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \times r \vec{e}_\theta \quad (\text{réponse d}). \end{aligned}$$

2. Le potentiel vecteur  $\vec{A}(M)$  est accessible à partir de la loi :  $\vec{B}(M) = \text{rot } \vec{A}$ , à condition de connaître les composantes du rotationnel. Or, l'énoncé ne les rappelant pas, il est nécessaire d'utiliser le système de coordonnées cartésiennes dans lequel nous savons que :

$$\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

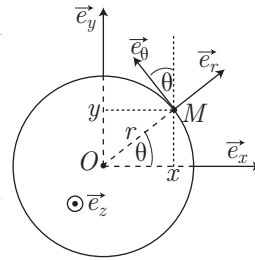
où l'invariance de la distribution de courant par translation selon  $(Oz)$  montre que les composantes de  $\vec{A}$  ne dépendent pas de la variable  $z$ , ce qui se traduit aussi par :

$$\text{rot } \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial A_z}{\partial x} \vec{e}_y + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \quad (84)$$

En outre, dans la base  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ , le vecteur orthoradial s'écrit :

$$\begin{aligned} \vec{e}_\theta &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \\ \Rightarrow r \vec{e}_\theta &= -r \sin \theta \vec{e}_x + r \cos \theta \vec{e}_y \end{aligned}$$

où  $r \sin \theta$  et  $r \cos \theta$  s'identifient respectivement aux coordonnées  $y$  et  $x$  du point  $M$  :



$$r \vec{e}_\theta = -y \vec{e}_x + x \vec{e}_y \Rightarrow \vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} y \vec{e}_x + \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} x \vec{e}_y$$

Par identification avec l'équation (84), on obtient alors :

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} y \text{ et } \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} x \quad (85)$$

La première de ces équations montre qu'il existe une fonction  $f(x)$  de  $x$  seulement, telle que :

$$A_z(x, y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} y^2 + f(x)$$

Quant à la dérivée  $\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{df}{dx}$ , elle est donnée par la deuxième des équations (85) :

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} x \Rightarrow \frac{df}{dx} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} x \Rightarrow f(x) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} x^2 + K$$

où  $K$  désigne une constante. Par conséquent :

$$A_z(x, y) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} y^2 - \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} x^2 + K = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} r^2 + K$$

car  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Enfin, l'énoncé précise que sur l'axe du conducteur ( $r = 0$ ), le potentiel vecteur est nul, c'est-à-dire que :

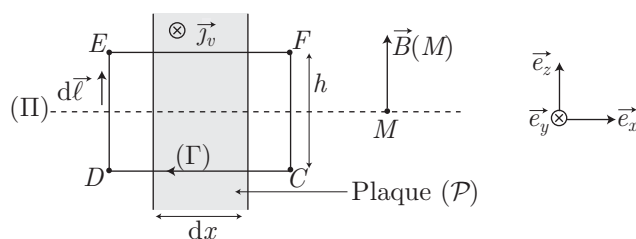
$$A_z(r = 0) = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} r^2$$

Enfin, la définition de :  $\text{rot } \vec{A} = \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} (-y \vec{e}_x + x \vec{e}_y)$  montre que  $\vec{B}$  et  $\vec{A}$  sont orthogonaux, ce qui se traduit par :

$$\vec{A}(M) = A_z \vec{e}_z \Rightarrow \vec{A}(M) = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} r^2 \vec{e}_z \quad (\text{réponse a}).$$

● 82 ————— Concours Commun Polytechnique

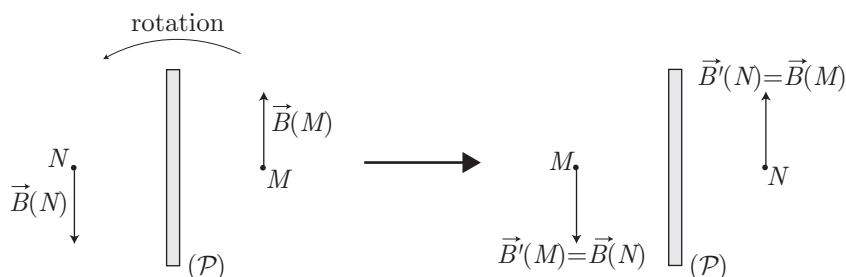
1. Tout plan (II) passant par  $M$ , perpendiculairement à la plaque, est un plan de symétrie pour la distribution de courant, auquel cas  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire à (II) et s'écrit donc :  $\vec{B}(M) = B \vec{e}_z$ .



En outre, toute translation de  $(\mathcal{P})$  dans les directions de  $\vec{e}_y$  ou  $\vec{e}_z$  laisse invariante la distribution de courant, en conséquence de quoi  $B$  ne dépend que du paramètre d'espace  $x$  :

$$\vec{B}(M) = B(x) \vec{e}_z$$

*Remarque* – Soit  $N$  un point symétrique de  $M$  par rapport à  $(\mathcal{P})$  et  $\vec{B}(N)$  le champ magnétique en  $N$ . Si  $(\Pi)$  effectuait une rotation d'un demi-tour, les points  $M$  et  $N$  permuteraient, bien que les nouveaux champs en  $M$  et  $N$  n'aient pas été modifiés (car physiquement, rien de distingue cette nouvelle configuration de la première) :



Ce résultat n'est possible qu'à condition que  $\vec{B}(N) = -\vec{B}(M)$ , c'est-à-dire :

$$\vec{B}(-x) = -B(x)$$

Soit  $(\Gamma) = (CDEF)$  un parcours rectangulaire, de hauteur  $h = DE = FC$ , orienté selon la « règle de la main droite » : les doigts de la main droite tournant dans le sens de  $(\Gamma)$ , le pouce tendu est orienté selon  $\vec{j}_v$ . La circulation de  $\vec{B}$  le long de  $(\Gamma)$  est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_C^D \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{=0} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_E^F \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{=0} + \int_F^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_D^E [B(-x) \vec{e}_z] \cdot [d\ell \vec{e}_z] + \int_F^C [B(x) \vec{e}_z] \cdot [-d\ell \vec{e}_z] \\ &= -B(x) \times \int_D^E d\ell - B(x) \int_F^C d\ell = -B(x) \times 2h \end{aligned}$$

D'autre part, la surface de contours  $(\Gamma)$  est traversée par un courant d'intensité :

$$I_{\text{int}} = j_v \times h dx$$

auquel cas le théorème d'Ampère précise que :

$$C = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow -B(x) \times 2h = j_v \times h dx \Rightarrow B(x) = -\frac{\mu_0 j_v}{2} dx$$

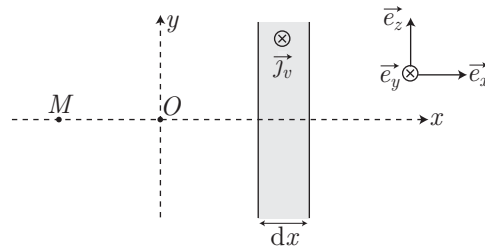
d'où l'on déduit que :

$$\begin{cases} \vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 j_v}{2} dx \vec{e}_z \text{ à droite de } (\mathcal{P}) \\ \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j_v}{2} dx \vec{e}_z \text{ à gauche de } (\mathcal{P}) \end{cases}$$

2. (a) La distribution de courant, décrite par :

$$\vec{j}_v(x > 0) = j_0 e^{-x/a} \vec{e}_y \text{ et } \vec{j}_v(x < 0) = \vec{0}$$

peut être considérée comme une association de plaques infinies, d'épaisseur  $dx$ , parcourues par un courant de densité volumique  $\vec{j}_v(x)$  et situées aux abscisses  $x \geq 0$ .



Une de ces plaques crée, en  $M(x < 0)$ , un champ magnétique élémentaire donné par la question précédente :

$$\delta \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2} j_v dx \vec{e}_z = \frac{\mu_0 j_0}{2} e^{-x/a} dx \vec{e}_z$$

C'est pourquoi le champ total produit en  $M$  vaut :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 j_0}{2} \vec{e}_z \int_0^{\infty} e^{-x/a} dx = \frac{\mu_0 j_0}{2} \vec{e}_z \left[ -a e^{-x/a} \right]_0^{\infty} \\ &\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j_0 a}{2} \vec{e}_z \end{aligned}$$

(b) L'expression locale du théorème d'Ampère précise qu'en tout point  $M$  de l'espace :

$$\vec{\text{rot}} \left[ \vec{B}(M) \right] = \mu_0 \vec{j}_v(M)$$

Notamment, lorsque  $x > 0$  :  $\vec{j}_v(M) = \vec{j}_v(x > 0) = j_0 e^{-x/a} \vec{e}_y$  conduit à :

$$\begin{cases} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 j_0 e^{-x/a} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (86)$$

En outre, le plan  $(Oxy)$  qui passe par  $M$  est un plan de symétrie pour la distribution de courant, auquel cas  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire à ce plan :

$$\vec{B}(M) = B_z \vec{e}_z \text{ car } B_x = 0 \text{ et } B_y = 0$$

et, puisque toute translation dans les directions de  $(Oz)$  et de  $(Oy)$  laisse invariante la distribution de courant, cela signifie que  $B_z$  ne dépend que de  $x$  :

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{dB_z}{dx} \neq 0$$

Le système d'équations (86) se simplifie alors :

$$-\frac{dB_z}{dx} = \mu_0 j_0 e^{-x/a} \Rightarrow B_z = \mu_0 j_0 a e^{-x/a} + K$$

où  $K$  est une constante qui doit rendre compte de la continuité de  $B_z(x)$  en  $x = 0$  (car il n'y a pas de courant surfacique en  $x = 0$ ) :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} B_z = \lim_{x \rightarrow 0^-} B_z \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (\mu_0 j_0 a e^{-x/a} + K) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\mu_0 j_0 a}{2} \right) \quad (87)$$

$$\Rightarrow \mu_0 j_0 a + K = \frac{\mu_0 j_0 a}{2} \Rightarrow K = -\frac{\mu_0 j_0 a}{2} \quad (88)$$

$$\Rightarrow B_z = \mu_0 j_0 a e^{-x/a} - \frac{\mu_0 j_0 a}{2} \quad (89)$$

$$\Rightarrow \vec{B}(x > 0) = \frac{\mu_0 j_0 a}{2} (2e^{-x/a} - 1) \vec{e}_z \quad (90)$$

- (c) Pour les mêmes raisons que précédemment, les composantes  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$  du potentiel vecteur ne dépendent que du paramètre  $x$ , de sorte que la relation :

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{B} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}$$

se simplifie considérablement :

$$\frac{\partial A_z}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial A_y}{\partial x} = B_z$$

c'est-à-dire, encore :

$$\frac{dA_y}{dx} = B_z \quad (91)$$

Quant à l'équation :  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , elle montre que  $\vec{A} \perp \vec{B}$ , c'est-à-dire que  $A_z = 0$ . Enfin, puisque  $\vec{A}$  ne dépend que de  $x$ , la jauge de Coulomb indique que :

$$\text{div } \vec{A} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}_{=0} = 0 \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0$$

C'est pourquoi on pourra choisir le potentiel vecteur  $\vec{A} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$  tel que :

$$A_x = 0 \quad \frac{dA_y}{dx} = B_z \quad A_z = 0$$

Il convient désormais de distinguer deux cas :

- Si  $x < 0$ ,  $B_z = \frac{\mu_0 j_0 a}{2}$  confère à l'équation (91) la forme :

$$\frac{dA_y}{dx} = \frac{\mu_0 j_0 a}{2} \Rightarrow A_y(x \leq 0) = \frac{\mu_0 j_0 a}{2} x + K'$$

où l'on peut choisir arbitrairement nulle la constante  $K'$ , de sorte que :

$$\vec{A}(x \leq 0) = \frac{\mu_0 j_0 a}{2} x \vec{e}_y$$

- Si  $x > 0$ , l'expression (89) de  $B_z$  donne à l'équation (91) la forme :

$$\frac{dA_y}{dx} = \mu_0 j_0 a e^{-x/a} - \frac{\mu_0 j_0 a}{2} \Rightarrow A_y(x \geq 0) = -\mu_0 j_0 a^2 e^{-x/a} - \frac{\mu_0 j_0 a}{2} x + K''$$

où la constante  $K''$  doit être choisie de manière à assurer la continuité de  $A_y$  en  $x = 0$  :

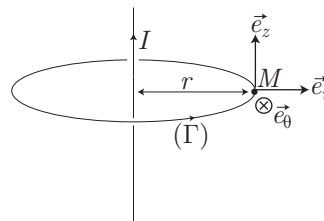
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} A_y &= \lim_{x \rightarrow 0^-} A_y \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ -\mu_0 j_0 a^2 e^{-x/a} - \frac{\mu_0 j_0 a}{2} x + K'' \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\mu_0 j_0 a}{2} x \right) \\ &\Rightarrow -\mu_0 j_0 a^2 + K'' = 0 \Rightarrow K'' = \mu_0 j_0 a^2 \\ &\Rightarrow A_y(x \geq 0) = -\mu_0 j_0 a^2 e^{-x/a} - \frac{\mu_0 j_0 a}{2} x + \mu_0 j_0 a^2 \\ &\Rightarrow \vec{A}(x \geq 0) = \frac{\mu_0 j_0 a}{2} \left[ 2a \left( 1 - e^{-x/a} \right) - x \right] \vec{e}_y \end{aligned}$$

## 83 ————— Concours Centrale-Supélec

1. L'emploi du théorème d'Ampère requiert la recherche préalable des caractéristiques du champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en un point  $M$ .

Le plan contenant le fil électrique et le point  $M$  est un plan de symétrie pour le courant, auquel cas  $\vec{B}(M)$  est perpendiculaire à ce plan :  $\vec{B}(M) = B \vec{e}_\theta$ . En outre, toute rotation du fil électrique sur lui-même, ainsi que toute translation dans la direction  $\vec{e}_z$  laissent  $B = \|\vec{B}(M)\|$  invariant, ce qui signifie que  $B$  ne dépend que de  $r$  :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta$$



Il convient de calculer la circulation de  $\vec{B}(M)$  le long d'un parcours ( $\Gamma$ ) sur lequel  $B(r)$  ne varie pas ; il s'agit d'un cercle de rayon  $r$  ayant pour axe le fil électrique :

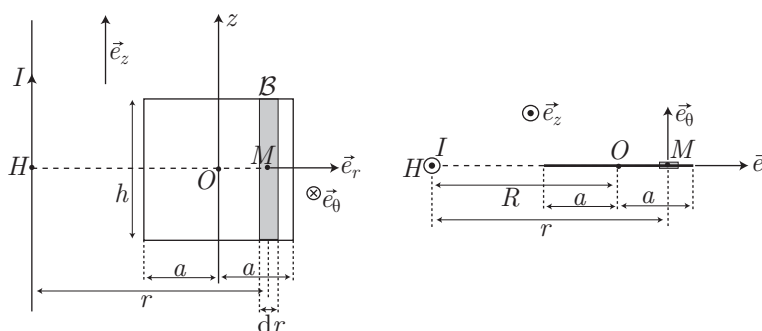
$$C = \iint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{(\Gamma)} B(r) \times dl = B(r) \times \oint_{(\Gamma)} dl = B(r) \times 2\pi r$$

Quant à la surface (orientée par le sens du parcours de ( $\Gamma$ )), délimitée par ( $\Gamma$ ), elle est traversée par le courant  $I_{\text{int}} = I$ . De fait, le théorème d'Ampère se traduit par :

$$C = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

2. Soit ( $\mathcal{B}$ ) une bande centrée sur un point  $M$ , dont le projeté orthogonal sur le fil électrique est un point  $H$  tel que  $HM = r$ .

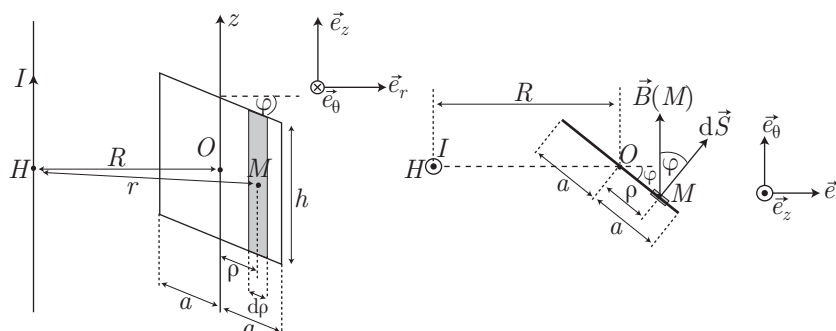


La surface  $dS = h dr$  de la bande  $\mathcal{B}$  est caractérisée par le vecteur  $d\vec{S} = dS \vec{e}_\theta$ , perpendiculaire au cadre ; par suite, le flux  $\Phi_0$  de  $\vec{B}$  à travers le cadre ( $\mathcal{C}$ ) vaut :

$$\Phi_0 = \iint_{(\mathcal{C})} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \int_{R-a}^{R+a} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \right) \cdot (h dr \vec{e}_\theta) \quad (92)$$

$$= \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \int_{R-a}^{R+a} \frac{dr}{r} \Rightarrow \Phi_0 = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln \left( \frac{R+a}{R-a} \right) \quad (93)$$

3. Considérons, maintenant, que le cadre ( $\mathcal{C}$ ) est incliné d'un angle  $\varphi \neq 0$  par rapport au plan contenant le fil et l'axe ( $Oz$ ) :





Plaçons-nous dans la situation où les points  $H$ ,  $O$  et  $M$  seraient alignés si  $\varphi$  était nul. La position du point  $M$  est décrite par la distance  $\rho$  qui le sépare de  $O$ , de sorte que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{HM} &= \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow HM^2 = r^2 \\ &= HO^2 + 2\overrightarrow{HO} \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2 \\ &= R^2 + 2R\rho \cos \varphi + \rho^2 \\ &= R^2 \sin^2 \varphi + R^2 \cos^2 \varphi + 2R\rho \cos \varphi + \rho^2\end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$r = \sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + (R \cos \varphi + \rho)^2}$$

En outre, les orientations de  $\vec{B}(M)$  et de  $d\vec{S}$  sont telles que :

$$\vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = B(r) dS \cos \varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times h d\rho \times \cos \varphi$$

Par suite, le flux de  $\vec{B}$  à travers le cadre vaut :

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi) &= \iint \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \int_{-a}^a \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h \cos \varphi d\rho \\ &= \frac{\mu_0 I h \cos \varphi}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{d\rho}{\sqrt{R^2 \sin^2 \varphi + (R \cos \varphi + \rho)^2}} = \frac{\mu_0 I h \cos \varphi}{2\pi} \times J\end{aligned}$$

où l'intégrale  $J$  se calcule en effectuant le changement de variable :

$$\begin{aligned}R \cos \varphi + \rho &= R \sin \varphi \times \sinh u \Rightarrow d\rho = R \sin \varphi \times \cosh u du \\ \Rightarrow R^2 \sin^2 \varphi + (R \cos \varphi + \rho)^2 &= R^2 \sin^2 \varphi (\cosh u)^2\end{aligned}$$

En outre, lorsque  $\rho$  prend les valeurs respectives  $-a$  et  $a$ , la variable  $u$  prend les valeurs :

$$u_1 = \operatorname{argsh} \left( \frac{R \cos \varphi - a}{R \sin \varphi} \right) \text{ et } u_2 = \operatorname{argsh} \left( \frac{R \cos \varphi + a}{R \sin \varphi} \right)$$

de sorte que :

$$J = \int_{u_1}^{u_2} \frac{R \sin \varphi \times \cosh u du}{R \sin \varphi \times \cosh u} = \int_{u_1}^{u_2} du = u_2 - u_1$$

Or, sachant que  $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ , cette intégrale devient :

$$\begin{aligned}J &= \ln \left[ \frac{R \cos \varphi + a}{R \sin \varphi} + \sqrt{1 + \left( \frac{R \cos \varphi + a}{R \sin \varphi} \right)^2} \right] \\ &\quad - \ln \left[ \frac{R \cos \varphi - a}{R \sin \varphi} + \sqrt{1 + \left( \frac{R \cos \varphi - a}{R \sin \varphi} \right)^2} \right]\end{aligned}$$

d'où il découle finalement que :

$$\Phi(\varphi) = \frac{\mu_0 I h \cos \varphi}{2\pi} \times \ln \left( \frac{R \cos \varphi + a + \sqrt{R^2 + 2Ra \cos \varphi + a^2}}{R \cos \varphi - a + \sqrt{R^2 - 2Ra \cos \varphi + a^2}} \right)$$

On s'assure aisément de la compatibilité de ce résultat avec l'expression (93) de  $\Phi_0$  car :

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow 0} [\Phi(\varphi)] &= \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \times \ln \left[ \frac{2 \times (R + a)}{2 \times (R - a)} \right] \\ &\Rightarrow \lim_{\varphi \rightarrow 0} [\Phi(\varphi)] = \Phi_0 \end{aligned}$$

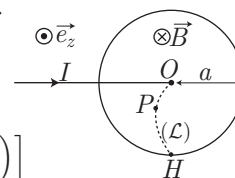
### ● 84 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Soit  $(\mathcal{L})$  une ligne de courant située entre les points  $O$  et  $H$ , suivie par un courant élémentaire d'intensité  $\delta I$ .

Un point  $P$  de  $(\mathcal{L})$  est soumis à une force de Laplace :

$\delta^2 \vec{F} = \delta I d\vec{OP} \wedge \vec{B}$ , à laquelle est associé un moment, par rapport à  $O$  :

$$\begin{aligned} \delta^2 \vec{M}_O &= \vec{OP} \wedge \delta^2 \vec{F} = \delta I \vec{OP} \wedge [d\vec{OP} \wedge \vec{B}] \\ &= \delta I \left[ d\vec{OP} \times (\vec{OP} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{OP} \cdot d\vec{OP}) \right] \end{aligned}$$



où  $\vec{OP} \perp \vec{B} \Rightarrow \vec{OP} \cdot \vec{B} = 0$  et  $\vec{OP} \cdot d\vec{OP} = \frac{1}{2} d(OP)^2$  conduisent à :

$$\delta^2 \vec{M}_O = -\delta I \vec{B} \times \frac{1}{2} d(OP)^2$$

Aussi,  $(\mathcal{L})$  est soumis au moment :

$$\delta \vec{M}_O = -\frac{\delta I \vec{B}}{2} \int_0^a d(OP)^2 = -\frac{\delta I a^2 \vec{B}}{2}$$

de sorte que le moment des forces de Laplace qui s'exercent sur l'ensemble des lignes de courant, liant  $O$  à  $H$ , vaut :

$$\vec{M}_O = -\frac{I a^2}{2} \vec{B} = \frac{I a^2 B}{2} \vec{e}_z$$

2. Soit  $\Delta = (O, \vec{e}_z)$  l'axe de la roue de Barlow. Les moments des forces de Laplace par rapport à cet axe valent respectivement :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \vec{M}_O \cdot \vec{e}_z \text{ et } \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \vec{M}_O(\vec{f}) \cdot \vec{e}_z = -k\omega$$

C'est pourquoi le mouvement de rotation de la roue est décrit par l'équation :

$$\begin{aligned} J \frac{d\omega}{dt} &= \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{f}) = \frac{I a^2 B}{2} - k\omega \\ \Rightarrow J \frac{d\omega}{dt} + k\omega &= \frac{I a^2 B}{2} \end{aligned}$$

Cette équation différentielle peut être résolue en cherchant :

- la solution  $\omega_s$  de l'équation différentielle sans second membre :

$$J \frac{d\omega_s}{dt} + k \omega_s = 0$$

dont l'équation caractéristique :  $JX + k = 0 \Rightarrow X = -\frac{k}{J}$  conduit à :

$$\omega_s = A e^{Xt} = A e^{-kt/J}$$

- La solution  $\omega_h$  homogène au second membre :

$$J \frac{d\omega_h}{dt} + k \omega_h = \frac{I a^2 B}{2}$$

c'est-à-dire constante :

$$\frac{d\omega_h}{dt} = 0 \Rightarrow k \omega_h = \frac{I a^2 B}{2} \Rightarrow \omega_h = \frac{I a^2 B}{2k}$$

La solution générale de l'équation différentielle :

$$\omega = \omega_h + \omega_s = \frac{I a^2 B}{2k} + A e^{-kt/J}$$

présente alors une constante  $A$ , adaptée à la condition initiale :

$$\begin{aligned} \omega(t=0) = 0 &\Rightarrow \frac{I a^2 B}{2k} + A e^{-kt/J} = 0 \Rightarrow A = -\frac{I a^2 B}{2k} \\ &\Rightarrow \omega(t) = \frac{I a^2 B}{2k} \times \left(1 - e^{-kt/J}\right) \end{aligned}$$

## 85 ————— Concours Mines Ponts

1. Appliquons le théorème d'Ampère sur le cercle de rayon  $r$ , centré sur l'axe  $Oz$ , dans un plan de cote  $z$  :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \mathcal{I}$$

$\mathcal{I}$  représente les courants enlacés par le contour  $C$ .

Sachant que  $d\vec{l} = dl \vec{e}_\theta$  nous avons  $\vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta dl$ , la symétrie de révolution autour de  $Oz$  implique :  $B_\theta(r, \theta, z) = B_\theta(r, z)$ .

Nous en déduisons alors :  $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\theta(r, z) \oint_C d\theta = 2\pi B_\theta(r, z)$ .

Ce contour n'enlace aucun courant donc :  $2\pi B_\theta(r, z) = 0 \Rightarrow B_\theta(r, z) = 0$ .

On pouvait aussi remarquer que tout plan contenant l'axe  $Oz$  est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant,  $\vec{B}$  ne pouvait donc avoir de composante que sur  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_z$ .

2. Le champ magnétique est à flux conservatif, utilisons cette propriété en calculant son flux à travers le cylindre de hauteur  $dz$ , de centre  $z$ , de section de rayon  $r$ .

Ce cylindre constituant une surface fermée nous avons alors :

$$\phi(\vec{B}, S_{\text{Cylindre}}) = 0$$

Appelons  $S_1$ ,  $S_2$  et  $S_{\text{lat}}$  respectivement les surfaces basses, hautes et latérales du cylindre.

Remarquons que si l'on choisit  $r$  assez faible, on peut écrire en tout point :  $B_z(r, z) \simeq B_z(0, z)$ .

En conséquence de quoi :

$$\begin{aligned}\phi(\vec{B}, S_1) &= \iint_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 \\ &= \iint_{S_1} \left( B_z(0, z - \frac{dz}{2}) \vec{e}_z + B_r(r, z) \vec{e}_r \right) (-dS_1) \vec{e}_z \\ &= - \iint_{S_1} B_z \left( 0, z - \frac{dz}{2} \right) dS_1 = -B_z \left( 0, z - \frac{dz}{2} \right) \pi r^2\end{aligned}$$

$$\text{De même : } \phi(\vec{B}, S_2) = B_z \left( 0, z + \frac{dz}{2} \right) \pi r^2$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\phi(\vec{B}, S_{\text{lat}}) &= \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{B} \cdot d\vec{S}_{\text{lat}} \\ &= \iint_{S_{\text{lat}}} (B_z(r, z) \vec{e}_z + B_r(r, z) \vec{e}_r) (dS_{\text{lat}} \vec{e}_r) \\ &= \iint_{S_{\text{lat}}} (B_r(r, z) dS_{\text{lat}}) \\ &\simeq B_r(r, z) 2\pi r dz\end{aligned}$$

Les évolutions de  $z$  restant faibles sur  $S_{\text{lat}}$  on peut considérer que la fonction  $B_r(r, z)$  est quasi constante. On en déduit donc :

$$\underbrace{\pi r^2 \left( B_z \left( 0, z + \frac{dz}{2} \right) - B_z \left( 0, z - \frac{dz}{2} \right) \right)}_{= \frac{d}{dz} (B_z(0, z)) dz \pi r^2} + 2\pi r dz B_r(r, z) = 0.$$

D'où il s'en suit :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{d}{dz} (B_z(0, z))$$

3. L'expression de la force de Laplace est donnée par :

$$\vec{F} = \oint_C (i d\vec{l} \wedge \vec{B})$$

$C$  étant la spire de rayon  $a$  et  $\vec{B}$  le champ magnétique créée par la grande spire.

Or :

$$\begin{aligned} \oint_C (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) &= \oint_C ia d\theta \vec{e}_\theta \wedge (B_z \vec{e}_z + B_r \vec{e}_r) \\ &= \underbrace{iaB_z \oint_C d\theta \vec{e}_r - iaB_r \vec{e}_z \oint_C d\theta}_{=\vec{0}} \\ &= -iaB_r 2\pi \vec{e}_z \end{aligned}$$

On intègre sur la variable  $\theta$ ,  $r$  étant bloqué à la valeur  $a$  et  $z$  à la valeur  $z_0$ , nous avons donc :

$\vec{F} = -2\pi aiB_r(a, z_0) \vec{e}_z$  et d'après nos résultats précédents :

$$B_r(a, z_0) = -\frac{a}{2} \frac{d}{dz} (B_z(0, z))_{z=z_0}$$

Nous avons déjà démontré que le champ magnétique créée par une spire de rayon  $R$ , à la cote  $z_0$  de son axe de révolution est donné par :

$$B_z(0, z_0) = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + z_0^2)^{3/2}}$$

Par conséquent :  $\frac{d}{dz} (B_z(0, z_0)) = -\frac{3}{4} \mu_0 IR^2 \frac{2z_0^2}{(R^2 + z_0^2)^{5/2}}$

Ce qui implique :  $\vec{F} = -\frac{3}{4} \mu_0 \pi a^2 i I z_0 \frac{R^2}{(R^2 + z_0^2)^{5/2}} \vec{e}_z$ .

Lorsque les courants sont dans le même sens (même signe) cette force est attractive, elle est répulsive dans le cas contraire. Une spire parcourue par un courant constitue un dipôle magnétique, elle est donc équivalente à un aimant. On retrouve les phénomènes d'attraction et de répulsion des aimants.

## ● 86 ————— Concours Commun Polytechnique

La résultante des efforts de Laplace est donnée par :  $\vec{F} = \oint_{D_1} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ .  $\vec{B}$  étant le champ magnétique créée par  $D_2$ .

$\vec{B}$  se détermine à partir du théorème d'Ampère : il s'écrit en tout point du plan contenant le cadre :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{e}_y$ .

Or le calcul de  $\oint_{D_1} (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$ , s'écrit comme la somme des quatre termes :

$$\int_{QP} (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) + \int_{PN} (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) + \int_{NM} (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) + \int_{MQ} (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B})$$

Pour la partie  $QP$ , on a  $d\vec{\ell} = dx \vec{e}_x$ , donc :

$$\begin{aligned} \int_{QP} (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) &= \int_{QP} \left( i dx \vec{e}_x \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{e}_y \right) \\ &= \frac{\mu_0 i I}{2\pi} \int_{x_0-a}^{x_0+a} \left( \frac{dx}{x} \vec{e}_z \right) = \frac{\mu_0 i I}{2\pi} \ln \left( \frac{x_0 + a}{x_0 - a} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

De la même manière sur  $NM$  :

$$\begin{aligned} \int_{NM} (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) &= \int_{NM} \left( i dx \vec{e}_x \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \vec{e}_y \right) \\ &= \frac{\mu_0 i I}{2\pi} \int_{x_0+a}^{x_0-a} \left( \frac{dx}{x} \vec{e}_z \right) = -\frac{\mu_0 i I}{2\pi} \ln \left( \frac{x_0+a}{x_0-a} \right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Pour la partie  $PN$ ,  $d\vec{\ell} = dz \vec{e}_z$  et  $x = x_0 + a$  conduisent à :

$$\begin{aligned} \int_{PN} (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) &= \frac{\mu_0 i I}{2\pi (x_0+a)} \int_{PN} dz \vec{e}_x \\ &= \frac{\mu_0 i I}{2\pi (x_0+a)} \int_b^{-b} -dz \vec{e}_x = \frac{\mu_0 i I b}{\pi (x_0+a)} \vec{e}_x \end{aligned}$$

De même pour la partie  $MQ$ ,  $x = x_0 - a$  a pour conséquence :

$$\begin{aligned} \int_{MQ} (i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}) &= \frac{\mu_0 i I}{2\pi (x_0-a)} \int_{PN} dz \vec{e}_x \\ &= \frac{\mu_0 i I}{2\pi (x_0-a)} \int_{-b}^b -dz \vec{e}_x = -\frac{\mu_0 i I b}{\pi (x_0-a)} \vec{e}_x \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit que } \vec{F} = \frac{\mu_0 i I b}{\pi} \left( \frac{1}{x_0+a} - \frac{1}{x_0-a} \right) \vec{e}_x = -\frac{\mu_0 I b a}{\pi \left( x_0^2 - \frac{a^2}{4} \right)} \vec{e}_x$$

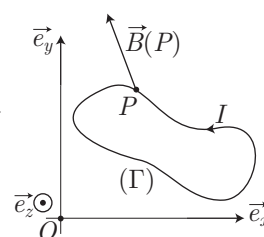
## ● 87 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. (a) Soit  $P$  un point courant de  $(\Gamma)$ , à partir duquel est définie la résultante de forces de Laplace :

$$\vec{\mathcal{R}} = \oint_{(\Gamma)} I d\vec{OP} \wedge \vec{B}(P) = I \oint_{(\Gamma)} d\vec{OP} \wedge \vec{B}(P)$$

Les vecteurs de base  $\{\vec{e}_\alpha\}$  étant orthogonaux, il s'ensuit que :

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$$



Aussi, le vecteur  $\vec{\mathcal{R}}$  vérifie-t-il :

$$\begin{aligned} \vec{e}_\alpha \cdot \vec{\mathcal{R}} &= \vec{e}_\alpha \cdot \sum_{\beta} \mathcal{R}_\beta \vec{e}_\beta = \sum_{\beta} \mathcal{R}_\beta \delta_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_\alpha \\ \Rightarrow \mathcal{R}_\alpha &= I \vec{e}_\alpha \cdot \oint_{(\Gamma)} d\vec{OP} \wedge \vec{B}(P) = I \times \oint_{(\Gamma)} \vec{e}_\alpha \cdot [d\vec{OP} \wedge \vec{B}(P)] \end{aligned}$$

Or, l'invariance d'un produit mixte par permutation circulaire de ses vecteurs

conduit à :

$$\begin{aligned}\vec{e}_\alpha \cdot \left[ d\vec{OP} \wedge \vec{B}(P) \right] &= d\vec{OP} \cdot \left[ \vec{B}(P) \wedge \vec{e}_\alpha \right] \\ \Rightarrow \mathcal{R}_\alpha &= I \times \oint_{(\Gamma)} \left[ \vec{B}(P) \wedge \vec{e}_\alpha \right] \cdot d\vec{OP}\end{aligned}$$

Soit  $(S)$  la surface de contour  $(\Gamma)$  et soit  $\vec{U}$  un vecteur quelconque, le théorème de Stokes indique que :

$$\begin{aligned}\oint_{(\Gamma)} \vec{U} \cdot d\vec{OP} &= \iint_{(S)} \text{rot}(\vec{U}) \cdot d\vec{S} \\ \Rightarrow \mathcal{R}_\alpha &= I \times \iint_{(S)} \text{rot} \left[ \vec{B}(M) \wedge \vec{e}_\alpha \right] \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

(b) La relation rappelée par l'énoncé conduit à :

$$\text{rot}(\vec{B} \wedge \vec{e}_\alpha) = \vec{B} \times \text{div}(\vec{e}_\alpha) - \vec{e}_\alpha \times \text{div} \vec{B} + (\vec{e}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{e}_\alpha$$

où :

- $\text{div}(\vec{e}_\alpha) = 0$  car les vecteurs  $\{\vec{e}_\alpha\}$  de la base cartésienne ne dépendent pas du point de mesure ;
- $\text{div} \vec{B} = 0$  est à l'origine de la définition du potentiel vecteur :  $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$  ;
- l'opérateur  $(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{\nabla})$  est défini par :

$$(\vec{e}_\alpha \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \left( \vec{e}_\alpha \cdot \sum_{\beta} \vec{e}_\beta \frac{\partial}{\partial x_\beta} \right) \vec{B} = \sum_{\beta} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_\alpha}$$

- l'uniformité des vecteurs de base  $\left( \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x_\beta} = \vec{0} \right)$  a pour conséquence :

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{e}_\alpha = \sum_{\beta} B_\beta \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial x_\beta} = \vec{0}$$

Par conséquent :  $\text{rot}(\vec{B} \wedge \vec{e}_\alpha) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_\alpha} = \sum_{\beta} \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} \vec{e}_\beta$ . En outre, le parcours

$(\Gamma)$  étant contenu dans un plan perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ , il s'ensuit que tout élément  $d\vec{S}$  de  $(S)$  est colinéaire à  $\vec{e}_z$ , de sorte que :

$$\begin{aligned}\text{rot}(\vec{B} \wedge \vec{e}_\alpha) \cdot d\vec{S} &= \left( \sum_{\beta} \frac{\partial B_\beta}{\partial x_\alpha} \vec{e}_\beta \right) \cdot dS \vec{e}_z = \frac{\partial B_z}{\partial x_\alpha} dS \\ \Rightarrow \mathcal{R}_\alpha &= I \times \iint_{(S)} \frac{\partial B_z}{\partial x_\alpha} dS\end{aligned}$$

finalement, la définition de l'opérateur gradient conduit à :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(B_z) = \sum_{\alpha} \frac{\partial B_z}{\partial x_{\alpha}} \vec{e}_{\alpha}$$

de telle manière que :

$$\vec{\mathcal{R}} = \sum_{\alpha} \mathcal{R}_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} = I \times \iint_{(S)} \sum_{\alpha} \frac{\partial B_z}{\partial x_{\alpha}} \vec{e}_{\alpha} dS$$

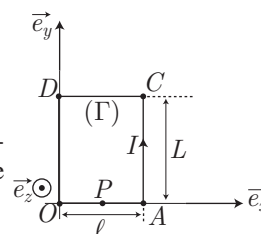
soit encore :

$$\vec{\mathcal{R}} = I \times \iint_{(S)} \overrightarrow{\text{grad}}(B_z) \times dS \quad (94)$$

2. (a) La résultante :

$$\vec{\mathcal{R}} = I \oint_{(\Gamma)} d\vec{OP} \wedge \vec{B}$$

doit être calculée en distinguant, dans  $(\Gamma)$ , les segments horizontaux des segments verticaux, de sorte que :



$$\vec{\mathcal{R}} = I \left[ \int_O^A d\vec{OP} \wedge \vec{B} + \int_A^C d\vec{OP} \wedge \vec{B} + \int_C^D d\vec{OP} \wedge \vec{B} + \int_D^O d\vec{OP} \wedge \vec{B} \right]$$

• Lorsque  $P$  appartient aux segments horizontaux  $[O, A]$  et  $[D, C]$  :

$$\begin{aligned} d\vec{OP} &= dx \vec{e}_x \Rightarrow d\vec{OP} \wedge \vec{B} = dx \vec{e}_x \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) \\ &= B_y dx \vec{e}_z - B_z dx \vec{e}_y \\ &= -\frac{B_0}{a} y dx \vec{e}_z - \frac{B_0}{a} x dx \vec{e}_y \end{aligned}$$

Pour  $P \in [O, A]$ ,  $y$  est nul, en conséquence de quoi :

$$d\vec{OP} \wedge \vec{B} = -\frac{B_0}{a} x dx \vec{e}_y \Rightarrow \int_O^A d\vec{OP} \wedge \vec{B} = -\frac{B_0}{a} \int_0^{\ell} x dx \vec{e}_y = -\frac{B_0 \ell^2}{2a} \vec{e}_y$$

En revanche, pour  $OP \in [C, D]$ ,  $y$  prend la valeur  $L$ , d'où il s'ensuit que :

$$d\vec{OP} \wedge \vec{B} = -\frac{B_0 L}{a} dx \vec{e}_z - \frac{B_0}{a} x dx \vec{e}_y$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \int_C^D d\vec{OP} \wedge \vec{B} &= -\frac{B_0 L}{a} \vec{e}_z \int_0^{\ell} dx - \frac{B_0}{a} \vec{e}_y \int_{\ell}^0 x dx \\ &= \frac{B_0 L \ell}{a} \vec{e}_z + \frac{B_0 \ell^2}{2a} \vec{e}_y \end{aligned}$$



- Lorsque  $P$  appartient aux segments verticaux  $[A, C]$  et  $[D, O]$  :

$$\begin{aligned} d\vec{OP} = dy \vec{e}_y &\Rightarrow d\vec{OP} \wedge \vec{B} = dy \vec{e}_y \wedge (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) \\ &= -B_x dy \vec{e}_z + B_z dy \vec{e}_x \\ &= -\frac{B_0}{a} x dy \vec{e}_z + \frac{B_0}{a} x dy \vec{e}_x \end{aligned}$$

Deux cas se présentent à nouveau : si  $P \in [A, C]$ ,  $x = \ell$  entraîne que :

$$\begin{aligned} \int_A^C d\vec{OP} \wedge \vec{B} &= \frac{B_0 \ell}{a} \left[ -\vec{e}_z \int_0^L dy + \vec{e}_x \int_0^L dy \right] \\ &= -\frac{B_0 \ell L}{a} \vec{e}_z + \frac{B_0 \ell L}{a} \vec{e}_x \end{aligned}$$

En revanche, lorsque  $P \in [D, O]$ , la valeur nulle de  $x$  a pour conséquence :

$$d\vec{OP} \wedge \vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \int_D^O d\vec{OP} \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

De ces calculs, il ressort finalement que :

$$\begin{aligned} \oint_{(\Gamma)} d\vec{OP} \wedge \vec{B} &= \left( -\frac{B_0 \ell^2}{2a} \vec{e}_y \right) + \left( \frac{B_0 L \ell}{a} \vec{e}_z + \frac{B_0 \ell^2}{2a} \vec{e}_y \right) \\ &\quad + \left( \frac{B_0 \ell L}{a} \vec{e}_x - \frac{B_0 \ell L}{a} \vec{e}_z \right) = \frac{B_0 \ell L}{a} \vec{e}_x \\ \Rightarrow \vec{\mathcal{R}} &= I \times \oint_{(\Gamma)} d\vec{OP} \wedge \vec{B} = \frac{IB_0 \ell L}{a} \vec{e}_x \end{aligned}$$

- (b) La composante  $B_z = \frac{B_0}{a} x$  a pour gradient :

$$\vec{\text{grad}} B_z = \frac{\partial B_z}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial B_z}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial B_z}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{B_0}{a} \vec{e}_x$$

Par suite, la loi (94) fournit directement :

$$\vec{\mathcal{R}} = I \times \iint_{(S)} \vec{\text{grad}} (B_z) dS = I \times \iint_{(S)} \frac{B_0 \vec{e}_x}{a} dS = I \times \frac{B_0 \vec{e}_x}{a} \iint_{(S)} dS$$

où  $\iint_{(S)} dS = \ell L$  désigne la surface du rectangle  $(OACD)$ . Finalement, on obtient :

$$\vec{\mathcal{R}} = \frac{IB_0 \ell L}{a} \vec{e}_x$$

## ● 88 ————— Concours Centrale-supélec

1. Un point  $M$  appartient à une ligne de champ  $\mathcal{L}$  si un déplacement élémentaire  $d\vec{OM}$  de  $M$  le long de  $\mathcal{L}$  est tangent au champ magnétique  $\vec{B}(M)$  en  $M$ , ce qui

signifie également que  $d\vec{OM}$  et  $\vec{B}(M)$  sont colinéaires. Or, en coordonnées sphériques :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r \Rightarrow d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + r \sin \varphi d\psi \vec{e}_\psi$$

Ce faisant, dans la base  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\psi\}$  :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) \wedge d\vec{OM} &= -\frac{\mu_0 m_T}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dr \\ r d\varphi \\ r \sin \varphi d\psi \end{pmatrix} \\ &= -\frac{\mu_0 m_T}{4\pi r^3} \begin{pmatrix} r \sin^2 \varphi d\psi \\ -2r \sin \varphi \cos \varphi d\psi \\ 2r \cos \varphi d\varphi - \sin \varphi dr \end{pmatrix} = \vec{0} \end{aligned}$$

La colinéarité de  $d\vec{OM}$  et de  $\vec{B}(M)$  se traduit alors par les équations :

$$d\psi = 0 \Rightarrow \psi = \text{cte} \quad (95)$$

et :

$$2r \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi dr \Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sin \varphi} = 2 \frac{d(\sin \varphi)}{\sin \varphi} \quad (96)$$

$$\Rightarrow d(\ln r) = 2 \times d[\ln(\sin \varphi)] \quad (97)$$

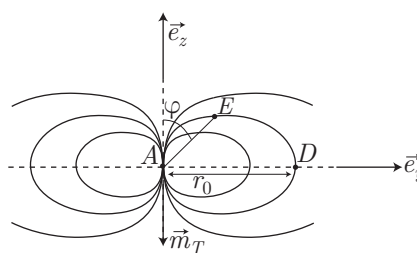
$$\Rightarrow d(\ln r) = d[\ln(\sin^2 \varphi)] \quad (98)$$

L'équation (95) montre qu'une ligne de champ magnétique est intégralement comprise dans un plan méridien ( $\psi = \text{cte}$ ), tandis que l'équation (98) révèle l'existence d'une constante  $r_0$  telle que :

$$r = r_0 \times \sin^2 \varphi$$

2. Dans un plan méridien (par exemple le plan  $(A, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  pour  $\psi = \frac{\pi}{2}$ ), l'équation précédente montre qu'une ligne de champ passe par les points :

$$D \left( \varphi = \frac{\pi}{2}, r = r_0 \right) \quad E \left( \varphi = \frac{\pi}{4}, r = \frac{r_0}{2} \right) \quad A \left( \varphi = 0, r = 0 \right)$$



3. En tout point  $M(r, \varphi, \psi)$  de l'espace, le champ magnétique a pour intensité :

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_\varphi^2 + B_\psi^2} = \frac{\mu_0 m_T}{4\pi r^3} \sqrt{4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}$$

Notamment, une ligne de champ étant caractérisée par l'équation :  $r = r_0 \sin^2 \varphi$ , il s'ensuit que :

$$B(\varphi) = \frac{\mu_0 m_T}{4\pi r_0^3} \times \frac{\sqrt{4 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}}{\sin^6 \varphi}$$

où :  $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$  conduit à :

$$B(\varphi) = \frac{\mu_0 m_T}{4\pi r_0^3} \times \frac{\sqrt{4 - 3 \sin^2 \varphi}}{\sin^6 \varphi}$$

Par définition,  $B_0$  désigne  $B(\varphi)$  dans le plan équatorial, c'est-à-dire :

$$B_0 = B\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0 m_T}{4\pi r_0^3} \times \frac{\sqrt{4-3}}{1} = \frac{\mu_0 m_T}{4\pi r_0^3}$$

Aussi,  $B(\varphi)$  vaut-il :

$$B(\varphi) = B_0 \times f(\varphi) \text{ avec } \begin{cases} B_0 = \frac{\mu_0 m_T}{4\pi r_0^3} \\ f(\varphi) = \frac{\sqrt{4 - 3 \sin^2 \varphi}}{\sin^6 \varphi} \end{cases}$$

4. La fonction  $f(\varphi)$  est minimale lorsque :

- son numérateur  $\sqrt{4 - 3 \sin^2 \varphi}$  est *minimum*, c'est-à-dire lorsque  $\sin^2 \varphi = 1$ , soit encore :  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  ;
- son dénominateur  $\sin^6 \varphi$  est *maximum*, pour les mêmes valeurs de  $\varphi$  que précédemment.

Il s'ensuit que :

$$B_{\min} = B_0 \times f\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow B_{\min} = B_0 \text{ en } \varphi = \pm \frac{\pi}{2}$$

5. En remarquant que :  $\sin^2(\pi - \varphi) = \sin^2 \varphi$ , on conclut que :

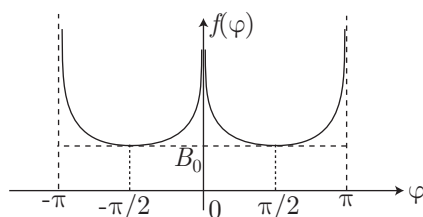
$$f(\pi - \varphi) = f(\varphi)$$

ce qui signifie également que la fonction  $f(\varphi)$  est symétrique par rapport à l'axe vertical correspondant à  $\varphi = \pi$ .

6. La fonction  $f(\varphi)$  a pour valeurs limites :

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} [f(\varphi)] = \lim_{\varphi \rightarrow \pi} [f(\varphi)] = \infty$$

En outre, l'égalité :  $f(\varphi + \pi) = f(\varphi)$  montre la périodicité (sur  $\pi$ ) de  $f(\varphi)$ , dont la valeur *minimum*  $B_{\min} = B_0$  est obtenue pour  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  :



7. (a) La composante horizontale du champ géomagnétique peut s'écrire :

$$\vec{B}_h = B_\varphi \vec{e}_\varphi$$

Aussi, en un point  $A$  de la surface de la Terre, l'aiguille aimantée présente-t-elle l'énergie potentielle magnétique :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{B}_h \cdot \vec{m} = -B_h m \cos \alpha$$

auquel cas les positions d'équilibre sont repérées par les angles  $\alpha$  qui rendent  $\mathcal{E}_p$  *extremum* :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\alpha} = 0 \Rightarrow B_h m \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \pi.$$

Or, la position d'équilibre stable est celle qui rend *minimum*  $\mathcal{E}_p$ , c'est-à-dire qui

assure  $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\alpha^2} = B_h m \cos \alpha > 0$ , avec :

$$\left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} = B_h m > 0 \text{ et } \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\pi} = -B_h m < 0$$

Il apparaît donc que c'est en  $\alpha = 0$  que l'aiguille aimantée occupe sa position d'équilibre stable.

- (b) Soit  $\vec{\mathcal{M}}_A$  le moment en  $A$  de la force magnétique :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \vec{m} \wedge \vec{B}_h = -m B_h \sin \alpha \vec{e}_r$$

et  $\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{e}_r$  sa projection sur l'axe de rotation ( $A, \vec{e}_r$ ) :

$$\mathcal{M}_\Delta = -m B_h \sin \alpha$$

Par suite, l'équation différentielle qui décrit le mouvement de l'aiguille s'écrit :

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \mathcal{M}_\Delta \Rightarrow \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{m B_h}{J} \sin \alpha = 0$$

- (c) Des petites oscillations ( $\sin \alpha \simeq \alpha$ ) peuvent alors prendre naissance, respectant l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{m B_h}{J} \alpha = 0$$

dont la solution est harmonique, de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{m B_h}{J}}$  et donc de période :

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m B_h}}$$

- (d) Lorsque  $\vec{B}_h$  et  $\vec{B}_e$  présentent le même sens, l'aiguille est soumise au champ magnétique résultant :

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_h + \vec{B}_e = (B_h + B_e) \vec{e}_\varphi \Rightarrow B_1 = \|\vec{B}_1\| = B_h + B_e$$

et la période des oscillations vaut alors :

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m B_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m (B_h + B_e)}} \quad (99)$$

En revanche, lorsque  $\vec{B}_e$  et  $\vec{B}_h$  sont de sens opposé, c'est le champ :

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_h + \vec{B}_e = (B_h - B_e) \vec{e}_\varphi \Rightarrow B_2 = \|\vec{B}_2\| = B_e - B_h > 0$$

qui est à l'origine des oscillations, de période :

$$\tau_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m B_2}} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m (B_e - B_h)}} \quad (100)$$

En notant  $\alpha$  le rapport  $\alpha = \frac{\tau_1}{\tau_2}$ , les relations (99) et (100) conduisent à :

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{\tau_1}{\tau_2} = \sqrt{\frac{B_e - B_h}{B_e + B_h}} &\Rightarrow \alpha^2 B_e + \alpha^2 B_h = B_e - B_h \\ &\Rightarrow B_h (1 + \alpha^2) = B_e (1 - \alpha^2) \\ &\Rightarrow B_h = B_e \times \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2} \text{ avec } \alpha = \frac{\tau_1}{\tau_2} \end{aligned}$$

- (e) Compte tenu de cette relation, avec :  $B_e = 100 \mu\text{T}$  et  $\alpha = \frac{\tau_1}{\tau_2} = 0,78$ , on trouve :

$$B_h = 100 \cdot 10^{-6} \times \frac{1 - (0,78)^2}{1 + (0,78)^2} \Rightarrow B_h = 2,43 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

## ● 89 ————— Concours Centrale-Supélec

- Le flux appliqué par le solénoïde à la bobine varie au cours du temps. Par induction il va donc apparaître un courant dans la bobine. Les effets de l'induction s'opposant aux causes qui leur donnent naissance, les efforts du solénoïde sur la bobine vont agir de façon à s'opposer à la rotation de cette dernière.
- Définissons  $\theta$ , angle caractéristique de la rotation et  $\vec{n}$  vecteur normal à la bobine. Pour une origine convenablement choisie :  $\theta = \omega t$   
Notons  $i$  le courant induit dans la bobine.

Le flux du champ magnétique du solénoïde à travers la bobine s'écrit :

$$\phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = N \iint_S (\mu_0 n I \vec{e}_z) \cdot dS \vec{n} = N \mu_0 n I S \cos(\omega t)$$

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \mu_0 n N I S \omega \sin(\omega t) = Ri \Rightarrow i = \frac{\mu_0 n N I S \omega \sin(\omega t)}{R}$$

3. La bobine s'assimile à un dipôle magnétique de moment  $\vec{M} = iS\vec{n}$ , placé dans un champ magnétique homogène.

Les actions de Laplace se résument donc à un couple de moment :

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= \vec{M} \wedge \vec{B} = iS\vec{n} \wedge B\vec{e}_z = -BiS \sin(\omega t) \vec{e}_x \\ &= -(S \sin(\omega t) \mu_0 n I)^2 N \frac{\omega}{R} \vec{e}_x \end{aligned}$$

Le signe négatif caractérise bien le fait que ce couple s'oppose à la rotation de la bobine

## ● 90 ————— Concours Mines Ponts

1. L'énoncé donne  $\vec{B} = B(t) \vec{e}_z$ . Le champ électrique est orthoradial et à symétrie cylindrique :  $\vec{E} = E(r) \vec{e}_\theta$ . Appliquons la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss à un contour circulaire d'axe  $Oz$ , de rayon  $r$ , dans un plan  $z = \text{cte}$ .

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

$S$  étant une surface qui s'appuie sur le contour  $C$ .

Nous avons donc :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r E(r) \text{ et } \frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right) = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Ces égalités donnent :

$$\vec{E}(r) = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \vec{e}_\theta$$

Si  $B$  a la même orientation que  $\vec{e}_z$  et que sa norme augmente, alors  $\frac{dB}{dt} > 0$ . La force à laquelle est soumise la particule :  $\vec{F} = q\vec{E}$  est donc portée par  $-\vec{e}_\theta$  puisque  $q > 0$ . De ce fait la force accélère la particule dans cette direction ( $\vec{a} \cdot \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} \cdot \vec{v} > 0$ ).

2. Lorsque le champ magnétique est uniforme, le potentiel vecteur peut s'écrire :

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \wedge \vec{OM} = \frac{B}{2} (x \vec{e}_y - y \vec{e}_x).$$

D'où :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z = B \vec{e}_z.$$

On retrouve bien la relation :  $\vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ , le potentiel vecteur proposé par l'énoncé convient.

La relation champ potentiel donne :  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ .

Donc :

$$\vec{A} = \frac{1}{2} B \vec{e}_z \wedge r \vec{e}_r = \frac{1}{2} B r \vec{e}_\theta$$

On retrouve bien l'expression :

$$\vec{E} = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \vec{e}_\theta$$

3. Considérer la trajectoire circulaire c'est aussi négliger l'action de la force électrique par rapport à celle de la force magnétique, ce sera aussi négliger l'accélération tangentielle par rapport à l'accélération normale.

Le principe fondamental de la dynamique impose :  $qR\dot{\theta}B \vec{u}_r \simeq m(-R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r)$

On trouve alors que  $\dot{\theta} = -\frac{qB}{m} < 0$ , la rotation se fait bien dans un sens opposé à  $\vec{e}_\theta$ .

On déduit que  $R = \frac{mv}{qB}$  avec  $v = -R\dot{\theta}$ .

4. L'énergie cinétique est donc donnée par :  $E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{Rqv}{2} B$
5.  $\vec{B}$  uniforme implique  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$  ce qui est en contradiction avec  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  et  $\vec{j}$  non nuls.

On lève la contradiction en remarquant que si  $\vec{E}$  dépend du temps alors il induit aussi un champ magnétique  $\vec{b}$ . L'équation de Maxwell-Faraday doit être appliquée au champ magnétique total :

$$\vec{\text{rot}} (\vec{B} + \vec{b}) = \vec{\text{rot}} \vec{B} + \vec{\text{rot}} \vec{b} = \vec{\text{rot}} \vec{b} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ainsi la contradiction est levée.

## ● 91 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Dès que la barre 1 se met en mouvement, le flux du champ magnétique à travers le circuit va dépendre du temps et il va apparaître une force électromotrice d'induction. Cette force électromotrice va générer un courant dans le circuit. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui leurs donnent naissance, ce courant sera à l'origine de forces de Laplace qui vont s'opposer à la variation du flux du champ magnétique à travers le circuit. Les vitesses des deux barres vont donc tendre vers la même valeur.
2. Notons  $X_1$  et  $X_2$  les abscisses des deux barres :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = Ri \Rightarrow$$

$$e = -Bd(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) = Bd(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) \Rightarrow$$

$$i = \frac{Bd}{R} (\dot{X}_1 - \dot{X}_2)$$

3. Appliquons le théorème du centre d'inertie aux deux barres, en projection sur l'axe  $O_x$ .

• Pour la barre 1 :

$$m \frac{dV_1}{dt} = \left( \int_{A_1}^{A_2} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{e}_x \Rightarrow \left( \int_{A_1}^{A_2} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{e}_x = -Bid$$

$$\Rightarrow m \frac{dV_1}{dt} = \frac{B^2 d^2}{R} (V_2 - V_1) \Rightarrow \dot{V}_1 + \frac{V_1}{\tau} = \frac{V_2}{\tau} \text{ avec } \tau = \frac{B^2 d^2}{mR}$$

• Pour la barre 2 :

$$m \frac{dV_2}{dt} = \left( \int_{A_3}^{A_4} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{e}_x \Rightarrow \left( \int_{A_3}^{A_4} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{e}_x = Bid$$

$$\Rightarrow m \frac{dV_2}{dt} = \frac{B^2 d^2}{R} (V_1 - V_2)$$

$$\Rightarrow \dot{V}_2 + \frac{V_2}{\tau} = \frac{V_1}{\tau}$$

On obtient donc un système de deux équations différentielles couplées, qui peut être résolu en posant les fonctions  $u = V_1 + V_2$  et  $v = V_1 - V_2$ . La différence des deux équations différentielles donne :

$$\dot{v} + \frac{2}{\tau}v = 0 \Rightarrow v = A e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

Les conditions initiales fournissent quant à elles  $A = V_0$ .

La somme des deux équations différentielles conduit à :

$$\dot{u} = 0 \Rightarrow u = A'$$

Tandis que les conditions initiales imposent  $A' = V_0$

$$V_1 = \frac{u+v}{2} = \frac{V_0}{2} \left( 1 + e^{-\frac{2t}{\tau}} \right)$$

$$V_2 = \frac{u-v}{2} = \frac{V_0}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right)$$

On remarque qu'au bout d'un temps très long  $V_1$  et  $V_2$  tendent vers la même valeur limite :  $\frac{V_0}{2}$ .

Au bout d'un temps très long, le flux du champ magnétique à travers le circuit est constant, ce qui annule le courant. L'absence de frottements permet aux barres de conserver une vitesse constante.

4. Exprimons la variation d'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}m \left( \frac{V_0}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}m \left( \frac{V_0}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}m (V_0)^2 = -\frac{1}{4}m (V_0)^2$$



Exprimons l'énergie dissipée par effet Joule :

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty Ri^2 dt = m \frac{(V_0)^2}{4}$$

On remarque que l'énergie cinétique perdue par le système correspond exactement à celle qui a été dissipée par effet Joule.

## ● 92 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes la Jolie

1. Tout plan contenant l'axe  $Oz$  est un plan d'antisymétrie du point de vue de la distribution des courants.

De ce fait en tous points de ces plans le champ magnétique y est perpendiculaire :

$$\vec{B}_1 = B_{1\theta} \vec{u}_\theta + B_{1z} \vec{u}_z$$

2. Le point  $M$  appartenant à une infinité de plans d'antisymétrie :

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{u}_z \Rightarrow B(M) = \vec{B}(M) \cdot \vec{u}_z$$

$$\text{Nous avons donc : } B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left( \oint_C \frac{\vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM}}{PM^3} \right) \cdot \vec{u}_z$$

Avec :

$$\left( \vec{dl} \wedge \overrightarrow{PM} \right) \cdot \vec{u}_z = \underbrace{\left( \vec{dl} \wedge \overrightarrow{PO} \right) \cdot \vec{u}_z}_{=R^2 d\theta} + \underbrace{\left( \vec{dl} \wedge \overrightarrow{OM} \right) \cdot \vec{u}_z}_{=0}$$

On en déduit :

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{R^2 d\theta}{PM^3} = \frac{\mu_0 I R^2}{2 PM^3} \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I R^2}{2 PM^3} \vec{u}_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2 (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_z$$

3. Exprimons le flux du champ magnétique créée par la grande spire à travers la petite :

$$\phi = \iint \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$$

Avec :

$$d\vec{S}_2 = dS_2 \vec{u}_z \Rightarrow \phi = B_1 S_2 = \frac{\mu_0 I \pi R^2 a^2}{2 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Le coefficient d'inductance mutuelle  $M$  vérifie alors :

$$\phi = MI \Rightarrow M = \frac{\mu_0 \pi R^2 a^2}{2 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

4. Considérons la spire de rayon  $a$ , comme un dipôle magnétique. Son moment s'écrit :

$$\vec{\mathcal{M}} = i \vec{S}_2 = \pi a^2 i \vec{u}_z$$

Le potentiel vecteur créé par ce dipôle en tout point  $M$  de la grande spire est donné, conformément au cours par :

$$\vec{A}_2(M) = \frac{\mu_0}{4\pi PM^3} \vec{\mathcal{M}} \wedge \overrightarrow{MP}$$

Notons  $\varphi$  le flux du champ magnétique créée par la petite spire à travers la grande. Nous avons :

$$\varphi = \iint \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = \oint_C \vec{A}_2 \cdot d\vec{\ell}_1$$

$$\vec{A}_2 \cdot d\vec{\ell}_1 = \frac{\mu_0 \pi a^2 i}{4\pi PM^3} \left( \vec{u}_z \wedge (\vec{MO} + \vec{OP}) \right) \cdot d\vec{\ell}_1 = \frac{\mu_0 a^2 i R}{4 PM^3}$$

Il s'ensuit que :

$$\varphi = \oint_C \frac{\mu_0 a^2 i R^2 d\theta}{4 PM^3} = \frac{\mu_0 a^2 i R^2}{4 PM^3} \oint_C d\theta = \frac{\mu_0 \pi a^2 R^2 i}{2 (z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = Mi$$

D'où l'on déduit que :

$$M = \frac{\mu_0 \pi R^2 a^2}{2 (R^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

On retrouve bien la même expression.

5. Le flux total à travers la spire de rayon  $a$  vaut :  $\Phi = \phi + \varphi = MI + Li$

On y associe la force électromotrice :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -M \frac{di}{dt} - L \frac{di}{dt} = R_0 i$$

d'où l'on déduit l'équation différentielle :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R_0}{L} i = \frac{M\omega I_0}{L} (\sin(\omega t))$$

## ● 93 ————— Concours Centrale Supélec

1. On utilise un solénoïde très long (idéal), alimenté par un courant  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ , dans la mesure où la fréquence permet de se placer dans l'approximation des régimes quasi permanents, le champ magnétique à l'intérieur, donné par la loi de Biot et Savart s'écrit :

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

$n$ , étant le nombre de spires par unité de longueur.

2. De l'équation de Maxwell-Faraday  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  on déduit qu'un champ magnétique dépendant du temps engendre un rotationnel du champ électrique non nul.

Il existe donc dans le milieu un champ électrique induit par le champ magnétique.

3. L'énoncé précise que ce champ électrique est orthoradial :

$$\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{u}_\theta$$

L'invariance par rotation autour de l'axe  $O_z$  permet d'écrire :

$$E(r, \theta, z) = E(r, z)$$

Pour exprimer  $E(r, z)$ , on utilise la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$S$  étant une surface sur laquelle s'appuie le contour  $\mathcal{C}$ .

Choisissons comme contour un cercle de rayon  $r < a$  perpendiculaire à l'axe  $O_z$ .

La circulation du champ électrique s'écrit :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r E$$

Quant au flux du champ magnétique :

$$\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

Nous avons donc :

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{dB}{dt} \Rightarrow E(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \Rightarrow \vec{E}(r, z) = \frac{r}{2} B_0 \omega \sin(\omega t) \vec{e}_z$$

Remarquons que  $E$  ne dépend pas de  $z$ .

4. La puissance dissipée par effet joule est donnée par la relation :

$$P = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \gamma \iiint_{\mathcal{V}} E^2 d\tau$$

On a utilisé la loi d'Ohm locale :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ .

Par conséquent :

$$P = \gamma \iiint_{\mathcal{V}} \frac{(r B_0 \omega \sin \omega t)^2}{2} r dr d\theta dz = \frac{\pi \gamma L R^4}{4} (B_0 \omega \sin \omega t)^2$$

On en déduit la valeur moyenne de la puissance :

$$\langle P \rangle = \frac{\pi \gamma (B_0 \omega R^2)^2}{8}$$

Étant donné que :  $\langle (\sin \omega t)^2 \rangle = \frac{1}{2}$

## ● 94 ————— Concours Commun Polytechnique

1. La spire est soumise à l'induction de Neumann. Le flux du champ magnétique appliqué par l'aimant s'écrit :  $\phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ , nous avons donc :

$$\vec{B} \cdot (dS \vec{e}_x) = \frac{2\mu_0 M \cos \theta dS}{4\pi r^3} \Rightarrow \phi = \frac{\mu_0 M S \cos \theta}{2\pi r^3}$$

On en déduit :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = \frac{\mu_0 M S \dot{\theta} \sin \theta}{2\pi r^3}$$

La loi d'Ohm appliquée à la spire donne  $e = Ri$ , d'où :

$$i = \frac{\mu_0 M S \dot{\theta} \sin \theta}{2\pi R r^3} = Ri$$

2. On exprime facilement le champ magnétique,  $\vec{b}$ , créé par une spire en son centre :

$$\vec{b}(O) = \frac{\mu_0 i a^2}{2\pi r^3} \vec{e}_x$$

3. Nous avons un dipôle magnétique  $\vec{M}$ , placé dans un champ magnétique  $\vec{b}(O)$ , il subit donc les efforts de moment :

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{M} \wedge \vec{b}(O) = M(\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y) \wedge \frac{\mu_0 i a^2}{2\pi r^3} \vec{e}_x = -S \left( \frac{\mu_0 M \sin \theta}{2\pi r^3} \right)^2 \frac{a^2}{R} \dot{\theta} \vec{e}_z$$

4. Appelons  $\vec{L}$  le moment cinétique de l'aimant, calculé en  $O$ . Étant donné que l'aimant tourne à vitesse angulaire constante :  $\vec{L} = J\vec{\omega} = cte$ .

Notons  $\vec{\Gamma}$  le moment du couple exercé par le moteur.

Le théorème du moment cinétique appliqué à l'aimant donne :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} + \vec{\mathcal{M}} = \vec{0}$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{\Gamma} = -\vec{\mathcal{M}} = S \left( \frac{\mu_0 M \sin \theta}{2\pi r^3} \right)^2 \frac{a^2}{R} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z$$

5. Quand le moteur débraye,  $\vec{\Gamma} = \vec{0}$ . Le théorème du moment cinétique donne :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}$$

relation que l'on projète sur l'axe ( $Oz$ ) :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -S \left( \frac{\mu_0 M \sin \theta}{2\pi r^3} \right)^2 \frac{a^2}{R} \omega \Rightarrow J \frac{d\omega}{dt} = -S \left( \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3} \right)^2 \frac{a^2}{R} \omega \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)$$

Posons  $K = \frac{S}{2R} \left( \frac{\mu_0 M a}{2\pi r^3} \right)^2$  nous avons donc :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -K\omega + K\omega \cos 2\theta$$

On peut intégrer cette relation par rapport au temps :

$$J \frac{d\theta}{dt} = -K\theta + \frac{K}{2} \sin 2\theta + C$$

Les conditions initiales donnent  $C = J\omega_0$  ce qui permet d'écrire :

$$J \frac{d\theta}{dt} = -K\theta + \frac{K}{2} \sin 2\theta + J\omega_0$$

Dans le cas des faibles amortissements, l'aimant va tourner plusieurs fois avant de se mettre à l'arrêt :

$$\theta \gg |\sin(2\theta)| \Rightarrow J\omega = J\omega_0 - K\theta$$

$\alpha$  se mesure quand l'aimant est à l'arrêt, donc  $\omega = 0$  :

$$\alpha = \frac{J\omega_0}{K} = 2RJ\omega_0 \left( \frac{2r^3}{\mu_0 M a^2} \right)^2$$

Dans le cas des forts amortissements, l'aimant va effectuer une faible rotation avant de s'arrêter :

$$\sin 2\theta \simeq 2\theta - \frac{4}{3}\theta^3 \Rightarrow J\omega = J\omega_0 - \frac{2}{3}\theta^3 \Rightarrow \alpha = \left( \frac{3JK\omega_0}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$



## Chapitre 4

# Optique ondulatoire

### 4.1 Propagation de la lumière

Dans cette première partie, nous supposons que les éventuels objets rencontrés par la lumière sont de taille suffisante pour ne pas provoquer sa diffraction, phénomène par lequel les rayons lumineux peuvent être réémis dans des directions différentes de celle des rayons incidents, à la traversée de petites ouvertures. La diffraction sera présentée ultérieurement (page 502).

#### 4.1.1 Ondes planes et ondes sphériques

Dans le vide, les champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$  se propagent conformément aux équations d'onde de propagation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ et } \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

où  $c$  est la célérité de la lumière dans le vide.

En revanche, dans un milieu diélectrique de permittivité électrique  $\varepsilon_r \varepsilon_0$ , les champs électrique et magnétique sont soumis aux équations :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ et } \Delta \vec{B} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (1)$$

où  $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$  désigne la vitesse de propagation de ces champs dans le milieu. On définit ainsi un indice de réfraction pour ce milieu :

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r} \geq 1$$

**Définition 1** La lumière est une onde électromagnétique visible par l'œil humain, dont la longueur d'onde, dans le vide, se trouve comprise entre 400 nm et 700 nm.

##### 4.1.1.1 Ondes planes

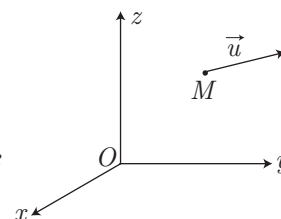
Soit  $O$  un point fixe de l'espace et  $M$  un point où se propage un rayon lumineux selon une direction de vecteur unitaire  $\vec{u}$ .

**Définition 2**

On appelle vecteur d'onde le vecteur colinéaire à  $\vec{u}$  :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la lumière dans le milieu de propagation.



Une onde plane est une onde dont le champ électrique :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t + \phi_0) \quad (2)$$

est une des solutions possibles de l'équation (1).  $\vec{E}_0$  est un vecteur constant et  $\phi_0$  la phase de l'onde en  $O$ , à la date  $t = 0$ .

**Définition 3** La pulsation de l'onde est la grandeur :

$$\omega = k v = 2\pi f$$

où  $f$  désigne la fréquence associée à l'onde.

**Définition 4** On appelle phase de l'onde en  $M$  à la date  $t$  l'argument :

$$\phi(M, t) = \vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t + \phi_0$$

Remarque – Par abus de langage, on appelle également phase la grandeur :

$$\phi_M = \vec{k} \cdot \vec{OM} + \phi_0 \Rightarrow \phi(M, t) = \phi_M - \omega t$$



Montrer que l'ensemble des points de même phase à un instant donné décrit un plan perpendiculaire au vecteur d'onde  $\vec{k}$  d'une onde plane.

**RÉPONSE** À une date  $t$ , une onde plane présente, aux points  $M$  et  $M' \neq M$ , des phases :

$$\phi(M, t) = \vec{k} \cdot \vec{OM} + \phi_0 - \omega t \text{ et } \phi(M', t) = \vec{k} \cdot \vec{OM'} + \phi_0 - \omega t$$

d'où il s'ensuit que :

$$\phi(M', t) - \phi(M, t) = \vec{k} \cdot (\vec{OM'} - \vec{OM}) = \vec{k} \cdot \vec{MM'}$$

Par suite,  $M$  et  $M'$  présentent la même phase à condition que :

$$\phi(M', t) - \phi(M, t) = 0 \text{ c'est-à-dire : } \vec{k} \cdot \vec{MM'} = 0$$

Or, puisque  $\vec{MM'} \neq \vec{0}$  et  $\vec{k} \neq \vec{0}$ , cette dernière équation montre que :

$$\vec{MM'} \perp \vec{k}$$

Aussi, tous les couples de points de même phase doivent se trouver sur des droites perpendiculaires à  $\vec{k}$ , c'est-à-dire dans un plan perpendiculaire à  $\vec{k}$



⚠ Les ondes d'équation :  $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t + \phi_0)$  se propagent dans la direction et le sens de  $\vec{k}$ , tandis que celles d'équation :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{OM} + \omega t + \phi_0)$$

se propagent dans la direction de  $\vec{k}$ , mais dans le sens inverse.

#### 4.1.1.2 Ondes sphériques

**Définition 5** On appelle ondes sphériques des ondes :

- dont l'amplitude décroît comme  $\frac{1}{OM}$  ;
- dont le vecteur d'onde est colinéaire à  $\vec{OM}$  :

$$\vec{k} \cdot \vec{OM} = kr \text{ avec } r = \|\vec{OM}\|$$

Parmi les champs électriques solutions de l'équation (1), ceux décrits par :

$$\vec{E} \propto \frac{\vec{E}_0}{r} \cos(kr + \phi_0 \pm \omega t)$$

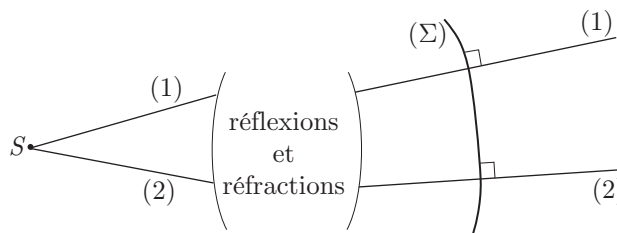
composent des ondes sphériques :


- qui divergent depuis  $O$  lorsque  $\phi(M, t) = kr + \phi_0 - \omega t$  ;
- qui convergent vers  $O$  lorsque  $\phi(M, t) = kr + \phi_0 + \omega t$ .

Remarque – À grande distance de  $O$ , les ondes sphériques s'identifient à des ondes localement planes.

#### 4.1.1.3 Théorème de Malus

Des rayons issus d'une source ponctuelle ( $S$ ), qui subissent un même nombre de réflexions et de réfractions, demeurent perpendiculaires aux surfaces d'onde ( $\Sigma$ ).

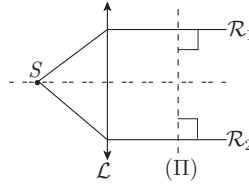


 Une source lumineuse ponctuelle  $S$  est confondue avec le foyer objet d'une lentille convergente  $\mathcal{L}$ .

1. Déterminer les chemins suivis par deux rayons issus de  $S$  et traversant  $\mathcal{L}$ .
2. Donner la nature des ondes (planes ou sphériques) avant et après la traversée de  $\mathcal{L}$ .

## RÉPONSE

1. Les rayons issus du foyer objet d'une lentille convergente en émergent parallèlement à l'axe optique :



2. En amont de  $\mathcal{L}$ , les rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  divergent depuis le point  $S$ , en conséquence de quoi l'onde associée est sphérique.

En revanche, en aval de  $\mathcal{L}$ , les rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont parallèles, de sorte que les surfaces d'onde sont des plans perpendiculaires à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  (conformément au théorème de Malus) ; les ondes associées sont planes.

## 4.1.2 Chemin optique

## Définition 6

Soit une onde lumineuse qui se propage dans un milieu d'indice  $n$ , d'un point  $A$  à un point  $B$ , en empruntant le chemin  $\mathcal{C}$ .



On appelle chemin optique de ce rayon la grandeur :

$$(AB) = \int_A^B n \, d\ell$$

Remarque – Lorsque l'onde se propage (de manière rectiligne) dans un milieu homogène ( $n$  prend partout la même valeur), le chemin optique s'écrit simplement :

$$(AB) = n \times AB$$

⚠ Le chemin optique est compté positivement pour un rayon réel, mais il est compté négativement si le rayon est virtuel.

Lorsqu'une onde se propage de  $A$  et  $B$ , la différence des phases en  $A$  et  $B$  vaut :

$$\phi_B - \phi_A = \frac{2\pi}{\lambda_0} (AB) = k_0 (AB) \quad (3)$$

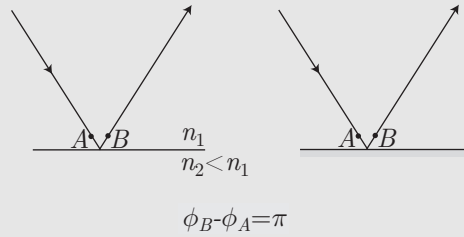
où :

$$\lambda_0 = n \lambda = \frac{c}{v} \lambda$$

représente la longueur d'onde du rayonnement dans le vide. Remarquons, à ce propos que lorsqu'un rayon passe d'un milieu d'indice  $n_1$  vers un autre milieu d'indice  $n_2$ , seule sa fréquence (ou sa pulsation) est conservée, et non sa longueur d'onde.

**⚠** Une onde subit un déphasage de  $\pi$  lors d'une réflexion :

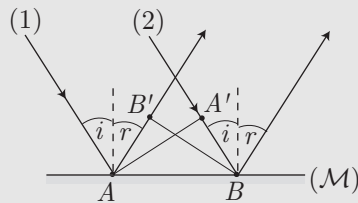
- sur un milieu moins réfringent ( $n_2 < n_1$ ) ;
- sur une surface métallique (miroir) ;
- lors du passage par un foyer.



On démontre que :

lorsque deux points  $A$  et  $B$  sont conjugués par un système optique,  $(AB)$  ne dépend pas du chemin suivi par la lumière.

**👉** Soit  $(\mathcal{M})$  un miroir plan dont la face réfléchissante est au contact de l'air (assimilé au vide). Deux rayons parallèles (1) et (2), issus d'une même source infiniment éloignée, arrivent sur  $(\mathcal{M})$  aux points  $A$  et  $B$ , sous un angle d'incidence  $i$  ; ils sont réfléchis avec un angle de réflexion  $r$ .



On note  $A'$  le projeté orthogonal de  $A$  sur (2) et  $B'$  celui de  $B$  sur (1).

1. Compte tenu du sens de déplacement de la lumière, on conviendra que  $A, B, A'$  sont des points avant réflexion des ondes et  $B'$  un point après réflexion. En déduire que les phases de ces ondes vérifient :

$$\phi_A = \phi_{A'} \text{ et } \phi_{B'} = \phi_B + \pi$$

2. Trouver une relation entre les distances  $AB'$  et  $A'B$ .
3. Exprimer ces distances en fonction de  $AB, i, r$  puis retrouver la loi de la réflexion :  $i = r$ .

**RÉPONSE**

1. Les points  $A$  et  $A'$  appartiennent à une même surface d'onde perpendiculaire aux rayons qui ne se sont pas encore réfléchis. Par conséquent :

$$\phi_A = \phi_{A'}$$

Soit  $B''$  le point situé immédiatement après réflexion du rayon (2) sur  $(\mathcal{M})$ . Pour les mêmes raisons,  $B''$  et  $B'$  appartiennent à une même surface d'onde, il s'ensuit que  $\phi_{B'} = \phi_{B''}$ . Or, la réflexion de (2) en  $B$  provoque un déphasage de  $\pi$  :

$$\phi_{B''} = \phi_B + \pi \Rightarrow \phi_{B'} = \phi_B + \pi \quad (4)$$

2. Si  $A''$  désigne le point situé sur le rayon (1), immédiatement après sa réflexion, la loi (3) indique que :  $\phi_{B'} - \phi_{A''} = k_0(B'A'') = k_0 B'A''$ , soit encore :

$$\phi_{B'} = \phi_{A''} + k_0 B'A''$$

Du reste, entre les points  $A$  et  $A''$  s'est produite une réflexion et donc un déphasage :

$$\phi_{A''} - \phi_A = \pi \Rightarrow \phi_{A''} = \phi_A + \pi \Rightarrow \phi_{B'} = \phi_A + \pi + k_0 B'A$$

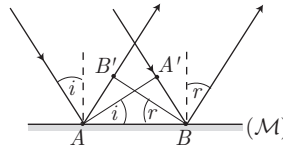
En revanche, aucune réflexion ne survient entre  $A'$  et  $B$ , la loi (3) devient :

$$\phi_B - \phi_{A'} = k_0(A'B) = k_0 A'B \Rightarrow \phi_B = \phi_{A'} + k_0 A'B$$

Les nouvelles expressions de  $\phi_B$  et  $\phi_{B'}$  donnent à la relation (4) la forme suivante :

$$\begin{aligned} \phi_A + \pi + k_0 B'A &= \phi_{A'} + k_0 A'B + \pi \text{ avec } \phi_A = \phi_{A'} \\ &\Rightarrow B'A = A'B \end{aligned}$$

3. Le rayon incident (1) étant perpendiculaire à  $AA'$ , l'angle  $(\vec{AA'}, \vec{AB})$  vaut  $i$ , de même que  $(\vec{BB'}, \vec{BA}) = r$  car le rayon (2) réfléchi est perpendiculaire à  $BB'$  :



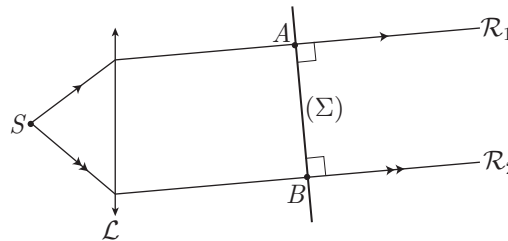
Ces angles permettent ainsi de définir :

$$\sin i = \frac{A'B}{AB} \Rightarrow A'B = AB \sin i \text{ et } \sin r = \frac{AB'}{AB} \Rightarrow AB' = AB \sin r$$

De l'identité  $B'A = A'B$  découle finalement la loi de la réflexion :

$$AB \sin i = AB \sin r \Rightarrow i = r$$

Soient  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  deux rayons issus d'une source monochromatique placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente  $\mathcal{L}$ .



En vertu du théorème de Malus, les rayons émergent de  $\mathcal{L}$  parallèlement les uns aux autres sont perpendiculaires aux surfaces d'onde  $(\Sigma)$ , en conséquence de quoi les phases  $\phi_A$  et  $\phi_B$  des ondes qui arrivent en  $A = \mathcal{R}_1 \cap (\Sigma)$  et  $B = \mathcal{R}_2 \cap (\Sigma)$  sont identiques :

$$\phi_A = \phi_B \Rightarrow \phi_A - \phi_S = \phi_B - \phi_S \Rightarrow k_0(SA) = k_0(SB)$$

On retiendra ainsi que :

$$(SA) = (SB) \text{ pour } AB \text{ perpendiculaire aux rayons émergents.} \quad (5)$$

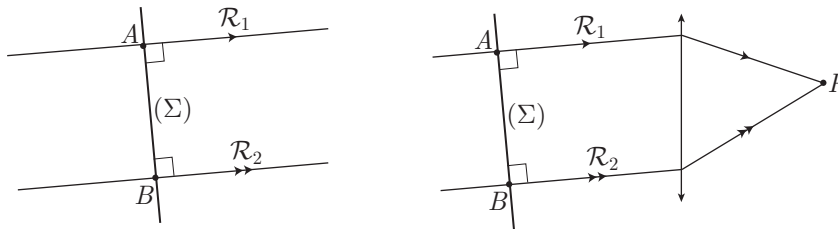
### Corrolaire

Soient  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  deux rayons parallèles qui convergent vers un même point  $P$  :

- situé à l'infini ;
- ou situé dans le plan focal image d'une lentille convergente.

Le principe du retour inverse de la lumière (qui stipule que les rayons qui convergent en  $P$  se comportent de la même manière que s'il étaient émis par  $P$ , lors de la traversée de la lentille) entraîne que deux points  $A$  et  $B$ , appartenant à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  respectivement, et tels que  $AB \perp \mathcal{R}_1$  ou  $AB \perp \mathcal{R}_2$ , ont des chemins optiques  $(AP)$  et  $(BP)$  identiques :

$$(AP) = (BP) \quad (6)$$



### 4.1.3 Éclairement

On montre, en électromagnétisme, qu'une onde plane monochromatique qui se propage dans le vide avec une vitesse  $\vec{v} = c \vec{u}$  véhicule une énergie liée au vecteur Poynting :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \vec{u}$$

dont le flux élémentaire à travers une surface  $d\vec{S}$  perpendiculaire à  $\vec{u}$  :

$$d\phi = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 dS$$

coïncide avec la puissance d'énergie électromagnétique. Dans la pratique, ce flux tient compte de toutes les composantes spectrales du rayonnement (même celles qui ne sont pas visibles). C'est pourquoi on substitue à  $d\phi$  le flux lumineux  $dF$  :

$$dF = e \times d\phi \quad (dF \text{ en lumens : l})$$

où  $e$  est une constante appelée *efficacité lumineuse*.

**Définition 7** L'éclairement d'un écran qui reçoit le flux lumineux  $dF$  sur chaque élément de surface  $dS$  est défini par le rapport :

$$\mathcal{E} = \frac{dF}{dS}$$

$\mathcal{E}$  apparaît ainsi proportionnel à  $E^2$  :  $\mathcal{E} = \frac{e}{\mu_0 c} E = K E^2$ . Cependant,  $E^2$  variant rapidement dans le temps, l'œil n'est sensible qu'à la valeur moyenne de  $E^2$ . C'est pourquoi :

$$\mathcal{E} = K \times \langle E^2 \rangle$$

Remarque – De nombreux énoncés évoquent l'intensité lumineuse, définie à partir du flux lumineux  $dF$  émis par une source à travers un angle solide  $d\Omega$  :

$$I = \frac{dF}{d\Omega} \quad (I \text{ en candelas : } cd)$$

Dans la pratique, cependant,  $I$  et  $\mathcal{E}$  sont confondus car seule une variation de  $\mathcal{E}$  est perceptible par l'œil. Aussi, tous les résultats rappelés ici demeurent valables en remplaçant  $\mathcal{E}$  par  $I$ .

La relation (2) de la page 496 peut aussi s'écrire :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{OM} + \phi_0 - \omega t) = \vec{E}_0 \cos(\phi_M - \omega t)$$

tandis que  $\mathcal{E} = K \langle E^2 \rangle$  ne tient pas compte de la nature vectorielle du champ électrique. C'est la raison pour laquelle on s'intéressera désormais aux signaux :

$$s(M, t) = s_0 \cos(\phi_M - \omega t)$$

ou à leur représentation complexe :

$$\underline{s} = \underline{s}(M, t) = s_0 e^{j\phi_M} e^{-j\omega t} / s(M, t) = \text{Re} \{ \underline{s} \} \quad (7)$$

à l'origine de l'éclairement :

$$\mathcal{E} = K \langle s^2 \rangle = \frac{K}{2} \underline{s} \underline{s}^*$$

Remarque – Le calcul de  $\mathcal{E}$  à partir de l'expression (7) lui conférerait la valeur uniforme :  $\mathcal{E} = \frac{s_0^2}{2}$ . Cependant, le signal  $\underline{s}$  peut également se présenter sous la forme plus générale :

$$\underline{s} = \underline{\psi}(\phi_M) e^{-j\omega t}$$

où  $\underline{\psi}(\phi_M)$  est a priori une fonction complexe quelconque de  $\phi_M$ . C'est pourquoi :

$$\mathcal{E} = \frac{K}{2} |\underline{\psi}(\phi_M)|^2$$

peut ne pas être uniforme.

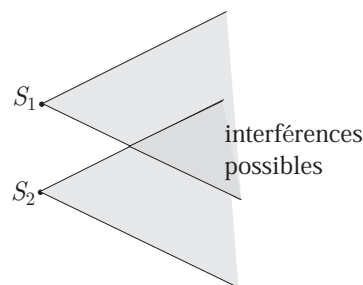
## 4.2 Interférences non localisées

Pour observer des interférences entre des rayons lumineux, nous disposons de deux catégories de dispositifs interférentiels :

- les dispositifs diviseurs de front d'onde : un faisceau de rayons, issu d'une même source, est divisé en deux faisceaux (par exemple par deux trous) qui, en raison de la diffraction, peuvent interférer dans toute une région de l'espace ; les interférences sont non localisées.
- les dispositifs diviseurs d'amplitude, qui utilisent les réflexions et transmissions successives pour diviser un faisceau lumineux en plusieurs capables d'interférer ; la diffraction n'est pas à l'origine de ces interférences, qui sont ainsi localisées.

### 4.2.1 Conditions d'interférence entre deux ondes planes

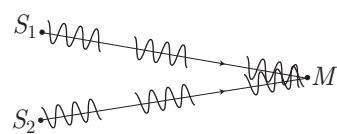
Deux sources  $S_1$  et  $S_2$ , émettant dans un milieu transparent, peuvent produire des interférences lumineuses dans la région de l'espace où se superposent les faisceaux de lumière émis par  $S_1$  et  $S_2$  :



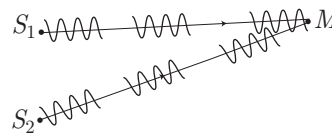
On peut montrer (voir exercice de la page 552) que l'obtention d'interférences lumineuses est assujettie à certaines contraintes expérimentales :

- la *cohérence spatiale* doit être assurée :  $S_1$  et  $S_2$  ne doivent émettre que des signaux dont le déphasage initial ne varie pas de manière aléatoire. C'est pourquoi une même source primaire produit tous les rayons lumineux.
- les ondes émises doivent présenter la même fréquence (ou des fréquences très voisines) ;
- à leur intersection, les rayons doivent avoir des directions très proches et une polarisation de leurs champs électriques voisine.

Outre ces contraintes, les sources doivent être temporellement cohérentes : la lumière est émise par trains d'ondes qui doivent se rencontrer pour interférer :



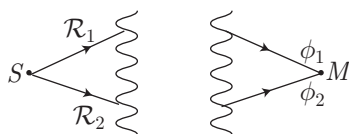
Cohérence totale :  
interférences possibles en  $M$



Cohérence partielle :  
faibles interférences en  $M$

#### 4.2.1.1 Généralités

Soit  $S$  une source lumineuse qui émet des rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  susceptibles de converger en un point  $M$ . On appelle  $\phi_1$  et  $\phi_2$  les phases que présentent les ondes associées respectivement à  $\mathcal{R}_1$  et à  $\mathcal{R}_2$  en  $M$ , supposées totalement cohérentes.



Si  $\mathcal{E}_{01}$  et  $\mathcal{E}_{02}$  désignent les éclairissements que produisent isolément  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  en  $M$ , l'éclairissement  $\mathcal{E}$  obtenu en  $M$  sous l'influence simultanée de  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  s'écrit :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02} + 2\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}} \cos(\Delta\phi) \text{ où } \Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 \quad (8)$$

Remarque – Lorsque les rayons qui arrivent en  $M$  sont totalement cohérents, l'éclairissement produit n'est pas la simple somme des éclairissements ; le terme  $2\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}} \cos(\Delta\phi)$  décrit ce phénomène d'interférences. En revanche, ce phénomène disparaît si les rayons ne sont pas cohérents, auquel cas l'écran est uniformément éclairé car :

l'éclairissement associé à deux ondes est la somme des éclairissements associés à chacune des ondes, si ces dernières ne sont pas cohérentes.

Si  $\Delta\phi = 2n\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), le point  $M$  est brillant, tandis qu'il paraît sombre dès que  $\Delta\phi = (2n + 1)\pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

Remarque – Le déphasage  $\Delta\phi$  prend en compte non seulement la différence des chemins optiques de  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , mais également les diverses réflexions subies par les rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  (qui induisent éventuellement un déphasage supplémentaire de  $\pi$ ) :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} [(SM)_2 - (SM)_1] + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

**Définition 8** On appelle différence de marche la grandeur  $\delta$  telle que :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \text{ c'est-à-dire : } \delta = \frac{\lambda_0}{2\pi} \Delta\phi$$

L'éclairissement au point  $M$  dépend de la valeur de  $\delta$  :

- il est *maximum* lorsque  $\delta = m\lambda_0$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) ;
- il est *minimum* pour  $\delta = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ).

**Définition 9** L'ordre d'interférence,  $p$ , est défini par le rapport :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0}$$

Lorsque  $p$  est entier, l'éclairissement au point  $M$  est *maximum*, tandis qu'il est *minimum* pour  $p$  demi-entier.

**Définition 10** Si  $\mathcal{E}_{\max}$  et  $\mathcal{E}_{\min}$  désignent les valeurs maximum et minimum de l'éclairissement en  $M$ , le contraste (ou la visibilité) est défini par :



$$C = \frac{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}{\mathcal{E}_{\max} + \mathcal{E}_{\min}}$$

Lorsque  $C = 0$ , aucune figure d'interférence ne peut être observée, tandis que  $C = 1$  correspond à une figure d'interférence très contrastée, qui correspond à l'égalité :  $\mathcal{E}_{01} = \mathcal{E}_{02}$ .



Comment doivent être choisis  $\mathcal{E}_{01}$  et  $\mathcal{E}_{02}$  pour que le contraste  $C$  soit maximum ?

RÉPONSE Compte tenu de l'expression (8), les valeurs extrêmes prises par  $\mathcal{E}$  valent :

$$\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02} + 2\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}} \text{ et } \mathcal{E}_{\min} = \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02} - 2\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}}$$

Aussi :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min} = 4\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}} \\ \mathcal{E}_{\max} + \mathcal{E}_{\min} = 2(\mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02}) \end{cases} \Rightarrow C = \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}}}{\mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02}}$$

De l'inégalité :

$$(\sqrt{\mathcal{E}_{01}} - \sqrt{\mathcal{E}_{02}})^2 \geq 0 \quad (9)$$

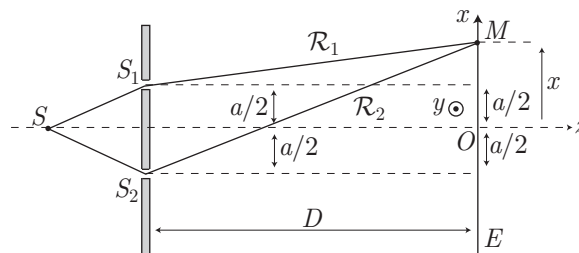
il découle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02} - 2\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}} \geq 0 &\Rightarrow \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02} \geq 2\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}} \\ &\Rightarrow 1 \geq \frac{2\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}}}{\mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02}} = C \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $C \leq 1$ , l'égalité étant réalisée pour  $\mathcal{E}_{01} = \mathcal{E}_{02}$  (à cause de l'inégalité (9)) ; le contraste est alors maximum.

#### 4.2.1.2 Emploi d'une source fine monochromatique

Soit  $S$  une source ponctuelle se trouvant à égale distance de deux trous,  $S_1$  et  $S_2$ , percés dans un écran opaque (II). À une distance  $D$  de cet écran se trouve un second écran  $E$  parallèle à (II), sur lequel le point  $O$  désigne le projeté orthogonal de  $S$ . Un point  $M$  de  $E$  est repéré par son abscisse  $x = \overline{OM}$ , tandis que  $S_1S_2 = a$ .



Du fait de la diffraction,  $S_1$  et  $S_2$  se comportent comme deux sources secondaires cohérentes, de pulsation  $\omega$ . Puisque  $SS_1 = SS_2$ , ces deux sources émettent de surcroît des ondes de même phase. Soient  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  des rayons émis par  $S_1$  et  $S_2$ , qui convergent en  $M$ , avec des phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$ . Les signaux reçus en  $M$  sont de la forme :

$$s_1 = s_{01} \cos(\phi_1 - \omega t) \text{ et } s_2 = s_{02} \cos(\phi_2 - \omega t)$$

On leur préfère souvent leurs images complexes :

$$\underline{s}_1 = s_{01} e^{j\phi_1} e^{-j\omega t} \text{ et } \underline{s}_2 = s_{02} e^{j\phi_2} e^{-j\omega t}$$

qui permettent de calculer le signal résultant en  $M$  :

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = (s_{01} e^{j\phi_1} + s_{02} e^{j\phi_2}) e^{-j\omega t}$$

d'où se déduit l'éclairement en  $M$  :

$$\mathcal{E} = K \underline{s} \underline{s}^* = \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02} + 2\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}} \cos(\Delta\phi) \quad (10)$$

où  $\mathcal{E}_{0i} = \frac{K}{2} s_{0i}^2$  désignent les éclairements produits par chaque source isolément et  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  est le déphasage en  $M$  entre  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , qui s'exprime aussi à l'aide des chemins optiques :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} [(S_2M) - (S_1M)] = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta$$

à condition que  $\delta$  représente la différence des chemins optiques entre  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  et que  $\lambda_0$  soit la longueur d'onde du rayonnement dans le vide. C'est pourquoi :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02} + 2\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right)$$

#### Figure d'interférence au voisinage de $O$

En supposant que  $x \ll D$  et  $a \ll D$ , les distances :

$$S_1M = D \left[ 1 + \frac{1}{D^2} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \simeq D + \frac{1}{2D} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

et

$$S_2M = D \left[ 1 + \frac{1}{D^2} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \right]^{1/2} \simeq D + \frac{1}{2D} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

permettent de trouver :

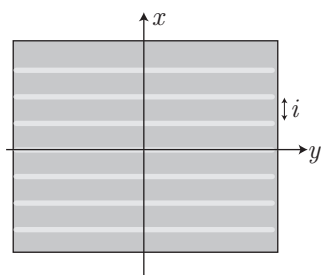
$$\delta = \frac{ax}{D} \Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02} + 2\sqrt{\mathcal{E}_{01}\mathcal{E}_{02}} \cos\left(\frac{2\pi a}{\lambda_0 D} x\right) \quad (11)$$

Des franges claires apparaissent sur l'écran pour les valeurs  $x_n$  de  $x$  telles que :

$$\frac{2\pi a}{\lambda_0 D} x_n = n \times 2\pi \Rightarrow x_n = n \times \frac{\lambda_0 D}{a} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ce qui donne à l'interfrange l'expression :

$$i = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

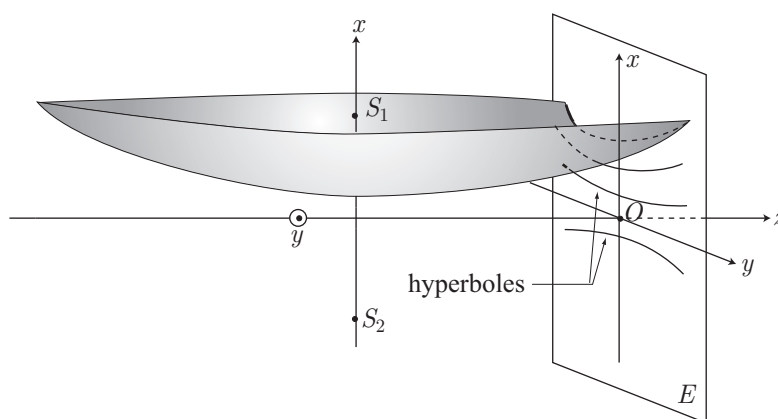


**Cas général**

Les calculs précédents ne sont légitimes qu'au voisinage de  $O$ . On peut montrer (voir exercice de la page 558) que les franges d'interférence, caractérisées par :

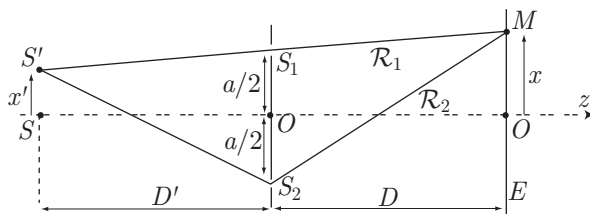
$$\delta = S_2M - S_1M = \text{cte}$$

sont en réalité des hyperboloïdes de révolution, dont la trace sur l'écran dessine des hyperboles :



**4.2.1.3 Emploi d'une source fine monochromatique décalée**

Supposons maintenant la source lumineuse confondue avec un point  $S'$  différent de  $S$ , tel que  $\overline{SS'} = x'$ .



$S$  et  $S'$  se trouvent dans un plan parallèle à  $E$ , à une distance  $D'$  de l'écran percé en  $S_1$  et  $S_2$ . La différence de chemins entre  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  est donnée par :

$$\delta = (S'S_2 + S_2M) - (S'S_1 + S_1M) = (S'S_2 - S'S_1) + (S_2M - S_1M)$$

où  $S_2M - S_1M = \frac{ax}{D}$ , conformément au cas précédemment étudié, tandis que :

$$S'S_2 = D' \left[ 1 + \frac{1}{D'^2} \left( x' + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \simeq D' + \frac{1}{2D'} \left( x' + \frac{a}{2} \right)^2$$

et :

$$S'S_1 = D' \left[ 1 + \frac{1}{D'^2} \left( x' - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \simeq D' + \frac{1}{2D'} \left( x' - \frac{a}{2} \right)^2$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} S'S_2 - S'S_1 &= \frac{1}{2D'} \left[ \left( x' + \frac{a}{2} \right)^2 - \left( x' - \frac{a}{2} \right)^2 \right] = \frac{ax'}{D'} \\ \Rightarrow \delta &= \frac{ax}{D} + \frac{ax'}{D'} \end{aligned}$$

Aussi, si les trous  $S_1$  et  $S_2$  sont identiques ( $\mathcal{E}_{01} = \mathcal{E}_{02} = \mathcal{E}_0$ ) l'éclairement en  $M$  adopte la forme :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right) \right] \quad (12)$$

responsable de l'apparition de franges claires (alternées avec des franges sombres) aux abscisses  $x_n$  vérifiant :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{ax_n}{D} + \frac{ax'}{D'} \right) = n \times 2\pi \Rightarrow x_n = n \frac{\lambda_0 D}{a} - \frac{Dx'}{D'} \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (13)$$

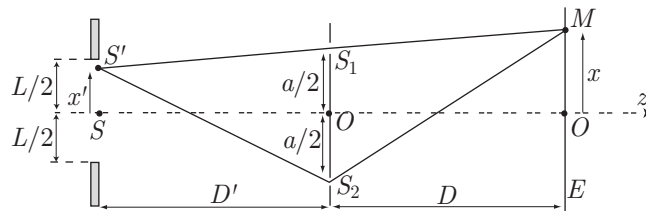
L'interfrange :

$$i = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

est le même que celui obtenu lorsque la source se trouve en  $S$ , tandis que le résultat (13) traduit la translation de la figure d'interférence vers le bas de l'écran (si  $x' > 0$ ).

#### 4.2.1.4 Emploi d'une source étendue monochromatique

On considère dorénavant que la source lumineuse est centrée sur  $S$  et présente une largeur verticale  $L$ . Elle est contenue dans un plan parallèle à l'écran contenant  $S_1, S_2$  et en est séparée d'une distance  $D'$ .



Chaque point de la source est repéré par son abscisse  $x' = \overline{SS'}$ . On décompose alors la source en sources infiniment fines, centrées en  $S'$  et de largeur élémentaire  $dx'$ . Puisque toutes ces sources sont mutuellement incohérentes (elles sont issues de sources

ponctuelles différentes), les éclaircements  $\delta\mathcal{E}$  qu'elles produisent en  $M$  s'additionnent. Enfin, on admettra que l'intensité lumineuse délivrée par la source est homogène (elle ne dépend pas de la position du point  $S'$ ), ce qui revient à poser :

$$\frac{\delta\mathcal{E}}{dx'} = \frac{\mathcal{E}_1}{L} \Rightarrow \delta\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1}{L} dx'$$

où  $\mathcal{E}_1$  est l'éclaircissement (12) produit par une source ponctuelle :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta \right) \right] \text{ avec } \delta = \frac{ax}{D} + \frac{ax'}{D'} \\ \Rightarrow \delta\mathcal{E} &= \frac{\mathcal{E}_0}{L} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} + \frac{2\pi ax'}{\lambda_0 D'} \right) \right] dx' \end{aligned}$$

En raison de l'incohérence des sources élémentaires, l'éclaircissement reçu en  $M$  vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_{x'=-L/2}^{x'=L/2} \delta\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} + \frac{2\pi ax'}{\lambda_0 D'} \right) \right] dx' \\ &= \mathcal{E}_0 + \frac{\mathcal{E}_0}{L} \frac{\lambda_0 D'}{2\pi a} \left[ \sin \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} + \frac{\pi a L}{\lambda_0 D'} \right) - \sin \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} - \frac{\pi a L}{\lambda_0 D'} \right) \right] \end{aligned}$$

À l'aide de l'identité trigonométrique :

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \left( \frac{p-q}{2} \right) \cos \left( \frac{p+q}{2} \right)$$

l'éclaircissement s'écrit aussi :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_0 \times \frac{\lambda_0 D'}{\pi L a} \times \sin \left( \frac{\pi a L}{\lambda_0 D'} \right) \times \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right)$$

soit encore :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \mathcal{V}(L) \times \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D} \right) \right] \quad (14)$$

où la *visibilité*  $\mathcal{V}(L)$  est donnée par la loi :

$$\mathcal{V}(L) = \text{sin}_c \left( \frac{\pi a L}{\lambda_0 D'} \right) \text{ avec } \text{sin}_c x = \frac{\sin x}{x}$$

Remarque – Lorsque  $L$  tend vers zéro :

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\text{sin}_c x] = 1 \Rightarrow \lim_{L \rightarrow 0} [\mathcal{V}(L)] = 1 \Rightarrow \lim_{L \rightarrow 0} \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \times \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{ax}{D} \right) \right]$$

On se ramène ainsi aux cas des interférences produites par une source fine, décrite par le résultat (11) :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{01} + \mathcal{E}_{02} + 2 \sqrt{\mathcal{E}_{01} \mathcal{E}_{02}} \times \cos \left( \frac{2\pi a}{\lambda_0 D} x \right)$$

 On s'intéresse à la figure d'interférence décrite par l'éclairement (14).

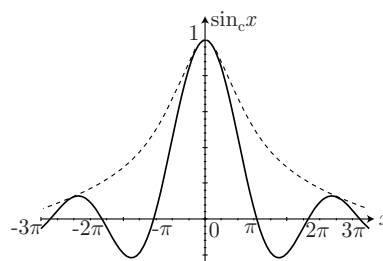
1. Donner la représentation graphique de la fonction *sinus cardinal* :  $\text{sin}_c x = \frac{\sin x}{x}$ .
2. Montrer que, dans le cas étudié, le contraste  $C$  s'identifie à la visibilité  $\mathcal{V}$ .
3. À partir de quelle valeur de  $L$  la figure d'interférence disparaît-elle pour la première fois ?

RÉPONSE

1. La fonction  $\text{sin}_c x = \frac{\sin x}{x}$  s'annule pour les valeurs non nulles de  $x$  telles que :

$$x = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}^*)$$

tandis qu'un développement en série de Taylor de  $\sin x$  montre que  $\lim_{x \rightarrow 0} [\text{sin}_c x] = 1$ . C'est pourquoi cette fonction admet pour représentation graphique :



2. Pour une valeur de  $L$  fixée, l'éclairement :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \mathcal{V}(L) \times \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{ax}{D} \right) \right]$$

admet deux valeurs extrêmes :

$$\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}_0 [1 + \mathcal{V}(L)] \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{\min} = \mathcal{E}_0 [1 - \mathcal{V}(L)]$$

à partir desquelles est défini le contraste de la figure d'interférence :

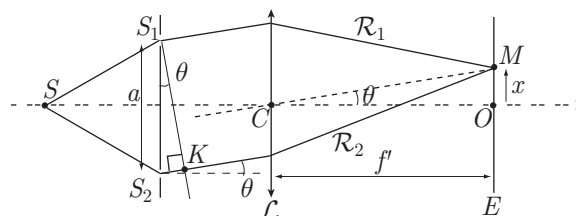
$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}{\mathcal{E}_{\max} + \mathcal{E}_{\min}} = \frac{2\mathcal{E}_0 \mathcal{V}(L)}{2\mathcal{E}_0} \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{V}(L)$$

3. La représentation graphique de la fonction  $\text{sin}_c x$  montre que la figure d'interférence disparaît une première fois pour une valeur  $L_0$  de  $L$  telle que :

$$\mathcal{V}(L_0) = 0 \Rightarrow \frac{\pi a L_0}{\lambda_0 D'} = \pi \Rightarrow L_0 = \frac{\lambda_0 D'}{a}$$

#### 4.2.1.5 Emploi d'une lentille

Une source ponctuelle  $S$ , monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ , est placée à égale distance de deux petits trous  $S_1, S_2$  percés dans un écran opaque. Du fait de la diffraction,  $S_1$  et  $S_2$  émettent des rayons dans toutes les directions de l'espace. Parmi ceux-ci, un couple de rayons parallèles,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , font un angle  $\theta$  avec la direction de l'axe optique d'une lentille convergente  $\mathcal{L}$ , de distance focale image  $f'$  :



Dans le plan focal image de  $\mathcal{L}$  est placé un écran où convergent les rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui émergent de  $\mathcal{L}$ . Le point de convergence  $M$  est repéré par rapport au foyer image  $O$  de  $\mathcal{L}$  :  $x = \overline{OM}$ .

Le point  $K$  est le projeté orthogonal de  $S_1$  sur  $\mathcal{R}_2$ .

Conformément au résultat (6) de la page 501 :

$$(S_1M) = (KM)$$

car  $S_1K$  est perpendiculaire aux rayons qui se rejoignent en  $M$ , tandis que les points  $S_1$  et  $S_2$  sont équidistants de  $S$ . C'est pourquoi la différence de marche  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  vaut :

$$\delta = KS_2 = a \sin \theta \simeq a \theta$$

Quant au point  $M$ , son abscisse vaut :

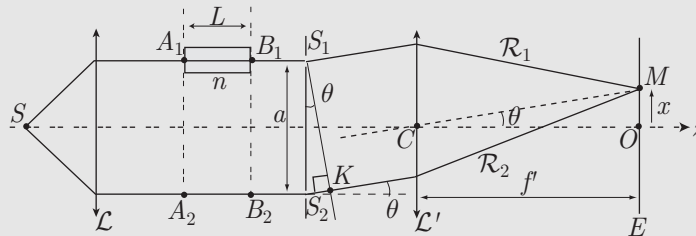
$$x = f' \tan \theta \simeq f' \theta \Rightarrow \delta = \frac{a}{f'} x$$

À nouveau, les franges claires se trouvent aux abscisses  $x_n$  telles que :

$$\delta = n\lambda_0 \Rightarrow \frac{a}{f'} x_n = n\lambda_0 \Rightarrow x_n = n \times \frac{\lambda_0 f'}{a} \quad (n \in \mathbb{Z})$$



Une source ponctuelle monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda_0$ ) est située au foyer objet  $S$  d'une lentille convergente  $\mathcal{L}$ . De  $\mathcal{L}$  sont issus deux rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , parallèles à l'axe optique ( $Sz$ ) de  $\mathcal{L}$  et qui se dirigent vers des petits trous percés en  $S_1$  et  $S_2$  d'un écran opaque. On intercale, sur le trajet de  $\mathcal{R}_1$ , un cylindre de longueur  $L$  et d'indice de réfraction  $n$ .  $\mathcal{R}_1$  y pénètre en  $A_1$  et en ressort en  $B_1$ . On note  $A_2$  et  $B_2$  les projetés orthogonaux de  $A_1$  et  $B_1$  sur  $\mathcal{R}_2$ .



À la sortie de l'écran percé est placée une lentille convergente  $\mathcal{L}'$ , de distance focale  $f'$  et dont le centre optique  $C$  appartient à l'axe ( $Sz$ ). Deux rayons, qui partent de  $S_1$  et  $S_2$  avec le même angle  $\theta$  par rapport à ( $Sz$ ), émergent de  $\mathcal{L}'$  où se trouve un écran  $E$ . La position de leur intersection  $M$  est repérée depuis le foyer image  $O$  de  $\mathcal{L}'$  :  $\overline{OM} = x$ .

1. Déterminer les chemins optiques ( $A_1M$ ) et ( $A_2M$ ).
2. En déduire le déphasage des rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui parviennent en  $M$ .
3. Décrire la figure d'interférence observée sur  $E$  (position des franges claires et interférence).

## RÉPONSE

1. Le chemin optique  $(A_1M)$  vaut :

$$(A_1M) = (A_1B_1) + (B_1S_1) + (S_1M) = nL + B_1S_1 + (S_1M)$$

tandis que  $(A_2M)$  s'écrit :

$$(A_2M) = (A_2B_2) + (B_2S_2) + (S_2K) + (KM) = L + B_2S_2 + S_2K + (KM)$$

avec :

$$\sin \theta \simeq \theta = \frac{KS_2}{a} \Rightarrow KS_2 \simeq a\theta \text{ et } \tan \theta \simeq \theta = \frac{x}{f'} \Rightarrow KS_2 = \frac{a}{f'} x$$

2. Les points  $A_1$  et  $A_2$ , issus d'une même source  $S$  et appartenant à un plan perpendiculaire à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  présentent la même phase.

**⚠** Cet argument ne prévaut plus pour les points  $B_1$  et  $B_2$  car le cylindre de longueur  $L$  introduit un déphasage supplémentaire sur  $\mathcal{R}_1$ . En revanche tous les rayons sortant du cylindre parallèlement à  $\mathcal{R}_1$  possèdent des surfaces d'onde perpendiculaires à  $\mathcal{R}_1$ . Ceci n'empêche pas l'identité des chemins optiques  $(S_1M)$  et  $(KM)$ , conformément au résultat (6) de la page 501

Les distances  $B_1S_1$  et  $B_2S_2$  sont égales, de même que les chemins optiques  $(S_1M)$  et  $(KM)$  des rayons qui convergent en un même point image  $M$ . C'est pourquoi la différence des chemins optiques :

$$\delta = (A_2M) - (A_1M) = (1 - n)L + \frac{a}{f'} x$$

est à l'origine du déphasage de  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui arrivent en  $M$  :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[ \frac{a}{f'} x - (n - 1)L \right]$$

3. Étant donné que l'éclairement ne dépend que de  $x$  :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 [1 + \cos(\Delta\phi)] \text{ avec } \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \left[ \frac{a}{f'} x - (n - 1)L \right]$$

les franges d'interférence sont des segments perpendiculaires à  $E$  et à  $(Sz)$  ; les franges claires correspondent alors aux abscisses  $x_m$  qui assurent :

$$\Delta\phi = m \times 2\pi \Rightarrow \frac{a}{f'} x_m - (n - 1)L = m\lambda_0 \Rightarrow x_m = m \times \frac{\lambda_0 f'}{a} + \frac{(n - 1)L f'}{a} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

En l'absence de cylindre, ces abscisses vaudraient :

$$x_m = m \times \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

de sorte que l'introduction du cylindre provoque une translation de la figure d'interférence vers le bas de l'écran et sur une distance  $\frac{(n - 1)L f'}{a}$ . En outre l'interfrange demeure inchangé et vaut :

$$i = x_{m+1} - x_m = \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

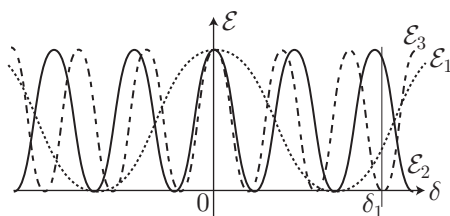
#### 4.2.1.6 Emploi d'une source de lumière blanche

Soit  $S$  une source quasi ponctuelle qui émet de la lumière blanche, composée de rayonnements dont les longueurs d'onde prennent toutes les valeurs comprises entre  $\lambda_{\min} = 400$  nm (violet) et  $\lambda_{\max} = 700$  nm (rouge). Cette source éclaire un écran opaque percé de deux trous  $S_1$  et  $S_2$  comme indiqué sur le schéma de la figure en page 505, de manière à produire, sur un écran  $E$ , des franges d'interférence caractérisées par l'éclairement :

$$\mathcal{E}_i = \mathcal{E}_0 \cos^2 \left( \frac{k_{0i} \delta}{2} \right) \text{ avec } k_{0i} = \frac{2\pi}{\lambda_{0i}}$$



où  $\lambda_{0i}$  désigne la longueur d'onde, dans le vide, associée à chaque couleur émise par  $S$ . Puisqu'il ne peut y avoir d'interférences en lumière polychromatique, les éclaircissements  $\mathcal{E}_i$  s'additionnent sur l'écran :



Les franges claires apparaissent, pour chaque rayonnement, aux abscisses  $x_p$  telles que :

$$\delta = \frac{ax_p}{D} = p\lambda_{0i} \Rightarrow x_p = p \times \frac{\lambda_{0i}D}{a} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

Notamment, pour toutes les longueurs d'onde, l'ordre d'interférence  $p = 0$  correspond à  $x = 0$ ; la lumière blanche s'y recompose. De même, des franges sombres apparaissent aux abscisses  $x_p$  telles que :

$$\delta = \frac{ax_p}{D} = (2p + 1) \frac{\lambda_{0i}}{2} \Rightarrow x_p = (2p + 1) \times \frac{\lambda_{0i}D}{2a} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

À une abscisse  $x_p$  donnée, seules les radiations de longueur d'onde :

$$\lambda_{0i} = \frac{2ax_p}{(2p + 1)D} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \quad (15)$$

produisent un éclaircissement nul, ce qui peut être mis en évidence en plaçant en  $x_p$  un spectromètre ; un spectre *cannelé* apparaît (chaque cannelure correspond à une longueur d'onde  $\lambda_{0i}$  absente du spectre). Les autres radiations sont cependant présentes et ajoutent leurs éclaircissements ; une lumière blanche y est formée (il s'agit d'un *blanc d'ordre supérieur*).



On réalise l'expérience des trous d'Young en lumière blanche. Les trous  $S_1$  et  $S_2$  sont séparés de  $a = 1$  mm et se trouvent à une distance  $D = 1$  m d'un écran  $E$ . Dans ce dernier est percé d'un petit trou à l'abscisse  $x = 1$  mm, derrière lequel un spectromètre détecte un spectre cannelé.

Combien de cannelures apparaissent et à quelles longueurs d'onde correspondent-elles ?

**RÉPONSE** Les cannelures noires correspondent aux longueurs d'onde  $\lambda_{0i}$  vérifiant la relation (15) :

$$\lambda_{0i} = \frac{2ax_p}{(2p + 1)D} \text{ avec } p \in \mathbb{Z}$$

où  $a = 10^{-3}$  m,  $x_p = 10^{-3}$  m et  $D = 1$  m :

$$\lambda_{0i} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2p + 1}$$

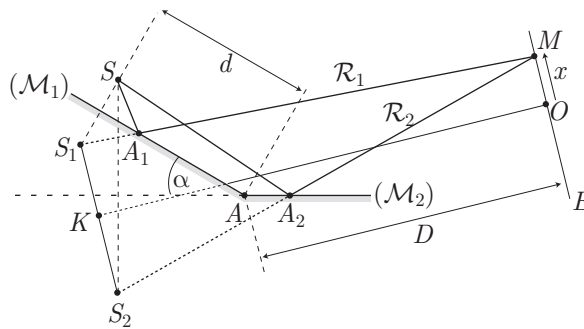
Pour diverses valeurs entières de  $p$  (ici  $p \geq 0$  car  $\lambda_{0i} > 0$ ), ces longueurs d'onde valent par conséquent :

$p$	0	1	2	3	...
$\lambda_{0i}$ (nm)	2 000	667	400	286	...

Or, puisque la lumière blanche n'est composée que de radiations de longueurs d'ondes comprises entre 400 nm et 700 nm, seules deux cannelures apparaissent dans le spectre ; elles correspondent à l'absence de radiation pour  $\lambda = 667$  nm ( $p = 1$ ) et  $\lambda_0 = 400$  nm ( $p = 2$ ).

### 4.2.2 Miroirs de Fresnel

Deux miroirs plans ( $\mathcal{M}_1$ ) et ( $\mathcal{M}_2$ ) ont une arête commune, dont la trace sur la feuille est  $A$ . Ces deux miroirs sont inclinés d'un angle  $\alpha$  petit l'un par rapport à l'autre. Une source ponctuelle, située en un point  $S$  tel que  $AS = d$ , émet de la lumière monochromatique.



Les images de  $S$  par ( $\mathcal{M}_1$ ) et ( $\mathcal{M}_2$ ), notées respectivement  $S_1$  et  $S_2$ , sont symétriques par rapport à ( $\mathcal{M}_1$ ) et ( $\mathcal{M}_2$ ).  $K$  désignant le milieu du segment  $[S_1, S_2]$ , on place un écran  $E$  perpendiculairement à  $(KA)$ , à une distance  $D$  de  $A$ . Le projeté orthogonal de  $K$  sur  $E$  coïncide avec un point  $O$ , lequel permet de repérer tout point  $M$  de  $E$  par  $x = \overline{OM}$ .

De  $S$  partent, entre autres, deux rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui convergent en  $M$ . Ces rayons se réfléchissent en ( $\mathcal{M}_1$ ) au point  $A_1$  et en ( $\mathcal{M}_2$ ) au point  $A_2$ . C'est pourquoi les chemins optiques associés à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  valent :

$$(SM)_1 = (SA_1) + (A_1M) = SA_1 + A_1M = S_1A_1 + A_1M = S_1M$$

et :

$$(SM)_2 = (SA_2) + (A_2M) = SA_2 + A_2M = S_2A_2 + A_2M = S_2M$$

et leur différence s'écrit alors :


$$\delta = S_2M - S_1M$$

On peut alors montrer (voir exercice suivant) que des franges d'interférence brillantes se forment sur  $E$  aux abscisses :

$$x_n = n \times \frac{\lambda_0 (D + d)}{2d\alpha} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

et ont pour interfrange :

$$i = \frac{\lambda_0 (D + d)}{2d\alpha} \tag{16}$$

 On reprend les notations précédentes, auxquelles sont ajoutés les angles aigus non orientés  $\gamma = (\mathcal{M}_1, SA)$ ,  $\phi = (\mathcal{M}_2, SA)$  et la distance  $a = S_1S_2$ .

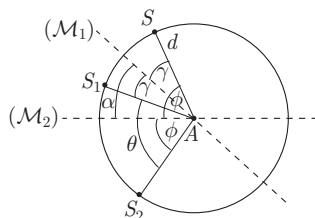
1. Comparer les distances  $SA$ ,  $S_1A$  et  $S_2A$ .
2. Déterminer, en fonction de  $\alpha$ , l'angle  $\theta = (S_1A, AS_2)$ .
3. En considérant  $\alpha$  petit, exprimer  $a$  en fonction de  $\alpha$  et  $d$ . Faire de même avec la distance  $KA$ .
4. Montrer que  $\delta = \frac{2d\alpha}{D+d} \times x$ . En déduire l'expression (16) de l'interfrange.

#### RÉPONSE

1. Les points  $S$  et  $S_1$  sont symétriques par rapport à  $(\mathcal{M}_1)$ , qui contient  $A$ . Donc  $A$  est à égale distance de  $S$  et  $S_1$ . Il en va de même pour le couple de points  $\{S, S_2\}$  symétriques par rapport à  $(\mathcal{M}_2)$  qui contient  $A$ . C'est pourquoi :

$$S_2A = SA = S_1A = d$$

2. La relation précédente révèle que les points  $S$ ,  $S_1$  et  $S_2$  appartiennent tous à un cercle de centre  $A$  et de rayon  $d$  :



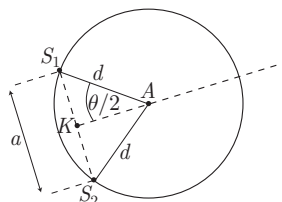
Sur ce schéma, on remarque que :

$$(SA, AS_2) = 2\phi = \theta + 2\gamma$$

tandis que :

$$\phi = \alpha + \gamma \Rightarrow \theta + 2\gamma = 2\alpha + 2\gamma \Rightarrow \theta = 2\alpha$$

3. Si  $K$  désigne le milieu du segment  $[S_1S_2]$ , la distance  $S_1K$  vaut  $\frac{a}{2}$  :



Aussi, en considérant  $\alpha$  petit (donc  $\theta = 2\alpha$  aussi), on peut poser :

$$\begin{aligned} KS_1 &= d \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \simeq d \times \frac{\theta}{2} = \alpha d \text{ car } \theta = 2\alpha \\ \Rightarrow a &= 2KS_1 = 2\alpha d \end{aligned}$$

De même :

$$KA = d \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \simeq d$$

4. En vertu de ces approximations, il est possible d'évaluer les distances  $S_1M$  et  $S_2M$  :

$$\begin{aligned} S_2M &= \sqrt{KO^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} = KO \left[1 + \frac{1}{KO^2} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{1/2} \\ &\simeq KO + \frac{1}{2KO} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \text{ si } x + \frac{a}{2} \ll KO \end{aligned}$$

et :

$$S_1M = \sqrt{KO^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} = KO \left[1 + \frac{1}{KO^2} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\simeq KO + \frac{1}{2KO} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

à partir desquelles s'obtient la différence de marche :

$$\delta = S_2M - S_1M = \frac{1}{2KO} \times 2x \times a = \frac{a}{KO} \times x$$

avec :  $KO = KA + AO = D + d$  et  $a = 2\alpha d$  :

$$\delta = \frac{2\alpha d}{D + d} \times x$$

Par suite, des franges claires apparaissent aux abscisses  $x_n$  qui vérifient :

$$\delta = n \times \lambda_0 \Rightarrow x_n \times \frac{2\alpha d}{D + d} = n\lambda_0 \Rightarrow x_n = n \times \frac{\lambda_0 (D + d)}{2\alpha d} \quad n \in \mathbb{Z}$$

d'où se déduit l'interfrange :

$$i = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda_0 (D + d)}{2\alpha d}$$

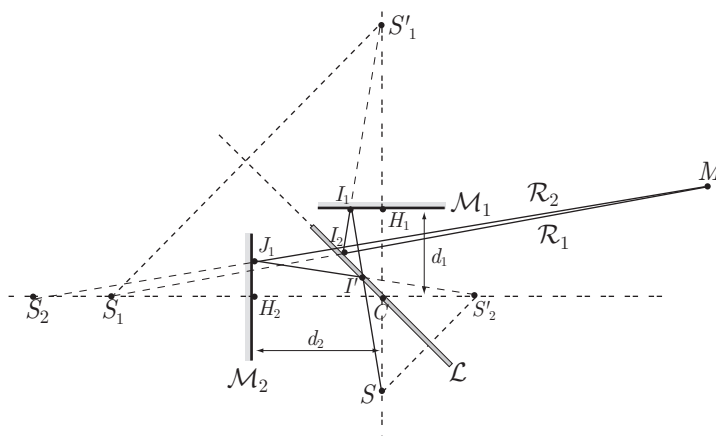
## 4.3 Interféromètre de Michelson

L'interféromètre de Michelson est un dispositif *diviseur d'amplitude* car une lame semi-réfléchissante divise le faisceau incident en deux faisceaux d'égale amplitude, dont on visualise la figure d'interférence.

### 4.3.1 Utilisation en lame d'air

#### 4.3.1.1 Source ponctuelle et lumière monochromatique

L'interféromètre est composé de deux miroirs ( $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ ) perpendiculaires et d'une lame semi-réfléchissante  $\mathcal{L}$  (aussi appelée *lame séparatrice*) inclinée à  $45^\circ$  par rapport à  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ . Une source ponctuelle  $S$  émet un rayonnement visible de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans l'air (assimilé au vide). Soit  $C$  le centre de  $\mathcal{L}$  ; les miroirs sont situés aux distances respectives  $d_1$  et  $d_2$  de  $C$ . On négligera, ici, les éventuels déphasages de  $\pi$  subis par les rayons au cours de leurs réflexions.



Un rayon  $\mathcal{R}$  issu de  $S$  rencontre  $\mathcal{L}$  en un point  $I'$  d'où il se dissocie en deux rayons de même intensité :

- un rayon  $\mathcal{R}_1$  qui traverse  $\mathcal{L}$  et rencontre  $\mathcal{M}_1$  en  $I_1$ . Le rayon réfléchi semble provenir de l'image  $S'_1$  de  $S$  par  $\mathcal{M}_1$  et rencontre  $\mathcal{L}$  en  $I_2$ . À nouveau, le rayon réfléchi semble issu de l'image  $S_1$  de  $S'_1$  par  $\mathcal{L}$ . Ce rayon est ainsi réfléchi par  $\mathcal{L}$ .
- un rayon  $\mathcal{R}_2$  qui est réfléchi par  $\mathcal{L}$  comme s'il provenait de l'image  $S'_2$  de  $S$  par  $\mathcal{L}$ . Ce rayon rencontre  $\mathcal{M}_2$  en  $J_1$  où il se réfléchit comme s'il était issu de l'image  $S_2$  de  $S'_2$  par  $\mathcal{M}_2$ .

À leur point d'intersection  $M$ , ces rayons peuvent interférer. Ces interférences ne sont pas localisées. Compte tenu des définitions des images secondaires  $S_1$  et  $S_2$ , les chemins optiques vérifient :

$$\begin{aligned}(SI_1I_2M) &= SI_1 + I_1I_2 + I_2M = S'_1I_1 + I_1I_2 + I_2M \\ &= S'_1I_2 + I_2M = S_1I_2 + I_2M = S_1M\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}(SJ_1M) &= SI' + I'J_1 + J_1M = S'_2I' + I'J_1 + J_1M \\ &= S'_2J_1 + J_1M = S_2J_1 + J_1M = S_2M\end{aligned}$$

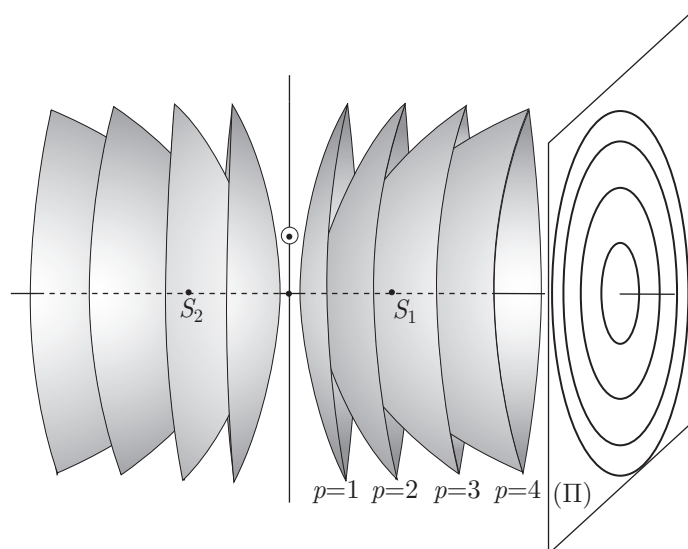
Aussi, la différence des chemins optiques  $\delta = (SJ_1M) - (SI_1I_2M)$  entre les rayons qui se rencontrent en  $M$  vaut :

$$\delta = S_2M - S_1M$$

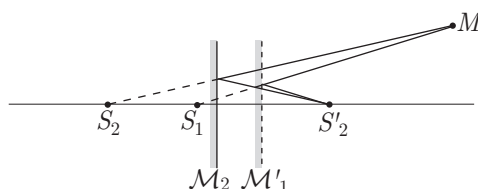
ce qui montre que la situation est équivalente à celle obtenue à partir de deux sources ponctuelles cohérentes  $S_1$  et  $S_2$ . On peut également montrer que :

$$e = S_1S_2 = 2|d_2 - d_1|$$

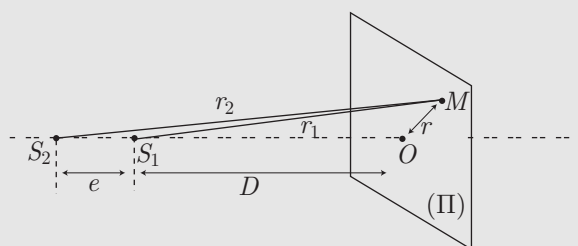
Conformément aux résultats de l'exercice de la page 558, les franges d'interférence sont les points  $M$  solutions de l'équation :  $\delta = \text{cte}$ , c'est-à-dire des hyperboloïdes de révolution d'axe  $S_1S_2$  :



dont les traces, sur un écran (II) perpendiculaire à  $(S_1S_2)$  sont des cercles concentriques, dont les rayons décroissent avec l'augmentation de l'ordre d'interférence  $p$ . Ce montage est équivalent à une lame d'air constituée du miroir  $M_2$  et de l'image  $M'_1$  de  $M_1$  par  $\mathcal{L}$ , éclairée par l'image  $S'_2$  de  $S$  par  $\mathcal{L}$  :



Soient  $S_1$  et  $S_2$  les deux sources secondaires d'un interféromètre de Michelson éclairé en lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ . L'axe  $(S_2S_1)$  coupe un plan (II), perpendiculaire à  $(S_1S_2)$ , en un point  $O$  tel que  $D = S_1O$  et  $S_1S_2 = e$ . Un point  $M$  de (II) est repéré par  $r = OM$  et se trouve aux distances  $r_1 = S_1M$  et  $r_2 = S_2M$  des points  $S_1$  et  $S_2$  :



On supposera, dans la suite, que  $S_2O \gg r$ ,  $S_1O \gg r$  et  $D \gg e$ .

- Exprimer la différence de chemin optique  $\delta$  en fonction de  $e$ ,  $r^2$  et  $D^2$ . En déduire l'allure de la figure d'interférence qui apparaît sur (II).
- On suppose, dans un premier temps, que le centre  $O$  est un point d'éclairement *maximum*. En déduire l'expression de  $r_k$  associé à la  $k^{\text{ème}}$  frange brillante.
- On suppose maintenant que le centre  $O$  n'est plus un point où l'éclairement est *maximum*; on note  $p_0 \notin \mathbb{N}$  son ordre d'interférence. Il existe alors un réel  $\varepsilon$  ( $1 > \varepsilon > 0$ ) tel que la première frange brillante correspond à un ordre d'interférence entier  $p_1 = p_0 - \varepsilon$ .

- Exprimer, en fonction de  $p_1$  et  $k$ , l'ordre d'interférence de la  $k^{\text{ème}}$  frange claire.
- Montrer qu'il lui correspond une valeur de  $r_k$  proportionnelle à  $\sqrt{k + \varepsilon - 1}$  :

$$r_k = A \sqrt{k + \varepsilon - 1}$$

où l'on exprimera la constante  $A$  en fonction de  $D$ ,  $\lambda_0$  et  $e$ .

- On diminue la distance  $e$ . Qu'observe-t-on sur (II) ?

#### RÉPONSE

- Les distances  $r_1$  et  $r_2$  s'obtiennent à l'aide du théorème de Pythagore :

$$r_1 = \sqrt{S_1O^2 + r^2} = \sqrt{D^2 + r^2} = D \left( 1 + \frac{r^2}{D^2} \right)^{1/2}$$

et

$$r_2 = \sqrt{S_2 O^2 + r^2} = \sqrt{(D+e)^2 + r^2} = (D+e) \left[ 1 + \frac{r^2}{(D+e)^2} \right]^{1/2}$$

où  $D \gg r$  suggère l'emploi de développements limités :

$$r_1 \simeq D \left( 1 + \frac{r^2}{2D^2} \right) = D + \frac{r^2}{2D} \text{ et } r_2 \simeq D + e + \frac{r^2}{2(D+e)}$$

Ce faisant la différence de chemin optique (dans l'air où l'indice de réfraction est voisin de 1) vaut :

$$\begin{aligned} \delta &= r_2 - r_1 = e + \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{D+e} - \frac{1}{D} \right) = e - \frac{e}{2D(D+e)} r^2 \\ \Rightarrow \delta &\simeq e - \frac{e}{2D^2} r^2 \text{ car } D \gg e \Rightarrow D+e \simeq D \end{aligned}$$

Aussi, le plan (II) reçoit l'éclairement :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \left( \frac{k_0 \delta}{2} \right) \text{ avec } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

qui produit des franges d'interférence lorsque  $\delta$  est constant, c'est-à-dire lorsque  $r$  est constant ; ces franges sont des cercles concentriques, de rayons  $r$  et de centre  $O$ .

2. L'ordre d'interférence  $p_k$  d'un point situé à une distance  $r_k$  de  $O$  est défini par :

$$\frac{k_0 \delta}{2} = p_k \pi \Rightarrow \frac{2\pi \delta}{2\lambda_0} = p_k \pi \Rightarrow p_k = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{e}{\lambda_0} - \frac{e}{2D^2 \lambda_0} r_k^2 \quad (17)$$

Cette relation montre que  $p_k$  est une fonction décroissante de  $r_k$ , ce qui signifie aussi que c'est en  $O$  ( $r_k = 0$ ) que l'ordre d'interférence est *maximum* et vaut :

$$p_0 = p_{\max} = \frac{e}{\lambda_0}$$

En outre, si  $O$  est un point d'éclairement *maximum*, cela signifie que  $p_0$  est un entier, si bien que le premier cercle brillant correspond à :

$$p_1 = p_0 - 1 < p_0 \text{ et } p_1 \in \mathbb{N}$$

de même que le  $k^{\text{ème}}$  cercle brillant aura pour ordre d'interférence :

$$p_k = p_0 - k$$

Compte tenu de l'expression :  $p_0 = \frac{e}{\lambda_0}$  et de celle de  $p_k$ , il s'ensuit que :

$$\frac{e}{\lambda_0} - \frac{e}{2D^2 \lambda_0} r_k^2 = \frac{e}{\lambda_0} - k \Rightarrow r_k = D \sqrt{\frac{2\lambda_0}{e}} \sqrt{k}$$

3. (a) Le deuxième cercle brillant est associé à l'ordre d'interférence :

$$p_2 = p_1 - 1 \text{ et } p_2 \in \mathbb{N}$$

ce qui permet, par généralisation, d'en déduire l'ordre d'interférence du  $k^{\text{ème}}$  cercle brillant :

$$p_k = p_1 - (k - 1)$$

- (b) Compte tenu de l'expression de  $p_k$  :

$$p_k = p_1 - (k - 1) = \frac{e}{\lambda_0} - \frac{e}{2D^2 \lambda_0} r_k^2$$

et de  $p_1 = p_0 - \varepsilon = \frac{e}{\lambda_0} - \varepsilon$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{e}{\lambda_0} - \varepsilon - k + 1 &= \frac{e}{\lambda_0} - \frac{e}{2D^2 \lambda_0} r_k^2 \Rightarrow \frac{e}{2D^2 \lambda_0} r_k^2 = k + \varepsilon - 1 \\ \Rightarrow r_k &= D \sqrt{\frac{2\lambda_0}{e}} \sqrt{k + \varepsilon - 1} \end{aligned}$$

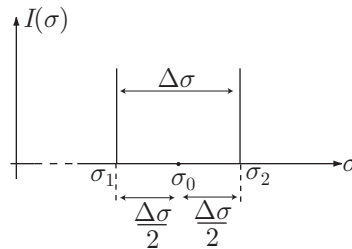
- (c) Chaque cercle de la figure d'interférence, de rayon  $r_k$ , est caractérisé par un ordre d'interférence  $p_k$  donné par le résultat (17) :

$$p_k = \frac{e}{\lambda_0} \left( 1 - \frac{r_k^2}{2D^2} \right) \Rightarrow r_k = \sqrt{2D^2} \sqrt{1 - \frac{\lambda_0 p_k}{e}}$$

Aussi, lorsque  $e$  diminue,  $\frac{\lambda_0 p_k}{e}$  augmente, de sorte que  $r_k$  diminue. Les anneaux semblent alors « rentrer » dans le centre  $O$ .

### 4.3.1.2 Source ponctuelle composée de deux longueurs d'onde

Considérons une source ponctuelle  $S$  qui émet de la lumière composée de deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , auxquelles sont associés les nombres d'onde  $\sigma_1 = \frac{1}{\lambda_1}$  et  $\sigma_2 = \frac{1}{\lambda_2}$ . Le spectre d'émission de cette source prend alors la forme suivante :



et l'on posera :  $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1 \ll \sigma_0$ , avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$ .

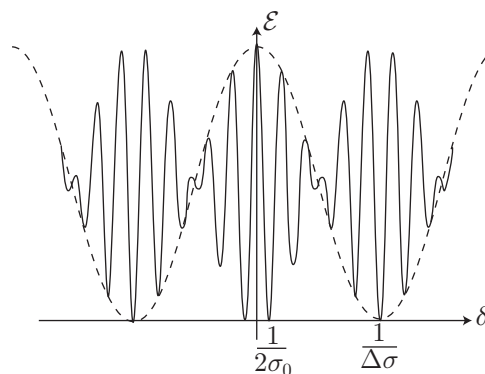
Étant donné que ces rayonnements ne présentent pas les mêmes fréquences, ils créent chacun leur système d'interférences, caractérisé chacun par leur éclairement :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{2} [1 + \cos(k_1\delta)] \text{ et } \mathcal{E}_2 = \frac{\mathcal{E}_0}{2} [1 + \cos(k_2\delta)] \text{ avec } \delta = S_2M - S_1M$$

où  $\mathcal{E}_0$  désigne l'éclairement que recevrait l'écran en l'absence d'interférence. L'éclairement résultant vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_0 + \frac{\mathcal{E}_0}{2} [\cos(k_1\delta) + \cos(k_2\delta)] \\ &= \mathcal{E}_0 + \frac{\mathcal{E}_0}{2} [\cos(2\pi\sigma_1\delta) + \cos(2\pi\sigma_2\delta)] \\ &\Rightarrow \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 [1 + \cos(\pi\Delta\sigma\delta) \times \cos(2\pi\sigma_0\delta)] \end{aligned}$$

Puisque  $\Delta\sigma \ll \sigma_0$ , cet éclairement a pour représentation graphique :



La condition  $\Delta\sigma \ll \sigma_0$  implique que la quasi-totalité des franges claires sont obtenues pour  $\delta \in \left[-\frac{1}{\Delta\sigma}, \frac{1}{\Delta\sigma}\right]$  au delà de quoi les rayonnements ne sont plus cohérents



(les calculs précédents ne tiennent pas compte de l'incohérence consécutive à un accroissement exagéré de  $\delta$ ). C'est pourquoi les valeurs *maximum* et *minimum* prises par l'éclairement :

$$\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}_0 [1 + \cos(\pi \Delta \sigma \delta)] \text{ et } \mathcal{E}_{\min} = \mathcal{E}_0 [1 - \cos(\pi \Delta \sigma \delta)]$$

conduisent au contraste de la figure d'interférence :

$$\mathcal{C} = \frac{\mathcal{E}_{\max} - \mathcal{E}_{\min}}{\mathcal{E}_{\max} + \mathcal{E}_{\min}} = \cos(\pi \Delta \sigma \delta)$$

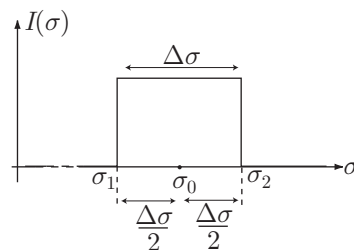
Remarque – Ce contraste, aussi appelé facteur de visibilité  $\mathcal{V}$ , donne à l'éclairement la forme :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 [1 + \mathcal{V} \times \cos(2\pi \sigma_0 \delta)]$$

#### 4.3.1.3 Source ponctuelle et lumière polychromatique

Considérons maintenant une source ponctuelle qui émet de la lumière dont le spectre en nombres d'onde est caractérisé par :

$$\begin{cases} I(\sigma) = \text{cte pour } \sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2 \\ I(\sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \leq \sigma_1 \text{ ou } \sigma \geq \sigma_2 \end{cases}$$



On posera :

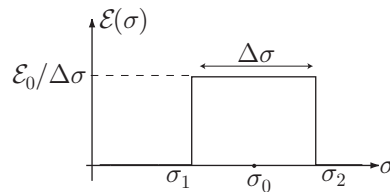
$$\sigma_1 = \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \quad \sigma_2 = \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \quad \Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$$

À une gamme de nombres d'onde compris entre  $\sigma$  et  $\sigma + d\sigma$  correspond une figure d'interférence décrite par un éclairement, sur l'écran :

$$d\mathcal{E} = \mathcal{E}(\sigma) [1 + \cos(k\delta)] d\sigma$$

où :

$$\begin{cases} \mathcal{E}(\sigma) = \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta\sigma} \text{ pour } \sigma \in [\sigma_1, \sigma_2] \\ \mathcal{E}(\sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \notin [\sigma_1, \sigma_2] \end{cases}$$



En posant :  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$ , l'éclairement s'écrit aussi :

$$d\mathcal{E} = \mathcal{E}(\sigma) [1 + \cos(2\pi\sigma\delta)] d\sigma$$

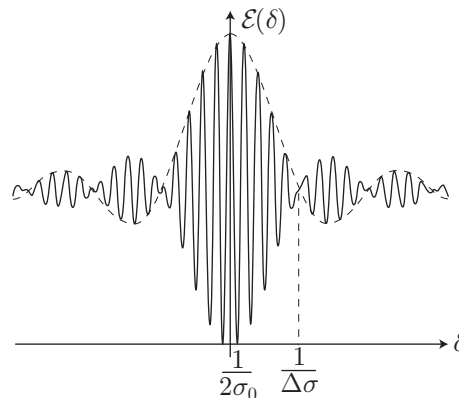
Des rayonnements de nombres d'onde différents ne peuvent pas interférer, en conséquence de quoi les éclaircissements s'additionnent sur l'écran et ont pour résultante :

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= \int_0^\infty \mathcal{E}(\sigma) [1 + \cos(2\pi\sigma\delta)] d\sigma = \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta\sigma} \left[ \Delta\sigma + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \cos(2\pi\sigma\delta) d\sigma \right] \\ &= \mathcal{E}_0 + \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta\sigma} \times \frac{1}{2\pi\delta} [\sin(2\pi\sigma_2\delta) - \sin(2\pi\sigma_1\delta)] \\ &= \mathcal{E}_0 + \frac{\mathcal{E}_0}{2\pi\Delta\sigma\delta} \times 2 \sin(\pi\Delta\sigma\delta) \cos(2\pi\sigma_0\delta)\end{aligned}$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme suivante :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 [1 + \mathcal{V}(\Delta\sigma) \times \cos(2\pi\sigma_0\delta)] \text{ avec } \mathcal{V}(\Delta\sigma) = \frac{\sin(\pi\Delta\sigma\delta)}{\pi\Delta\sigma\delta}$$

De cette expression découle la représentation graphique de  $\mathcal{E}$  :



Remarque – La diminution du contraste provoquée par l'augmentation de  $\delta$  provient de la nature polychromatique de la source. En revanche, la réapparition du contraste pour  $\delta > \frac{1}{\Delta\sigma}$  est liée à la modélisation choisie (fonction « porte ») pour  $\mathcal{E}$ .

Étant donné que  $\Delta\sigma \ll \sigma_0$ , on peut s'assurer que  $\mathcal{E}$  varie entre :

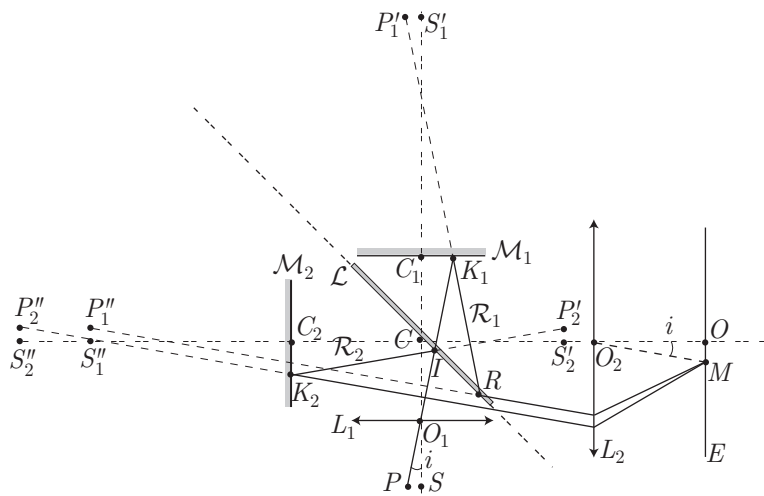
$$\mathcal{E}_{\max} = \mathcal{E}_0 [1 + \mathcal{V}(\Delta\sigma)] \text{ et } \mathcal{E}_{\min} = \mathcal{E}_0 [1 - \mathcal{V}(\Delta\sigma)]$$

auquel cas le contraste de la figure d'interférence vaut :

$$C = \mathcal{V}(\Delta\sigma) = \text{sin}_c(\pi\Delta\sigma\delta) = \frac{\sin(\pi\Delta\sigma\delta)}{\pi\Delta\sigma\delta}$$

#### 4.3.1.4 Source étendue et lumière monochromatique

Lorsque la source est étendue, l'emploi d'une lentille convergente ( $L_1$ ) autorise l'obtention d'une figure d'interférence en dépit de l'incohérence mutuelle des points de la source, supposée centrée en  $S$  :



Soient :

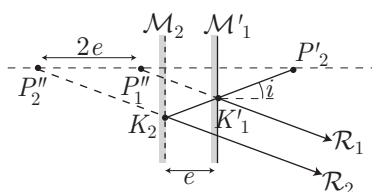
- $S'_1$  l'image de  $S$  par le miroir  $M_1$ ,  $C_1$  le milieu du segment  $[SS'_1]$ ,  $S''_1$  l'image de  $S'_1$  par la séparatrice  $\mathcal{L}$  ;
- $S'_2$  l'image de  $S$  par  $\mathcal{L}$ ,  $S''_2$  l'image de  $S'_2$  par  $M_2$ ,  $C_2$  le milieu du segment  $[S'_2S''_2]$  ;
- $O_1$  le centre optique de la lentille convergente  $L_1$ , de foyer objet  $S$  et de distance focale  $f_1$  ;
- $O_2$  le centre optique de la lentille convergente  $L_2$ , de foyer image  $O$  et de distance focale  $f_2$  ;
- $E$  un écran situé dans le plan focal image de  $L_2$  et  $M$  un point de  $E$  où convergent les rayons qui arrivent sur  $L_2$  avec l'incidence  $i$  ;
- $P$  un point de la source, contenu dans le plan focal objet de  $L_1$ ,  $P'_1S'_1$  l'image de  $PS$  par  $M_1$ ,  $P''_1S''_1$  l'image de  $P'_1S'_1$  par  $\mathcal{L}$ ,  $P'_2S'_2$  l'image de  $PS$  par  $\mathcal{L}$  et  $P''_2S''_2$  l'image de  $P'_2S'_2$  par  $M_2$ .

Parmi les rayons émis par  $P$ , celui qui passe par  $O_1$  (sous l'incidence  $i$ ) ne subit pas de déviation et rencontre  $\mathcal{L}$  en un point  $I$ , où il se dédouble en :

- un rayon  $\mathcal{R}_1$  directement transmis par  $\mathcal{L}$ , qui rencontre  $M_1$  en  $K_1$ , d'où il est réfléchi comme s'il provenait de  $P'_1$ .  $\mathcal{R}_1$  rencontre à nouveau  $\mathcal{L}$  en  $R$  où il est réfléchi comme s'il provenait de  $P''_1$ .
- un rayon  $\mathcal{R}_2$  réfléchi par  $\mathcal{L}$  dans la direction de  $(P'_2I)$ . Ce rayon atteint  $M_2$  en  $K_2$ , d'où il est réfléchi comme s'il avait été émis par  $P''_2$ .

Ces deux rayons arrivent sur  $L_2$  parallèlement l'un à l'autre avec l'incidence  $i$  et convergent donc vers le point  $M$ , où il peuvent interférer compte tenu de leur cohérence mutuelle. En revanche, tout autre point de la source émet des rayons dont celui qui passe par  $O_1$  présente une direction différente de celle de  $(PO_1)$  et convergent, sur  $E$  en un point différent de  $M$ . C'est pourquoi ce dispositif permet d'obtenir une figure d'interférence malgré l'étendue de la source : chaque point de la figure d'interférence est issu d'un unique point de la source.

Ce montage équivaut à une lame d'air composée de  $M_2$  et d'une lame semi-réfléchissante  $M'_1$ , n'induisant aucun déphasage lors de la réflexion, et occupant la position de l'image de  $M_1$  par  $\mathcal{L}$ .  $M_2$  et  $M'_1$  sont espacés d'une distance  $e = CC_1 - CC_2$  et le dispositif est éclairé par l'image  $P'_2$  de  $P$  par  $\mathcal{L}$  :



 Soit  $i$  l'angle d'incidence du rayon issu de  $P_2'$  et qui se sépare en deux rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  dans le dispositif précédent.

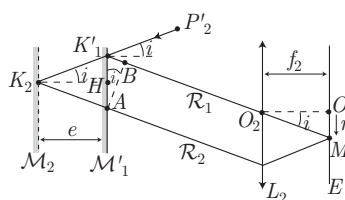
1. Montrer que la différence des chemins optiques des rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui arrivent en  $M$  vaut :

$$\delta = (P_2'K_2M) - (P_2'K_1'M) = 2e \cos i$$

2. On suppose les conditions de Gauss respectées. Donner le rayon d'un anneau clair sur l'écran, en fonction de son ordre d'interférence.
3. La distance  $e$  diminue. Comment évolue alors la figure d'interférence ? Que se produit-il au contact optique ( $e = 0$ ) ?

#### RÉPONSE

1. Soit  $A$  le point d'intersection de  $\mathcal{R}_2$  avec  $M_1'$ , soit  $B$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $\mathcal{R}_1$  et soit  $H$  celui de  $K_2$  sur  $M_1'$  :



Le chemin optique du rayon  $\mathcal{R}_1$  vaut :

$$(P_2'K_1'M) = P_2'K_1' + K_1'B + (BM)$$

où le triangle  $(K_1'AB)$  révèle que :

$$\sin i = \frac{K_1'B}{K_1'A} = \frac{K_1'B}{2K_1'H} \Rightarrow K_1'B = 2K_1'H \sin i$$

tandis que le triangle  $(K_2HK_1')$  indique que :

$$\tan i = \frac{K_1'H}{e} \Rightarrow K_1'H = e \tan i \Rightarrow K_1'B = 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i}$$

C'est pourquoi :

$$(P_2'K_1'M) = P_2'K_1' + 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i} + (BM)$$

Quant au chemin optique de  $\mathcal{R}_2$ , il vaut :

$$(P_2'K_2M) = P_2'K_1' + K_1'K_2 + K_2A + (AM)$$

avec :

$$\cos i = \frac{e}{K_1'K_2} \Rightarrow K_1'K_2 = \frac{e}{\cos i} \Rightarrow (P_2'K_2M) = P_2'K_1' + \frac{2e}{\cos i} + (AM)$$

De ces expressions découle celle de la différence  $\delta$  des chemins optiques :

$$\delta = \frac{2e}{\cos i} + (AM) - 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i} - (BM)$$

Or, puisque  $(AB)$  est perpendiculaire aux rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui convergent en  $M$ , les chemins optiques  $(AM)$  et  $(BM)$  sont identiques, en conséquence de quoi :

$$\delta = \frac{2e}{\cos i} \underbrace{(1 - \sin^2 i)}_{\cos^2 i} \Rightarrow \delta = 2e \cos i$$

2. Un rayon  $\mathcal{R}$  qui arrive sur  $L_2$  parallèlement à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , en passant par  $O_2$ , n'est pas dévié par  $L_2$ . Son intersection avec l'écran  $E$  coïncide alors avec le point  $M$  de convergence des rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  issu de  $L_2$ . Dans le triangle rectangle  $(OO_2M)$ , il est possible de poser :

$$\tan i = \frac{OM}{OO_2} = \frac{r}{f_2} \Rightarrow r = f_2 \tan i$$

Or, dans les conditions de Gauss,  $\tan i \simeq i$  et  $\cos i \simeq 1 - \frac{i^2}{2}$  conduisent à :

$$\delta = 2e \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) \text{ et } r = f_2 i \quad (18)$$

L'ordre d'interférence  $p$  correspondant est défini par :

$$\begin{aligned} p = \frac{\delta}{\lambda_0} &\Rightarrow \delta = \lambda_0 p = 2e \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) \\ &\Rightarrow \frac{i^2}{2} = 1 - \frac{\lambda_0 p}{2e} \Rightarrow i = \sqrt{2 - \frac{\lambda_0 p}{e}} \end{aligned}$$

où  $p \in \mathbb{N}$  pour une frange brillante. Finalement, l'identité (18) fournit :

$$r = f_2 \times \sqrt{2 - \frac{\lambda_0 p}{e}}$$

3. Lorsque  $e$  diminue,  $\frac{\lambda_0 p}{e}$  augmente, de sorte que  $r$  diminue. Aussi, une diminution de  $e$  se traduit, sur l'écran, par un rétrécissement des anneaux, qui semblent « rentrer » dans  $O$ .

Au contact optique, l'expression (18) de  $\delta$  révèle que :

$$\delta = 2e \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) \Rightarrow \delta = 0 \text{ pour } e = 0$$

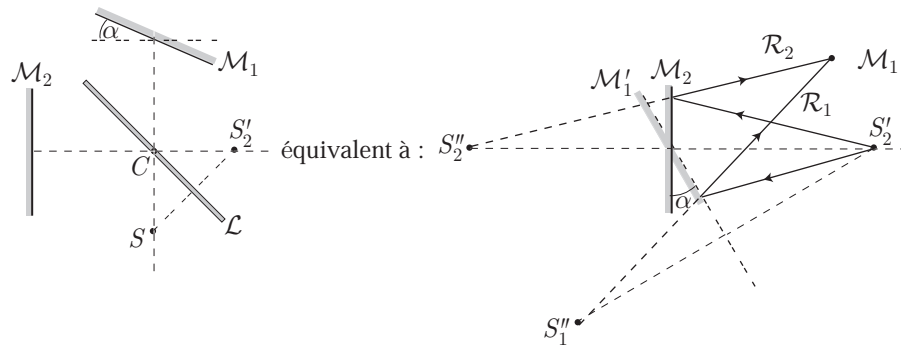
C'est pourquoi les franges d'interférence disparaissent au profit d'un écran uniformément éclairé.

**⚠** Cet exercice ne tient pas compte du déphasage de  $\pi$  qu'induisent des réflexions multiples. Si on en tenait compte, l'écran serait uniformément sombre. Veuillez à identifier, dans les énoncés, l'information qui précise si ce déphasage est pris en compte !

## 4.3.2 Utilisation en coin d'air

### 4.3.2.1 Éclairage par une source ponctuelle

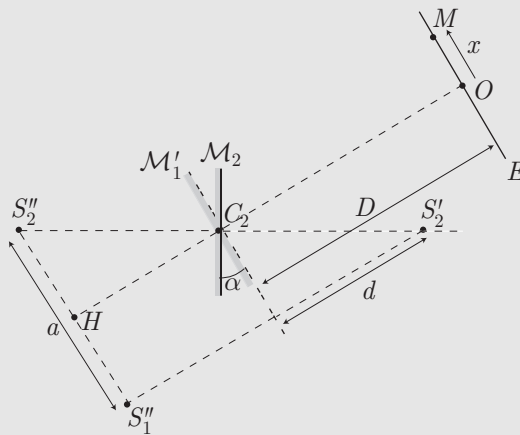
Considérons l'interféromètre de Michelson réglé au contact optique et dont le miroir  $\mathcal{M}_1$  est incliné d'un angle  $\alpha$  petit. Ce montage est équivalent à un coin d'air réalisé à partir de  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}'_1$ , dont les plans font un angle  $\alpha$  entre eux :



Les images  $S''_1$  et  $S''_2$  de la source secondaire  $S'_2$  par  $M'_1$  et  $M_2$  respectivement se comportent comme des sources secondaires qui émettent des rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui interfèrent en leur point d'intersection  $M$ . Ces interférences ne sont pas localisées.



On considère l'interféromètre réglé en coin d'air, l'image  $S'_2$  de  $S$  étant située à une distance  $d$  de  $M'_1$ .

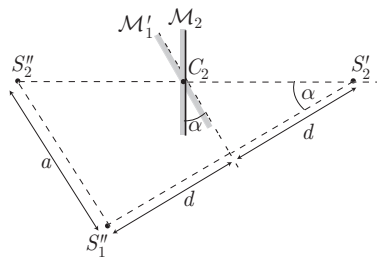


On désigne par  $C_2$  le point d'intersection de  $M_2$  et  $M'_1$ , par  $H$  le milieu du segment  $[S''_1 S''_2]$  et par  $O$  le point d'intersection de  $(HC_2)$  avec un écran  $E$  situé à une distance  $D$  de  $M'_1$ . L'écran est perpendiculaire à  $(HC_2)$  et un point  $M$  de  $E$  est repéré par  $x = \overline{OM}$ .

1. Déterminer, en fonction de  $d$  et  $\alpha$  (petit), la distance  $a$  séparant  $S''_1$  et  $S''_2$ .
2. Déterminer l'interfrange de la figure d'interférence obtenue sur  $E$ , en fonction de  $d$ ,  $\alpha$ ,  $D$  et  $\lambda_0$  (longueur d'onde du rayonnement dans le vide).
3. Que se passe-t-il si  $\alpha$  diminue jusqu'à s'annuler ?

#### RÉPONSE

1. La droite  $(S'_2 S''_2)$  est perpendiculaire à  $M_2$ , tandis que  $(S'_2 S''_1)$  est perpendiculaire à  $M'_1$  et, puisque  $M_2$  fait un angle  $\alpha$  par rapport à  $M'_1$ , cela signifie que l'angle  $(\overrightarrow{S'_2 S''_2}, \overrightarrow{S'_2 S''_1})$  vaut également  $\alpha$  :



En outre, étant donné que  $S_1''$  est symétrique de  $S_2'$  par rapport à  $M_1'$ ,  $S_2'S_1'' = 2d$ . Enfin, si  $\alpha$  est suffisamment petit, la distance  $a = S_1''S_2''$  s'identifie à l'arc correspondant, ce qui revient à poser :

$$a = 2d\alpha$$

2. Le montage proposé est équivalent à deux sources (secondaires)  $S_2''$  et  $S_1''$  espacées de  $a$  et distantes de  $D + d$  d'un écran  $E$ . Ce montage est par conséquent équivalent à celui de la page 505 pour lequel la différence des chemins optiques des rayons qui interfèrent est donnée par le résultat (11) :

$$\delta = \frac{ax}{D+d} = \frac{2d\alpha}{D+d}x \tag{19}$$

Aussi, la figure d'interférence présente des franges claires lorsque  $x$  adopte les valeurs  $x_p$  telles que :

$$\delta = p\lambda_0 \Rightarrow \frac{2d\alpha}{D+d}x_p = p\lambda_0 \Rightarrow x_p = p \times \frac{\lambda_0(D+d)}{2d\alpha}$$

où  $\lambda_0$  désigne la longueur d'onde du rayonnement dans le vide et où  $p \in \mathbb{Z}$ . Par suite, l'interfrange vaut :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0(D+d)}{2d\alpha}$$

3. Conformément à la loi précédente, lorsque  $\alpha$  diminue,  $i$  augmente, ce qui signifie que les franges d'interférence s'éloignent les unes des autres. Dans le cas limite où  $\alpha = 0$ , le résultat (19) montre que  $\delta = 0$  confère à l'éclairement une valeur uniforme :

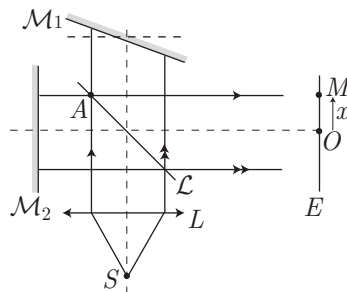
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos\left(\frac{k_0\delta}{2}\right) = \mathcal{E}_0$$

de sorte que l'écran est uniformément éclairé.

*Remarque – Si la source ponctuelle  $S$  est remplacée par une source étendue monochromatique, la figure d'interférence se trouve localisée au voisinage de  $M_2$  et  $M_1'$  ; partout ailleurs, l'incohérence des divers points de la source provoque un brouillage des interférences.*

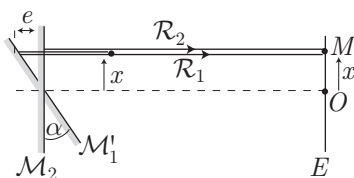
#### 4.3.2.2 Éclairage par une source ponctuelle située à l'infini

Une source ponctuelle  $S$ , qui émet une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$  (dans le vide) est confondue avec le foyer objet d'une lentille convergente  $L$ . Ainsi, l'interféromètre est éclairé avec un faisceau de lumière parallèle à l'axe optique de  $L$  :



Un écran  $E$  permet de visualiser une figure d'interférence par l'éclairement de chaque point  $M$  tel que  $\overline{OM} = x$ .

Ce montage équivaut à un coin d'air éclairé en lumière parallèle, qui réfléchirait les rayons dans leur direction d'incidence<sup>1</sup> :



La différence des chemins optiques des rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui interfèrent en  $M$  vaut  $\delta = 2e$ , avec :

$$\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{e}{x} \Rightarrow e = \alpha x \Rightarrow \delta = 2\alpha x$$

Par suite, le point  $M$  reçoit l'éclairement :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \left( \frac{k_0 \delta}{2} \right) = \mathcal{E}_0 \cos^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \times \alpha x \right)$$

C'est pourquoi des franges d'interférence rectilignes se forment sur l'écran, dont des franges claires se trouvent aux abscisses  $x_p$  telles que :

$$\frac{2\pi\alpha}{\lambda_0} x_p = p\pi \Rightarrow x_p = p \times \frac{\lambda_0}{2\alpha} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

Leur interfrange vaut par conséquent :

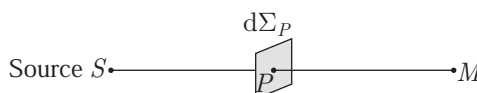
$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

## 4.4 Diffraction des ondes lumineuses

### 4.4.1 Principe de Huygens-Fresnel

Tout point  $P$  atteint par de la lumière monochromatique se comporte comme une source secondaire qui émet des ondes sphériques :

- dont l'amplitude  $da(P)$  est proportionnelle à celle  $s(P)$  de l'onde incidente et à l'élément de surface  $d\Sigma_P$  entourant  $P$  ;
- dont la phase  $\phi_P$  et la pulsation  $\omega$  sont celles de l'onde incidente.



<sup>1</sup>L'angle  $\alpha$  est suffisamment petit pour qu'en  $\mathcal{M}'_1$  le rayon réfléchi adopte la même direction que celle du rayon incident.



Un point  $M$  reçoit ainsi un signal :

$$d\underline{s}(M) = d\underline{a}(P) \frac{e^{jk_0(PM)}}{PM} \text{ avec } d\underline{a}(P) = K \underline{s}(P) d\Sigma_P$$

où  $K$  est une constante et où  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ .

Soit  $(\Sigma)$  une surface atteinte par de la lumière monochromatique. Les points  $P$  de  $(\Sigma)$  se comportent comme des sources cohérentes, dont les signaux interfèrent en tout point  $M$  pour produire la résultante donnée par la relation de Huygens-Fresnel :

$$\underline{s}(M) = \iint_{(\Sigma)} K \underline{s}(P) \frac{e^{jk_0(PM)}}{PM} d\Sigma_P \quad (20)$$

**Définition 11** Soit  $\underline{s}_i(P)$  le signal qui arrive en un point  $P$  et  $\underline{s}_t(P)$  celui qui en repart. On appelle transmittance le rapport :

$$\underline{t}(P) = \frac{\underline{s}_t(P)}{\underline{s}_i(P)}$$

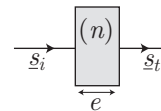
Par exemple, la transmittance d'une pupille  $(\mathcal{S})$  vaut :

$$\begin{cases} \underline{t}(P) = 1 \text{ pour } P \in (\mathcal{S}) \\ \underline{t}(P) = 0 \text{ pour } P \notin (\mathcal{S}) \end{cases}$$



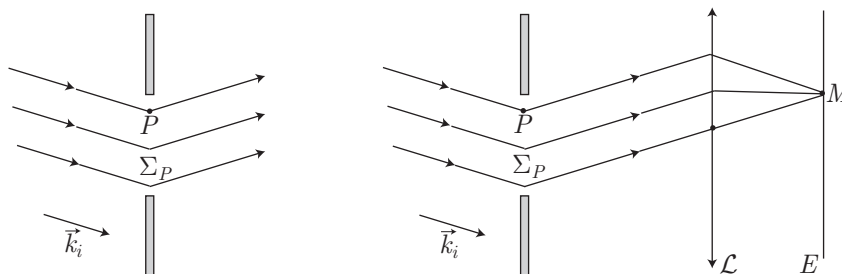
tandis que celle d'une lame d'indice  $n$  et d'épaisseur  $e$  vaut :

$$\underline{t}(P) = e^{jk_0 ne} \text{ car } \underline{s}_t = \underline{s}_i \times e^{jk_0 ne}$$



### 4.4.2 Diffraction de Fraunhofer d'une onde plane

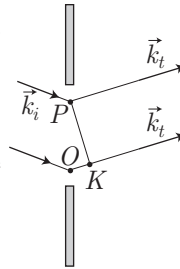
La diffraction de Fraunhofer (encore appelée « diffraction à l'infini ») ne s'intéresse qu'aux phénomènes de diffraction qui se produisent en des points  $M$  suffisamment éloignés de la surface diffractante  $(\Sigma_P)$  pour considérer que les rayons arrivant en  $M$  partent de  $(\Sigma_P)$  parallèlement les uns aux autres. La figure de diffraction peut être visible sur un écran  $E$  placé dans le plan focal image d'une lentille convergente  $(\mathcal{L})$  :



L'onde incidente étant plane, elle véhicule, en chaque point  $P$  le signal :

$$\underline{s}_i(P) = S_0 e^{-j\omega t} e^{j\vec{k}_i \cdot \vec{OP}}$$

où  $\vec{k}_i$  désigne le vecteur d'onde du rayon qui arrive en  $P$ . En outre, le segment  $PK$  étant perpendiculaire à  $\vec{k}_t$ , les chemins optiques  $(PM)$  et  $(KM)$  sont égaux, ce qui se traduit par :



$$(PM) = (KM) = (OM) - (OK) \Rightarrow k_0 (PM) = k_0 (OM) - k_0 (OK)$$

où  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  est la norme qu'aurait le vecteur d'onde dans le vide. Or, en notant  $\vec{u}_t$  le vecteur unitaire directeur de  $\vec{k}_t$ , il vient :

$$OK = \vec{OK} \cdot \vec{u}_t = (\vec{OP} + \vec{PK}) \cdot \vec{u}_t = \vec{OP} \cdot \vec{u}_t \text{ car } \vec{PK} \perp \vec{u}_t$$

tandis que la définition du chemin optique conduit à :

$$\begin{aligned} k_0 (OK) &= k_t \times OK = \vec{k}_t \cdot \vec{OP} \\ \Rightarrow k_0 (PM) &= k_0 (OM) - \vec{k}_t \cdot \vec{OP} \end{aligned}$$

Ce faisant, la loi (20) devient :

$$\begin{aligned} \underline{s}(M) &= \iint_{(\Sigma)} K \underline{t}(P) \underline{s}_i(P) \times \frac{e^{jk_0 (OM)}}{PM} e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P \\ &\text{avec : } \underline{s}_i(P) = S_0 e^{-j\omega t} e^{j\vec{k}_i \cdot \vec{OP}} \\ &= \iint_{(\Sigma)} K \underline{t}(P) S_0 e^{-j\omega t} \frac{e^{jk_0 (OM)}}{PM} \times e^{j(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P \end{aligned}$$

Si  $M$  est suffisamment éloigné de la pupille diffractante,  $PM$  ne dépend pas sensiblement de  $P$ , de sorte que :

$$\underline{s}(M) = \underline{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P \tag{21}$$

où le nombre complexe  $\underline{A}$  réunit tous les termes indépendants de  $P$  :

$$\underline{A} = K S_0 e^{-j\omega t} \frac{e^{jk_0 (OM)}}{PM}$$

Aussi, l'éclairement reçu par  $M$  est proportionnel à  $\underline{s}(M) \times \underline{s}^*(M)$ , c'est-à-dire :

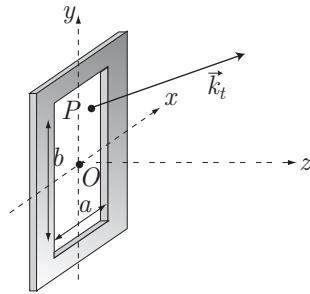
$$\mathcal{E}(M) = \mathcal{E}_0 \left| \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P \right|^2$$

### 4.4.3 Cas d'une ouverture rectangulaire

#### 4.4.3.1 Fente allongée

Considérons une fente rectangulaire de largeur  $a$  dans la direction  $(Ox)$  et de longueur  $b \gg a$  dans la direction  $(Oy)$ . L'expérience montre qu'il n'y a pas de diffraction, dans ces conditions, dans la direction  $(Oy)$ , ce qui se traduit par la conservation de la composante du vecteur d'onde dans cette direction. On note alors  $\vec{k}_i$  le vecteur d'onde du rayonnement incident et  $\vec{k}_t$  celui du rayonnement diffracté, tels que :

$$\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} \text{ et } \vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix} \text{ avec } \beta_t = \beta_i$$



Un point  $P$  du plan de la fente est repéré par le vecteur  $\vec{OP} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$  tel que :

$$\begin{aligned} (\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_t - \alpha_i \\ 0 \\ \gamma_t - \gamma_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha_t - \alpha_i) x \\ &= ux \text{ avec } u = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha_t - \alpha_i) \end{aligned}$$

En outre, une telle fente est décrite par une transmittance :

$$\begin{cases} \underline{t}(P) = 1 \text{ si } x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \text{ et } y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \\ \underline{t}(P) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Aussi, le signal issu du plan  $(\Sigma)$  de la fente suit la loi (21) :

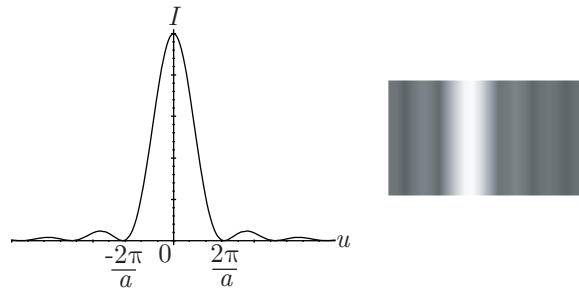
$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P \\ &= \underline{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(x, y) e^{-jux} dx dy \\ &= \underline{A} \int_{-b/2}^{b/2} dy \times \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jux} dx = \underline{A}b \times \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jux} dx \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jux} dx &= -\frac{1}{ju} \left( e^{-jua/2} - e^{jua/2} \right) \\ &= \frac{2}{u} \sin\left(\frac{ua}{2}\right) = a \times \frac{\sin(ua/2)}{ua/2} \\ \Rightarrow \underline{s} &= \underline{A}ab \times \sin_c\left(\frac{ua}{2}\right) \text{ avec } \sin_c x = \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

Finalement, l'intensité diffractée est proportionnelle à  $\underline{s} \underline{s}^*$  :

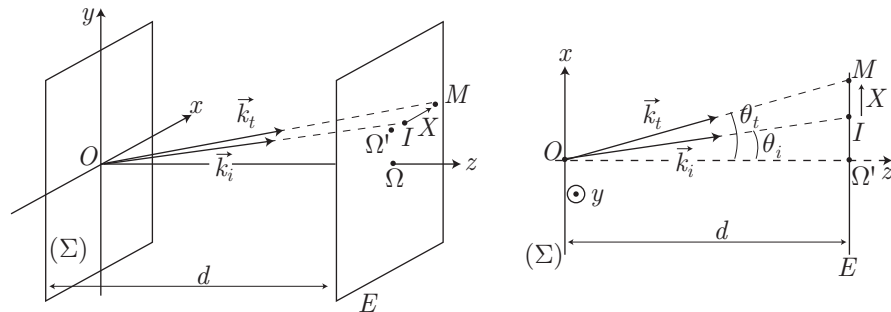
$$I = I_0 \left[ \sin_c\left(\frac{ua}{2}\right) \right]^2 \text{ où } u = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha_t - \alpha_i) \quad (22)$$



Cette courbe révèle que la diffraction s'observe au voisinage de  $u = 0$ , c'est-à-dire  $\alpha_t \simeq \alpha_i$ , et donc au voisinage de l'image géométrique de la fente. La diffraction se manifeste par l'existence de bandes claires de part et d'autre de l'image de la fente.

### Visualisation directe sur un écran

Un écran  $E$  est situé à grande distance  $d$  de  $(\Sigma)$  et l'on note  $\Omega$  le projeté orthogonal de  $O$  sur  $E$ . Soit  $I$  le point d'intersection du rayon incident passant par  $O$  avec  $E$ . On note également  $M$  le point d'intersection d'un rayon diffracté issu de  $O$ , repéré par  $X = \overline{IM}$ .



Puisque la diffraction ne s'effectue que dans la direction ( $Ox$ ), nous considérons les vecteurs d'onde :

$$\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \sin \theta_i \\ \beta_i \\ \cos \theta_i \end{pmatrix} \simeq \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \theta_i \\ \beta_i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \sin \theta_t \\ \beta_t \\ \cos \theta_t \end{pmatrix} \simeq \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \theta_t \\ \beta_t \\ 1 \end{pmatrix} \text{ où } \beta_t = \beta_i$$

de sorte que :

$$\begin{cases} \alpha_i = \theta_i \\ \alpha_t = \theta_t \end{cases} \Rightarrow u = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha_t - \alpha_i) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\theta_t - \theta_i)$$

avec :

$$\tan \theta_i \simeq \theta_i = \frac{\Omega' I}{d} \text{ et } \tan \theta_t \simeq \theta_t = \frac{\Omega' M}{d}$$

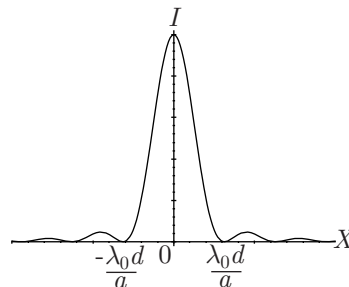
Il s'ensuit que :

$$u = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{\Omega' M - \Omega' I}{d} = \frac{2\pi X}{\lambda_0 d}$$

$$\Rightarrow I = I_0 \left[ \text{sin}_c \left( \frac{\pi a X}{\lambda_0 d} \right) \right]^2$$

La fonction  $\text{sin}_c \left( \frac{\pi a X}{\lambda_0 d} \right)$  s'annule pour les valeurs  $X_p$  de  $X$  telles que :

$$\frac{\pi a X_p}{\lambda_0 d} = p\pi \Rightarrow X_p = p \times \frac{\lambda_0 d}{a} \quad (p \in \mathbb{Z}^*)$$



**Remarque** – Lorsque  $a$  devient très grand devant  $\lambda_0 d$  (par exemple  $a \simeq 1 \text{ mm}$ ), un pic d'intensité est observé en  $X = 0$  ( $I \simeq 0$  partout ailleurs), c'est-à-dire au voisinage du point  $I$ . On retrouve bien le résultat prévu par l'optique géométrique.

La figure de diffraction présente alors un *maximum* d'intensité en  $X = 0$ ; cette bande brillante a pour largeur :  $\frac{2\lambda_0 d}{a}$ .



Soit  $I_1$  l'intensité lumineuse des *maxima* secondaires les plus proches de  $X = 0$ . En utilisant des moyens numériques, calculer le rapport  $\frac{I_1}{I_0}$  et conclure quant à la figure de diffraction.

RÉPONSE Notons  $\chi = \frac{\pi a X}{\lambda_0 d}$ , de manière à présenter l'intensité  $I$  sous la forme :

$$I = I_0 \operatorname{sinc}^2 \chi = I_0 \times \left( \frac{\sin \chi}{\chi} \right)^2$$

Compte tenu de la courbe représentative de  $I(X)$ , les *maxima* secondaires de  $I$  correspondent aux valeurs de  $\chi \neq 0$  qui annulent  $\frac{dI}{d\chi}$ , sans annuler  $I$ , avec :

$$\frac{dI}{d\chi} = 2I_0 \operatorname{sinc} \chi \times \frac{d(\operatorname{sinc} \chi)}{d\chi} = 2I_0 \operatorname{sinc} \chi \times \frac{\chi \cos \chi - \sin \chi}{\chi}$$

Ce faisant,  $I$  devient *maximum* pour les valeurs de  $\chi$  solutions de :

$$\begin{aligned} \chi \cos \chi &= \sin \chi \text{ avec } \chi \neq p\pi \quad (p \in \mathbb{Z}^*) \\ \Rightarrow \tan \chi &= \chi \end{aligned}$$

Numériquement, cette équation admet pour solutions :

$$\chi \in \{4,49 ; 7,72 ; 10,90 \dots\}$$

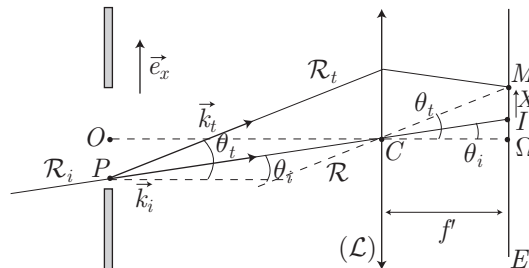
Aussi, le premier *maximum* secondaire correspond à  $\chi_1 = 4,49$  et présente donc une intensité :

$$I_1 = I_0 \left( \frac{\sin \chi_1}{\chi_1} \right)^2 = 0,047 \Rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 4,7\%$$

Ce résultat révèle que l'intensité du premier *maximum* secondaire est très inférieure à celle du *maximum* central ; la figure de diffraction est composée de bandes claires dont seules les premières sont visibles.

### Utilisation d'une lentille convergente

Pour visualiser la figure d'interférence à l'infini, on peut intercaler une lentille convergente ( $\mathcal{L}$ ), de distance focale image  $f'$ , entre la pupille et l'écran  $E$ , celui-ci étant placé dans le plan focal image de ( $\mathcal{L}$ ).



Depuis un point  $P$  de la lentille, considérons deux rayons :

- le rayon incident  $\mathcal{R}_i$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ 0 \\ \gamma_i \end{pmatrix}$ , qui passe par le centre optique  $C$  de ( $\mathcal{L}$ ) sans être dévié. Ce rayon rencontre  $E$  en un point  $I$  ;
- le rayon diffracté  $\mathcal{R}_t$ , de vecteur d'onde  $\vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ 0 \\ \gamma_t \end{pmatrix}$  ne passant pas par  $C$ . En revanche, un rayon  $\mathcal{R}$  qui traverserait  $\mathcal{L}$  en  $C$  parallèlement à  $\mathcal{R}_t$  ne serait pas dévié et atteindrait  $E$  en un point  $M$  d'intersection de tous les rayons parallèles à  $\mathcal{R}_t$ .

On repère le point  $M$  par  $X = \overline{IM}$ . En outre :

$$\vec{k}_i \cdot \vec{e}_x = k_i \sin \theta_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \theta_i \text{ avec } \vec{k}_i \cdot \vec{e}_x = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ 0 \\ \gamma_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \alpha_i$$

ce qui montre que :

$$\sin \theta_i = \alpha_i \Rightarrow \theta_i = \alpha_i \text{ car } \sin \theta_i \simeq \theta_i$$

De même :  $\theta_t = \alpha_t$ . De fait, l'intensité émise sur l'écran est fournie par la loi (22) :

$$I = I_0 \sin_c^2 \left( \frac{ua}{2} \right) \text{ avec } u = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\theta_t - \theta_i)$$

Quant aux triangles  $(C\Omega I)$  et  $(C\Omega M)$ , ils conduisent à :

$$\tan \theta_i \simeq \theta_i = \frac{\Omega I}{f'} \text{ et } \tan \theta_t \simeq \theta_t = \frac{\Omega M}{f'}$$

de sorte que :

$$u = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{\Omega M - \Omega I}{f'} = \frac{2\pi}{\lambda_0 f'} X$$

Ce faisant, l'intensité  $I$  est donnée par :

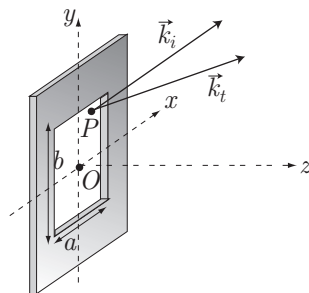
$$I = I_0 \sin_c^2 \left( \frac{\pi a}{\lambda_0 f'} X \right)$$

de sorte qu'une bande lumineuse, centrée en  $I$ , présente une largeur :

$$\Delta X = \frac{2\lambda_0 f'}{a}$$

#### 4.4.3.2 Fente rectangulaire

On considère à nouveau une fente rectangulaire de largeur  $a$  et de longueur  $b$ , laquelle est suffisamment petite pour engendrer un phénomène de diffraction dans la direction  $(Oy)$ .



Désormais, les vecteurs d'onde incident et diffracté ont pour composantes :

$$\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} \text{ et } \vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \alpha_t \neq \alpha_i \\ \beta_t \neq \beta_i \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} (\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_t - \alpha_i \\ \beta_t - \beta_i \\ \gamma_t - \gamma_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = ux + vy \\ \text{avec } u &= \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha_t - \alpha_i) \text{ et } v = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\beta_t - \beta_i) \end{aligned}$$

Le signal diffracté par la pupille, de transmittance :

$$\begin{cases} \underline{t}(P) = 1 \text{ pour } x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \text{ et } y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \\ \underline{t}(P) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

s'écrit alors :

$$\underline{s} = \underline{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P = \underline{A} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-jvy} dy \times \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jux} dx$$

avec :

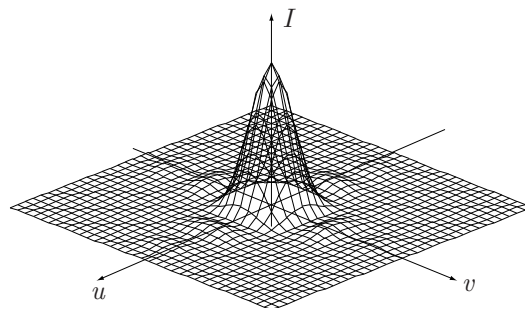
$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-jux} dx = a \operatorname{sinc} \left( \frac{ua}{2} \right) \text{ et } \int_{-b/2}^{b/2} e^{-jvy} dy = b \operatorname{sinc} \left( \frac{vb}{2} \right)$$

d'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{A} ab \operatorname{sinc} \left( \frac{ua}{2} \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{vb}{2} \right) \text{ avec} \\ u &= \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha_t - \alpha_i) \text{ et } v = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\beta_t - \beta_i) \end{aligned}$$

Aussi, l'intensité diffractée, proportionnelle à  $\underline{s} \underline{s}^*$ , est décrite par :

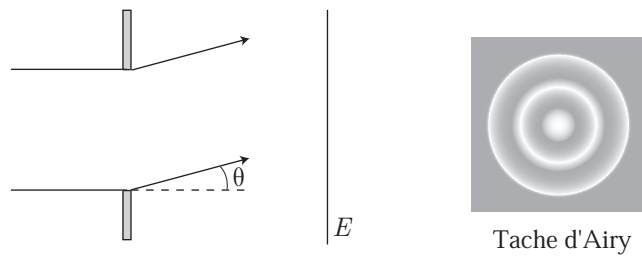
$$I(u, v) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{ua}{2} \right) \times \operatorname{sinc}^2 \left( \frac{vb}{2} \right)$$



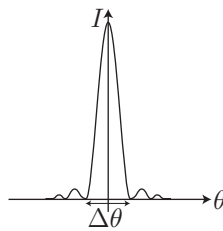
#### 4.4.4 Cas d'une ouverture circulaire

Soit une ouverture circulaire, de rayon  $R$ , éclairée par une onde plane normale, de longueur d'onde  $\lambda_0$ . Une telle pupille produit, sur un écran  $E$  très éloigné, une figure de diffraction, appelée *tache d'Airy* :



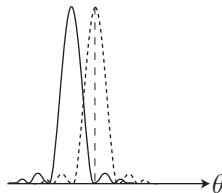


La tache centrale a pour largeur angulaire :  $\Delta\theta = 1,22 \times \frac{\lambda_0}{R}$  :



Ce phénomène de diffraction limite le pouvoir de résolution en astronomie : la pupille circulaire que constitue l'objectif produit des taches d'Airy associées à chaque étoile. Pour distinguer deux étoiles, on admet le *critère de Rayleigh* :

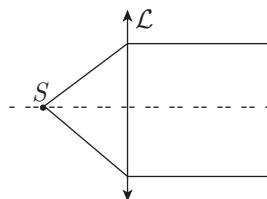
le *maximum* d'une tache d'Airy doit se trouver au moins confondue avec le premier *minimum* d'une autre tache d'Airy.



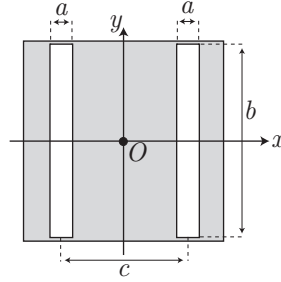
#### 4.4.5 Diffraction à l'infini par les fentes d'Young

##### 4.4.5.1 Source ponctuelle à l'infini

On réalise une source ponctuelle à l'infini en plaçant une source ponctuelle  $S$  au foyer objet d'une lentille convergente  $\mathcal{L}$  ; les rayons qui émergent de  $\mathcal{L}$  sont parallèles à l'axe optique :



Considérons deux fentes d'Young, situées dans un plan  $(Ox, Oy)$ , dont  $O$  appartient à l'axe optique de  $\mathcal{L}$ . Les fentes, parallèles à l'axe  $(Oy)$ , ont pour largeur  $a$  selon  $(Ox)$  et pour longueur  $b \gg a$  selon  $(Oy)$ . Elles ont en outre leurs centres distants de  $c \gg a$ , et symétriques par rapport à  $O$ .



Un tel dispositif présente alors une transmittance :

$$t(x, y) = t_1(x, y) + t_2(x, y) \quad (23)$$

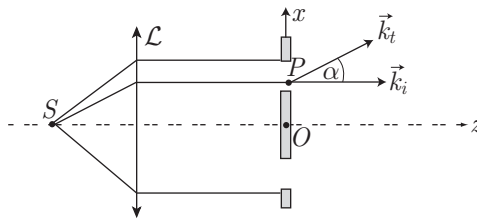
avec :

$$\begin{cases} t_1(x, y) = 1 \text{ pour } x \in \left[-c - \frac{a}{2}, -c + \frac{a}{2}\right] \text{ et } y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \\ t_1(x, y) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et :

$$\begin{cases} t_2(x, y) = 1 \text{ pour } x \in \left[c - \frac{a}{2}, c + \frac{a}{2}\right] \text{ et } y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \\ t_2(x, y) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Compte tenu du dispositif d'éclairage, chaque point  $P$  du plan  $(Ox, Oy)$  reçoit une onde de vecteur  $\vec{k}_i = k_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , avec  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ . D'autre part, la condition  $b \gg a$  suffit à négliger la diffraction dans la direction de  $(Oy)$  : le vecteur d'onde diffracté par chaque point  $P$  présente une composante nulle selon  $(Oy)$ .



Soit  $\alpha = (\vec{k}_t, Oz)$  tel que :

$$\vec{k}_t = k_0 \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \simeq k_0 \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ dans les conditions de Gauss.}$$

Ce faisant, les vecteurs :

$$\vec{k}_i = k_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{k}_t = k_0 \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

conduisent au calcul de :

$$(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} = k_0 \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = k_0 \alpha x$$

C'est pourquoi le signal diffracté s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{A} \iint_{(\Sigma)} t(x, y) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P \\ &= \underline{A} \iint_{(\Sigma)} [t_1(x, y) + t_2(x, y)] e^{-jk_0 \alpha x} dx dy \\ &= \underline{A} \left\{ \iint_{(\Sigma)} t_1(x, y) e^{-jk_0 \alpha x} dx dy + \iint_{(\Sigma)} t_2(x, y) e^{-jk_0 \alpha x} dx dy \right\} \\ &= \underline{A} \left\{ \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c-a/2}^{-c+a/2} e^{-jk_0 \alpha x} dx + \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{c-a/2}^{c+a/2} e^{-jk_0 \alpha x} dx \right\} \\ &= \underline{A} b \left\{ \int_{-c-a/2}^{c+a/2} e^{-jk_0 \alpha x} dx + \int_{c-a/2}^{c+a/2} e^{-jk_0 \alpha x} dx \right\} \end{aligned}$$

En effectuant respectivement les changements de variable :  $u = x + c$  et  $v = x - c$ , les intégrales du membre de droite deviennent :

$$\int_{-c-a/2}^{-c+a/2} e^{-jk_0 \alpha x} dx = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jk_0 \alpha (u-c)} du = e^{jk_0 \alpha c} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jk_0 \alpha u} du$$

et :

$$\int_{c-a/2}^{c+a/2} e^{-jk_0 \alpha x} dx = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jk_0 \alpha (v+c)} dv = e^{-jk_0 \alpha c} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jk_0 \alpha v} dv$$

C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{A} b \times (e^{jk_0 \alpha c} + e^{-jk_0 \alpha c}) \times \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jk_0 \alpha u} du \\ &= 2\underline{A} b \times \cos(k_0 \alpha c) \times \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jk_0 \alpha u} du \end{aligned}$$

où la dernière intégrale a déjà été calculée à la page 532, ce qui conduit à :

$$\underline{s} = 2\underline{A} b \times \cos(k_0 \alpha c) \times \text{sin}_c \left( \frac{k_0 \alpha a}{2} \right)$$

Aussi, l'intensité émise dans la direction  $\alpha$  est décrite par :

$$I(\alpha) = I_0 \times \cos^2(k_0 \alpha c) \times \text{sinc}^2\left(\frac{k_0 \alpha a}{2}\right) \quad (24)$$

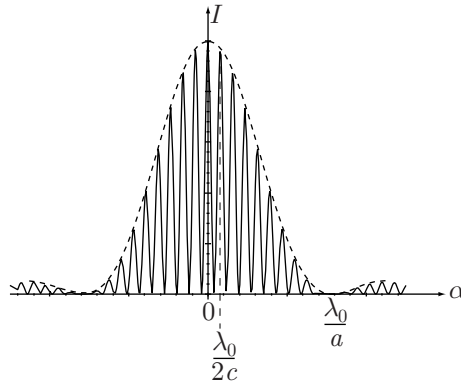
La fonction sinus cardinal s'annule lorsque  $\alpha$  vérifie :

$$\frac{k_0 \alpha a}{2} = p\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{\alpha a}{2} = p\pi \Rightarrow \alpha = p \times \frac{\lambda_0}{a} \quad (p \in \mathbb{Z}^*)$$

tandis que la fonction  $\cos^2(k_0 \alpha c)$  prend sa valeur *maximum* aux valeurs de  $\alpha$  telles que :

$$k_0 \alpha c = q\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0} \alpha c = q\pi \Rightarrow \alpha = q \times \frac{\lambda_0}{2c} \quad (q \in \mathbb{Z})$$

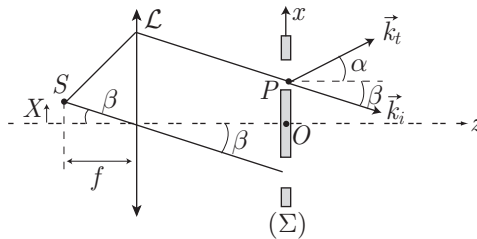
Avec la condition  $c \gg a$ , la courbe représentative de  $I(\alpha)$  ressemble alors à :



Remarque – On retrouve la figure d'interférence classique des fentes d'Young quand  $a$  tend vers zéro, l'annulation de  $I$  en  $\frac{\lambda_0}{a}$  étant reportée à l'infini.

#### 4.4.5.2 Fente source étendue

La source  $S$  se trouve maintenant dans le plan focal objet de  $\mathcal{L}$  (de distance focale  $f$ ), à une abscisse  $X$  par rapport à l'axe optique de  $\mathcal{L}$ .



Un point  $P$  du plan  $(\Sigma)$  qui contient les fentes d'Young reçoit un rayon incident de vecteur d'onde :

$$\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} -\sin \beta \\ 0 \\ \cos \beta \end{pmatrix} \simeq k_0 \begin{pmatrix} -\beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

et émet un rayon diffracté de vecteur d'onde :

$$\vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \simeq k_0 \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est pourquoi :

$$(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} = k_0 \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = k_0 (\alpha + \beta) x$$

avec :

$$\tan \beta \simeq \beta = \frac{X}{f} \quad (25)$$

Ce faisant, le signal diffracté par ( $\Sigma$ ) a pour amplitude complexe :

$$\underline{s} = \underline{A} \iint_{(\Sigma)} t(x, y) e^{-jk_0(\alpha+\beta)x} dx dy$$

où la transmittance  $t(x, y)$  s'identifie à celle définie par la relation (23) :

$$t(x, y) = t_1(x, y) + t_2(x, y)$$

En posant :  $\alpha' = \alpha + \beta$ ,

$$\underline{s} = \underline{A} \iint_{(\Sigma)} [t_1(x, y) + t_2(x, y)] e^{-jk_0\alpha'x} dx dy$$

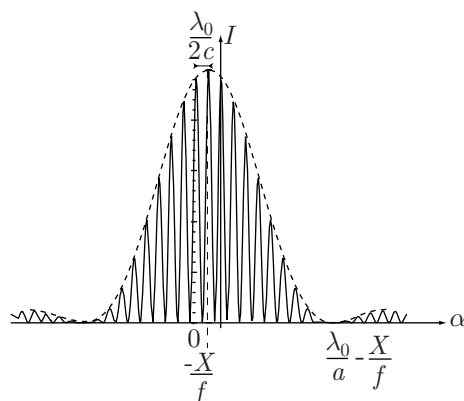
prend une forme analogue à celle de l'identité (24), auquel cas l'intensité diffractée dans une direction  $\alpha' = \alpha + \beta$  adopte la même expression que celle de l'intensité (24) :

$$I(\alpha') = I_0 \cos^2(k_0\alpha'c) \times \sin_c^2\left(\frac{k_0\alpha'a}{2}\right)$$

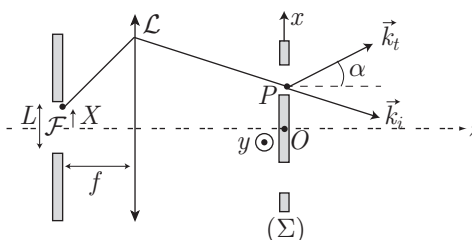
c'est-à-dire, compte tenu de la définition (25) de  $\beta$  :

$$I(\alpha) = I_0 \cos^2\left[k_0c \left(\alpha + \frac{X}{f}\right)\right] \times \sin_c^2\left[\frac{k_0a}{2} \left(\alpha + \frac{X}{f}\right)\right]$$

Ce résultat révèle que la figure observée à l'infini est translatée d'un angle  $-\frac{X}{f}$  :



Plaçons, maintenant, dans le plan focal objet de  $\mathcal{L}$ , une fente source  $\mathcal{F}$ , de largeur  $L$  dans la direction  $(OX)$  et de longueur très grande par rapport à  $L$  dans la direction  $(OY)$ .



La fente  $\mathcal{F}$  peut être décomposée en fentes de largeur infinitésimale  $dX$ , situées aux abscisses  $X$ , qui émettent chacune de la lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ . En raison de l'incohérence de ces sources, l'intensité  $I$  diffractée dans une direction  $\alpha$  est la somme des intensités  $\delta I$  diffractées dans la même direction, provenant de chacun de ces fentes, avec :

$$\delta I = dI_X \times \cos^2(k_0 c \alpha') \times \sin_c^2\left(\frac{k_0 a}{2} \alpha'\right)$$

En outre, si l'intensité est émise de manière uniforme sur  $\mathcal{F}$ , il convient de poser :

$$\begin{aligned} \frac{I_0}{L} &= \frac{dI_X}{dX} \Rightarrow dI_X = \frac{I_0}{L} dX \\ \Rightarrow \delta I &= \frac{I_0}{L} \sin_c^2\left(\frac{k_0 a}{2} \alpha'\right) \times \cos^2(k_0 c \alpha') dX \end{aligned}$$

Or, la représentation graphique précédente décrivant  $I(\alpha)$  révèle que la condition  $c \gg a$  suffit à justifier la faible variation de la fonction sinus cardinal au voisinage de  $X = 0$ . C'est pourquoi on posera :

$$\sin_c^2\left(\frac{k_0 a}{2} \alpha'\right) \simeq \sin_c^2\left(\frac{k_0 a}{2} \alpha\right)$$

afin d'obtenir :

$$\delta I = \frac{I_0}{L} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_0 a}{2} \alpha\right) \times \cos^2\left(k_0 c \alpha + k_0 c \frac{X}{f}\right) \text{ car } \alpha' = \alpha + \frac{X}{f}$$

Ce faisant, l'intensité totale diffractée dans la direction  $\alpha$  est donnée par :

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{I_0}{L} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_0 a}{2} \alpha\right) \int_{-L/2}^{L/2} \cos^2\left(k_0 c \alpha + k_0 c \frac{X}{f}\right) dX \\ &= \frac{I_0}{L} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_0 a}{2} \alpha\right) \underbrace{\int_{-L/2}^{L/2} \left[1 + \cos\left[2k_0 c \alpha + \frac{2k_0 c}{f} X\right]\right] dX}_{\mathcal{I}} \end{aligned}$$

où l'intégrale  $\mathcal{I}$  vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= L + \frac{f}{2k_0 c} \left[ \sin\left(2k_0 c \alpha + \frac{k_0 c L}{f}\right) - \sin\left(2k_0 c \alpha - \frac{k_0 c L}{f}\right) \right] \\ &= L + \frac{f}{k_0 c} \sin\left(\frac{k_0 c L}{f}\right) \times \cos(2k_0 c \alpha) \end{aligned}$$

conformément à l'identité trigonométrique :

$$\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Par conséquent :

$$\mathcal{I} = L \left[ 1 + \frac{\sin(k_0 c L / f)}{k_0 c L / f} \times \cos(2k_0 c \alpha) \right]$$

conduit à l'expression :

$$I(\alpha) = \frac{I_0}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_0 a}{2} \alpha\right) \times \left[ 1 + \operatorname{sinc}\left(\frac{k_0 c L}{f}\right) \times \cos(2k_0 c \alpha) \right]$$

c'est-à-dire :

$$I(\alpha) = \frac{I_0}{2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{k_0 a}{2} \alpha\right) \times [1 + \mathcal{V}(L) \times \cos(2k_0 c \alpha)]$$

où  $\mathcal{V}(L)$  est le facteur de visibilité :

$$\mathcal{V}(L) = \operatorname{sinc}\left(\frac{k_0 c L}{f}\right)$$

Cette expression montre que la visibilité de la figure d'interférence diminue lorsque  $L$  augmente.

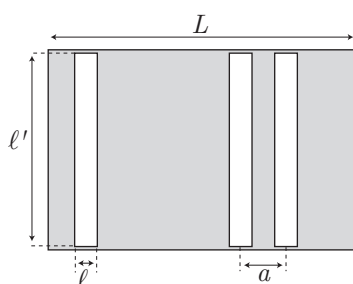
## 4.5 Réseaux plans

### 4.5.1 Généralités

#### 4.5.1.1 Définitions

**Définition 12** On appelle *réseau plan* un écran opaque sur lequel ont été creusées de très nombreuses fentes.

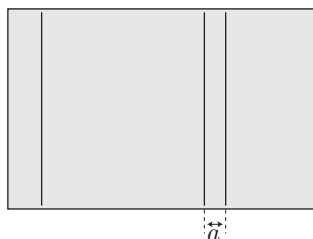
Un tel réseau s'appelle *réseau par transmission*, par opposition aux *réseaux par réflexion* pour lesquels de nombreux traits parallèles ont été gravés sur une surface réfléchissante ; les calculs dans un cas comme dans l'autre sont équivalents.



On note :

- $a$  la distance moyenne séparant deux fentes consécutives (de l'ordre de quelques micromètres) ;
- $L$  la longueur du réseau (quelques centimètres) ;
- $\ell$  la largeur des fentes et  $\ell'$  leur longueur.

Dans la pratique  $\ell \ll a$  et  $L \gg a$  conduisent au schéma équivalent :

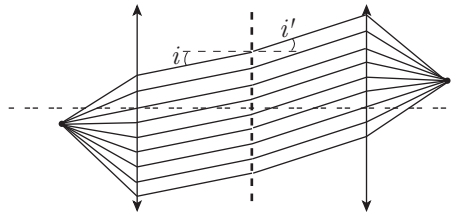


Sur une longueur  $L = Na$  se trouvent  $N$  motifs, d'où se déduit une des caractéristiques du réseau, à savoir le nombre  $n$  de motifs par unité de longueur (plusieurs centaines par centimètre) :  $n = \frac{1}{a}$ .

#### 4.5.1.2 Utilisation du réseau

Un faisceau de lumière parallèle est envoyé sur le réseau et l'on étudie la diffraction à l'infini (ou dans le plan focal image d'une lentille mince convexe) par le réseau :



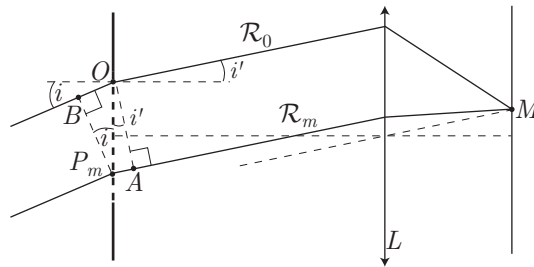


On note  $i$  l'angle d'incidence des rayons qui arrivent sur le réseau et  $i'$  l'angle de diffraction des rayons qui émergent du réseau.

### 4.5.2 Formule du réseau

#### 4.5.2.1 Onde diffractée

Soit  $O$  un point appartenant à la première fente et soit  $P_m$  un point de la  $m^{\text{ème}}$  fente, tel que  $(OP_m)$  soit perpendiculaire aux fentes :



Deux rayons parallèles  $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_m$ , diffractés par  $O$  et  $P_m$ , convergent en un point  $M$  situé dans le plan focal objet d'une lentille convergente  $L$ . On note  $A$  le projeté orthogonal de  $O$  sur  $\mathcal{R}_m$  et  $B$  celui de  $P_m$  sur  $\mathcal{R}_0$ . Soient :

- $\phi_0(O)$  la phase de  $\mathcal{R}_0$  en  $O$  et  $\phi_0(M)$  celle de  $\mathcal{R}_0$  en  $M$  ;
- $\phi_m(P_m)$  la phase de  $\mathcal{R}_m$  en  $P_m$  et  $\phi_m(M)$  celle de  $\mathcal{R}_m$  en  $M$  ;
- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la lumière utilisée.

Par définition :

$$\begin{cases} \phi_0(M) = \phi_0(O) + k(OM) \\ \phi_m(M) = \phi_m(P_m) + k(P_mM) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_0(M) = \phi_0(O) + k(OM) \\ \phi_m(M) = \phi_m(P_m) + k(P_mA) + k(AM) \end{cases}$$

avec  $(OM) = (AM)$  car  $OA$  est perpendiculaire à  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_m$ . Ainsi :

$$\Delta\phi_m = \phi_m(M) - \phi_0(M) = \phi_m(P_m) - \phi_0(O) + k(P_mA)$$

De même :

$$\phi_0(O) = \phi_0(B) + k(BO) \text{ avec } \phi_0(B) = \phi_m(P_m)$$

Par conséquent :

$$\Delta\phi_m = k(P_mA) - k(BO) = k [P_mA - BO]$$

Or :

$$\begin{cases} \sin i' = \frac{AP_m}{OP_m} \\ \sin i = \frac{BO}{OP_m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AP_m = OP_m \times \sin i' \\ BO = OP_m \times \sin i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta\phi_m = k OP_m \times (\sin i' - \sin i)$$

et, compte tenu de la définition des points  $O$  et  $P_m$  :

$$OP_m = m \times a \Rightarrow \Delta\phi_m = m \times ak (\sin i' - \sin i)$$

On notera dorénavant :

$$\varphi = ak (\sin i' - \sin i) \Rightarrow \Delta\phi_m = m\varphi$$

Les signaux produits en  $M$  par  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_m$  s'écrivent respectivement :

$$\underline{s}_0 = S_0 e^{j[\phi_0(M) - \omega t]} \Rightarrow S_0 e^{-j\omega t} = \underline{s}_0 e^{-j\phi_0(M)}$$

et :

$$\begin{aligned} \underline{s}_m &= S_0 e^{j[\phi_m(M) - \omega t]} = \underline{s}_0 e^{j[\phi_m(M) - \phi_0(M)]} \\ &= \underline{s}_0 e^{j\Delta\phi_m} = \underline{s}_0 e^{jm\varphi} \end{aligned}$$

Ce faisant, le point  $M$  reçoit, de la part des  $N$  fentes, le signal résultant :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{s}_0 + \underline{s}_1 + \dots + \underline{s}_{N-1} = \underline{s}_0 \sum_{m=0}^{N-1} (e^{j\varphi})^m \\ &= \underline{s}_0 \times \frac{e^{jN\varphi} - 1}{e^{j\varphi} - 1} = \underline{s}_0 \frac{e^{jN\varphi/2}}{e^{j\varphi/2}} \times \frac{e^{jN\varphi/2} - e^{-jN\varphi/2}}{e^{j\varphi/2} - e^{-j\varphi/2}} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\underline{s} = \underline{s}_0 e^{j(N-1)\varphi/2} \times \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$$

d'où se déduit l'intensité  $I$  proportionnelle à  $\underline{s} \underline{s}^*$  :

$$I = K \times \left[ \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \right]^2$$

#### 4.5.2.2 Formule du réseau

L'expression précédente de  $I$  montre que l'intensité en  $M$  est *maximum* lorsque  $\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$  s'annulent simultanément. Cette condition impose :

$$\frac{\varphi}{2} = p\pi \Rightarrow \varphi = p \times 2\pi \quad (p \in \mathbb{Z})$$

auquel cas :

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = \sin(Np \times \pi) = 0 \text{ car } Np \in \mathbb{Z}$$

Par conséquent, les *maxima* d'intensité sont caractérisés par :

$$ak (\sin i' - \sin i) = p \times 2\pi \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Ainsi se déduit la *formule du réseau* :

$$\sin i' = \sin i + p \times \frac{\lambda}{a} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

En revanche, l'intensité en  $M$  est nulle lorsque  $\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0$  :

$$\frac{N\varphi}{2} = q\pi \Rightarrow \varphi = \frac{q}{N} \times 2\pi \quad (q \in \mathbb{Z})$$

tandis que :

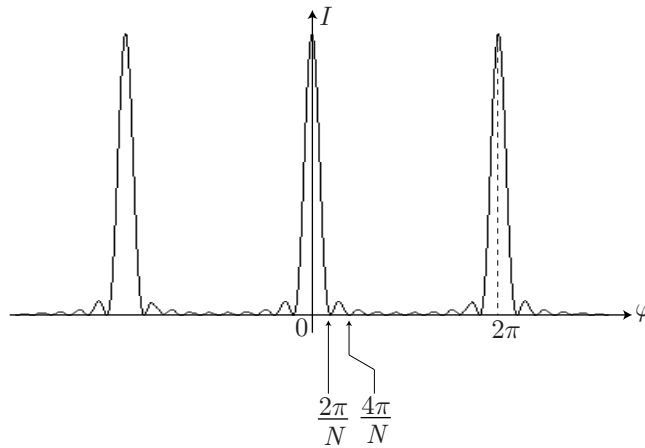
$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = x\pi \Rightarrow \varphi = x \times 2\pi \quad (x \in \mathbb{Z})$$

Ces deux conditions sont vérifiées si :

$$\frac{q}{N} = x \in \mathbb{Z} \text{ avec } q \in \mathbb{Z}$$

Par exemple,  $q$  peut prendre les valeurs :  $1, 2, \dots, N - 1$ .

La figure de diffraction obtenue sur un écran placé dans le plan focal image de  $L$  comporte des raies lumineuses, conformément à la représentation graphique de  $I(\varphi)$  :



#### 4.5.2.3 Réseau en lumière polychromatique

On suppose maintenant que le réseau est éclairé en lumière polychromatique, sous incidence normale ( $i = 0$ ). La formule du réseau indique que des *maxima* d'intensité sont observés dans les directions décrites par :

$$\sin i'_p = p \times \frac{\lambda}{a}$$

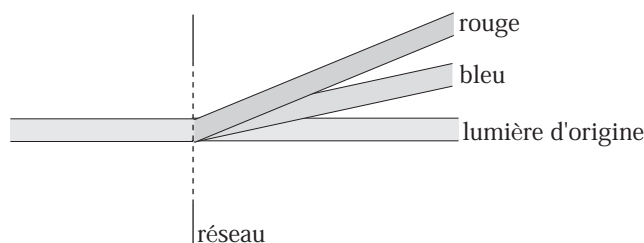
À l'ordre d'interférence  $p = 0$ ,  $i' = 0$  pour toute valeur de  $\lambda$  ; la lumière d'origine se recompose dans la direction incidente. En revanche, pour  $p = 1$  :

$$\sin i'_1 = \frac{\lambda}{a}$$

montre qu'à chaque longueur d'onde correspond un angle  $i'_1$  où se trouve un *maximum* d'intensité. Par exemple, aux lumières bleue et rouge sont associées respectivement les longueurs d'onde  $\lambda_b$  et  $\lambda_r > \lambda_b$ . Par suite :

$$\sin(i'_{1r}) > \sin(i'_{1b}) \Rightarrow i'_{1r} > i'_{1b}$$

ce qui signifie aussi que la lumière rouge est plus déviée que la bleue.



Un tel système permet donc la décomposition de la lumière.



Un réseau, de pas  $a$  et comportant  $N$  fentes, est éclairé sous incidence normale par un faisceau de lumière parallèle, composée de radiations de longueurs d'onde  $\lambda_1 = 583,5$  nm et  $\lambda_2 = 583,6$  nm. Pour visualiser la figure d'interférence, on intercale une lentille convergente  $\mathcal{L}$  (de distance focale  $f$ ) entre le réseau et un écran  $E$ , lequel se trouve dans le plan focal image de  $\mathcal{L}$ .

1. Quelle doit être la valeur de  $N$  pour qu'à l'ordre  $p = 1$  les deux figures d'interférence soient visibles ?  
On admettra que cette distinction est obtenue lorsque le premier *minimum* d'intensité associé à  $\lambda_1$  coïncide avec le *maximum* d'intensité associé à  $\lambda_2$ .
2. On dispose maintenant d'un réseau comportant  $N' = 1945$  fentes. À partir de quel ordre  $p$  peut-on distinguer les deux figures d'interférence ?

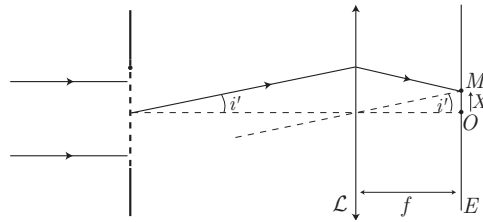
#### RÉPONSE

1. Soit  $i'_n$  la direction dans laquelle se trouve le *maximum* d'intensité pour une radiation de longueur d'onde  $\lambda_n$ , à l'ordre  $p$ . En incidence normale ( $i = 0$ ), la formule du réseau fournit :

$$\sin(i'_n) = p \times \frac{\lambda_n}{a}$$

c'est-à-dire, dans les conditions de Gauss :

$$\sin(i'_n) \simeq i'_n \Rightarrow i'_n = p \times \frac{\lambda_n}{a}$$



Soit  $O$  l'intersection de l'axe optique de  $\mathcal{L}$  avec l'écran  $E$  et soit  $M$  le point de  $E$  où convergent les rayons lumineux diffractés dans la direction  $i'$  :

$$\tan i' \simeq i' = \frac{OM}{f} = \frac{X}{f} \Rightarrow X = f i' \text{ avec } X = \overline{OM}$$

Ainsi, les *maxima* d'intensité associés aux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont localisés aux abscisses :

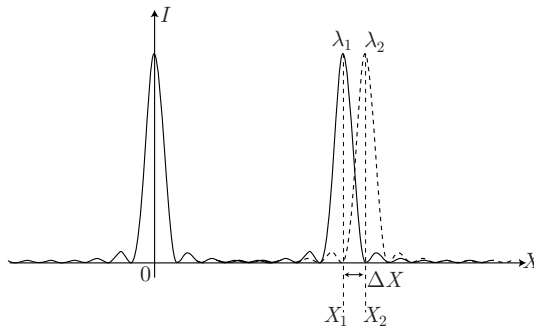
$$X_1 = f i'_1 = p \times \frac{f \lambda_1}{a} \text{ et } X_2 = f i'_2 = p \times \frac{f \lambda_2}{a}$$

En définissant :

$$\varphi = ak \sin i' \simeq a \times \frac{2\pi}{\lambda} i' = 2\pi \times \frac{aX}{\lambda f}$$

la figure de la page 547 montre que la première annulation de l'intensité associée à  $\lambda_1$  se produit à une distance angulaire  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$  du *maximum* d'intensité lié à  $\lambda_1$ , c'est-à-dire :

$$X = \frac{\lambda f}{2\pi a} \varphi \Rightarrow \Delta X = \frac{\lambda_1 f}{2\pi a} \Delta\varphi = \frac{\lambda_1 f}{Na}$$



Aussi, pour que les figures d'interférence puissent être distinguées, il faut que  $X_2 - X_1 = \Delta X$ , c'est-à-dire :

$$\frac{pf}{a} (\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{\lambda_1 f}{Na} \Rightarrow \frac{1}{N} = p \times \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \tag{26}$$

À l'ordre  $p = 1$ , cette relation devient :

$$N = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{583,5}{0,1} = 5\,835 \text{ fentes.}$$

2. En revanche, lorsque le réseau comporte  $N' = 1\,945$  fentes, la relation (26) conduit à :

$$p = \frac{1}{N'} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{N}{N'} = \frac{5\,835}{1\,945} \Rightarrow p = 3$$

● **95** **Concours ICNA**

5 min.

Propagation de la lumière

MP-PC-PSI-PT

Dans le vide, on considère les champs électrique et magnétique :

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \vec{e}_z \text{ et } \vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y$$

On rappelle deux des équations de Maxwell dans le vide :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ et } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

- Déterminer  $\varphi$  et  $B_0$  pour obtenir une onde plane. On suppose désormais cette condition vérifiée.
- Exprimer le vecteur de Poynting :  $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$  et sa valeur moyenne dans le temps.
- On utilise un cadre carré de côté  $a$ . Comment le placer pour que le flux lumineux y soit *maximum* ?

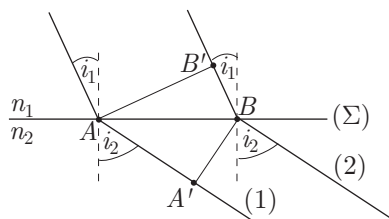
● **96** **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

Chemin optique

MP-PC-PSI-PT

Deux milieux transparents, d'indices de réfraction  $n_1$  et  $n_2$ , sont séparés par une interface  $(\Sigma)$ . Un faisceau de rayons parallèles, issus d'une même source située à l'infini, arrive sur  $(\Sigma)$  aux points  $A$  et  $B$ , sous l'angle d'incidence  $i_1$  et émerge dans le deuxième milieu avec un angle d'émergence  $i_2$ .



On note (1) et (2) les rayons qui passent respectivement aux points  $A$  et  $B$ . D'autre part, les points  $A'$  et  $B'$  désignent respectivement les projetés orthogonaux de  $B$  sur (1) et de  $A$  sur (2).

- On note  $\phi_X$  la phase de l'onde en un point  $X$ . Montrer que :

$$\Phi_{A'} - \Phi_A = \Phi_B - \Phi_{B'}$$

et en déduire que  $n_2 AA' = n_1 BB'$ .

- Déduire de la question précédente la loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

## ● 97 ————— Concours Commun Polytechnique

15 min.

Flux lumineux

MP-PC-PSI-PT

On se propose d'étudier l'onde lumineuse monochromatique, de pulsation  $\omega$ , issue d'un laser ; l'une quelconque des composantes du champ électromagnétique  $(\vec{E}, \vec{B})$  associé s'écrit :

$$\Psi(x, y, z, t) = \underline{\psi}(x, y, z) e^{-i\omega t}$$

$\underline{\psi}(x, y, z)$  étant l'amplitude complexe de la composante considérée et  $e^{-i\omega t}$  la fonction caractérisant la dépendance temporelle du champ, en notation complexe ( $i^2 = -1$ ).

Le faisceau lumineux est dit *Gaussien* car l'amplitude complexe  $\underline{\psi}(x, y, z)$  varie, dans le plan fixé par une valeur de  $z$ , selon la loi de Gauss, en fonction de la coordonnée transversale  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  :

$$\underline{\psi}(x, y, z) = \underline{A}(\rho, z) e^{ikz} \text{ avec } \underline{A}(\rho, z) = C(z) e^{-\rho^2/w^2(z)} \text{ où } k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$\lambda$  et  $c$  étant respectivement la longueur d'onde (dans le vide) et la vitesse de la lumière dans le vide. La distance  $w(z)$  est appelée *rayon de la section droite* du faisceau gaussien, au point de coordonnée  $z$  sur l'axe optique ; l'amplitude réelle  $C(z)$  sur l'axe ne dépend que de  $z$ .

Le plan de front, perpendiculaire à la direction moyenne de propagation, dans lequel le rayon de la section droite du faisceau gaussien est *minimum*, est pris comme origine des  $z$ . Cette valeur *minimum*  $w_0$  du rayon est appelée *waist* («taille» en anglais) du faisceau gaussien.

1. Quelle est la répartition en intensité de l'onde lumineuse  $I = \underline{\psi} \underline{\psi}^*$  dans le plan de front  $z$  ? Représenter avec soin le graphe correspondant  $I(\rho)$  de cette répartition. Calculer, en fonction de  $w$ , sa largeur totale à mi-hauteur  $\Delta\rho_{1/2}$ .
2. L'intensité précédente représente l'éclairement, c'est-à-dire le flux lumineux que reçoit, par unité de surface, un écran placé perpendiculairement à la direction moyenne de propagation. Calculer le flux lumineux total  $\Phi_t$  reçu par l'écran, en fonction de  $w(z)$  et de  $C(z)$ .
3. Quelle est la fraction de la puissance totale que reçoit un détecteur dont la surface coïncide avec le disque de rayon  $w$  ?

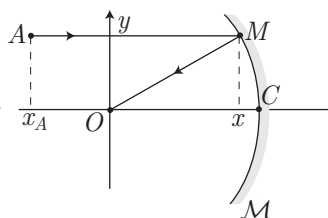
## ● 98 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

20 min.

Chemin optique

MP-PC-PSI-PT

Soit  $\mathcal{M}$  un miroir concave, d'axe  $Ox$  et de distance focale  $f$  telle que :  $OC = f$ . Le dispositif est placé dans l'air. Un rayon lumineux parallèle à  $Ox$  et passant par un point  $A(x_A, y)$  rencontre  $\mathcal{M}$  en un point  $M(x, y)$ , d'où il est réfléchi vers  $O(0, 0)$ .



1. Déterminer le chemin optique  $L = (AO)$  pour ce rayon, en fonction de  $x$ ,  $x_A$  et  $y$ . On posera désormais  $x_A = 0$ .

- Un faisceau de rayons parallèles (issus d'une source  $S$  infiniment éloignée de  $\mathcal{M}$ ) converge, après réflexion sur  $\mathcal{M}$ , au point  $O$ . On supposera que le stigmatisme pour le couple de points  $\{S, O\}$  est rigoureux. Que peut-on en déduire pour les chemins optiques ( $SO$ ) de ces rayons ? En déduire l'expression de  $L$  en fonction de  $f$ .
- Montrer que le stigmatisme rigoureux n'est vérifié que si  $\mathcal{M}$  est parabolique. Donner une représentation de  $\mathcal{M}$  pour  $x \geq 0$ .

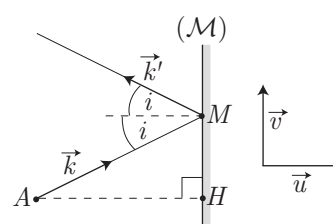
● **99** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

20 min.

Chemin optique

MP-PC-PSI-PT

Un miroir plan ( $\mathcal{M}$ ) est plongé dans un milieu d'indice de réfraction égal à 1. Un point  $A$ , situé du côté réfléchissant de ( $\mathcal{M}$ ), émet des rayons lumineux, qui interceptent le miroir en des points  $M$ . Après réflexion, ces rayons atteignent tous un point fixe  $A'$ . On note  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  les vecteurs unitaires directeurs de  $\overrightarrow{AM}$  et de  $\overrightarrow{MA'}$  lorsque  $A$  et  $A'$  sont du même côté du miroir. Le projeté de  $A$  sur ( $\mathcal{M}$ ) est noté  $H$ , tel que  $\overrightarrow{AH} = AH \vec{u}$ . Enfin,  $\overrightarrow{HM}$  a pour vecteur directeur unitaire  $\vec{v}$ .



- Exprimer le chemin optique  $\mathcal{L} = (AMA')$  en fonction de  $\overrightarrow{AH}$ ,  $\overrightarrow{HA'}$ ,  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$ .
- On cherche la position du point  $A'$  image de  $A$  par ( $\mathcal{M}$ ).
  - Lorsque  $\overrightarrow{HM}$  varie de  $d\overrightarrow{HM}$  (les points  $A$  et  $A'$  demeurant fixes), les vecteurs  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$  varient de  $d\vec{k}$  et  $d\vec{k}'$ . Expliquer pourquoi  $\overrightarrow{AH} \cdot d\vec{k} = -\overrightarrow{AH} \cdot d\vec{k}'$ .
  - En déduire l'expression de  $d\mathcal{L}$  en fonction de  $\overrightarrow{AH}$ ,  $\overrightarrow{HA'}$  et  $d\vec{k}'$ .
  - Quelle conséquence a sur  $d\mathcal{L}$  le stigmatisme rigoureux de ( $\mathcal{M}$ ) pour les points  $A$  et  $A'$  ? Montrer alors que  $A$  et  $A'$  sont conjugués lorsque  $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{AH}$ .

● **100** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

15 min.

Conditions d'interférences de deux ondes

MP-PC-PSI-PT

1. **Influence de la fréquence**

Deux signaux arrivent en un point  $M$  avec, pour équations :

$$s_1(M, t) = s_0 \cos(\phi_1 - \omega_1 t) \text{ et } s_2(M, t) = s_0 \cos(\phi_2 - \omega_2 t)$$

On pourra poser :

$$s_i(M, t) = s_0 \cos \varphi_i \text{ avec } \varphi_i = \phi_i - \omega t$$

Soit  $\mathcal{E}$  l'éclairement produit, en  $M$ , par la superposition de ces signaux, et  $\mathcal{E}_0$  celui produit par chacun d'eux isolément.

On rappelle que si  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux constantes réelles :

$$\begin{cases} \langle \cos^2(\alpha t + \beta) \rangle = \frac{1}{2} \\ \langle \cos(\alpha t + \beta) \rangle = 0 \end{cases} \text{ si } \alpha \neq 0 \text{ et : } \begin{cases} \langle \cos^2(\alpha t + \beta) \rangle = \cos^2 \beta \\ \langle \cos(\alpha t + \beta) \rangle = \cos \beta \end{cases} \text{ si } \alpha = 0$$



- (a) Exprimer  $\mathcal{E}$  en fonction de  $\mathcal{E}_0$  lorsque  $\omega_1 \neq \omega_2$ .  
 (b) Exprimer  $\mathcal{E}$  en fonction de  $\mathcal{E}_0$  et  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  lorsque  $\omega_1 = \omega_2$ . Conclure quant à l'influence des fréquences des signaux sur l'existence d'interférences.

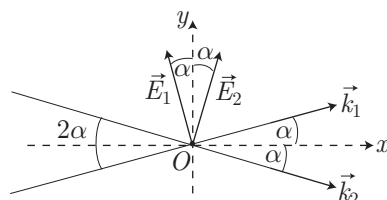
## 2. Cohérence spatiale

Deux sources sont incohérentes (du point de vue spatial) si le déphasage  $\phi_1 - \phi_2$  varie dans le temps de manière aléatoire, étant donné que ces sources émettent des signaux  $s_1(M, t)$  et  $s_2(M, t)$  à des dates aléatoires. On supposera que  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ .

- (a) Exprimer  $\mathcal{E}$  en fonction de  $\mathcal{E}_0$  lorsque les sources sont incohérentes.  
 (b) Exprimer  $\mathcal{E}$  en fonction de  $\mathcal{E}_0$  et  $\Delta\phi$  lorsque les sources sont cohérentes spatialement ( $\Delta\phi$  ne varie pas dans le temps). Que peut-on en conclure concernant l'influence de la cohérence spatiale ?

## 3. Influence de la polarisation

Deux ondes, de même pulsation  $\omega$  et cohérentes spatialement, arrivent en un point  $M$  avec des vecteurs d'onde  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$  faisant un angle  $2\alpha$  entre eux.



Les vecteurs champs électriques  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$ , perpendiculaires respectivement à  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$ , ont pour valeurs algébriques :

$$E_1 = E_0 \cos(\phi_1 - \omega t) \text{ et } E_2 = E_0 \cos(\phi_2 - \omega t)$$

- (a) Exprimer les composantes  $E_x$  et  $E_y$  du champ électrique résultant.  
 (b) Exprimer l'éclairement en  $O$ , en fonction de  $\mathcal{E}_0$ ,  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  et  $\alpha$ .  
 (c) À quelle condition des interférences peuvent-elles s'observer en  $O$  ?

## ● 101 ————— Concours de la Filière PT

10 min.

Interférences entre deux ondes lumineuses

MP-PC-PSI-PT

Quel intérêt y a-t-il à faire interférer des ondes d'égale intensité ? Justifier en exprimant le facteur de visibilité de la figure d'interférences :

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

## ● 102 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

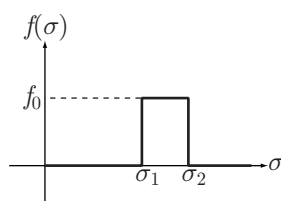
10 min.

Interférences non localisées

MP-PC-PSI-PT

On réalise une expérience d'interférences lumineuses (deux fentes éclairées par une fente source) en utilisant une fente qui possède une faible largeur spectrale.

La répartition de l'intensité émise en fonction du nombre d'onde  $\sigma = \frac{1}{\lambda}$  est représentée ci-dessous :



Dans un intervalle  $d\sigma$ , la source émet l'intensité  $dI = f_0^2 d\sigma$ . On posera :

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \Delta\sigma \ll \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

1. Déterminer l'éclairement en fonction de  $\delta$ , différence de marche en tout point.
2. Pour quelles valeurs de  $\delta$  les franges disparaissent-elles ?

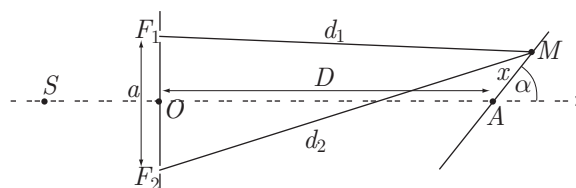
● **103** ————— **Lycée Clémenceau, Reims**

10 min.

*Interférences non localisées*

MP-PC-PSI-PT

Une source de lumière monochromatique quasi ponctuelle, placée en  $S$ , éclaire deux fentes fines  $F_1$  et  $F_2$  parallèles, distantes de  $a$ . On observe des franges d'interférences sur un écran placé à la distance  $OA = D$ , l'écran étant incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale.



L'abscisse  $x = AM$  des franges sur l'écran et  $a$  sont petits par rapport aux distances  $D$ ,  $d_1$  et  $d_2$ .

L'interfrange est sensiblement égal à :

- (a)  $\frac{\lambda D}{a} \cos \alpha$     (b)  $\frac{\lambda D}{a} \sin \alpha$   
 (c)  $\frac{\lambda D}{a \cos \alpha}$     (d)  $\frac{\lambda D}{a \sin \alpha}$

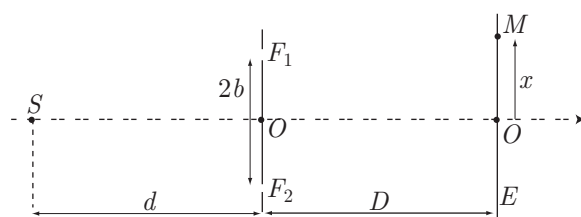
● **104** ————— **Lycée Hoche, Versailles**

15 min.

*Interférences non localisées*

MP-PC-PSI-PT

Deux fentes,  $F_1$  et  $F_2$ , espacées d'une distance  $2b = 2,4$  mm, sont éclairées par une source  $S$  située à une distance  $d = 0,50$  m du plan contenant  $F_1$  et  $F_2$ . L'observation se fait sur un écran  $E$ , situé à  $D = 0,50$  m en arrière du plan de  $F_1$  et  $F_2$ .



On supposera que  $x \ll D$  et  $b \ll D$ .

On perce dans  $E$  une fente  $F'$ , à la distance  $x = 1,5$  mm de l'axe ( $FO$ ) du système, derrière laquelle on place un spectroscopie. La source de lumière  $S$  donne toutes les longueurs d'onde  $\lambda$  comprises entre  $\lambda_1 = 400$  nm et  $\lambda_2$ ; on observe, grâce au spectroscopie, huit cannelures noires.

Déterminer l'intervalle dans lequel doit se trouver  $\lambda_2$ .

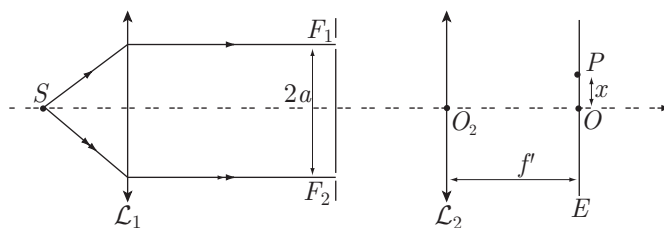
### ● 105 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

15 min.

Interférences non localisées

MP-PC-PSI-PT

- Deux fentes fines  $F_1$  et  $F_2$ , identiques, sont éclairées par un faisceau de lumière monochromatique, obtenu en plaçant dans le plan focal objet de la lentille  $\mathcal{L}_1$  une fente source, très fine, perpendiculaire à l'axe.



$S$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  sont parallèles et  $F_1$ ,  $F_2$  forment deux sources cohérentes entre elles en raison des phénomènes de diffraction.

Déterminer l'intensité  $I(x)$  observable sur l'écran  $E$  placé dans le plan focal image de la lentille convergente  $\mathcal{L}_2$ , de distance focale  $f'$ , en supposant que  $x \ll f'$ .

- On ajoute une troisième fente  $F_3$  à mi-distance de  $F_1$  et  $F_2$ , parallèle à celles-ci. Déterminer  $I(x)$  :
  - si  $F_3$  est identique à  $F_1$  et  $F_2$  ;
  - si  $F_3$  a une largeur double de celle de  $F_1$  et  $F_2$ . On admettra que l'amplitude des vibrations émises par une fente fine est proportionnelle à sa largeur.

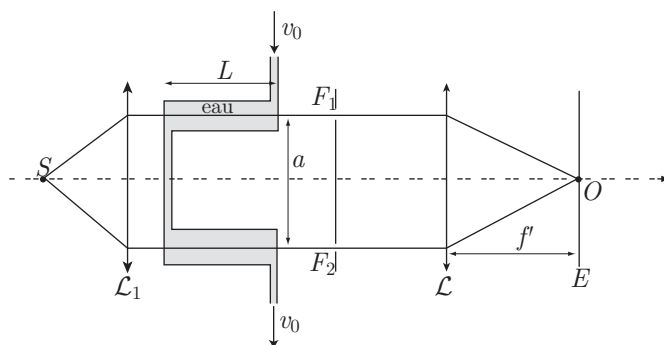
### ● 106 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

Interférences non localisées

MP-PC-PSI-PT

Deux fentes d'Young  $F_1$  et  $F_2$  émettent des rayons lumineux qui interfèrent en un point  $O$ . Les trajets lumineux passent dans une cuve contenant de l'eau (dont l'indice de réfraction vaut :  $n_0 = 1,33$ ) se déplaçant à la vitesse  $v_0$ .



Quand  $v_0 = 0$ , l'ordre d'interférence est nul en  $O$ .

Dire ce qui se passe pour  $v_0 \neq 0$ .

## ● 107 Concours TA

20 min.

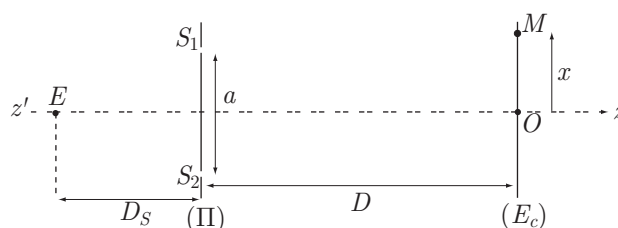
*Interférences non localisées*

MP-PC-PSI-PT

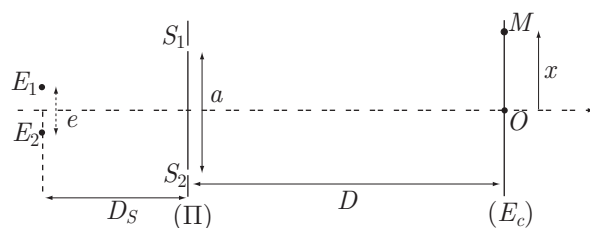
On veut déterminer la distance apparente entre deux étoiles par une méthode interférométrique.

On utilise un dispositif des trous d'Young, soit deux trous  $S_1$  et  $S_2$  de petite taille, percés dans un plan  $(\Pi)$  de part et d'autre, à la même distance  $\frac{a}{2}$ , d'un axe optique  $z'z$  orthogonal à  $(\Pi)$ . On éclaire ces trous à l'aide d'une source  $E$  lumineuse monochromatique, ponctuelle, de longueur d'onde  $\lambda$  située sur l'axe optique à une distance  $D_S$  de  $(\Pi)$ , et on observe le phénomène sur un écran  $(E_c)$ , situé à une distance  $D$  de  $(\Pi)$  et qui lui est parallèle.

1. Donner l'expression de l'intensité (ou éclairement)  $I(M)$  en un point  $M$  de l'écran, repéré par son abscisse  $x$  sur l'axe orienté  $x'Ox$ . L'étude se fait dans le plan de la figure.



2. On étudie, à l'aide de ce dispositif d'Young, deux étoiles  $E_1$  et  $E_2$ , de même magnitude (leur intensité est la même). Par un filtrage approprié, on ne s'intéresse qu'à une seule de leur radiation commune  $\lambda$ . Les étoiles sont éloignées de  $e$  l'une de l'autre et à la distance  $D_S$  de la Terre. L'écartement  $a$  des trous  $S_1$  et  $S_2$  est réglable.



- (a) Déterminer l'expression de l'intensité  $I(M)$  en un point  $M$  de l'écran, repéré par son abscisse  $x$  sur l'axe orienté  $x'Ox$ .
- (b) On définit la visibilité par le rapport :

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Déterminer la visibilité et représenter la fonction  $\mathcal{V}(a)$ .

- (c) En déduire que l'on peut déterminer l'angle apparent  $\beta = \frac{e}{D_S}$  à partir de la valeur  $a_1$  de  $a$  correspondant à la première annulation de la visibilité.

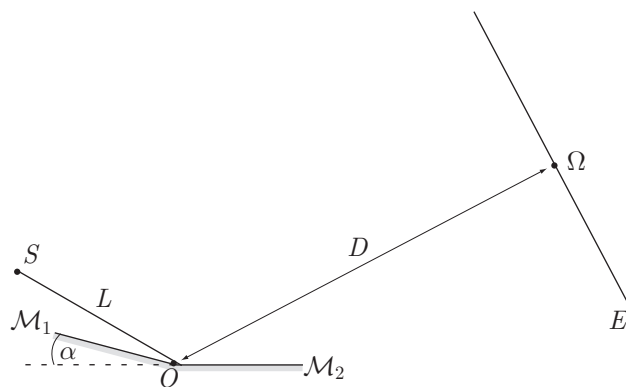
## ● 108 ————— Lycée Lakanal, Sceaux

30 min.

Miroirs de Fresnel

MP-PC-PSI-PT

1. Une source ponctuelle  $S$ , monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ ), éclaire deux miroirs de Fresnel dont les bords adjacents ont une arête commune de trace  $O$  dans le plan de la figure suivante :



La distance  $SO$  vaut  $L$  et les deux miroirs  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  font entre eux un angle  $\alpha$  petit. On observe les phénomènes d'interférence sur un écran  $E$  perpendiculaire à la direction moyenne ( $O\Omega$ ) des rayons réfléchis et placé à la distance  $D$  de  $O$ .  $a$  désigne la distance  $S_1S_2$  séparant les images  $S_1$  et  $S_2$  de  $S$  par  $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$  et on suppose que  $D \gg a$ . Le champ d'interférence sur  $E$  est supposé avoir une largeur proportionnelle à  $D$ .

- (a) Calculer, en fonction de  $\alpha$  et  $L$ , la distance  $a = S_1S_2$ .
- (b) En déduire l'expression de l'interfrange  $i$  correspondant à la longueur d'onde  $\lambda$ , en fonction de  $\lambda, D, L$  et  $\alpha$ .

- (c) Quel est, en fonction de  $\alpha$ ,  $L$ ,  $D$  et  $\lambda$  le nombre  $N$  de franges brillantes observables sur  $E$  ?
- (d) Application numérique :

$$\alpha = 6.10^{-3} \text{ rad} \quad D = 2,5 \text{ m} \quad L = 0,5 \text{ m} \quad \lambda = 0,6 \mu\text{m}$$

Calculer  $a$ ,  $i$  et  $N$ .

2. La source émet maintenant de la lumière blanche contenant toutes les longueurs d'onde entre  $0,4 \mu\text{m}$  et  $0,8 \mu\text{m}$ .

À une distance  $x = 2,5 \text{ mm}$  de  $\Omega$ , on perce une fente très fine dans  $E$ , parallèlement aux franges d'interférences. On place, derrière  $F$ , un spectroscopie qui révèle un spectre cannelé. Calculer les longueurs d'onde correspondant aux cannelures sombres.

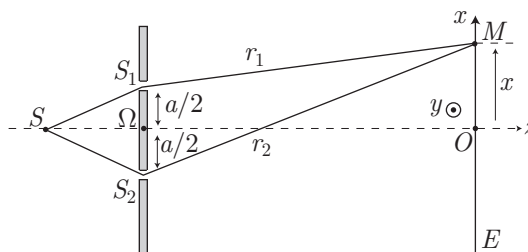
### ● 109 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

45 min.

Interférences non localisées

MP-PC-PSI-PT

On considère un système interférentiel représenté ci-dessous : une source ponctuelle  $S$  éclaire deux trous  $S_1$  et  $S_2$  percés dans un écran opaque. Ceux-ci se comportent comme des sources secondaires qui émettent de la lumière vers un écran  $E$ . La position d'un point  $M$  de cet écran est repérée par ses coordonnées  $(x, y)$  depuis  $O$ , projeté orthogonal de  $S$  sur  $E$ .



$S$  est équidistant de  $S_1$  et  $S_2$ , avec  $S_1S_2 = a$ .

On appelle *frange d'interférence* un ensemble continu de points  $M$  présentant le même ordre  $p$  d'interférence.

1. Montrer que les points  $M$  d'une même frange claire vérifient l'équation :

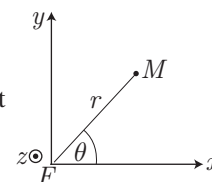
$$S_2M - S_1M = p\lambda_0 \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \quad (27)$$

2. On rappelle l'équation générale d'une conique, en coordonnées polaires :

$$r = \frac{\kappa}{1 - e \cos \theta}$$

où  $\kappa$  désigne le *paramètre de la conique*, dont la nature est conditionnée par la valeur de l'excentricité  $e$  :

- si  $e = 0$ , il s'agit d'un cercle centré sur le foyer  $F$  ;
- si  $|e| < 1$ , la conique est une ellipse dont l'un des foyers est  $F$  ;
- si  $|e| = 1$ , la conique s'identifie à une parabole ;



- $|e| > 1$  caractérise une hyperbole.

On admetta, dans ce qui suit, que  $S_1 S_2 = a \gg \lambda_0$  (longueur d'onde du rayonnement dans le milieu de propagation : l'air).

- (a) Montrer que l'équation (27) peut aussi s'écrire :

$$r = \frac{\kappa}{1 - e \cos \theta}$$

si  $r$  désigne la distance du point  $M$  au centre  $\Omega$  du segment  $[S_1, S_2]$ .

On exprimera l'excentricité  $e$  en fonction de  $a$ ,  $p$  et  $\lambda_0$ .

- (b) Quelle est la nature de la conique ainsi obtenue ? en donner une représentation graphique (en fonction de la valeur du paramètre  $p$ ) dans le plan  $(Oxy)$ . Quelles sont les surfaces associées dans le repère  $(O, x, y, z)$  ?
- (c) On désigne par  $(\Pi)$  un plan parallèle à  $(\Omega xy)$ , à une grande distance  $D$  de  $\Omega$ . Pour les faibles valeurs de  $x$  et  $y$  décrire la figure d'interférences sur  $(\Pi)$ .

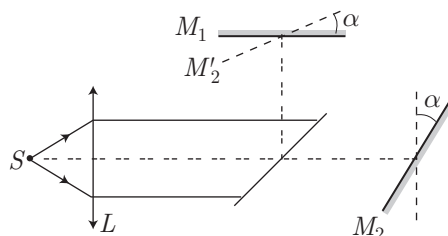
### ● 110 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

10 min.

Interféromètre de Michelson

MP-PC-PSI-PT

Un interféromètre de Michelson est réglé en « coin d'air », éclairé par une onde plane monochromatique.



1. Comment observer les interférences ? sont-elles localisées ?
2. Calculer l'interfrange. On supposera  $\alpha$  petit.

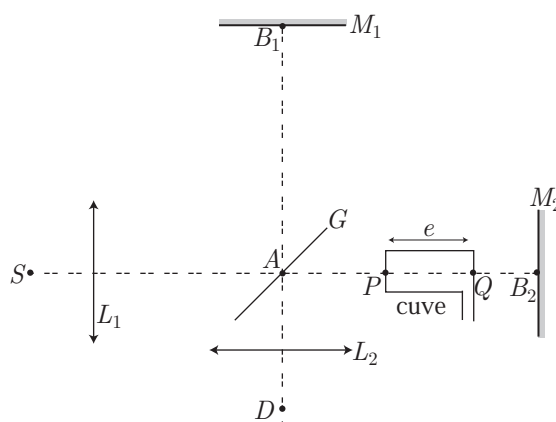
### ● 111 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

30 min.

Interféromètre de Michelson

MP-PC-PSI-PT

Un interféromètre de Michelson comporte deux miroirs plans orthogonaux  $M_1$  et  $M_2$ , de facteur de réflexion égal à 1, et une lame  $G$  inclinée à  $45^\circ$  par rapport aux normales aux deux miroirs. La lame  $G$ , appelée séparatrice, est semi-transparente, de facteur de réflexion égal à  $\frac{1}{2}$ , d'absorption négligeable et d'épaisseur nulle. On négligera le déphasage  $\pi$  induit par les réflexions sur  $M_1$ ,  $M_2$  et  $G$ .



Une source ponctuelle  $S$ , monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 632,8$  nm dans le vide, placée au foyer objet de la lentille  $L_1$ , éclaire l'interféromètre par un faisceau de rayons parallèles.

Chacun des rayons se dédouble lorsqu'il arrive sur la face semi-réfléchissante de la séparatrice. Le rayon incident  $SA$ , par exemple, donne deux rayons qui parcourent les chemins respectifs  $AB_1 - AD$  et  $AB_2 - AD$ , arrivent au détecteur à travers un objectif  $L_2$ . Le détecteur  $D$  est placé au foyer image de  $L_2$ .

Dans le bras  $AB_2$ , on met une cuve d'épaisseur  $e$  dont les faces sont perpendiculaires à  $AB_2$  et on néglige les réflexions sur les faces de la cuve. On fait le vide dans la cuve et on fixe le miroir  $M_2$  pour avoir une différence de marche nulle en  $D$ . Puis on remplit, de manière quasi statique et isotherme, la cuve d'hexafluorure de soufre (gazeux) à température constante  $T = 293$  K. Un manomètre permet d'avoir, à chaque instant, la pression  $P$  du gaz dans la cuve. On admet la loi de Gladstone :

$$\frac{n - 1}{\rho} = C$$

où  $C$  est une constante,  $n$  et  $\rho$  respectivement l'indice absolu et la masse volumique du gaz à la température  $T$  et à la pression  $P$ .

1. Calculer l'ordre d'interférence  $p$  en  $D$ , en fonction de  $\lambda_0$  et  $n$  pour la pression  $P$ .
2. Lorsque la pression varie, on observe que l'intensité  $I$  en  $D$  passe alternativement par des *maxima* et des *minima*. Calculer le nombre  $N$  de *maxima* détectés lorsque la pression passe de zéro à la valeur  $P$  correspondant à la valeur  $n$  de l'indice. On ne comptera pas le *maximum* correspondant à  $P = 0$ .
3. Exprimer  $N$  en fonction de  $e$ ,  $\lambda_0$ ,  $\rho$  et de la constante  $C$  de la loi de Gladstone.
4. Lorsque la pression atteint  $P_0 = 10^5$  Pa on a compté  $N_0$  *maxima*. Soit  $\rho_0$  la masse volumique du gaz à cette pression. On appelle :

$$y = \frac{P}{P_0} \times \frac{\rho_0}{\rho} \quad (28)$$

Montrer que  $y$  peut s'écrire en fonction de  $P$ ,  $P_0$ ,  $N$  et  $N_0$ .

5. On a obtenu les résultats expérimentaux groupés dans le tableau ci-dessous :

$P$ ( $10^5$ Pa)	1,00	2,93	4,76	6,48	8,15
$N$	100	300	500	700	900



Calculer  $y$  pour les différentes pressions.

6. Tracer le graphe  $y = f(P)$ . On admettra que les points expérimentaux sont sur une droite d'équation :

$$y = a - bP$$

Déterminer  $a$  et  $b$  avec leurs unités.

7. La courbe précédente représente l'isotherme de  $\text{SF}_6$  à la température  $T$ . Ce gaz est-il parfait ?
8. On se propose de déterminer le coefficient de compressibilité isotherme de  $\text{SF}_6$  :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Montrer que :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$$

9. Calculer  $\chi_T$  en fonction de  $P$ ,  $a$  et  $b$ . Faire l'application numérique pour  $P = 8,15 \cdot 10^5$  Pa.

## ● 112 Banque de la filière PT

45 min.

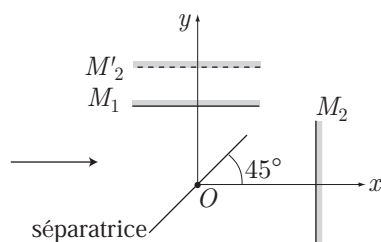
Interféromètre de Michelson

MP-PC-PSI-PT

On considère un interféromètre de Michelson « théorique » dans lequel la lame séparatrice est considérée comme idéalement fine. Il n'y a pas de compensatrice. La séparatrice introduit un déphasage supplémentaire égal à  $\pi$  sur une onde : celle qui s'y réfléchit dès l'entrée. On suppose en outre que les éclairagements dus à chacune des deux ondes qui émergent de l'interféromètre sont égaux ; on les note  $\varepsilon_0$ .

Soit  $M'_2$  le symétrique du miroir  $M_2$  par la séparatrice.

1. L'interféromètre est réglé en « lame d'air » et est éclairé par une onde plane, monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , arrivant avec une incidence de  $45^\circ$  sur la séparatrice.  $M_1$  est parallèle à  $Ox$  et  $M_2$  est parallèle à  $Oy$ . La direction de l'onde plane incidente est parallèle à  $Ox$ . Soit  $e$  la distance algébrique entre  $M_1$  et  $M'_2$ .



On recueille les faisceaux émergents sur un écran translucide plan parallèle au miroir  $M_1$ .

- (a) Quel est l'aspect de ce plan pour une distance  $e$  donnée. Exprimer l'éclairement  $\varepsilon$ .

- (b) Est-il possible de repérer la position correspondant à  $e = 0$  ?

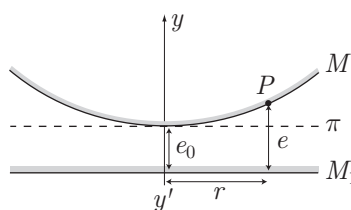
Montrer simplement, sans calcul, que l'utilisation d'une source de lumière blanche permet de résoudre ce problème.

2. On admet que la condition  $e = 0$  est réalisée. La source est monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$ . On incline alors  $M_2$  d'un angle  $\alpha$  faible. On éclaire l'ensemble de telle sorte que l'on observe des franges d'interférence localisées du coin d'air.

Exprimer l'interfrange  $i$  sur la surface de localisation, en fonction de  $\lambda$  et  $\alpha$ .

3. Le miroir  $M_2$ , initialement plan et tel que  $M'_2$  soit parallèle à  $M_1$ , s'est déformé et est devenu sphérique. On admettra que le centre de la sphère  $M'$ , symétrique de  $M_2$  par rapport à la séparatrice, de rayon  $R$ , se trouve sur l'axe  $y'y$ , qui est donc axe de symétrie de  $M'$ . Le dispositif est éclairé comme dans la question 2.

- (a) Soit  $e_0$  la distance entre  $M_1$  et le plan  $\pi$  tangent à  $M'$  et parallèle à  $M_1$ . Exprimer l'épaisseur d'air  $e$  entre  $M_1$  et  $M'$  pour un point  $P$  de  $M'$ , en fonction de  $e_0$ ,  $r$  et  $R$ . On remarquera que les conditions d'observation impliquent les approximations :  $r \ll R$  et  $e_0 \ll R$ .



- (b) Avec les approximations précédentes, exprimer la différence de marche  $\delta$  en un point  $P$  situé à la distance  $r$  de l'axe  $y'y$ . Montrer que, dans les mêmes conditions d'observation que les franges du coin d'air, on observe des anneaux localisés au voisinage de  $M'_2$ .
- (c) Déterminer l'ordre  $p_0$  au centre des anneaux, en fonction de  $e_0$  et  $\lambda$ . On utilise l'indice  $k$  pour repérer les anneaux brillants, sachant que  $k = 1$  correspond au premier anneau brillant à partir du centre de la figure d'interférence, de rayon  $R_1$  sur la surface de localisation. Calculer le rayon  $R_k$  du  $k^{\text{ème}}$  anneau brillant en fonction de  $R_1$ ,  $k$ ,  $\lambda$  et  $R$ .
- (d) On veut déterminer si  $M_2$  est devenu concave ou convexe. Pour cela, on déplace  $M_2$  par translation vers la séparatrice ;  $\pi$  reste parallèle à  $M_1$ . Montrer que l'observation du phénomène permet de donner une réponse à cette question.

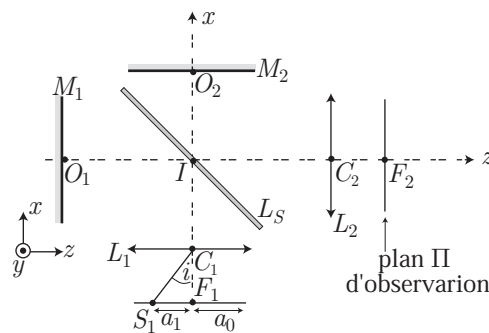
### ● 113 ————— Concours Commun Polytechnique

45 min.

Interféromètre de Michelson

MP-PC-PSI-PT

On considère l'interféromètre de Michelson ci-dessous, où les miroirs plans,  $M_1$  de centre  $O_1$  et  $M_2$  de centre  $O_2$ , sont perpendiculaires l'un à l'autre.



L'interféromètre comporte une lame  $L_S$ , de centre  $I$ , semi-réfléchissante, appelée séparatrice, qui réfléchit et transmet la lumière avec la même énergie. Cette lame est inclinée à  $45^\circ$  par rapport aux normales à  $M_1$  et  $M_2$ .

On fera les deux hypothèses suivantes :

- l'ensemble {séparatrice, compensatrice} est équivalent à une lame séparatrice infiniment fine ;
- on néglige le déphasage induit par le traitement réfléchissant entre l'onde 1 se réfléchissant sur  $M_1$  et l'onde 2 se réfléchissant sur  $M_2$ .

L'interféromètre est placé dans l'air, assimilé au vide.

On considère que  $M_1$  est fixe et que  $M_2$  peut être translaté suivant l'axe  $(Ix)$ , parallèlement à l'axe  $(Iz)$ . La source  $S$ , étendue, monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans le vide, est placée au foyer principal objet d'une lentille convergente  $L_1$ , de distance focale  $f_1 = 100$  mm. Cette source est assimilable à un cercle centré en  $F_1$ , de rayon  $a_0$ , dans un plan parallèle à  $(Oy, Oz)$ .

Le plan d'observation  $\Pi$ , parallèle au plan  $(Ox, Oy)$ , se situe dans le plan focal image d'une lentille convergente  $L_2$ , de foyer principal image  $F_2$ , de distance focale image  $f_2 = 1$  m. On note  $e = IO_1 - IO_2$ , où  $IO_1$  représente la distance de  $I$  à  $O_1$  et  $IO_2$  celle de  $I$  à  $O_2$ .

1. On considère un point  $S_1$ , situé à la distance  $a_1$  de  $F_1$  et repéré par l'angle  $i$  considéré petit (voir la figure précédente).
  - (a) Quelle est la direction du faisceau issu de  $S_1$  après avoir traversé la lentille  $L_1$  ?
  - (b) Représenter la marche des deux rayons issus du rayon  $S_1C_1$ , jusque dans le plan  $\Pi$ .  
*Remarque : On notera rayon 1 le rayon se réfléchissant sur  $M_1$  et rayon 2 celui se réfléchissant sur  $M_2$ .*
  - (c) On peut montrer que tout se passe comme si le rayon 2, à la sortie de la séparatrice, avait été réfléchi par un miroir virtuel  $M'_2$ , dont on indiquera la position sur un schéma.
2. Montrer que les rayons 1 et 2 interfèrent en un point  $M$  du plan focal image de  $L_2$ . Donner la distance  $F_2M$ . Que peut-on dire des autres rayons qui constituent le faisceau issu du point  $S_1$  ?
3. Montrer que la différence de chemin optique  $\Delta$  des rayons 1 et 2 est donnée par la relation :  $\Delta = 2e \cos i$ . En déduire l'allure de la figure d'interférence.

4. (a) Donner l'expression de l'ordre d'interférence  $p$  au point  $M$ . En déduire l'ordre d'interférence  $p_0$  en  $F_2$ , défini par :  $p_0 = k_1 + \varepsilon$  où  $k_1$  est l'ordre d'interférence relatif à la première frange brillante. Comment varie l'ordre d'interférence lorsque  $i$  augmente ?
- (b) L'angle  $i$  étant faible, déterminer le rayon du  $n^{\text{ème}}$  anneau brillant, appelé  $r_n$ , en fonction de  $p_0$ ,  $n$ ,  $\varepsilon$  et  $f_2$ .
- (c) Application numérique :  $e = 1,1$  mm. Déterminer  $p_0$  puis l'ordre d'interférence et le rayon du premier et du cinquième anneau brillant, pour  $\lambda = 546$  nm (raie du mercure). Quel doit être le rayon  $a_0$  de la source si l'on veut pouvoir observer les cinq premiers anneaux ?
5. (a) On diminue la valeur de  $e$ . Montrer que les anneaux semblent « rentrer ». Calculer la valeur de  $e$  pour laquelle le premier anneau disparaît. En déduire le rayon  $r'_1$  du nouveau premier anneau.
- (b) Décrire le phénomène observé pour  $e = 0$ .

## ● 114 ————— Concours Polytechnique

60 min.

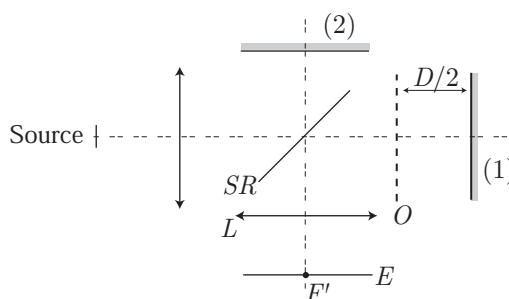
MP-PC-PSI-PT

*Interféromètre de Michelson*

Dans tout ce qui suivra, on notera  $\sigma$  le nombre d'onde, à savoir l'inverse de la longueur d'onde  $\lambda$ . On exprimera ce nombre d'onde en  $\text{m}^{-1}$ .

### I- Interférométrie

1. La figure ci-dessous correspond au montage de principe d'un interféromètre de Michelson. Les miroirs sont réglés de telle façon que l'on observe des anneaux d'interférence circulaires sur l'écran  $E$  placé dans le plan focal image de la lentille  $L$ , de distance focale image  $f'$ .



- (a) Quel est le rôle de la lame semi-réfléchissante  $SR$  ? Quel est celui de la lentille  $L$  ?
- (b) Montrer qu'avec ce montage la moitié du flux incident est irrémédiablement perdue.
2. La différence de marche, différence entre les deux chemins optiques, pour un rayon entrant perpendiculairement au miroir (1), est notée  $D$  ; pour un rayon entrant avec une inclinaison  $i$ , on rappelle que la différence de marche est alors donnée par :  $\delta = D \cos i$ .
- L'interféromètre est éclairé par une source étendue, supposée strictement monochromatique de nombre d'onde  $\sigma_0$ . On suppose la tache centrale en  $F'$  brillante. Exprimer le rayon  $r_1$  du premier anneau sombre, en fonction de  $\sigma_0$ ,  $D$  et  $f'$ .

3. On éclaire l'interféromètre par une source monochromatique, de nombre d'onde  $\sigma_0$ . Un détecteur est placé au foyer  $F'$  de la lentille  $L$ . Ce détecteur délivre un signal  $S(D)$  proportionnel à l'intensité lumineuse au point  $F'$ . Ce signal sera appelé dans la suite *interférogramme*. Il dépend de la différence de marche  $D$ .

(a) Montrer que  $S(D)$  est donné par :

$$S(D) = S_0 [1 + \cos(2\pi\sigma_0 D)]$$

(b) Quelle est la période de l'interférogramme ?

4. On illumine l'interféromètre par une source présentant un doublet de nombres d'onde  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  voisins. Chacune des raies est supposée monochromatique.

(a) Déterminer l'expression de l'interférogramme  $S(D)$  correspondant. Mettre en évidence deux périodes caractéristiques dans  $S(D)$ .

(b) *Application numérique* : représenter l'allure de l'interférogramme pour le doublet du sodium :  $\lambda_1 = 589,0$  nm et  $\lambda_2 = 589,6$  nm.

## II- Interférogramme d'une raie élargie

1. On suppose maintenant que le profil spectral de la source n'est plus monochromatique mais possède une largeur  $\Delta\sigma$ . On désigne par  $I_\sigma$  l'intensité spectrale : dans l'intervalle  $[\sigma, \sigma + d\sigma]$ , l'intensité émise est  $I_\sigma d\sigma$ . On admettra que les rayonnements correspondant à chaque intervalle de largeur  $d\sigma$  sont incohérents. On notera  $I_0$  l'intensité lumineuse totale de la raie.  $I_0$  est donc donné par la somme des intensités de chaque intervalle :

$$I_0 = \int_0^\infty I_\sigma d\sigma$$

Dans la suite, on prendra  $I_\sigma$  de la forme :

$$I_\sigma(\sigma) = \frac{I_0}{\Delta\sigma} \quad \text{si } |\sigma - \sigma_0| \leq \frac{\Delta\sigma}{2}$$

$$I_\sigma(\sigma) = 0 \quad \text{si } |\sigma - \sigma_0| > \frac{\Delta\sigma}{2}$$

(a) Montrer alors que le signal détecté est donné par :

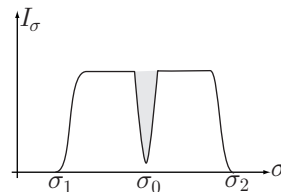
$$S(D) = S_0 [1 + \mathcal{V} \times \cos(2\pi\sigma_0 D)]$$

et exprimer la fonction de visibilité des franges  $\mathcal{V}$  en fonction de  $D$  et  $\Delta\sigma$ . Représenter schématiquement la fonction  $\mathcal{V}(D)$ .

(b) Quelle est la plus petite valeur  $D_{\Delta\sigma}$  de  $D$  qui annule la fonction de visibilité ?

2. On illumine l'interféromètre avec une source stellaire *via* un filtre de bande passante  $[\sigma_1, \sigma_2]$  sélectionnant une raie en absorption (voir figure ci-dessous).

Cette raie d'absorption (profil grisé sur la figure) est suffisamment étroite pour être considérée comme monochromatique. On note  $I_c$  l'intensité totale au travers du filtre (sans absorption) et  $I_a$  l'intensité totale absorbée.



- (a) Montrer que, d'après la question précédente, on peut négliger dans le signal interférométrique tout terme interférentiel associé au spectre large délimité par le filtre, si  $D$  est suffisamment grand, en supposant valables les résultats établis précédemment sur le profil de raie idéalisé.
- (b) En déduire que l'interférogramme s'écrit :

$$S(D) = S_c [1 + C \cos(2\pi\sigma_0 D)]$$

où  $S_c$  est proportionnel à  $I_c$ . Exprimer le contraste de franges  $C$  en fonction de  $I_c$  et  $I_a$ .

● **115** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

Diffraction à l'infini

MP-PC-PT-PSI

1. Démontrer que pour une constante réelle non nulle  $\alpha$  :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\alpha u} du = 0$$

2. Montrer que la figure de diffraction à l'infini est la même (sauf dans la direction de propagation) pour un écran opaque percé d'une petite ouverture de forme quelconque et pour un petit écran opaque ayant la même forme que l'ouverture.

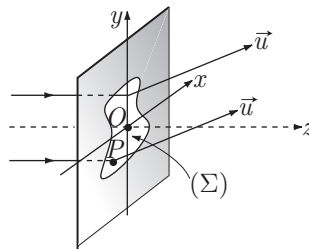
● **116** ————— **Concours Centrale-Supélec**

15 min.

Diffraction à l'infini

MP-PC-PSI-PT

On s'intéresse à la diffraction à l'infini (aussi appelée diffraction de Fraunhofer) d'une onde électromagnétique incidente plane progressive monochromatique (de longueur d'onde  $\lambda$ ) par une ouverture plane. L'onde incidente arrive sur le plan de l'ouverture sous incidence normale.



L'ouverture, notée  $(\Sigma)$ , est placée dans le plan  $(xOy)$ .  $M(x, y, 0)$  est un point courant de cette ouverture.  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire donnant la direction dans laquelle on étudie l'onde diffractée.

1. Donner (sans démonstration) l'expression de l'intensité  $I(\vec{u})$  diffractée à l'infini dans une direction définie par le vecteur unitaire  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  (à une constante multiplicative près).

- Comment feriez-vous en pratique, pour observer la figure de diffraction, à l'infini, de l'ouverture ( $\Sigma$ ) ?
- L'ouverture ( $\Sigma$ ) est maintenant une ouverture carrée de côté  $a$ . Calculer l'intensité  $I(\vec{u})$  diffractée à l'infini dans la direction  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  et  $a$ . On notera  $I_0$  l'intensité diffractée dans la direction  $\vec{u}_z$ .
- Tracer l'aspect de la courbe donnant l'intensité  $I(\alpha, \beta = 0)$  diffractée dans le plan  $(xOz)$ , en fonction de  $\alpha$  (pour l'ouverture carrée). On fera figurer toutes les grandeurs intéressantes.

Quelle est l'expression de la largeur angulaire (dans la direction  $x$ ) de la tache centrale de diffraction ?

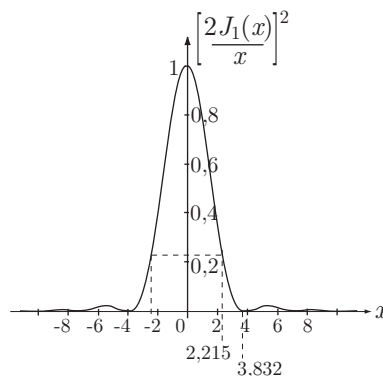
*Application numérique* : pour une fréquence  $f = 12$  GHz et une largeur  $a = 0,2$  m, donner cette largeur angulaire en degrés.

- Dans le cas où l'ouverture ( $\Sigma$ ) est une ouverture circulaire de diamètre  $D$ , on montre que l'intensité  $I(\vec{u})$ , diffractée à l'infini dans la direction de  $\vec{u}$ , s'exprime par :

$$I(\vec{u}) = I_0 \left[ \frac{2 J_1 \left( \pi \frac{\alpha}{\lambda} D \right)}{\pi \frac{\alpha}{\lambda} D} \right]^2$$

où  $I_0$  est toujours l'intensité diffractée à l'infini dans la direction  $\vec{u}_z$ ,  $\alpha$  est l'angle entre  $\vec{u}$  et  $\vec{u}_z$  et  $J_1$  est une fonction de Bessel d'ordre 1.

On donne l'aspect de la fonction  $\left[ \frac{2 J_1(x)}{x} \right]^2$  :



Déterminer la largeur angulaire (en degrés) de la tache centrale de diffraction, pour une fréquence  $f = 12$  GHz et un diamètre  $D = 0,2$  m. Comparer avec le cas de l'ouverture carrée.

### ● 117 ————— Lycée Carnot, Dijon

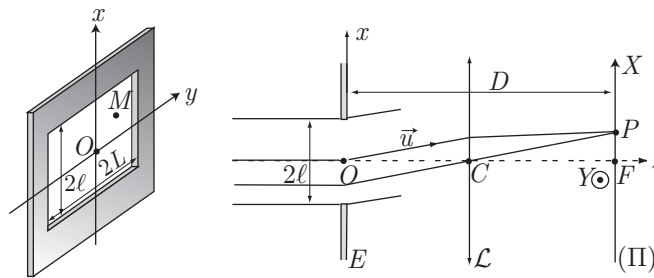
15 min.

Diffraction à l'infini

MP-PC-PSI-PT

Dans toutes les questions, on ne considère que les rayons lumineux paraxiaux, c'est-à-dire passant au voisinage de l'axe optique  $z'z$  du système centré et faiblement inclinés sur l'axe (leur vecteur unitaire directeur  $\vec{u}$  a donc une composante  $u_z$  très proche de l'unité). Ces rayons se propagent dans l'air assimilé au vide.

Soit une fente rectangulaire  $\mathcal{F}$  (de largeur  $2\ell$ , de longueur  $2L$ , de centre  $O$ ) ménagée dans un écran  $E$ . Elle est éclairée par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , dont le plan d'onde est parallèle au plan  $(xOy)$  de la fente  $\mathcal{F}$ .



1. Calculer le déphasage  $\varphi$  de l'onde diffractée dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma \simeq 1)$ , issue du point  $M(x, y, 0)$  de la fente, par rapport à l'onde issue du point  $O$  et diffractée dans la même direction.
2. Donner l'expression de l'amplitude complexe de l'onde émergente totale, diffractée à l'infini par  $\mathcal{F}$  dans la direction de  $\vec{u}$ .
3. En déduire l'expression de l'intensité  $I(P)$  observée sur un écran (II) placé dans le plan focal image d'une lentille convergente  $\mathcal{L}$ , de distance focale image  $f$ , en un point  $P(X, Y, D)$ . On appellera  $I_0$  l'intensité lumineuse au point  $F$ , foyer principal image de  $\mathcal{L}$ .

### ● 118 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

15 min.

Diffraction à l'infini

MP-PC-PSI-PT

Dans le plan  $(xOy)$ , on place une pellicule de facteur de transmission en amplitude  $t(x, y) = T(x) \times T(y)$ , défini de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned} T(x) &= 0 \text{ pour } |x| \geq \frac{a}{2} \\ T(x) &= 1 + \frac{2x}{a} \text{ pour } -\frac{a}{2} \leq x \leq 0 \\ T(x) &= 1 - \frac{2x}{a} \text{ pour } 0 \leq x \leq \frac{a}{2} \end{aligned} \right\} \text{ fonction triangle}$$



et :

$$\begin{cases} T(y) = 1 \text{ pour } |y| \leq \frac{b}{2} \\ T(y) = 0 \text{ pour } |y| > \frac{b}{2} \end{cases}$$

La pellicule est éclairée sous incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ .

Quelle est la figure de diffraction à l'infini lorsque  $b \gg a$  ?

● **119** **Concours ENSAM**

15 min.

Diffraction à l'infini

MP-PC-PSI-PT

Le plan de figure est le plan de symétrie de tout dispositif décrit dans le problème. La lumière est considérée comme monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ .

1. Un écran opaque  $E$  est percé d'une fente  $F$  de largeur  $L$  très petite par rapport à sa longueur.  $F$  reçoit un faisceau de lumière, parallèle au plan de figure, qui provient d'un point  $S$  situé à l'infini dans une direction faisant un angle  $\alpha$  avec la normale à  $E$  (figure 1).  $O$  est le centre de  $F$ .

$P$  est un point de  $F$  dans le plan de figure, dont la position est repérée par  $x$ . La variable  $x$  pourra donc varier de  $-\frac{L}{2}$  à  $\frac{L}{2}$ .

Un rayon diffracté dans le plan de figure est repéré par l'angle  $i$  qu'il fait avec la normale à  $E$ . Dans tout le problème,  $\alpha$  et  $i$  sont très petits :  $\alpha$  et  $|i|$  sont très inférieurs à une minute d'arc.

On considère, au delà de  $F$ , un plan  $(\Pi)$  perpendiculaire au faisceau diffracté dans la direction  $i$ , dont la trace dans le plan de figure coupe les rayons issus de  $O$  et  $P$  en  $N$  et  $N'$ .

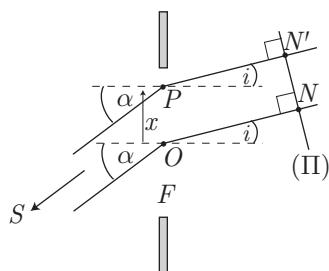


figure 1

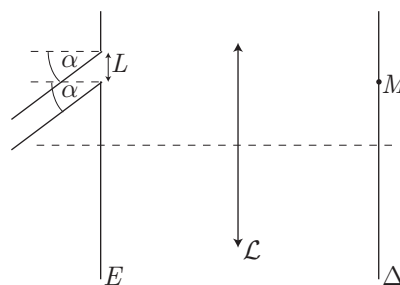


figure 2

- (a) Calculer, en fonction de  $x$ ,  $\alpha$  et  $i$  la différence de marche  $\delta$  entre les vibrations lumineuses aux points  $N$  et  $N'$ .
  - (b) Donner, en fonction de  $\alpha$ ,  $i$ ,  $x$  et  $\lambda$  ( $\alpha$  et  $i$  étant exprimés en radians) l'expression simplifiée du déphasage  $\Delta\phi$  entre ces deux vibrations en tenant compte du fait que  $\alpha$  et  $i$  sont très petits.
2. Derrière  $E$  (figure 2) est placé un objectif  $\mathcal{L}$  assimilé à une lentille mince convergente de distance focale  $f$ , dont l'axe optique est normal à  $E$ .  $\Delta$  est l'intersection du plan focal image de  $\mathcal{L}$  dans le plan de figure.  $M$  est un point de  $\Delta$ .

On appelle élément (de fente) un rectangle infiniment mince appartenant à la fente, de largeur  $dx$  et de longueur très grande. On admettra que :

- un élément fournit, en  $M$ , grâce à  $\mathcal{L}$ , une vibration d'amplitude  $a dx$ ,  $a$  étant une constante ;
- la différence de marche en  $M$  entre la vibration qui a suivi le trajet  $SPM$  et celle qui a suivi le trajet  $SOM$  est  $\delta$ , précédemment calculé.

On rappelle qu'étant donné une grandeur  $u$  de nature physique quelconque, fonction sinusoïdale du temps, d'amplitude  $Y$  :  $u = Y \cos(\phi - \omega t)$ , sa représentation complexe est  $\underline{u} = Y e^{j(\phi - \omega t)} = Y e^{j\phi} e^{-j\omega t}$  et que  $\underline{Y} = Y e^{j\phi}$  est appelé amplitude complexe associée à  $u$ .

Le choix de l'origine des temps est tel que la vibration en  $M$ , fournie par l'élément  $dx$  situé en  $O$ , s'écrit :  $a dx \cos(\omega t)$ .

Quelle est alors, en fonction de  $\alpha$ ,  $i$ ,  $x$ ,  $\lambda$ ,  $a$  et  $dx$  l'amplitude complexe de la vibration en  $M$  fournie par l'élément  $dx$  placé en  $P$  ?

3. On considère la fente entière. Calculer l'amplitude complexe de la vibration résultante en  $M$  et montrer que cette vibration est en phase avec celle émise par l'élément placé en  $O$ .
4. On définit l'intensité de la vibration comme le carré de son amplitude. Montrer que l'intensité  $I$  en  $M$  peut s'écrire, avec  $H$  fonction de  $L$  et  $a$  et avec  $u$  fonction de  $L$ ,  $i$ ,  $\alpha$ ,  $\lambda$  :

$$I = H \times \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2$$

● 120 ————— Lycée Carnot, Dijon  
20 min.

*Diffraction à l'infini*

MP-PC-PSI-PT

On considère le montage classique de la diffraction à l'infini par une ouverture.

Comment sera modifiée la figure de diffraction :

1. si l'on dilate (ou contracte) l'ouverture ?
2. si l'on translate l'ouverture dans son plan ?
3. si l'on remplace l'ouverture par un grand nombre d'ouvertures identiques, toutes disposées au hasard ?

On rappelle que pour des valeurs  $\alpha_k$  aléatoires :

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{j\alpha_k} = 0$$

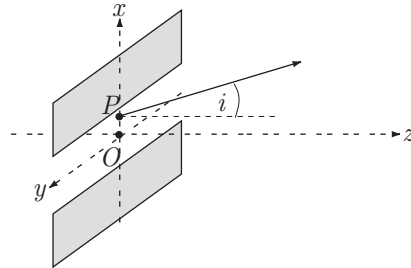
● 121 ————— Concours de l'École de l'Air  
60 min.

*Diffraction à l'infini*

MP-PC-PSI-PT

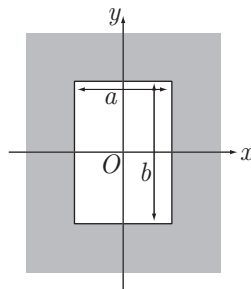
La qualité des observations réalisées à travers les télescopes est limitée. Une première question peut être posée sur le rôle de la diffraction provoquée par les diaphragmes. Dans un télescope ou une lunette utilisée *au foyer* (sans oculaire), nous cherchons à estimer la diffraction occasionnée par l'objectif (entrée du tube) considéré comme un diaphragme.

1. Commençons par revenir sur la notion de diffraction par une fente fine (épaisseur  $a$  sur la direction  $Ox$ ) infinie (sur la direction  $Oy$ ), éclairée en lumière parallèle dans la direction  $Oz$ .



Exprimer puis tracer la courbe d'intensité lumineuse  $I$  reçue par un capteur en fonction de l'angle  $i$ . Quelle est la largeur angulaire de la tache centrale de diffraction ? Dessiner la répartition lumineuse observée sur un écran.

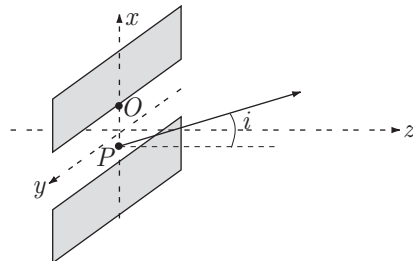
2. Considérons une fente rectangulaire éclairée ici encore en lumière parallèle dans la direction de l'axe  $Oz$ . Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  le vecteur unitaire directeur de l'onde diffractée dans une direction donnée.



Exprimer la courbe d'intensité lumineuse  $I$  reçue par un capteur en fonction de  $a$ ,  $b$  et des composantes du vecteur directeur.

3. Diverses méthodes existent pour tester l'influence de la diffraction dans un instrument d'optique. L'une d'elle, qui n'est pas à la portée de l'astronome amateur, consiste à placer une fente fine devant l'ouverture étudiée, constituée dans sa partie transparente par un matériau polarisable électriquement.

Afin de ne pas trop compliquer les calculs, considérons une fente d'épaisseur  $a$  suivant l'axe  $Ox$  et infinie dans la direction de  $Oy$  (longueur  $b$  très grande devant  $a$ ).



Le matériau permet d'imposer une amplitude réémise de la forme :

$$s(P) = A_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \sin[\omega t + \varphi(P)]$$

où  $d$  est imposé électriquement et où  $\varphi$  est le déphasage entre l'onde issue de  $P$  et celle issue de  $O$ . On prendra ici l'origine  $O$  des phases au bord supérieur de la fente.

Exprimer la différence de phase pour un rayon passant par  $P$  et un rayon passant par  $O$ . En déduire l'expression de l'amplitude réémise par l'ensemble de la fente en fonction de :

$$u = \frac{\pi a}{2} \left( \frac{2i}{\lambda} - \frac{1}{d} \right) \text{ et } v = \frac{\pi a}{2} \left( \frac{2i}{\lambda} + \frac{1}{d} \right)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde de la lumière incidente supposée monochromatique.

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où  $\lambda < d \ll a$ . Montrer que nous obtenons alors deux figures de diffraction bien séparées. Tracer  $I$  en fonction de  $i$ . Exprimer et placer, sur le dessin, les diamètres et écart angulaires nécessaires à la compréhension de votre réponse.

● 122 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

60 min.

Diffraction à l'infini

MP-PC-PSI-PT

On utilisera la notation complexe pour représenter les ondes planes monochromatiques, cohérentes, qui interviennent :

$$\underline{s} = s_0 e^{j(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)}$$

où :

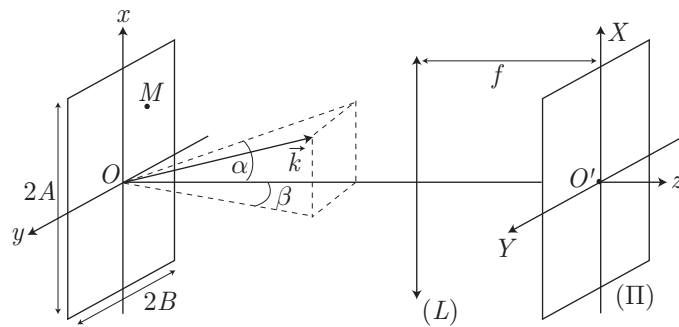
- $\underline{s}$  est l'image complexe du signal lumineux en un point  $M$ , d'amplitude  $s_0$  et de pulsation  $\omega$  ;
- $\lambda$  est la longueur d'onde de la lumière et  $\vec{k}$  son vecteur d'onde tel que :  $\|\vec{k}\| = k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

La polarisation des ondes ne joue aucun rôle.

L'intensité est définie par :  $I = \frac{1}{2} \underline{s} \underline{s}^*$ .

**I- Questions préliminaires**

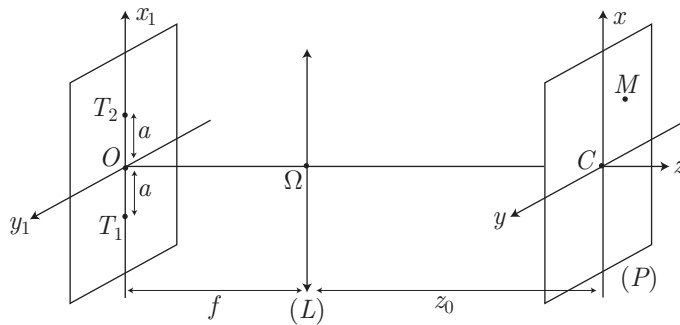
1. On considère une ouverture de largeur  $2A$  (suivant l'axe  $Ox$ ) et de longueur  $2B$  (suivant l'axe  $Oy$ ), éclairée normalement par une onde plane monochromatique d'amplitude  $s_0$ . Quelle est l'amplitude diffractée dans la direction  $(\alpha, \beta)$  définie sur la figure suivante ? on exprimera cette amplitude à l'aide de la fonction  $\text{sin}_c u = \frac{\sin u}{u}$ .



2. On observe cette figure de diffraction dans le plan focal image (II) d'une lentille convergente (L), repéré par les axes  $(O'X)$ ,  $(O'Y)$ . Donner l'expression de l'intensité  $I(X, Y)$ . On supposera la lentille (L) parfaite et d'ouverture assez grande pour admettre qu'elle ne diffracte pas les faisceaux en jeu et on appellera  $b_0$  l'intensité en  $O'$ .

**II- Utilisation de deux sources lumineuses**

1. On utilise deux sources ponctuelles  $T_1, T_2$  identiques, dont les coordonnées, dans le plan  $(xOy)$ , sont respectivement :  $(-a, 0)$  et  $(a, 0)$ ;  $T_1$  et  $T_2$  émettent des ondes de pulsation  $\omega$ , cohérentes et en phase.



Le plan  $(x_1Oy_1)$  étant le plan focal objet de (L), justifier l'expression des signaux  $s_1$  et  $s_2$  associés aux ondes issues de  $T_1$  et  $T_2$ , exprimés en un point  $M(x, y, z_0)$  du plan  $(xCy)$  situé à la distance  $z_0$  de (L). On admettra que  $a \ll f$  et que  $x \ll z_0$ ,  $y \ll z_0$  :

$$s_1 = a_0 e^{j(\frac{ka}{f} x + kz_0 - \omega t)} \text{ et } s_2 = a_0 e^{j(-\frac{ka}{f} x + kz_0 - \omega t)}$$

Donner l'expression de l'intensité  $I$

2. On place dans le plan  $(xOy)$  une plaque photographique (P), centrée en C et on l'expose pendant une durée  $\tau$ , de sorte que l'énergie  $W(x, y)$  qui l'impressionne est égale à  $\tau I(x, y)$ . (P) est ensuite développé de façon que la transmittance du négatif soit :

$$t(x, y) = \mu - \xi I(x, y) \text{ avec } \xi I(x, y) < \mu \forall (x, y)$$

Ce négatif est placé sur l'ouverture rectangulaire de la première figure et est éclairé en incidence normale par une onde plane monochromatique.

**ÉNONCÉS**

- (a) Expliciter, dans le plan  $(xOy)$ , l'expression de  $t(x, y)$ . Dépend-elle de  $y$  ?  
 (b) En déduire l'expression intégrale du signal complexe  $\underline{s}$  diffracté par la plaque  $(P)$  en un point  $M(x, y)$  du plan focal de  $(L)$ .
3. (a) Montrer qu'on observe plusieurs fois la figure de diffraction d'une ouverture rectangulaire de dimensions  $(2A, 2B)$ , chacune d'elles étant centrée en un point différent que l'on précisera.  
 (b) Montrer, pour les valeurs numériques ci-dessous, que ces images sont bien séparées :

$$\lambda = 0,5 \mu\text{m} \quad a = 1 \text{ mm} \quad A = B = 5 \text{ cm} \quad f = 5 \text{ cm}$$

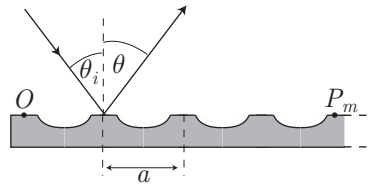
### ● 123 ———— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

15 min.

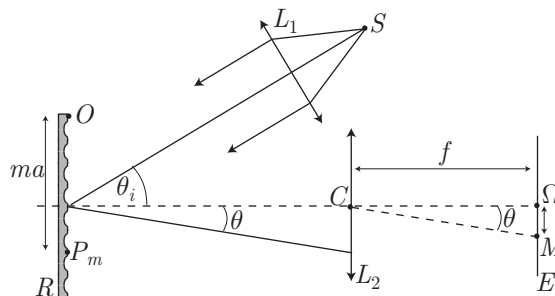
Réseaux plans

MP-PC-PSI-PT

Un réseau plan par réflexion est obtenu en gravant des raies sur une surface réfléchissante.



On note  $\theta_i$  l'angle d'incidence de la lumière qui arrive sur le réseau et  $\theta$  l'angle des rayons diffractés, par rapport à la normale au réseau. Le dispositif expérimental est schématisé ci-dessous :



Une source ponctuelle  $S$ , polychromatique, est placée au foyer principal objet d'une lentille convergente  $L_1$  d'où émerge un faisceau de lumière parallèle qui atteint le réseau  $R$  sous l'incidence  $\theta_i$ . Ces rayons sont diffractés par  $R$  et traversent une lentille convergente  $L_2$ , de distance focale  $f$ . Un écran  $E$  est placé dans le plan focal image de  $L_2$ , dont le foyer principal image  $\Omega$  permet de repérer un point  $M$  de  $E$  par la distance  $x = \Omega M$ .

1. Soit  $O$  un point du premier trait réfléchissant de  $R$  et soit  $P_m$  un point du  $m^{\text{ème}}$  trait réfléchissant de  $R$ , tel que  $OP_m = am$  ( $a$  est le pas du réseau) et  $(OP_m)$  est parallèle à  $L_2$ . Pour une longueur d'onde  $\lambda$ , le point  $O$  transmet un signal d'amplitude complexe :

$$\underline{s}_0(M) = S_0 e^{j\phi_0} e^{jk(OM)} \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

où  $\phi_0$  désigne la phase du rayonnement en  $O$ . Montrer que le point  $M$  reçoit du point  $P_m$  un signal d'amplitude complexe :

$$\underline{s}_m(M) = \underline{s}_0(M) e^{-j k m a (\sin \theta - \sin \theta_i)}$$

- En déduire l'amplitude complexe totale  $\underline{s}$  du signal parvenant en  $M$ , en fonction de  $\underline{s}_0 = \underline{s}_0(M)$ ,  $\varphi = k a (\sin \theta - \sin \theta_i)$  et du nombre  $N$  de raies réfléchissantes contenues sur  $R$ .
- Montrer qu'au point  $M$ , l'intensité lumineuse est *maximum* s'il existe un entier  $p$  tel que :

$$x = f \sin \theta_i + p \times \frac{\lambda f}{a}$$

- Le réseau comporte  $n = 800$  raies par millimètre et la distance focale image de  $L_2$  vaut  $f = 1$  m. L'écran  $E$  est percé, en  $x$ , d'une fente perpendiculaire à  $(Ox)$ , que l'on supposera, pour le moment, infiniment petite. On réalise ainsi un monochromateur à réseau.

Quelle doit être la valeur de  $x$  permettant d'isoler les radiations de longueur d'onde  $\lambda_0 = 585$  nm pour  $\theta_i = 10^\circ$ , à l'ordre  $p = 1$  ?

- On suppose maintenant que la fente présente une largeur  $\Delta x = 0,01$  mm. Calculer le pouvoir de résolution du monochromateur ainsi réalisé. On rappelle que le pouvoir de résolution  $\eta$  est défini par le rapport de  $\lambda_0$  sur l'intervalle  $\Delta \lambda$  des longueurs d'onde des rayons susceptibles de traverser la fente :  $\eta = \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda}$ .

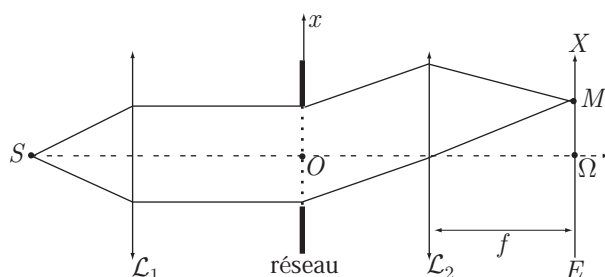
## ● 124 ————— Lycée Hoche, Versailles

20 min.

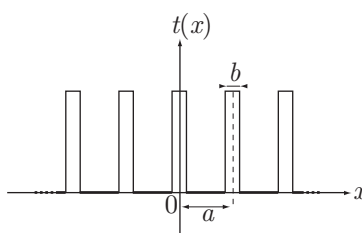
Réseaux plans

MP-PC-PSI-PT

On réalise la figure de diffraction à l'infini d'un réseau plan à l'aide du montage suivant :



Une source lumineuse  $S$ , monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , est placée au foyer objet d'une lentille convergente  $\mathcal{L}_1$ . Celle-ci forme un faisceau de rayons parallèles qui éclaire le réseau. L'observation est réalisée sur un écran  $E$ , situé dans le plan focal image d'une lentille convergente  $\mathcal{L}_2$ , de distance focale image  $f$ . Le système optique est centré, l'axe optique rencontrant le réseau et l'écran aux points respectifs  $O$  et  $\Omega$ . On ne s'intéresse qu'à la figure de diffraction dans la direction  $(\Omega X)$ , de sorte que la transmittance  $t(x)$  du réseau admet pour représentation graphique la courbe suivante :



Le réseau est caractérisé par :

- la largeur  $b$  de chaque fente ;
- son pas  $a \gg b$  ;
- son nombre de fente  $N$  tel que :  $N = 2\nu + 1$  ( $\nu \in \mathbb{N}$ ).

On posera :

$$u = \frac{X}{\lambda f} \text{ et } \phi = \pi a u$$

1. Donner l'expression analytique de la transmittance  $t(x)$ .
2. Montrer que l'amplitude complexe du signal qui parvient en un point  $M$  de  $E$  s'écrit :

$$\underline{s} = K \times \text{sin}_c(\pi b u) \times \frac{\text{sin}(N\phi)}{\text{sin } \phi}$$

où  $K$  est une constante (complexe) que l'on ne calculera pas.

3. Donner une représentation graphique de l'intensité  $I(X)$  reçue par l'écran  $E$  et montrer que des *maxima* d'intensité se trouvent aux abscisses :

$$X_p = p \times \frac{\lambda f}{a} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

## ● 125 **Concours de l'ENSAM**

30 min.

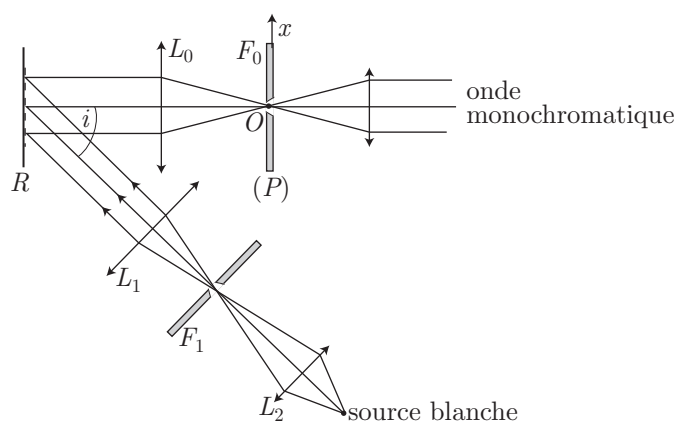
Réseaux plans

MP-PC-PSI-PT

La figure ci-dessous représente un monochromateur à réseau, c'est-à-dire un dispositif permettant d'obtenir une onde monochromatique à partir d'une source blanche (lampe à incandescence) ; le réseau plan  $R$ , à réflexion, présente les deux caractéristiques suivantes :

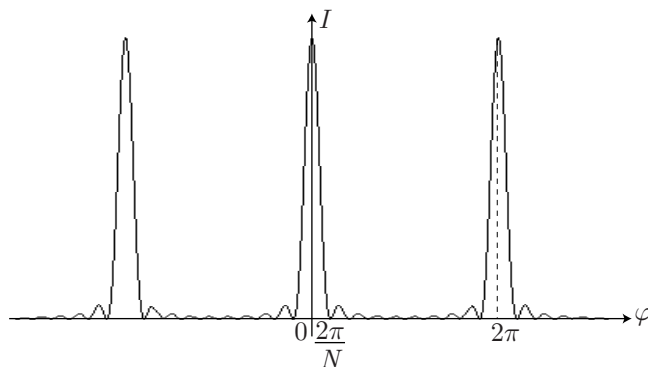
- nombre de traits par millimètre :  $n = 500$  ;
- nombre total de traits : 10 000.





Les lentilles  $L_1$  et  $L_2$  permettent, avec la fente source  $F_1$ , d'éclairer  $R$  sous une incidence  $i$ . La lentille  $L_0$ , de distance focale  $f = 1$  m, a son axe normal au plan de  $R$ ; en son foyer se trouve la fente  $F_0$ .

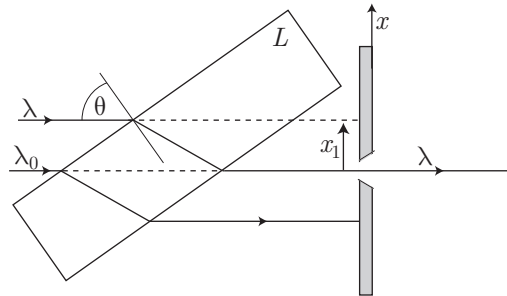
1. (a) Quelle valeur doit-on donner à l'angle d'incidence  $i$  pour obtenir sur la fente  $F_0$  la radiation de longueur d'onde  $\lambda_0 = 0,5 \mu\text{m}$  dans le spectre d'ordre 2 ? Dans tout le problème, on conservera cette incidence.
- (b) Pour une longueur d'onde  $\lambda$  différente de  $0,5 \mu\text{m}$ , les rayons diffractés par le réseau, dans l'ordre 2, convergent en un point de  $P$  d'abscisse  $x$ . Calculer  $x$  en fonction de l'écart  $(\lambda - \lambda_0)$ .
- (c) La fente  $F_0$  présente une largeur  $L = 0,1$  mm ; elle laisse donc passer les radiations dont les longueurs d'onde sont comprises entre  $\lambda_0 - \frac{\Delta\lambda_1}{2}$  et  $\lambda_0 + \frac{\Delta\lambda_1}{2}$ . Calculer l'intervalle  $\Delta\lambda_1$ .
- (d) On rappelle l'allure de l'intensité  $I$  en fonction de  $\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_0} (\sin i' - \sin i)$  (où  $i'$  désigne l'angle sous lequel les rayons lumineux sont diffractés par  $R$ ) :



Calculer l'intervalle  $\Delta\lambda$  correspondant au pouvoir séparateur du réseau et le comparer à  $\Delta\lambda_1$ .

2. On dispose, devant la fente  $F_0$ , une lame transparente  $L$  à faces parallèles, d'épaisseur  $e = 5$  mm et d'indice  $n_1 = 1,6$ . La lame est inclinée d'un angle  $\theta$  : les rayons

qui parviennent sur la fente  $F_0$  sont ceux qui, en l'absence de  $L$ , parviendraient en un point d'abscisse  $x_1$ .



Calculer  $x_1$  en fonction de  $\theta$  si cet angle est suffisamment petit pour que  $\sin \theta \simeq \theta$ .

3. La lame  $L$ , toujours devant la fente  $F_0$ , est maintenant montée sur un galvanomètre à cadre mobile, à la place du miroir. Lorsque le courant  $I$  dans l'appareil est nul, on a  $\theta = 0$ .
  - (a) Sachant que la sensibilité du galvanomètre est  $\alpha = 1 \text{ rad/mA}$ , calculer la sensibilité  $\frac{d\lambda}{dI}$  avec laquelle le courant  $I$  permet de contrôler la longueur d'onde  $\lambda$  transmise par le monochromateur.
  - (b) Quelle valeur faut-il donner à  $I$  pour que la longueur d'onde  $\lambda$  transmise par l'appareil soit telle que  $\lambda - \lambda_0 = \Delta\lambda_t = 2,25 \cdot 10^{-10} \text{ m}$  ?

## ● 95 ————— Concours ICNA

1. Étant donné que :  $\vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y = B_y \vec{e}_y$ , son rotationnel vaut :

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{B} &= \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left( \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left( \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\ &= \frac{dB_y}{dx} \vec{e}_z = -kB_0 \sin(kx - \omega t) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Aussi, les équations de Maxwell conduisent à :

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow -kB_0 \sin(kx - \omega t) \vec{e}_z = \frac{1}{c^2} \times \omega E_0 \sin(kx - \omega t + \varphi) \vec{e}_z$$

avec  $\omega = kc$ . C'est pourquoi :

$$kB_0 = \frac{1}{c^2} \times kcE_0 \Rightarrow B_0 = \frac{E_0}{c}$$

et d'autre part :

$$-\sin(kx - \omega t) = \sin(kx - \omega t + \varphi) \Rightarrow \varphi = \pi$$

2. Soient  $E_z = E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) = -E_0 \cos(kx - \omega t)$  et  $B_y = B_0 \cos(kx - \omega t)$  les composantes de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  à partir desquelles se calcule le vecteur de Poynting :

$$\begin{aligned} \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\mu_0} E_z B_y \vec{e}_x \\ &= \frac{1}{\mu_0} \times E_0 \cos(kx - \omega t) \times B_0 \cos(kx - \omega t) \vec{e}_x \\ &= \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(kx - \omega t) \vec{e}_x \text{ car } B_0 = \frac{E_0}{c} \\ &= \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} [1 + \cos(2kx - 2\omega t)] \vec{e}_x \end{aligned}$$

Aussi, sa valeur moyenne s'écrit-elle :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} [1 + \langle \cos(2kx - 2\omega t) \rangle] \vec{e}_x$$

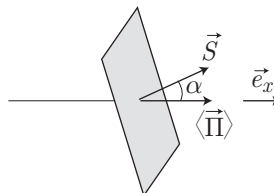
avec :

$$\langle \cos(2kx - 2\omega t) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x$$

3. Soit  $\alpha$  l'angle entre  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  et le vecteur surface  $\vec{S}$  de norme  $S = a^2$ . Le flux de  $\langle \vec{\Pi} \rangle$  à travers  $S$  est défini par :

$$\Phi = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot \vec{S} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_x \cdot \vec{S} = \frac{E_0^2 a^2}{2\mu_0 c} \cos \alpha$$

Ce flux est *maximum* lorsque  $\alpha$  est nul ; il vaut alors :



$$\Phi_{\max} = \frac{E_0^2 a^2}{2\mu_0 c} \text{ pour } \alpha = 0$$

### ● 96 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Les rayons incidents (1) et (2) sont parallèles, ce qui signifie également que leurs surfaces équiphases leurs sont perpendiculaires.  $A$  et  $B'$  appartenant à une telle surface, il s'ensuit que  $\phi_A = \phi_{B'}$ . Pour les mêmes raisons,  $A'$  et  $B$  présentent la même phase :  $\phi_{A'} = \phi_B$ . C'est pourquoi :

$$\phi_{A'} - \phi_A = \phi_B - \phi_{B'} \quad (29)$$

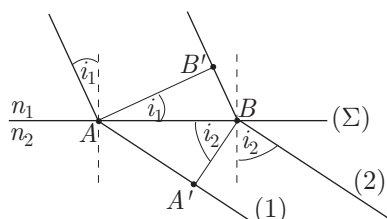
Le déphasage entre deux points  $P$  et  $Q$  est proportionnel au chemin optique ( $PQ$ ) :

$$\phi_Q - \phi_P = \frac{2\pi}{\lambda_0} (PQ)$$

où  $\lambda_0$  désigne la longueur d'onde du rayonnement dans le vide. Appliquée au résultat (29), cette loi conduit à :

$$(AA') = (B'B) \Rightarrow n_2 AA' = n_1 B'B \quad (30)$$

2. Soient les angles  $i_1 = (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB})$  et  $i_2 = (\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA})$  :



à partir desquels sont définis :

$$\sin i_1 = \frac{B'B}{AB} \Rightarrow B'B = AB \sin i_1 \text{ et } \sin i_2 = \frac{AA'}{AB} \Rightarrow AA' = AB \sin i_2$$

Ce faisant, la relation (30) devient :

$$n_2 \times AB \sin i_2 = n_1 \times AB \sin i_1 \Rightarrow n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1$$

### ● 97 ————— Concours Commun Polytechnique

1. L'amplitude complexe s'écrivant :

$$\underline{\psi} = \underline{\psi}(x, y, z) = A(\rho, z) e^{ikz} = C(z) e^{-\rho^2/w^2} e^{ikz}$$

il s'ensuit que :

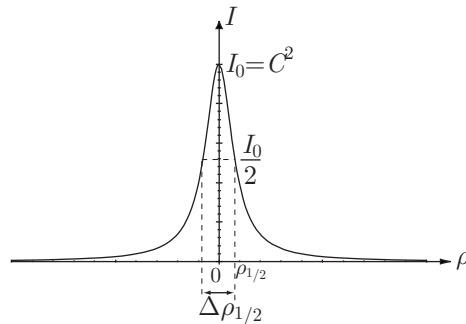
$$I = \underline{\psi} \underline{\psi}^* = \left[ C(z) e^{-\rho^2/w^2} e^{ikz} \right] \left[ C(z) e^{-\rho^2/w^2} e^{-ikz} \right]$$

$$\Rightarrow I = C^2(z) \times e^{-\frac{2\rho^2}{w^2(z)}}$$

Dans un plan de front tel que  $z$  est fixé, l'intensité  $I$  ne dépend plus que de  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  (les fonctions  $C^2$  et  $w^2$  étant fixées par la valeur de  $z$ ).

Au centre de l'écran,  $\rho$  est nul et  $I$  prend sa valeur *maximum* :  $I_0 = C^2$ . En revanche, puisque  $I$  est une fonction décroissante de  $\rho$ , il existe une valeur  $\rho_{1/2}$  de  $\rho$  qui affecte à  $I$  une valeur deux fois moindre que  $I_0$  :

$$\begin{aligned} I(\rho_{1/2}) = \frac{I_0}{2} &\Rightarrow C^2 e^{-2\rho_{1/2}^2/w^2} = \frac{C^2}{2} \\ &\Rightarrow -\frac{2\rho_{1/2}^2}{w^2} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 \\ &\Rightarrow \rho_{1/2}^2 = w^2 \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow \rho_{1/2} = w \sqrt{\frac{\ln 2}{2}} \end{aligned}$$



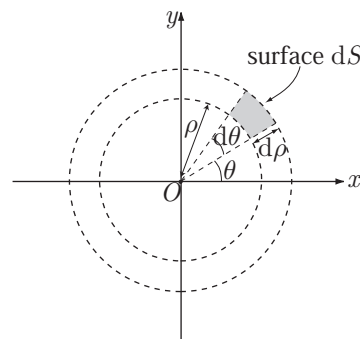
Par définition, la largeur à mi-hauteur correspond à la taille de l'intervalle dans lequel  $\rho$  doit se trouver pour assurer :  $I \geq \frac{I_0}{2}$ . Le schéma précédent révèle alors que :

$$\Delta\rho_{1/2} = 2\rho_{1/2} \Rightarrow \Delta\rho_{1/2} = w\sqrt{2\ln 2}$$

2. Par définition, si  $d\Phi$  désigne le flux de lumière reçu par une surface  $dS$  perpendiculaire aux rayons lumineux :

$$d\Phi = I \times dS \quad (31)$$

Considérons, maintenant le plan de front de coordonnée  $z$  :



Depuis le point  $O$  (celui pour lequel  $\rho = 0$ , c'est-à-dire  $x = y = 0$ ), une surface élémentaire  $dS$  est définie, en coordonnées polaires, par :

$$dS = \rho \, d\theta \times d\rho$$

Compte tenu de la définition (31), le flux lumineux qui parvient sur cette surface vaut :

$$d\Phi = I \times dS = C^2 e^{-2\rho^2/w^2} \times \rho \, d\rho \, d\theta$$

Donc, le flux lumineux total  $\Phi_t$  est celui que l'on obtient en additionnant tous les flux élémentaires  $d\Phi$  pour toutes les valeurs de  $\theta \in [0, 2\pi]$  et de  $\rho \in [0, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} \Phi_t &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\infty} C^2 e^{-2\rho^2/w^2} \rho \, d\rho \times d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} C^2 \, d\theta \int_0^{\infty} \rho e^{-2\rho^2/w^2} \, d\rho \\ &= 2\pi C^2 \int_0^{\infty} \rho e^{-2\rho^2/w^2} \, d\rho \\ &= 2\pi C^2 \times \left[ -\frac{w^2}{4} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{w^2}\right) \right]_0^{\infty} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\Phi_t = \frac{w^2 \pi C^2}{2}$$

3. Le disque de rayon  $w$  reçoit une puissance lumineuse  $\Phi_w$  qui se déduit par un calcul analogue au précédent, dans lequel toutefois  $\rho \in [0, w]$  se substitue à  $\rho \in [0, \infty[$  :

$$\begin{aligned} \Phi_w &= \int_0^{2\pi} C^2 \, d\theta \times \int_0^w \rho e^{-2\rho^2/w^2} \, d\rho \\ &= 2\pi C^2 \times \left[ -\frac{w^2}{4} \exp\left(-\frac{2\rho^2}{w^2}\right) \right]_0^w \\ &= \frac{w^2 \pi C^2}{2} \times (1 - e^{-2}) \end{aligned}$$

Finalement :

$$\Phi_w = \Phi_t \times \frac{e^2 - 1}{e^2} \Rightarrow \frac{\Phi_w}{\Phi_t} = \frac{e^2 - 1}{e^2}$$

Application numérique :

$$\frac{\Phi_w}{\Phi_t} = 0,865$$

ce qui signifie aussi que le disque de rayon  $w$  reçoit 86,5% de la puissance totale.

● 98 Lycée Saint-Louis, Paris

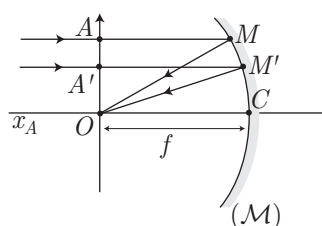
1. Étant donné que le rayon lumineux se propage dans l'air (d'indice proche de 1), le chemin optique  $L = (AO)$  vaut :

$$L = AM + MO = (x - x_A) + \sqrt{x^2 + y^2}$$

c'est-à-dire, pour  $x_A = 0$  :

$$L = (AO) = x + \sqrt{x^2 + y^2}$$

2. Les points  $S$  et  $O$  étant conjugués optiques, le chemin optique  $(SO)$  est le même pour tous les rayons qui passent par  $S$  et  $O$  :



Soient deux rayons lumineux passant par les points  $A$  et  $A'$ , de même abscisse  $x_A = 0$  et qui rencontrent  $\mathcal{M}$  aux points  $M(x, y)$  et  $M'(x', y')$ . Le chemin optique  $(SO)$  de ces rayons étant le même, il s'ensuit que :

$$(SA) + (AM) + (MO) = (SA') + (A'M') + (M'O)$$

Or, les rayons incidents sont parallèles, de sorte que  $A$  et  $A'$  appartiennent à la même surface d'onde (perpendiculaire aux rayons), ce qui pour conséquence :

$$(SA) = (SA') \Rightarrow (AM) + (MO) = (A'M') + (M'O)$$

Cette dernière identité révèle que  $(AO) = (A'O)$ , c'est-à-dire que  $L$  ne dépend pas des valeurs de  $x$  et de  $y$  :

$$L = x + \sqrt{x^2 + y^2} = \text{cte}$$

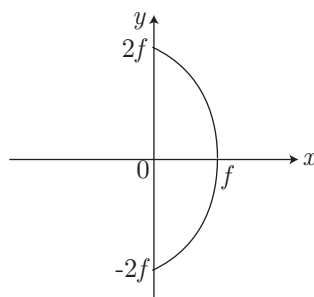
Notamment, lorsque  $x = f$ ,  $y$  est nul, ce qui impose :

$$L = 2f \Rightarrow L = x + \sqrt{x^2 + y^2} = 2f$$

3. La relation précédente conduit à :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} = 2f - x &\Rightarrow x^2 + y^2 = (2f - x)^2 = 4f^2 - 4fx + x^2 \\ &\Rightarrow y^2 = 4f^2 - 4fx \Rightarrow x = \frac{4f^2 - y^2}{4f} \end{aligned}$$

Il s'agit là de l'équation cartésienne d'une parabole, de sommet  $C(f, 0)$  et qui passe par les points  $P_1(0, 2f)$  et  $P_2(0, -2f)$  :



● 99 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Dans un milieu d'indice 1, le chemin optique  $\mathcal{L} = (AMA')$  vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= AM + MA' = \overrightarrow{AM} \cdot \vec{k} + \overrightarrow{MA'} \cdot \vec{k}' \\ &= (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{k} + (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA'}) \cdot \vec{k}' \\ &= \overrightarrow{AH} \cdot \vec{k} + \overrightarrow{HA'} \cdot \vec{k}' + \overrightarrow{HM} \cdot (\vec{k} - \vec{k}')\end{aligned}$$

Or, puisque les rayons  $AM$  et  $MA'$  sont symétriques par rapport à la normale de  $(\mathcal{M})$  en  $M$  (les angles  $i$  d'incidence et de réflexion sont identiques), il s'ensuit que  $\vec{k} - \vec{k}'$  est colinéaire à  $\vec{u}$  :

$$\vec{k} - \vec{k}' = \alpha \vec{u} \quad (\alpha : \text{fonction de } i) \quad (32)$$

tandis que  $\vec{k} + \vec{k}'$  est colinéaire à  $\vec{v}$  :

$$\vec{k} + \vec{k}' = \beta \vec{v} \quad (\beta : \text{fonction de } i) \quad (33)$$

Il s'ensuit que :

$$\overrightarrow{HM} \cdot (\vec{k} - \vec{k}') = 0 \Rightarrow \mathcal{L} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{k} + \overrightarrow{HA'} \cdot \vec{k}'$$

2. (a) Compte tenu de la relation (33) :

$$\begin{aligned}d\vec{k} + d\vec{k}' &= d\beta \vec{v} \Rightarrow d\vec{k} = -d\vec{k}' + d\beta \vec{v} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot d\vec{k} = -\overrightarrow{AH} \cdot d\vec{k}' + d\beta \times \overrightarrow{AH} \cdot \vec{v}\end{aligned}$$

où  $\overrightarrow{AH} \perp \vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{v} = 0$  conduit à :

$$\overrightarrow{AH} \cdot d\vec{k} = -\overrightarrow{AH} \cdot d\vec{k}' \quad (34)$$

(b) Les vecteurs  $\overrightarrow{AH}$  et  $\overrightarrow{HA'}$  n'étant pas affectés par un déplacement élémentaire de  $M$ , on trouve :

$$\mathcal{L} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{k} + \overrightarrow{HA'} \cdot \vec{k}' \Rightarrow d\mathcal{L} = \overrightarrow{AH} \cdot d\vec{k} + \overrightarrow{HA'} \cdot d\vec{k}'$$

soit, compte tenu de la relation (34) :

$$d\mathcal{L} = (\overrightarrow{HA'} - \overrightarrow{AH}) \cdot d\vec{k}'$$



- (c) Les points  $A$  et  $A'$  sont conjugués optiques à condition que tous les rayons lumineux qui passent par  $A$  et  $A'$ , en rencontrant  $(\mathcal{M})$ , aient le même chemin optique. En d'autres termes, le chemin optique  $\mathcal{L} = (AM A')$  ne dépend pas de la position de  $M$ , ce qui se traduit par :

$$d\mathcal{L} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{HA'} - \overrightarrow{AH}) \cdot d\vec{k}' = 0 \text{ avec } d\vec{k}' \neq \vec{0}$$

Or,  $\overrightarrow{HA'} - \overrightarrow{AH}$  est un vecteur fixe alors que  $d\vec{k}'$  peut adopter une multitude de directions, en conséquence de quoi  $\overrightarrow{HA'} - \overrightarrow{AH}$  ne peut pas être perpendiculaire à  $d\vec{k}'$  pour tout point  $M$ . Finalement, la seule solution de cette dernière équation est :

$$\overrightarrow{HA'} - \overrightarrow{AH} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{AH}$$

ce qui justifie également que  $A$  et  $A'$  sont symétriques par rapport à  $(\mathcal{M})$

## ● 100 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

### 1. Influence de la fréquence

- (a) En  $M$ , les signaux  $s_1(M, t) = s_0 \cos \varphi_1$  et  $s_2(M, t) = s_0 \cos \varphi_2$  se superposent pour produire le signal :

$$\begin{aligned} s(M, t) &= s_1(M, t) + s_2(M, t) = s_0 (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2) \\ &\Rightarrow s^2(M, t) = s_0^2 (\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2) \\ &\Rightarrow s^2(M, t) = s_0^2 [\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

L'éclairement  $\mathcal{E}$  en  $M$  est alors proportionnel à  $\langle s^2(M, t) \rangle$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= K \langle s^2(M, t) \rangle \\ &= K s_0^2 [\langle \cos^2 \varphi_1 \rangle + \langle \cos^2 \varphi_2 \rangle + \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle + \langle \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \rangle] \quad (35) \end{aligned}$$

avec :

$$\varphi_i = \phi_i - \omega_i t \Rightarrow \langle \cos^2 \varphi_i \rangle = \frac{1}{2}$$

et, pour  $\omega_1 \neq \omega_2$  :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (\phi_1 - \phi_2) + \underbrace{(\omega_2 - \omega_1)}_{\neq 0} t \Rightarrow \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = 0$$

de même que :

$$\varphi_1 + \varphi_2 = (\phi_1 + \phi_2) + \underbrace{(\omega_1 + \omega_2)}_{\neq 0} t \Rightarrow \langle \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \rangle = 0$$

Ce faisant :

$$\mathcal{E} = K s_0^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = K s_0^2$$

En outre, chacun de ces signaux peut produire, isolément, un éclaircissement :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0 = K \langle s_i^2(M, t) \rangle &= K s_0^2 \langle \cos^2(\phi_i - \omega_i t) \rangle = \frac{1}{2} K s_0^2 \\ \Rightarrow K s_0^2 &= 2\mathcal{E}_0 \Rightarrow \mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0\end{aligned}$$

(b) Lorsque  $\omega_1 = \omega_2$  :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \phi_1 - \phi_2 + \underbrace{(\omega_2 - \omega_1)}_{=0} t = -\Delta\phi \Rightarrow \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = \cos(\Delta\phi)$$

Par conséquent, l'éclaircissement suit la loi (35) :

$$\mathcal{E} = K s_0^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos(\Delta\phi) \right] = K s_0^2 [1 + \cos(\Delta\phi)]$$

où :

$$K s_0^2 = 2\mathcal{E}_0 \Rightarrow \mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 [1 + \cos(\Delta\phi)]$$

Aussi, si  $\Delta\phi$  dépend du point  $M$ ,  $\mathcal{E}$  en dépend aussi, de sorte qu'une figure d'interférence peut être attendue.

## 2. Cohérence spatiale

(a) Si les sources sont incohérentes spatialement, le déphasage :

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \phi_1 - \phi_2 + \underbrace{(\omega_2 - \omega_1)}_{=0} t = \phi_1 - \phi_2 = -\Delta\phi$$

varie de manière aléatoire, de sorte que :

$$\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = \langle \cos(-\Delta\phi) \rangle = 0$$

tandis que :

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \underbrace{(\phi_1 + \phi_2)}_{\beta} + \underbrace{(\omega_1 + \omega_2)}_{=2\omega} t \Rightarrow \langle \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \rangle = 0$$

C'est pourquoi l'identité (35) devient :

$$\mathcal{E} = K s_0^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = K s_0^2 \Rightarrow \mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0$$

À nouveau, l'indépendance de  $\mathcal{E}$  à l'égard du point  $M$  interdit tout espoir d'observer une figure d'interférences.

(b) Lorsque les sources sont cohérentes,  $\Delta\phi$  est indépendant du temps, ce qui conduit à :

$$\langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle = \langle \cos(-\Delta\phi) \rangle = \cos(\Delta\phi)$$

c'est-à-dire, compte tenu du résultat (35) :

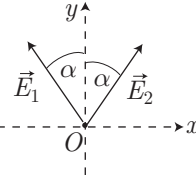
$$\mathcal{E} = K s_0^2 \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cos(\Delta\phi) \right] \Rightarrow \mathcal{E} = 2\mathcal{E}_0 [1 + \cos(\Delta\phi)]$$

Ce résultat montre que le terme d'interférence  $\cos(\Delta\phi)$  ne peut influencer l'éclaircissement qu'à condition que les sources soient spatialement cohérentes.

### 3. Influence de la polarisation

(a) Dans le plan  $(Ox, Oy)$ , les champs  $\vec{E}_1$  et  $\vec{E}_2$  ont pour composantes :

$$\vec{E}_1 \begin{pmatrix} -E_1 \sin \alpha \\ E_1 \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ et } \vec{E}_2 \begin{pmatrix} E_2 \sin \alpha \\ E_2 \cos \alpha \end{pmatrix}$$



C'est pourquoi, le champ  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$  a pour composantes :

$$E_x = (E_2 - E_1) \sin \alpha \text{ et } E_y = (E_1 + E_2) \cos \alpha$$

(b) Compte tenu du résultat précédent la norme  $E = \|\vec{E}\|$  vérifie :

$$\begin{aligned} E^2 &= E_x^2 + E_y^2 \\ &= (E_2^2 - 2 E_1 E_2 + E_1^2) \sin^2 \alpha + (E_1^2 + 2 E_1 E_2 + E_2^2) \cos^2 \alpha \\ &= E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \\ &= E_1^2 + E_2^2 + 2 E_1 E_2 \cos(2\alpha) \end{aligned}$$

soit encore, en identifiant  $E_i = E_0 \cos \varphi_i$  à  $s_i = s_0 \cos \varphi_i$  :

$$\begin{aligned} s^2 &= s_1^2 + s_2^2 + 2 s_1 s_2 \cos(2\alpha) \\ &= s_0^2 [\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + 2 \cos(2\alpha) \times \cos \varphi_1 \cos \varphi_2] \\ &= s_0^2 \{ \cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos(2\alpha) \times [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(\varphi_1 + \varphi_2)] \} \end{aligned}$$

avec :

$$\langle \cos^2 \varphi_i \rangle = \frac{1}{2} \text{ et } \langle \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \rangle = 0$$

et, lorsque  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ , tandis que les sources sont cohérentes :

$$\begin{aligned} \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \rangle &= \cos(\Delta\phi) \\ \Rightarrow \mathcal{E} &= K \langle s^2 \rangle = K s_0^2 [1 + \cos(2\alpha) \times \cos(\Delta\phi)] \\ \Rightarrow \mathcal{E} &= 2\mathcal{E}_0 [1 + \cos(2\alpha) \times \cos(\Delta\phi)] \end{aligned}$$

(c) Le terme d'interférence :  $\cos(2\alpha) \times \cos(\Delta\phi)$  s'identifie à  $\cos(\Delta\phi)$  à condition que :

$$\cos(2\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha \simeq 0$$

Si, toutefois,  $\alpha$  valait  $\frac{\pi}{4}$ , aucune figure d'interférence ne pourrait être observée.

## ● 101 ————— Concours de la Filière PT

Soient deux signaux d'amplitudes  $s_{01}$  et  $s_{02}$ , tels que  $s_2$  présente un déphasage  $\phi$  par rapport à  $s_1$ . Ces deux signaux sont alors caractérisés par leurs notations complexes :

$$\underline{s}_1 = s_{01} e^{-j\omega t} e^{j\varphi} \text{ et } \underline{s}_2 = s_{02} e^{-j\omega t} e^{j\varphi} e^{j\phi}$$

Lorsque les deux ondes associées interfèrent, leurs signaux s'additionnent :

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = e^{j(\varphi - \omega t)} \times (s_{01} + s_{02} e^{j\phi})$$

et l'intensité qui en découle est proportionnelle à  $|\underline{s}|^2 = \underline{s} \underline{s}^*$  (on note  $\kappa$  la constante réelle de proportionnalité) :

$$\begin{aligned} I = \kappa \underline{s} \underline{s}^* &= \kappa (s_{01} + s_{02} e^{j\phi}) (s_{01} + s_{02} e^{-j\phi}) \\ &= \kappa [s_{01}^2 + s_{02}^2 + s_{01} s_{02} (e^{j\phi} + e^{-j\phi})] \\ &= \kappa s_{01}^2 \left[ 1 + \left( \frac{s_{02}}{s_{01}} \right)^2 + 2 \frac{s_{02}}{s_{01}} \cos \phi \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en notant  $I_0 = \kappa s_{01}^2$  et  $s_{02} = \alpha s_{01}$  :

$$I = I_0 \times (1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos \phi)$$

Le déphasage  $\phi$  pouvant varier entre 0 et  $2\pi$ , l'intensité  $I$  varie entre deux valeurs extrêmes :

$$I_{\max} = I_0 (1 + \alpha^2 + 2\alpha) \text{ pour } \cos \phi = 1$$

et :

$$I_{\min} = I_0 (1 + \alpha^2 - 2\alpha) \text{ pour } \cos \phi = -1$$

Le facteur de visibilité est alors défini par :

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \Rightarrow \mathcal{V} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha^2}$$

Cette fonction de  $\alpha$  admet un *extremum* pour une valeur de  $\alpha$  qui annule  $\frac{d\mathcal{V}}{d\alpha}$ , avec :

$$\frac{d\mathcal{V}}{d\alpha} = \frac{2(1 + \alpha^2) - 2\alpha \times 2\alpha}{(1 + \alpha^2)^2} = 2 \times \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2}$$

c'est-à-dire que  $\frac{d\mathcal{V}}{d\alpha} = 0$  pour  $\alpha = 1$ . Enfin, le tableau de variations :

$\alpha$	0	1	
$d\mathcal{V}/d\alpha$	+	0	-
$\mathcal{V}$	↗		↘

révèle que le facteur de visibilité  $\mathcal{V}$  est *maximum* pour  $\alpha = 1$ , c'est-à-dire lorsque les amplitudes  $s_{01}$  et  $s_{02}$  sont égales.

## ● 102 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. En un point où se produisent des interférences, des rayonnements de longueurs d'onde comprises entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$  produisent un éclaircissement :

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_0 [1 + \cos(k\delta)] = d\mathcal{E}_0 \times \cos^2 \left( \frac{k\delta}{2} \right)$$

où  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\sigma$  et où  $\delta\mathcal{E}_0$  est proportionnel à l'intensité  $dI = f_0^2 d\sigma$  (on notera  $\alpha$  la constante de proportionnalité) :

$$d\mathcal{E}_0 = \alpha f_0^2 d\sigma$$

Par contre, en l'absence d'interférences, l'éclairement  $d\mathcal{E}$  de l'écran vérifie :

$$d\mathcal{E} = d\mathcal{E}_0 = \alpha f_0^2 d\sigma$$

Aussi, en tenant compte de la totalité des longueurs d'onde, l'éclairement total de cet écran devient :

$$\mathcal{E}_0 = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\mathcal{E}_0 = \alpha f_0^2 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma = \alpha f_0^2 \Delta\sigma \Rightarrow \alpha = \frac{\mathcal{E}_0}{f_0^2 \Delta\sigma}$$

Il s'ensuit que :

$$d\mathcal{E}_0 = \alpha f_0^2 d\sigma = \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta\sigma} d\sigma \Rightarrow \mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta\sigma} [1 + \cos(2\pi\delta\sigma)] d\sigma$$

Les rayons de nombres d'onde  $\sigma$  différents ne pouvant interférer, leurs éclairements s'additionnent et l'éclairement résultant s'écrit :

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta\sigma} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} [1 + \cos(2\pi\delta\sigma)] d\sigma \quad (36)$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta\sigma} \left[ \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \cos(2\pi\delta\sigma) d\sigma \right] \quad (37)$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta\sigma} [\Delta\sigma + J] \quad (38)$$

où  $J$  désigne l'intégrale :

$$J = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \cos(2\pi\delta\sigma) d\sigma$$

qui admet pour image complexe :

$$\begin{aligned} \underline{J} &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} e^{j2\pi\sigma\delta} d\sigma \text{ avec } J = \operatorname{Re}\{\underline{J}\} \\ &= \frac{1}{2j\pi\delta} [e^{j2\pi\sigma\delta}]_{\sigma_1}^{\sigma_2} \end{aligned}$$

En outre, l'énoncé impose les notations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_2 - \sigma_1 = \Delta\sigma \\ \sigma_2 + \sigma_1 = 2\sigma_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sigma_2 = 2\sigma_0 + \Delta\sigma \\ 2\sigma_1 = 2\sigma_0 - \Delta\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_2 = \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \\ \sigma_1 = \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2} \end{cases}$$

de telle manière que :

$$\begin{aligned} \underline{J} &= \frac{1}{2j\pi\delta} [e^{j2\pi\sigma\delta}]_{\sigma_0-\Delta\sigma/2}^{\sigma_0+\Delta\sigma/2} \\ &= \frac{1}{\pi\delta} e^{j2\pi\sigma_0\delta} \times \frac{e^{j\pi\Delta\sigma\delta} - e^{-j\pi\Delta\sigma\delta}}{2j} \\ &= \frac{1}{\pi\delta} e^{j2\pi\sigma_0\delta} \times \sin(\pi\Delta\sigma\delta) \\ \Rightarrow J &= \operatorname{Re}\{\underline{J}\} = \frac{\sin(\pi\Delta\sigma\delta)}{\pi\Delta\sigma\delta} \times \cos(2\pi\sigma_0\delta) \end{aligned}$$

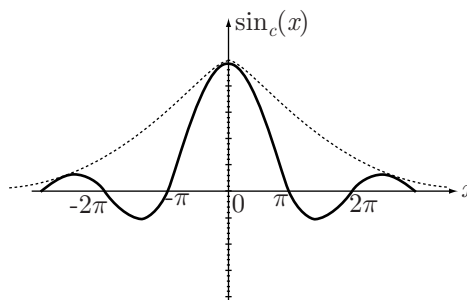
C'est pourquoi l'éclairement donné par l'identité (38) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\mathcal{E}_0}{\Delta\sigma} \left[ \Delta\sigma + \frac{\sin(\pi\Delta\sigma\delta)}{\pi\delta} \times \cos(2\pi\sigma_0\delta) \right] \\ &= \mathcal{E}_0 \left[ 1 + \frac{\sin(\pi\Delta\sigma\delta)}{\pi\Delta\sigma\delta} \times \cos(2\pi\sigma_0\delta) \right] \end{aligned}$$

où la définition de la fonction *sinus cardinal* :  $\operatorname{sin}_c x = \frac{\sin x}{x}$  conduit à :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 [1 + \operatorname{sin}_c(\pi\Delta\sigma\delta) \times \cos(2\pi\sigma_0\delta)]$$

2. La fonction  $\operatorname{sin}_c x$  admet pour représentation graphique :



et c'est pourquoi les franges d'interférence disparaissent pour les valeurs de  $\delta$  telles que :

$$\operatorname{sin}_c(\pi\Delta\sigma\delta) = 0 \Rightarrow \pi\Delta\sigma\delta = p\pi \Rightarrow \delta = \frac{p}{\Delta\sigma}, p \in \mathbb{Z}^*$$

Remarque – Si les fentes avaient été éclairées par une source monochromatique ( $\Delta\sigma = 0$ ), la disparition des franges ne se serait pas produite car  $\delta$  tendrait vers l'infini. La figure d'interférence serait malgré tout limitée par la cohérence des rayons lumineux.

### ● 103 ————— Lycée Clémenceau, Reims

Si  $\mathcal{E}_0$  désigne l'éclairement que produirait, sur l'écran,  $F_1$  et  $F_2$  isolément, l'éclairement provenant des interférences lumineuses s'écrit :

$$\mathcal{E} = 4\mathcal{E}_0 \cos^2\left(\frac{k\delta}{2}\right) \quad (39)$$

où  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  représente la norme du vecteur d'onde du rayonnement et  $\delta$  la différence de chemin (optique) entre  $F_1M$  et  $F_2M$  :

$$\delta = (F_2M) - (F_1M) = F_2M - F_1M \text{ (dans le vide ou l'air).}$$

Il s'agit, par conséquent, d'évaluer  $F_2M$  et  $F_1M$  :

- Calcul de  $F_2M$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_2M} &= \overrightarrow{F_2A} + \overrightarrow{AM} \Rightarrow (F_2M)^2 = (F_2A)^2 + (AM)^2 + 2 \overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &\Rightarrow (F_2M)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + x^2 + 2 \overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{AM} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_2A} &= \overrightarrow{F_2O} + \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{F_2O} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{F_2A} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{a}{2} \times x \sin \alpha + D \times x \cos \alpha \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} (F_2M)^2 &= \frac{a^2}{4} + D^2 + x^2 + ax \sin \alpha + 2Dx \cos \alpha \\ &= D^2 \left[ 1 + \frac{ax \sin \alpha}{D^2} + 2 \frac{x \cos \alpha}{D} + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} \right] \\ \Rightarrow F_2M &= D \times \left[ 1 + \frac{ax \sin \alpha}{D^2} + 2 \frac{x \cos \alpha}{D} + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

L'énoncé précise, en outre, que  $x$  et  $a$  sont petits par rapport à  $D$ , ce qui signifie aussi que :

$$\frac{ax \sin \alpha}{D^2} \ll 1 \quad \frac{2x \cos \alpha}{D} \ll 1 \quad \frac{x^2}{D^2} \ll 1 \quad \frac{a^2}{4D^2} \ll 1 \quad (40)$$

Un développement limité de  $(1 + \varepsilon)^{1/2} \simeq 1 + \frac{1}{2} \varepsilon$  conduit alors à :

$$F_2M \simeq D \times \left[ 1 + \frac{ax \sin \alpha}{2D^2} + \frac{x \cos \alpha}{D} + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} \right] \quad (41)$$

- Calcul de  $F_1M$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_1M} &= \overrightarrow{F_1A} + \overrightarrow{AM} \Rightarrow (F_1M)^2 = (F_1A)^2 + (AM)^2 + 2 \overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &\Rightarrow (F_1M)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + D^2 + x^2 + 2 \overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{AM} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_1A} &= \overrightarrow{F_1O} + \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{F_1O} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AM} \\ &= -\frac{a}{2} \times x \sin \alpha + D \times x \cos \alpha \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}(F_1 M)^2 &= \frac{a^2}{4} + D^2 + x^2 + 2Dx \cos \alpha - ax \sin \alpha \\ &= D^2 \left[ 1 + \frac{2Dx \cos \alpha}{D^2} - \frac{ax \sin \alpha}{D^2} + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} \right] \\ \Rightarrow F_1 M &= D \times \left[ 1 + \frac{2Dx \cos \alpha}{D^2} - \frac{ax \sin \alpha}{D^2} + \frac{x^2}{D^2} + \frac{a^2}{4D^2} \right]^{1/2}\end{aligned}$$

À nouveau, les conditions (40) justifient l'emploi d'un développement limité :

$$F_1 M \simeq D \times \left[ 1 + \frac{x \cos \alpha}{D} - \frac{ax \sin \alpha}{2D^2} + \frac{x^2}{2D^2} + \frac{a^2}{8D^2} \right] \quad (42)$$

Les relations (41) et (42) fournissent finalement :

$$\delta = F_2 M - F_1 M = 2 \times \frac{ax \sin \alpha}{2D} = \frac{ax \sin \alpha}{D}$$

de sorte que :

$$\mathcal{E} = 4\mathcal{E}_0 \cos^2 \left( \frac{k\delta}{2} \right) = 4\mathcal{E}_0 \cos^2 \left( \frac{ka \sin \alpha}{2D} x \right)$$

L'éclairement devient donc *maximum* pour les valeurs  $x_p$  de  $x$  qui assurent :

$$\frac{ka \sin \alpha}{2D} x_p = p\pi \Rightarrow x_p = p \times \frac{2\pi D}{ka \sin \alpha} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

Enfin, l'interfrange  $i$  désigne l'écart entre deux valeurs successives de  $x$  qui assurent le *maximum* d'éclairement :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{2\pi D}{ka \sin \alpha}$$

avec :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow i = \frac{\lambda D}{a \sin \alpha} \quad (\text{réponse d}).$$

Remarque – On peut aisément s'assurer de la validité de ce résultat : si l'écran était perpendiculaire à l'axe  $OA$ , on retrouverait le résultat classique :  $i = \frac{\lambda D}{a}$ . Seules les propositions (b) et (d) fournies par l'énoncé permettent de retrouver ce résultat :

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left( \frac{\lambda D}{a \sin \alpha} \right) = \frac{\lambda D}{a} \text{ et } \lim_{\alpha \rightarrow \pi/2} \left( \frac{\lambda D}{2} \sin \alpha \right) = \frac{\lambda D}{a}$$

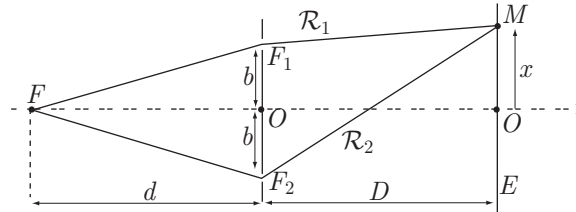
En outre, si  $\alpha$  tend vers zéro, l'écran devient parallèle à  $OA$ , et seule la réponse (d) confirme que l'interfrange tend vers l'infini :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( \frac{\lambda D}{a \sin \alpha} \right) = \infty$$



● 104 ————— Lycée Hoche, Versailles

Si la source  $F$  était monochromatique, de longueur d'onde  $\lambda$ , elle émettrait des rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui, passant par  $F_1$  et  $F_2$ , pourraient interférer en  $M$  :



L'éclairement arrivant au point  $M$  devrait alors vérifier la loi :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \left( \frac{k\delta}{2} \right)$$

avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  et  $\delta = (FF_2M) - (FF_1M)$ . Ces chemins optiques sont alors calculables :

$$\begin{aligned} (FF_2M) &= FF_2 + F_2M = FF_2 + \sqrt{D^2 + (x+b)^2} \\ &= FF_2 + D \left[ 1 + \frac{1}{D^2} (x+b)^2 \right]^{1/2} \\ &\simeq FF_2 + D \left[ 1 + \frac{1}{2D^2} (x+b)^2 \right] \text{ car } D \gg x+b \\ &= FF_2 + D + \frac{1}{2D} (x+b)^2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (FF_1M) &= FF_1 + F_1M = FF_1 + \sqrt{D^2 + (x-b)^2} \\ &= FF_1 + D \left[ 1 + \frac{1}{D^2} (x-b)^2 \right]^{1/2} \\ &\simeq FF_1 + D \left[ 1 + \frac{1}{2D^2} (x-b)^2 \right] \text{ car } D \gg x-b \\ &= FF_1 + D + \frac{1}{2D} (x-b)^2 \end{aligned}$$

Étant donné que  $FF_1 = FF_2$ , la différence des chemins optiques vaut :

$$\begin{aligned} \delta &= F_2M - F_1M = \frac{1}{2D} [(x+b)^2 - (x-b)^2] \\ &= \frac{1}{2D} \left[ \underbrace{(x+b+x-b)}_{2x} \underbrace{(x+b-x+b)}_{2b} \right] = \frac{2bx}{D} \end{aligned}$$

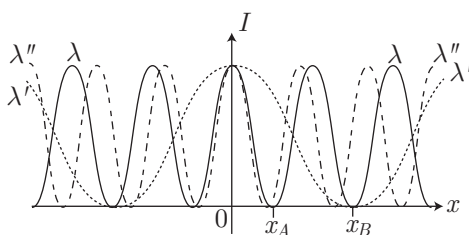
Aussi, l'éclairement en  $M$  vérifierait la loi :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} \times \frac{2bx}{D} \right)$$

loi à l'origine de la figure d'interférence qui présente des franges sombres lorsque  $\mathcal{E}$  est nul, c'est-à-dire pour :

$$\frac{\pi}{\lambda} \times \frac{2bx_p}{D} = (2p+1) \times \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_p = (2p+1) \times \frac{\lambda D}{4b} \quad (p \in \mathbb{Z}) \quad (43)$$

Si, maintenant,  $F$  est une source de lumière contenant trois longueurs d'onde  $\lambda$ ,  $\lambda'$  et  $\lambda''$ , à chaque longueur d'onde correspond un réseau de franges d'interférence qui se superposent (car deux rayonnements de longueurs d'onde différentes ne peuvent interférer) :



Cette figure montre l'allure des éclairissements correspondant aux longueurs d'onde  $\lambda$ ,  $\lambda'$  et  $\lambda''$ . On y remarque que :

- en  $x = x_A$ , l'éclairissement correspondant à  $\lambda$  est nul, de sorte qu'un spectroscopie révélerait l'absence de la raie correspondant à  $\lambda$  : en  $x_A$ , il existe une *cannelure* (ou raie sombre dans le spectre de la lumière).
- en  $x = x_B$ , les éclairissements correspondant à  $\lambda$  et  $\lambda'$  s'annulent, ce qui se manifesterait, sur un spectroscopie, par deux raies sombres correspondant à l'absence de  $\lambda$  et  $\lambda'$  dans le spectre de la lumière ; deux cannelures sont alors observées.

Cet exemple montre qu'à une distance  $x$  de l'axe  $FO$  apparaissent des cannelures correspondant à des longueurs d'onde vérifiant la relation (43) :

$$x = (2p+1) \times \frac{\lambda D}{4b} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

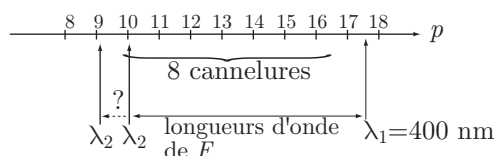
c'est-à-dire :

$$\lambda = \frac{1}{2p+1} \times \frac{4bx}{D} \text{ ou encore } p = \frac{1}{2} \left( \frac{4bx}{\lambda D} - 1 \right) \quad (44)$$

L'énoncé précise que la source  $F$  émet toutes les longueurs d'onde comprises entre  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  et  $\lambda_2$ . Aussi, si à  $\lambda_1$  correspondait (en  $x = 1,5 \text{ mm}$ ) une cannelure,  $p$  prendrait la valeur :

$$p = \frac{1}{2} \left( \frac{4bx}{\lambda_1 D} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{4 \times 1,2 \cdot 10^{-3} \times 1,5 \cdot 10^{-3}}{400 \cdot 10^{-9} \times 0,5} - 1 \right) = 17,5$$

Or, puisque  $p \notin \mathbb{Z}$ , cela signifie qu'à  $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$  ne correspond aucune cannelure en  $x = 1,5 \text{ mm}$ . C'est pourquoi la première cannelure apparaît pour une longueur d'onde  $\lambda > \lambda_1$  et la loi (44) montre que cette cannelure correspond à une valeur de  $p \in \mathbb{Z}$  inférieure à 17,5 (car  $p$  est une fonction décroissante de  $\lambda$ ). Donc, les huit cannelures observées dans le spectroscopie correspondent aux longueurs d'onde comprises entre  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , telles que  $p \in \mathbb{Z}$  demeure inférieur à 17 :



Le diagramme représenté ci-dessus révèle que huit cannelures peuvent apparaître dans le spectre des longueurs d'onde de  $F$  à condition :

- que pour  $\lambda_2$ ,  $p = 10$ , auquel cas la huitième cannelure correspond à la longueur d'onde  $\lambda_2$  qui vérifie la loi (44) :

$$\lambda_2 = \frac{1}{2 \times 10 + 1} \times \frac{4 \times 1,2 \cdot 10^{-3} \times 1,5 \cdot 10^{-3}}{0,5} = 686 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

- ou que la valeur de  $\rho$  correspondant à  $\lambda_2$  n'atteigne pas 9, sans quoi neuf cannelures apparaîtraient dans le spectre. Cette condition impose :

$$\lambda_2 < \lambda_{p=9}$$

avec :

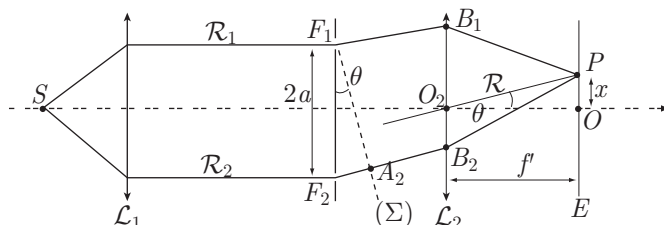
$$\lambda_{p=9} = \frac{1}{2 \times 9 + 1} \times \frac{4 \times 1,2 \cdot 10^{-3} \times 1,5 \cdot 10^{-3}}{0,5} = 758 \cdot 10^{-9} \text{ m}$$

De cette étude, il ressort que :

$$686 \text{ nm} \leq \lambda_2 < 758 \text{ nm}$$

## ● 105 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Les rayons arrivant sur  $F_1$  et  $F_2$  étant parallèles et issus d'une même source  $S$  à travers une lentille convergente, ces deux fentes appartiennent à une même surface d'onde et ne présentent par conséquent aucun déphasage. Des fentes  $F_1$  et  $F_2$  sont issus des rayons lumineux dont seuls ceux qui sont parallèles sont susceptibles de converger en un point  $P$  de l'écran  $E$  ; ce dernier se trouvant dans le plan focal image de  $\mathcal{L}_2$ , il s'y forme des images, par  $\mathcal{L}_2$ , d'objets à l'infini. On notera ainsi  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  les rayons qui, issus de  $F_1$  et  $F_2$  respectivement, convergent en  $P$  après avoir traversé  $\mathcal{L}_2$ . En outre, si un rayon  $\mathcal{R}$  passait par le centre optique  $O_2$  de  $\mathcal{L}_2$  et par  $P$ , ce rayon ne serait pas dévié par  $\mathcal{L}_2$  et il présenterait en amont de  $\mathcal{L}_2$ , la même direction que  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  (car les rayons  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}$  ne peuvent converger en  $P$  qu'à condition qu'ils arrivent sur  $\mathcal{L}_2$  parallèlement les uns aux autres) :



On convient de noter :

- $(\Sigma)$  une surface passant par  $F_1$ , perpendiculairement aux rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui, après avoir traversé  $F_1$  et  $F_2$ , convergent en  $P$  ;
- $A_2$  un point de  $\mathcal{R}_2$  appartenant à  $(\Sigma)$  ;
- $B_1$  et  $B_2$  les points d'intersection de  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  avec  $\mathcal{L}_2$  ;
- $\theta$  l'angle entre  $(O_2P)$  et l'axe  $(O_2O)$ .

Compte tenu du résultat (6) de la page 501 :

$$(F_1P) = (A_2P) \quad (45)$$

En outre,  $F_1$  et  $F_2$  ne présentant aucun déphasage, les images complexes des signaux que produisent  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  s'écrivent :

$$\underline{s}_1 = s_{01} e^{-j\omega t} e^{jk(F_1P)} \text{ et } \underline{s}_2 = s_{02} e^{-j\omega t} e^{jk(F_2P)} \quad (46)$$

où  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  et où  $\omega$  désigne la pulsation commune aux signaux  $s_1$  et  $s_2$ .

Si  $F_1$  était seul, le point  $P$  recevrait le signal :

$$\underline{s}_1 = s_{01} e^{-j\omega t} e^{jk(F_1P)}$$

c'est-à-dire une intensité proportionnelle ( $K$  désigne la constante de proportionnalité) à  $\underline{s}_1 \underline{s}_1^*$  :

$$I_{01} = K \underline{s}_1 \underline{s}_1^* = K s_{01}^2 \quad (47)$$

De même, si  $F_2$  était seul, l'intensité en  $P$  vaudrait :

$$I_{02} = K \underline{s}_2 \underline{s}_2^* = K s_{02}^2 \quad (48)$$

Quant au chemin optique  $(F_2P)$ , il est donné par :

$$\begin{aligned} (F_2P) &= (F_2A_2) + (A_2P) = F_2A_2 + (A_2P) \\ &= F_2A_2 + (F_1P) \text{ d'après l'identité (45)} \end{aligned}$$

En notant  $L = (F_1P)$ , les signaux  $\underline{s}_1$  et  $\underline{s}_2$  deviennent :

$$\underline{s}_1 = s_{01} e^{j(kL - \omega t)} \text{ et } \underline{s}_2 = s_{02} e^{j(kL - \omega t)} e^{jk\delta} \quad (49)$$

où  $\delta = F_2A_2$  représente la différence de chemin optique entre les rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui arrivent en  $P$ . Le signal résultant vaut alors :

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = e^{j(kL - \omega t)} (s_{01} + s_{02} e^{jk\delta})$$

où  $s_{01} = s_{02}$  car les fentes  $F_1$  et  $F_2$  sont identiques, auquel cas les intensités  $I_{01}$  et  $I_{02}$  sont identiques ; on note  $I_0$  cette valeur commune :

$$s_{01} = \frac{\sqrt{I_{01}}}{\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{K}} \text{ et } s_{02} = \frac{\sqrt{I_{02}}}{\sqrt{K}} = \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{K}} \quad (50)$$

Par suite :

$$\underline{s} = e^{j(kL - \omega t)} \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{K}} (1 + e^{jk\delta}) \quad (51)$$

À ce signal est associée une intensité  $I$  en  $P$  telle que :

$$\begin{aligned} I &= K \underline{s} \underline{s}^* = I_0 (1 + e^{jk\delta}) (1 + e^{-jk\delta}) \\ &= I_0 (2 + e^{jk\delta} + e^{-jk\delta}) = I_0 [2 + 2 \cos(k\delta)] \\ &= 2I_0 [1 + \cos(k\delta)] \end{aligned}$$

De la relation générale :  $1 + \cos x = 2 \cos^2 \left( \frac{x}{2} \right)$ , il ressort que :

$$I = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{k\delta}{2} \right)$$

Quant à l'expression de  $\delta$ , elle s'évalue aisément à l'aide des triangles  $(O_2PO)$  et  $(F_1F_2A_2)$  :

$$\tan \theta = \frac{OP}{O_2O} = \frac{x}{f'} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{F_2A_2}{F_1F_2} = \frac{\delta}{2a}$$

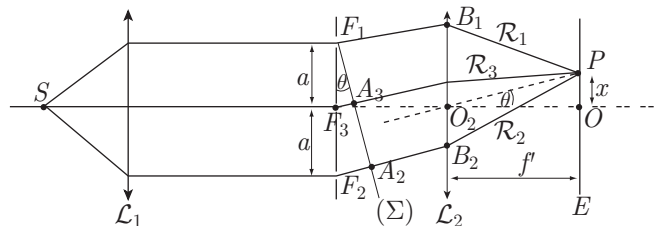
et notamment, pour  $x \ll f'$ , l'angle  $\theta$  est suffisamment petit pour justifier les approximations :

$$\begin{cases} \tan \theta \simeq \theta \\ \sin \theta \simeq \theta \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{x}{f'} = \frac{\delta}{2a} \\ \Rightarrow \delta = \frac{2a}{f'} x \Rightarrow \frac{k\delta}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{a}{f'} x$$

d'où découle l'expression de  $I$  :

$$I = 4I_0^2 \cos^2 \left( \frac{2\pi a}{\lambda f'} \times x \right)$$

2. Considérons maintenant l'influence d'une fente  $F_3$  située au milieu de  $[F_1, F_2]$  et qui émet un rayon  $\mathcal{R}_3$ , parallèle à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , convergeant en  $P$  :



Soit  $A_3$  le point d'intersection de  $\mathcal{R}_3$  avec la surface  $(\Sigma)$  à laquelle appartiennent également  $F_1$  et  $A_2$ . Les signaux émis par  $F_1, F_2$  en  $P$  ont déjà été décrits par les expressions (46), dans lesquelles  $s_{01} = s_{02}$  car  $F_1$  et  $F_2$  sont identiques (on note  $s_0$  la valeur commune à  $s_{01}$  et  $s_{02}$ ) :

$$\underline{s}_1 = s_0 e^{-j\omega t} e^{jk(F_1P)} \quad \text{et} \quad \underline{s}_2 = s_0 e^{-j\omega t} e^{j(F_2P)}$$

Quant à l'onde issue de  $F_3$ , elle produit en  $P$  un signal :

$$\underline{s}_3 = s_{03} e^{-j\omega t} e^{jk(F_3P)}$$

Les points  $F_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  appartenant de surcroît à la surface ( $\Sigma$ ) perpendiculaire aux rayons  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$  qui convergent vers  $P$  après avoir traversé  $\mathcal{L}_2$ , les chemins optiques  $(F_1P)$ ,  $(A_2P)$  et  $(A_3P)$  sont égaux ; soit  $L$  leur valeur commune. Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} (F_2P) = (F_2A_2) + (A_2P) = F_2A_2 + L \\ (F_3P) = (F_3A_3) + (A_3P) = F_3A_3 + L \end{cases} \quad (52)$$

où les distances  $F_2A_2$  et  $F_3A_3$  se calculent directement à l'aide des triangles  $(F_1F_2A_2)$  et  $(F_1F_3A_3)$  :

$$\begin{cases} \theta \simeq \sin \theta = \frac{F_2A_2}{2a} \\ \theta \simeq \sin \theta = \frac{F_3A_3}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_2A_2 = 2a\theta \\ F_3A_3 = a\theta \end{cases}$$

Quant au triangle  $(O_2OP)$ , il fournit :

$$\theta \simeq \tan \theta = \frac{x}{f'} \Rightarrow \begin{cases} F_2A_2 = 2 \frac{ax}{f'} \\ F_3A_3 = \frac{ax}{f'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k F_2A_2 = 2 \frac{kax}{f'} \\ k F_3A_3 = \frac{kax}{f'} \end{cases}$$

On notera dorénavant :

$$\phi = \frac{kax}{f'} = \frac{2\pi ax}{\lambda f'} \quad (53)$$

de sorte que :

$$k(F_2P) = kL + 2\phi \text{ et } k(F_3P) = kL + \phi$$

Les signaux produits en  $P$  par  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{R}_2$  et  $\mathcal{R}_3$  s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} \underline{s}_1 = s_0 e^{j(kL - \omega t)} \\ \underline{s}_2 = s_0 e^{j(kL - \omega t)} \times e^{2j\phi} \\ \underline{s}_3 = s_{03} e^{j(kL - \omega t)} \times e^{j\phi} \end{cases} \quad (54)$$

(a) Si  $F_3$  est identique à  $F_1$  et  $F_2$ , l'amplitude  $s_{03}$  s'identifie à  $s_0$ , auquel cas les expressions (54) deviennent :

$$\underline{s}_1 = s_0 e^{j(kL - \omega t)} \quad \underline{s}_2 = \underline{s}_1 e^{2j\phi} \quad \underline{s}_3 = \underline{s}_1 e^{j\phi}$$

et le signal résultant en  $M$  a pour image complexe :

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \underline{s}_3 = \underline{s}_1 (1 + e^{2j\phi} + e^{j\phi})$$

avec :

$$\begin{aligned} 1 + e^{2j\phi} + e^{j\phi} &= e^{j\phi} (e^{-j\phi} + e^{j\phi} + 1) \\ &= e^{j\phi} (2 \cos \phi + 1) \\ \Rightarrow \underline{s} &= \underline{s}_1 e^{j\phi} (1 + 2 \cos \phi) \end{aligned}$$

L'intensité associée à cette onde prend, de fait, la valeur :

$$\begin{aligned} I &= K \underline{s} \underline{s}^* = K |\underline{s}_1|^2 \times (1 + 2 \cos \phi)^2 \text{ avec } \underline{s}_1 = s_0 e^{j(kL - \omega t)} \\ &= K s_0^2 \times (1 + 2 \cos \phi)^2 \end{aligned}$$

Rappelons, en outre, que l'identité (50) a fourni :  $s_0 = \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{K}}$  et que  $\phi$  est défini par l'identité (53) :  $\phi = \frac{2\pi ax}{\lambda f'}$ , d'où découle l'expression de  $I(x)$  :

$$I(x) = I_0 \times \left[ 1 + 2 \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda f'} \right) \right]^2$$

- (b) Si  $F_3$  présente une largeur double de celle de  $F_1$  et  $F_2$ , l'amplitude  $s_{03}$  du signal correspondant sur  $M$  vaut le double de celle de  $F_1$  et  $F_2$ , soit :  $s_{03} = 2s_0$ . Ainsi, les relations (54) deviennent :

$$\begin{cases} \underline{s}_1 = s_0 e^{j(kL - \omega t)} \\ \underline{s}_2 = s_0 e^{j(kL - \omega t)} \times e^{2j\phi} \\ \underline{s}_3 = 2s_0 e^{j(kL - \omega t)} \times e^{j\phi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{s}_1 = s_0 e^{j(kL - \omega t)} \\ \underline{s}_2 = \underline{s}_1 e^{2j\phi} \\ \underline{s}_3 = 2\underline{s}_1 e^{j\phi} \end{cases}$$

En  $M$ , le signal résultant peut donc s'écrire :

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 + \underline{s}_3 = \underline{s}_1 (1 + e^{2j\phi} + 2e^{j\phi})$$

avec :

$$\begin{aligned} 2e^{j\phi} + e^{2j\phi} + 1 &= 2e^{j\phi} \left( 1 + \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2} \right) = 2e^{j\phi} (1 + \cos \phi) \\ \Rightarrow \underline{s} &= 2\underline{s}_1 e^{j\phi} (1 + \cos \phi) \text{ avec } |\underline{s}_1| = s_0 = \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{K}} \end{aligned}$$

Par suite, l'intensité lumineuse parvenant en  $P$  adopte la forme :

$$I = K \underline{s} \underline{s}^* = 4K |\underline{s}_1|^2 (1 + \cos \phi)^2 = 4I_0 (1 + \cos \phi)^2$$

avec :

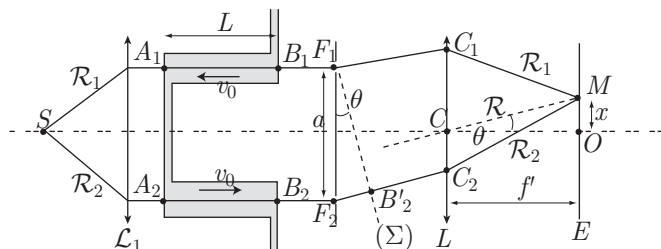
$$\phi = \frac{2\pi ax}{\lambda f'} \Rightarrow I = 4I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda f'} \right) \right]^2$$

## ● 106 ————— Concours Commun Polytechnique

Soient :

- $A_1$  et  $A_2$  les points d'entrée, dans la cuve, des rayons lumineux  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui traversent  $F_1$  et  $F_2$  respectivement ;
- $B_1$  et  $B_2$  les points de sortie, de la cuve, des rayons respectifs  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  ;
- $C_1$  et  $C_2$  les points d'incidence respectifs de  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sur la lentille  $\mathcal{L}$ , de distance focale image  $f'$  ;
- $C$  le centre optique de  $\mathcal{L}$  ;
- un point  $M$  de l'écran  $E$ , tel que  $\overline{OM} = x$ , où interfèrent  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  ;

- $n_1$  et  $n_2$  les indices de réfraction rencontrés par  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  dans l'eau en mouvement.



À la sortie de  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  convergent vers le point  $M$  du plan focal image de  $\mathcal{L}$  où est situé l'écran  $E$ . C'est pourquoi  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  sont des rayons parallèles issus de  $F_1$  et  $F_2$ . On appelle  $B'_2$  un point de  $\mathcal{R}_2$  tel que  $(F_1B'_2) \perp \mathcal{R}_2$ . En outre, s'il existait un troisième rayon ( $\mathcal{R}$ ) parallèle à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  entre les fentes et  $\mathcal{L}$ , ce rayon convergerait également en  $M$  en vertu du stigmatisme de  $\mathcal{L}$ . De plus, si ce rayons passait par  $C$ , il ne serait pas dévié par  $\mathcal{L}$ , de sorte qu'à la sortie de  $\mathcal{L}$ , l'angle  $\theta$  de  $\mathcal{R}$  avec  $CO$  est le même que celui avant  $\mathcal{L}$ , c'est-à-dire des rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  entre les fentes et  $\mathcal{L}$  :

$$\tan \theta \simeq \theta = \frac{OM}{CO} = \frac{x}{f'}$$

si  $\theta$  est suffisamment petit pour que soient justifiées les approximations :  $\tan \theta \simeq \theta \simeq \sin \theta$ . Quant au triangle  $(F_1F_2B')$ , il fournit :

$$\sin \theta = \frac{F_2B'_2}{F_1F_2} = \frac{F_2B'_2}{a} \Rightarrow F_2B'_2 = a \times \theta = \frac{ax}{f'} \quad (55)$$

L'intensité lumineuse parvenant au point  $M$  vérifie la loi :

$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{k_0 \delta}{2} \right)$$

où  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$  est la norme du vecteur d'onde dans le vide et  $\delta$  représente la différence des chemins optiques entre les rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  qui, partant d'une même source  $S$ , interfèrent en  $M$  :

$$\delta = (SF_2M) - (SF_1M)$$

avec  $\begin{cases} (SF_1M) = (SA_1) + (A_1B_1) + (B_1F_1) + (F_1M) \\ (SF_2M) = (SA_2) + (A_2B_2) + (B_2F_2) + (F_2B'_2) + (B'_2M) \end{cases}$

D'une part les chemins optiques de  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , issus d'une même source  $S$ , demeurent identiques à la traversée de la première lentille, car  $A_1$  et  $A_2$  appartiennent à une même surface d'onde (perpendiculaire à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , eux mêmes parallèles à  $SO$ ) :

$$(SA_1) = (SA_2)$$

et, d'autre part,  $(F_1B'_2)$  est perpendiculaire à  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , ce qui a pour conséquence :

$$(F_1M) = (B'_2M)$$

Pour ces raisons :

$$\delta = (SF_2M) - (SF_1M) = (A_2B_2) + (F_2B'_2) - (A_1B_1)$$



car  $(B_1F_1) = (B_2F_2)$ . En outre, compte tenu des indices de réfraction  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_{\text{air}} = 1$  des milieux traversés par  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , les chemins optiques valent :

$$(A_2B_2) = n_2L \quad (A_1B_1) = n_1L \quad (F_2B'_2) = F_2B'_2$$

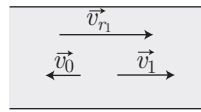
d'où découle l'expression de  $\delta$  :

$$\delta = (n_2 - n_1)L + F_2B'_2 \quad (56)$$

Évaluons alors les termes  $n_1$  et  $n_2$  :

- **Calcul de  $n_1$**

Dans la cuve, le rayon lumineux  $\mathcal{R}_1$  se déplace à contre courant, avec une vitesse  $\vec{v}_1$  :



En admettant la loi de composition<sup>2</sup> des vitesses, on impose :

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_0 + \vec{v}_{r1}$$

où  $\vec{v}_{r1}$  désigne la vitesse de propagation (de la gauche vers la droite) du rayonnement dans l'eau d'indice  $n_0 = 1,33$  :

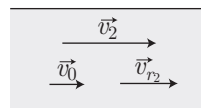
$$v_{r1} = \frac{c}{n_0} \Rightarrow v_1 = \frac{c}{n_0} - v_0 = \frac{c - n_0v_0}{n_0}$$

Par suite, l'indice  $n_1$  est défini par :

$$n_1 = \frac{c}{v_1} = \frac{cn_0}{c - n_0v_0}$$

si  $c$  représente la célérité de la lumière dans le vide.

- **Calcul de  $n_2$**



Le rayon  $\mathcal{R}_2$  se propage dans la même direction que le courant avec une vitesse  $\vec{v}_2$ , auquel cas la loi (classique) de composition des vitesses conduit à :

$$\begin{aligned} \vec{v}_2 = \vec{v}_{r2} + \vec{v}_0 &\Rightarrow v_2 = v_{r2} + v_0 = \frac{c}{n_0} + v_0 \\ &\Rightarrow v_2 = \frac{c + n_0v_0}{n_0} \\ &\Rightarrow n_2 = \frac{c}{v_2} = \frac{cn_0}{c + n_0v_0} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>L'étude menée ici se place dans le simple cadre de la mécanique classique et c'est pourquoi la loi relativiste de composition des vitesses est délibérément ignorée.

La différence  $\Delta n = n_2 - n_1$  vaut ainsi :

$$\Delta n = cn_0 \left( \frac{1}{c + n_0 v_0} - \frac{1}{c - n_0 v_0} \right) = cn_0 \times \frac{-2n_0 v_0}{(c + n_0 v_0)(c - n_0 v_0)}$$

expression que l'on peut simplifier en supposant que l'eau se déplace beaucoup moins vite que la lumière :

$$n_0 v_0 \ll c \Rightarrow \Delta n \simeq -\frac{2n_0^2 v_0}{c}$$

de sorte que l'identité (56) devient :

$$\delta = \Delta n \times L + F_2 B_2' = F_2 B_2' - \frac{2n_0^2 v_0 L}{c}$$

Enfin, la relation (55) fournit :

$$F_2 B_2' = \frac{ax}{f'} \Rightarrow \delta = \frac{ax}{f'} - \frac{2n_0^2 v_0 L}{c}$$

Finalement, l'intensité lumineuse arrivant sur  $I$  adopte la forme :

$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{k_0 \delta}{2} \right) \quad (57)$$

$$= I_0 \cos^2 \left[ \frac{k_0}{2} \left( \frac{ax}{f'} - \frac{2n_0^2 v_0 L}{c} \right) \right] \quad (58)$$

$$= I_0 \cos^2 \left[ \frac{k_0 a}{2f'} \left( x - \frac{2f' n_0^2 v_0 L}{ac} \right) \right] \quad (59)$$

Si  $v_0 = 0$ , la relation précédente devient :

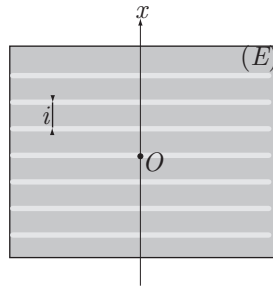
$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{k_0 a}{2f'} x \right) \quad (60)$$

ce qui justifie la présence de franges claires, sur  $E$ , correspondant à des *maxima* de  $I$  :

$$\begin{aligned} I = I_0 &\Rightarrow \frac{k_0 a}{2f'} x_p = p\pi \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x_p = p\pi \times \frac{2f'}{k_0 a} = p\pi \times \frac{2f'}{a} \times \frac{\lambda_0}{2\pi} \\ &\Rightarrow x_p = p \times \frac{\lambda_0 f'}{a} \end{aligned}$$

D'une part ce résultat confirme les propos de l'énoncé : l'ordre d'interférence ( $p$ ) est nul en  $O$  (c'est-à-dire en  $x_p = 0$ ), où se trouve par conséquent une frange brillante et d'autre part l'interfrange  $i$  séparant deux franges brillantes consécutives vaut :

$$i = x_{p+1} - x_p \Rightarrow i = \frac{\lambda_0 f'}{a}$$



En revanche, lorsque  $v_0 \neq 0$ , l'intensité  $I$  est décrite par la loi (59) :

$$I = I_0 \cos^2 \left[ \frac{k_0 a}{2f'} \left( x - \frac{2f' n_0^2 v_0 L}{ac} \right) \right]$$

soit aussi :

$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{k_0 a}{2f'} X \right) \text{ avec } X = x - \frac{2f' n_0^2 v_0 L}{ac}$$

par analogie avec le résultat (60) :

$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{k_0 a}{2f'} x \right)$$

on déduit que les franges brillantes sont celles dont les valeurs  $X_p$  de  $X$  donnent à  $I$  sa valeur maximale  $I_0$  :

$$\begin{aligned} \frac{k_0 a}{2f'} X_p = p\pi &\Rightarrow X_p = p\pi \times \frac{2f'}{a} \times \frac{\lambda_0}{2\pi} = p \times \frac{\lambda_0 f'}{a} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow x_p - \frac{2f' n_0^2 v_0 L}{ac} = p \times \frac{\lambda_0 f'}{a} \\ &\Rightarrow x_p = \frac{2f' n_0^2 v_0 L}{ac} + p \times \frac{\lambda_0 f'}{a} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

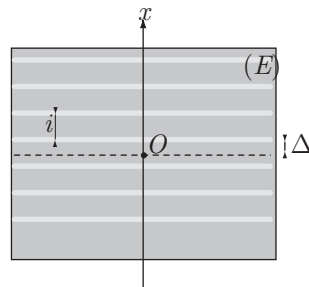
D'une part ce résultat révèle une translation, vers le haut, de la figure d'interférence, d'une valeur :

$$\Delta = \frac{2f' n_0^2 v_0 L}{ac}$$

et d'autre part que l'interfrange :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

n'est pas modifié par la valeur de  $v_0$ .



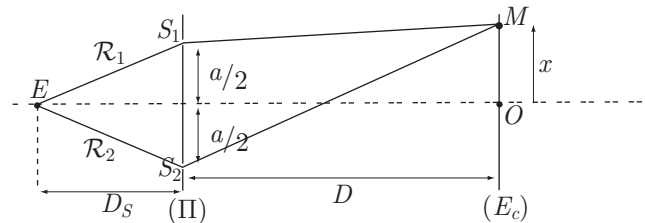
Tant que  $\Delta \neq i$ , c'est-à-dire :

$$\frac{2f'n_0^2v_0L}{ac} \neq \frac{\lambda_0f'}{a} \Rightarrow v_0 \neq \frac{\lambda_0c}{2n_0^2L}$$

la mise en mouvement de l'eau pourra être directement observée car il y aura translation, sans superposition, des franges d'interférences. Ainsi, la mesure de  $\Delta$  permettra une mesure directe de  $\frac{v_0}{c} = \frac{a\Delta}{2f'n_0^2L}$ .

### ● 107 ————— Concours TA

1. Considérons deux rayons,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , issus de  $E$  et arrivant en  $M$  après avoir traversé  $S_1$  et  $S_2$  respectivement :



Issus d'une même source  $E$ , ces deux rayons présentent la cohérence requise pour interférer en  $M$ , qui reçoit l'intensité :

$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{k\delta}{2} \right)$$

où  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  et où  $\delta$  désigne la différence des chemins optiques entre  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  :

$$\delta = (ES_2M) - (ES_1M) \quad (61)$$

$$\Rightarrow \delta = (ES_2) + (S_2M) - (ES_1) - (S_1M) \quad (62)$$

$$\Rightarrow \delta = ES_2 - ES_1 + S_2M - S_1M \quad (63)$$

La source  $E$  se trouvant sur la médiatrice de  $[S_1S_2]$ , il reste simplement :

$$\delta = S_2M - S_1M \quad (64)$$

avec :

$$\begin{aligned} S_2M &= \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} = D \left[1 + \frac{1}{D^2} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{1/2} \\ &\simeq D \left[1 + \frac{1}{2D^2} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right] \text{ si } x + \frac{a}{2} \ll D \\ &= D + \frac{1}{2D} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} S_1M &= \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} = D \left[1 + \frac{1}{D^2} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{1/2} \\ &\simeq D \left[1 + \frac{1}{2D^2} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right] \\ &= D + \frac{1}{2D} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Par suite, l'identité (64) devient :

$$\delta = S_2M - S_1M = \frac{1}{2D} \left[ \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 \right] \quad (65)$$

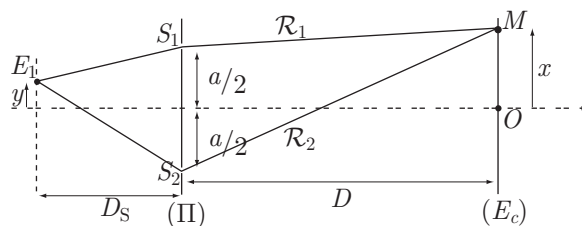
$$= \frac{1}{2D} \left(x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2}\right) \left(x + \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2}\right) \quad (66)$$

$$= \frac{1}{2D} \times 2x \times a = \frac{ax}{D} \quad (67)$$

De fait, l'intensité  $I$  au point  $M$  adopte la forme suivante :

$$I(M) = I_0 \cos^2 \left( \frac{kax}{2D} \right) = I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi a}{\lambda D} x \right)$$

2. (a) On appelle  $y = \frac{e}{2}$  la distance algébrique qui sépare  $E_1$  de la médiatrice de  $[S_1S_2]$  :



Les distances séparant  $E_1$  de  $S_1$  et  $S_2$  valent alors :

$$\begin{aligned} E_1S_2 &= \sqrt{D_S^2 + \left(\frac{a}{2} + y\right)^2} = D_S \left[1 + \frac{1}{D_S^2} \left(\frac{a}{2} + y\right)^2\right]^{1/2} \\ &\simeq D_S \left[1 + \frac{1}{2D_S^2} \left(\frac{a}{2} + y\right)^2\right] \text{ car } D_S \gg \frac{a}{2} + y \\ &= D_S + \frac{1}{2D_S} \left(\frac{a}{2} + y\right)^2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E_1 S_1 &= \sqrt{D_S^2 + \left(\frac{a}{2} - y\right)^2} = D_S \left[1 + \frac{1}{D_S^2} \left(\frac{a}{2} - y\right)^2\right]^{1/2} \\ &\simeq D_S \left[1 + \frac{1}{2D_S^2} \left(\frac{a}{2} - y\right)^2\right] \\ &= D_S + \frac{1}{2D_S} \left(\frac{a}{2} - y\right)^2 \end{aligned}$$

Les rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  issus de  $E$  et passant par  $S_1$  et  $S_2$ , avant de converger vers  $M$ , présentent alors une différence de chemin optique  $\delta_1$  donné par le résultat (63) :

$$\delta_1 = [E_1 S_2 - E_1 S_1] + [S_2 M - S_1 M]$$

avec :

$$\begin{aligned} E_1 S_2 - E_1 S_1 &= \frac{1}{2D_S} \left[ \left(\frac{a}{2} + y\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - y\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2D_S} \underbrace{\left(\frac{a}{2} + y + \frac{a}{2} - y\right)}_a \times \underbrace{\left(\frac{a}{2} + y - \frac{a}{2} + y\right)}_{2y} \\ &= \frac{a}{D_S} y \end{aligned}$$

et où  $S_2 M - S_1 M$  est fourni par le résultat (67) :  $S_2 M - S_1 M = \frac{ax}{D}$ . Par conséquent, avec  $y = \frac{e}{2}$ , la différence de chemin optique  $\delta_1$  vaut :

$$\delta_1 = \frac{a}{D_S} y + \frac{ax}{D} = \frac{ae}{2D_S} + \frac{ax}{D}$$

ce qui signifie que le point  $M$  reçoit, de  $E_1$ , une intensité lumineuse :

$$I_1 = I_0 [1 + \cos(k\delta_1)] = I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{kae}{2D_S} + \frac{kax}{D}\right)\right]$$

De même, la source  $E_2$ , de cote  $y = -\frac{e}{2}$  émet des rayons lumineux qui passent par  $S_1$  et  $S_2$  et dont la différence de chemin optique en arrivant en  $M$  vaut :

$$\begin{aligned} \delta_2 &= E_2 S_2 - E_2 S_1 + S_2 M - S_1 M \\ &= -\frac{a}{D_S} y + \frac{ax}{D} = \frac{ax}{D} - \frac{ae}{2D_S} \end{aligned}$$

Pour la longueur d'onde considérée, la magnitude de  $E_2$  s'identifiant à celle de  $E_1$ , l'intensité lumineuse que  $E_2$  fait parvenir en  $M$  vaut :

$$I_2 = I_0 [1 + \cos(k\delta_2)] = I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{kax}{D} - \frac{kae}{2D_S}\right)\right]$$

Enfin, les sources  $E_1$  et  $E_2$  étant incohérentes, leurs intensités s'additionnent

simplement en  $M$ , d'où l'intensité résultante :

$$\begin{aligned} I(M) &= I_1 + I_2 \\ &= I_0 \left[ 2 + \cos \left( \frac{kax}{D} + \frac{kae}{2D_S} \right) + \cos \left( \frac{kax}{D} - \frac{kae}{2D_S} \right) \right] \end{aligned}$$

En utilisant l'identité :  $\cos p + \cos q = 2 \cos \left( \frac{p-q}{2} \right) \cos \left( \frac{p+q}{2} \right)$ , avec :

$$\begin{cases} p = \frac{kax}{D} + \frac{kae}{2D_S} \\ q = \frac{kax}{D} - \frac{kae}{2D_S} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{p-q}{2} = \frac{kae}{2D_S} \\ \frac{p+q}{2} = \frac{kax}{D} \end{cases}$$

cette intensité s'écrit aussi :

$$I(M) = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{kae}{2D_S} \right) \times \cos \left( \frac{kax}{D} \right) \right]$$

- (b) L'intensité  $I(M)$  peut prendre les valeurs maximale  $I_{\max}$  et minimale  $I_{\min}$  suivantes :

$$I_{\max} = 2I_0 \left[ 1 + \cos \left( \frac{kae}{2D_S} \right) \right] \text{ et } I_{\min} = 2I_0 \left[ 1 - \cos \left( \frac{kae}{2D_S} \right) \right]$$

à partir desquelles est définie la visibilité :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(a) &= \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \Rightarrow \mathcal{V}(a) = \cos \left( \frac{kae}{2D_S} \right) \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ &\Rightarrow \mathcal{V}(a) = \cos \left( \frac{\pi ae}{\lambda D_S} \right) \end{aligned}$$

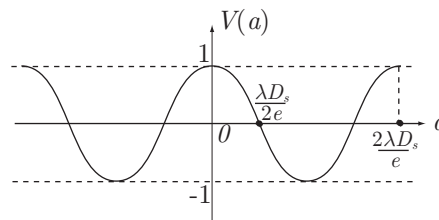
La fonction  $\mathcal{V}(a)$  prend ainsi les valeurs extrêmes  $+1$  et  $-1$  :

$$\mathcal{V}(a) = 1 \text{ pour } \frac{\pi ae}{\lambda D_S} = q \times 2\pi, (q \in \mathbb{Z}) \Rightarrow a = 2q \times \frac{\lambda D_S}{e}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(a) &= -1 \text{ pour } \frac{\pi ae}{\lambda D_S} = (2q+1) \times \pi, (q \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow a = (2q+1) \times \frac{\lambda D_S}{e} \end{aligned}$$

La représentation graphique de  $\mathcal{V}(a)$  présente donc l'allure suivante :



- (c) À la première annulation de la visibilité,  $\mathcal{V}(a)$  est nul et l'écran est uniformément éclairé car  $I = 2I_0 \forall x$ . Cette première annulation est obtenue pour une valeur de  $a$  telle que :

$$a_1 = \frac{\lambda D_S}{2e} \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda}{2\beta} \text{ avec } \beta = \frac{e}{D_S} \Rightarrow \beta = \frac{\lambda}{2a_1}$$

Remarque – Dans la pratique, il est malaisé de déterminer le maximum de la visibilité tandis que son annulation se traduit par la disparition complète des franges d'interférence. Or, cette disparition se produit lorsque

$$\cos\left(\frac{\pi ae}{\lambda D_S}\right) = 0, \text{ c'est-à-dire :}$$

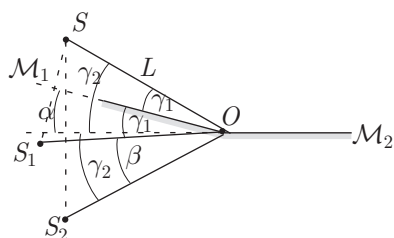
$$\frac{\pi ae}{\lambda D_S} = (2q + 1) \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_q = \frac{2q + 1}{2} \times \frac{\lambda D_S}{e} = \frac{2q + 1}{2} \times \frac{\lambda}{\beta}$$

Aussi, deux valeurs successives de  $a$  permettant l'annulation de  $\mathcal{V}$  seront facilement repérables et correspondront à une variation de  $a$  telle que :

$$\Delta a = a_{q+1} - a_q = \frac{\lambda}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{\lambda}{\Delta a}$$

## ● 108 ————— Lycée Lakanal, Sceaux

1. (a) Soit  $\gamma_1$  l'angle que fait  $(SO)$  avec le miroir  $\mathcal{M}_1$  et soit  $\gamma_2$  celui que fait  $(SO)$  avec  $\mathcal{M}_2$ . Les images  $S_1$  et  $S_2$  de  $S$  par  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  respectivement sont symétriques de  $S$  par rapport à  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  :



Compte tenu de cette symétrie, les angles que font les droites  $(OS_1)$  et  $(OS_2)$  par rapport à  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  valent respectivement  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . En outre, le schéma précédent révèle que :

$$\gamma_1 + \gamma_1 + \beta = \gamma_2 + \gamma_2 \Rightarrow 2\gamma_1 + \beta = 2\gamma_2$$

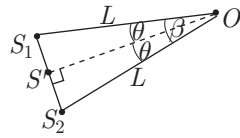
De plus :

$$\gamma_2 = \gamma_1 + \alpha \Rightarrow 2\gamma_2 = 2\gamma_1 + 2\alpha \quad (68)$$

$$\Rightarrow 2\gamma_1 + \beta = 2\gamma_1 + 2\alpha \Rightarrow \beta = 2\alpha \quad (69)$$

Étant donné que  $S_1$  est symétrique de  $S$  par rapport à  $\mathcal{M}_1$ , qui contient le point  $O$ , le miroir  $\mathcal{M}_1$  est médiateur du segment  $[SS_1]$  et, puisque  $O$  appartient à ce plan médiateur, il s'ensuit que :  $OS_1 = OS = L$ . Un même raisonnement amène à poser :  $OS_2 = OS = L$ , de sorte que le triangle  $(OS_1S_2)$  est isocèle :





Par conséquent, la bissectrice ( $OS'$ ) de l'angle  $\beta$  est aussi médiatrice de  $[S_1S_2]$ , ce qui signifie que ( $S'O$ ) est perpendiculaire à  $[S_1S_2]$ , en raison de quoi les définitions trigonométriques s'appliquent aisément dans le triangle rectangle ( $OS'S_1$ ) :

$$\sin \theta = \frac{S_1S'}{L} \text{ avec } \theta = \frac{\beta}{2}$$

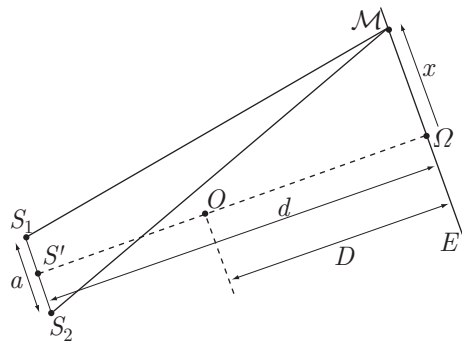
et :

$$\beta = 2\alpha \Rightarrow \theta = \frac{\beta}{2} = \alpha \Rightarrow S_1S' = L \sin \alpha \simeq L \times \alpha \quad (70)$$

Il s'ensuit que :

$$\underbrace{S_1S_2}_a = 2 S_1S' \Rightarrow a = 2\alpha L \quad (71)$$

- (b) Le dispositif interférentiel est donc équivalent à un écran  $E$  éclairé par deux sources  $S_1$  et  $S_2$  cohérentes :



Dans le triangle ( $OS_1S'$ ),  $\tan \theta$  est défini par :

$$\tan \theta = \frac{S_1S'}{OS'} \Rightarrow OS' = \frac{S_1S'}{\tan \theta} \simeq \frac{S_1S'}{\theta}$$

où les résultats (70) conduisent à :

$$\begin{cases} \theta = \alpha \\ S_1S' = L\alpha \end{cases} \Rightarrow OS' = \frac{\alpha L}{\alpha} \Rightarrow OS' = L$$

Par suite, la distance séparant ( $S_1S_2$ ) de  $E$  vaut :

$$d = OS' + D = L + D$$

Lorsque  $S_1$  et  $S_2$  émettent des rayonnements monochromatiques de longueur d'onde  $\lambda$  (avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ), l'intensité lumineuse reçue par  $M$  s'écrit classiquement :

$$I = I_0 \cos^2 \left( \frac{k\delta}{2} \right) \text{ avec } \delta = (S_2M) - (S_1M)$$

Quant aux chemins optiques ( $S_2M$ ) et ( $S_1M$ ), il s'obtiennent par application du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}(S_2M) &= S_2M = \sqrt{d^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} = d \left[1 + \frac{1}{d^2} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right]^{1/2} \\ &\simeq d \left[1 + \frac{1}{2d^2} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\right] \text{ pour } x + \frac{a}{2} \ll d \\ &= d + \frac{1}{2d} \left(x + \frac{a}{2}\right)^2\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}(S_1M) &= S_1M = \sqrt{d^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} = d \left[1 + \frac{1}{d^2} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right]^{1/2} \\ &\simeq d \left[1 + \frac{1}{2d^2} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right] \text{ pour } x - \frac{a}{2} \ll d \\ &= d + \frac{1}{2d} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\delta &= (S_2M) - (S_1M) = \frac{1}{2d} \left[\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a}{2}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2d} \underbrace{\left(x + \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2}\right)}_a \underbrace{\left(x + \frac{a}{2} + x - \frac{a}{2}\right)}_{2x} \\ &= \frac{ax}{d}\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} a = 2\alpha L \\ d = L + D \end{cases} \Rightarrow \delta = \frac{2\alpha Lx}{L + D} \Rightarrow I = I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi}{\lambda} \times \frac{2\alpha Lx}{L + D} \right)$$

Deux franges sombres apparaîtront en  $E$  à des valeurs de  $x$  annulant  $I$ , c'est-à-dire telles que :

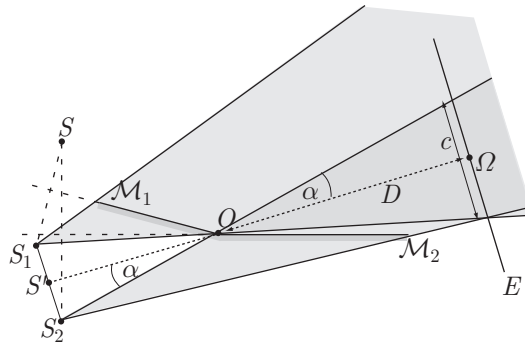
$$\frac{\pi}{\lambda} \times \frac{2\alpha Lx}{L + D} = (2p + 1) \frac{\pi}{2} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \quad (72)$$

$$\Rightarrow x_p = (2p + 1) \times \frac{\lambda(L + D)}{4\alpha L} \quad (73)$$

L'interfrange est définie comme la distance  $i$  séparant deux franges sombres (ou claires) consécutives, c'est-à-dire :

$$i = x_{p+1} - x_p \Rightarrow i = \frac{\lambda(L + D)}{2\alpha L} \quad (74)$$

- (c) Le champ d'interférence contient les points de l'espace où se superposent les faisceaux issus de  $S_1$  et  $S_2$  :



Sur l'écran  $E$ , le champ d'interférences présente une largeur  $c$  telle que :

$$\tan \alpha = \frac{c}{2D} \simeq \alpha \Rightarrow c = 2\alpha D$$

Soit  $\eta$  le nombre tel :

$$c = \eta \times i \Rightarrow \eta = \frac{c}{i} = 2\alpha D \times \frac{2\alpha L}{\lambda(L+D)} \Rightarrow \eta = \frac{4DL\alpha^2}{\lambda(L+D)}$$

de sorte que le nombre  $N$  de franges brillantes (le point  $\Omega$  appartient à l'une d'elles) vaut :

$$N = E(\eta) + 1 \Rightarrow N = E\left[\frac{4DL\alpha^2}{\lambda(L+D)}\right] + 1 \quad (75)$$

où  $E(x)$  désigne la partie entière de  $x$ .

- (d) Application numérique : en prenant  $\alpha = 6.10^{-3}$  rad,  $D = 2,5$  m,  $L = 0,5$  m et  $\lambda = 0,6.10^{-6}$  m, les grandeurs  $a$ ,  $i$  et  $N$  se calculent à partir des résultats (71), (74) et (75) :

$$a = 2\alpha L = 2 \times 6.10^{-3} \times 0,5 \Rightarrow a = 6.10^{-3} \text{ m} = 6 \text{ mm}$$

$$i = \frac{\lambda(L+D)}{2\alpha L} = \frac{0,6.10^{-6} \times (0,5 + 2,5)}{6.10^{-3}} \Rightarrow i = 3.10^{-4} \text{ m} = 0,3 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} N &= E\left[\frac{4DL\alpha^2}{\lambda(L+D)}\right] + 1 \\ &= E\left[\frac{4 \times 2,5 \times 0,5 \times (6.10^{-3})^2}{0,6.10^{-6} \times (0,5 + 2,5)}\right] + 1 \\ &\Rightarrow N = 101 \text{ franges claires} \end{aligned}$$

2. Conformément au résultat (73), à une distance  $x = 2,5.10^{-3}$  m de  $\Omega$  se trouvent les franges sombres correspondant aux longueurs d'onde  $\lambda$  vérifiant :

$$x = (2p + 1) \times \frac{\lambda(L+D)}{4\alpha L} \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \quad (76)$$

Or,  $\lambda$  est compris entre  $\lambda_1 = 0,4 \mu\text{m}$  et  $\lambda_2 = 0,8 \mu\text{m}$ , auxquelles correspondent les valeurs  $p_1$  et  $p_2$  telles que :

$$2p_1 + 1 = \frac{4\alpha Lx}{\lambda_1(L+D)} \Rightarrow p_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{4\alpha Lx}{\lambda_1(L+D)} - 1 \right]$$

et :

$$p_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{4\alpha Lx}{\lambda_2(L+D)} - 1 \right]$$

Application numérique :

$$p_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{4 \times 6.10^{-3} \times 0,5 \times 2,5.10^{-3}}{0,4.10^{-6} \times (0,5 + 2,5)} - 1 \right] \Rightarrow p_1 = 12$$

et :

$$p_2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{4 \times 6.10^{-3} \times 0,5 \times 2,5.10^{-3}}{0,8.10^{-6} \times (0,5 + 2,5)} - 1 \right] \Rightarrow p_2 = 5,75$$

Aussi, la condition :  $\lambda_2 \geq \lambda \geq \lambda_1$  impose à  $p$  de prendre des valeurs entières comprises entre  $p_1$  et  $p_2$ , c'est-à-dire :  $p \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ .

Remarque – Les valeurs obtenues pour  $p_1$  et  $p_2$  appellent quelques commentaires :

- puisque  $p_1 = 12$  est un nombre entier, en  $x = 2,5 \text{ mm}$  une cannelure correspond à la longueur d'onde  $\lambda_1$ , qui présente une frange sombre ;
- $p_2 = 5,75$  n'étant pas entier, le rayonnement correspondant à la longueur d'onde  $\lambda_2$  n'est pas à l'origine d'une cannelure dans le spectre.

Finalement, de la loi (76) :

$$\begin{aligned} x = (2p + 1) \times \frac{\lambda(L+D)}{4\alpha L} &\Rightarrow \lambda = \frac{4\alpha Lx}{L+D} \times \frac{1}{2p+1} \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{10}{2p+1} \text{ (en } \mu\text{m)}. \end{aligned}$$

ressortent les différentes longueurs d'onde associées à  $p \in \mathbb{Z}$ , responsables d'une cannelure dans le spectre :

$p$	6	7	8	9	10	11	12
$\lambda$ (en $\mu\text{m}$ )	0,769	0,667	0,588	0,526	0,476	0,435	0,400

## ● 109 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. La différence de chemin optique  $\delta = (S_2M) - (S_1M)$  s'écrit aussi, dans l'air :  $\delta = S_2M - S_1M$ . En outre, l'éclairement parvenant au point  $M$  :  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2(p\pi)$  est *maximum* lorsque  $p \in \mathbb{Z}$ .

Enfin, la définition de  $p$  conduit à :

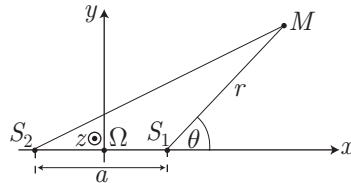
$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} \Rightarrow S_2M - S_1M = p\lambda_0 \text{ où } p \in \mathbb{Z}$$

Les points  $M$  d'une frange claire (pour lesquels  $\mathcal{E}$  est *maximum*) ayant le même ordre d'interférence  $p$  sont donc caractérisés par :

$$S_2M - S_1M = \alpha = \text{cte} \quad (\alpha = p\lambda_0) \quad (77)$$

2. (a) Soient  $S_1$  et  $S_2$  les points d'un axe  $(\Omega x)$  tels que  $S_1 S_2 = a$  et soit  $M$  un point de l'espace euclidien tel que :

$$S_1 M = r \text{ et } (\overrightarrow{\Omega S_1}, \overrightarrow{S_1 M}) = \theta$$



Cherchons l'ensemble des points  $M$  solutions de l'équation (77), en distinguant deux cas :

- Si  $\alpha = 0$ , cette équation devient :

$$S_2 M - S_1 M = \alpha = 0 \Rightarrow S_2 M = S_1 M$$

ce qui montre que les points  $M$  appartiennent à la médiatrice  $(\Omega y)$  du segment  $[S_1 S_2]$  :

$$M \in (\Omega y) \text{ pour } \alpha = 0$$

- Si  $\alpha \neq 0$ , évaluons les vecteurs :

$$\begin{cases} \overrightarrow{S_2 M} - \overrightarrow{S_1 M} = \overrightarrow{S_2 S_1} \\ \overrightarrow{S_2 M} + \overrightarrow{S_1 M} = \overrightarrow{S_2 \Omega} + \overrightarrow{\Omega M} + \overrightarrow{S_1 \Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = 2\overrightarrow{\Omega M} \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} (S_2 M)^2 - (S_1 M)^2 &= (\overrightarrow{S_2 M} - \overrightarrow{S_1 M}) \cdot (\overrightarrow{S_2 M} + \overrightarrow{S_1 M}) \\ &= \overrightarrow{S_2 S_1} \cdot 2\overrightarrow{\Omega M} = 2\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot (\overrightarrow{\Omega S_1} + \overrightarrow{S_1 M}) \\ &= 2(\overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{\Omega S_1} + \overrightarrow{S_2 S_1} \cdot \overrightarrow{S_1 M}) \\ &= 2 \times \left( a \times \frac{a}{2} + a \times r \times \cos \theta \right) \end{aligned}$$

soit encore :

$$(S_2 M)^2 - (S_1 M)^2 = a^2 + 2ar \cos \theta \quad (78)$$

Quant à l'équation (77), elle fournit :

$$\begin{aligned} S_2 M - S_1 M = \alpha &\Rightarrow S_2 M = \alpha + S_1 M \\ &\Rightarrow (S_2 M)^2 = \alpha^2 + 2\alpha S_1 M + (S_1 M)^2 \\ &\Rightarrow (S_2 M)^2 - (S_1 M)^2 = \alpha^2 + 2\alpha r \text{ car } S_1 M = r \end{aligned}$$

De l'identification avec l'équation (78), il ressort que :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 2\alpha r &= a^2 + 2ar \cos \theta \Rightarrow r(2\alpha - 2a \cos \theta) = a^2 - \alpha^2 \\ &\Rightarrow r = \frac{a^2 - \alpha^2}{2\alpha - 2a \cos \theta} \\ &\Rightarrow r = \frac{\frac{a^2 - \alpha^2}{2\alpha}}{1 - \frac{a}{\alpha} \cos \theta} \end{aligned}$$

ce qui suffit à montrer que, pour  $\alpha \neq 0$ , les points  $M$  sont solutions de l'équation (77) définissent une conique d'équation polaire :

$$r = \frac{\kappa}{1 - e \cos \theta}$$

où le paramètre  $\kappa$  et l'excentricité  $e$  sont directement calculables à partir de  $\alpha = p\lambda_0$  :

$$\kappa = \frac{a^2 - \alpha^2}{2\alpha} = \frac{a^2 - p^2\lambda_0^2}{2p\lambda_0} \text{ et } e = \frac{a}{\alpha} = \frac{a}{p\lambda_0}$$

(b) L'hypothèse selon laquelle  $a \gg \lambda_0$  permet de poser, d'une part :

$$\kappa = \frac{a^2 - p^2\lambda_0^2}{2p\lambda_0} \simeq \frac{a^2}{2p\lambda_0}$$

et d'autre part :

$$|e| = \left| \frac{a}{p\lambda_0} \right| > 1$$

Par conséquent, la conique est une hyperbole. Intéressons-nous, dans un premier temps, aux valeurs de  $p$  positives, avec :

$$r = \frac{a^2 - p^2\lambda_0^2}{2p\lambda_0 - 2a \cos \theta}$$

L'asymptote d'une telle courbe polaire est caractérisée par l'angle  $\theta_\infty$  qui fait tendre  $r$  vers l'infini, c'est-à-dire tel que :

$$2p\lambda_0 - 2a \cos \theta_\infty = 0 \Rightarrow \cos \theta_\infty = \frac{p\lambda_0}{a}$$

La condition  $\lambda_0 \ll a$  révèle que  $\cos \theta_\infty$  est voisin de zéro et donc que :

$$\theta_\infty \simeq \frac{\pi}{2}$$

D'autre part,  $\cos \theta_\infty = \frac{p\lambda_0}{a}$  est une fonction croissante de  $p$ , ce qui signifie que  $\theta_\infty$  décroît avec  $p$  (l'asymptote se rapproche de l'axe  $(\Omega x)$  lorsque  $p$  augmente). De plus,  $r$  devient *minimum* lorsque son dénominateur est *maximum*, c'est-à-dire lorsque  $\cos \theta = -1$  (ce qui signifie également que les points  $M_p$  correspondants se trouvent à gauche de  $S_1$  car  $\theta = \pi$ ). La valeur minimale de  $r_p$  vaut

alors :

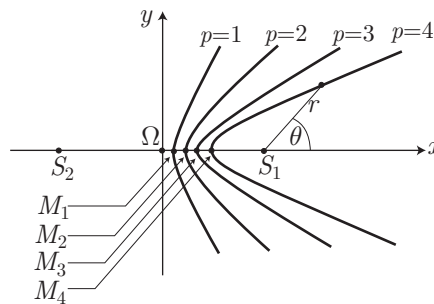
$$r_p = \frac{a^2 - p^2 \lambda_0^2}{2p\lambda_0 + 2a}$$

D'une part :

$$p\lambda_0 \ll a \Rightarrow r_p \simeq \frac{a^2}{2a} = \frac{a}{2}$$

révèle que les points  $M_p$  sont proches de l'axe ( $\Omega y$ ) et d'autre part la fonction  $r_p$  décroît lorsque  $p$  augmente, ce qui signifie aussi que les points  $M_p$  se rapprochent de  $S_1$  lorsque  $p$  augmente.

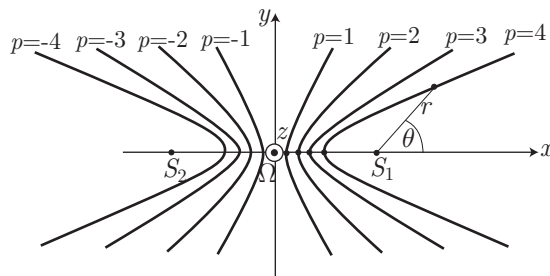
Cette étude permet de tracer des franges brillantes pour quelques valeurs de l'ordre d'interférence  $p$  :



Lorsque  $p$  prend des valeurs négatives,  $S_2M - S_1M = p\lambda_0$  s'écrit aussi :

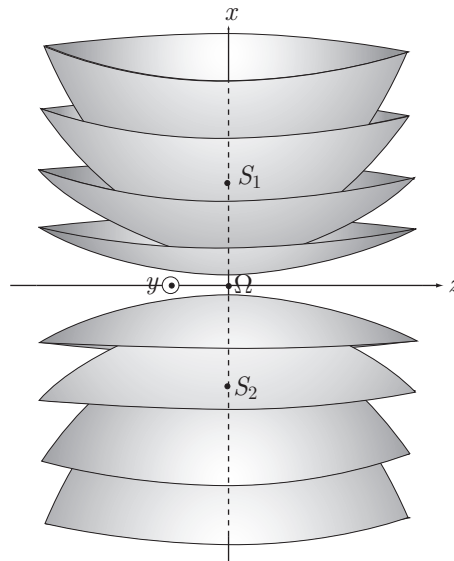
$$S_1M - S_2M = |p| \lambda_0$$

ce qui signifie que les rôles de  $S_1$  et de  $S_2$  sont permutés de sorte que les franges claires correspondant à  $p < 0$  sont symétriques des précédentes par rapport à ( $\Omega y$ ). Enfin, rappelons que l'axe ( $\Omega y$ ) est une frange claire associée à  $p = 0$  :

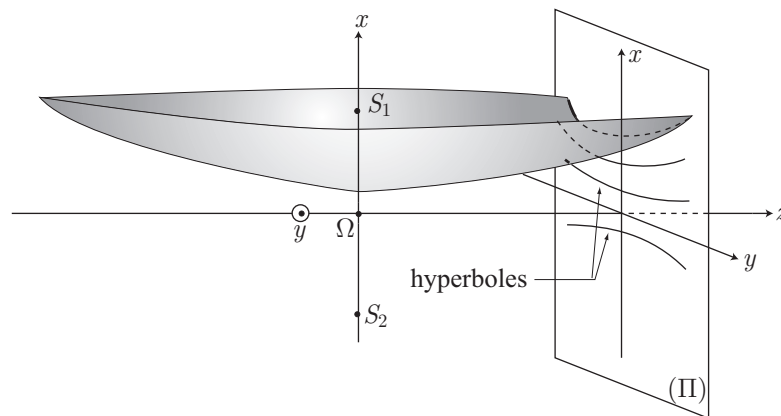


Compte tenu de la symétrie imposée par  $S_1$  et  $S_2$ , les courbes précédentes ne sont pas modifiées lors d'une rotation des axes ( $\Omega y$ ) et ( $\Omega z$ ) autour de ( $\Omega x$ ). C'est pourquoi, dans l'espace, les franges claires sont des hyperboloïdes de révolution autour de l'axe ( $\Omega x$ ) :

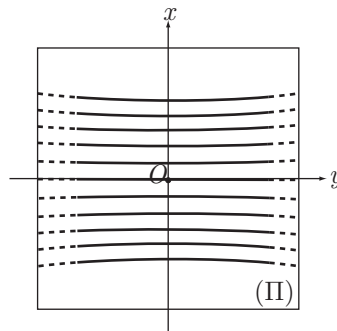
**CORRIGÉS**



(c) L'intersection de ces surfaces avec un plan  $(\Pi)$  parallèle à  $(\Omega xy)$  génère alors des hyperboles :



Notamment, pour les faibles valeurs de  $x$  et de  $y$ , ces hyperboles se confondent avec des segments de droite sur le plan  $(\Pi)$  :





C'est pourquoi, sur l'écran, apparaissent des franges brillantes (et des franges sombres) parallèles les unes aux autres.

### ● 110 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

1. Un des rayons issu de  $L$  (noté  $\mathcal{R}$ ) arrive sur la séparatrice en un point  $C$  où il se dédouble en :

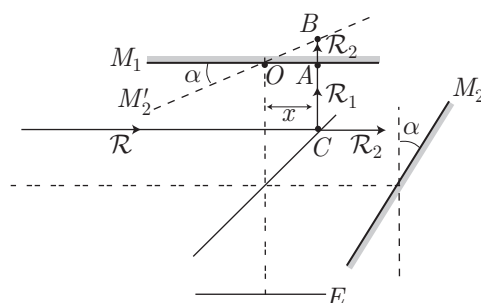
- un rayon  $\mathcal{R}_1$  réfléchi vers un point  $A$  du miroir  $M_1$  ; la réflexion en  $C$  provoque un déphasage de  $\pi$ . Ce rayon arrive ainsi en  $A$  avec une phase :

$$\phi_1 = \phi_C + \pi + \frac{2\pi}{\lambda_0} CA$$

où  $\phi_C$  désigne la phase de  $\mathcal{R}$  en  $C$  et  $\lambda_0$  est la longueur d'onde du rayonnement lumineux.

- un rayon  $\mathcal{R}_2$  qui est directement transmis vers  $M_2$ . Pour ce rayon tout se passe comme s'il était réfléchi, sans déphasage, de  $C$  vers l'image  $M'_2$  de  $M_2$  avec la séparatrice. Aussi, ce rayon arrive une première fois en  $A$  avec une phase  $\phi'_2 = \phi_C + \frac{2\pi}{\lambda_0} CA$ , puis se réfléchit en un point  $B$  de  $M'_2$  et revient<sup>3</sup> en  $A$  avec une phase :

$$\phi_2 = \phi_C + \frac{2\pi}{\lambda_0} CA + \frac{2\pi}{\lambda_0} \times 2\overline{AB}$$



Ce faisant,  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  se retrouvent en  $C$  avec les phases respectives :

$$\phi_{1C} = \phi_C + \pi + 2 \times \frac{2\pi}{\lambda_0} CA \text{ et } \phi_{2C} = \phi_C + 2 \times \frac{2\pi}{\lambda_0} CA + \frac{2\pi}{\lambda_0} \times 2\overline{AB}$$

c'est-à-dire, avec un déphasage :

$$\Delta\phi = \phi_{2C} - \phi_{1C} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times 2\overline{AB} - \pi$$

Ce déphasage provoque, en  $C$ , des interférences ainsi localisées sur la séparatrice. Pour observer la figure d'interférence, il suffit d'utiliser un écran  $E$  parallèle à  $M_1$  et situé de l'autre côté de la séparatrice.

<sup>3</sup>Le rayon  $\mathcal{R}_2$  se réfléchit sur lui-même à condition que la valeur de  $\alpha$  soit assez petite pour justifier cette approximation.

2. Soit  $x$  la valeur algébrique  $\overline{OA}$ , telle que :

$$\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AB}}{x} \Rightarrow \overline{AB} = x\alpha \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \times 2\alpha x - \pi$$

Aussi, l'éclairement varie en  $E$  selon la loi :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 [1 + \cos(\Delta\phi)]$$

Des franges sombres apparaissent alors aux abscisses  $x_n$  telles que :

$$\Delta\phi = (2n - 1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

soit encore :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \times 2\alpha x_n - \pi = 2n\pi - \pi \Rightarrow x_n = n \times \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

L'interfrange  $i$  vaut par conséquent :

$$i = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

## ● 111 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

1. Les rayons, notés  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$ , qui se réfléchissent respectivement sur  $M_1$  et  $M_2$ , ont pour chemins optiques :

$$(AB_1D) = (AB_1) + (B_1A) + (AD) = 2AB_1 + (AD)$$

et :

$$\begin{aligned} (AB_2D) &= 2[(AP) + (PQ) + (QB_2)] + (AD) \\ &= 2[AP + QB_2] + 2ne + (AD) \text{ car } (PQ) = ne \end{aligned}$$

en notant  $P$  et  $Q$  les points d'intersection de  $AB_2$  avec la cuve. En outre :

$$\begin{aligned} AB_2 &= AP + e + QB_2 \Rightarrow AP + QB_2 = AB_2 - e \\ \Rightarrow (AB_2D) &= 2AB_2 + 2(n-1)e + (AD) \end{aligned}$$

La différence de ces chemins optiques vaut alors :

$$\delta = (AB_2D) - (AB_1D) = 2(AB_2 - AB_1) + 2(n-1)e$$

Or, lorsque le vide est fait dans la cuve ( $n = 1$ ), l'énoncé précise que  $\delta = 0$ , c'est-à-dire :

$$0 = 2(AB_2 - AB_1) \Rightarrow \delta = 2(n-1)e$$

Ce faisant, l'ordre d'interférence en  $D$  est défini par :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2(n-1)e}{\lambda_0}$$

2. Lorsque  $P = 0$ , le *maximum* d'intensité apparaît en  $D$ , lié à l'ordre d'interférence  $p = 0$ . Le *maximum* d'intensité suivant correspond donc à l'ordre d'interférence  $p = 1$ , de même que le  $N^{\text{ème}}$  *maximum* d'intensité est associé à l'ordre d'interférence  $p = N$ , c'est-à-dire :

$$N = \frac{2(n-1)e}{\lambda_0}$$

3. La loi de Gladstone :

$$\frac{n-1}{\rho} = C \Rightarrow n-1 = \rho C$$

permet d'exprimer le résultat précédent sous une autre forme :

$$N = \frac{2\rho C e}{\lambda_0}$$

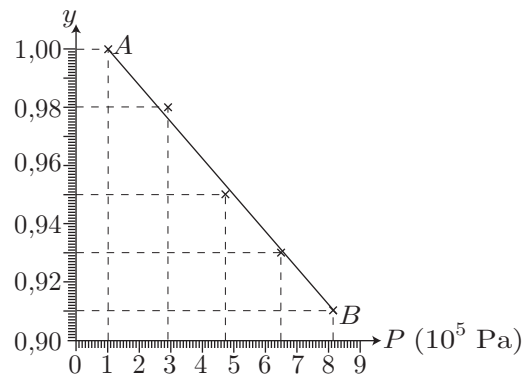
4. Cette identité montre que :

$$N_0 = \frac{2\rho_0 C e}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{N_0}{N} \Rightarrow y = \frac{P}{P_0} \times \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{P}{P_0} \times \frac{N_0}{N}$$

5. En choisissant  $P_0 = 10^5$  Pa et  $N_0 = 100$ , les valeurs prises par  $y$  se déduisent du résultat précédent :

$P$ ( $10^5$ Pa)	$N$	$y$
1,00	100	1,00
2,93	300	0,98
4,76	500	0,95
6,48	700	0,93
8,15	900	0,91

6. Le graphe de  $y = f(P)$  :



révèle l'existence de deux coefficients numériques  $a$  et  $b$  tels que :  $y = a - bP$ . En admettant que les points  $A$  et  $B$  appartiennent à cette droite, leurs coordonnées doivent vérifier :

$$\begin{cases} y_A = a - bP_A \\ y_B = a - bP_B \end{cases} \Rightarrow y_A - y_B = b(P_B - P_A) \Rightarrow b = \frac{y_A - y_B}{P_B - P_A}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1,00 - 0,91}{8,15 \cdot 10^5 - 10^5} \Rightarrow b = 1,26 \cdot 10^{-7} \text{ Pa}^{-1}$$

d'où l'on tire :

$$a = y_A + bP_A = 1 + 1,26 \cdot 10^{-7} \times 10^5 \Rightarrow a = 1,013$$

7. Considérons une masse  $m$  de gaz, de masse molaire  $M$  et qui occupe un volume  $V$ . Sa masse volumique est définie par :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{n}{V} \times M \Rightarrow \frac{n}{V} = \frac{\rho}{M}$$

si  $n$  désigne le nombre de moles de gaz contenues dans le volume  $V$ .

Si, de surcroît, ce gaz est parfait, ses paramètres d'état sont soumis à l'équation :

$$PV = nRT \Rightarrow P = \frac{n}{V} RT = \rho \times \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{PM}{RT} \Rightarrow y = \frac{\rho_0 RT}{MP_0}$$

Aussi, l'isotherme  $y = f(P)$  devrait être horizontale ( $M$ ,  $R$  et  $T$  demeurant invariables). La courbe précédente ( $y = f(P)$  décroissante) ne peut donc pas correspondre à celle d'un gaz parfait.

8. La définition de la masse volumique du gaz :  $\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho}$ , associée à celle du coefficient de compressibilité isotherme permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \chi_T &= -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = -\frac{\rho}{m} \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{m}{\rho} \right)_T = -\frac{\rho}{m} \times \left[ -\frac{m}{\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T \right] \\ &\Rightarrow \chi_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T = \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial P} \right)_T \end{aligned}$$

9. Étant donné que  $y = a - bP$  et compte tenu de l'expression de  $y$  :

$$\begin{aligned} y &= \frac{P}{P_0} \times \frac{\rho_0}{\rho} = a - bP \Rightarrow \rho = \frac{P}{a - bP} \times \frac{\rho_0}{P_0} \\ &\Rightarrow \ln \rho = \ln P - \ln(a - bP) + \ln \left( \frac{\rho_0}{P_0} \right) \\ &\Rightarrow \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial P} \right)_T = \frac{1}{P} + \frac{b}{a - bP} = \frac{a}{P(a - bP)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\chi_T = \frac{a}{Py}$$

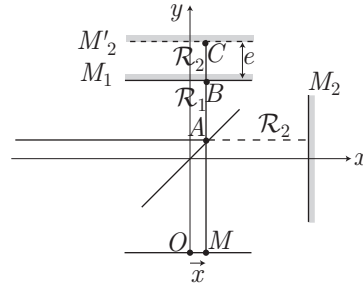
Appliqué au point  $B(P = 8,15 \cdot 10^5 \text{ Pa}; y = 0,91)$ , ce résultat fournit :

$$\chi_T = \frac{1,013}{8,15 \cdot 10^5 \times 0,91} = 1,37 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$$

## ● 112 ————— Banque de la filière PT

1. (a) Soit  $A$  le point d'incidence du rayon lumineux sur la séparatrice. Ce rayon se dédouble en :
- un rayon  $\mathcal{R}_1$ , réfléchi vers  $M_1$  en  $B$ , où il est à nouveau réfléchi en direction d'un point  $M$  de l'écran ; ce rayon subit un déphasage de  $\pi$  lors de sa réflexion en  $A$  ;

- un rayon  $\mathcal{R}_2$ , transmis par la séparatrice vers  $M_2$ . Tout se passe comme si  $\mathcal{R}_2$  était réfléchi en  $A$ , sans déphasage, vers un point  $C$  de  $M'_2$ , d'où il est réfléchi en direction de  $M$ .



On note  $O$  le projeté orthogonal du centre de la séparatrice sur l'écran et  $\phi_X$  la phase du rayonnement en un point  $X$ . Il est ainsi possible de calculer les phases  $\phi_1$  et  $\phi_2$  des rayons  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  en  $M$ , lorsque ceux-ci arrivent en  $A$  avec la même phase  $\phi_A$  :

$$\phi_1 = \phi_A + \pi + \frac{2\pi}{\lambda} (AB + BM) \text{ et } \phi_2 = \phi_A + \frac{2\pi}{\lambda} (AB + 2e + BM)$$

Le déphasage entre  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  en  $M$  vaut alors :

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \frac{4\pi}{\lambda} e - \pi$$

Soient  $\underline{s}_1 = s_0 e^{j\phi_1} e^{-j\omega t}$  et  $\underline{s}_2 = s_0 e^{j\phi_2} e^{-j\omega t}$  les amplitudes complexes des signaux qui parviennent en  $M$ . Lorsqu'un seul des ces signaux arrive en  $M$ , il y produit un éclaircissement  $\varepsilon_0$  proportionnel à  $\underline{s}_i \underline{s}_i^*$  :

$$\varepsilon_0 = K \times \underline{s}_i \underline{s}_i^* = K s_0^2$$

En revanche, lorsque ces deux signaux parviennent en  $M$ , leur résultante :

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = s_0 (e^{j\phi_1} + e^{j\phi_2}) e^{-j\omega t}$$

y produit l'éclaircissement :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= K \times \underline{s} \underline{s}^* = K s_0^2 (e^{j\phi_1} + e^{j\phi_2}) (e^{-j\phi_1} + e^{-j\phi_2}) \\ &= K s_0^2 (2 + e^{j\Delta\phi} + e^{-j\Delta\phi}) \end{aligned}$$

soit encore :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 [1 + \cos(\Delta\phi)] \text{ avec } \Delta\phi = \frac{4\pi e}{\lambda} - \pi \quad (79)$$

Par suite, si  $e$  est indépendant de  $x$ ,  $\Delta\phi$  l'est également, de même que  $\varepsilon$  :

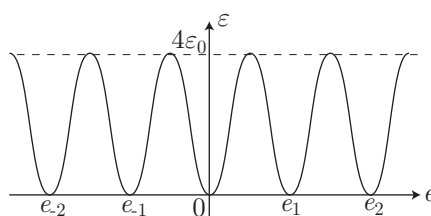
l'écran est uniformément éclairé.

- (b) Compte tenu du résultat (79), lorsque  $e = 0$ ,  $\Delta\phi = -\pi$ , de sorte que :

$$\varepsilon = 0 \text{ pour } e = 0 \forall \lambda$$

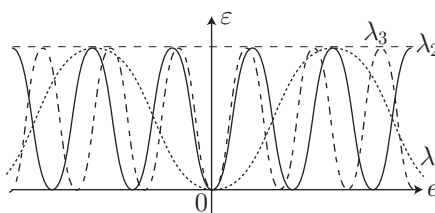
En outre, l'éclairement  $\varepsilon$  s'annule également pour d'autres valeurs  $e_n$  de  $e$ , telles que :

$$\Delta\phi = (2n - 1)\pi \Rightarrow \frac{4\pi e_n}{\lambda} - \pi = 2n\pi - \pi \Rightarrow e_n = \frac{n\lambda}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$$



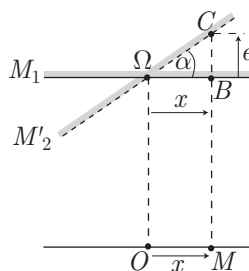
La position correspondant à  $e = 0$  provoque l'annulation de  $\varepsilon$ . Cependant cette extinction est également obtenue pour d'autres valeurs de  $e$ . Aussi, l'annulation de  $\varepsilon$  ne prouve pas que le contact optique soit atteint.

En revanche, l'utilisation de la lumière blanche provoque, sur l'écran, des figures d'interférence indépendantes, correspondant à toutes les longueurs d'onde de cette lumière :



Quelle que soit la valeur non nulle de  $e$ , il existe au moins une longueur d'onde telle que  $\varepsilon \neq 0$ . Au contraire, au contact optique ( $e = 0$ ),  $\varepsilon = 0$  pour toute valeur de  $\lambda$  (car  $\Delta\phi = \frac{4\pi e}{\lambda} - \pi = -\pi \forall \lambda$ ). Aussi, la seule position permettant l'extinction sur l'écran est celle qui correspond à  $e = 0$ .

2. On admet, désormais, que  $M'_2$  est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à  $M_1$  :



Soit  $\Omega$  le projeté orthogonal de  $O$  sur  $M_1$ , tel que  $\Omega B = x$ . Maintenant, la distance algébrique  $e$  dépend de  $x$  :

$$\tan \alpha = \frac{e}{x} \simeq \alpha \Rightarrow e \simeq \alpha x$$

Conformément au résultat (79), le point  $M$  reçoit l'éclairement :

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 [1 + \cos(\Delta\phi)] \text{ avec } \Delta\phi = \frac{4\pi e}{\lambda} - \pi = \frac{4\pi\alpha x}{\lambda} - \pi$$

qui s'annule pour les valeurs  $x_n$  de  $x$  telles que :

$$\Delta\phi = 2n\pi - \pi \Rightarrow \frac{4\pi\alpha x_n}{\lambda} - \pi = 2n\pi - \pi \Rightarrow x_n = n \times \frac{\lambda}{2\alpha} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

C'est pourquoi des franges rectilignes sombres se forment sur l'écran, avec pour interfrange :

$$i = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

3. (a) La sphère  $M'$  a pour centre le point  $C(0, e_0 + R)$  en conséquence de quoi les coordonnées  $x = r$  et  $y = e$  des points  $P$  de la trace circulaire de  $M'$  dans le plan  $(Ox, Oy)$  vérifient :

$$x^2 + (y - e_0 - R)^2 = R^2 \Rightarrow r^2 + (e - e_0 - R)^2 = R^2 \Rightarrow e = e_0 + R \pm \sqrt{R^2 - r^2}$$

En outre, lorsque  $r = 0$ , la condition  $e = e_0$  impose :  $e = e_0 + R - \sqrt{R^2 - r^2}$ .

Du reste, l'inégalité :  $r \ll R$  suggère l'emploi d'un développement limité :

$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 - r^2} &= R \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{1/2} \simeq R \left(1 - \frac{r^2}{2R^2}\right) \text{ car } \frac{r^2}{R^2} \ll 1 \\ &= R - \frac{r^2}{2R} \end{aligned}$$

Finalement :

$$e = e_0 + \frac{r^2}{2R}$$

- (b) Les calculs des parties 1. et 2. ont montré que la différence de marche  $\delta$  en un point  $P$  situé à une distance  $r$  de l'axe  $y'y$  vaut :

$$\delta = 2e = 2e_0 + \frac{r^2}{R}$$

Ce faisant, le déphasage entre les rayons qui interfèrent s'écrit :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \delta - \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \left(2e_0 + \frac{r^2}{R}\right) - \pi$$

Ce déphasage demeure constant lorsque  $r$  est constant. C'est pourquoi les franges d'interférence sont des cercles de rayon  $r$ .

- (c) Pour un point situé sur un cercle de rayon  $r$  de la figure d'interférence, l'ordre  $p$  est défini par :

$$\begin{aligned} \Delta\phi = p \times 2\pi &\Rightarrow p \times 2\pi = 2\pi \left(\frac{2e_0}{\lambda} + \frac{r^2}{\lambda R}\right) - \pi \\ &\Rightarrow p = \frac{2e_0}{\lambda} + \frac{r^2}{\lambda R} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Au centre de la figure d'interférence,  $r = 0$  affecte à  $p$  la valeur :

$$p_0 = \frac{2e_0}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

De même, le premier anneau brillant, de rayon  $R_1$ , a pour ordre d'interférence :

$$p_1 = \frac{2e_0}{\lambda} - \frac{1}{2} + \frac{R_1^2}{\lambda R}$$

tandis qu'au  $k^{\text{ème}}$  anneau brillant, de rayon  $R_k$ , est associé un ordre  $p_k$  qui représente le  $k^{\text{ème}}$  nombre entier après  $p_1$  :

$$p_k = p_1 + (k - 1) \text{ avec } p_k = \frac{2e_0}{\lambda} - \frac{1}{2} + \frac{R_k^2}{\lambda R} \quad (80)$$

C'est pourquoi :

$$\frac{2e_0}{\lambda} - \frac{1}{2} + \frac{R_k^2}{\lambda R} = \frac{2e_0}{\lambda} - \frac{1}{2} + \frac{R_1^2}{\lambda R} + k - 1 \Rightarrow R_k = \sqrt{R_1^2 + \lambda R (k - 1)}$$

(d) Un anneau brillant, de rayon  $R_k$ , présente un ordre :

$$p_k = \frac{R_k^2}{\lambda R} + \frac{2e_0}{\lambda} - \frac{1}{2}$$

qui adopte une valeur entière fixée. Par suite,  $\frac{R_k^2}{\lambda R} + \frac{2e_0}{\lambda} - \frac{1}{2}$  doit demeurer constant au cours du déplacement de  $M_2$  vers la séparatrice, c'est-à-dire lorsque  $e_0$  décroît. Ceci n'est possible que si le rapport  $\frac{R_k^2}{\lambda R}$  croît. Deux cas se présentent alors :

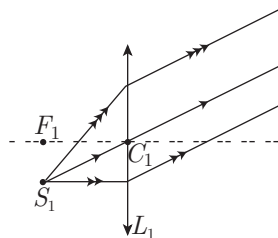
- un miroir convexe est caractérisé par  $R > 0$ . Donc  $R_k$  doit croître ;
- un miroir concave est caractérisé par  $R < 0$ . Aussi,  $R_k$  doit décroître.

En conclusion :

si le miroir est concave, les anneaux brillants s'approchent du centre de la figure d'interférence, tandis qu'ils s'en éloignent lorsque le miroir est convexe.

### ● 113 ————— Concours Commun Polytechnique

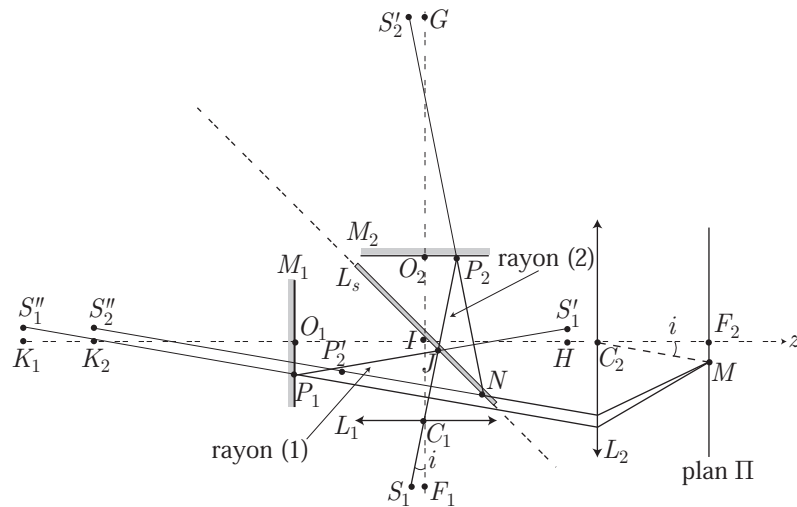
- (a) Le rayon  $S_1C_1$  passe par le centre optique de la lentille  $L_1$ , en conséquence de quoi il n'est pas dévié. Quant aux autres rayons issus de  $S_1$ , situé dans le plan focal de  $L_1$ , ils émergent de  $L_1$  parallèlement les uns aux autres, c'est-à-dire parallèlement à  $S_1C_1$  :





(b) Soient :

- $G$  l'image de  $F_1$  donnée par  $M_2$  et  $H$  celle de  $F_1$  donnée par  $L_S$  ;
- $K_2$  l'image de  $G$  donnée par  $L_S$
- $S'_2$  l'image de  $S_1$  par  $M_2$  ; le miroir  $M_2$  étant aplanétique,  $GS'_2$  a la même direction et la même taille que  $F_1S_1$ .
- $S''_2$  l'image de  $S'_2$  par  $L_S$  ; pour les mêmes raisons,  $K_2S''_2 = GS'_2$  et  $K_2S''_2 \perp (O_1z)$ .
- $S'_1$  l'image de  $S_1$  par  $L_S$ , telle que :  $HS'_1 = F_1S_1$  ;
- $S''_1$  l'image de  $S'_1$  par  $M_1$  et  $K_1$  celle de  $H$  par  $M_1$ .

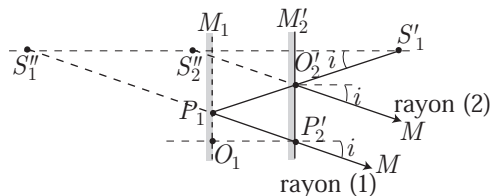


Le rayon  $S_1C_1$  rencontre  $L_S$  en  $J$  où il se dédouble en :

- un rayon (1), réfléchi vers  $M_1$  comme s'il était issu de  $S'_1$ , puis se dirigeant vers  $L_2$  selon la direction de  $S''_1P_1$  ;
- un rayon (2), transmis par  $L_S$  jusqu'au point  $P_2$  de  $M_2$ , d'où il est réfléchi comme s'il provenait de  $S'_2$ . Ce rayon rencontre à nouveau  $L_S$  en  $N$  et s'y réfléchit selon la direction de  $S''_2N$ .

Ces deux rayons arrivent sur  $L_2$  avec la même incidence  $i$  qu'aurait pu avoir un rayon  $C_2M$  en passant par  $C_2$ . Par conséquent, ces deux rayons se rejoignent dans le plan focal image de  $L_2$  au point  $M$ .

(c) Soient  $M'_2$  l'image de  $M_2$  par  $L_S$  et  $P'_2$  l'image de  $P_2$  par  $L_S$ . Considérons le montage suivant, dans lequel  $M'_2$  est une lame semi-réfléchissante qui se comporte comme si elle était éclairée directement par  $S'_1$  :



**CORRIGÉS**

Le rayon qui arrive sur  $M'_2$ , sous l'incidence  $i$  se dédouble en :

- un rayon (1) qui se réfléchit sur  $M_1$  en  $P_1$ , comme s'il provenait de  $S'_1$  ; son chemin optique vaut :

$$(S_1M)_1 = S'_1P_1 + (P_1M) = S''_1P_1 + (P_1M) = -(S''_1P_1) + (P_1M) \quad (81)$$

car le rayon  $S''_1P_1$  est virtuel.

- un rayon (2) qui se réfléchit sur  $M'_2$  en  $P'_2$ , et dont le chemin optique vaut :

$$(S_1M)_2 = S'_1P'_2 + (P'_2M) = S''_2P'_2 + (P'_2M) = -(S''_2P'_2) + (P'_2M) \quad (82)$$

Quant au montage d'origine, il confère aux rayons (1) et (2) les chemins optiques respectifs :

$$\begin{aligned} (S_1M)_1 &= S_1J + JP_1 + (P_1M) = \underbrace{S'_1J + JP_1}_{S'_1P_1=S''_1P_1} + (P_1M) \text{ car } S_1J = S'_1J \\ &= S''_1P_1 + (P_1M) = -(S''_1P_1) + (P_1M) \text{ puisque } S''_1P_1 \text{ est virtuel} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} (S_1M)_2 &= S_1P_2 + P_2N + (NM) = S'_2P_2 + P_2N + (NM) \text{ car } S_1P_2 = S'_2P_2 \\ &= S''_2P'_2 + \underbrace{P'_2N + (NM)}_{(P'_2M)} \text{ avec } \begin{cases} S'_2P_2 = S''_2P'_2 \\ P_2N = P'_2N \end{cases} \\ &= -(S''_2P'_2) + (P'_2M) \end{aligned}$$

La comparaison des expressions de  $(S_1M)_1$  et  $(S_2M)_2$  avec les résultats (81) et (82) montre que les deux dispositifs sont équivalents au regard des chemins optiques. Or, puisque  $M'_2$  est l'image de  $M_2$  par  $L_S$ , il s'ensuit que la distance  $IO_2$  vaut la distance  $IO'_2$  (où  $O'_2$  désigne l'image de  $O_2$  par  $L_2$ ), de sorte que la distance séparant  $M_1$  de  $M'_2$  vaut :

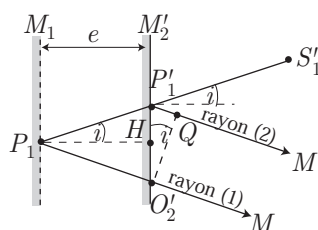
$$e = IO_1 - IO_2 = IO'_1 - IO'_2$$

2. Les rayons incidents arrivent sur  $M_1$  et  $M'_2$  avec la même incidence  $i$ , en conséquence de quoi ils sont réfléchis dans la même direction. La lentille  $L_2$  reçoit ainsi deux rayons parallèles, d'incidence  $i$ , qui convergent vers un point  $M$  du plan focal image de  $L_2$ . Un rayon qui passerait par  $C_2$  avec la même incidence ne serait pas dévié et rencontrerait également  $\Pi$  en  $M$ . C'est pourquoi :

$$\tan i = \frac{F_2M}{C_2F_2} = \frac{F_2M}{f_2} \Rightarrow F_2M = f_2 \tan i \quad (83)$$

Ce faisant, les autres rayons issus de  $S_1$  convergent également en  $M$ , étant donné qu'ils émergent de  $L_1$  parallèlement les uns aux autres (et arrivent donc sur  $M'_2$  sous la même incidence  $i$ ).

3. Soit  $Q$  le projeté orthogonal de  $O'_2$  sur le rayon (2) et  $H$  celui de  $P_1$  sur  $M'_2$  :



Le rayon incident se sépare en deux rayons qui parviennent en  $M$ . Or, puisque les rayons (1) et (2) convergent en  $M$ , les chemins optiques ( $O_2M$ ) et ( $QM$ ) sont égaux. En outre, les chemins optiques des rayons (1) et (2) valent :

$$(S_1M)_1 = S_1P_1 + P_1O_2 + (O_2M) \text{ et } (S_1M)_2 = S_1P_1' + P_1'Q + (QM)$$

et leur différence s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \Delta &= (S_1M)_1 - (S_1M)_2 = S_1P_1 - S_1P_1' + P_1O_2 - P_1'Q \\ &= P_1P_1' + P_1O_2 - P_1'Q = 2P_1P_1' - P_1'Q \text{ car } P_1P_1' = P_1O_2 \end{aligned}$$

Du reste :

$$\cos i = \frac{HP_1}{P_1P_1'} = \frac{e}{P_1P_1'} \Rightarrow P_1P_1' = \frac{e}{\cos i}$$

et :

$$\sin i = \frac{P_1'Q}{O_2P_1'} = \frac{P_1'Q}{2HP_1'} \Rightarrow P_1'Q = 2HP_1' \sin i$$

avec :

$$\tan i = \frac{HP_1'}{HP_1} = \frac{HP_1'}{e} \Rightarrow HP_1' = e \tan i \Rightarrow P_1'Q = 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i}$$

Par suite :

$$\Delta = \frac{2e}{\cos i} - 2e \frac{\sin^2 i}{\cos i} = 2e \times \frac{1 - \sin^2 i}{\cos i} = 2e \times \frac{\cos^2 i}{\cos i}$$

ce qui confirme que :

$$\Delta = 2e \cos i \quad (84)$$

Les franges d'interférence correspondent à des points d'égale valeur de  $\Delta$ , c'est-à-dire d'égale valeur de  $i$ . C'est pourquoi la figure d'interférence est composée de cercles brillants (et obscurs) centrés sur  $F_2$ .

4. (a) L'ordre d'interférence  $p$  est défini, en un point  $M$ , par la relation :

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta = p \times 2\pi$$

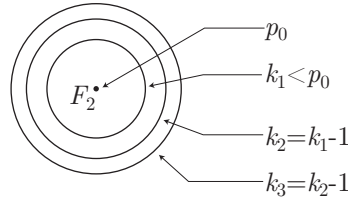
où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde de la lumière dans l'air (assimilé au vide). Par conséquent :

$$p = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{2e}{\lambda} \cos i \quad (85)$$

Notamment,  $F_2$  correspondant à  $i = 0$ , son ordre d'interférence vaut :

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda} \quad (86)$$

Conformément à la relation (85), lorsque  $i$  augmente,  $p$  diminue, ce qui signifie que l'ordre d'interférence diminue du centre  $F_2$  vers la périphérie :



- (b) Compte tenu de ce qui précède, le premier anneau brillant correspond à un ordre d'interférence  $k_1$  entier, mais inférieur ou égal à  $p_0$ . C'est pourquoi il existe un nombre  $\varepsilon \in [0, 1[$  tel que :

$$k_1 = p_0 - \varepsilon \Rightarrow p_0 = k_1 + \varepsilon$$

Par suite, le deuxième anneau brillant est caractérisé par l'entier  $k_2$  juste inférieur à  $k_1$  :  $k_2 = k_1 - 1$ , de même que le  $n^{\text{ème}}$  anneau brillant a pour ordre d'interférence :

$$k_n = k_1 - (n - 1) = k_1 - n + 1 \Rightarrow \underbrace{k_1 - n + 1}_{k_n} = p_0 - \varepsilon - n + 1$$

Il découle de la relation (85) que le  $n^{\text{ème}}$  anneau brillant présente un angle  $i_n$  tel que :

$$k_n = \frac{2e}{\lambda} \cos i_n \Rightarrow p_0 - \varepsilon - n + 1 = \frac{2e}{\lambda} \cos i_n \quad (87)$$

$$\Rightarrow p_0 - \varepsilon - n + 1 = p_0 \cos i_n \quad (88)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos i_n = \frac{1}{p_0} (n + \varepsilon - 1) \quad (89)$$

Enfin, l'emploi de  $L_1$  et  $L_2$  contraint à respecter les conditions de Gauss, selon lesquelles  $i_n$  est suffisamment petit pour justifier un développement limité :

$$\cos i_n \simeq 1 - \frac{i_n^2}{2} \Rightarrow i_n^2 = \frac{2}{p_0} (n + \varepsilon - 1) \Rightarrow i_n = \sqrt{\frac{2}{p_0} (n + \varepsilon - 1)}$$

De la relation (83), il découle que le  $n^{\text{ème}}$  anneau brillant a pour rayon :

$$r_n = f_2 \tan i_n \simeq f_2 \times i_n \Rightarrow r_n = f_2 \sqrt{\frac{2}{p_0} (n + \varepsilon - 1)} \quad (90)$$

- (c) Le résultat (86) permet de trouver la valeur numérique de  $p_0$  :

$$p_0 = \frac{2e}{\lambda} = \frac{2 \times 1,1 \cdot 10^{-3}}{546 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow p_0 = 4\,029,304$$

Par suite, le premier anneau brillant est associé à l'ordre d'interférence  $k_1$  entier, juste inférieur à  $p_0$  :

$$k_1 = 4029 \text{ et } \varepsilon = p_0 - k_1 = 0,304$$

De fait, le rayon  $r_1$  ( $n = 1$ ) du premier anneau brillant vaut :

$$\begin{aligned} r_1 &= f_2 \sqrt{\frac{2}{p_0}} \times \sqrt{1 + \varepsilon - 1} = f_2 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{p_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 0,304}{4029,304}} \\ \Rightarrow r_1 &= 0,0123 \text{ m} = 1,23 \text{ cm} \end{aligned}$$

tandis que celui du cinquième anneau brillant a pour valeur :

$$\begin{aligned} r_5 &= f_2 \sqrt{\frac{2}{p_0}} \times \sqrt{5 + \varepsilon - 1} = \sqrt{\frac{2}{4029,304}} \times (4 + 0,304) \\ \Rightarrow r_5 &= 0,0462 \text{ m} = 4,62 \text{ cm} \end{aligned}$$

Pour observer le cinquième anneau brillant, il est nécessaire que la source possède des points  $S_5$  situés à une distance  $a_5$  de  $F_1$  telle que :

$$\tan i_5 = \frac{F_1 S_5}{C_1 F_1} = \frac{a_5}{f_1} \Rightarrow a_5 = f_1 \tan i_5$$

où  $\tan i_5$  est issu du résultat (83) :

$$r_5 = f_2 \tan i_5 \Rightarrow \tan i_5 = \frac{r_5}{f_2} \Rightarrow a_5 = r_5 \times \frac{f_1}{f_2}$$

Aussi, la source doit présenter un rayon  $a_0$  au moins égal à  $a_5$ , c'est-à-dire :

$$a_0 = r_5 \times \frac{f_1}{f_2} = 4,62 \times \frac{0,1}{1} \Rightarrow a_0 = 4,6 \text{ mm}$$

5. (a) L'identité (87) :  $k_n = \frac{2e}{\lambda} \cos i_n$ , où  $k_n$  est une constante caractérisant l'anneau brillant associé à  $i_n = \frac{r_n}{f_2}$ , montre que, lorsque  $e$  diminue,  $\cos i_n$  augmente, c'est-à-dire  $i_n$  diminue, de même que  $r_n = f_2 i_n$  ; la diminution de la valeur de  $e$  provoque le rapprochement des anneaux brillants vers  $F_2$ .

Lorsque le premier anneau disparaît, l'entier  $k_1$  s'identifie à l'ordre d'interférence en  $F_2$  :

$$\begin{aligned} k_1 &= p_0 - \varepsilon = p_0 = \frac{2e}{\lambda} \text{ car } p = \frac{2e}{\lambda} \cos i \\ \Rightarrow e &= \frac{k_1 \lambda}{2} = \frac{4029 \times 546 \cdot 10^{-9}}{2} \\ \Rightarrow e &= 1,0999 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1,0999 \text{ mm} \end{aligned}$$

Le premier anneau brillant correspond au deuxième de la configuration précédente, auquel cas son ordre d'interférence vaut :

$$k'_1 = k_2 = k_1 - 1 = 4029 - 1 = 4028$$

D'après la relation (87) :

$$n + \varepsilon - 1 = p_0 - k_n$$

l'identité (90) devient :

$$r_n = f_2 \sqrt{\frac{2}{p_0}} \times \sqrt{p_0 - k_n} = f_2 \sqrt{2 \times \left(1 - \frac{k_n}{p_0}\right)}$$

Par conséquent, le rayon  $r'_1$ , associé à l'ordre d'interférence  $k_2 = 4028$ , prend la valeur :

$$\begin{aligned} r'_1 &= f_2 \sqrt{2 \times \left(1 - \frac{k_2}{p_0}\right)} = \sqrt{2 \times \left(1 - \frac{4028}{4029,304}\right)} \\ &\Rightarrow r'_1 = 0,0254 \text{ m} = 2,54 \text{ cm} \end{aligned}$$

(b) Au point  $M$ , l'éclairement est donné par la loi :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos^2 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \right) \text{ où } \mathcal{E}_0 = \text{cte}$$

dans laquelle  $\Delta$  est donné par le résultat (84) :

$$\Delta = 2e \cos i = 0 \text{ lorsque } e = 0$$

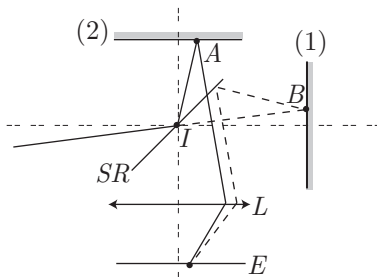
Par suite, lorsque  $e = 0$ ,  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$  quelle que soit la position du point  $M$  ; l'écran est uniformément éclairé.

## ● 114 ————— Concours Polytechnique

### I- Interférométrie

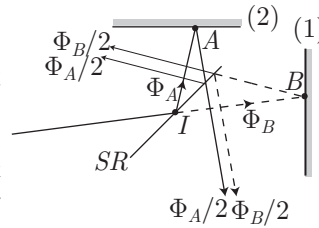
1. (a) La lame semi-réfléchissante permet de séparer un rayon incident en deux rayons :

le rayon  $IB$  qui traverse  $SR$  atteint le miroir (1) en  $B$ , d'où il est réfléchi vers  $SR$ . En revanche, le rayon  $IA$  est réfléchi par  $SR$  vers le miroir (2) qu'il atteint au point  $A$ . Les rayons issus de  $A$  et  $B$ , traités une deuxième fois par  $SR$ , arrivent sur la lentille  $L$  parallèlement l'un à l'autre. Aussi,  $L$  sert à former, dans son plan focal image, l'intersection de ces rayons.



(b) Soit  $\Phi_i$  le flux incident. On supposera que la lame semi-réfléchissante transmet la moitié de ce flux et en réfléchit l'autre moitié.

Ce faisant, les flux reçus aux points  $A$  et  $B$  valent  $\Phi_A = \frac{\Phi_i}{2}$  et  $\Phi_B = \frac{\Phi_i}{2}$ . Or, depuis le point  $B$ , le rayon lumineux atteint à nouveau  $SR$  avec le flux  $\Phi_B$ , dont la moitié seulement est réfléchi vers  $L$ . Il en va de même du rayon issu de  $A$ , qui arrive sur  $SR$  avec un flux  $\Phi_A$ , dont seule la moitié est transmise vers  $L$  par  $SR$ . Par suite  $L$  reçoit le flux :



$$\Phi_{\text{tot}} = \frac{\Phi_A}{2} + \frac{\Phi_B}{2} = \Phi_A \Rightarrow \Phi_{\text{tot}} = \frac{\Phi_i}{2}$$

ce qui montre qu'avec ce montage la moitié du flux incident est irrémédiablement perdue.

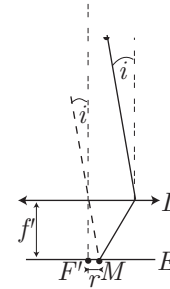
2. Un rayon qui parvient avec une incidence  $i$  dans l'interféromètre arrive également sur la lentille  $L$  avec une incidence  $i$ .

Aussi, ces rayons convergent en un point  $M$  de  $E$  tel que :

$$r = F'M = f' \tan i \Rightarrow r \simeq f' \times i$$

Soit  $\lambda_0$  la longueur d'onde associée à  $\sigma_0 = \frac{1}{\lambda_0}$ , à partir de laquelle est défini l'ordre d'interférence  $p$  d'une frange :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} \Rightarrow \delta = p\lambda_0 \Rightarrow D \cos i = p\lambda_0$$



c'est-à-dire, en supposant  $i$  très petit, de manière à respecter les conditions de Gauss :

$$\cos i \simeq 1 - \frac{i^2}{2} \Rightarrow p = \frac{D}{\lambda_0} \left(1 - \frac{i^2}{2}\right) = \frac{D}{\lambda_0} - \frac{D}{2\lambda_0} i^2 \quad (91)$$

La tache centrale étant brillante, son ordre d'interférence est entier et vérifie :

$$p_0 = \frac{D}{\lambda_0} \text{ car } i = 0 \text{ en } F'.$$

La relation (91) montre, du reste, que  $i$  (en donc  $r$ ) décroît avec  $p$ . Par conséquent, le premier anneau sombre correspond à l'ordre d'interférence  $p_{1/2}$ , demi-entier juste inférieur à  $p_0$  :

$$p_1 = p_0 - \frac{1}{2} = \frac{D}{\lambda_0} - \frac{1}{2}$$

soit, compte tenu du résultat (91) :

$$\frac{D}{\lambda_0} - \frac{D}{2\lambda_0} i_1^2 = \frac{D}{\lambda_0} - \frac{1}{2} \Rightarrow i_1 = \sqrt{\frac{\lambda_0}{D}} = \frac{1}{\sqrt{D\sigma_0}}$$

Aussi, le rayon du premier anneau sombre a pour expression :

$$r_1 = f' i_1 = \frac{f'}{\sqrt{D\sigma_0}}$$

3. (a) Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  les phases des rayons qui interfèrent en  $M$ . Ces rayons sont associés aux signaux :

$$s_1 = s_0 \cos(\phi_1 - \omega t) \text{ et } s_2 = s_0 \cos(\phi_2 - \omega t)$$

d'images complexes :

$$\underline{s}_1 = s_0 e^{j\phi_1} e^{-j\omega t} \text{ et } \underline{s}_2 = s_0 e^{j\phi_2} e^{-j\omega t}$$

Par suite, le point  $M$  reçoit un signal résultant :

$$\underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 = s_0 (e^{j\phi_1} + e^{j\phi_2}) e^{-j\omega t}$$

dont la valeur moyenne  $\langle s^2 \rangle$  est proportionnelle à l'intensité lumineuse en  $F'$  :

$$\begin{aligned} I \propto \underline{s} \underline{s}^* &= s_0^2 (e^{j\phi_1} + e^{j\phi_2}) (e^{-j\phi_1} + e^{-j\phi_2}) \\ &= s_0^2 [2 + e^{j(\phi_2 - \phi_1)} + e^{-j(\phi_2 - \phi_1)}] \\ &= 2s_0^2 [1 + \cos(\phi_2 - \phi_1)] \end{aligned}$$

C'est pourquoi le détecteur délivre le signal :

$$S = S_0 [1 + \cos(\phi_2 - \phi_1)]$$

proportionnel à  $I$ . En outre  $\phi_2 - \phi_1$  désigne le déphasage entre les deux ondes qui parviennent en  $F'$ , proportionnel à leur différence de chemins optiques :

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta = 2\pi\sigma_0 D \text{ car } i = 0 \Rightarrow \delta = D$$

Par conséquent :

$$S(D) = S_0 [1 + \cos(2\pi\sigma_0 D)] \quad (92)$$

- (b) La période de l'interférogramme désigne la plus petite distance  $L$  dont on peut bouger le miroir (1) en conservant la valeur de  $S(D)$ , c'est-à-dire :

$$S(D+L) = S(D) \Rightarrow S_0 [1 + \cos(2\pi\sigma_0 D + 2\pi\sigma_0 L)] = S_0 [1 + \cos(2\pi\sigma_0 D)]$$

Il apparaît ainsi que :

$$2\pi\sigma_0 L = 2\pi \Rightarrow L = \frac{1}{\sigma_0} = \lambda_0$$

4. (a) Des rayonnements de nombres d'onde  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  différents ne peuvent interférer ; les signaux :

$$S_1 = S_0 [1 + \cos(2\pi\sigma_1 D)] \text{ et } S_2 = S_0 [1 + \cos(2\pi\sigma_2 D)]$$

ne peuvent que s'additionner de manière à produire le signal :

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 = S_0 [2 + \cos(2\pi\sigma_1 D) + \cos(2\pi\sigma_2 D)] \\ &\Rightarrow S = 2S_0 \{1 + \cos[(\sigma_1 + \sigma_2)\pi D] \times \cos[(\sigma_1 - \sigma_2)\pi D]\} \end{aligned}$$

Deux périodes caractéristiques apparaissent alors dans l'expression de  $S$  :



$$L_1 = \frac{2}{\sigma_1 + \sigma_2} \text{ et } L_2 = \frac{2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

qui proviennent de la périodicité des fonctions  $\cos[(\sigma_1 + \sigma_2)\pi D]$  et  $\cos[(\sigma_1 - \sigma_2)\pi D]$ .

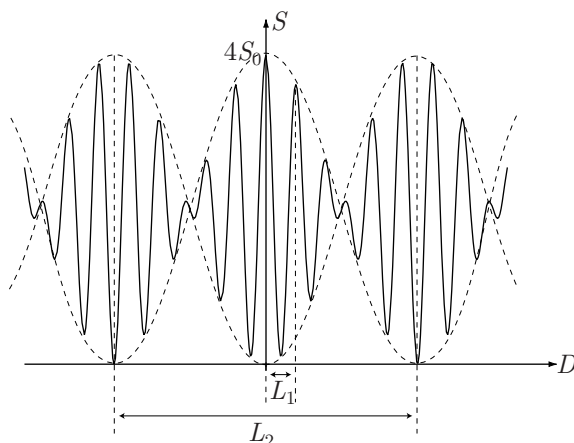
- (b) Les valeurs numériques :  $\lambda_1 = 589.10^{-9}$  m et  $\lambda_2 = 589,6.10^{-9}$  m conduisent à :

$$L_1 = \frac{2.10^{-9}}{\frac{1}{589} + \frac{1}{589,6}} \Rightarrow L_1 = 589,3 \text{ nm}$$

et :

$$L_2 = \frac{2.10^{-9}}{\frac{1}{589} - \frac{1}{589,6}} \Rightarrow L_2 = 1,158 \text{ mm}$$

L'écart entre les valeurs :  $L_2 = 1965 \times L_1$  ne permet pas de représenter graphiquement l'interférogramme pour le doublet du sodium. C'est pourquoi la représentation graphique ci-dessous se limite à  $L_2 = 10 L_1$  :



## II- Interférogramme d'une raie élargie

1. (a) Le profil spectral décrit par l'énoncé introduit une intensité spectrale non nulle seulement lorsque  $\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]$ , avec :

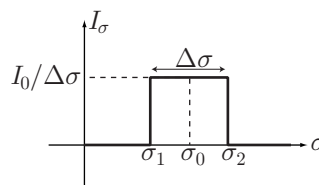
$$\sigma_2 = \sigma_0 + \frac{\Delta\sigma}{2} \text{ et } \sigma_1 = \sigma_0 - \frac{\Delta\sigma}{2}$$

avec :

$$\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$$

À chaque nombre d'onde compris entre  $\sigma$  et  $\sigma + d\sigma$  correspond une figure d'interférence associée à une intensité  $\delta I$  donnée par le résultat (92) :

$$\delta I = I_\sigma [1 + \cos(2\pi\sigma D)] d\sigma$$



Ces intensités s'additionnent alors pour produire une intensité résultante :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\sigma} [1 + \cos(2\pi\sigma D)] d\sigma = \frac{I_0}{\Delta\sigma} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} [1 + \cos(2\pi\sigma D)] d\sigma \\
 &= I_0 + \frac{I_0}{\Delta\sigma} \times \frac{1}{2\pi D} [\sin(2\pi\sigma_2 D) - \sin(2\pi\sigma_1 D)] \\
 &= I_0 + \frac{I_0}{\Delta\sigma} \times \frac{1}{\pi D} \sin(\pi\Delta\sigma D) \times \cos[\pi(\sigma_1 + \sigma_2) D] \\
 &= I_0 \left[ 1 + \frac{\sin(\pi\Delta\sigma D)}{\pi\Delta\sigma D} \times \cos(2\pi\sigma_0 D) \right] \text{ car } \sigma_1 + \sigma_2 = 2\sigma_0
 \end{aligned}$$

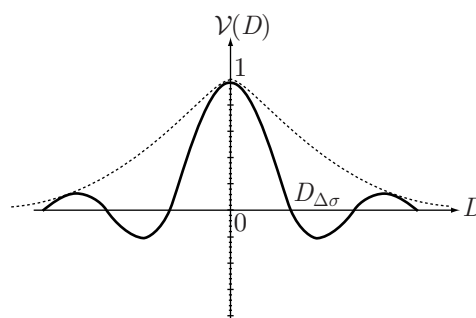
Par suite, le signal détecté est donné par :

$$S(D) = S_0 [1 + \mathcal{V} \times \cos(2\pi\sigma_0 D)]$$

où la fonction de visibilité des franges s'exprime par :

$$\mathcal{V}(D) = \frac{\sin(\pi\Delta\sigma D)}{\pi\Delta\sigma D}$$

et admet pour représentation graphique :



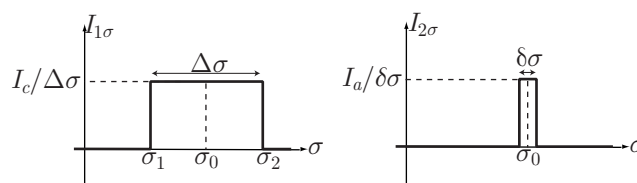
(b) La fonction  $\mathcal{V}(D)$  s'annule une première fois pour une valeur  $D_{\Delta\sigma}$  telle que :

$$\pi \Delta\sigma D_{\Delta\sigma} = \pi \Rightarrow D_{\Delta\sigma} = \frac{1}{\Delta\sigma} \quad (93)$$

2. (a) La figure précédente montre que si  $\Delta\sigma$  est suffisamment grand, c'est-à-dire  $D_{\Delta\sigma}$  très petit,  $\mathcal{V}(D)$  est assez faible pour que soit négligé le terme d'interférence :

$$\mathcal{V}(D) \times \cos(2\pi\sigma_0 D) \ll 1 \Rightarrow I \simeq I_0$$

(b) L'intensité spectrale proposée par l'énoncé équivaut à la soustraction des deux spectres suivants :



qui produiraient, séparément, sur un détecteur, les intensités :

$$I_1 = I_c [1 + \mathcal{V}_1(D) \times \cos(2\pi\sigma_0 D)] \text{ avec } \mathcal{V}_1(D) = \frac{\sin(\pi \Delta\sigma D)}{\pi \Delta\sigma D}$$

et :

$$I_2 = I_a [1 + \mathcal{V}_2(D) \times \cos(2\pi\sigma_0 D)] \text{ avec } \mathcal{V}_2(D) = \frac{\sin(\pi \delta\sigma D)}{\pi \delta\sigma D}$$

Les fonctions  $\mathcal{V}_1(D)$  et  $\mathcal{V}_2(D)$  s'annulent une première fois pour les valeurs  $D_{\Delta\sigma}$  et  $D_{\delta\sigma}$  données par le résultat (93) :

$$D_{\Delta\sigma} = \frac{1}{\Delta\sigma} \text{ et } D_{\delta\sigma} = \frac{1}{\delta\sigma} \gg D_{\Delta\sigma} \text{ car } \delta\sigma \ll \Delta\sigma$$

Ce faisant  $\mathcal{V}_1(D) \simeq 0$  tandis que  $\mathcal{V}_2(D) \simeq 1$ . Aussi, l'intensité reçue par le détecteur vaut :

$$I = I_1 - I_2 \simeq I_c - I_a [1 + \cos(2\pi\sigma_0 D)] = I_c - I_a - I_a \cos(2\pi\sigma_0 D)$$

Enfin, pour  $\sigma \simeq \sigma_0$ ,  $I_\sigma$  s'annule, ce qui impose :

$$\frac{I_c}{\Delta\sigma} \simeq \frac{I_a}{\delta\sigma} \Rightarrow I_a = \frac{\delta\sigma}{\Delta\sigma} I_c \ll I_c \Rightarrow I_c - I_a \simeq I_c$$

et simplifie l'expression de  $I$  :

$$I = I_c - I_a \cos(2\pi\sigma_0 D) = I_c \left[ 1 - \frac{I_a}{I_c} \cos(2\pi\sigma_0 D) \right]$$

Finalement, le détecteur émet un signal :

$$S = S_c [1 + C \cos(2\pi\sigma_0 D)] \text{ avec } C = -\frac{I_a}{I_c}$$

## ● 115 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Soit  $T$  la période de la fonction complexe  $e^{-j\alpha u}$ , définie par :  $\alpha T = 2\pi$ . En notant  $n \in \mathbb{N}$ , il est possible de poser :

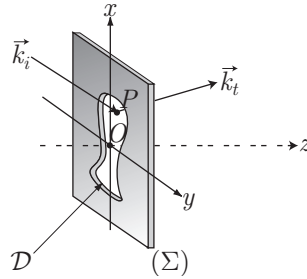
$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\alpha u} du &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-nT}^{nT} e^{-j\alpha u} du = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{-j\alpha u}}{-j\alpha} \right]_{-nT}^{nT} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2}{\alpha} \sin(\alpha n T) \right] \end{aligned}$$

où  $\alpha \neq 0$  et  $\alpha T = 2\pi \Rightarrow \sin(\alpha n T) = \sin(n \times 2\pi) = 0$ , ce qui suffit à prouver que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\alpha u} du = 0 \text{ pour } \alpha \neq 0$$

2. Soit  $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}$  le vecteur d'onde de l'onde plane incidente et soit  $\vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix}$  celui de l'onde diffractée. On note  $\mathcal{D}$  la partie percée de l'écran opaque et  $\underline{t}(P)$  la transmittance de la surface  $(\Sigma)$  en tout point  $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$  :

$$\begin{cases} \underline{t}(P) = 1 \text{ pour } P \in \mathcal{D} \\ \underline{t}(P) = 0 \text{ pour } P \notin \mathcal{D} \end{cases}$$



Le signal porté par l'onde diffractée dans la direction de  $\vec{k}_t$  est donné par :

$$\underline{s} = \mathcal{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P \quad (94)$$

En revanche, un écran opaque ayant la même forme que  $\mathcal{D}$  présente une transmittance :

$$\begin{cases} \underline{T}(P) = 0 \text{ pour } P \in \mathcal{D} \\ \underline{T}(P) = 1 \text{ pour } P \notin \mathcal{D} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$\underline{T}(P) = 1 - \underline{t}(P)$$

Dans ce cas, le signal porté par l'onde diffractée dans la direction de  $\vec{k}_t$  est décrit par :

$$\begin{aligned} \underline{s}' &= \mathcal{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{T}(P) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P \\ &= \underbrace{\mathcal{A} \iint_{(\Sigma)} e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P}_J - \underbrace{\mathcal{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P}_s \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} (\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_t - \alpha_i \\ \beta_t - \beta_i \\ \gamma_t - \gamma_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha_t - \alpha_i) x + \frac{2\pi}{\lambda_0} (\beta_t - \beta_i) y \\ &= ux + vy \text{ où } u = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha_t - \alpha_i) \text{ et } v = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\beta_t - \beta_i) \end{aligned}$$

Ce faisant, l'intégrale  $\underline{J}$  s'écrit :

$$\underline{J} = \iint_{(\Sigma)} e^{-j(ux+vy)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jux} dx \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jvy} dy$$

Hors de la direction incidente de propagation :  $\vec{k}_t \neq \vec{k}_i$  impose :  $\alpha_t \neq \alpha_i$  et  $\beta_t \neq \beta_i$ , de sorte que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jux} dx = 0 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-jvy} dy = 0$$

annulent  $\underline{J}$ . Finalement :

$$\underline{s}' = -\underline{s}$$

tandis que l'intensité lumineuse est proportionnelle à  $|\underline{s}|^2$  et  $|\underline{s}'|^2$  :

$$\underline{s}' = -\underline{s} \Rightarrow |\underline{s}'| = |\underline{s}| \Rightarrow I' = I$$

Ce résultat confirme donc le *théorème de Babinet* :

un écran opaque percé d'une ouverture  $\mathcal{D}$  produit, à l'infini, hors de la direction de propagation incidente, la même figure de diffraction qu'un écran opaque de la forme de  $\mathcal{D}$ .

## ● 116 ————— Concours Centrale-Supélec

1. Soit  $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  le vecteur d'onde des rayons incidents et  $\vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$

celui des rayons diffractés par  $(\Sigma)$ . Le signal diffracté à l'infini a pour amplitude complexe :

$$\underline{s} = \mathcal{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P$$

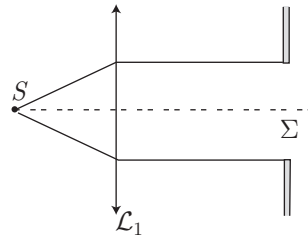
où  $\vec{k}_i \cdot \vec{OP} = 0$  car  $\vec{k}_i \perp \vec{OP}$  et où  $\underline{t}(P) = 1$  pour tous les points de l'ouverture de  $(\Sigma)$ . En outre,  $d\Sigma_P = dx dy$  désignant une surface élémentaire entourant  $P$ , il s'ensuit que :

$$\vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \Rightarrow \underline{s} = \mathcal{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \cdot \vec{OP}} dx dy \quad (95)$$

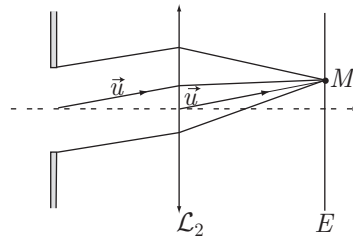
Aussi, l'intensité  $I(\vec{u})$  est proportionnelle à  $\underline{s} \underline{s}^*$  :

$$I \propto \left| \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \cdot \vec{OP}} dx dy \right|^2$$

2. Afin d'éclairer  $(\Sigma)$  avec une onde plane, il suffit de placer une source ponctuelle  $S$  au foyer objet d'une lentille convergente  $\mathcal{L}_1$  :



De même, pour obtenir la figure de diffraction à l'infini, il convient de placer l'écran d'observation  $E$  dans le plan focal image d'une lentille convergente  $\mathcal{L}_2$  :

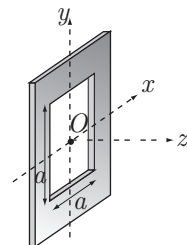


3. Une ouverture carrée est caractérisée par une transmittance :

$$\begin{cases} \underline{t}(x, y) = 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \text{ et } y \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \\ \underline{t}(x, y) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec :

$$\vec{u} \cdot \vec{OP} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha x + \beta y$$



Le signal diffracté est alors donné par le résultat (95) :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \mathcal{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(x, y) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)} dx dy \\ &= \mathcal{A} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x} dx \times \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \beta y} dy \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x} dx &= -\frac{\lambda}{2j\pi\alpha} [e^{-j\frac{\pi\alpha a}{\lambda}} - e^{j\frac{\pi\alpha a}{\lambda}}] \\ &= a \times \frac{\lambda}{\pi\alpha a} \times \sin\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right) = a \sin_c\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

et, de la même manière :

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda}\beta y} dy = b \operatorname{sin}_c\left(\frac{\pi\beta a}{\lambda}\right)$$

C'est pourquoi l'amplitude complexe :

$$\underline{s} = \underline{A}ab \operatorname{sin}_c\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right) \operatorname{sin}_c\left(\frac{\pi\beta a}{\lambda}\right)$$

est associée à une intensité proportionnelle à  $\underline{s} \underline{s}^*$  :

$$I(\vec{u}) = K \operatorname{sin}_c^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right) \operatorname{sin}_c^2\left(\frac{\pi\beta a}{\lambda}\right)$$

En outre, l'énoncé précise que, dans la direction de  $\vec{u}_z$  ( $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 1$ ), l'intensité diffractée vaut  $I_0$ , ce qui signifie aussi que :

$$I(u_z) = I_0 = K \Rightarrow I(\vec{u}) = I_0 \operatorname{sin}_c^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right) \operatorname{sin}_c^2\left(\frac{\pi\beta a}{\lambda}\right)$$

4. La fonction  $\operatorname{sin}_c x$  vaut 1 pour  $x = 0$  et s'annule lorsque  $x$  est un multiple de  $\pi$  :

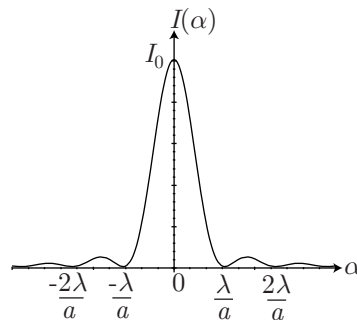
$$\operatorname{sin}_c(0) = 1 \text{ et } \operatorname{sin}_c(p\pi) = 0 \text{ pour } p \in \mathbb{Z}^*$$

Ainsi :

$$I(\alpha, \beta = 0) = I(\alpha) = I_0 \operatorname{sin}_c^2\left(\frac{\pi\alpha a}{\lambda}\right)$$

s'annule pour les valeurs de  $\alpha$  vérifiant :

$$\frac{\pi\alpha a}{\lambda} = p\pi \Rightarrow \alpha = p \times \frac{\lambda}{a} \quad (p \in \mathbb{Z}^*)$$



Cette courbe présente un *maximum* central situé entre les valeurs  $\alpha_1 = -\frac{\lambda}{a}$  et  $\alpha_2 = \frac{\lambda}{a}$ . Par suite, la largeur angulaire (dans la direction  $x$ ) vaut :

$$\Delta_0\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{2\lambda}{a}$$

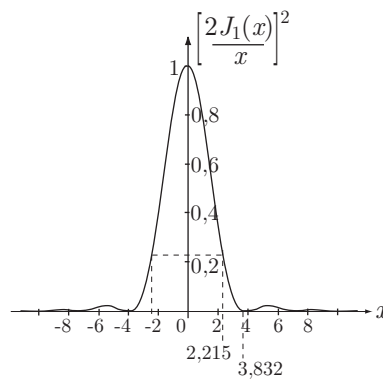
avec :

$$\lambda = \frac{c}{f} \Rightarrow \Delta_0 \alpha = \frac{2c}{af} \quad (96)$$

Application numérique :

$$\Delta_0 \alpha = \frac{2 \times 3 \cdot 10^8}{0,2 \times 12 \cdot 10^9} = 0,25 \text{ rad} = 14^\circ$$

5. La courbe fournie par l'énoncé pour  $\left[ \frac{2J_1(x)}{x} \right]^2$  :



révèle la présence d'un *maximum* central pour  $x$  compris entre  $x_0 = 3,832$  et  $-x_0 = -3,832$ . L'intensité diffractée étant décrite par la loi :

$$I(\alpha) = I_0 \left[ \frac{2J_1(x)}{x} \right]^2 \text{ avec } x = \frac{\pi \alpha}{\lambda} D \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{\pi D} x$$

il s'ensuit que ce *maximum* central d'intensité est situé entre les angles  $\alpha_1 = -\frac{\lambda x_0}{\pi D}$  et  $\alpha_2 = \frac{\lambda x_0}{\pi D}$ , ce qui correspond à une largeur angulaire :

$$\Delta_1 \alpha = \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{2\lambda x_0}{\pi D} \Rightarrow \Delta_1 \alpha = \frac{2cx_0}{\pi D f} \text{ car } \lambda = \frac{c}{f}$$

Du résultat (96), il découle que :

$$\frac{\Delta_1 \alpha}{\Delta_0 \alpha} = \frac{2cx_0}{\pi D f} \times \frac{af}{2c} = \frac{x_0 a}{\pi D} \Rightarrow \Delta_1 \alpha = \frac{x_0 a}{\pi D} \Delta_0 \alpha$$

Application numérique :

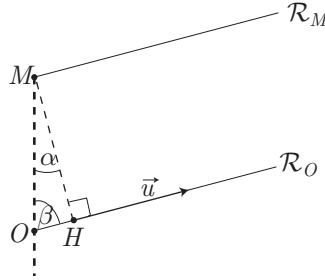
$$\Delta_1 \alpha = \frac{3,832 \times 0,2}{\pi \times 0,2} \times \Delta_0 \alpha \Rightarrow \Delta_1 \alpha \simeq 1,22 \Delta_0 \alpha = 17^\circ$$

Ce résultat montre que des ouvertures de dimensions voisines, mais de formes différentes, produisent des figures de diffraction de dimensions voisines.



● 117 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. Considérons deux rayons diffractés dans la direction de  $\vec{u}$  : le rayon  $\mathcal{R}_O$  qui passe par  $O$  et le rayon  $\mathcal{R}_M$  qui passe par  $M$ . On note  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{R}_O$  :



Appelons  $A$  le point d'intersection des rayons  $\mathcal{R}_M$  et  $\mathcal{R}_O$  ( $A$  peut être situé à l'infini ou localisé dans le plan focal image d'une lentille convergente). Puisque  $(MH)$  est perpendiculaire à  $\mathcal{R}_M$  et  $\mathcal{R}_O$ , il ressort de la loi (6), établie à la page 501, que :

$$(MA) = (HA)$$

Ce faisant, le déphasage  $\varphi$  entre les ondes diffractées en  $O$  et  $M$ , au niveau du point  $A$ , vaut :

$$\varphi = k [(OA) - (HA)] \text{ où } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

avec :

$$(OA) = (OH) + (HA) = OH + (HA) \Rightarrow \varphi = k \times OH$$

Or :

$$\cos \beta = \frac{OH}{OM} \Rightarrow OH = OM \cos \beta \Rightarrow \varphi = k OM \cos \beta$$

Aussi, en définissant par  $\vec{k} = k \vec{u}$  le vecteur d'onde de  $\mathcal{R}_O$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{OM} &= k OM \cos \beta \Rightarrow \varphi = \vec{k} \cdot \vec{OM} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y) \end{aligned}$$

On posera désormais :

$$u = \frac{2\pi\alpha}{\lambda} \text{ et } v = \frac{2\pi\beta}{\lambda} \text{ de sorte que : } \varphi = ux + vy$$

2. Soit  $d_s(O)$  l'amplitude complexe de l'onde diffractée en  $O$  et  $d_s(M)$  celle de l'onde issue de  $M$ . Si  $t(M)$  désigne la transmittance en un point  $M$  de la fente,  $s_0$  l'amplitude de l'onde incidente qui arrive en  $O$  et en  $M$ ,  $d\Sigma_O$  et  $d\Sigma_M$  des surfaces élémentaires centrées sur  $O$  et  $M$  :

$$d_s(O) = t(O) s_0 e^{-j\omega t} e^{j\phi_O} d\Sigma_O \Rightarrow s_0 e^{-j\omega t} = \frac{d_s(O) e^{-j\phi_O}}{t(O) d\Sigma_O}$$

et :

$$\begin{aligned} d\underline{s}(M) &= t(M) s_0 e^{-j\omega t} e^{j\phi_M} d\Sigma_M \\ &= \frac{d\underline{s}(O)}{t(O) d\Sigma_O} \times t(M) e^{j(\phi_M - \phi_O)} d\Sigma_M \\ &= \frac{d\underline{s}(O)}{t(O) d\Sigma_O} \times t(M) e^{j\varphi} d\Sigma_M \end{aligned}$$

Étant donné que le rapport  $\frac{d\underline{s}(O)}{t(O) d\Sigma_O}$  ne dépend pas du point  $M$ , on le notera  $\underline{A}_O$ , de sorte que l'amplitude complexe du signal diffracté par le plan ( $\Sigma$ ) de la fente vaut :

$$\underline{s} = \underline{A}_O \iint_{(\Sigma)} t(M) e^{j\varphi} d\Sigma_M = \underline{A}_O \iint_{(\Sigma)} t(x, y) e^{j(ux+vy)} dx dy$$

avec :

$$\begin{cases} t(x, y) = 1 \text{ pour } |x| \leq \ell \text{ et } |y| \leq L \\ t(x, y) = 0 \text{ pour } |x| > \ell \text{ ou } |y| > L \end{cases}$$

Par suite :

$$\underline{s} = \underline{A}_O \int_{-\ell}^{\ell} e^{jux} dx \times \int_{-L}^L e^{jvy} dy$$

où :

$$\begin{aligned} \int_{-\ell}^{\ell} e^{jux} dx &= \frac{1}{ju} (e^{ju\ell} - e^{-ju\ell}) \\ &= 2\ell \times \frac{1}{u\ell} \times \frac{e^{ju\ell} - e^{-ju\ell}}{2j} \\ &= 2\ell \times \frac{1}{u\ell} \sin(u\ell) = 2\ell \times \text{sin}_c(u\ell) \end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$\underline{s} = 4\ell L \underline{A}_O \times \text{sin}_c(u\ell) \times \text{sin}_c(vL)$$

soit, compte tenu des définitions de  $u$  et  $v$  :

$$\underline{s} = 4\ell L \underline{A}_O \times \text{sin}_c\left(\frac{2\pi\alpha\ell}{\lambda}\right) \times \text{sin}_c\left(\frac{2\pi\beta L}{\lambda}\right) \quad (97)$$

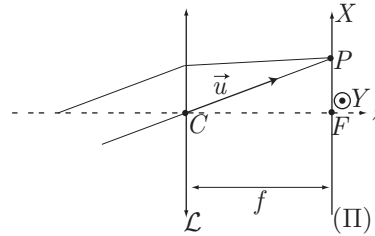
3. Le rayon de vecteur directeur  $\vec{u}$  qui passe par  $C$ , n'est pas dévié par  $\mathcal{L}$ , si bien qu'il atteint l'écran ( $\Pi$ ) au point de convergence  $P$  de tous les autres rayons de direction incidente  $\vec{u}$ .

Par définition :  $\overrightarrow{CP} = CP \vec{u}$ , c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ f \end{pmatrix} = CP \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow CP \simeq f$$

et :

$$\begin{cases} X = CP \alpha \\ Y = CP \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{X}{f} \\ \beta = \frac{Y}{f} \end{cases}$$



Ce faisant, le résultat (97) devient :

$$\underline{s} = 4\ell L \underline{A}_O \times \text{sin}_c \left( \frac{2\pi\ell}{\lambda f} X \right) \times \text{sin}_c \left( \frac{2\pi L}{\lambda f} Y \right)$$

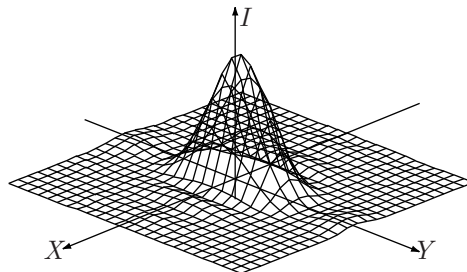
à l'origine de l'intensité  $I(P)$  en  $P$ , proportionnelle à  $\underline{s} \times \underline{s}^*$  :

$$I = K \times \text{sin}_c^2 \left( \frac{2\pi\ell}{\lambda f} X \right) \times \text{sin}_c^2 \left( \frac{2\pi L}{\lambda f} Y \right)$$

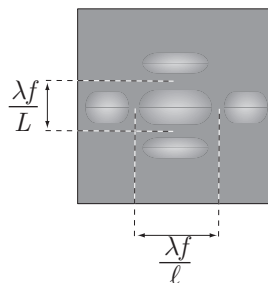
Notamment, en  $F(X = 0, Y = 0)$ , l'intensité prend la valeur  $I_0$ , d'où il découle que :

$$I(X, Y) = I_0 \times \text{sin}_c^2 \left( \frac{2\pi\ell}{\lambda f} X \right) \times \text{sin}_c^2 \left( \frac{2\pi L}{\lambda f} Y \right)$$

La représentation graphique de  $I(X, Y)$  :



permet de justifier l'allure de la figure de diffraction observée sur (II) :

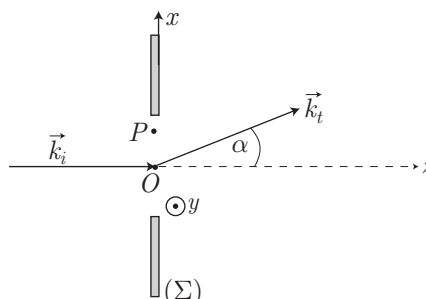


**CORRIGÉS**

● 118 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

Dans le plan ( $\Sigma$ ) de la pellicule, la condition  $b \gg a$  permet de négliger la diffraction dans la direction ( $Oy$ ). C'est pourquoi le vecteur d'onde du rayon diffracté a pour composantes :

$$\vec{k}_t = k \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \simeq k \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



Quant aux rayons incidents, perpendiculaires à ( $\Sigma$ ), leur vecteur d'onde a pour composantes  $\vec{k}_i = k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Aussi, pour chaque point  $P$  de ( $\Sigma$ ) :

$$(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = k\alpha x$$

Par suite, le signal diffracté dans la direction de  $\alpha$  a pour image complexe :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{A} \iint_{(\Sigma)} t(x, y) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P \\ &= \underline{A} \iint_{(\Sigma)} T(x) T(y) e^{-jk\alpha x} dx dy \\ &= \underline{A} \underbrace{\int_{-b/2}^{b/2} dy}_{=b} \int_{-\infty}^{+\infty} T(x) e^{-jk\alpha x} dx \end{aligned}$$

où la dernière intégrale (notée  $\mathcal{I}$ ) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int_{-\infty}^{-a/2} T(x) e^{-jk\alpha x} dx + \int_{-a/2}^0 T(x) e^{-jk\alpha x} dx \\ &\quad + \int_0^{a/2} T(x) e^{-jk\alpha x} dx + \int_{a/2}^{\infty} T(x) e^{-jk\alpha x} dx \\ &= \int_{-a/2}^0 \left(1 + \frac{2x}{a}\right) e^{-jk\alpha x} dx + \int_0^{a/2} \left(1 - \frac{2x}{a}\right) e^{-jk\alpha x} dx \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jk\alpha x} dx + \int_{-a/2}^0 \frac{2x}{a} e^{-jk\alpha x} dx + \int_0^{a/2} -\frac{2x}{a} e^{-jk\alpha x} dx \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jk\alpha x} dx + \int_0^{a/2} -\frac{2x}{a} e^{jk\alpha x} dx + \int_0^{a/2} -\frac{2x}{a} e^{-jk\alpha x} dx \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jk\alpha x} dx - \frac{4}{a} \int_0^{a/2} x \cos(k\alpha x) dx \end{aligned}$$

La première de ces intégrales se calcule directement :

$$\begin{aligned} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-jk\alpha x} dx &= -\frac{1}{jk\alpha} \left( e^{-jk\alpha a/2} - e^{jk\alpha a/2} \right) \\ &= \frac{2}{k\alpha} \sin\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) = a \times \frac{2}{k\alpha a} \sin\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) \\ &= a \times \operatorname{sinc}_c\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) \end{aligned}$$

tandis que la seconde s'obtient en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{a/2} x \cos(k\alpha x) dx &= \left[ \frac{x}{k\alpha} \sin(k\alpha x) \right]_0^{a/2} - \frac{1}{k\alpha} \int_0^{a/2} \sin(k\alpha x) dx \\ &= \frac{a}{2k\alpha} \sin\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) + \frac{1}{(k\alpha)^2} \left[ \cos\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) - 1 \right] \\ &= \frac{a^2}{4} \times \frac{2}{k\alpha a} \sin\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) + \frac{1}{(k\alpha)^2} \left[ \cos\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) - 1 \right] \\ &= \frac{a^2}{4} \operatorname{sinc}_c\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) + \frac{1}{(k\alpha)^2} \left[ \cos\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) - 1 \right] \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= a \operatorname{sinc}_c\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) - \frac{4}{a} \left\{ \frac{a^2}{4} \operatorname{sinc}_c\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) + \frac{1}{(k\alpha)^2} \left[ \cos\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) - 1 \right] \right\} \\ \Rightarrow \underline{s} &= \frac{4b\mathcal{A}}{a(k\alpha)^2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

avec :

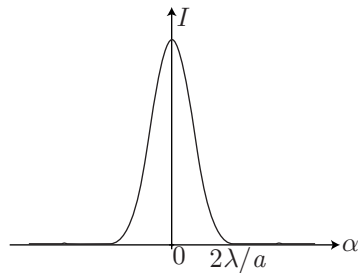
$$\begin{aligned} 1 - \cos\left(\frac{k\alpha a}{2}\right) &= 2 \sin^2\left(\frac{k\alpha a}{4}\right) \Rightarrow \underline{s} = \frac{ab\mathcal{A}}{2} \times \left(\frac{4}{k\alpha a}\right)^2 \sin^2\left(\frac{k\alpha a}{4}\right) \\ &\Rightarrow \underline{s} = \frac{ab\mathcal{A}}{2} \operatorname{sinc}_c^2\left(\frac{k\alpha a}{4}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, l'intensité émise dans la direction  $\vec{k}_t$  est proportionnelle à  $\underline{s} \underline{s}^*$ , soit encore :

$$I(\alpha) = I_0 \operatorname{sinc}_c^4\left(\frac{k\alpha a}{4}\right) = I_0 \operatorname{sinc}_c^4\left(\frac{\pi\alpha a}{2\lambda}\right)$$

L'intensité est *maximum* pour  $\alpha = 0$ , tandis qu'elle s'annule pour les valeurs de  $\alpha$  telles que :

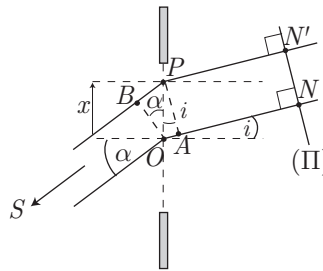
$$\frac{\pi\alpha a}{2\lambda} = q\pi \Rightarrow \alpha = q \times \frac{2\lambda}{a} \quad (q \in \mathbb{Z}^*)$$



En outre, les *maxima* secondaires de  $I(\alpha)$  ne sont pas visibles car  $I$  devient très rapidement négligeable. Cette disparition partielle des *maxima* secondaires s'appelle l'*apodisation*.

### ● 119 ————— Concours de l'ENSAM

1. (a) Soit  $A$  le projeté orthogonal de  $P$  sur le rayon  $(ON)$  et soit  $B$  celui de  $O$  sur le rayon  $(SP)$  :



Les deux rayons partent simultanément de  $S$ , auquel cas leur différence de marche en  $N$  et  $N'$  vaut :

$$\begin{aligned}\delta &= (SB + BP + PN') - (SO + OA + AN) \\ &= BP - OA \text{ car } SB = SO \text{ et } PN' = AN\end{aligned}$$

En outre, les triangles  $(OBP)$  et  $(OAP)$  permettent de définir :

$$\begin{cases} \sin \alpha = \frac{BP}{OP} = \frac{BP}{x} \\ \sin i = \frac{OA}{OP} = \frac{OA}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BP = x \sin \alpha \\ OA = x \sin i \end{cases} \Rightarrow \delta = x (\sin \alpha - \sin i)$$

et, notamment, si les angles  $\alpha$  et  $i$  sont suffisamment petits,  $\sin \alpha \simeq \alpha$  et  $\sin i \simeq i$  amènent à simplifier l'expression de  $\delta$  :

$$\delta = (\alpha - i) x$$

- (b) Soit  $\phi_S$  la phase commune des deux signaux en  $S$  et soient  $\phi'_N$  et  $\phi_N$  les phases des signaux en  $N'$  et en  $N$ . La définition des chemins optiques conduit à :

$$\phi_{N'} = \phi_S + \frac{2\pi}{\lambda} (SN') = \phi_S + \frac{2\pi}{\lambda} \times [SB + BP + PN']$$

et :

$$\phi_N = \phi_S + \frac{2\pi}{\lambda} (SN) = \phi_S + \frac{2\pi}{\lambda} \times [SO + OA + AN]$$

Par suite, le déphasage  $\Delta\phi$  entre ces deux vibrations vaut :

$$\Delta\phi = \phi_{N'} - \phi_N = \frac{2\pi}{\lambda} \delta \Rightarrow \Delta\phi = \frac{2\pi(\alpha - i)}{\lambda} x$$

2. Le rayon issu de  $S$  et qui arrive en  $M$ , en passant par  $O$ , a pour amplitude complexe :

$$d_{s_0} = a dx e^{jk(SOM)} e^{j\phi_0} \text{ avec } k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (98)$$

Or, l'énoncé précise que  $d_{s_0} = a dx \cos(\omega t)$ , ce qui signifie que l'origine des dates a été choisie de manière à ce que  $k(SOM) + \phi_0 = 0$ .

De même, un rayon issu de  $S$  et passant par  $P$  présente en  $M$  l'amplitude complexe :

$$d_s = a dx e^{jk(SPM)} e^{j\phi_0}$$

avec :

$$\begin{aligned} \delta &= (SPM) - (SOM) \Rightarrow k\delta = k(SPM) - k(SOM) + \phi_0 \\ &\Rightarrow k(SPM) = \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - i) x - \phi_0 \\ &\Rightarrow d_s = a e^{j\frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - i) x} dx \end{aligned}$$

3. L'amplitude complexe du signal résultant en  $M$  vaut :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= a \int_{-L/2}^{L/2} e^{j\frac{2\pi(\alpha-i)}{\lambda} x} dx \\ &= a \times \frac{\lambda}{2j\pi(\alpha-i)} \left[ e^{j\frac{\pi(\alpha-i)L}{\lambda}} - e^{-j\frac{\pi(\alpha-i)L}{\lambda}} \right] \\ &\Rightarrow \underline{s} = a \times \frac{\lambda}{\pi(\alpha-i)} \sin \left[ \frac{\pi(\alpha-i)L}{\lambda} \right] \end{aligned}$$

Appelons  $\varphi$  le déphasage entre  $\underline{s}$  et  $d_{s_0}$ , défini par :

$$\underline{s} = K d_{s_0} \times e^{j\varphi} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

et où  $d_{s_0}$  est donné par le résultat (98) :

$$d_{s_0} = a dx e^{jk(SOM)} = a dx \text{ car } k(SOM) = 0$$

Par suite :

$$a \times \frac{\lambda}{\pi(\alpha-i)} \sin \left[ \frac{\pi(\alpha-i)L}{\lambda} \right] = K a dx e^{j\varphi}$$

Or, l'identité de deux nombres complexes impose l'identité de leurs arguments, d'où il s'ensuit que  $\varphi = 0$  ; la vibration en  $M$  résultant de l'ensemble de la fente est en phase avec celle provenant de l'élément situé en  $O$ .

4. L'expression de  $\underline{s}$  se présente également sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= aL \times \frac{\lambda}{\pi(\alpha - i)L} \sin \left[ \frac{\pi(\alpha - i)L}{\lambda} \right] \\ &= aL \times \frac{\sin u}{u} \text{ où } u = \frac{\pi(\alpha - i)L}{\lambda}\end{aligned}$$

C'est pourquoi l'intensité  $I$  en  $M$  s'écrit :

$$I = \underline{s} \times \underline{s}^* \Rightarrow I = H \times \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \text{ avec } H = (aL)^2$$

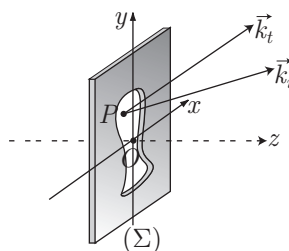
## ● 120 ————— Lycée Carnot, Dijon

Considérons une ouverture réalisée dans un plan  $(\Sigma)$ , caractérisée par une transmittance  $t_0(x, y)$  où  $x$  et  $y$  sont les coordonnées d'un point  $P$  de  $(\Sigma)$ . Un rayon incident arrive en  $P$  avec un vecteur d'onde  $\vec{k}_i$  et le rayon diffracté en  $P$  présente un vecteur d'onde  $\vec{k}_t$ , tel que pour une longueur d'onde  $\lambda_0$  :

$$\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} \text{ et } \vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ \gamma_t \end{pmatrix}$$

Aussi :

$$\begin{aligned}(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} &= \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{pmatrix} \alpha_t - \alpha_i \\ \beta_t - \beta_i \\ \gamma_t - \gamma_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = ux + vy \\ \text{avec } u &= \frac{2\pi}{\lambda_0} (\alpha_t - \alpha_i) \text{ et } v = \frac{2\pi}{\lambda_0} (\beta_t - \beta_i)\end{aligned}$$



Partant, le signal diffracté par  $(\Sigma)$  a pour amplitude complexe :

$$\underline{s}_0(u, v) = \mathcal{A} \iint_{(\Sigma)} t(P) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P \quad (99)$$

$$= \mathcal{A} \iint_{(\Sigma)} t_0(x, y) e^{-j(ux + vy)} dx dy \quad (100)$$

1. L'ouverture est dilatée (*resp.* contractée) s'il existe un réel  $a > 1$  (*resp.*  $a < 1$ ) tel que l'ouverture soit décrite par :

$$t(x, y) = t_0 \left( \frac{x}{a}, \frac{y}{a} \right)$$



Conformément à l'identité (100), le signal diffracté par  $(\Sigma)$  a pour amplitude complexe :

$$\underline{s}(u, v) = \underline{A} \iint_{(\Sigma)} t_0\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) e^{-j(ux+vy)} dx dy$$

En effectuant les changements de variables :

$$\frac{x}{a} = X \Rightarrow x = aX \text{ et } \frac{y}{a} = Y \Rightarrow y = aY$$

cette amplitude devient :

$$\underline{s}_1(u, v) = a^2 \times \underline{A} \iint_{(\Sigma)} t_0(X, Y) e^{-j(auX+avY)} dX dY$$

c'est-à-dire :

$$\underline{s}_1(u, v) = a^2 \times \underline{s}_0(au, av)$$

Ce résultat montre que :

la dilatation (*resp.* la contraction) de l'ouverture provoque la contraction (*resp.* la dilatation) de la figure de diffraction ainsi qu'une augmentation (*resp.* une diminution) de son éclairement car  $a^2 > 1$  (*resp.*  $a^2 < 1$ ).

2. Si l'ouverture est translatée d'un vecteur  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , sa nouvelle transmittance  $t_1(x, y)$  se déduit de la transmittance  $t_0(x, y)$  par la relation :

$$t_1(x, y) = t_0(x - x_0, y - y_0)$$

C'est pourquoi l'amplitude complexe du signal diffracté s'obtient à partir de l'identité (100) :

$$\begin{aligned} \underline{s}_1(u, v) &= \underline{A} \iint_{(\Sigma)} t_1(x, y) e^{-j(ux+vy)} dx dy \\ &= \underline{A} \iint_{(\Sigma)} t_0(x - x_0, y - y_0) e^{-j(ux+vy)} dx dy \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en effectuant les changements de variables :

$$X = x - x_0 \Rightarrow x = X + x_0 \text{ et } Y = y - y_0 \Rightarrow y = Y + y_0 :$$

$$\underline{s}_1(u, v) = \underline{A} \iint_{(\Sigma)} t_0(X, Y) e^{-j(uX+ux_0+vY+vy_0)} dX dY \quad (101)$$

$$= e^{-j(u x_0 + v y_0)} \times \underline{A} \iint_{(\Sigma)} t_0(X, Y) e^{-j(uX+vY)} dX dY \quad (102)$$

$$= e^{-j(u x_0 + v y_0)} \times \underline{s}_0(u, v) \quad (103)$$

En notant  $I_0(u, v) = \underline{s}_0 \times \underline{s}_0^*$  l'intensité associée à  $\underline{s}_0(u, v)$ , celle émise par l'ouverture tradlatée devient :

$$\begin{aligned} I_1(u, v) &= \underline{s}_1 \times \underline{s}_1^* = \left[ e^{-j(u x_0 + v y_0)} \underline{s}_0 \right] \times \left[ e^{j(u x_0 + v y_0)} \underline{s}_0^* \right] \\ &= \underline{s}_0 \times \underline{s}_0^* \Rightarrow I_1(u, v) = I_0(u, v) \end{aligned}$$

Ce résultat révèle qu'une translation de l'ouverture dans son plan ne produit aucun effet sur la figure de diffraction.

3. Soit  $t_0(x, y)$  la transmittance d'une ouverture ( $\mathcal{D}$ ). On peut considérer qu'un grand nombre d'ouvertures identiques à ( $\mathcal{D}$ ) se déduit par des translations de vecteurs  $\begin{pmatrix} x_q \\ y_q \\ 0 \end{pmatrix}$  de ( $\mathcal{D}$ ), auquel cas la transmittance décrivant cette configuration vaut :

$$t_1(x, y) = \sum_{q=1}^{\infty} t_0(x - x_q, y - y_q)$$

Compte tenu du résultat (103), l'amplitude complexe du signal diffracté est donnée par :

$$\begin{aligned} \underline{s}_1(u, v) &= \sum_{q=1}^{\infty} e^{-j(u x_q + v y_q)} \times \underline{s}_0(u, v) \\ &= \sum_{q=1}^{\infty} e^{-j u x_q} \times \sum_{q=1}^{\infty} e^{-j v y_q} \times \underline{s}_0(u, v) \end{aligned}$$

Or, lorsque  $u$  et  $v$  sont non nuls,  $u x_q$  et  $v y_q$  prennent des valeurs aléatoires, de sorte que :

$$\sum_{q=1}^{\infty} e^{-j u x_q} = 0 \text{ et } \sum_{q=1}^{\infty} e^{-j v y_q} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\underline{s}_1(u, v) = 0 \text{ pour } u \neq 0 \text{ et } v \neq 0$$

En revanche, pour  $u = 0$  et  $v = 0$  :

$$\sum_{q=1}^{\infty} e^{-j u x_q} \neq 0 \text{ et } \sum_{q=1}^{\infty} e^{-j v y_q} \neq 0$$

en conséquence de quoi :  $\underline{s}_1(0, 0) \propto \underline{s}_0(0, 0)$

### ● 121 ————— Concours de l'École de l'Air

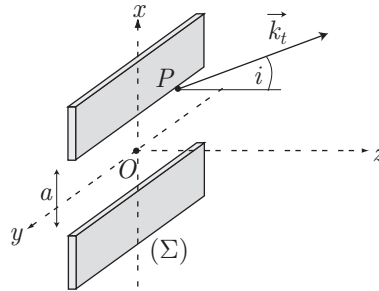
1. La fente est éclairée par une onde plane de direction  $Oz$  et donc de vecteur d'onde

$$\text{incident : } \vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En outre, l'onde repart de la fente dans la direction du vecteur d'onde

$$\vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \sin i \\ 0 \\ \cos i \end{pmatrix}.$$

C'est pourquoi, pour un point  $P(x, y, 0)$  du plan diffractant :



$$\begin{aligned} (\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} &= \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \sin i \\ 0 \\ \cos i - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda} x \sin i \\ &\simeq \frac{2\pi x i}{\lambda} \text{ car } \sin i \simeq i \end{aligned}$$

Aussi, le signal diffracté par le plan  $(\Sigma)$  a pour amplitude complexe :

$$\underline{s} = \underline{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P = \underline{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) e^{-j \frac{2\pi x i}{\lambda}} dx dy$$

où  $\underline{t}(P)$  désigne la transmittance de la fente de largeur  $a$  et de longueur  $b \gg a$  :

$$\begin{cases} \underline{t}(P) = 1 \text{ si } x \in \left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right] \text{ et } y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \\ \underline{t}(P) = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (104)$$

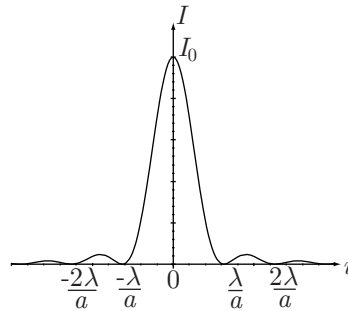
Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{A} \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j \frac{2\pi i x}{\lambda}} dx \\ &= b \underline{A} \times \frac{-\lambda}{2j\pi i} \left( e^{-j \frac{\pi i a}{\lambda}} - e^{j \frac{\pi i a}{\lambda}} \right) \\ &= b \underline{A} \times a \frac{\sin(\pi i a / \lambda)}{\pi i a / \lambda} = ab \underline{A} \text{ sinc} \left( \frac{\pi i a}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

L'intensité correspondante s'écrit alors :

$$I(i) = I_0 \left[ \text{sinc} \left( \frac{\pi i a}{\lambda} \right) \right]^2$$

et admet pour représentation graphique la courbe suivante :



2. Lorsque la condition  $b \gg a$  n'est plus respectée, le phénomène de diffraction se produit dans les directions de  $(Ox)$  et de  $(Oy)$ , c'est-à-dire dans la direction du vecteur unitaire  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$  du vecteur d'onde :

$$\vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ avec } 1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

C'est pourquoi :

$$(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha x + \beta y)$$

Ce faisant, le plan  $(\Sigma)$  de la fente émet un signal d'amplitude complexe :

$$\underline{s} = \mathcal{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} d\Sigma_P$$

où la transmittance est la même que celle de la question précédente. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \mathcal{A} \iint_{(\Sigma)} \underline{t}(P) e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \beta y} dx dy \\ &= \mathcal{A} \int_{-a/2}^{a/2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x} dx \times \int_{-b/2}^{b/2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \beta y} dy \end{aligned}$$

Or, d'après les calculs de la question précédente :

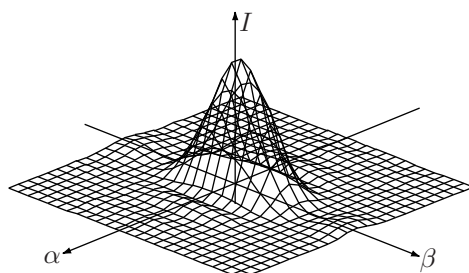
$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \alpha x} dx = a \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi \alpha a}{\lambda} \right) \text{ et } \int_{-b/2}^{b/2} e^{-j\frac{2\pi}{\lambda} \beta y} dy = b \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi \beta b}{\lambda} \right)$$

c'est-à-dire :

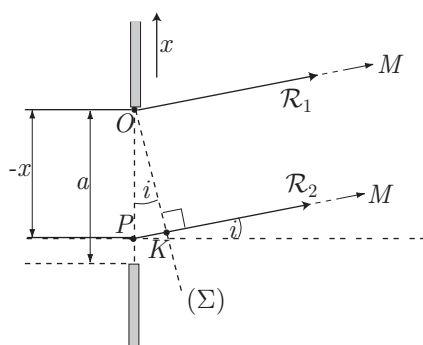
$$\underline{s} = \mathcal{A} ab \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi \alpha a}{\lambda} \right) \times \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi \beta b}{\lambda} \right)$$

L'intensité lumineuse correspondante vaut alors :

$$I(\alpha, \beta) = I_0 \times \left[ \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi \alpha a}{\lambda} \right) \right]^2 \times \left[ \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi \beta b}{\lambda} \right) \right]^2$$



3. Soient  $\mathcal{R}_1$  et  $\mathcal{R}_2$  les rayons issus respectivement de  $O$  et de  $P$ , parallèles l'un à l'autre, se dirigeant vers le point  $M$  de convergence d'une lentille convergente :



On note  $\phi_1$  et  $\phi_2$  les phases que ces rayons présentent en  $M$ , avec :

$$\phi_1 = \phi_O + k_0 (OM) \text{ et } \phi_2 = \phi_P + k_0 (PM)$$

où  $\phi_O = \phi_P$  désignent les phases des ondes aux points  $P$  et  $O$  situés sur la même surface d'onde incidente. Par suite, le déphasage  $\varphi$  est défini par :

$$\varphi = \phi_2 - \phi_1 = k_0 [(PM) - (OM)]$$

avec :

$$(PM) = PK + (KM) \text{ et } (OM) = (KM)$$

si  $K$  désigne le projeté orthogonal de  $O$  sur  $\mathcal{R}_2$ . Par conséquent :

$$\varphi = k_0 \times PK \text{ où } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \text{ et :}$$

$$\sin i \simeq i = \frac{PK}{-x} \Rightarrow PK = -xi \Rightarrow \varphi = -\frac{2\pi ix}{\lambda}$$

Compte tenu de l'identité :  $\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(b-a) - \cos(b+a)]$ , le signal réémis par chacun des points  $P$  du plan  $(\Sigma)$  s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} s(P) &= A_0 \sin\left(\frac{\pi x}{d}\right) \sin(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{A_0}{2} \left[ \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi x}{d}\right) - \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi x}{d}\right) \right] \end{aligned}$$

et admet pour image complexe :

$$\underline{s}(P) = \frac{A_0}{2} e^{j\omega t} \left[ e^{j\left(\varphi - \frac{\pi x}{d}\right)} - e^{j\left(\varphi + \frac{\pi x}{d}\right)} \right]$$

avec :

$$\varphi - \frac{\pi x}{d} = -\frac{2\pi i x}{\lambda} - \frac{\pi x}{d} = -\pi x \left( \frac{2i}{\lambda} + \frac{1}{d} \right) = -\frac{2vx}{a}$$

et :

$$\varphi + \frac{\pi x}{d} = \frac{-2\pi i x}{\lambda} + \frac{\pi x}{d} = -\pi x \left( \frac{2i}{\lambda} - \frac{1}{d} \right) = -\frac{2ux}{a}$$

Ce faisant, chaque point  $P$  réémet un signal complexe :

$$\underline{s}(P) = \frac{A_0}{2} e^{j\omega t} \left( e^{-2jvx/a} - e^{-2jux/a} \right)$$

de sorte que le signal total réémis par tous les points de  $(\Sigma)$  a pour expression complexe :

$$\underline{s} = \iint_{(\Sigma)} \underline{s}(P) \underline{t}(P) d\Sigma_P \text{ avec } d\Sigma_P = dx dy$$

où  $\underline{t}(P)$  est la transmittance définie par :

$$\begin{cases} \underline{t}(P) = 1 \text{ si } x \in [-a, 0] \text{ et } y \in \left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] \\ \underline{t}(P) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \frac{A_0}{2} e^{j\omega t} \int_{-b/2}^{b/2} \left( \int_{-a}^0 e^{-2jvx/a} dx - \int_{-a}^0 e^{-2jux/a} dx \right) dy \\ &= \frac{A_0 b}{2} e^{j\omega t} \times \left( \int_{-a}^0 e^{-2jvx/a} dx - \int_{-a}^0 e^{-2jux/a} dx \right) \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 e^{-2jvx/a} dx &= -\frac{a}{2jv} (1 - e^{2jv}) = a \frac{e^{2jv} - 1}{2j \times v} \\ &= a e^{jv} \times \frac{e^{jv} - e^{-jv}}{2jv} = a e^{jv} \times \frac{\sin v}{v} \end{aligned}$$

de même que :

$$\int_{-a}^0 e^{-2jux/a} dx = a e^{ju} \times \frac{\sin u}{u}$$

Finalement, l'image complexe du signal réémis vaut :

$$\underline{s} = \frac{A_0 ab}{2} \left[ e^{j(\omega t + v)} \text{sin}_c v - e^{j(\omega t + u)} \text{sin}_c u \right]$$

dont l'expression réelle adopte la forme :

$$s = \operatorname{Re} \{ \underline{s} \} = \frac{A_0 ab}{2} [\cos(\omega t + v) \sin_c v - \cos(\omega t + u) \sin_c u]$$

L'intensité  $I$  émise est proportionnelle à  $\underline{s} \underline{s}^*$  :

$$\begin{aligned} I &= I_0 [e^{jv} \sin_c v - e^{ju} \sin_c u] \times [e^{-jv} \sin_c v - e^{-ju} \sin_c u] \\ &= I_0 [\sin_c^2 v + \sin_c^2 u - \sin_c u \sin_c v (e^{j(u-v)} + e^{-j(u-v)})] \\ &= I_0 [\sin_c^2 v + \sin_c^2 u - 2 \sin_c u \sin_c v \cos(u-v)] \end{aligned}$$

Or, les définitions de  $u = \frac{\pi a}{2} \left( \frac{2i}{\lambda} - \frac{1}{d} \right)$  et de  $v = \frac{\pi a}{2} \left( \frac{2i}{\lambda} + \frac{1}{d} \right)$  conduisent à :

$$v - u = \frac{\pi a}{d} \gg 1 \text{ car } a \gg d$$

Cette inégalité signifie que  $u$  et  $v$  prennent des valeurs respectives très différentes (notamment,  $u$  et  $v$  ne peuvent être nuls simultanément). Plusieurs cas peuvent se présenter :

- si  $u \simeq 0$ ,  $v \gg 0$  de sorte que :

$$\sin_c v \simeq 0 \Rightarrow I = I_0 \sin_c^2 u = I_u$$

- si  $v \simeq 0$ ,  $u \ll 0$  implique que :

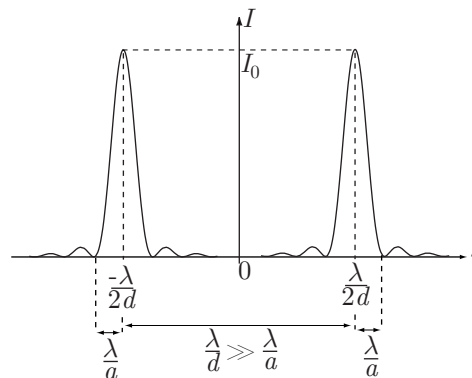
$$\sin_c u \simeq 0 \Rightarrow I = I_0 \sin_c^2 v = I_v$$

- si  $u \ll 0$  et  $v \gg 0$ ,  $\sin_c u \simeq 0$  et  $\sin_c v \simeq 0$  annulent  $I$ .

C'est pourquoi, finalement, le terme  $\sin_c u \times \sin_c v$  est toujours négligeable, de telle manière que :

$$I = I_0 [\sin_c^2 v + \sin_c^2 u] = I_u + I_v$$

ce qui signifie que deux figures de diffraction bien séparées sont obtenues :



● 122 **Lycée Saint-Louis, Paris**

I- Questions préliminaires

1. L'onde incidente étant normale, son vecteur d'onde s'écrit :  $\vec{k}_i = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  tandis

que le rayon diffracté a pour vecteur d'onde :

$$\vec{k}_t = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ \cos \alpha \sin \beta \\ \cos \alpha \cos \beta \end{pmatrix} \simeq \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \text{ car } \begin{cases} \alpha \ll 1 \\ \beta \ll 1 \end{cases}$$

Aussi, l'amplitude complexe diffractée dans la direction  $(\alpha, \beta)$  vaut-elle :

$$\underline{s}(\alpha, \beta) = \underline{\mathcal{A}} \iint t(x, y) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OM}} dx dy$$

où  $\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$  désigne le vecteur position du point  $M$  et où  $t(x, y)$  est la transmittance de l'ouverture rectangulaire :

$$\begin{cases} t(x, y) = 1 \text{ pour } x \in [-A, A] \text{ et } y \in [-B, B] \\ t(x, y) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Aussi, étant donné que :

$$(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OM} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2\pi\alpha x}{\lambda} + \frac{2\pi\beta y}{\lambda} \quad (105)$$

il s'ensuit que :

$$\underline{s}(\alpha, \beta) = \underline{\mathcal{A}} \int_{-A}^A e^{-j\frac{2\pi\alpha x}{\lambda}} dx \times \int_{-B}^B e^{-j\frac{2\pi\beta y}{\lambda}} dy$$

avec :

$$\int_{-A}^A e^{-j\frac{2\pi\alpha x}{\lambda}} dx = -\frac{\lambda}{\pi\alpha} \times \frac{e^{-j\frac{2\pi\alpha A}{\lambda}} - e^{j\frac{2\pi\alpha A}{\lambda}}}{2j} \quad (106)$$

$$= 2A \times \frac{\lambda}{2\pi\alpha A} \times \sin\left(\frac{2\pi\alpha A}{\lambda}\right) \quad (107)$$

$$= 2A \times \text{sin}_c\left(\frac{2\pi\alpha A}{\lambda}\right) \quad (108)$$

De même :

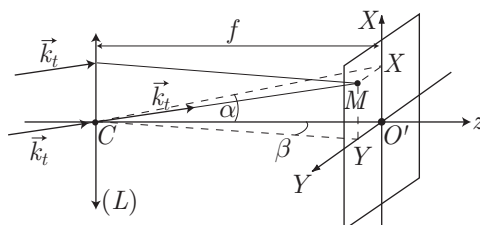
$$\int_{-B}^B e^{-j\frac{2\pi\beta y}{\lambda}} dy = 2B \times \text{sin}_c\left(\frac{2\pi\beta B}{\lambda}\right)$$

permet d'obtenir :

$$\underline{s}(\alpha, \beta) = 4AB \underline{\mathcal{A}} \times \text{sin}_c\left(\frac{2\pi\alpha A}{\lambda}\right) \times \text{sin}_c\left(\frac{2\pi\beta B}{\lambda}\right)$$



2. Un rayon diffracté (dans la direction de  $\vec{k}_t$ ) et passant par le centre optique  $C$  de la lentille  $L$ , ne serait pas dévié et rencontrerait le plan  $(\Pi)$  en un point  $M(X, Y)$  de convergence de tous les autres rayons incidents de même direction  $\vec{k}_t$  :



Les triangles  $(CO'X)$  et  $(CO'Y)$  permettent de définir :

$$\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{O'X}{CO'} = \frac{X}{f} \text{ et } \tan \beta \simeq \beta = \frac{O'Y}{CO'} = \frac{Y}{f}$$

en conséquence de quoi :

$$\underline{s}(\alpha, \beta) = 4AB \underline{A} \times \sin_c \left( \frac{2\pi A}{\lambda f} X \right) \times \sin_c \left( \frac{2\pi B}{\lambda f} Y \right)$$

Aussi, l'intensité qui parvient en  $M(X, Y)$  est proportionnelle à  $\underline{s} \underline{s}^*$ , c'est-à-dire qu'il existe une constante  $K$  telle que :

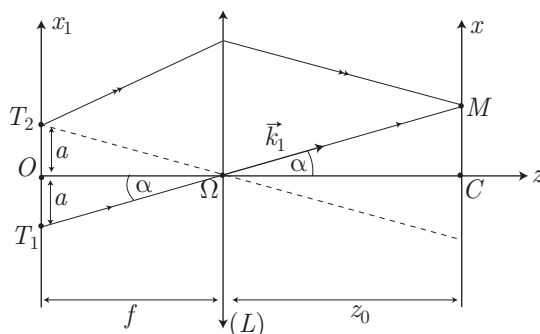
$$I(X, Y) = K \times \sin_c^2 \left( \frac{2\pi A}{\lambda f} X \right) \times \sin_c^2 \left( \frac{2\pi B}{\lambda f} Y \right)$$

En outre, en  $O'(0, 0)$ , l'intensité lumineuse vaut  $b_0$  (tandis que les sinus cardinaux valent 1 en  $X = 0$  et  $Y = 0$ ) :

$$b_0 = K \Rightarrow I(X, Y) = b_0 \times \sin_c^2 \left( \frac{2\pi A}{\lambda f} X \right) \times \sin_c^2 \left( \frac{2\pi B}{\lambda f} Y \right)$$

## II- Utilisation de deux sources lumineuses

1. Soit  $\alpha$  l'angle que fait le vecteur d'onde  $\vec{k}_1$ , associé au rayon issu de  $T_1$ , qui arrive en un point  $M(x, y, z_0)$  après avoir traversé  $(L)$ .



Ce vecteur d'onde a alors pour composantes<sup>4</sup> :  $\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire,

pour  $\alpha$  assez petit :  $\vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , avec :

$$\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{a}{f} \Rightarrow \vec{k}_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} a/f \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aussi, un point  $M$ , repéré par le vecteur  $\overrightarrow{\Omega M} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_0 \end{pmatrix}$  reçoit un signal associé à une onde plane issue de ( $L$ ) (les rayons sortent parallèlement les uns aux autres) :

$$\underline{s}_1 = a_0 e^{j(\vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{\Omega M} - \omega t)}$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 \cdot \overrightarrow{\Omega M} &= \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} a/f \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{ax}{f} + z_0 \right) \\ &= \frac{ka}{f} x + kz_0 \text{ en posant } k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ \Rightarrow \underline{s}_1 &= a_0 e^{j\left(\frac{ka}{f} x + kz_0 - \omega t\right)} \end{aligned}$$

De même, les rayons issus de  $T_2$  ressortent de ( $L$ ) avec des vecteurs d'onde :

$$\vec{k}_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \simeq \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} -a/f \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et produisent donc, en  $M$ , des signaux :  $\underline{s}_2 = a_0 e^{j(\vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{\Omega M} - \omega t)}$  avec :

$$\begin{aligned} \vec{k}_2 \cdot \overrightarrow{\Omega M} &= \frac{2\pi}{\lambda} \begin{pmatrix} -a/f \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda} \left( -\frac{ax}{f} + z_0 \right) \\ &= -\frac{ka}{f} x + kz_0 \Rightarrow \underline{s}_2 = a_0 e^{j\left(-\frac{ka}{f} x + kz_0 - \omega t\right)} \end{aligned}$$

Le signal résultant :

$$\begin{aligned} \underline{s} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2 &= a_0 e^{j(kz_0 - \omega t)} \times \left( e^{j\frac{ka}{f} x} + e^{-j\frac{ka}{f} x} \right) \\ &= a_0 e^{j(kz_0 - \omega t)} \times 2 \cos \left( \frac{ka}{f} x \right) \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Pour simplifier les calculs, on opère ici dans le plan ( $Ox, Oz$ ). Si l'on effectuait les calculs pour  $y \neq 0$ , on remplacerait  $a_0$  par  $a_0 e^{j\frac{2\pi}{\lambda} \beta y}$  dans les expressions de  $\underline{s}_1$  et de  $\underline{s}_2$ . Ce terme, imaginaire pur mais de module  $a_0$ , ne modifierait cependant pas le résultat trouvé pour  $I$ .

est à l'origine de l'intensité  $I$  proportionnelle à  $\underline{s} \underline{s}^*$  :

$$I = \frac{1}{2} \underline{s} \underline{s}^* = 2a_0^2 \cos^2 \left( \frac{ka}{f} x \right)$$

2. (a) L'ouverture rectangulaire a pour transmittance :

$$\begin{cases} \text{rect} \left( \frac{x}{A}, \frac{y}{B} \right) = 1 \text{ pour } x \in [-A, A] \text{ et } y \in [-B, B] \\ \text{rect} \left( \frac{x}{A}, \frac{y}{B} \right) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

de sorte que la transmittance du négatif placé sur l'ouverture rectangulaire s'écrit :

$$\begin{aligned} t(x, y) &= \text{rect} \left( \frac{x}{A}, \frac{y}{B} \right) \times [\mu - \xi \times I] \\ \Rightarrow t(x, y) &= \text{rect} \left( \frac{x}{A}, \frac{y}{B} \right) \times \left[ \mu - 2a_0^2 \xi \cos^2 \left( \frac{ka}{f} x \right) \right] \end{aligned}$$

Cette transmittance dépend de  $y$  par l'intervention de la fonction  $\text{rect} \left( \frac{x}{A}, \frac{y}{B} \right)$ .

(b) Compte tenu du résultat (105) :

$$\left( \vec{k}_t - \vec{k}_i \right) \overrightarrow{OM} = \frac{2\pi\alpha x}{\lambda} + \frac{2\pi\beta y}{\lambda} = k(\alpha x + \beta y)$$

le signal diffracté par la plaque ( $P$ ) a pour amplitude complexe :

$$\underline{s} = \iint \text{rect} \left( \frac{x}{A}, \frac{y}{B} \right) \times \left[ \mu - 2a_0^2 \xi \cos^2 \left( \frac{ka}{f} x \right) \right] e^{-jk(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

3. (a) Le résultat précédent s'écrit aussi :

$$\underline{s} = \int_{-B}^B e^{-jk\beta y} dy \times \int_{-A}^A \left[ \mu - 2a_0^2 \xi \cos^2 \left( \frac{ka}{f} x \right) \right] e^{-jk\alpha x} dx$$

En définissant  $\varphi = \frac{ka}{f} x$ , on rappelle que :

$$2 \cos^2 \left( \frac{ka}{f} x \right) = 2 \cos^2 \varphi = 1 + \cos(2\varphi) = 1 + \frac{1}{2} (e^{2j\varphi} + e^{-2j\varphi})$$

en conséquence de quoi :

$$\underline{s} = \int_{-B}^B e^{-jk\beta y} dy \times \int_{-A}^A [(\mu - 2a_0^2 \xi) - a_0^2 \xi e^{2j\varphi} - a_0^2 \xi e^{-2j\varphi}] e^{-jk\alpha x} dx$$

De plus, le résultat (108) :

$$\int_{-A}^A e^{-jk\alpha x} dx = 2A \text{sin}_c(k\alpha A)$$

peut être appliqué à l'expression de  $\underline{s}$  qui devient :

$$\underline{s} = 2B \operatorname{sinc}(k\beta B) \times (J_1 - J_2 - J_3)$$

où les intégrales  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$  se calculent séparément :

$$J_1 = (\mu - 2a_0^2\xi) \int_{-A}^A e^{-jk\alpha x} dx = 2A (\mu - 2a_0^2\xi) \operatorname{sinc}(k\alpha A)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= a_0^2\xi \int_{-A}^A e^{j(-k\alpha x + 2\varphi)} dx \text{ avec } \varphi = \frac{ka}{f} x \\ &= a_0^2\xi \int_{-A}^A e^{jk(-\alpha + \frac{2a}{f})x} dx = a_0^2\xi \int_{-A}^A e^{jk\alpha' x} dx \text{ où } \alpha' = -\alpha + \frac{2a}{f} \\ &= 2Aa_0^2\xi \operatorname{sinc}(k\alpha' A) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} J_3 &= a_0^2\xi \int_{-A}^A e^{-j(k\alpha x + 2\varphi)} dx \text{ avec } \varphi = \frac{ka}{f} x \\ &= a_0^2\xi \int_{-A}^A e^{-jk(\alpha + \frac{2a}{f})x} dx = a_0^2\xi \int_{-A}^A e^{-jk\alpha'' x} dx \text{ où } \alpha'' = \alpha + \frac{2a}{f} \\ &= 2Aa_0^2\xi \operatorname{sinc}(k\alpha'' A) \end{aligned}$$

Par suite :

$$\underline{s} = 4AB \operatorname{sinc}(k\beta B) \times [(\mu - 2a_0^2\xi) \operatorname{sinc}(k\alpha A) - a_0^2\xi \operatorname{sinc}(k\alpha' A) - a_0^2\xi \operatorname{sinc}(k\alpha'' A)]$$

Cette expression montre que  $\underline{s}$  possède trois composantes :

$$\underline{s} = \underline{s}_1 - \underline{s}_2 - \underline{s}_3$$

avec :

$$\begin{cases} \underline{s}_1 = 4AB (\mu - 2a_0^2\xi) \operatorname{sinc}(k\beta B) \operatorname{sinc}(k\alpha A) \\ \underline{s}_2 = 4ABa_0^2\xi \operatorname{sinc}(k\beta B) \operatorname{sinc}\left[kA \left(\frac{2a}{f} - \alpha\right)\right] \\ \underline{s}_3 = 4ABa_0^2\xi \operatorname{sinc}(k\beta B) \operatorname{sinc}\left[kA \left(\alpha + \frac{2a}{f}\right)\right] \end{cases}$$

chacune d'elles correspondant au signal fourni par une fente rectangulaire de dimension  $(2A, 2B)$  et étant centrée respectivement sur :

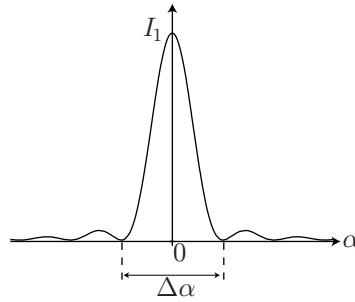
$$\begin{pmatrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha = 2a/f \\ \beta = 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha = -2a/f \\ \beta = 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Le signal  $\underline{s}_1$  est associé à une intensité  $I_1 \propto \operatorname{sinc}^2(k\alpha A)$ , dont le *maximum* central est localisé en  $\alpha = 0$  et le premier *minimum* se trouve dans la direction  $\alpha_1$  telle que :

$$k\alpha_1 A = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} \alpha_1 A = \pi \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\lambda}{2A}$$

Aussi, la tache centrale de la figure d'interférence a pour largeur :

$$\Delta\alpha = 2\alpha_1 = \frac{\lambda}{A} = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{5 \cdot 10^{-2}} = 10^{-5} \text{ rad} \quad (109)$$



De même, aux signaux  $\underline{s}_2$  et  $\underline{s}_3$  sont associées les intensités :

$$\begin{cases} I_2 \propto \sin_c^2(k\beta B) \sin_c^2 \left[ k \left( \frac{2a}{f} - \alpha \right) A \right] \\ I_3 \propto \sin_c^2(k\beta B) \sin_c^2 \left[ k \left( \alpha + \frac{2a}{f} \right) A \right] \end{cases}$$

qui présentent également des *maxima* principaux de largeur angulaire

$\Delta\alpha = \frac{\lambda}{A}$ , dans des directions respectives :

$$\alpha_2 = \frac{2a}{f} = \frac{2 \times 10^{-3}}{5 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ rad et } \alpha_3 = -\frac{2a}{f} = -4 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

caractérisées par :

$$\alpha_2 \gg \Delta\alpha \text{ et } \alpha_3 \gg \Delta\alpha$$

De ces inégalités découle la simplification des produits :

$$\sin_c(k\alpha A) \sin_c \left[ kA \left( \frac{2a}{f} \pm \alpha \right) \right] \simeq 0$$

et :

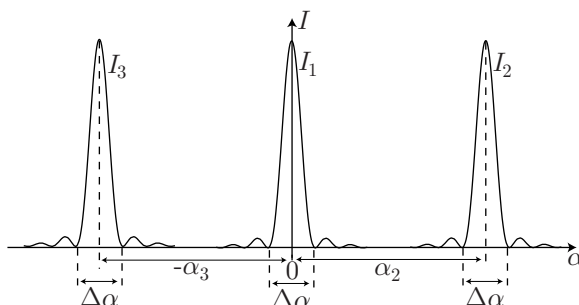
$$\sin_c \left[ kA \left( \frac{2a}{f} - \alpha \right) \right] \times \sin_c \left[ kA \left( \frac{2a}{f} + \alpha \right) \right] \simeq 0$$

c'est-à-dire :

$$\underline{s}_1 \underline{s}_2^* \simeq 0 \quad \underline{s}_1 \underline{s}_3^* \simeq 0 \quad \underline{s}_2 \underline{s}_3^* \simeq 0$$

Par suite, l'intensité  $I$  associée à  $\underline{s}$  se simplifie :

$$\begin{aligned} I &\propto (\underline{s}_1 - \underline{s}_2 - \underline{s}_3) (\underline{s}_1^* - \underline{s}_2^* - \underline{s}_3^*) \simeq |\underline{s}_1|^2 + |\underline{s}_2|^2 + |\underline{s}_3|^2 \\ &\Rightarrow I \simeq I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$



et produit, par conséquent, trois images bien séparées.

### ● 123 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

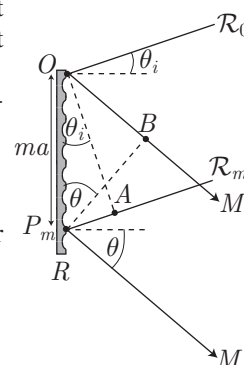
1. On note  $\phi_0$  et  $\phi_m$  les phases des rayonnements en  $O$  et  $P_m$ , juste après réflexion en ces points (la réflexion produit un déphasage de  $\pi$ ).

Les rayons qui arrivent en  $O$  et  $P_m$  sont respectivement désignés par  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_m$ . Enfin,  $A$  et  $B$  sont respectivement les projetés orthogonaux de  $O$  sur  $\mathcal{R}_m$  et de  $P_m$  sur  $\mathcal{R}_0$ . Le point  $P_m$  émet un rayon qui arrive en  $M$  avec une amplitude complexe :

$$\underline{s}_m(M) = S_0 e^{j\phi_m} e^{jk(P_m M)}$$

où  $\phi_m$  est la phase du rayonnement qui quitte  $P_m$ . Par suite :

$$\frac{\underline{s}_m(M)}{\underline{s}_0(M)} = e^{j(\phi_m - \phi_0)} \times e^{jk[(P_m M) - (OM)]}$$



avec :  $(OM) = (OB) + (BM)$  et  $(BM) = (P_m M)$  car le segment  $[BP_m]$  est perpendiculaire aux rayons  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_m$  qui convergent en  $M$ . Ce faisant :

$$\underline{s}_m(M) = \underline{s}_0(M) \times e^{j(\phi_m - \phi_0)} \times e^{-jk(OB)}$$

Soit  $\phi_A$  la phase du rayonnement au point  $A$ , avant réflexion sur  $P_m$ . Compte tenu des définitions de  $O$  et  $P_m$  (et puisque  $[OA]$  est perpendiculaire aux rayons incidents  $\mathcal{R}_0$  et  $\mathcal{R}_m$ ) :

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \phi_A + \pi \text{ (en } O \text{ s'est produit une réflexion)} ; \\ \phi_m &= \phi_A + k(AP_m) + \pi \text{ (en } P_m \text{ s'est produit une réflexion)}. \end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} \phi_m - \phi_0 &= k(AP_m) \Rightarrow \underline{s}_m(M) = \underline{s}_0(M) \times e^{jk[(AP_m) - (OB)]} \\ &\Rightarrow \underline{s}_m(M) = \underline{s}_0(M) \times e^{jk[AP_m - OB]} \end{aligned}$$

Les triangles  $(OAP_m)$  et  $(OBP_m)$  étant rectangles, il s'ensuit que :

$$\begin{cases} \sin \theta_i = \frac{AP_m}{OP_m} = \frac{AP_m}{ma} \\ \sin \theta = \frac{OB}{OP_m} = \frac{OB}{ma} \end{cases}$$

de sorte que :

$$\underline{s}_m(M) = \underline{s}_0(M) \times e^{-jkma(\sin \theta - \sin \theta_i)}$$

2. En notant  $\underline{s}_0(M) = \underline{s}_0$  et  $\varphi = ka(\sin \theta - \sin \theta_i)$ , les amplitudes complexes  $\underline{s}_m(M)$  des rayons issus des points  $O, P_1, \dots, P_{N-1}$  s'additionnent en  $M$  pour produire l'amplitude résultante :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \underline{s}_0 + \underline{s}_1(M) + \dots + \underline{s}_{N-1}(M) \\ &= \underline{s}_0 \sum_{m=0}^{N-1} e^{-jm\varphi} = \underline{s}_0 \times \frac{1 - e^{-jN\varphi}}{1 - e^{-j\varphi}} \\ &= \underline{s}_0 \times \frac{e^{-jN\varphi/2}}{e^{-j\varphi/2}} \times \frac{e^{jN\varphi/2} - e^{-jN\varphi/2}}{e^{j\varphi/2} - e^{-j\varphi/2}} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\underline{s} = \underline{s}_0 e^{-j(N-1)\varphi/2} \times \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)}$$

3. L'intensité lumineuse  $I$  qui parvient en  $M$  est proportionnelle à  $\underline{s} \underline{s}^*$  et adopte ainsi l'expression :

$$I = I_0 \times \left[ \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \right]^2$$

Cette intensité prend sa valeur *maximum* pour les valeurs de  $\varphi$  qui annulent simultanément  $\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ . Il existe donc des entiers  $p$  tels que :

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = p\pi \Rightarrow \sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = \sin(Np\pi) = 0 \text{ car } Np \in \mathbb{Z}$$

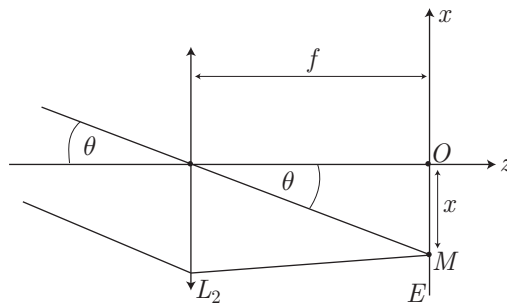
Or, compte tenu des définitions de  $\varphi$  et de  $k$  :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{2} = p\pi &\Rightarrow \frac{1}{2} \times \frac{2\pi a}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_i) = p\pi \\ &\Rightarrow \sin \theta = \sin \theta_i + \frac{p\lambda}{a} \quad (p \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Du reste, dans les conditions de Gauss,  $\sin \theta \simeq \theta$  conduit à :

$$\theta = \sin \theta_i + \frac{p\lambda}{a} \quad (110)$$

Considérons alors deux rayons parallèles qui arrivent sur  $L_2$  avec l'incidence  $\theta$ , l'un de ces rayons, passant par  $C$ , n'étant pas dévié lors de la traversée de  $L_2$  :



À la sortie de  $L_2$ , ces deux rayons convergent en un point  $M$  de  $E$ , tel que :

$$\tan \theta \simeq \theta = \frac{x}{f} \Rightarrow x = f \times \theta$$

c'est-à-dire, compte tenu du résultat (110) :

$$x = f \sin \theta_i + p \times \frac{\lambda f}{a} \quad (111)$$

4. Avec  $n = \frac{1}{a} = 800$  traits par millimètre, c'est-à-dire  $\frac{1}{a} = 800 \cdot 10^3$  traits par mètre :

$$x = 1 \times \sin(10^\circ) + 1 \times 585 \cdot 10^{-9} \times 1 \times 800 \cdot 10^3 \Rightarrow x = 642 \text{ mm}$$

5. En différenciant le résultat (111) à  $\theta_i$  constant, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta x = \frac{p f}{a} \times \Delta \lambda &\Rightarrow \Delta \lambda = \frac{a \Delta x}{p f} = \frac{0,01 \cdot 10^{-3}}{800 \cdot 10^3 \times 1 \times 1} \\ &\Rightarrow \Delta \lambda = 1,25 \cdot 10^{-11} \text{ m} \end{aligned}$$

ce qui correspond à un pouvoir de résolution :

$$\eta = \frac{\lambda_0}{\Delta \lambda} = \frac{585 \cdot 10^{-9}}{1,25 \cdot 10^{-11}} = 46\,800$$

## ● 124 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. Chacune des  $N = 2\nu + 1$  fentes peut être repérée par un indice  $n$  variant de  $-\nu$  à  $+\nu$ , auquel cas chaque fente est décrite par une transmittance :

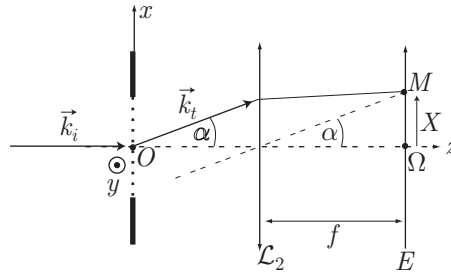
$$\begin{cases} t_n(x) = 1 \text{ pour } x \in \left[ na - \frac{b}{2}, na + \frac{b}{2} \right] \\ t_n(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi, la transmittance totale du réseau s'écrit :

$$t(x) = \sum_{n=-\nu}^{\nu} t_n(x)$$



2. Soit  $\vec{k}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ) le vecteur d'onde des rayons qui arrivent sur le réseau  
 et soit  $\vec{k}_t = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$  celui des rayons diffractés par le réseau.



Dans les conditions de Gauss,  $\alpha$  est suffisamment petit pour que l'on puisse poser :

$$\vec{k}_t = k \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que pour chaque point  $P$  du réseau :

$$(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP} = k \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = k\alpha x$$

C'est pourquoi l'amplitude complexe des rayons diffractés s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \mathcal{A} \int_{-\infty}^{+\infty} t(x) e^{-j(\vec{k}_t - \vec{k}_i) \cdot \vec{OP}} dx \\ &= \mathcal{A} \sum_{n=-\nu}^{\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} t_n(x) e^{-jk\alpha x} dx = \mathcal{A} \sum_{n=-\nu}^{\nu} \int_{na-b/2}^{na+b/2} e^{-jk\alpha x} dx \end{aligned}$$

Effectuons alors le changement de variable :

$$\xi = x - na \Rightarrow x = \xi + na \Rightarrow dx = d\xi$$

de sorte que :

$$\underline{s} = \mathcal{A} \sum_{n=-\nu}^{\nu} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-jk\alpha(\xi+na)} d\xi = \mathcal{A} \sum_{n=-\nu}^{\nu} e^{-jk\alpha na} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-jk\alpha\xi} d\xi$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-jk\alpha\xi} d\xi &= -\frac{1}{jk\alpha} \left( e^{-jk\alpha b/2} - e^{jk\alpha b/2} \right) \\ &= b \times \frac{2}{k\alpha b} \sin\left(\frac{k\alpha b}{2}\right) \\ &= b \times \text{sin}_c\left(\frac{k\alpha b}{2}\right) \end{aligned}$$

De plus,

$$\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{X}{f} \Rightarrow \frac{k\alpha b}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{X}{f} \times \frac{b}{2} = \pi \times \frac{X}{\lambda f} \times b = \pi b u$$

en conséquence de quoi :

$$\underline{s} = \underline{A}b \text{sin}_c(\pi b u) \times \sum_{n=-\nu}^{\nu} e^{-jk\alpha n a}$$

avec :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\nu}^{\nu} e^{-jk\alpha n a} &= e^{jk\alpha \nu a} \sum_{n=0}^{2\nu} e^{-jk\alpha n a} \\ &= e^{jk\alpha \nu a} \times \frac{1 - e^{-jk\alpha a (2\nu+1)}}{1 - e^{-jk\alpha a}} \\ &= e^{jk\alpha \nu a} \times \frac{e^{-jk\alpha a (2\nu+1)/2}}{e^{-jk\alpha a/2}} \times \frac{e^{jk\alpha a \frac{2\nu+1}{2}} - e^{-jk\alpha a \frac{2\nu+1}{2}}}{e^{jk\alpha \frac{a}{2}} - e^{-jk\alpha \frac{a}{2}}} \\ &= \frac{\sin\left(k\alpha a \times \frac{2\nu+1}{2}\right)}{\sin\left(k\alpha \frac{a}{2}\right)} \end{aligned}$$

En remarquant que  $2\nu + 1 = N$  et que :

$$k\alpha \frac{a}{2} = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{X}{f} \times \frac{a}{2} = \pi \times \frac{X}{\lambda f} \times a = \pi u a = \phi$$

il vient :

$$\sum_{n=-\nu}^{\nu} e^{-jk\alpha n a} = \frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi}$$

de telle manière que :

$$\underline{s} = K \text{sin}_c(\pi b u) \times \frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi}$$

où  $K = \underline{A}b$  est une constante complexe.

3. L'intensité  $I(X)$  est proportionnelle à  $\underline{s} \underline{s}^*$  :

$$I = I_0 \text{sin}_c^2(\pi b u) \times \left[ \frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi} \right]^2$$

avec :

$$\pi bu = \frac{\pi b}{\lambda f} X \text{ et } \phi = \pi au = \pi a \times \frac{X}{\lambda f}$$

d'où découle l'expression de  $I(X)$  :

$$I(X) = I_0 \times \sin_c^2\left(\frac{\pi b X}{\lambda f}\right) \times \left[\frac{\sin(N\pi a X/\lambda f)}{\sin(\pi a X/\lambda f)}\right]^2$$

La fonction sinus cardinal s'annule pour les valeurs de  $X$  telles que :

$$\frac{\pi b X}{\lambda f} = q\pi \Rightarrow X = q \times \frac{\lambda f}{b} \quad (q \in \mathbb{Z}^*)$$

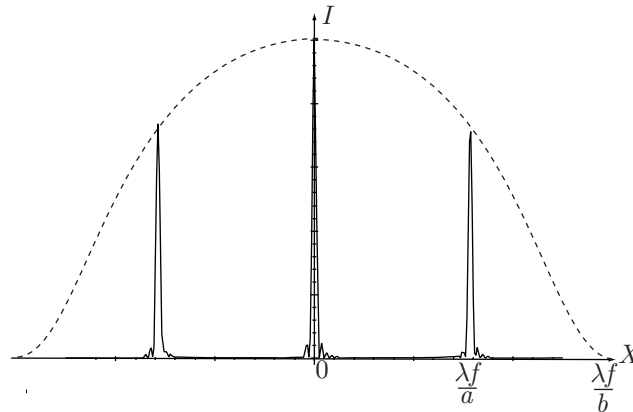
tandis que la fonction  $\left[\frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi}\right]^2$  devient *maximum* pour les valeurs de  $\phi$  telles que  $\sin(N\phi)$  et  $\sin\phi$  s'annulent simultanément, c'est-à-dire :

$$\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = p\pi \Rightarrow \sin(N\phi) = \sin(Np \times \pi) = 0 \text{ avec } p \in \mathbb{Z}$$

soit encore :

$$\phi = p\pi \Rightarrow \frac{\pi a X}{\lambda f} = p\pi \Rightarrow X = p \times \frac{\lambda f}{a} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

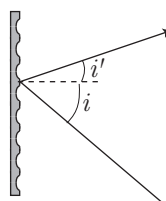
En outre, la condition  $a \gg b$  montre que  $\left[\frac{\sin(N\phi)}{\sin\phi}\right]^2$  varie beaucoup plus vite que  $\sin_c^2\left(\frac{\pi b X}{\lambda f}\right)$ , ce qui mène à la représentation graphique de  $I(X)$  :



Remarque – Dans le cas où  $b$  tend vers zéro, l'annulation du sinus cardinal est ramené à l'infini, ce qui permet de retrouver le résultat classique du réseau avec fentes infiniment fines.

## ● 125 ————— Concours ENSAM

- (a) Soit  $i'$  l'angle sous lequel les rayons lumineux sont diffractés par  $R$ , par rapport à la normale à  $R$  :



La formule des réseaux indique que les *maxima* d'intensité sont émis pour les valeurs de  $i$  vérifiant :

$$\sin i' = \sin i + p \frac{\lambda}{a} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

où  $a = \frac{1}{n}$  désigne le pas du réseau. Ainsi, dans le cas où  $i' = 0$  :

$$\sin i = -pn\lambda_0 \quad (112)$$

avec  $p = 2$ ,  $n = 500 \cdot 10^3$  traits par mètre et  $\lambda_0 = 0,5 \cdot 10^{-6}$  m :

$$\sin i = -2 \times 500 \cdot 10^3 \times 0,5 \cdot 10^{-6} = -0,5 \Rightarrow i = -30^\circ$$

(b) Pour toute valeur de  $\lambda$ , la formule du réseau révèle la présence de *maxima* d'intensité dans les directions  $i'$  telles que :

$$\sin i' = \sin i + p \frac{\lambda}{a} = \sin i + pn\lambda \quad (p \in \mathbb{Z})$$

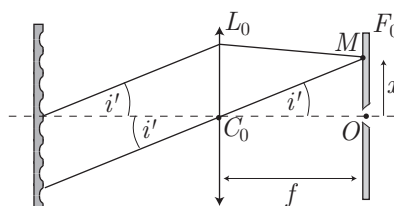
où l'identité (112) fournit :

$$\sin i = -pn\lambda_0 \Rightarrow \sin i' = pn(\lambda - \lambda_0)$$

Dans les conditions de Gauss,  $i'$  est suffisamment petit pour linéariser  $\sin i'$  :

$$\sin i' \simeq i' \Rightarrow i' = pn(\lambda - \lambda_0) \quad (113)$$

Or, dans la direction  $i'$ , un rayon qui traverse le centre optique  $C_0$  de  $L_0$  n'est pas dévié et atteint un point  $M$  de  $(P)$ , où convergent les autres rayons incidents, qui arrivent sur  $L_0$  avec la même direction  $i'$  :



Il s'ensuit que  $\tan i' \simeq i' = \frac{x}{f}$ , c'est-à-dire, compte tenu de la relation (113) :

$$x = fi' \Rightarrow x = pnf(\lambda - \lambda_0) \quad (114)$$

(c) La fente  $F_0$  laisse passer les rayons qui arrivent aux points  $M$  d'abscisses  $x$  comprises entre  $x_1 = -\frac{L}{2}$  et  $x_2 = \frac{L}{2}$ , auxquelles correspondent les longueurs

d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  vérifiant la relation précédente :

$$\begin{cases} -\frac{L}{2} = pnf (\lambda_1 - \lambda_0) \\ \frac{L}{2} = pnf (\lambda_2 - \lambda_0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_0 - \frac{L}{2pnf} \\ \lambda_2 = \lambda_0 + \frac{L}{2pnf} \end{cases}$$

La fente laisse donc passer les radiations dont les longueurs d'onde sont comprises entre :

$$\lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda_1}{2} \text{ et } \lambda_2 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda_1}{2} \text{ avec } \Delta\lambda_1 = \frac{L}{pnf}$$

Application numérique :

$$\Delta\lambda_1 = \frac{0,1 \cdot 10^{-3}}{2 \times 500 \cdot 10^3 \times 1} = 10^{-10} \text{ m} \Rightarrow \Delta\lambda_1 = 10^{-4} \mu\text{m}$$

- (d) Étant donné que  $\sin i' \simeq i' \simeq \frac{x}{f}$ , la variable  $\varphi$  s'écrit, pour une longueur d'onde  $\lambda_0$  :

$$\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_0} (\sin i' - \sin i) \simeq \frac{2\pi a}{\lambda_0} \left( \frac{x}{f} - \sin i \right) \Rightarrow x = f \times \left( \frac{\lambda_0}{2\pi a} \varphi + \sin i \right)$$

Ce faisant, pour une longueur d'onde  $\lambda_0$ , l'intensité  $I$  admet un *maximum* d'ordre  $p$  en une abscisse  $x_0$  qui correspond à  $\varphi_0 = 2p\pi$  :

$$x_0 = f \times \left( \frac{\lambda_0}{2\pi a} \times 2p\pi + \sin i \right) \Rightarrow x_0 = f \times \left( \frac{\lambda_0 p}{a} + \sin i \right)$$

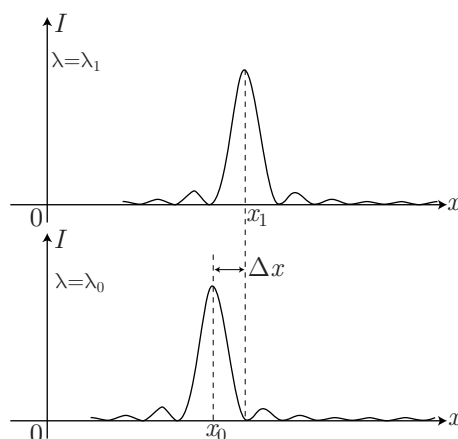
En outre, la courbe donnée par l'énoncé rappelle qu'au voisinage du *maximum* précédent,  $I$  s'annule une première fois pour  $\varphi = 2p\pi + \frac{2\pi}{N}$ , c'est-à-dire en une abscisse :

$$x_0 + \Delta x = f \times \left[ \frac{\lambda_0}{2\pi a} \left( 2p\pi + \frac{2\pi}{N} \right) + \sin i \right] = f \times \left( \frac{\lambda_0 p}{a} + \frac{\lambda_0}{aN} + \sin i \right)$$

De même, pour une longueur d'onde  $\lambda_1 = \lambda_0 + \Delta\lambda$ , le *maximum* d'intensité d'ordre  $p$  s'observe en une abscisse  $x_1$  telle que :

$$x_1 = f \times \left( \frac{\lambda_1 p}{a} + \sin i \right)$$

Or, ces deux *maxima* peuvent encore être distingués à condition que  $x_1$  excède  $x_0 + \Delta x$ . Cette condition se traduit alors par :



$$x_1 = x_0 + \Delta x \Rightarrow f \times \left( \frac{\lambda_1 p}{a} + \sin i \right) = f \times \left( \frac{\lambda_0 p}{a} + \frac{\lambda_0}{aN} + \sin i \right)$$

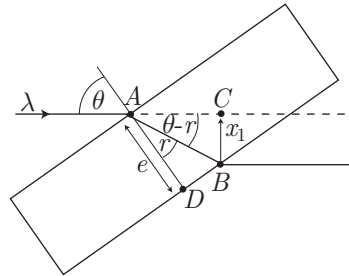
$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_0 + \frac{\lambda_0}{Np} \rightarrow \Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{Np}$$

Application numérique :

$$\Delta\lambda = \frac{0,5 \cdot 10^{-6}}{10^4 \times 2} \Rightarrow \Delta\lambda = 0,25 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ } \mu\text{m}$$

La comparaison :  $\Delta\lambda < \Delta\lambda_0$  montre que la résolution du monochromateur est plus limitée par la taille de  $F_0$  que par les phénomènes de diffraction.

2. Soit  $r$  l'angle de réfraction du rayon qui pénètre dans la lame à faces parallèles :



Le triangle  $(ABC)$  étant rectangle en  $C$ , il s'ensuit que :

$$\sin(\theta - r) = \frac{BC}{AB} = \frac{x_1}{AB} \Rightarrow x_1 = AB \sin(\theta - r)$$

de même que le triangle rectangle  $(ABD)$  permet de définir :

$$\cos r = \frac{AD}{AB} = \frac{e}{AB} \Rightarrow AB = \frac{e}{\cos r} \Rightarrow x_1 = e \frac{\sin(\theta - r)}{\cos r}$$

Or, les angles  $\theta$  et  $r$  sont suffisamment petits pour justifier les approximations :  $\sin(\theta - r) \simeq \theta - r$  et  $\cos \theta \simeq 1$ , d'où il découle que :

$$x_1 = e(\theta - r)$$

Enfin, la loi de Snell-Descartes impose :

$$\sin \theta = n_1 \sin r \Rightarrow \theta \simeq n_1 r \Rightarrow r = \frac{\theta}{n_1} \Rightarrow x_1 = e\theta \left( 1 - \frac{1}{n_1} \right) \quad (115)$$

3. (a) Les lois (114) et (115) conduisent à :

$$x_1 = pnf (\lambda - \lambda_0) \Rightarrow dx_1 = pnf d\lambda$$

et :

$$x_1 = e\theta \left( 1 - \frac{1}{n_1} \right) \Rightarrow dx_1 = e d\theta \left( 1 - \frac{1}{n_1} \right)$$

Il s'ensuit que :

$$pnf d\lambda = e d\theta \left(1 - \frac{1}{n_1}\right)$$

où  $d\theta$  est lié à  $dI$  par la sensibilité  $\alpha$  du galvanomètre :

$$\begin{aligned} \alpha = \frac{d\theta}{dI} \Rightarrow d\theta = \alpha dI &\Rightarrow pnf d\lambda = e\alpha dI \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) \\ &\Rightarrow \frac{d\lambda}{dI} = \frac{e\alpha}{pnf} \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\frac{d\lambda}{dI} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \times 1}{2 \times 500 \cdot 10^3 \times 1} \left(1 - \frac{1}{1,6}\right) \Rightarrow \frac{d\lambda}{dI} = 1,875 \cdot 10^{-3} \mu\text{m} \cdot (\text{mA})^{-1}$$

- (b) L'angle  $\theta$  varie avec  $I$  selon la loi linéaire :  $\theta = \theta_0 + \frac{d\theta}{dI} \times I$  où  $\theta_0 = 0$  car, lorsque  $I$  est nul  $\theta$  l'est également :  $\theta = \alpha I$ . C'est pourquoi la loi (115) s'écrit :

$$x_1 = e\alpha I \left(1 - \frac{1}{n_1}\right) = e\alpha I \times \frac{n_1 - 1}{n_1}$$

tandis que la relation (114) impose :

$$\begin{aligned} x_1 = pnf \underbrace{(\lambda - \lambda_0)}_{\Delta\lambda_t} &= e\alpha I \times \frac{n_1 - 1}{n_1} \\ &\Rightarrow I = \frac{pnf \Delta\lambda_t}{\alpha e} \times \frac{n_1}{n_1 - 1} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$I = \frac{2 \times 500 \cdot 10^3 \times 1 \times 2,25 \cdot 10^{-10}}{1 \times 5 \cdot 10^{-3}} \times \frac{1,6}{0,6} \Rightarrow I = 0,12 \text{ mA}$$





## Chapitre 5

# Physique des ondes

### 5.1 Propagation unidimensionnelle d'une onde

#### 5.1.1 Équation de propagation

Soit une grandeur physique décrite par une fonction  $\psi$  de l'espace et du temps (par exemple une surpression, la hauteur d'un liquide, ...). Dans ce chapitre, nous étudierons les phénomènes physiques qui vérifient l'équation de d'Alembert :

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Si le phénomène physique ne dépend que d'une dimension ( $x$  par exemple), le Laplacien de  $\psi(x, t)$  se simplifie en même temps que l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

**Définition 1** Une onde est dite polarisée si le phénomène vibratoire ne se produit que dans une direction. Lorsque cette direction coïncide avec celle de propagation de l'onde, la polarisation est longitudinale.

En revanche, lorsque cette direction est perpendiculaire à celle de propagation de l'onde, la polarisation est transversale.

#### 5.1.2 Famille de solutions

##### 5.1.2.1 Ondes progressives

Considérons une fonction  $\psi(x, t)$  que l'on peut écrire :

$$\psi(x, t) = f(u) + g(v)$$

où  $u(x, t)$  et  $v(x, t)$  sont des fonctions de  $x$  et  $t$  ; par exemple,  $f(u)$  pourrait s'écrire :  $f(u) = \cos u$  où  $u(x, t) = \sqrt{x^2 + c^2t^2}$  et  $g(v) = 0$  de sorte que :  $\psi(x, t) = \cos(\sqrt{x^2 + c^2t^2})$ .

On démontre, en mathématiques, que :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{df}{du} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d^2 g}{dv^2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{dg}{dv} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2)$$

et :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{du^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{df}{du} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{d^2 g}{dv^2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \frac{dg}{dv} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (3)$$

Dans ce cours, on se limitera aux ondes décrites par des fonctions :

$$u(x, t) = \alpha \times (ct + x) \text{ et } v(x, t) = \alpha \times (ct - x)$$

où  $\alpha$  est une constante. Ce faisant, les relations (2) et (3) deviennent :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \alpha^2 \times \left( \frac{d^2 f}{du^2} + \frac{d^2 g}{dv^2} \right) \text{ et } \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \alpha^2 c^2 \times \left( \frac{d^2 f}{du^2} + \frac{d^2 g}{dv^2} \right)$$

de sorte que :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

On se bornera ainsi à des ondes progressives, solutions de l'équation de d'Alembert, de la forme :

$$\psi(x, t) = f(\alpha ct + \alpha x) + g(\alpha ct - \alpha x)$$

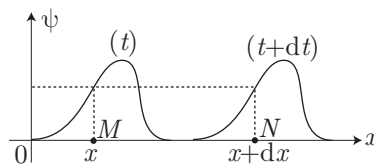
Notamment, si la constante  $\alpha$  est notée  $k$  :

$$\psi(x, t) = f(\omega t + kx) + g(\omega t - kx) \text{ où } \omega = kc \quad (4)$$

tandis que  $\alpha = \frac{1}{c}$  fournit :

$$\psi(x, t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right) + g\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

Soit le phénomène décrit par la fonction  $\psi(x, t) = g(\omega t - kx)$  en un point  $M(x)$ , à une date  $t$ . À une date  $t + dt$ , le phénomène se produit au point  $N(x + dx)$ , avec  $dx > 0$ .



Ce phénomène se déplace de  $M$  à  $N$  si  $\psi(x, t) = \psi(x + dx, t + dt)$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} g(\omega t - kx) &= g(\omega t + \omega dt - kx - k dx) \\ \Rightarrow \omega dt - k dx &= 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c \end{aligned}$$

Par conséquent, l'onde  $\psi(x, t) = g(\omega t - kx)$  se déplace vers la droite, à une vitesse  $c = \frac{dx}{dt}$ . En revanche, l'onde décrite par la fonction  $\psi(x, t) = f(\omega t + kx)$  se déplace vers la gauche, à une vitesse  $\frac{dx}{dt} = -c$ .

Remarque – L'onde qui se déplace vers la gauche est parfois appelée « onde régressive », par opposition à celle qui se déplace vers la droite alors appelée « onde progressive ».

**Définition 2** Un phénomène ondulatoire est dit périodique s'il existe un nombre  $T$ , tel que :

$$\psi(x, t + T) = \psi(x, t) \forall t$$

$T$  désigne la période du phénomène, s'il s'agit de la plus petite valeur de  $T$  qui assure l'égalité précédente.

**Définition 3** La longueur d'onde  $\lambda$  d'un phénomène périodique dans l'espace est la plus petite valeur de  $\lambda$  qui assure l'identité :

$$\psi(x + \lambda, t) = \psi(x, t) \forall x$$

### 5.1.2.2 Ondes périodiques harmoniques

**Définition 4** Une onde est périodique harmonique si les fonctions  $f$  et  $g$  sont des fonctions sinusoidales :

$$\psi(x, t) = A_0 \cos(\omega t \pm kx + \phi)$$

$A_0$  désigne alors l'amplitude de l'onde et  $\omega$  sa pulsation.

Remarque – Ces ondes sont aussi qualifiées de monochromatiques, étant donné qu'elles ne possèdent qu'une pulsation  $\omega$ .

Pulsation  $\omega$  et fréquence  $f$  sont liées par la loi :

$$\omega = 2\pi f \text{ où } f = \frac{1}{T}$$

Quant à la longueur d'onde  $\lambda$ , sa définition impose :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

À l'instar de ce qui se pratique en électrocinétique, à une onde progressive harmonique peut être associée une fonction complexe  $\underline{\psi}$  telle que :

$$\psi(x, t) = \text{Re} \{ \underline{\psi} \}$$

On distingue ainsi :

- les ondes progressives harmoniques, qui se déplacent dans le sens de  $(Ox)$  :

$$\underline{\psi} = A_0 e^{j(\omega t - kx)} \Rightarrow \psi(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx)$$

- les ondes progressives harmoniques, qui se déplacent dans le sens inverse à celui de  $(Ox)$ , parfois appelées ondes régressives :

$$\underline{\psi} = A_0 e^{j(\omega t + kx)} \Rightarrow \psi(x, t) = A_0 \cos(\omega t + kx)$$

### 5.1.2.3 Ondes stationnaires

**Définition 5** On appelle onde stationnaire une onde dont la fonction  $\psi(x, t)$  peut se mettre sous la forme :

$$\psi(x, t) = f(x) \times g(t)$$

où  $f(x)$  et  $g(t)$  sont respectivement des fonctions de  $x$  ou de  $t$  exclusivement.

Remarque – Une onde stationnaire ne se propage pas : le temps  $t$ , qui n'intervient que dans  $g(t)$ , est un facteur qui influence l'amplitude de l'onde en tous les points de l'espace simultanément.

Soit  $\psi(x, t) = f(x) \times g(t)$  la fonction décrivant une onde stationnaire qui vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Rightarrow g \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{c^2} f \frac{d^2 g}{dt^2} \Rightarrow \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2}$$

Étant donné que le membre de gauche de cette équation ne dépend pas de  $t$ , alors que celui de droite ne dépend pas de  $x$ , il s'ensuit que :

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \alpha \text{ et } \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2} = c^2 \alpha$$

où  $\alpha$  est une constante.

- Si  $\alpha < 0$ , il existe un nombre  $k$  tel que  $\alpha = -k^2$ , de sorte que :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f \Rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f = 0$$

Dans ce cas, la fonction  $f(x)$  adopte la forme :

$$f(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx) = F_0 \cos(kx + \varphi)$$

tandis que la fonction  $g(t)$  est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 g}{dt^2} = -k^2 c^2 g &\Rightarrow \frac{d^2 g}{dt^2} + \omega^2 g = 0 \\ \Rightarrow g(t) = B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t) &= G_0 \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Ce faisant, une onde stationnaire est décrite par la fonction :

$$\psi(x, t) = f(x) \times g(t) = \psi_0 \cos(kx + \varphi) \times \cos(\omega t + \phi) \quad (5)$$

- Si  $\alpha > 0$ , on peut poser :  $\alpha = k^2 \Rightarrow c^2\alpha = \omega^2 > 0$ , de sorte que  $g(t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2g}{dt^2} - \omega^2 g = 0 \Rightarrow g(t) = \lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t}$$

Or, la fonction  $g(t)$  ne peut tendre vers l'infini avec  $t$ , sous peine d'observer :  $\lim_{t \rightarrow \infty} [\psi(x, t)] = \infty$ . Cette condition impose :

$$\lambda = 0 \Rightarrow g(t) = \mu e^{-\omega t} \Rightarrow \psi(x, t) = \mu e^{-\omega t} \times f(x)$$

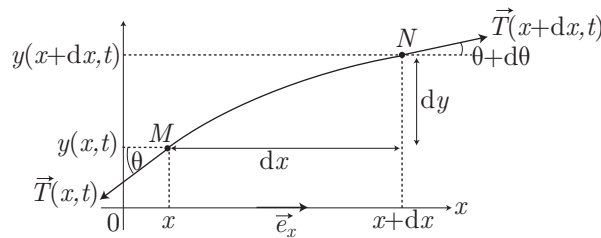
En outre, l'absence de phénomène dissipatif interdit à  $\psi(x, t)$  toute décroissance régulière. C'est pourquoi la solution  $\alpha > 0$  est physiquement irrecevable.

### 5.1.3 Ondes transversales sur une corde vibrante

Cette partie ne s'adresse qu'aux étudiants des filières PC ou PSI.

#### 5.1.3.1 Équation de propagation

On considère une corde, de masse linéique  $\mu$ , soumise à une tension  $T$  uniforme.



Isolons, sur cette corde, deux points  $M$  et  $N$  infiniment proches, distants de  $dx$ . Les élongations (calculées à partir de la position d'équilibre) de l'onde en  $M$  et  $N$  sont notées  $y(x, t)$  et  $y(x + dx, t)$  à une date  $t$ . Aux points  $M$  et  $N$ , l'élément de corde, compris entre  $M$  et  $N$ , est soumis aux forces  $\vec{T}(x, t)$  et  $\vec{T}(x + dx, t)$ , si l'on néglige le poids de la corde et les éventuels frottements.

La corde décrit une courbe  $\mathcal{C}$  telle que, si  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  désignent les angles que font les tangentes de  $\mathcal{C}$  en  $M$  et  $N$  par rapport à l'horizontale :

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x,t} = \tan [\theta(x, t)] = \tan \theta \text{ et } \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx,t} = \tan [\theta(x + dx, t)] = \tan(\theta + d\theta)$$

On supposera, en outre, que  $\theta$  est suffisamment petit pour qu'il soit légitime de négliger les termes d'ordre 2 en  $\theta$ , ce qui permet de linéariser les expressions de  $\frac{\partial y}{\partial x}$  :

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x,t} \simeq \theta \text{ et } \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx,t} \simeq \theta + d\theta$$

De plus, les forces  $\vec{T}(x, t)$  et  $\vec{T}(x + dx, t)$  étant tangentes à  $\mathcal{C}$  en  $M$  et  $N$  et ayant la même norme  $T$  (la tension du fil est uniforme), il s'ensuit que :

$$\vec{T}(x, t) = \begin{pmatrix} -T \cos \theta \\ -T \sin \theta \end{pmatrix} \text{ et } \vec{T}(x + dx, t) = \begin{pmatrix} T \cos(\theta + d\theta) \\ T \sin(\theta + d\theta) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire, en négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2 :

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \dots \simeq 1 \text{ et } \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \dots \simeq \theta$$

la corde est soumise aux forces :

$$\vec{T}(x, t) = \begin{pmatrix} -T \\ -T \times \theta \end{pmatrix} \text{ et } \vec{T}(x + dx, t) = \begin{pmatrix} T \\ T \times (\theta + d\theta) \end{pmatrix}$$

dont la résultante vaut alors :

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t) = T \times d\theta \vec{e}_y$$

où :

$$\begin{aligned} d\theta &= (\theta + d\theta) - \theta = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx, t} - \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x, t} = \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x, t} dx \\ \Rightarrow \vec{\mathcal{R}} &= T \times \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \vec{e}_y \text{ où } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \equiv \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x, t} \end{aligned}$$

Quant à l'élément de corde situé entre  $M$  et  $N$ , sa longueur vaut :

$$d\ell = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

avec :

$$\begin{aligned} dy &= y(x + dx, t) - y(x, t) = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x, t} dx = \theta \times dx \\ \Rightarrow d\ell &= dx \sqrt{1 + \theta^2} \simeq dx \text{ à l'ordre 1 en } \theta \end{aligned}$$

Ce faisant, l'élément de corde présente une masse  $\delta m = \mu d\ell = \mu dx$  et une accélération  $\vec{\gamma}$  vérifiant la loi fondamentale de la dynamique :

$$\delta m \vec{\gamma} = \vec{\mathcal{R}} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \vec{e}_y \Rightarrow \mu dx \vec{\gamma} \cdot \vec{e}_y = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

où :

$$\vec{\gamma} \cdot \vec{e}_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

La fonction  $y$  vérifie par conséquent l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

### 5.1.3.2 Modes propres d'une corde fixée

Considérons maintenant une corde, identique à la précédente, dont les extrémités sont fixées en  $x = 0$  et en  $x = L$ , ce qui conditionne les valeurs :

$$y(0, t) = 0 \text{ et } y(L, t) = 0$$

Si la solution de l'équation de d'Alembert était progressive :  $y(x, t) = Y_0 \cos(\omega t - kx)$ , il ne serait pas possible de respecter, à toute date  $t$ , les conditions aux limites car  $y(0, t) = Y_0 \cos(\omega t) = 0$  seulement pour  $\omega t = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$ .

Force est donc d'admettre que les conditions aux limites produisent des ondes stationnaires dont la fonction est donnée apr le résultat (5) de la page 676 :

$$y(x, t) = Y_0 \cos(kx + \varphi) \times \cos(\omega t + \phi)$$

ou encore :

$$y(x, t) = [A \cos(kx) + B \sin(kx)] \times \cos(\omega t + \phi)$$

où  $A$ ,  $B$  et  $\phi$  sont des constantes qui dépendent des conditions initiales. Notamment :

$$\begin{aligned} y(0, t) = 0 &\Rightarrow A \times \cos(\omega t + \phi) = 0 \forall t \Rightarrow A = 0 \\ &\Rightarrow y(x, t) = B \sin(kx) \times \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

En outre :

$$\begin{aligned} y(L, t) = 0 &\Rightarrow B \sin(kL) \times \cos(\omega t + \phi) = 0 \forall t \\ &\Rightarrow kL = n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow k_n = n \frac{\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = k_n \times c = n \frac{\pi c}{L} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que toute fonction :

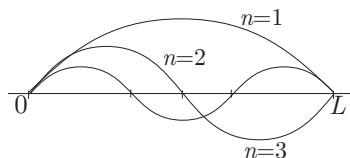
$$y_n(x, t) = B_n \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \times \cos(\omega_n t + \phi) / \omega_n = n \frac{\pi c}{L} \quad (6)$$

est une solution de l'équation de d'Alembert qui respecte les conditions limites imposées.

**Définition 6** On appelle modes propres les fonctions :

$$y_n(x, t) = B_n \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \times \cos(\omega_n t + \phi)$$

Pour une date  $t$  fixée, il est possible de représenter plusieurs modes propres de vibration de la corde :



**Remarque** – Chaque mode propre vibre avec une fréquence  $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \times \frac{c}{2L}$  qui lui est spécifique. C'est pourquoi les modes propres sont aussi appelés harmoniques de rang  $n$ .

### 5.1.3.3 Corde de Melde

On considère une corde analogue à la précédente, fixée en  $x = L$  et excitée en  $x = 0$  de sorte que  $y(0, t) = Y_0 \cos(\omega t)$  et  $y(L, t) = 0 \forall t$ . Cette dernière contrainte interdit d'envisager, comme solution de l'équation de d'Alembert, une fonction progressive :  $y(x, t) = A \cos(\omega t - kx)$ . C'est pourquoi la solution de cette équation doit être cherchée sous forme d'une onde stationnaire, de fonction :

$$y(x, t) = \psi_0 \cos(kx + \varphi) \times \cos(\omega t + \phi)$$

La condition  $y(0, t) = Y_0 \cos(\omega t)$  se traduit alors par :

$$\begin{aligned} \psi_0 \cos \varphi \cos(\omega t + \phi) &= Y_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \begin{cases} \phi = 0 \\ \psi_0 \cos \varphi = Y_0 \end{cases} \\ \Rightarrow y(x, t) &= \frac{Y_0}{\cos \varphi} \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t) \end{aligned}$$

En outre, la condition  $y(L, t) = 0$  conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{Y_0}{\cos \varphi} \cos(kL + \varphi) \cos(\omega t) = 0 &\Rightarrow \cos(kL + \varphi) = 0 \\ &\Rightarrow kL + \varphi = p\pi + \frac{\pi}{2}, p \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \varphi = p\pi + \frac{\pi}{2} - kL \end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$\cos \varphi = \cos\left(p\pi + \frac{\pi}{2} - kL\right) = (-1)^p \cos\left(\frac{\pi}{2} - kL\right) = (-1)^p \sin(kL)$$

et d'autre part que :

$$\begin{aligned} \cos(kx + \varphi) &= \cos\left(kx + p\pi + \frac{\pi}{2} - kL\right) = (-1)^p \cos\left(kx - kL + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= (-1)^p \sin(kL - kx) \end{aligned}$$

Par suite :

$$y(x, t) = \frac{Y_0}{\sin(kL)} \times \sin(kL - kx) \cos(\omega t)$$

Cette relation peut aussi s'écrire, en tenant compte de la loi :  $\omega = kc$  :

$$y(x, t) = \frac{Y_0}{\sin\left(\frac{L\omega}{c}\right)} \times \sin\left[\frac{\omega}{c}(L - x)\right] \cos(\omega t)$$

ce qui montre qu'un phénomène de résonance peut apparaître si  $\sin\left(\frac{L\omega}{c}\right) = 0$ , c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{L\omega}{c} = n\pi \Rightarrow \omega = n \times \frac{\pi c}{L}$$



Un phénomène de résonance peut se produire sur la corde de Melde, pour des pulsations correspondant aux modes propres.

Remarque – Des phénomènes dissipatifs, ignorés ici, s'opposent à ce que  $y(x, t)$  tende vers l'infini.

Lorsque  $\omega \neq n \frac{\pi c}{L}$ , l'onde présente :

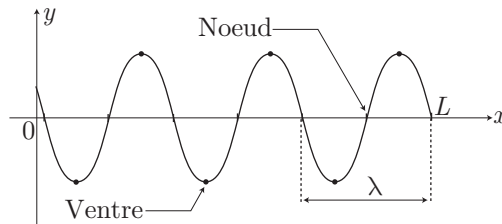
- des nœuds aux valeurs  $x_p$  telles que :

$$\sin(kL - kx_p) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} (L - x_p) = p\pi \Rightarrow x_p = L - p \frac{\lambda}{2}, p \in \mathbb{N}$$

En de telles valeurs,  $y(x_p, t)$  est nul à toute date  $t$ .

- des ventres, là où l'amplitude de  $y$  est maximum à toute date  $t$ . Ce phénomène se produit aux valeurs  $x_q$  de  $x$  telles que :

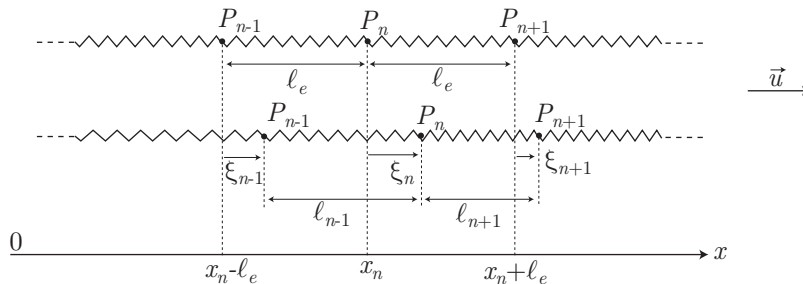
$$\begin{aligned} \sin(kL - kx_q) = \pm 1 &\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} (L - x_q) = \frac{\pi}{2} + q\pi, q \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow x_q = L - \frac{\lambda}{4} - q \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$



### 5.1.4 Ondes longitudinales dans une tige rigide

#### 5.1.4.1 Modèle de la chaîne infinie

On considère une chaîne infinie constituée de ressort identiques, infiniment petits, de longueur à vide  $\ell_v$  et de raideur  $k$ , liés les uns aux autres aux points  $P_n$  d'abscisses au repos  $x_n, n \in \mathbb{N}$ , de même masse  $m$ .



Soient trois de ces points successifs :  $P_{n-1}, P_n$  et  $P_{n+1}$  dont les positions à l'équilibre sont repérées par les abscisses respectives  $x_{n-1} = x - \ell_e, x_n = \ell_e, x_{n+1} = x + \ell_e$ , où  $\ell_e$  désigne la longueur à l'équilibre de chaque ressort. On supposera que :

- chaque point est libre de se déplacer selon la direction déterminée par un vecteur unitaire  $\vec{u}$  ;
- seules les forces de rappel des ressorts sont prises en compte (les frottements et le poids, notamment, sont négligés).

La position d'un point  $P_n$ , à une date  $t$  quelconque, est repérée par le vecteur :

$$\overrightarrow{OP_n} = x_n(t) \vec{u} = [x_n(0) + \xi_n(x_n, t)] \vec{u}$$

**Définition 7** L'approximation des milieux continus consiste à supposer que les abscisses de chaque point  $P$  sont continues ; on note  $x = n \ell_e + \xi_n(x, t)$  pour le point  $P_n$ , où  $\ell_e$  est infiniment petit.

À toute date  $t$ , le point  $P_n$  est ainsi soumis à :

- la force de rappel  $\vec{T}_{n+1}$  exercée par le ressort situé à droite de  $P_n$  et de longueur  $\ell_{n+1}$  :

$$\begin{aligned} \vec{T}_{n+1} &= k (\ell_{n+1} - \ell_v) \vec{u} \text{ avec } \ell_{n+1} + \xi_n = \ell_e + \xi_{n+1} \\ &= k (\xi_{n+1} - \xi_n + \ell_e - \ell_v) \vec{u} \end{aligned}$$

- la force de rappel  $\vec{T}_{n-1}$  exercée par le ressort situé à gauche de  $P_n$  et de longueur  $\ell_{n-1}$  :

$$\begin{aligned} \vec{T}_{n-1} &= -k (\ell_{n-1} - \ell_v) \vec{u} \text{ avec } \ell_{n-1} + \xi_{n-1} = \ell_e + \xi_n \\ &= -k (\xi_n - \xi_{n-1} + \ell_e - \ell_v) \vec{u} \end{aligned}$$

Ainsi, le point  $P_n$  est soumis à une force résultante :

$$\vec{\mathcal{R}}_n = \vec{T}_{n+1} + \vec{T}_{n-1} = k (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2 \xi_n) \vec{u}$$

En outre, la position du point  $P_n$  est repérée par le vecteur  $\overrightarrow{OP_n} = x \vec{u} = [n \ell_e + \xi_n(x, t)] \vec{u}$ , à laquelle est associée l'accélération :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OP_n}}{dt^2} = \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} \vec{u}$$

Or, en vertu de la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OP_n}}{dt^2} = \vec{\mathcal{R}}_n \Rightarrow m \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = k (\xi_{n+1} + \xi_{n-1} - 2 \xi_n)$$

où l'approximation des milieux continus suggère de poser :

$$\xi_{n+1} = \xi_n + \ell_e \frac{\partial \xi_n}{\partial x} + \frac{\ell_e^2}{2} \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial x^2} + \dots \text{ et } \xi_{n-1} = \xi_n - \ell_e \frac{\partial \xi_n}{\partial x} + \frac{\ell_e^2}{2} \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial x^2} + \dots$$

de sorte que :

$$m \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = k \ell_e^2 \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial x^2}$$

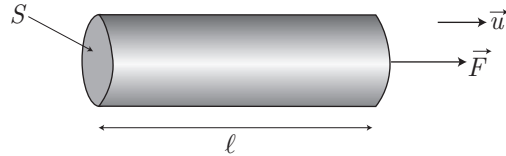
Ainsi apparaît l'équation de propagation d'une onde acoustique longitudinale :

$$\frac{\partial^2 \xi_n}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi_n}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = \ell_e \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**5.1.4.2 Onde longitudinale dans une tige**

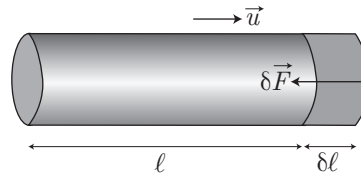
**Définition 8** Soit une tige, de longueur  $\ell$  et de section  $S$ , soumise à une force d'intensité  $F$ . On appelle module d'Young la grandeur :

$$E = \frac{\ell}{S} \frac{\partial F}{\partial \ell}$$

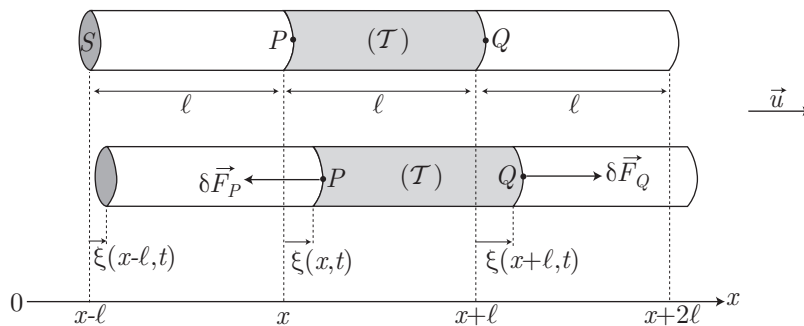


De cette définition découle l'expression de la force  $\delta \vec{F}$  exercée par une tige, qui s'oppose à son allongement  $\delta \ell$  :

$$\delta \vec{F} = -\frac{\partial F}{\partial \ell} \vec{u} = -SE \frac{\delta \ell}{\ell} \vec{u} \text{ (loi de Hooke).}$$



Considérons maintenant une tige de masse volumique  $\rho$ , de section  $S$  constante, de longueur infinie et de module d'Young  $E$ . Soit  $(\mathcal{T})$  une tranche de cette tige, située entre les points  $P$  et  $Q$  d'abscisses respectives  $x$  et  $x + \ell$ .  $(\mathcal{T})$  se trouve entre deux autres tranches identiques, susceptibles de l'allonger de  $\delta \ell_1$  et  $\delta \ell_2$ .



Lorsqu'une onde acoustique se propage dans la tige, les points  $P$  et  $Q$  ont pour abscisses  $x + \xi(x, t)$  et  $x + \ell + \xi(x + \ell, t)$ . La tranche  $(\mathcal{T})$  est alors soumise à :

- la force de rappel  $\delta \vec{F}_Q = SE \frac{\delta \ell_2}{\ell} \vec{u}$ , où :

$$\begin{aligned} \delta \ell_2 &= \xi(x + 2\ell, t) - \xi(x + \ell, t) = \left[ \xi(x + \ell, t) + \ell \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{(x+\ell, t)} \right] - \xi(x + \ell, t) \\ &= \ell \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{(x+\ell, t)} = \ell \times \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{(x, t)} + \ell \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Big|_{(x, t)} \right] \end{aligned}$$

- la force de rappel  $\delta \vec{F}_P = -SE \frac{\delta \ell_1}{\ell} \vec{u}$ , avec :

$$\delta \ell_1 = \xi(x, t) - \xi(x - \ell, t) = \xi(x, t) - \left[ \xi(x, t) - \ell \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{(x, t)} \right] = \ell \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{(x, t)}$$

c'est-à-dire à une force résultante :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{R}} &= \delta \vec{F}_P + \delta \vec{F}_Q = \frac{SE}{\ell} (\delta \ell_2 - \delta \ell_1) \vec{u} = \frac{SE}{\ell} \times \ell^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \vec{u} \\ &= V \times E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \vec{u} \end{aligned}$$

où  $V = \ell S$  désigne le volume de  $(T)$ . Or, cette tranche, de masse  $m = \rho V$ , présente une accélération  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \vec{u}$  qui respecte la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \vec{u} = \vec{\mathcal{R}} \Rightarrow \rho V \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = V \times E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

Ainsi se déduit l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

où  $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  révèle la dépendance de la célérité des ondes acoustiques dans les matériaux en fonction de la masse volumique et du module d'Young de ces matériaux.

### 5.1.5 Conditions aux limites

#### 5.1.5.1 Réflexion et transmission d'une onde

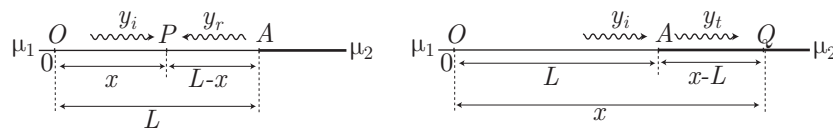
Considérons une corde linéaire, dont la masse linéique subit une discontinuité en  $x = L > 0$  :

$$\mu = \mu_1 \text{ pour } x < L \text{ et } \mu = \mu_2 \text{ pour } x > L$$

Ce faisant, une onde peut se propager dans les deux milieux, avec la même pulsation  $\omega$  (qui ne subit pas de discontinuité en  $x = L$ ) sur la corde de tension uniforme  $T$ , avec

des vitesses  $c_1 = \sqrt{\frac{T}{\mu_1}}$  et  $c_2 = \sqrt{\frac{T}{\mu_2}}$ . On posera alors :

$$k_1 = \frac{\omega}{c_1} = \frac{\omega}{\sqrt{T}} \sqrt{\mu_1} \text{ et } k_2 = \frac{\omega}{c_2} = \frac{\omega}{\sqrt{T}} \sqrt{\mu_2}$$



Soit une onde, émise au point  $O(x = 0)$ , qui arrive en  $P(0 \leq x \leq L)$ , avec une élongation d'image complexe :

$$\underline{y}_i(P) = Y_0 e^{j(k_1 x - \omega t)}$$

Cette onde arrive alors au point  $A$ , avec une élongation complexe :  $\underline{y}_i = Y_0 e^{jk_1 L}$ , où deux phénomènes peuvent se produire :

- une réflexion vers le point  $P$ , avec une élongation complexe :

$$\begin{aligned}\underline{y}_r(P) &= r Y_0 e^{jk_1 L} \times e^{j(k_1 AP - \omega t)} \text{ avec } AP = L - x \\ &= r Y_0 e^{j(2k_1 L - k_1 x - \omega t)}\end{aligned}$$

Le coefficient  $r$  est alors appelé *coefficient de réflexion en amplitude*.

- une transmission vers un point  $Q(x \geq 0)$ , avec une élongation complexe :

$$\begin{aligned}\underline{y}_t(Q) &= t Y_0 e^{jk_1 L} \times e^{j(k_2 AQ - \omega t)} \text{ avec } AQ = x - L \\ &= t Y_0 e^{j(k_1 L - k_2 L + k_2 x - \omega t)}\end{aligned}$$

Le coefficient  $t$  est alors appelé *coefficient de transmission en amplitude*.

Par suite, le point  $P$  reçoit une onde d'amplitude complexe :

$$\underline{y}(P) = \underline{y}_i(P) + \underline{y}_r(P) = Y_0 e^{-j\omega t} \times [e^{jk_1 x} + r e^{j(2k_1 L - k_1 x)}]$$

tandis que le point  $Q$  reçoit une onde décrite par l'amplitude complexe :

$$\underline{y}(Q) = \underline{y}_t(Q) = t Y_0 e^{j(k_1 L - k_2 L + k_2 x - \omega t)}$$

La continuité de l'élongation de la corde au point  $A$  se traduit par :

$$\underline{y}(L^-) = \underline{y}(L^+) = Y_0 e^{-j\omega t} [e^{jk_1 L} + r e^{jk_1 L}] = t Y_0 e^{j(k_1 L - \omega t)} \Rightarrow 1 + r = t$$

En outre, la dérivée  $\frac{\partial y}{\partial x}$  est continue en tout point de la corde, sans quoi l'équation de d'Alembert :  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$  présenterait une singularité. Cette continuité s'exprime notamment, au point  $A$ , par :

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{L^-} = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{L^+} &= Y_0 e^{-j\omega t} \times [jk_1 e^{jk_1 L} - r jk_1 e^{jk_1 L}] = t Y_0 jk_2 e^{j(k_1 L - \omega t)} \\ &\Rightarrow k_1 (1 - r) = k_2 t\end{aligned}$$

Apparaît alors un système de deux équations :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ k_1 (1 - r) = k_2 t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_2 (1 + r) = k_2 t \\ k_1 (1 - r) = k_2 t \end{cases}$$

d'où découlent les expressions des coefficients  $r$  et  $t$  :

$$r = \frac{k_1 - k_2}{k_2 + k_1} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} \text{ et } t = \frac{2k_1}{k_2 + k_1} = \frac{2\sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}}$$

### 5.1.5.2 Utilisation de la série de Fourier

Considérons une corde, fixée à ses extrémités  $x = 0$  et  $x = L$ , dont l'élongation  $y(x, t)$  vérifie l'équation de propagation  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ . Nous avons vu, à la page 679, que tout mode propre :

$$y_n(x, t) = [\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)] \times \sin(nkx) \text{ où } \omega_n = n \frac{\pi c}{L} \text{ et } k = \frac{\pi}{L}$$

est solution de l'équation de propagation. C'est pourquoi la combinaison linéaire de ces modes propres donne la solution générale :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \times \sin(nkx)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n \omega_n \sin(\omega_n t) + b_n \omega_n \cos(\omega_n t)] \times \sin(nkx)$$

Supposons connues les conditions initiales :  $y(x, 0)$  et  $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{(x, 0)}$ , les relations précédentes se présentent alors sous la forme :

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nkx) \text{ et } \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{(x, 0)} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \omega_n \sin(nkx)$$

Ces séries sont analogues à celles de Fourier associées aux fonctions périodiques  $y(x, 0)$  et  $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{(x, 0)}$ , de période  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2L$ . C'est pourquoi :

$$a_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} y(x, 0) \times \sin(nkx) \, dx = \frac{1}{L} \int_0^{2L} y(x, 0) \times \sin(nkx) \, dx$$

et :

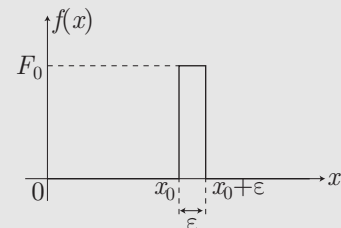
$$b_n = \frac{1}{L\omega_n} \int_0^{2L} \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{(x, 0)} \times \sin(nkx) \, dx$$



Une corde, de longueur  $L$  et de masse linéique  $\mu$ , est fixée à ses deux extrémités (en  $x = 0$  et en  $x = L$ ). On suppose que la corde occupe initialement sa position d'équilibre :  $y(x, 0) = 0$ , tandis qu'une impulsion lui est communiquée en  $x = x_0$ .

Cette impulsion se traduit par l'existence d'une fonction  $f(x) = \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{(x, 0)}$ , telle que :

$$\begin{cases} f(x) = 0 \text{ pour } x < x_0 \text{ et } x > x_0 + \varepsilon \\ f(x) = F_0 \text{ pour } x_0 \leq x \leq x_0 + \varepsilon \end{cases}$$



On admettra, en outre, que l'impulsion est caractérisée par une amplitude  $F_0$  telle que  $F_0 \times \varepsilon = 1$  et une durée  $\varepsilon$  infiniment petite. Déterminer l'élongation  $y(x, t)$  de chaque point de la corde, à toute date  $t$ .

**RÉPONSE** La corde étant fixée à ses deux extrémités, les solutions de l'équation de d'Alembert se mettent sous la forme d'ondes stationnaires :

$$y_n(x, t) = [\alpha_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \sin(\omega_n t)] \times \sin(nkx)$$

où  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont des constantes réelles,  $\omega_n = n \frac{\pi c}{L}$ ,  $k = \frac{\pi}{L}$ ,  $c$  est la célérité des ondes qui se propagent sur la corde et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ce faisant, toute combinaison linéaire des modes propres  $y_n$  est aussi solution de l'équation de d'Alembert, dont la solution générale s'écrit alors :

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \times \sin(nkx) \\ &\Rightarrow \frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n \omega_n \sin(\omega_n t) + \omega_n b_n \cos(\omega_n t)] \times \sin(nkx) \end{aligned}$$

Les constantes  $a_n$  et  $b_n$  sont, au demeurant, choisies de manière à ce que  $y(x, t)$  et  $\frac{\partial y}{\partial t}$  respectent les contraintes initiales :

$$y(x, t = 0) = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \times \sin(nkx) = 0 \forall x \in [0, L] \Rightarrow a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$$

et :

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{(x, 0)} = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n \sin(nkx)$$

où la fonction  $f(x)$  est périodique, de période :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2L$$

C'est pourquoi le théorème de Fourier permet d'en déduire que :

$$\omega_n b_n = \frac{2}{\lambda} \int_0^{\lambda} f(x) \sin(nkx) dx = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin(nkx) dx$$

c'est-à-dire, compte tenu de la définition de  $f(x)$  :

$$\begin{aligned} n \frac{\pi c}{L} b_n &= \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} F_0 \sin(nkx) dx \\ &= \frac{F_0}{Lnk} [-\cos(nkx)]_{x_0}^{x_0 + \varepsilon} \\ &= \frac{F_0}{Lnk} [\cos(nkx_0) - \cos(nkx_0 + nk\varepsilon)] \end{aligned}$$

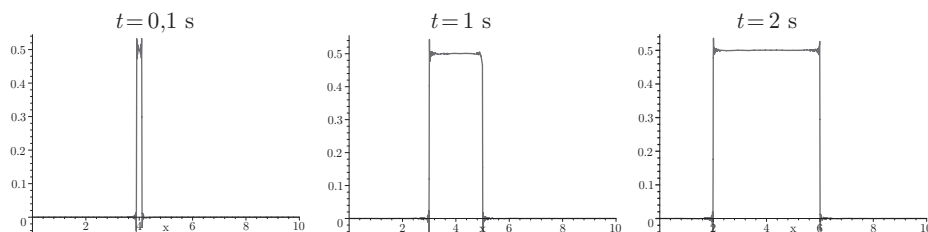
Or,  $\varepsilon$  étant infiniment petit, un développement limité conduit à :

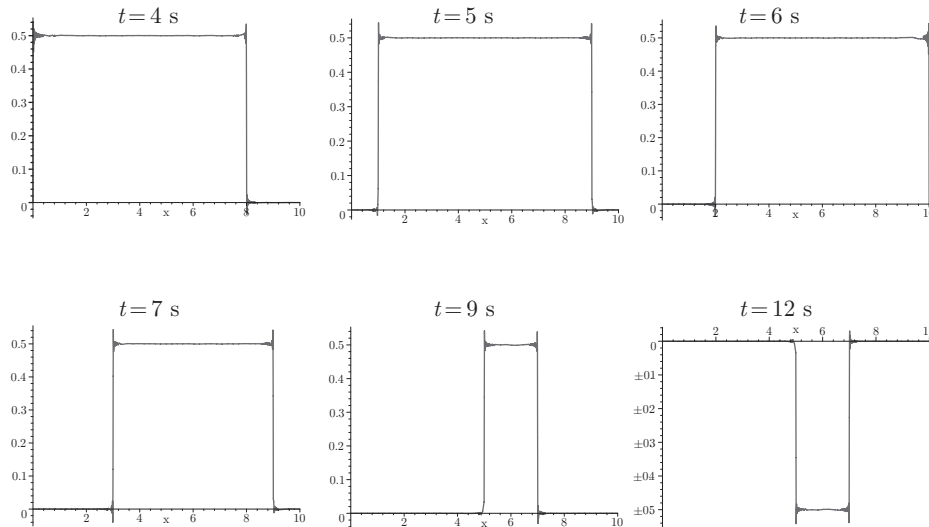
$$\begin{aligned} \cos(nkx_0 + nk\varepsilon) &= \cos(nkx_0) - \sin(nkx_0) \times nk\varepsilon \\ \Rightarrow n \frac{\pi c}{L} b_n &= \frac{F_0}{nkL} \times nk\varepsilon \sin(nkx_0) \\ \Rightarrow b_n &= \frac{1}{n\pi c} \times \sin(nkx_0) \text{ car } F_0 \varepsilon = 1 \end{aligned}$$

En conclusion :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nkx_0)}{n\pi c} \sin(nkx) \sin(\omega_n t)$$

Afin d'illustrer le résultat précédent, les courbes suivantes ont été obtenues en choisissant  $L = 10$ ,  $x_0 = 4$  et  $c = 1$ , pour diverses valeurs de  $t$  :





## 5.2 Ondes sonores dans les fluides

### 5.2.1 Propagation des ondes sonores

#### 5.2.1.1 Équation de propagation

On considère un fluide dans lequel, en chaque point, peuvent être définies :

- la pression  $P$ , qui prend la valeur  $P_0$  lorsque le fluide est au repos ;
- la masse volumique  $\rho$ , de valeur  $\rho_0$  à l'équilibre.

La variation de la pression par rapport à  $P_0$  est appelée surpression :  $p = P - P_0$  et l'on note  $\delta\rho = \rho - \rho_0$  la variation de  $\rho$  par rapport à  $\rho_0$  à l'équilibre.

Chaque élément de fluide est caractérisé par sa position et sa vitesse  $\vec{v}$ .

**Définition 9** On appelle approximation acoustique, l'approximation selon laquelle  $p$ ,  $\delta\rho$  et  $\vec{v}$  sont très faibles, ainsi que les déplacements des éléments de fluides.

Dans le modèle du fluide en écoulement parfait, l'équation d'Euler s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P$$

où  $\vec{g}$  désigne le champ de pesanteur. Or, à l'équilibre,  $\vec{v} = \vec{0}$  a pour conséquence :

$$\begin{aligned} \vec{g} = \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P_0 &\Rightarrow \vec{g} - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} (P - P_0) = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p \\ &\Rightarrow \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} p \\ &\Rightarrow (\rho_0 + \delta\rho) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} p \end{aligned}$$

Or, dans le cadre de l'approximation acoustique :



- $\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} p$  sont des termes infiniment petits d'ordre 1 ;
- $\delta \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  et  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{v}$  sont des infiniments petits d'ordre 2.

C'est pourquoi, au premier ordre :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p \quad (7)$$

Quant à la conservation de la matière, elle s'exprime par l'équation :

$$\begin{aligned} \text{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 &\Rightarrow \rho \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ &\Rightarrow (\rho_0 + \delta \rho) \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (\rho_0 + \delta \rho) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{aligned}$$

On admettra, par la suite, que les écarts à l'équilibre sont assez rapides pour s'effectuer d'une manière adiabatique, en conséquence de quoi la compressibilité du fluide est décrite par le coefficient :

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S$$

Or, une masse  $m = \rho V$  de fluide ne varie pas, en dépit des variations de  $\rho$  et  $V$ , en conséquence de quoi :

$$\begin{aligned} m = \rho V = \text{cte} &\Rightarrow \ln m = \ln \rho + \ln V \Rightarrow \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S + \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S = 0 \\ &\Rightarrow \chi_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S = \frac{1}{\rho} \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S \end{aligned}$$

Ce faisant, une variation  $p = P - P_0$  de la pression s'accompagne d'une variation  $\delta \rho$  de  $\rho$  telle que :

$$\delta \rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_S \times p = \rho \chi_S \times p$$

C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial (\rho_0 + \delta \rho)}{\partial t} = \frac{\partial (\delta \rho)}{\partial t} = \chi_S p \frac{\partial \rho}{\partial t} + \chi_S \rho \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \chi_S p \frac{\partial (\rho_0 + \delta \rho)}{\partial t} + \chi_S (\rho_0 + \delta \rho) \frac{\partial p}{\partial t} \\ &= \chi_S \rho_0 \frac{\partial p}{\partial t} + \chi_S p \frac{\partial (\delta \rho)}{\partial t} + \chi_S \delta \rho \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned}$$

Par suite, l'équation traduisant la conservation de la matière devient :

$$\underbrace{\rho_0 \text{div} \vec{v} + \chi_S \rho_0 \frac{\partial p}{\partial t}}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\delta \rho \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} (\delta \rho) + \chi_S p \frac{\partial (\delta \rho)}{\partial t} + \chi_S \delta \rho \frac{\partial p}{\partial t}}_{\text{ordre 2}} = 0$$

c'est-à-dire, en ne conservant que les termes infiniment petits d'ordre 1 :

$$\rho_0 \operatorname{div} \vec{v} + \chi_S \rho_0 \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = -\chi_S \frac{\partial p}{\partial t} \quad (8)$$

La dérivée de l'équation (8) par rapport à  $t$  fournit :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\operatorname{div} \vec{v}] = -\chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Rightarrow \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

où  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  est donné par l'équation (7) :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \overrightarrow{\operatorname{grad}} p \Rightarrow \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \Delta p \Rightarrow -\frac{1}{\rho_0} \Delta p = -\chi_S \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

La surpression est donc solution de l'équation de d'Alembert :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \text{ où } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} \quad (9)$$

De même, la dérivation de l'équation (7) par rapport à  $t$  fournit :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} p) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left( -\frac{\partial p}{\partial t} \right) = \frac{1}{\chi_S} \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{v})$$

où :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} (\operatorname{div} \vec{v}) = \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) + \Delta \vec{v} \Rightarrow \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \overrightarrow{\operatorname{rot}} (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) + \Delta \vec{v}$$

Dans le cas où l'écoulement du fluide est irrotationnel, cette équation devient analogue à l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{v} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}} \quad (10)$$

⚠ L'expression du Laplacien vectoriel adopte des formes relativement complexes :

- En coordonnées cartésiennes

$$\Delta \vec{v} = (\Delta v_x) \vec{e}_x + (\Delta v_y) \vec{e}_y + (\Delta v_z) \vec{e}_z$$

$$\text{avec : } \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\Delta \vec{v} = \left( \Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \vec{e}_r + \left( \Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\theta + (\Delta v_z) \vec{e}_z$$

avec :

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{v} = & \left[ \Delta v_r - \frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r \\ & + \left[ \Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\theta \\ & + \left[ \Delta v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

avec :

$$\Delta \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\psi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2}$$

### 5.2.1.2 Propagation à une dimension

Supposons que l'onde sonore se propage selon une seule direction, par exemple celle de l'axe ( $Ox$ ) d'un tube ; le Laplacien se simplifie :

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

et, en coordonnées cartésiennes :  $\vec{v} = v(x) \vec{e}_x$ , de sorte que :

$$\Delta \vec{v} = (\Delta v) \vec{e}_x = \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \vec{e}_x = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \vec{e}_x$$

Par suite, les équations de propagation (9) et (10) deviennent :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

et :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } \vec{v} = v(x, t) \vec{e}_x$$

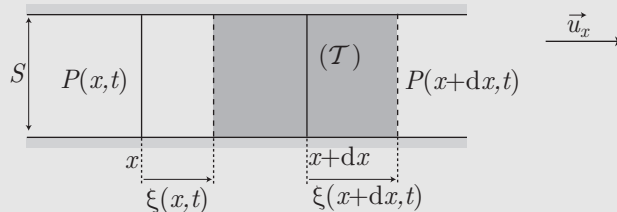
Ces équations admettent alors, entre autres, des solutions en ondes progressives :

$$\begin{cases} p(x, t) = f_p(\omega t + kx) + g_p(\omega t - kx) \\ v(x, t) = f_v(\omega t + kx) + g_v(\omega t - kx) \end{cases} \quad \text{où } \omega = k \times c$$

conformément à l'expression (4) de la page 674 ou, éventuellement, des solutions en ondes stationnaires si les conditions aux limites imposent des contraintes.



Un fluide, de coefficient de compressibilité adiabatique  $\chi_S$ , se trouve dans une conduite linéaire d'axe ( $Ox$ ) et de section  $S$  constante. Au repos, le fluide présente une masse volumique  $\rho_0$  uniforme et la pression vaut  $P_0$  en tout point de la conduite. Une tranche de fluide ( $\mathcal{T}$ ), comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , est soumise aux pressions  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$  et  $P(x + dx, t) = P_0 + p(x + dx, t)$  au passage d'une onde sonore, qui provoque les déplacements  $\xi(x, t)$  et  $\xi(x + dx, t)$  de ses sections de base.



- Déterminer la résultante  $\vec{\mathcal{R}}$  des forces de pression qui s'exercent sur ( $\mathcal{T}$ ), en fonction de  $\frac{\partial p}{\partial x}$ ,  $dx$ ,  $S$  et  $\vec{u}_x$ .
- Déduire de la loi fondamentale de la dynamique l'équation :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x}$$

- Trouver la relation existant entre  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ,  $\chi_S$  et  $p(x, t)$ .
- Le fluide étant un gaz parfait, montrer que la célérité de l'onde sonore est proportionnelle à  $\sqrt{T}$ , où  $T$  désigne la température du fluide.

#### RÉPONSE

- Soient  $\vec{f}(x, t) = P(x, t) S \vec{u}_x$  et  $\vec{f}(x + dx, t) = -P(x + dx, t) S \vec{u}_x$  les forces de pression qui s'exercent sur les surfaces de base de ( $\mathcal{T}$ ). Si la conduite est droite, la résultante des forces de pression qui s'exercent sur ( $\mathcal{T}$ ) vaut :

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{f}(x, t) + \vec{f}(x + dx, t) = [P(x, t) - P(x + dx, t)] S \vec{u}_x$$

où  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$  et :

$$P(x + dx, t) = P_0 + p(x + dx, t) = P_0 + p(x, t) + \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$\Rightarrow P(x, t) - P(x + dx, t) = - \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

$$\Rightarrow \vec{\mathcal{R}} = - \frac{\partial p}{\partial x} S dx \vec{u}_x$$

2. La tranche ( $\mathcal{T}$ ) présente, au repos (et donc à tout autre instant), une masse  $\delta m = \rho_0 V_0$  où  $V_0 = S dx$  désigne son volume au repos. Aussi, la loi fondamentale de la dynamique impose :

$$\delta m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \vec{u}_x = \vec{\mathcal{R}} \Rightarrow \rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} S dx$$

soit encore :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (11)$$

3. Le coefficient de compressibilité adiabatique :  $\chi_S = - \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S$  permet de relier la variation du volume  $V$  d'un élément de fluide à la variation  $\delta P$  de la pression qui en est responsable :

$$\delta V = \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S \delta P = - \chi_S V \delta P$$

Notamment, lorsque la pression  $P$  passe de la valeur  $P_0$  à la valeur  $P(x, t) = P_0 + p(x, t)$ , le volume de ( $\mathcal{T}$ ) passe de  $V_0 = S dx$  à :

$$V_1 = [x + dx + \xi(x + dx, t)] S - [x + \xi(x, t)] S = dx \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) S$$

C'est pourquoi la définition de  $\chi_S$  conduit à :

$$\begin{aligned} V_1 - V_0 = - \chi_S V_0 [P(x, t) - P_0] &\Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} S dx = - \chi_S \times S dx \times p(x, t) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial x} = - \chi_S p(x, t) \end{aligned}$$

4. De la loi précédente, il découle que :

$$p(x, t) = - \frac{1}{\chi_S} \frac{\partial \xi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

de sorte que l'équation (11) conduit à l'équation de propagation de l'onde acoustique :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\chi_S} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

où  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$  représente la célérité de cette onde dans le fluide. Si ce dernier est un gaz parfait qui subit des variations isentropiques, la loi de Laplace fournit :

$$\begin{aligned} PV^\gamma = \text{cte} &\Rightarrow \ln P + \gamma \ln V = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{P} + \frac{\gamma}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S = 0 \\ &\Rightarrow \chi_S = - \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S = \frac{1}{\gamma P} \simeq \frac{1}{\gamma P_0} \end{aligned}$$

En outre, une masse  $m$  de ce gaz, de masse molaire  $M$ , contient  $n$  moles de particules, telles que :

$$P_0 V_0 = nRT = m \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho_0 = \frac{m}{V_0} = \frac{MP_0}{RT}$$

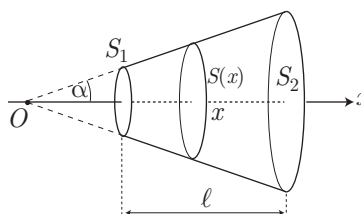
Ce faisant :

$$\rho_0 \chi_S = \frac{MP_0}{RT} \times \frac{1}{\gamma P_0} = \frac{M}{\gamma RT} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{\gamma R}{M}} \times \sqrt{T}$$

### 5.2.1.3 Propagation dans un pavillon acoustique

**Définition 10** Un pavillon acoustique est un conduit de révolution cylindrique, dont la section est variable.

Pour la suite des calculs, on rappelle quelques propriétés géométriques d'une figure tronconique de longueur élémentaire  $\ell \ll 1$ , d'angle  $\alpha$  et dont les sections de base sont  $S_1$  et  $S_2$ .



La surface latérale de cette figure vaut :

$$\Sigma = \frac{\ell}{\sin \alpha} \frac{dS}{dx} \quad (12)$$

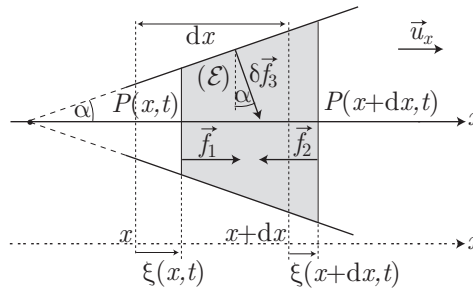
et son volume vaut :

$$V = \ell S_1 + \frac{\ell^2}{2} \frac{dS}{dx} \simeq \ell S_1 \quad \text{car } \ell \ll 1 \quad (13)$$



Dans la suite, on assimilera un élément du pavillon acoustique, caractérisé par  $S(x)$ , à un volume tronconique.

Considérons un élément ( $\mathcal{E}$ ) de fluide, compris au repos entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  d'un pavillon acoustique. Lorsque ( $\mathcal{E}$ ) est au repos, la pression vaut uniformément  $P_0$  dans le pavillon.



L'élément ( $\mathcal{E}$ ) présente une masse  $\delta m = \rho_0 V_0$ , où  $\rho_0$  désigne la masse volumique du fluide au repos et  $V_0$  le volume de ( $\mathcal{E}$ ) au repos, donné par la loi (13) :

$$V_0 = dx \times S(x) = dx \times S \Rightarrow \delta m = \rho_0 S dx$$

Lors du passage d'une onde acoustique, les surfaces de base de ( $\mathcal{E}$ ) se déplacent respectivement de  $\xi(x, t)$  et de  $\xi(x + dx, t)$ , de sorte que l'accélération de ( $\mathcal{E}$ ) vaut, au premier ordre en  $\xi$  et en  $\frac{\partial \xi}{\partial x}$  :  $\vec{\gamma} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \vec{u}_x$ .

En outre ( $\mathcal{E}$ ) est soumis à :

- une force de pression  $\vec{f}_1 = P(x, t) S(x) \vec{u}_x$  qui s'exerce sur la face de gauche, où la pression vaut  $P(x, t)$  ;
- une force de pression :

$$\begin{aligned} \vec{f}_2 &= -P(x + dx) S(x + dx) \vec{u}_x = - \left[ P(x, t) S(x) + \frac{\partial(P S)}{\partial x} dx \right] \vec{u}_x \\ \Rightarrow \vec{f}_1 + \vec{f}_2 &= - \frac{\partial(P S)}{\partial x} dx \vec{u}_x \end{aligned}$$

- des forces de pression  $\delta \vec{f}_3$  exercées par une surface élémentaire  $\delta \Sigma$  de la paroi latérale du pavillon. La résultante de ces forces,  $\vec{f}_3$ , est dirigée selon  $\vec{u}_x$ , compte

tenu de la symétrie cylindrique du pavillon :

$$\begin{aligned}\vec{f}_3 &= \iint_{(\Sigma)} \delta \vec{f}_3 = f_3 \vec{u}_x \Rightarrow f_3 = \vec{f}_3 \cdot \vec{u}_x = \iint_{(\Sigma)} \delta \vec{f}_3 \cdot \vec{u}_x \\ &\Rightarrow f_3 = \iint_{(\sigma)} \delta f_3 \sin \alpha\end{aligned}$$

Or, le fluide exerce, sur la paroi latérale immobile, de surface  $\delta\Sigma$ , une pression  $P(x, t)$ , auquel cas :

$$\delta f_3 = P(x, t) \delta\Sigma \Rightarrow f_3 = P(x, t) \sin \alpha \iint_{(\Sigma)} \delta\Sigma = P(x, t) \sin \alpha \Sigma$$

où  $\Sigma$  est fourni par la loi (12) :

$$\Sigma = \frac{dx}{\sin \alpha} \frac{dS}{dx} \Rightarrow f_3 = P(x, t) \frac{dS}{dx} \times dx$$

Par suite,  $(\mathcal{E})$  est soumis à des forces de résultante :

$$\mathcal{R} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = -\frac{\partial(PS)}{\partial x} dx \vec{u}_x + P \frac{dS}{dx} dx \vec{u}_x = -\frac{\partial P}{\partial x} S dx \vec{u}_x$$

On notera désormais  $p(x, t)$  la surpression par rapport à la pression au repos, telle que :

$$P(x, t) = P_0 + p(x, t) \Rightarrow \vec{\mathcal{R}} = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx \vec{u}_x$$

Ainsi, la loi fondamentale de la dynamique impose-t-elle :

$$\delta m \vec{\gamma} = \vec{\mathcal{R}} \Rightarrow \rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (14)$$

En supposant les petits mouvements de  $(\mathcal{E})$  assez rapides pour demeurer adiabatiques, le coefficient de compressibilité isentropique :  $\chi_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S$  permet de relier la variation  $\delta V$  du volume de  $(\mathcal{E})$  à la surpression  $\delta P = p(x, t)$  qui en est l'origine :

$$\delta V = \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S \delta P \Rightarrow \delta V = V - V_0 = -\chi_S V_0 p \quad (15)$$

où le volume  $V$  est donné par la loi (13), tandis que  $(\mathcal{E})$  se trouve entre les abscisses  $x + dx + \xi(x + dx, t)$  et  $x + \xi(x, t)$  :

$$\begin{aligned}V &= \ell S(x + \xi) \text{ avec } \ell = [x + dx + \xi(x + dx, t)] - [x + \xi(x, t)] \\ &= dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \text{ et } S(x + \xi) = S(x) + \frac{dS}{dx} \times \xi\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}V &= dx \left( 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \times \left[ S(x) + \frac{dS}{dx} \xi \right] \\ &= dx \times \left[ S(x) + \frac{dS}{dx} \xi + S \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dS}{dx} \frac{\partial \xi}{\partial x} \xi \right]\end{aligned}$$

Or, dans le cadre de l'approximation acoustique,  $\xi$  est infiniment petit, de sorte qu'au premier ordre on peut ne retenir que :

$$\delta V = dx \times \left[ \frac{dS}{dx} + S \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] = dx \times \frac{\partial(S\xi)}{\partial x}$$

Ce faisant, la loi (15) devient :

$$\begin{aligned} dx \times \frac{\partial(S\xi)}{\partial x} = \chi_S S dx p &\Rightarrow p = -\frac{1}{S \chi_S} \times \frac{\partial(S\xi)}{\partial x} \\ &\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\chi_S} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{S} \frac{\partial(S\xi)}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

Le remplacement de  $\frac{\partial p}{\partial x}$  dans l'équation (14) conduit finalement à l'équation de propagation de l'onde sonore dans le pavillon acoustique :

$$\chi_S \rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{S} \frac{\partial(S\xi)}{\partial x} \right] \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{S} \frac{\partial(S\xi)}{\partial x} \right] - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad (16)$$



Un pavillon acoustique exponentiel est caractérisé par une section :

$$S(x) = S_0 e^{\alpha x}$$

où  $S_0$  et  $\alpha$  sont des constantes positives. On considère un phénomène acoustique caractérisé par l'élongation complexe :  $\underline{\xi} = \xi_0 e^{i(kx - \omega t)}$ .

1. Montrer qu'il existe une pulsation de coupure  $\omega_c$  telle que, pour  $\omega < \omega_c$ , aucune onde acoustique ne se propage dans le pavillon.
2. Lorsque  $\omega > \omega_c$ , montrer que l'onde acoustique qui se propage dans le pavillon subit une atténuation dont on donnera la longueur caractéristique.

#### RÉPONSE

1. En choisissant  $S(x) = S_0 e^{\alpha x}$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{S} \frac{\partial(S\xi)}{\partial x} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \alpha \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

de sorte que l'équation (16) devient, en notation complexe :

$$\alpha \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_S \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial t^2} = 0$$

c'est-à-dire, en utilisant la fonction :  $\underline{\xi} = \xi_0 e^{i(kx - \omega t)}$  :

$$\alpha j k - k^2 + \rho_0 \chi_S \omega^2 = 0 \quad (17)$$

Cette équation du second degré en  $k$  admet pour discriminant :

$$\Delta = -\alpha^2 + 4\rho_0 \chi_S \omega^2 = \alpha^2 \left( -1 + \frac{4\rho_0 \chi_S}{\alpha^2} \omega^2 \right)$$

c'est-à-dire :

$$\Delta = \alpha^2 \left( -1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) \text{ où } \omega_c = \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$$

il apparaît ainsi que si  $\omega < \omega_c = \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$ ,  $\Delta$  est négatif et peut donc s'écrire :

$$\Delta = (\alpha j)^2 \times \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right)$$



Par conséquent, l'équation (17) admet pour solution :

$$k = \frac{\alpha j \pm \sqrt{\Delta}}{2} = j \frac{\alpha}{2} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \right]$$

Ainsi, puisque  $k$  est un imaginaire pur, il existe un réel  $\kappa$  tel que :

$$\begin{aligned} k = j\kappa &\Rightarrow \underline{\xi} = \xi_0 e^{j(kx - \omega t)} = \xi_0 e^{-\kappa x} e^{-j\omega t} \\ &\Rightarrow \xi(x, t) = \operatorname{Re} \{ \underline{\xi} \} = \xi_0 e^{-\kappa x} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Cette expression montre que, dans ce cas, aucune onde acoustique ne peut se propager dans le pavillon.

2. Lorsque  $\omega > \omega_c$ ,  $\Delta > 0$  confère à l'équation (17) les solutions :

$$k = \frac{\alpha j \pm \sqrt{\Delta}}{2} = j \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1} = j \frac{\alpha}{2} \pm k_r \text{ où } k_r \in \mathbb{R}$$

Ce faisant, les perturbations du fluide sont décrites par :

$$\begin{aligned} \underline{\xi} &= \xi_0 e^{-\alpha x/2} \times e^{j(\pm k_r x - \omega t)} \\ &\Rightarrow \xi(x, t) = \xi_0 e^{-x/\delta} \times \cos(\pm k_r x - \omega t) \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\xi(x, t)$  subit une atténuation, de longueur caractéristique  $\delta = \frac{2}{\alpha}$ .

## 5.2.2 Ondes sphériques

Considérons une source sonore de symétrie sphérique, placée en  $O$  dans un fluide homogène et isotrope, de sorte que la surpression  $p$  en  $M$  ne dépende que de la distance  $r = OM$  séparant  $M$  de  $O$ . Dans ce cas, en coordonnées sphériques, le Laplacien de  $p(r, t)$  vaut :

$$\Delta p = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp)$$

ce qui donne à l'équation de propagation (9) de la page 690 la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rp) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} = 0$$

Les solutions de cette équation s'écrivent :

- pour les ondes sphériques s'éloignant de  $O$  :

$$rp = f(\omega t - kr) \Rightarrow p(r, t) = \frac{f(\omega t - kr)}{r}$$

- pour les ondes sphériques convergeant vers  $O$  :

$$rp = g(\omega t + kr) \Rightarrow p(r, t) = \frac{g(\omega t + kr)}{r}$$

## 5.2.3 Aspect énergétique

### 5.2.3.1 Définitions

**Définition 11** Soit un volume ( $V$ ) d'un fluide, circonscrit dans une surface fermée ( $\Sigma$ ). La densité volumique  $e$  d'énergie acoustique est définie par le rapport :

$$e = \frac{\delta \mathcal{E}}{d\tau}$$

où  $\delta \mathcal{E}$  désigne l'énergie acoustique comprise dans le volume élémentaire  $d\tau$ .

Le corrolaire de cette définition est que l'énergie acoustique contenue dans  $(V)$  s'écrit :

$$\mathcal{E} = \iiint_{(V)} e \, d\tau$$

Lorsqu'une onde acoustique, caractérisée par la surpression  $p$  et la vitesse d'écoulement  $v$ , se propage dans un milieu de masse volumique au repos  $\rho_0$  et de coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_S$  :

$$e = \frac{1}{2} (\rho_0 v^2 + \chi_S p^2)$$

**Définition 12** La puissance acoustique  $\mathcal{P}$  qui traverse une surface  $(\Sigma)$  est liée au vecteur densité de courant d'énergie acoustique  $\vec{I}$  par la loi :

$$\mathcal{P} = \iint_{(\Sigma)} \vec{I} \cdot d\vec{S} \text{ avec } \vec{I} = p \vec{v}$$

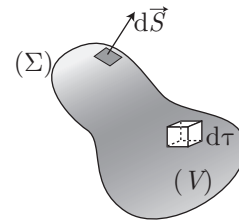
Le vecteur  $\vec{I}$  est aussi appelé intensité acoustique.

Considérons une surface fermée  $(\Sigma)$  dont le volume  $(V)$  renferme une énergie acoustique :

$$\mathcal{E} = \iiint_{(V)} e \, d\tau$$

Pendant la durée  $dt$ , ce volume  $(V)$  acquiert une énergie acoustique :

$$d\mathcal{E} = \iint_{(V)} \frac{\partial e}{\partial t} dt \, d\tau \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \iiint_{(V)} \frac{\partial e}{\partial t} d\tau$$



Or, pendant  $dt$ , la surface  $(\Sigma)$  est traversée par une énergie  $\delta \mathcal{E}$ , dont la puissance est définie par :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta \mathcal{E}}{dt} = - \iint_{(\sigma)} \vec{I} \cdot d\vec{S} = - \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{I} \, d\tau$$

Enfin, la loi de conservation de l'énergie acoustique impose :

$$d\mathcal{E} = \delta \mathcal{E} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\delta \mathcal{E}}{dt} \Rightarrow \iiint_{(V)} \frac{\partial e}{\partial t} d\tau = - \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{I} \, d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{I} = 0$$


**Définition 13** Soit une onde acoustique, caractérisée par la propagation d'une surpression :

$$p(x, t) = \sqrt{2} p_{\text{eff}} \cos(\omega t - kx)$$

L'intensité sonore (en décibels) est définie par :

$$I_{dB} = 20 \log \left( \frac{p_{\text{eff}}}{p_{\text{ref}}} \right) \text{ avec } p_{\text{ref}} = 2.10^{-5} \text{ Pa}$$

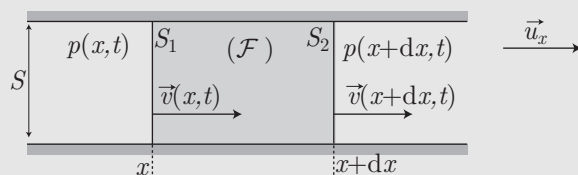
### 5.2.3.2 Onde plane progressive

 Une onde plane progressive se déplace dans la direction  $\vec{u}_x$  d'un tuyau de section  $S$  constante. En un point d'abscisse  $x$ , la surpression vaut :

$$p(x, t) = f(\omega t - kx) \text{ où } \omega = kc \text{ et } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$$

$\rho_0$  et  $\chi$  étant respectivement la masse volumique et le coefficient de compressibilité isentropique du fluide. La vitesse d'écoulement du fluide,  $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{u}_x$  vérifie les équations :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad} p \text{ et } \text{div} \vec{v} = -\chi \frac{\partial p}{\partial t} \quad (18)$$



On s'intéressera, dans la suite, à un élément de fluide dont les faces  $S_1$  et  $S_2$  sont situées respectivement aux abscisses  $x$  et  $x + dx$ , à l'équilibre.

1. En négligeant les forces de frottement et le poids du fluide, effectuer un bilan des forces qui s'exercent sur  $(\mathcal{F})$ . En déduire l'expression de la puissance acoustique  $\mathcal{P}$  reçue par  $(\mathcal{F})$ , en fonction de  $S$ ,  $dx$ ,  $p = p(x, t)$  et  $v = v(x, t)$ .
2. Montrer qu'il existe une énergie  $\mathcal{E} = \mathcal{E}(x, t)$  telle que  $\mathcal{P} = -\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ . En déduire l'expression de la densité volumique d'énergie :  $e = \frac{\mathcal{E}(x, t)}{S dx}$ , en fonction de  $\rho_0$ ,  $v^2$ ,  $\chi$  et  $p^2$ .
3. Le vecteur densité de courant d'énergie acoustique est défini par :

$$\vec{I}(x, t) = p(x, t) \times v(x, t) \vec{u}_x$$

Montrer que  $\mathcal{P} = -S dx \frac{\partial I}{\partial x}$  où  $I = I(x, t) = p(x, t) \times v(x, t)$ .

4. Déterminer l'expression de  $v = \|\vec{v}\|$  en fonction de  $\rho_0$ ,  $c$  et  $f(\omega t - kx)$ .

6. La valeur moyenne temporelle de  $f^2$  est notée  $\langle f^2 \rangle$ . Montrer que :

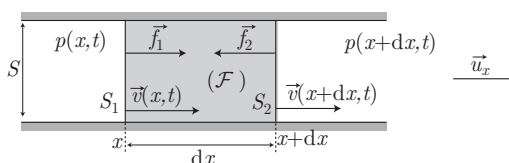
$$\rho_0 \langle v^2 \rangle = \chi \langle p^2 \rangle = \frac{1}{\rho_0 c^2} \langle f^2 \rangle$$

En déduire l'expression de  $\langle e \rangle$  en fonction de  $\rho_0$ ,  $c^2$  et  $\langle f^2 \rangle$ .

7. Déduire de cette expression que :  $\langle \vec{I} \rangle = c \vec{e} \vec{u}_x$ .

#### RÉPONSE

1. La surface ( $S_1$ ) est soumise à une force de pression  $\vec{f}_1 = S \times p(x, t) \vec{u}_x$  de la part du gaz qui se trouve à gauche, tandis que le gaz qui se trouve à droite de ( $S_2$ ) exerce la force de pression  $\vec{f}_2 = -S \times p(x + dx, t) \vec{u}_x$ .



Ces forces ont alors pour puissances respectives :

$$\mathcal{P}_1 = \vec{f}_1 \cdot \vec{v}(x, t) = S \times p(x, t) v(x, t) \text{ et } \mathcal{P}_2 = \vec{f}_2 \cdot \vec{v}(x + dx, t) = S \times p(x + dx, t) v(x + dx, t)$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{P}_1 = S \times \psi(x, t) \text{ et } \mathcal{P}_2 = -S \times \psi(x + dx, t) \text{ avec } \psi(x, t) = v(x, t) \times p(x, t)$$

Ce faisant, la puissance reçue par ( $\mathcal{F}$ ) vaut :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = S [\psi(x, t) - \psi(x + dx, t)] \quad (19)$$

$$= S \left[ \psi(x, t) - \psi(x, t) - \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right] = -S dx \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (20)$$

ou encore :

$$\mathcal{P} = -S dx \frac{\partial}{\partial x} (pv) = -S dx \times \left[ v \frac{\partial p}{\partial x} + p \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

2. Lorsque  $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{u}_x$  et  $p = p(x, t)$ , les lois (18) deviennent :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial v}{\partial x} = -\chi \frac{\partial p}{\partial t} \quad (21)$$

en conséquence de quoi :

$$\mathcal{P} = S dx \times \left[ \rho_0 v \frac{\partial v}{\partial t} + \chi p \frac{\partial p}{\partial t} \right] = S dx \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\rho_0}{2} v^2 + \frac{\chi}{2} p^2 \right]$$

ce qui prouve l'existence d'une fonction :

$$\mathcal{E}(x, t) = S dx \times \left[ \frac{\rho_0}{2} v^2 + \frac{\chi}{2} p^2 \right]$$

telle que  $\mathcal{P} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$ . Aussi, la densité volumique d'énergie est-elle définie par :

$$e = \frac{\mathcal{E}(x, t)}{S dx} = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{1}{2} \chi p^2 \quad (22)$$

3. La définition du vecteur  $\vec{I}(x, t) = p(x, t) \times v(x, t) \vec{u}_x$  se ramène à :

$$\vec{I}(x, t) = \psi(x, t) \vec{u}_x \Rightarrow I = I(x, t) = \psi(x, t)$$

Ce faisant, l'équation (20) confirme que :

$$\mathcal{P} = -S dx \frac{\partial \psi}{\partial x} \Rightarrow \mathcal{P} = -S dx \frac{\partial I}{\partial x}$$

4. L'onde plane progressive est caractérisée par :

$$p(x, t) = f(\omega t - kx) = f(u) \text{ où } u = u(x, t) = \omega t - kx$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{df}{du} \times \frac{\partial u}{\partial x} = -k \frac{df}{du}$$

C'est pourquoi la première des équations (21) conduit à :

$$-\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial x} = -k \frac{df}{du} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{k}{\rho_0} \frac{df}{du}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{k}{\rho_0 \omega} \frac{\partial u}{\partial t} \frac{df}{du} \text{ car } \frac{\partial u}{\partial t} = \omega$$

On établit ainsi que :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{k}{\rho_0 \omega} \frac{\partial f}{\partial t} \text{ avec } \omega = kc$$

soit encore :  $v(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c} \times f(\omega t - kx)$ .

5. Étant donné que  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}} \Rightarrow \chi = \frac{1}{\rho_0 c^2}$ , il s'ensuit que :

$$\chi \langle p^2 \rangle = \frac{1}{\rho_0 c^2} \langle f^2 \rangle \text{ car } p(x, t) = f(\omega t - kx)$$

tandis que :

$$\rho_0 \langle v^2 \rangle = \rho_0 \times \left\langle \frac{1}{\rho_0^2 c^2} f^2 \right\rangle = \frac{1}{\rho_0 c^2} \langle f^2 \rangle$$

ce qui suffit à montrer que :

$$\chi \langle p^2 \rangle = \rho_0 \langle v^2 \rangle = \frac{1}{\rho_0 c^2} \langle f^2 \rangle$$

Ce faisant, il découle de l'équation (22) que :

$$\langle e \rangle = \frac{1}{2} \rho_0 \langle v^2 \rangle + \frac{1}{2} \chi \langle p^2 \rangle \Rightarrow \langle e \rangle = \frac{1}{\rho_0 c^2} \langle f^2 \rangle$$

6. En outre, la définition de  $\vec{I}$  a pour conséquence :

$$\vec{I} = p(x, t) \times v(x, t) \vec{u}_x = \frac{1}{\rho_0 c} \times f^2(\omega t - kx) \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \langle \vec{I} \rangle = \frac{1}{\rho_0 c} \langle f^2 \rangle \vec{u}_x = c \times \frac{\langle f^2 \rangle}{\rho_0 c^2} \vec{u}_x$$

$$\Rightarrow \langle \vec{I} \rangle = c \langle e \rangle \vec{u}_x$$

### 5.2.3.3 Onde sonore sphérique



Une onde sphérique est décrite, à toute date  $t$ , par la surpression  $p(r, t)$  et la vitesse  $\vec{v} = v(r, t) \vec{e}_r$  d'écoulement du fluide (de masse volumique moyenne  $\rho_0$  et de coefficient de compressibilité isentropique  $\chi$ ) en tout point  $M$  de l'espace tel que  $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ ,  $O$  étant un point fixe de l'espace. On rappelle les équations auxquelles sont soumis  $p$  et  $\vec{v}$  :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p \text{ et } \text{div } \vec{v} = -\chi \frac{\partial p}{\partial t}$$

On donne, en outre, l'expression de la divergence d'un vecteur  $\vec{A} = A_r \vec{e}_r + A_\theta \vec{e}_\theta + A_\varphi \vec{e}_\varphi$ , en coordonnées sphériques :

$$\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

1. En notant  $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$ , retrouver l'équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par  $r \times p(r, t)$ .
2. En déduire la forme générale de la solution en ondes progressives de cette équation.
3. On s'intéresse à une onde harmonique sphérique, dont l'image complexe de la surpression vaut :

$$\underline{p} = p_0 \times \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \Rightarrow p(r, t) = \text{Re} \{ \underline{p} \}$$

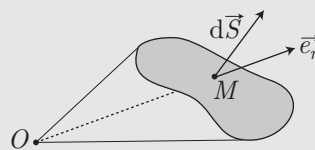
Déterminer l'expression de l'image complexe  $\underline{v}$ , telle que  $\vec{v}(r, t) = \text{Re} \{ \underline{v} \}$ .

4. Rappeler la définition du vecteur densité de courant d'énergie acoustique  $\vec{I}$  et rappeler son expression en fonction de  $p$  et  $\vec{v}$ .
5. Démontrer que, pour deux fonctions harmoniques de même pulsation  $\omega$ , la valeur moyenne temporelle  $\langle f \times g \rangle$  s'identifie à  $\frac{1}{2} \text{Re} \{ \underline{f} \times \underline{g}^* \}$ , où  $\underline{g}^*$  désigne le conjugué complexe de  $\underline{g}$ .

En déduire l'expression de  $\langle \vec{I} \rangle$  en fonction de  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $c$ ,  $r$  et  $\vec{e}_r$ .

6. On rappelle que l'angle solide sous lequel est « vue » une surface  $dS$  depuis un point  $O$  est défini par :

$$d\Omega = \frac{d\vec{S} \cdot \vec{e}_r}{OM^2}$$



On montre, en outre, que l'angle solide de toute surface fermée contenant  $O$  vaut  $4\pi$ .

En déduire l'expression de la puissance acoustique moyenne rayonnée à travers toute surface ( $\Sigma$ ) fermée sur  $O$ . Que remarque-t-on ?

#### RÉPONSE

1. En coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} p = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r \text{ car } p = p(r, t)$$

Ce faisant, l'équation :  $\rho_0 = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p$  devient :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r \Rightarrow \rho_0 \text{div} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = -\text{div} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r \right) \quad (23)$$

où l'on admet possible la permutation des opérateurs :

$$\text{div} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{v}) = -\chi \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \text{ car } \text{div} \vec{v} = -\chi \frac{\partial p}{\partial t}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \text{div} \left( \frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r \right) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \left( 2r \frac{\partial p}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left( 2 \frac{\partial p}{\partial r} + r \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2} \end{aligned}$$

C'est ainsi que l'équation (23) prend la forme :

$$-\rho_0 \chi \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 (rp)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (rp)}{\partial r^2}$$

2. En posant :  $\psi(r, t) = r \times p(r, t)$ , l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi}}$$

admet, entre autres, une solution en onde progressive :

$$\begin{aligned} \psi(r, t) &= f(\omega t - kr) \text{ avec } \omega = kc \\ \Rightarrow p(r, t) &= \frac{\psi(r, t)}{r} = \frac{f(\omega t - kr)}{r} \end{aligned}$$

3. L'expression de l'image complexe de  $\underline{p}$  conduit à :

$$\underline{p} = p_0 \times \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(\underline{p}) = \frac{\partial \underline{p}}{\partial r} \vec{e}_r = p_0 e^{j(\omega t - kr)} \times \left( -\frac{1}{r^2} - j \frac{k}{r} \right)$$

Ce faisant, l'image complexe  $\underline{v}$  est solution de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} &= -\overrightarrow{\text{grad}} \underline{p} = p_0 e^{j(\omega t - kr)} \times \left( \frac{1}{r^2} + j \frac{k}{r} \right) \vec{e}_r \\ \Rightarrow \underline{v} &= \frac{p_0}{\rho_0 \omega} e^{j(\omega t - kr)} \times \frac{1}{j\omega} \left( \frac{1}{r^2} + j \frac{k}{r} \right) \vec{e}_r \end{aligned}$$

soit encore :

$$\underline{v} = \frac{p_0}{\rho_0 \omega} e^{j(\omega t - kr)} \times \left( \frac{k}{r} - \frac{j}{r^2} \right) \vec{e}_r$$

4. L'énergie  $\delta \mathcal{E}$  qui traverse une surface  $(\Sigma)$  fermée, pendant  $dt$ , permet de définir le vecteur densité de courant d'énergie acoustique  $\vec{I}$  :

$$\frac{\delta \mathcal{E}}{dt} = - \iint_{(\Sigma)} \vec{I} \cdot d\vec{S} \text{ avec } \vec{I} = p \times \vec{v}$$

**Remarque** – Les vecteurs  $d\vec{S}$  doivent être dirigés vers l'extérieur du volume  $(V)$  circonscrit par  $(\Sigma)$  pour que  $\delta \mathcal{E}$  désigne l'énergie qui pénètre dans  $(V)$  pendant  $dt$ .

5. Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions harmoniques telles que :

$$\underline{f} = F_0 e^{j(\omega t - k_1 x + \varphi_1)} \Rightarrow f(x, t) = \text{Re} \{ \underline{f} \} = F_0 \cos(\omega t - k_1 x + \varphi_1)$$

et :

$$\underline{g} = G_0 e^{j(\omega t - k_2 x + \varphi_2)} \Rightarrow g(x, t) = \text{Re} \{ \underline{g} \} = G_0 \cos(\omega t - k_2 x + \varphi_2)$$

La fonction :

$$\begin{aligned} f \times g &= F_0 G_0 \cos(\omega t - k_1 x + \varphi_1) \times \cos(\omega t - k_2 x + \varphi_2) \\ &= \frac{F_0 G_0}{2} \cos[(k_2 - k_1)x + \varphi_1 - \varphi_2] + \frac{F_0 G_0}{2} \cos[2\omega t - (k_1 + k_2)x + (\varphi_1 + \varphi_2)] \end{aligned}$$

a pour valeur moyenne, pendant une période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  :  $\langle f \times g \rangle = \frac{F_0 G_0}{2} \times (I_1 + I_2)$ , où :

$$I_1 = \frac{1}{T} \int_0^T \cos[(k_2 - k_1)x + \varphi_1 - \varphi_2] dt = \cos[(k_2 - k_1)x + \varphi_1 - \varphi_2]$$

et :

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{T} \int_0^T \cos[2\omega t - (k_1 + k_2)x + (\varphi_1 + \varphi_2)] dt \\ &= \frac{1}{2\omega T} \{ \sin[2\omega T - (k_1 + k_2)x + (\varphi_1 + \varphi_2)] - \sin[(\varphi_1 + \varphi_2) - (k_1 + k_2)x] \} \\ &= 0 \text{ car } 2\omega T = 4\pi \end{aligned}$$

Par suite :

$$\langle f \times g \rangle = \frac{F_0 G_0}{2} \cos[(k_2 - k_1)x + \varphi_1 - \varphi_2]$$

En outre :

$$\begin{aligned}\underline{f} \times \underline{g}^* &= F_0 e^{j(\omega t - k_1 x + \varphi_1)} \times G_0 e^{-j(\omega t - k_2 x + \varphi_2)} \\ &= F_0 G_0 e^{j[(k_2 - k_1)x + (\varphi_1 - \varphi_2)]} \\ &\Rightarrow \operatorname{Re} \{ \underline{f} \times \underline{g}^* \} = F_0 G_0 \cos [(k_2 - k_1)x + \varphi_1 - \varphi_2]\end{aligned}$$

ce qui suffit à conclure que :

$$\langle f \times g \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{f} \times \underline{g}^* \}$$

Ainsi, la définition de  $\vec{I} = p \times \vec{v}$  amène à conclure que :

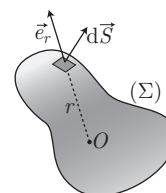
$$\begin{aligned}\langle \vec{I} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{p} \times \underline{v}^* \} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{p_0}{r} e^{j(\omega t - kr)} \times \frac{p_0}{\rho_0 \omega} e^{-j(\omega t - kr)} \times \left( \frac{k}{r} + \frac{j}{r^2} \right) \vec{e}_r \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{p_0^2}{r \rho_0 \omega} \left( \frac{k}{r} + \frac{j}{r^2} \right) \vec{e}_r \right\} \\ &= \frac{p_0^2 k}{2 \rho_0 \omega r^2} \vec{e}_r \text{ avec } \omega = kc\end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$\langle \vec{I} \rangle = \frac{p_0^2}{2 \rho_0 c} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

6. La puissance rayonnée à travers une surface fermée ( $\Sigma$ ), entourant une source acoustique située en  $O$ , est définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \iint_{(\Sigma)} \langle \vec{I} \rangle \cdot d\vec{S} \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{p_0^2}{2 \rho_0 c} \iint_{(\Sigma)} \frac{\vec{e}_r \cdot d\vec{S}}{r^2} \\ &= \frac{p_0^2}{2 \rho_0 c} \iint_{(\Sigma)} d\Omega\end{aligned}$$



où  $d\Omega$  représente l'angle solide sous lequel est « vu »  $dS$  depuis  $O$ . Or, ( $\Sigma$ ) étant une surface fermée contenant  $O$ , il s'ensuit que :

$$\iint_{(\Sigma)} d\Omega = 4\pi \Rightarrow \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{2\pi p_0^2}{\rho_0 c}$$

Ce résultat montre que cette puissance est indépendante de la taille ou de la forme de ( $\Sigma$ ), ce qui signifie que toute l'énergie qui traverse ( $\Sigma$ ) traverse également toute autre surface fermée contenant  $O$ .

## 5.2.4 Réflexion et transmission d'une onde sonore

### 5.2.4.1 Impédance acoustique

**Définition 14** Soit une onde plane progressive, caractérisée par une surpression  $p(x, t) = f(\omega t - kx)$  et une vitesse d'écoulement  $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{e}_x$ . On appelle impédance acoustique du milieu de propagation de l'onde le rapport :

$$Z = \frac{p(x, t)}{v(x, t)}$$

Considérons la propagation d'une onde plane progressive, dans un milieu de masse volumique uniforme  $\rho$ , dont la surpression se met sous la forme :

$$p(x, t) = f(u) \text{ avec } u(x, t) = \omega t - kx$$



La relation :  $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p$  s'écrit, à une dimension :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_x &= -\frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x \text{ car } \vec{v} = v(x, t) \\ \Rightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} &= k \frac{df}{du} \Rightarrow v = \frac{k}{\rho\omega} f(u) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en remarquant que la célérité  $c$  de l'onde acoustique vérifie :  $\omega = kc$  :

$$v = \frac{1}{\rho c} f(u) \Rightarrow Z = \rho c \text{ pour } p(x, t) = f(\omega t - kx)$$

De même, une onde plane qui se déplace dans le sens de  $-\vec{e}_x$  est caractérisée par une suppression :

$$\begin{aligned} p(x, t) &= g(V) \text{ avec } V = \omega t + kx \\ \Rightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} \vec{e}_x &= -k \frac{dg}{dV} \vec{e}_x \\ \Rightarrow v &= -\frac{k}{\rho\omega} g(V) = -\frac{1}{\rho c} g(V) \\ \Rightarrow Z &= -\rho c \text{ pour } p(x, t) = g(\omega t + kx) \end{aligned}$$



Lorsqu'une onde plane progressive se déplace dans un milieu homogène, de masse volumique  $\rho$ , on peut directement poser :

$$\vec{v}(x, t) = Z p(x, t) \vec{e}_x \text{ où } Z = \pm \rho c \quad (24)$$

Ainsi, la connaissance de  $p(x, t)$  (resp. de  $\vec{v}(x, t)$ ) entraîne concomitamment celle de  $\vec{v}(x, t)$  (resp. de  $p(x, t)$ ).

**Remarque** – L'onde plane admet également une description complexe avec les images  $\underline{p}$  et  $\underline{v} = \underline{v} \vec{e}_x$ , telles que :

$$p(x, t) = \text{Re} \{ \underline{p} \} \text{ et } v(x, t) = \text{Re} \{ \underline{v} \}$$

Dans ce cas, l'impédance acoustique est aussi complexe et définie par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{p}}{\underline{v}}$$

 Une onde acoustique est émise, dans l'espace, depuis un point  $O$  et sa surpression vaut, à une distance  $r$  de  $O$  :

$$p(r, t) = \frac{p_0}{r} \cos(\omega t - kr) \Rightarrow \underline{p} = \frac{p_0}{r} e^{j(\omega t - kr)}$$

1. Compte tenu de la géométrie sphérique de l'ordre, déterminer la relation entre  $\omega$ ,  $k$  et la célérité  $c$  de propagation de l'onde.
2. On rappelle que la propagation de cette onde est décrite par les équations :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p \text{ et } \text{div } \vec{v} = -\chi \frac{\partial p}{\partial t}$$

En déduire l'expression de l'image complexe  $\underline{v}$ , telle que  $\vec{v}(r, t) = \underline{v} \vec{e}_r$ .

3. Déterminer l'expression de l'impédance acoustique  $\underline{Z}$  sous forme polaire, en fonction de  $\rho$ ,  $c$ ,  $k$  et  $r$ .
4. Montrer qu'à grande distance de la source  $O$  (c'est-à-dire  $r$  très supérieur à la longueur d'onde  $\lambda$ ), l'impédance  $\underline{Z}$  s'identifie à celle d'une onde plane. Interpréter ce résultat.

On donne l'expression du Laplacien d'une fonction  $f(r)$ , en coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rf)$$

#### RÉPONSE

1. La surpression  $\underline{p}$  est solution de l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \underline{p} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = 0 \quad (25)$$

où le Laplacien de  $\underline{p}$  vaut, en coordonnées sphériques :

$$\Delta \underline{p} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \underline{p}) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} [p_0 e^{j(\omega t - kr)}] = -\frac{k^2}{r} p_0 e^{j(\omega t - kr)}$$

tandis que :

$$\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \frac{p_0}{r} e^{j(\omega t - kr)} \right] = -\frac{\omega^2}{r} p_0 e^{j(\omega t - kr)}$$

C'est pourquoi l'équation de propagation (25) conduit à :

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \Rightarrow \omega = kc$$

2. En coordonnées sphériques :

$$\vec{v} = \underline{v}(r, t) \vec{e}_r \text{ et } \vec{\text{grad}} \underline{p} = \frac{\partial \underline{p}}{\partial r} \vec{e}_r$$

Aussi :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} \underline{p} &\Rightarrow \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = -\frac{\partial \underline{p}}{\partial r} = -p_0 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} e^{j(\omega t - kr)} \right] \\ &= p_0 e^{j(\omega t - kr)} \times \left( \frac{1}{r^2} + j \frac{k}{r} \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\underline{v}(r, t) = \frac{p_0}{j\omega\rho} e^{j(\omega t - kr)} \times \left( \frac{1}{r^2} + j \frac{k}{r} \right) = \frac{p_0}{j\rho kc} e^{j(\omega t - kr)} \times \left( \frac{1}{r^2} + j \frac{k}{r} \right)$$

3. L'impédance acoustique est alors définie par :

$$\underline{Z} = \frac{p}{v} = \frac{p_0}{r} e^{j(\omega t - kr)} \times \frac{j\rho kc}{p_0} e^{-j(\omega t - kr)} \times \frac{1}{\frac{1}{r^2} + j\frac{k}{r}} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{j}{\frac{1}{r} + jk} \times \rho kc$$

4. Lorsque  $r \gg \lambda$ , c'est-à-dire :

$$\frac{1}{r} \ll \frac{1}{\lambda} = \frac{k}{2\pi} \Rightarrow jk + \frac{1}{r} \simeq jk$$

l'impédance  $\underline{Z}$  se simplifie et adopte la forme de celle relative à une onde plane :  $\underline{Z} \simeq \rho c$ . Ce résultat confirme le comportement d'une onde sphérique en onde localement plane à grande distance de la source.



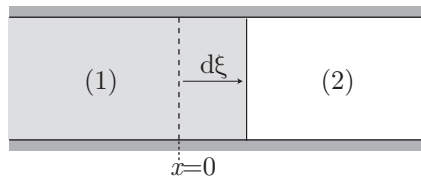
La définition de l'impédance  $Z = \frac{p(x, t)}{v(x, t)}$  permet de prédire :

- que sur une paroi rigide  $v(x, t) = 0$ , de sorte que  $Z$  tend vers l'infini :
- que deux milieux identiques présentent les mêmes impédances.

### 5.2.4.2 Condition de passage d'une interface

On s'intéresse à la propagation d'une onde plane, dans la direction  $\vec{e}_x$ , caractérisée par les surpressions et les vitesses  $p_1(x, t)$ ,  $\vec{v}_1(x, t)$  dans le milieu (1) situé à gauche du plan  $x = 0$  et  $p_2(x, t)$ ,  $\vec{v}_2(x, t)$  dans un milieu (2) situé à droite du plan  $x = 0$ .

- Si les milieux (1) et (2) présentent la même section  $S$  et ne sont pas séparés matériellement :

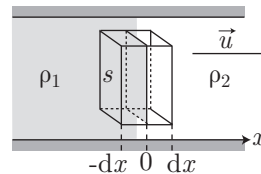


Pendant le temps  $dt$ , le fluide se déplace de la quantité  $d\xi$ , qui est la même dans les deux milieux. C'est pourquoi la vitesse d'écoulement est continue en  $x = 0$  :

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} [v(x, t)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [v(x, t)]$$

Isolons, par la pensée, un parallélépipède rectangle ( $\mathcal{P}$ ), dont deux faces (de même surface  $s$ ), se trouvent aux abscisses  $-dx$  et  $dx$ , avec  $0 < dx \ll 1$ . ( $\mathcal{P}$ ) renferme alors une masse :

$$\delta m = \rho_1 s dx + \rho_2 s dx = (\rho_1 + \rho_2) s dx$$



tandis qu'il est soumis aux surpressions  $p(-dx, t)$  et  $p(dx, t)$ , responsables d'une force résultante :

$$\vec{f} = p(-dx, t) s \vec{u} - p(dx, t) s \vec{u} = [p(-dx, t) - p(dx, t)] s \vec{u}$$

L'accélération  $\vec{\gamma} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Big|_{(0,t)}$  vérifie alors la loi fondamentale de la dynamique :

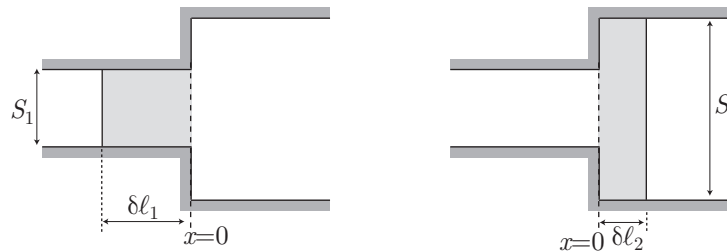
$$\delta m \vec{\gamma} = \vec{f} \Rightarrow (\rho_1 + \rho_2) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \Big|_{(0,t)} dx = p(-dx, t) - p(dx, t)$$

ce qui fournit, lorsque  $dx$  tend vers zéro :

$$\lim_{dx \rightarrow 0} [p(-dx, t) - p(dx, t)] = 0 \Rightarrow \lim_{dx \rightarrow 0^-} [p(dx, t)] = \lim_{dx \rightarrow 0^+} [p(dx, t)]$$

d'où l'on déduit la continuité de la surpression à l'interface des deux milieux.

- Considérons maintenant deux tuyaux, de sections  $S_1$  et  $S_2$ , joints en  $x = 0$  et contenant un même fluide de masse volumique au repos  $\rho$  uniforme.



Pendant  $dt$ , une masse  $\delta m_1 = \rho \times S_1 \delta l_1$  de fluide quitte le tuyau de section  $S_1$ , tandis que le tuyau de section  $S_2$  acquiert une masse  $\delta m_2 = \rho \times S_2 \delta l_2$ , avec :

$$\delta l_1 = v(0^-, t) dt = v_1 dt \text{ et } \delta l_2 = v(0^+, t) dt = v_2 dt$$

La loi de conservation de la masse impose alors :

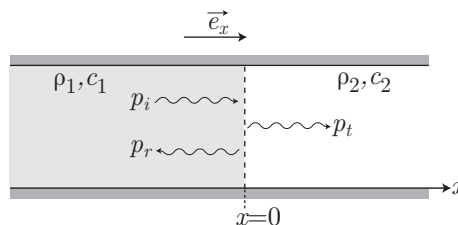
$$\delta m_1 = \delta m_2 \Rightarrow \rho \times S_1 v_1 dt = \rho \times S_2 v_2 dt \Rightarrow S_1 v_1 = S_2 v_2$$

### 5.2.4.3 Réflexion et transmission de la surpression

Soit une onde plane progressive, qui se déplace à la vitesse  $c_1$  dans un milieu homogène de masse volumique  $\rho_1$  au repos et qui est caractérisée par une surpression :

$$p_i(r, t) = p_0 \cos(\omega t - k_1 x) \text{ avec } \omega = k_1 c$$

Cette onde rencontre une discontinuité au plan  $x = 0$ , à droite duquel se trouve un milieu de masse volumique homogène  $\rho_2$  et dans lequel l'onde acoustique se propage avec une célérité  $c_2$ .



En  $x = 0$ , l'onde acoustique peut subir :

- une réflexion partielle ; la surpression correspondante vaut  $p_r(x, t)$ .
- une transmission partielle ; la surpression correspondante vaut  $p_t(x, t)$ .

**Définition 15** On appelle coefficients de réflexion et de transmission de la surpression les coefficients respectifs  $r_p$  et  $t_p$  tels que :

$$p_r(x, t) = r_p \times p_0 \cos(\omega t + k_1 x) \quad \text{et} \quad p_t(x, t) = t_p \times p_0 \cos(\omega t - k_2 x)$$

$$\text{où } k_2 = \frac{\omega}{c_2} \quad \text{et} \quad k_1 = \frac{\omega}{c_1}.$$

Remarque – En notation complexe, on posera :

$$\underline{p}_i = p_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \Rightarrow \begin{cases} \underline{p}_r = r_p p_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ \underline{p}_t = t_p p_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \end{cases}$$

Cette notation permet d'envisager un déphasage entre les surpressions et l'on retrouve alors les coefficients réels en posant :

$$r_p = |r_p| \quad \text{et} \quad t_p = |t_p|$$

On conservera désormais les notations complexes, compte tenu de leur simplicité d'utilisation. On notera, en outre :  $Z_1 = \rho_1 c_1$  et  $Z_2 = \rho_2 c_2$ .

Compte tenu de ces notations et de la loi (24) énoncée à la page 705 :

$$\underline{p} = p_0 e^{j(\omega t \mp k_j x)} \Rightarrow \underline{v} = \pm Z_j p_0 e^{j(\omega t \mp k_j x)} \vec{e}_x \quad \text{où } k_j = \frac{\omega}{c_j} \quad (26)$$

ce qui fournit les expressions des vitesses complexes associées aux surpressions  $\underline{p}_i$ ,  $\underline{p}_r$  et  $\underline{p}_t$  :

$$\begin{cases} \underline{v}_i = Z_1 p_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \vec{e}_x \\ \underline{v}_r = -Z_1 r_p p_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \vec{e}_x \\ \underline{v}_t = Z_2 t_p p_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \vec{e}_x \end{cases}$$

Ce faisant, la condition de continuité de  $p(x, t)$  et de  $\vec{v}(x, t)$  en  $x = 0$  impose :

$$\underline{p}_i(0, t) + \underline{p}_r(0, t) = \underline{p}_t(0, t) \Rightarrow 1 + r_p = t_p$$

et :

$$\underline{v}_i(0, t) + \underline{v}_r(0, t) = \underline{v}_t(0, t) \Rightarrow Z_1 \times (1 - r_p) = Z_2 \times t_p$$

Ces deux équations conduisent à :

$$Z_1 \times (1 - r_p) = Z_2 (1 + r_p) \Rightarrow r_p = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

tandis que :

$$t_p = 1 + r_p = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Remarque – Si le milieu situé en  $x > 0$  est le même que celui situé en  $x < 0$ ,  $Z_1 = Z_2$  montre que  $r_p = 0$  et  $t_p = 1$ , ce qui signifie aussi qu'aucune réflexion ne se produit et que la transmission de l'onde acoustique est par conséquent totale.

En revanche, si le milieu situé en  $x > 0$  est une paroi rigide :

$$r_p = \lim_{Z_2 \rightarrow \infty} \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) = -1 \text{ et } t_p = \lim_{Z_2 \rightarrow \infty} \left( \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right) = 0$$

ce qui prouve que la réflexion de l'onde acoustique est totale.

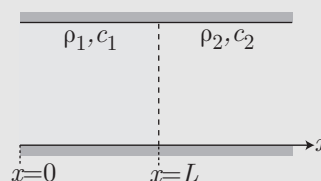


Une onde plane acoustique, décrite par la surpression complexe :  $\underline{p}_i = p_0 e^{j(\omega t - k_1 x)}$ , rencontre en  $x = L$  une discontinuité :

la masse volumique et la célérité de l'onde passent des valeurs  $(\rho_1, c_1)$  pour  $x < L$  à  $(\rho_2, c_2)$  pour  $x > L$ .

On notera :  $Z_1 = \rho_1 c_1$  et  $Z_2 = \rho_2 c_2$ .

1. Déterminer les coefficients complexes  $r_p$  et  $t_p$  de réflexion et de transmission de la surpression.



2. Montrer qu'il existe des coefficients réels  $r_p$  et  $t_p$  permettant d'écrire les surpressions réfléchie et transmise sous les formes complexes :

$$\underline{p}_r = r_p p_0 e^{j[\omega t + k_1(x-2L)]} \text{ et } \underline{p}_t = t_p p_0 e^{j[\omega t - k_1 L - k_2(x-L)]}$$

Exprimer ces coefficients en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ .

#### RÉPONSE

1. Les coefficients  $r_p$  et  $t_p$  définissent les surpressions complexes des ondes réfléchies et transmises en  $x = L$  :

$$\begin{cases} \underline{p}_i = p_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \underline{p}_r = r_p \times p_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ \underline{p}_t = t_p \times p_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \end{cases} \quad (27)$$

Aussi, la condition de continuité de la surpression en  $x = L$  impose-t-elle :

$$\underline{p}_i(x=L, t) + \underline{p}_r(x=L, t) = \underline{p}_t(x=L, t)$$

c'est-à-dire :

$$e^{-jk_1 L} + r_p e^{jk_1 L} = t_p e^{-jk_2 L} \quad (28)$$

Quant aux images complexes de la vitesse, leurs expressions découlent directement de la relation (26) :

$$\begin{cases} \underline{v}_i = Z_1 p_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \underline{v}_r = -Z_1 r_p p_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ \underline{v}_t = Z_2 t_p p_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{v}_i(L, t) = p_0 e^{j\omega t} \times Z_1 e^{-jk_1 L} \\ \underline{v}_r(L, t) = -p_0 e^{j\omega t} \times Z_1 r_p e^{jk_1 L} \\ \underline{v}_t(L, t) = p_0 e^{j\omega t} \times Z_2 t_p e^{-jk_2 L} \end{cases}$$

À nouveau, la continuité de la vitesse d'écoulement en  $x = L$  se traduit par :

$$\underline{v}_i(L, t) + \underline{v}_r(L, t) = \underline{v}_t(L, t) \Rightarrow Z_1 e^{-jk_1 L} - Z_1 r_p e^{jk_1 L} = Z_2 t_p e^{-jk_2 L}$$

Associée à l'identité (28), cette équation fournit le système suivant :

$$\begin{cases} Z_1 e^{-jk_1 L} + Z_1 r_p e^{jk_1 L} = Z_1 t_p e^{-jk_2 L} \\ Z_1 e^{-jk_1 L} - Z_1 r_p e^{jk_1 L} = Z_2 t_p e^{-jk_2 L} \end{cases} \Rightarrow 2Z_1 e^{-jk_1 L} = (Z_1 + Z_2) t_p e^{-jk_2 L}$$

soit encore :

$$t_p = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} e^{j(k_2 L - k_1 L)}$$

Ce faisant, l'équation (28) conduit à :

$$\underline{r}_p e^{jk_1 L} = \underline{t}_p e^{-jk_2 L} - e^{-jk_1 L} = \left( \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} - 1 \right) e^{-jk_1 L}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\underline{r}_p = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} e^{-2jk_1 L}$$

2. Les expressions (27) des surpressions complexes s'écrivent alors :

$$\underline{p}_r = \underline{r}_p p_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \times p_0 e^{j[\omega t + k_1(x - 2L)]}$$

et :

$$\underline{p}_t = \underline{t}_p p_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \times p_0 e^{j[\omega t - k_1 L - k_2(x - L)]}$$

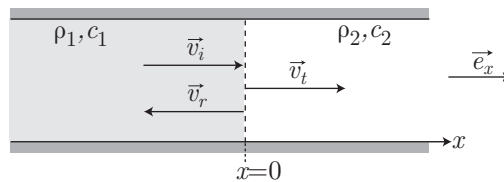
avec :

$$\underline{r}_p = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \text{ et } \underline{t}_p = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

#### 5.2.4.4 Réflexion et transmission de la vitesse

Une onde progressive, qui se propage dans un milieu caractérisé par  $Z_1 = \rho_1 c_1$ , est maintenant décrite par sa vitesse d'écoulement complexe :

$$\underline{\vec{v}}_i = \underline{v}_i \vec{e}_x \Rightarrow \underline{v}_i = v_0 e^{j(\omega t - k_1 x)}$$



En  $x = 0$ , extrémité d'un milieu infini décrit par  $Z_2 = \rho_2 c_2$ , se produisent :

- une réflexion de l'onde, avec une vitesse d'écoulement complexe  $\underline{\vec{v}}_r = \underline{v}_r \vec{e}_x$  ;
- une transmission partielle de l'onde, avec une vitesse d'écoulement complexe  $\underline{\vec{v}}_t = \underline{v}_t \vec{e}_x$ .

**Définition 16** On appelle coefficients complexes de réflexion et de transmission de la vitesse d'écoulement les coefficients  $\underline{r}_v$  et  $\underline{t}_v$  tels que :

$$\begin{cases} \underline{v}_i = v_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \underline{v}_r = \underline{r}_v \times v_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ \underline{v}_t = \underline{t}_v \times v_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \end{cases}$$



Trouver les expressions de  $\underline{r}_v$  et de  $\underline{t}_v$  en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ . Comparer avec celles de  $\underline{r}_p$  et de  $\underline{t}_p$ .

RÉPONSE En  $x = 0$ , la continuité de la vitesse d'écoulement se traduit par :

$$\underline{v}_i(0, t) + \underline{v}_r(0, t) = \underline{v}_t(0, t) \Rightarrow 1 + r_v = t_v \quad (29)$$

Quant aux expressions de la surpression, elles découlent directement de la loi (24) énoncée à la page 705 :

$$\underline{p}(x, t) = \pm \frac{1}{Z} \underline{v}(x, t) \text{ avec } Z = \rho c$$

Ce faisant les ondes incidente, réfléchie et transmise sont caractérisées par les surpressions complexes :

$$\begin{cases} \underline{p}_i(x, t) = \frac{1}{Z_1} v_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \underline{p}_r(x, t) = -\frac{1}{Z_1} r_v v_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ \underline{p}_t(x, t) = \frac{1}{Z_2} t_v v_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{p}_i(0, t) = \frac{1}{Z_1} \times v_0 e^{j\omega t} \\ \underline{p}_r(0, t) = -\frac{r_v}{Z_1} \times v_0 e^{j\omega t} \\ \underline{p}_t(0, t) = \frac{t_v}{Z_2} \times v_0 e^{j\omega t} \end{cases}$$

Aussi, la continuité de la surpression en  $x = 0$  s'exprime par :

$$\frac{1}{Z_1} (1 - r_v) = \frac{1}{Z_2} t_v \Rightarrow Z_2 (1 - r_v) = Z_1 t_v$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'équation (29) :

$$Z_2 - Z_2 r_v = Z_1 + Z_1 r_v \Rightarrow r_v = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = -r_p$$

La même équation fournit :

$$t_v = 1 + r_v = 1 + \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \Rightarrow t_v = \frac{2 Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{Z_2}{Z_1} t_p$$

En conclusion, le passage de  $r_v, t_v$  à  $r_p, t_p$  est assuré par une simple permutation des coefficients  $Z_1$  et  $Z_2$ .

**Définition 17** Soit  $\vec{I}_i$  la puissance acoustique par unité de surface d'une onde acoustique qui arrive sur une interface où se produisent une réflexion et une transmission de l'onde, avec les puissances acoustiques par unité de surface respectives  $\vec{I}_r$  et  $\vec{I}_t$ . Les coefficients de réflexion ( $R$ ) et de transmission ( $T$ ) de l'énergie, sont définis par :

$$\langle \vec{I}_r \rangle = -R \times \langle \vec{I}_i \rangle \text{ et } \langle \vec{I}_t \rangle = T \times \langle \vec{I}_i \rangle$$

où les valeurs moyennes sont calculées sur une période.

Les ondes incidente, réfléchie et transmise sont caractérisées par les surpressions et les vitesses :

$$\begin{cases} \underline{p}_i = p_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \underline{p}_r = r_p p_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ \underline{p}_t = t_p p_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \underline{v}_i = Z_1 p_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \underline{v}_r = -Z_1 r_p p_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ \underline{v}_t = Z_2 t_p p_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \end{cases}$$



avec :  $r_p = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$  et  $t_p = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$ , si la discontinuité se produit en  $x = 0$ . Ce faisant, les puissances acoustiques, par unité de surface, valent :

$$\begin{aligned}\langle \vec{I}_i \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \underline{p}_i \underline{v}_i^* \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ p_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \times Z_1 p_0 e^{-j(\omega t - k_1 x)} \vec{e}_x \right\} \\ &\Rightarrow \langle \vec{I}_i \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ Z_1 p_0^2 \vec{e}_x \right\} = \frac{1}{2} Z_1 p_0^2 \vec{e}_x \\ \langle \vec{I}_r \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \underline{p}_r \underline{v}_r^* \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ r_p p_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \times -Z_1 r_p^* p_0 e^{-j(\omega t + k_1 x)} \vec{e}_x \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ -Z_1 |r_p|^2 p_0^2 \vec{e}_x \right\} = -\frac{1}{2} Z_1 |r_p|^2 p_0^2 \vec{e}_x \\ \langle \vec{I}_t \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \underline{p}_t \underline{v}_t^* \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ t_p p_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \times Z_2 t_p^* p_0 e^{-j(\omega t - k_2 x)} \vec{e}_x \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ Z_2 |t_p|^2 p_0^2 \vec{e}_x \right\} = \frac{1}{2} Z_2 |t_p|^2 p_0^2 \vec{e}_x\end{aligned}$$

Des définitions :  $\langle \vec{I}_r \rangle = -R \times \langle \vec{I}_i \rangle$  et  $\langle \vec{I}_t \rangle = T \times \langle \vec{I}_i \rangle$  il ressort que :

$$R = |r_p|^2 \quad \text{et} \quad T = \frac{Z_2}{Z_1} |t_p|^2$$

On remarque alors que :

$$\begin{aligned}R + T &= \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 + \frac{Z_2}{Z_1} \left( \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 = \frac{Z_1^2 - 2Z_1Z_2 + Z_2^2 + 4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \\ &\Rightarrow R + T = 1\end{aligned}$$

ce qui rend compte de la conservation de l'énergie acoustique.



On rappelle que les ondes acoustiques incidente, réfléchie et transmise à la surface ( $x = 0$ ) de deux milieux sont caractérisées par :

$$\begin{cases} \underline{p}_i = p_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \underline{p}_r = r_p p_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ \underline{p}_t = t_p p_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \underline{v}_i = v_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \vec{e}_x \\ \underline{v}_r = r_v v_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \vec{e}_x \\ \underline{v}_t = t_v v_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \vec{e}_x \end{cases}$$

- Déterminer, en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ , les expressions des coefficients de transmission et de réflexion de l'énergie acoustique.
- Par quelle identité est-on assuré de la loi de conservation de l'énergie ?

## RÉPONSE

1. Les puissances acoustiques, par unité de surface, sont définies par :

$$\begin{aligned}\langle \vec{I}_i \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_i \vec{v}_i^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \times v_0 e^{-j(\omega t - k_1 x)} \vec{e}_x \} \\ \Rightarrow \langle \vec{I}_i \rangle &= \frac{p_0 v_0}{2} \vec{e}_x \\ \langle \vec{I}_r \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_r \vec{v}_r^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ r_p p_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \times r_v v_0 e^{-j(\omega t + k_1 x)} \vec{e}_x \} \\ &= \operatorname{Re} \{ r_p r_v \} \times \frac{p_0 v_0}{2} \vec{e}_x \\ \langle \vec{I}_t \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_t \vec{v}_t^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ t_p p_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \times t_v v_0 e^{-j(\omega t - k_2 x)} \vec{e}_x \} \\ &= \operatorname{Re} \{ t_p t_v \} \times \frac{p_0 v_0}{2} \vec{e}_x\end{aligned}$$

Ce faisant, les relations :

$$\langle \vec{I}_r \rangle = \operatorname{Re} \{ r_p r_v \} \times \langle \vec{I}_i \rangle \quad \text{et} \quad \langle \vec{I}_t \rangle = \operatorname{Re} \{ t_p t_v \} \times \langle \vec{I}_i \rangle$$

montrent qu'il existe des coefficients  $R$  et  $T$  tels que :

$$\langle \vec{I}_r \rangle = -R \langle \vec{I}_i \rangle \quad \text{et} \quad \langle \vec{I}_t \rangle = T \langle \vec{I}_i \rangle$$

avec :

$$R = -\operatorname{Re} \{ r_p r_v \} = -\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \times \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

et :

$$T = \operatorname{Re} \{ t_p t_v \} = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} \times \frac{2 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

2. Les coefficients précédents vérifient :

$$R + T = \frac{Z_1^2 - 2 Z_1 Z_2 + Z_2^2 + 4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \Rightarrow R + T = 1$$

ce qui suffit à prouver la conservation de l'énergie lors de la transmission partielle d'une onde acoustique.

## 5.3 Ondes électromagnétiques dans le vide

### 5.3.1 Équation de propagation des champs

Rappelons les équations de Maxwell dans le vide :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \operatorname{div} \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Ainsi que la relation vérifiée pour tout vecteur  $\vec{X}$  :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{X}) = \operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{X}) - \Delta \vec{X}$$

Appliquons cette dernière relation au champ électrique :

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{E}) = \underbrace{\operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{E})}_0 - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

de manière à obtenir :

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} B) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Il est possible de permuter les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial t}$  et  $\overrightarrow{\text{rot}}$ , puisque le premier agit sur le temps et le second sur les variables d'espace. Nous obtenons donc l'équation :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Le même raisonnement peut-être tenu pour le champ magnétique  $\vec{B}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) &= \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{B} - \Delta \vec{B}}_{\vec{0}} = -\Delta \vec{B} \\ &= \overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} E) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

Nous obtenons donc l'équation :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$\vec{E}$  et  $\vec{B}$  obéissent dans le vide à la forme tridimensionnelle de l'équation de d'Alembert. Les conséquences sont les suivantes :

- L'équation de Maxwell Faraday montre qu'un champ magnétique variable dans le temps crée un champ électrique :  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  non nul, ce qui implique  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}$  non nul et donc l'existence d'un champ électrique. Ce champ électrique est défini au voisinage de tout point où  $\vec{B}$  est variable.
- Ce champ  $\vec{E}$ , variable, va créer à son voisinage un champ magnétique dont l'existence est justifiée par l'équation de Maxwell-Ampère. Ainsi, de proche en proche, le champ électromagnétique se propage dans l'espace.
- Les équations de d'Alembert vérifiées par  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  nous indiquent de plus que, dans le vide, cette propagation se fait à la célérité de la lumière  $c$ .

## 5.3.2 Ondes électromagnétiques planes

### 5.3.2.1 Solutions en ondes planes progressives monochromatiques

Proposons comme solutions aux équations précédentes les fonctions :

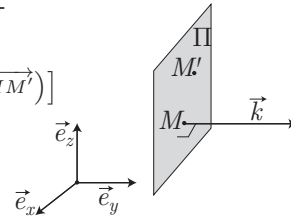
$$\begin{cases} \vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} \\ \vec{B}(M, t) = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})} \end{cases}$$

Ces expressions correspondent à des ondes planes progressives, monochromatiques se propageant dans une direction donnée par  $\vec{k}$ . On montre qu'en tout plan d'un plan perpendiculaire à  $\vec{k}$  l'onde est identique.

Considérons ainsi deux points  $M$  et  $M'$  d'un point  $\Pi$  perpendiculaire à  $\vec{k}$  :

$$\begin{aligned}\vec{E}(M', t) &= \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM'})} = \vec{E}_0 e^{j[\omega t - \vec{k} \cdot (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'})]} \\ &= \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})} \text{ puisque } \vec{k} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0\end{aligned}$$

Les plans perpendiculaires à  $\vec{k}$  sont appelés plans d'onde.



Soit une onde plane progressive monochromatique, dont le champ électrique est porté par la direction  $(Oz)$ , qui se propage selon la direction  $(Ox)$ . Représenter, à  $t_0$  donné,  $\vec{E}(M, t_0)$  et, en un point  $M_0$  donné,  $\vec{E}(M_0, t)$ .

RÉPONSE L'onde se propageant selon la direction  $\vec{e}_x$ , nous avons :

$$\vec{k} = k\vec{e}_x \Rightarrow \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} = kx$$

En notation réelle le champ s'écrit  $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{e}_z$

On fait apparaître une périodicité spatiale  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , ainsi qu'une périodicité temporelle  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ .

### 5.3.2.2 Opérateur nabla pour une onde plane progressive monochromatique

Remarquons que, pour une onde plane progressive monochromatique :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{E}) = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{E}_0 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}) = -jk_x \vec{E}$$

De même :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial y} = -jk_y \vec{E} \text{ et } \frac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -jk_z \vec{E}$$

On en déduit la relation :  $\vec{\nabla} = -j\vec{k}$ .

Remarque – Cette relation n'est vérifiée que pour des champs correspondants à des ondes planes progressives monochromatiques.

De même pour ce type d'onde on a la relation :  $\frac{\partial}{\partial t} = j\omega$ .

### 5.3.2.3 Relation de dispersion pour une onde plane progressive monochromatique dans le vide

Il existe une relation entre les périodicités spatiale et temporelle d'une onde plane progressive monochromatique. Elle peut-être déterminée à partir de l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ où } \Delta = \vec{\nabla}^2 \Rightarrow \Delta = -k^2$$

De même :  $\frac{\partial}{\partial t} = (j\omega)^2 = -\omega^2$ . L'équation de d'Alembert donne donc :

$$-k^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \vec{E} = \vec{0}$$

On en déduit que :  $k = \frac{\omega}{c}$ . Nous avons donc  $\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT}$ , d'où l'on tire  $\lambda = cT$ , la période spatiale correspond à la distance parcourue par l'onde pendant une période temporelle.

Remarque – La solution  $k = -\frac{\omega}{c}$  correspond à une onde plane progressive monochromatique se propageant dans la même direction mais en sens contraire. Par définition, la vitesse de phase vaut :

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = c$$

Dans le vide, les ondes planes progressives monochromatiques se propagent toutes à la même vitesse : la célérité de la lumière  $c$  et ceci indépendamment de leur fréquence.

#### 5.3.2.4 Relations entre $\vec{E}$ et $\vec{B}$ pour une onde plane progressive monochromatique dans le vide

L'équation de Maxwell-Gauss :  $\text{div } \vec{E} = 0$  peut aussi s'écrire  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 = -j\vec{k} \cdot \vec{E}$ , auquel cas  $\vec{E}$  est perpendiculaire à  $\vec{k}$ .

De même, de l'équation  $\text{div } \vec{B} = 0$  on déduit que  $\vec{B}$  est aussi perpendiculaire à  $\vec{k}$ .

Pour une onde plane progressive monochromatique,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires à la direction de propagation.

De l'équation de Maxwell-Faraday :  $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  nous déduisons l'égalité équivalente :

$$j\vec{k} \wedge \vec{E} = j\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}$$

si l'on note  $\vec{u}$  la direction de propagation de l'onde.

L'équation de Maxwell-Ampère donne, quand à elle :

$$\vec{E} = c\vec{u} \wedge \vec{B}$$

Pour ce type d'onde  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires entre eux.



Montrer que pour une onde plane progressive monochromatique, pour ce qui concerne l'action sur une particule de charge  $q$  on peut négliger la contribution magnétique tant que l'on reste dans le domaine de la mécanique classique.

**RÉPONSE** La force électromagnétique subie par une particule chargée vaut :  $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E}$ ,  $\vec{v}$  étant la vitesse de la particule dans le référentiel d'étude. L'ordre de grandeur de la contribution magnétique est donné par  $qvB$  et celui de la contribution électrique par  $qE$ .

Pour une onde plane progressive monochromatique les relations précédentes montrent qu'en norme :

$$E = cB \Rightarrow \frac{qvB}{qE} = \frac{vB}{E} = \frac{v}{c} \ll 1$$

si on se limite à l'étude du mouvement de la particule dans le cadre de la mécanique classique.

### 5.3.3 Aspect énergétique des ondes planes progressives monochromatiques

#### 5.3.3.1 Densité volumique d'énergie électromagnétique

Considérons une onde plane monochromatique du type :

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - kz)$$

La relation :  $\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}$ , avec  $\vec{u} = \vec{e}_z$ , permet d'exprimer le champ magnétique :

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_z}{c} \wedge E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - kz) = \frac{E_0}{c} \vec{e}_y \cos(\omega t - kz)$$

Exprimons la densité volumique d'énergie électromagnétique associée à cette onde.  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  étant des fonctions sinusoïdales du temps, nous travaillerons sur les valeurs moyennes des fonctions énergétiques. Notons ainsi  $\langle u_e \rangle$  et  $\langle u_m \rangle$  les valeurs moyennes des densités d'énergie électrique et magnétique :

$$\langle u_e \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} \langle E^2 \rangle = \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}$$

et :

$$\langle u_m \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \langle B^2 \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_0^2}{c^2} \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2}$$

De l'égalité  $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ , on déduit que  $\langle u_e \rangle = \langle u_m \rangle$  : il y a égalité entre l'énergie électrique et l'énergie magnétique.

#### 5.3.3.2 Vecteur de Poynting associé à une onde électromagnétique plane progressive monochromatique

Reprenons le cas de l'onde définie dans la section précédente ; le vecteur de Poynting s'écrit :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

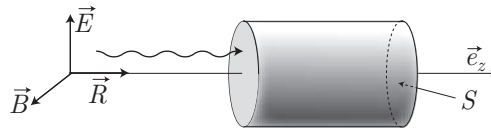
Le vecteur de Poynting est donc dirigé dans le sens de propagation de l'onde. Sa valeur moyenne est donnée par :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{e}_z$$

#### 5.3.3.3 Vitesse de propagation de l'énergie

Une onde électromagnétique transporte de l'énergie ; il est possible d'exprimer la vitesse de ce transport en faisant un bilan énergétique. Considérons une onde électromagnétique plane progressive monochromatique (OPPM) se propageant selon ( $Oz$ ) :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \\ \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y \end{cases}$$



Considérons que l'énergie se propage à la vitesse  $v_g$ . Soit une surface  $S$  perpendiculaire à  $(O, \vec{e}_z)$ . L'énergie moyenne qui traverse  $S$  pendant  $dt$  est donnée par :

$$d^2 \mathcal{E} = \langle \vec{R} \rangle \cdot \vec{S} dt$$

où  $\langle \vec{R} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle \parallel \vec{e}_z$  et  $\vec{S} = S \vec{e}_z$  conduisent à :

$$d^2 \mathcal{E} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S dt$$

Cette même énergie, avant de traverser  $S$  pendant  $dt$ , était contenue dans le cylindre de base  $S$  et de hauteur  $dz = v_g dt$ , d'où :

$$\begin{aligned} d^2 \mathcal{E} &= \langle u_e + u_m \rangle S dz = \left[ \frac{\varepsilon_0}{2} \langle E^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0} \langle B^2 \rangle \right] S v_g dt \\ &= \left[ \frac{\varepsilon_0}{2} \times \frac{E_0^2}{2} + \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{E_0^2}{c^2} \times \frac{1}{2} \right] S v_g dt \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} S v_g dt \text{ puisque } \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1 \end{aligned}$$

Si l'on identifie les deux expressions de l'énergie, on arrive à :

$$v_g = c$$

ce qui signifie encore qu'une OPPM transporte l'énergie à la célérité  $c$ , dans le vide.

## 5.4 Phénomènes dispersifs de propagation

### 5.4.1 Relation de dispersion

**Définition 18** On appelle relation de dispersion d'une onde plane la relation qui existe entre la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k(\omega)$ , qui dépend éventuellement de  $\omega$ .

Remarque – Lorsque  $\omega(k)$  s'exprime simplement en fonction de  $k$ , la relation de dispersion désignera cette expression.

Par exemple, la relation (17) trouvée à la page 696 :

$$\rho_0 \chi_S \omega^2 - k^2 - \alpha_j k = 0 \tag{30}$$

représente une relation de dispersion associée à une onde plane d'équation :  $\psi(x, t) = \psi_0 e^{i(kx - \omega t)}$ .

La résolution de la relation de dispersion peut générer un nombre d'onde complexe :

$$\underline{k}(\omega) = k_r(\omega) + j k_i(\omega) \text{ avec } k_r(\omega) = \text{Re} \{ \underline{k}(\omega) \} \text{ et } k_i = \text{Im} \{ \underline{k}(\omega) \}$$

auquel cas une onde plane progressive est décrite par la fonction complexe :

$$\underline{\psi}(x, t) = \psi_0 e^{j(\underline{k}x - \omega t)} = \psi_0 e^{-k_i(\omega)x} \times e^{j[k_r(\omega)x - \omega t]} \quad (31)$$

Par exemple, la relation de dispersion (30) conduit aux solutions :

$$\underline{k} = \pm \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1} - j \frac{\alpha}{2} \quad \text{où } \omega_c = \frac{\alpha}{2\sqrt{\rho_0 \chi_S}}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\underline{k} = \pm k_r - j k_i \quad \text{avec } k_i = \frac{\alpha}{2} \quad \text{et } k_r = \frac{\alpha}{2} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1} > 0 \quad \text{si } \omega > \omega_c$$

**Définition 19** Un milieu est qualifié de dissipatif si :

$$k_i(\omega) \neq 0 \quad \text{c'est-à-dire } \underline{k} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

Dans ce cas, la fonction :

$$\underline{\psi}(x, t) = \psi_0 e^{-k_i(\omega)x} \times e^{j[k_r(\omega)x - \omega t]} \quad (32)$$

$$\Rightarrow \psi(x, t) = \psi_0 e^{-k_i(\omega)x} \times \cos[k_r(\omega)x - \omega t] \quad (33)$$

montre que l'amplitude de l'onde s'affaiblit avec  $x$ .

Remarque – Le cas limite pour lequel  $k_r(\omega) = 0$  produit une « onde » évanescence :

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{-k_i(\omega)x} \times \cos(\omega t)$$

qui ne se propage alors pas dans le milieu.

Dans le cas général représenté par la fonction (33), l'onde plane se propage avec une vitesse  $v_\varphi = \frac{\omega}{k_r(\omega)}$ .

**Définition 20** On appelle vitesse de phase la vitesse de propagation d'une onde plane monochromatique, de pulsation  $\omega$  :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r(\omega)} = \frac{\omega}{\text{Re}\{\underline{k}\}}$$

Par exemple, la relation de dispersion (30) fournit :

$$k_r = \frac{\alpha}{2} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{\omega_c}$$

auquel cas une onde plane monochromatique, de pulsation  $\omega$ , s'y propage à la vitesse

$$v_\varphi = \frac{2\omega\omega_c}{\alpha\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}$$

**Définition 21** Un milieu est non dispersif lorsque  $v_\varphi$  est indépendant de  $\omega$ , c'est-à-dire lorsque :



$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r(\omega)} = c \text{ (constante indépendante de } \omega \text{)}$$

## 5.4.2 Paquets d'ondes

### 5.4.2.1 Définitions

**Définition 22** Soit  $f(x)$  une fonction régulière de  $x$  sur  $\mathbb{R}$ . On appelle transformée de Fourier  $F(\omega)$  associée à  $f(x)$  l'intégrale :

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx$$

On peut montrer que la fonction  $f(x)$  s'écrit alors :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega x} d\omega$$

**Définition 23** La pulsation  $\omega$  d'une onde et sa longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , liées par la relation de dispersion  $f(\omega, k) = 0$ , définissent la vitesse de groupe d'une onde :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$



Lorsque la relation de dispersion permet d'obtenir la fonction  $\omega(k)$ , la dérivée de  $\omega$  fournit directement  $v_g$ . Il arrive cependant que la loi  $k(\omega)$  soit plus facile à obtenir, auquel cas on calculera avantageusement :

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega}$$

**Définition 24** On appelle paquet d'ondes un ensemble (discret ou continu) d'ondes monochromatiques de pulsations voisines les unes des autres.

Cette définition suggère qu'un paquet d'ondes admet une décomposition en ondes monochromatiques :

$$\underline{\psi}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cos(\omega_n t - k_n x) \text{ ou } \underline{\psi}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega$$

**Définition 25** L'énergie  $I(x, t)$  véhiculée par une onde (ou par un paquet d'ondes) de fonction  $\underline{\psi}(x, t)$  est proportionnelle à  $|\underline{\psi}|^2$  :

$$I(x, t) \propto \underline{\psi} \underline{\psi}^* = |\underline{\psi}|^2$$

Remarque – D'après la définition précédente, l'énergie  $I(x, t)$  associée à une onde plane monochromatique  $\underline{\psi} = \psi_0 e^{j(\omega t - kx)}$  vaut :

$$I_{\text{onde plane}} \propto \psi_0^2 = \text{constante}$$

Cette énergie ne se propage donc pas.

#### 5.4.2.2 Propagation d'un paquet d'ondes

Considérons, dans un premier temps, un paquet d'ondes qui se décompose en ondes planes :

$$\underline{\psi}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega$$

et qui se propage dans un milieu non dispersif, caractérisé par la vitesse de phase :

$$\begin{aligned} v_\varphi = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v_\varphi} &\Rightarrow \omega t - kx = \omega \left( t - \frac{x}{v_\varphi} \right) \\ &\Rightarrow \omega t - kx = \omega u \text{ avec } u = t - \frac{x}{v_\varphi} \end{aligned}$$

Ce paquet d'onde est donc décrit par la fonction :

$$\underline{\psi}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega u} d\omega \quad (34)$$

Supposons qu'à une date  $t_0$  le paquet d'ondes en  $x_0$  vaut  $\underline{\psi}(u_0)$  (avec  $u_0 = t_0 - \frac{x_0}{v_\varphi}$ ).

À l'instant  $t = t_0 + dt$ , ce paquet d'ondes est décrit, en  $x = x_0 + dx$ , par :  $\underline{\psi}(u) = \underline{\psi}(u_0 + du)$ . Conformément à la relation (34), la propagation se fait sans déformation du paquet d'ondes si  $\underline{\psi}(u_0) = \underline{\psi}(u_0 + du)$ , c'est-à-dire :

$$du = 0 \Rightarrow dt = -\frac{dx}{v_\varphi} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_\varphi$$

En conclusion, dans un milieu non dispersif, un paquet d'ondes se déplace, sans déformation, avec une vitesse s'identifiant à la vitesse de phase.

L'onde, décrite par une fonction :

$$\underline{\psi}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega u} d\omega \Rightarrow \underline{\psi}^*(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega') e^{-j\omega' u} d\omega'$$

véhicule une énergie  $I(u)$  proportionnelle à  $\underline{\psi}(u) \times \underline{\psi}^*(u)$  :

$$I(u) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) F^*(\omega') e^{j(\omega - \omega') u} d\omega d\omega'$$

À un instant  $t + dt$ , un point d'abscisse  $x + dx$  reçoit la même énergie à condition que :

$$I(u') = I(u) \text{ avec } u' = t + dt - \frac{x + dx}{v_\varphi}$$

$$\Rightarrow u' = u \Rightarrow t + dt - \frac{x}{v_\varphi} - \frac{dx}{v_\varphi} = t - \frac{x}{v_\varphi} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_\varphi$$

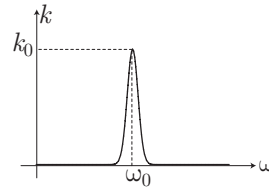
ce qui prouve que l'énergie se propage à la vitesse  $v_\varphi$ .

En revanche, dans un milieu dispersif,  $k$  est une fonction de  $\omega$ , que l'on supposera négligeable en dehors du voisinage d'une pulsation  $\omega_0$ . De fait,  $k(\omega)$  admet pour développement limité :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} = k_0 + \frac{\varepsilon}{v_g}$$

si l'on définit :

$$k(\omega_0) = k_0 \quad \varepsilon = \omega - \omega_0 \Rightarrow \omega = \varepsilon + \omega_0 \quad v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_0}$$



Par conséquent, le paquet d'ondes est décrit par :

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j[\omega t - k(\omega) x]} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j[\varepsilon t + \omega_0 t - k_0 x - \frac{\varepsilon x}{v_g}]} d\varepsilon \\ &= e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\infty}^{\infty} F(\varepsilon + \omega_0) e^{j\varepsilon u} d\varepsilon \text{ avec } u = t - \frac{x}{v_g} \end{aligned}$$


L'énergie  $I(u)$  alors véhiculée par cette onde est proportionnelle à  $\underline{\psi}(t) \times \underline{\psi}^*(u)$  :

$$I(u) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\varepsilon + \omega_0) F^*(\varepsilon' + \omega_0) e^{j(\varepsilon - \varepsilon') u} d\varepsilon d\varepsilon'$$

et sa vitesse de propagation  $v_{\text{énergie}}$  vérifie :  $I(u') = I(u)$ , où  $u' = t + dt - \frac{x + dx}{v_g}$  et  $dx = v_{\text{énergie}} dt$ . Ainsi :

$$u' = u \Rightarrow t + dt - \frac{x}{v_g} - \frac{v_{\text{énergie}}}{v_g} dt = t - \frac{x}{v_g} \Rightarrow v_{\text{énergie}} = v_g$$

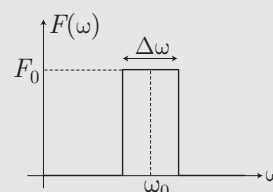
Cette identité montre que la vitesse de groupe est la vitesse de propagation de l'énergie véhiculée par le paquet d'ondes.

 Un paquet d'ondes a pour fonction :

$$\underline{\psi}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j(\omega t - kx)} d\omega$$

où le spectre en fréquence est décrit par une raie rectangulaire :

$$\begin{cases} F(\omega) = F_0 \text{ pour } \omega \in \left[ \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right] \\ F(\omega) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$



avec  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ .

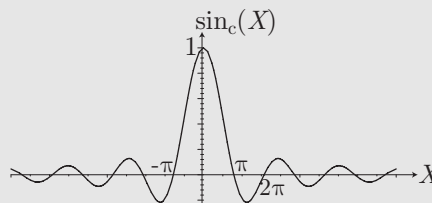
1. On considère ici le milieu non dispersif, de vitesse de phase  $v_\varphi$ .

(a) Montrer que ce paquet d'ondes est décrit par la fonction :

$$\psi(u) = F_0 \Delta\omega f(u) \times \cos(\omega_0 u)$$

où  $u = t - \frac{x}{v_\varphi}$  et où  $f(u)$  est une fonction de  $u$  et de  $\Delta\omega$ , que l'on explicitera.

(b) On rappelle l'allure de la fonction *sinus cardinal* :



En tenant compte de l'inégalité :  $\Delta\omega \ll \omega_0$ , donner l'allure de la fonction  $\psi(u)$ .

(c) Décrire comment cette onde se propage et donner la vitesse de propagation de ce paquet d'ondes.

2. On considère maintenant que le milieu est dispersif et est caractérisé par une relation de dispersion :

$$k(\omega) = k(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} = k_0 + (\omega - \omega_0) \times \frac{1}{v_g}$$

$$\text{où } k_0 = k(\omega_0) \text{ et } \frac{1}{v_g} = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}$$

(a) Montrer que le paquet d'ondes est à nouveau décrit par la fonction :

$$\psi(x, t) = F_0 \Delta\omega f(u) \times \cos(\omega_0 t - k_0 x) \text{ où } u = t - \frac{x}{v_g}$$

(b) À quelle vitesse se propage l'enveloppe de  $\psi$  ?

RÉPONSE

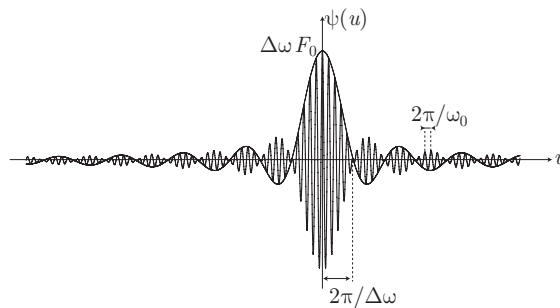
1. (a) La définition de la vitesse de phase :  $v_\varphi = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k = \frac{\omega}{v_\varphi}$  conduit à :

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega \left(t - \frac{x}{v_\varphi}\right)} d\omega \\ &= F_0 \int_{\omega_0 - \Delta\omega/2}^{\omega_0 + \Delta\omega/2} e^{j\omega u} d\omega \text{ avec } u = t - \frac{x}{v_\varphi} \\ &= \frac{F_0}{ju} \times e^{j\omega_0 u} \times \left( e^{j\Delta\omega u/2} - e^{-j\Delta\omega u/2} \right) \\ &= \frac{2F_0}{u} \times e^{j\omega_0 u} \times \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} u\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant :  $\text{sin}_c(X) = \frac{\sin X}{X}$  :

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(u) &= F_0 \Delta\omega e^{j\omega_0 u} \text{sin}_c\left(\frac{\Delta\omega}{2} u\right) \\ \Rightarrow \psi(u) &= \text{Re}\{\underline{\psi}(u)\} = F_0 \Delta\omega \text{sin}_c\left(\frac{\Delta\omega}{2} u\right) \times \cos(\omega_0 u) \end{aligned}$$

- (b) Cette relation montre que la fonction  $\cos(\omega_0 u)$  est modulée en amplitude par  $\text{sin}_c\left(\frac{\Delta\omega}{2} u\right)$ , avec  $\frac{\Delta\omega}{2} \ll \omega_0$  :



- (c) La relation :  $f(u) = \text{sin}_c\left(\frac{\Delta\omega}{2} u\right)$  sert ainsi d'enveloppe à la fonction d'ondes  $\psi(u)$  et se propage donc sur une distance  $dx$ , pendant une durée  $dt$ , telles que :

$$u' = t + dt - \frac{x + dx}{v_\varphi} = u = t - \frac{x}{v_\varphi} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v_\varphi}$$

La vitesse de propagation de cette onde vaut donc :

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = v_\varphi$$

2. En revanche, la relation de dispersion :  $k(\omega) = k_0 + \frac{\omega - \omega_0}{v_g}$  conduit à :

$$\begin{aligned} \underline{\psi}(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\left[\omega t - k_0 x - (\omega - \omega_0) \frac{x}{v_g}\right]} d\omega \\ &= \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} F_0 e^{j\left[\varepsilon t + \omega_0 t - k_0 x - \varepsilon \frac{x}{v_g}\right]} d\varepsilon \text{ avec } \varepsilon = \omega - \omega_0 \\ &= F_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\Delta\omega/2}^{\Delta\omega/2} e^{j\varepsilon u} d\varepsilon \text{ en posant } u = t - \frac{x}{v_g} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 \underline{\psi}(x, t) &= F_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \times \frac{1}{ju} \left( e^{j\Delta\omega u/2} - e^{-j\Delta\omega u/2} \right) \\
 &= F_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \times \frac{2}{u} \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} u\right) \\
 &= F_0 e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \times \Delta\omega \operatorname{sin}_c\left(\frac{\Delta\omega}{2} u\right) \\
 \Rightarrow \psi(x, t) &= F_0 \Delta\omega \operatorname{sin}_c\left(\frac{\Delta\omega}{2} u\right) \times \cos(\omega_0 t - k_0 x)
 \end{aligned}$$

Cette fonction a donc une enveloppe d'équation :  $f(u) = \operatorname{sin}_c\left(\frac{\Delta\omega}{2} u\right)$  qui se propage à une vitesse  $v_2$  telle que, pendant  $dt$ , elle se déplace sur une distance  $dx = v_2 dt$ , avec :

$$u(t + dt, x + dx) = u(x, t) \Rightarrow t + dt - \frac{x + v_2 dt}{v_\varphi} = t - \frac{x}{v_\varphi} \Rightarrow v_2 = v_\varphi$$

## ● 126 ————— Concours de l'École de l'Air

20 min.

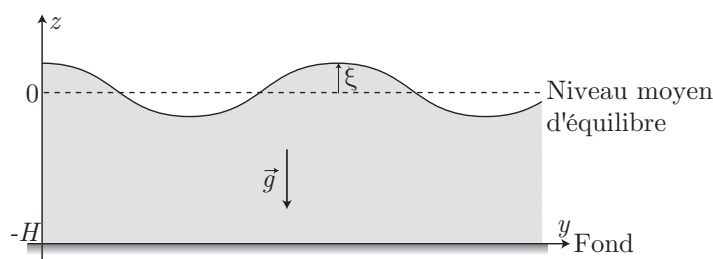
Propagation d'ondes

PC-PSI

On s'intéresse aux ondes de surface qui se propagent sur l'eau, fluide considéré ici comme idéal.

### 1. Établissement des équations d'onde

On va considérer que l'eau, incompressible, ne subit aucun courant permanent et que le déplacement des ondes se fait dans un bassin de profondeur constante  $H$  (le fond est plat). La pression atmosphérique est  $P_0 = 1$  bar. Le but de cette partie est d'obtenir les équations linéarisées liées au passage de l'onde. On repère l'altitude de la surface libre par  $\xi(y, t)$  en un point repéré par  $y$  dans la suite (on notera  $\xi$  en omettant, dans la notation, la dépendance en  $y$  et en  $t$ ). Le problème sera traité en ne considérant aucune propagation en  $x$ . Les termes d'ordre 1 seront  $\xi$  et  $v$ , norme de la vitesse.



- Donner l'équation du mouvement d'une particule fluide lors du déplacement de l'eau au passage de l'onde. La simplifier en ne conservant que les termes d'ordre 1.
- On va approcher la pression dans le fluide en l'assimilant à la pression hydrostatique. Déterminer la pression  $P$  en fonction de  $z$  et  $h$ .
- Dans le cadre de la linéarisation, on ne s'intéresse qu'au terme de vitesse suivant l'axe  $(Oy)$  :  $v_y$ . Déduire de ce qui précède une relation différentielle entre  $v_y$  et  $\xi$ .
- Considérons une colonne fixe comprise entre  $y$  et  $y + dy$ , sur une largeur  $\ell$  en  $x$ . Déterminer le volume  $\delta V$  qu'elle contient. Faire un bilan de matière sur la colonne et en déduire une nouvelle relation différentielle entre  $v_y$  et  $h$ . Linéariser cette relation.
- Déduire de ce qui précède les équations d'évolution de  $v_y$  et  $\xi$  en fonction de  $y$  et  $t$ . Déterminer la célérité  $c$  des ondes qui se propagent, dans le cadre de ce modèle. Donner la forme générale des solutions de l'équation en  $\xi$  (on ne demande pas la démonstration). Interpréter les termes de cette solution.
- En supposant que l'expression de  $c$  reste valable. Expliquer qualitativement pourquoi les vagues se brisent en arrivant près de la plage.

### 2. Ondes sinusoïdales

On va considérer une onde incidente qui se propage dans le sens des  $y$  croissants, sinusoïdale de période  $T$  et d'amplitude  $a_i$  en  $\xi$ . Numériquement, on prendra :  $H = 5$  m,  $a_i = 0,5$  m,  $T = 6$  s et  $g = 10$  m  $\cdot$  s $^{-2}$ .

ÉNONCÉS

- (a) Donner  $\xi(y, t)$  et  $v_{iy}(y, t)$ . Quelle est la valeur de l'amplitude de la vitesse dans l'onde incidente ? Que vaut la longueur d'onde  $\lambda$  ?
- (b) L'onde arrive sur une jetée orientée suivant  $(Ox)$ , située en  $y = 0$  et s'y réfléchit. Quelles sont les conditions aux limites du système qui se développe sur la jetée ? En déduire l'expression de l'onde réfléchie pour  $\xi_r(y, t)$  et  $v_{ry}(y, t)$ .
- (c) Donner alors l'expression générale de  $\xi(y, t)$  et  $v_y(y, t)$  autour de la jetée. Comment nomme-t-on ce type d'ondes et pourquoi ?

### ● 127 **Concours de l'ESIM**

20 min.

PC-PSI

Onde sur une corde

On se propose d'étudier la propagation d'ondes transversales le long d'une corde tendue de très grande longueur. On se limite aux petits déplacements d'une corde flexible de masse linéique  $\mu$  et tendue par une force de tension  $F$ , constante le long de la corde. On suppose qu'il n'y a pas de mouvement le long de l'axe  $(Oz)$  de la corde. On supposera de plus que la corde est dans un milieu visqueux qui crée une force d'amortissement proportionnelle à la vitesse. La force d'amortissement sur l'élément de corde  $dz$  est alors :  $\delta \vec{f} = -\alpha dz \frac{\partial y}{\partial t} \vec{u}_y$  ( $\alpha > 0$  est une constante).

1. Écrire l'équation différentielle satisfaite par  $y(z, t)$ .
2. On cherche les solutions de la forme  $y = y_0 e^{j(\omega t - kz)}$ .

Écrire l'équation liant  $\omega$  et  $k$  (équation de dispersion) et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$k^2 = A \left( 1 - \frac{j}{Q} \right)$$

3. Exprimer  $\underline{k} = k_r - j k_i$  à l'aide de la question précédente.
4. Écrire  $y(z, t)$  pour une onde se propageant vers les  $z > 0$  quand  $Q \ll 1$  et montrer qu'on obtient une onde amortie. Quelle est la distance caractéristique de l'évolution de  $y(x, t)$  ; soit  $\delta$  cette distance.
5. Discuter des influences de  $F$  et  $\mu$  sur  $\delta$ .
6. On rappelle que la densité linéique d'énergie potentielle de la corde est :

$$e_p = \frac{1}{2} F \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)^2$$

Calculer  $\frac{\langle e_c \rangle}{\langle e_p \rangle}$ , rapport des valeurs moyennes temporelles des densités linéiques d'énergies cinétique et potentielle. Exprimer ce résultat en fonction de  $Q$ .

### ● 128 **Banque de la Filière PT**

30 min.

PC-PSI

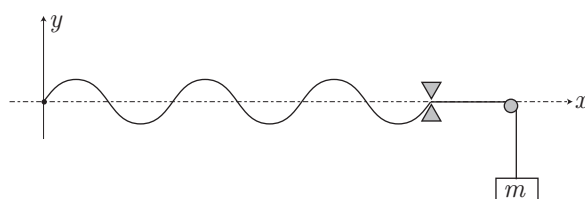
Corde vibrante

On considère une corde homogène, de masse linéique  $\mu$ , initialement au repos et confondue avec l'axe  $(Ox)$ , inélastique, tendue par une tension  $T$  uniforme et constante. La corde est fixée aux points d'abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ . Les mouvements



transversaux de la corde, dans le plan  $xOy$ , sont décrits par leur élongation  $u(x, t)$  autour de la position d'équilibre, solution de l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$



### 1. Recherche des ondes stationnaires

On cherche les solutions de l'équation de propagation sous la forme :

$$y(x, t) = f(x) \times g(t)$$

et on admet que les fonctions  $f(x)$  et  $g(t)$  sont sinusoïdales :

$$f(x) = a_1 \sin(kx + \varphi_1) \text{ et } g(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

- Quelle relation lie les constantes  $k$  et  $\omega$  ?
- Montrer que  $\lambda = \frac{\pi}{k}$  et  $\omega$  ne peuvent prendre qu'une série de valeurs discrètes que l'on exprimera en fonction de  $L$ ,  $n$  et  $v$ .
- À chaque valeur de  $n$  correspond un mode propre. Exprimer l'élongation  $y_n(x, t)$  du mode d'indice  $n$ .

### 2. Aspect énergétique

On se place toujours dans le cas des ondes stationnaires et on considère, sauf mention contraire, le mode propre  $n$ .

- Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un élément de corde compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . En déduire l'énergie cinétique de la corde entre  $x = 0$  et  $x = L$  sous forme d'une intégrale.
- En utilisant l'expression de l'élongation :

$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

déterminer l'énergie cinétique totale de la corde entre  $x = 0$  et  $x = L$ , sous la forme :

$$\mathcal{E}_c = C_1 A_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n)$$

Exprimer  $C_1$  en fonction de  $n$ ,  $T$  et  $L$ .

- Exprimer la longueur d'un élément de corde  $MN$ , situé entre  $x$  et  $x + dx$ , au deuxième ordre en  $\frac{\partial y}{\partial x}$ . En déduire l'allongement de l'élément de corde.
- En déduire l'allongement total de la corde entre  $x = 0$  et  $x = L$ , noté  $\Delta L$ , sous forme d'une intégrale.

- (e) Calculer l'allongement total de la corde entre  $x = 0$  et  $x = L$ .  
En considérant la variation de hauteur de la masse  $m$ , déduire l'expression de l'énergie potentielle de la corde sous la forme :

$$\mathcal{E}_p = C_2 A_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi_n)$$

Exprimer  $C_2$  en fonction de  $n$ ,  $T$  et  $L$ .

- (f) Exprimer l'énergie mécanique totale de la corde, pour chaque mode propre, sous la forme :

$$\mathcal{E}_n = k_n T A_n^2$$

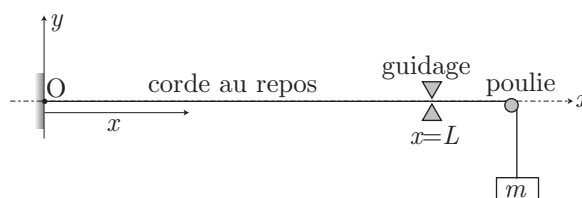
## ● 129 Banque de la filière PT

40 min.

PC-PSI

Corde vibrante

On considère une corde homogène, initialement au repos et confondue avec l'axe  $(Ox)$ , inélastique, de masse linéique  $\mu$ , tendue par une tension pratiquement uniforme et constante  $T$ . Le dispositif global est représenté ci-dessous :



La corde est tendue par une masse  $m$ , par l'intermédiaire d'une poulie. La corde est fixée au point  $O$  et un guidage impose  $y = 0$  à chaque instant, à l'abscisse  $x = L$ .

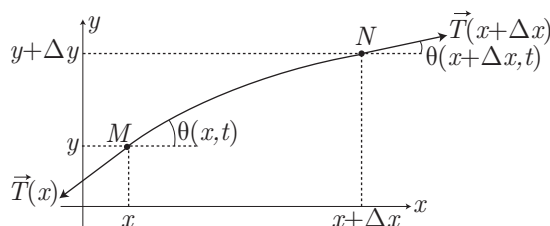
On étudie les petits mouvements transversaux de la corde dans le plan  $(xOy)$ , autour de la position d'équilibre.

L'élongation du point  $M$  d'abscisse  $x$ , à l'instant  $t$ , est notée  $y(x, t)$ .

La tangente en  $M$  à la corde fait avec l'axe  $(Ox)$  un angle  $\theta(x, t)$ . Les déplacements étant de faible amplitude, cet angle  $\theta$  reste petit.

Dans l'étude du mouvement de la corde, on négligera l'action du champ de pesanteur ainsi que toute cause d'amortissement.

La géométrie du problème est représentée ci-dessous ; on y a fait figurer les tensions appliquées à l'élément de corde  $MN$  :



### 1. Équation d'onde d'élongation de la corde

- (a) Faire le bilan des forces extérieures appliquées à l'élément de corde  $MN$ , d'abscisse comprise entre  $x$  et  $x + \Delta x$ .

- (b) Déterminer la masse de l'élément de corde  $MN$  au premier ordre en  $\theta$  et son accélération en fonction d'une dérivée partielle seconde.
- (c) Appliquer la loi fondamentale de la dynamique à cet élément de corde et en déduire l'équation obtenue par projection sur l'axe  $(Oy)$  ; on rappelle que  $\theta$  est petit.
- (d) Exprimer  $\tan \theta$  en fonction d'une dérivée partielle à déterminer. En déduire  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ .
- (e) En déduire l'équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (35)$$

Exprimer la constante  $v$  en fonction de  $T$  et  $\mu$  et en donner la dimension. Que représente-t-elle ?

- (f) *Application numérique :*

Calculer  $\mu$  et  $v$  pour une corde d'acier de masse volumique  $7,2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , de rayon 1 mm, soumise à une tension  $T = 3\,000 \text{ N}$ .

## 2. Recherche des solutions en ondes stationnaires

On rappelle que la corde est fixée de façon rigide en  $x = 0$  et est guidée en  $x = L$ .

On cherche les solutions de l'équation de propagation sous la forme :

$$y(x, t) = f(x) \times g(t) \text{ (ondes stationnaires).} \quad (36)$$

et l'on admet que les fonctions  $f(x)$  et  $g(t)$  sont sinusoïdales :

$$f(x) = a_1 \sin(kx + \varphi_1) \text{ et } g(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

- (a) En introduisant l'équation (36) dans l'équation (35), déduire la relation qui lie  $k$  à  $\omega$ .
- (b) Que peut-on dire de l'élongation aux abscisses  $x = 0$  et  $x = L$  à chaque instant ? En déduire les valeurs de  $f(0)$  et  $f(L)$ .
- (c) Montrer que  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes  $\lambda_n$  que l'on exprimera en fonction de  $L$  et  $n$ .
- (d) En déduire que  $\omega$  ne peut prendre qu'une série de valeurs discrètes  $\omega_n$ , avec  $n$  entier positif. Exprimer  $\omega_n$  en fonction de  $L$ ,  $n$  et  $v$ .
- (e) À chaque valeur de  $\omega_n$  correspond un mode propre. Le mode  $n = 1$  est appelé *mode fondamental*. Les modes correspondant à  $n > 1$  sont les harmoniques. Exprimer l'élongation  $y_n(x, t)$  du mode d'indice  $n$  et donner une représentation graphique de la corde en mouvement (à un instant donné) pour les trois premiers harmoniques.

## 3. Calculs sur les cordes d'une guitare électrique

Une guitare électrique comprend six cordes en acier.

Le tableau ci-dessous fournit, pour chaque corde, la valeur de sa fréquence fondamentale et son diamètre.

Corde n°	1	2	3	4	5	6
$f_1$ (Hz)	82,5	110	147	196	247	330
Diamètre $d$ (mm)	1,12	0,89	0,70	0,55	0,35	0,25

toutes les cordes ont une longueur  $L = 0,63 \text{ m}$  et une masse volumique  $\rho = 7800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

- (a) Déterminer  $T$  en fonction de  $\rho$ ,  $\pi$ ,  $d$ ,  $L$  et  $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$  pour le mode fondamental. Calculer numériquement les tensions nécessaires pour que la guitare soit accordée.
- (b) Quelle variation relative peut être tolérée sur la tension d'une corde pour que sa fréquence fondamentale ne varie pas plus de 1% en valeur relative ?
- (c) L'instrumentaliste veut produire un son de fréquence fondamentale 500 Hz puis 1 kHz, avec une tolérance de 1% sur la corde n°6. Avec quelle précision absolue doit-il placer son doigt pour raccourcir la corde ?

### ● 130 ————— Lycée La Martinière-Montplaisir, Lyon

40 min.

PSI-PC

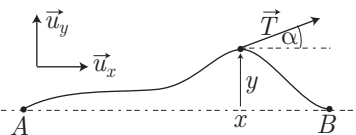
Onde sur une corde

On considère une corde métallique, de masse  $m$ , de longueur  $L$ , de section  $s$  et de masse volumique  $\mu$ .

La corde a ses extrémités  $A$  et  $B$  fixées à la même altitude.

On néglige, dans tout ce qui suit, l'action de son poids sur la corde. La corde a pour équation  $y(x, t)$ , avec  $y(x, t) = 0$  au repos.

On note  $T(x, t)$  et  $\alpha(x, t)$  respectivement la norme de la tension de la corde et l'angle de la tangente à la corde avec l'horizontale au point d'abscisse  $x$ . On notera  $T_0$  la valeur de  $T$  en un point où  $\alpha = 0$ .



1. En appliquant la loi fondamentale de la dynamique à un petit élément de corde, établir que  $y$  vérifie :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (37)$$

dans la mesure où  $\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1$ .  $c$  est à exprimer en fonction de  $m$ ,  $L$  et  $T_0$ .

2. Rechercher les solutions de la forme :  $y(x, t) = f(X)$  avec  $X = x - vt$ . Quelle équation vérifie  $f(X)$  ? Interpréter le fait que si  $v$  est bien choisi, toute fonction  $f(X)$  vérifie l'équation (37).
3. En fait, si l'on tient compte de la raideur de la corde, l'équation (37) devient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{YL}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (38)$$

où  $Y$  est une constante positive caractéristique de la corde. On cherche à nouveau une solution de la forme  $y(x, t) = f(X)$  avec  $X = x - vt$  et  $v > 0$ .

- (a) À quoi est homogène  $YL$  ? Quelle est l'équation différentielle qui régit  $f(X)$  ?
- (b) En déduire que les seules ondes progressives qui sont des fonctions bornées de  $X$  sur l'ensemble des réels sont harmoniques (on écrira les solutions générales suivant les valeurs de  $\frac{v}{c}$ ).
- (c) Quant  $f$  est harmonique, par exemple  $f(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ , quelle relation relie  $k$  et  $\omega$  ?

4. On ne tient plus compte de la raideur, donc  $Y = 0$ . On note  $e$  la quantité :

$$e(x, t) = \frac{m}{2L} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

(a) Montrer qu'il existe un vecteur  $\vec{\Pi}(x, t) = \Pi(x, t) \vec{e}_x$  tel que :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \text{div } \vec{\Pi} = 0$$

(b) Interpréter  $e$  et  $\vec{\Pi}$  et faire une analogie avec les ondes électromagnétiques.

(c) Exprimer  $e$  et  $\vec{\Pi}$  pour une onde de la forme :  $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$ ; relier en particulier  $\vec{\Pi}$  à  $e$ ,  $c$  et  $\vec{e}_x$ .

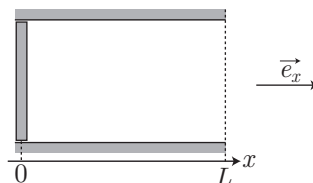
### ● 131 ————— Concours Commun Polytechnique

15 min.  
PC-PSI

Ondes sonores

Un tuyau cylindrique, de longueur  $L$  et de rayon  $R$ , est ouvert à son extrémité en  $x = L$  et est fermé par une membrane en  $x = 0$ . On impose à cette membrane un mouvement oscillatoire sinusoïdal de vitesse :

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t)$$



L'amplitude du mouvement est très faible par rapport à la longueur d'onde.

- Déterminer l'expression de la vitesse d'écoulement de l'air dans le tuyau, en admettant que la surpression  $y$  est nulle.
- En déduire le rapport des puissances sonores  $\frac{P(L)}{P(0)}$ , en admettant qu'elles sont proportionnelles à  $\langle \dot{v}^2 \rangle$  (valeur moyenne du carré de l'accélération du fluide au niveau de la surface rayonnante) pour la même surface rayonnante.

### ● 132 ————— Concours Commun Polytechnique

30 min.  
PC-PSI

Ondes acoustiques

On considère un fluide parfait en écoulement. Soit  $\mu$  la masse volumique de ce fluide en un point  $M$ , à l'instant  $t$ .

Soit  $\vec{v}$  le vecteur vitesse d'écoulement du fluide au même point  $M$  et au même instant.

- Montrer que l'équation de continuité du fluide s'écrit :

$$\text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$$

- Soit  $\vec{F}$  la résultante des forces massiques agissant sur le fluide, autres que les forces de pression.

Soit  $P$  la pression au point  $M$ , à l'instant  $t$ . Montrer que l'équation d'Euler s'écrit :

$$\mu \times \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \right] = \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (39)$$

On rappelle que, pour deux vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{B}$$

3. Lorsque le mouvement du fluide est oscillatoire et de très faible amplitude, on est dans les conditions de l'approximation de l'acoustique si l'on peut supposer :
- que la vitesse d'un élément du fluide est assimilée à la vitesse d'écoulement en un point ;
  - que l'écoulement est irrotationnel ;
  - que la masse volumique du fluide est peu différente de la valeur au repos ;
  - que la surpression par rapport à la pression au repos est faible.

- (a) On pose :  $\mu = \mu_0 + \mu_e$ ,  $\mu_0$  étant la masse volumique au repos. Écrire la relation satisfaite par  $\mu_0$ ,  $\text{div } \vec{v}$  et  $\frac{\partial \mu_e}{\partial t}$ .
- (b) On pose :  $P = P_0 + p$ ,  $P_0$  étant la pression au repos. Soit  $\chi$  le coefficient de compressibilité isentropique du fluide, montrer que  $p = \frac{\mu_e}{\chi \mu_0}$ .
- (c) En l'absence de toute force extérieure et en tenant compte des approximations mentionnées plus haut, écrire une relation entre  $\mu_0$ ,  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} p$ .
- (d) Dédire de ce qui précède que  $p$  satisfait à l'équation :

$$\Delta p = \chi \mu_0 \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

$\Delta p$  étant le Laplacien de  $p$ .

- (e) Quelle est la vitesse de propagation des ondes dans le fluide ?
- (f) Dans le cas d'ondes planes, donner la forme générale de la solution  $p(x, t)$  pour les ondes progressives.
4. Le fluide dans lequel se propagent les ondes est l'air, assimilé à un gaz parfait. On peut considérer la propagation comme adiabatique et par conséquent comme isentropique.
- (a) Calculer alors  $\chi$  en fonction de la pression du gaz et du rapport  $\gamma$  de ses chaleurs massiques (rapport supposé indépendant de la température).
- (b) L'air est dans les conditions normales de température et de pression. Préciser ces conditions. Calculer  $\chi$  sachant que la masse molaire de l'air est  $M = 29.10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$ . On prendra  $\gamma = 1,4$ .  
Calculer la vitesse du son dans ces conditions. On prendra  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### ● 133 ————— Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

30 min.

PC-PSI

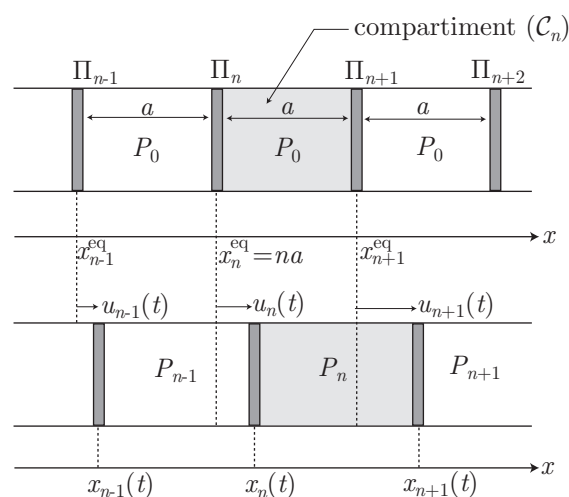
Ondes acoustiques

Pour décrire la propagation d'une onde sonore longitudinale dans l'air, on considère un système modèle, représenté sur les figures ci-dessous et caractérisé par les points suivants :

- Un tuyau rectiligne, de section  $S$ , est divisé en une infinité de compartiments par des pistons rigides de masse  $m$  et de section  $S$ . Le compartiment  $(C_n)$  correspond à l'espace compris entre les pistons  $\Pi_n$  et  $\Pi_{n+1}$ .
- Dans chaque compartiment se trouve une mole de gaz, assimilé à un gaz parfait.
- À l'équilibre, c'est-à-dire en l'absence d'onde sonore, l'abscisse du piston  $\Pi_n$  est  $x_n^{\text{eq}} = na$ ; la pression et la température sont identiques dans tous les compartiments (équilibres mécaniques et thermiques) et on les note respectivement  $P_0$  et  $T_0$ .
- Hors équilibre, c'est-à-dire lors du passage de l'onde sonore, l'abscisse du piston  $\Pi_n$  vaut  $x_n(t) = na + u_n(t)$  à l'instant  $t$  et la pression dans le compartiment  $(C_n)$  vaut  $P_n$ .
- On suppose que l'évolution de la mole de gaz dans chaque compartiment se fait suivant la loi de Laplace : la pression  $P$  dans le compartiment est reliée en permanence à son volume  $V$  par la relation :

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

où le coefficient  $\gamma$  est une constante appelée *coefficient polytropique de Laplace*.



**ÉNONCÉS**

### 1. Surpression sonore

- Établir l'expression de la pression  $P_n$  en fonction de  $P_0, \gamma, a, u_n, u_{n+1}$ .
- Dans cette question, on admet le résultat mathématique suivant, avec  $\varepsilon$  et  $\mu$  réels :

$$(1 + \varepsilon)^\mu \simeq 1 + \mu\varepsilon \text{ lorsque } |\varepsilon| \ll 1$$

Dans l'approximation dite de l'acoustique linéaire, on suppose que le déplacement des pistons est négligeable, de sorte que  $|u_n(t)|$  reste très petit devant  $a$ , pour tout  $n$ .

Montrer que l'expression précédente de  $P_n$  conduit à la formule linéarisée de la surpression  $P_n - P_0$  dans le compartiment  $(C_n)$  suivante :

$$P_n - P_0 = -\frac{1}{\chi} \times \frac{u_{n+1} - u_n}{a}$$

Donner l'expression de la constante  $\chi$  en fonction de  $P_0$  et  $\gamma$ . Son signe est-il en accord avec le « sens physique » donné à cette grandeur ?

- (c) La constante  $\chi$  est appelée coefficient de compressibilité. Donner sa dimension et justifier son nom.

Que vaudrait  $\chi$  si le gaz des compartiments était incompressible ?

Vérifier qu'aucune onde ne se propage dans ce cas.

## 2. Équation discrète de propagation

- (a) La force de pression qu'exerce un gaz à la pression  $P$ , sur un piston de section  $S$ , est donnée en module par la relation :  $F = PS$ .

Faire une figure représentant les actions horizontales s'exerçant sur le piston  $\Pi_n$ . On néglige les frottements s'exerçant sur ce dernier.

- (b) En appliquant la deuxième loi de Newton au piston  $\Pi_n$ , obtenir l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{c^2}{a^2} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (40)$$

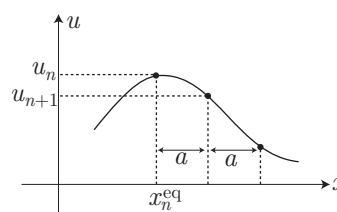
Expliciter la constante  $c$  en fonction de  $\chi$ ,  $m$ ,  $a$  et  $S$ .

On admet que la quantité  $\rho_0 = \frac{m}{aS}$  représente la masse volumique du milieu modélisé à l'équilibre. Que devient l'expression de  $c$  ?

Préciser, en justifiant la réponse, la dimension de  $c$ .

## 3. Approximation des milieux continus

On se propose maintenant de se placer dans l'approximation des milieux continus qui permet de faire passer une fonction « normalement régulière »  $u(x, t)$  par tous les points représentatifs des déplacements  $u_n$  des pistons, à un instant  $t$  donné, ce qui est possible lorsque  $u_n$  est peu différent de  $u_{n+1}$ .



Dans ce but, on définit la fonction  $u(x, t)$  des variables d'espace  $x$  et de temps  $t$  telle que :

- $u(x, t) = u_n(t)$  en  $x = na$  pour tout  $n$  et tout  $t$  ;
- $u(x, t)$  varie peu dans l'espace à l'échelle de  $a$  ;
- $u(x, t)$  est dérivable au moins deux fois par rapport à  $x$  ainsi que  $t$ . De plus, on admet qu'il est possible, pour la fonction  $u(x, t)$ , de réaliser l'opération suivante de permutation des dérivées partielles par rapport aux variables  $x$  et  $t$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

On remarquera que la définition de la fonction  $u(x, t)$  permet d'écrire les relations :

$$u_{n+1}(t) = u(na + a, t) = u(x + a, t) \text{ et } u_{n-1}(t) = u(na - a, t) = u(x - a, t)$$

On donne le résultat mathématique suivant : pour une fonction  $f$  de la variable  $y$ , il est possible d'écrire le développement, au voisinage de  $y$  :

$$f(y + \varepsilon) \simeq f(y) + \varepsilon \frac{df}{dy}(y) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{d^2 f}{dy^2} \text{ si } |\varepsilon| \ll 1$$



Montrer que l'équation différentielle (40) se ramène à l'équation dite de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

### ● 134 ————— Concours des Ponts et Chaussées

40 min.

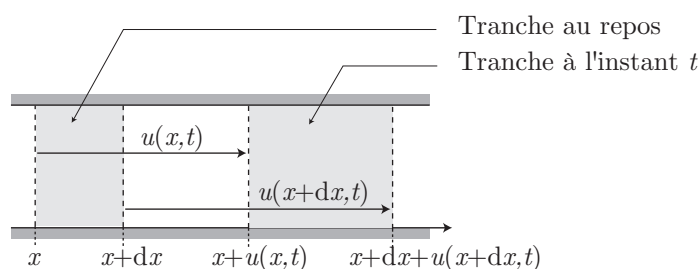
PC-PSI

Propagation d'une onde sonore

On considère un « tuyau sonore », long cylindre rempli d'un fluide dans lequel on étudie la propagation d'une perturbation (de pression, déplacement, masse volumique, ...). On ne s'intéresse qu'à la description de perturbations unidimensionnelles, ne dépendant que de l'abscisse  $x$  le long du tuyau sonore et du temps  $t$ . On néglige tout effet de pesanteur.

Les grandeurs non perturbées, affectées de l'indice  $(0)$ , sont uniformes au sein du fluide et constantes dans le temps ; on notera ainsi  $P_0$  la pression et  $\rho_0$  la masse volumique dans l'état non perturbé du fluide.

Dans le milieu perturbé, on notera  $u(x, t)$  le déplacement à l'instant  $t$  de la tranche de fluide repérée au repos par l'abscisse  $x$ . L'abscisse de cette tranche à l'instant  $t$  est donc  $x + u(x, t)$ .



On notera aussi  $P(x, t)$  la pression et  $\rho(x, t)$  la masse volumique, à l'instant  $t$ , de la tranche élémentaire de fluide située au repos à l'abscisse  $x$  (cette description ne correspond pas à la description eulérienne des milieux continus, où l'on suit l'évolution de grandeurs macroscopiques en chaque point de l'espace). La vitesse de cette tranche est  $v(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}$ . Toutes les transformations considérées dans ce problème seront traitées comme quasi statiques. Le fluide est supposé obéir à une équation d'évolution, notée  $P(\rho)$  et non explicitée pour le moment. Dans la suite, on considérera des évolutions isothermes ou adiabatiques.

#### I- Généralités

1. En exprimant la conservation de la masse, établir la relation liant  $\rho(x, t)$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}$ .
2. En exprimant la loi de Newton (de la dynamique) à la tranche de fluide comprise, au repos, entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , établir la relation liant  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  à  $\frac{\partial P}{\partial x}$ .
3. En considérant l'équation d'évolution, montrer que  $u(x, t)$  satisfait l'équation dif-

férentielle non linéaire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}}$$

## II- Approximation acoustique

La suite du problème sera traitée dans le cadre de l'*approximation acoustique*, où l'on suppose satisfaite l'inégalité  $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$  (les déformations relatives des différents éléments de fluide sont faibles).

1. Montrer comment l'on peut, dans ce cas, linéariser l'équation différentielle de la question 3. et la donner sous la forme :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

où l'on exprimera  $c_0$  en fonction de  $\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_0}$ .

2. Quelle est la forme générale de la solution de l'équation linéarisée ? Quel nom donne-t-on à chacun des deux termes de cette solution ? Pourquoi  $c_0$  est-il appelé vitesse du son ?

Vérifier sur l'expression obtenue de  $c_0$  en fonction de  $\left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{\rho=\rho_0}$  que la dimension de  $c_0$  est effectivement celle d'une vitesse.

3. Exprimer  $c_0$  en fonction de  $\rho_0$  et du *coefficient de compressibilité*  $\chi$  correspondant à la transformation subie par le fluide, défini par la relation :  $\chi = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP}$ .

4. Le fluide est de l'air, convenablement représenté par le modèle du gaz parfait. La température d'une tranche de fluide est supposée constante. Quelle est alors l'équation d'évolution  $P(\rho)$  ?

En déduire l'expression du coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T$ .

5. *Application numérique* :  $T_0 = 293 \text{ K}$ ,  $\rho_0 = 1,2933 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Calculer  $c_0$ . Pour le fluide à l'équilibre, on pose  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ,  $c_p$  et  $c_v$  étant les capacités calorifiques respectivement à pression constante et à volume constant. Dans la suite, on admettra la relation, dite de Reech, entre les coefficients de compressibilité isotherme  $\chi_T$  et adiabatique  $\chi_{\text{adia}}$  :  $\chi_T = \gamma \times \chi_{\text{adia}}$ .

Calculer la valeur numérique de la vitesse du son correspondant à l'évolution adiabatique du gaz ( $\gamma = 1,4$ ). Commenter le résultat, en indiquant le modèle qui vous paraît le mieux représenter l'évolution réelle de la tranche de gaz.

6. Le fluide est maintenant de l'eau, pour laquelle, dans les conditions d'expérience ( $20^\circ\text{C}$ ),  $\gamma = 1$ ,  $\rho_0 = 998 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $\chi = 4,6 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ . Calculer la vitesse du son dans l'eau.

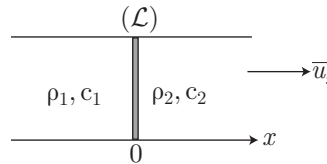
● **135** **Concours Centrale**

20 min.  
PC-PSI

Ondes acoustiques (réflexion et transmission)

( $\mathcal{L}$ ) est une membrane infiniment mince, de masse surfacique  $\sigma$ . Elle peut coulisser sans frottements dans un tuyau horizontal, de direction ( $Ox$ ) et de section constante.

Elle sépare deux fluides parfaits en  $x = 0$ . On note  $\rho_i$  et  $c_i$  ( $i = 1$  ou  $2$ ) la masse volumique et la vitesse des ondes acoustiques dans de tels milieux. Le tuyau est supposé illimité.



Une onde acoustique qui arrive sur la membrane est caractérisée par une vitesse d'écoulement local :

$$\vec{v}_i = v_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \underline{u}_x$$

Il s'agit d'une onde plane monochromatique de pulsation  $\omega$ .

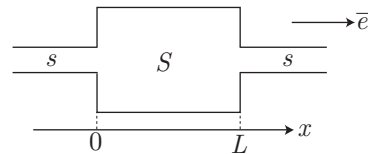
Déterminer les coefficients (complexes) de réflexion ( $r$ ) et de transmission ( $t$ ) associés à  $\vec{v}$ .

● **136** **Concours Polytechnique**

20 min.  
PC-PSI

Ondes acoustiques (réflexion et transmission)

Une onde acoustique (de longueur d'onde  $\lambda$ ) arrive, par un tuyau de section  $s$ , dans une cavité de longueur  $L$  et de section  $S$ . Elle peut en ressortir par un tuyau de section  $s$  dans lequel on supprime toute onde de retour.



Déterminer les facteurs de transmission en amplitude (pour la vitesse) et en énergie.

On suppose que l'onde reste plane au niveau de chaque changement de section, sauf sur une certaine distance  $\varepsilon$  de part et d'autre de  $x = 0$  et de  $x = L$ . On considérera que cette distance  $\varepsilon$  reste très inférieure à  $\lambda$  et à  $L$ .

L'écoulement est unidimensionnel ( $\vec{e}_x$ ) et l'on admet la continuité de la surpression et du débit (produit de la section par la vitesse) et tout point du système.

On note  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}$  où  $\omega$  est la pulsation de l'onde et  $c$  sa célérité dans le milieu de propagation (air par exemple) de masse volumique  $\rho$ . On pose  $\phi = kL$ .

● **137** **Concours des Ponts et Chaussées**

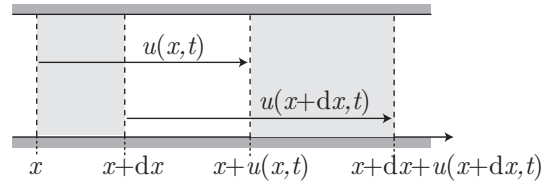
45 min.  
PC-PSI

Ondes acoustiques (aspect énergétique)

On s'intéresse à la propagation unidimensionnelle d'une onde acoustique dans un tuyau. On néglige tout effet de pesanteur. Les grandeurs non perturbées, affectées de l'indice  $(_0)$ , sont uniformes au sein du fluide et constantes dans le temps. On notera ainsi  $P_0$  la pression et  $\rho_0$  la masse volumique dans l'état non perturbé du fluide.

Dans le milieu perturbé, on notera  $u(x, t)$  le déplacement à l'instant  $t$  de la tranche de fluide repérée au repos par l'abscisse  $x$ . L'abscisse de cette tranche, à l'instant  $t + dt$ , est donc  $x + u(x, t)$ .

**ÉNONCÉS**



On notera aussi  $P(x, t)$  la pression,  $\rho(x, t)$  la masse volumique, à l'instant  $t$ , de la tranche élémentaire de fluide située, au repos, à l'abscisse  $x$ . La vitesse de cette tranche est  $v(x, t)$ . Le fluide est supposé obéir à une équation d'évolution  $P(\rho)$ .

1. En considérant l'énergie cinétique  $\delta\mathcal{E}_c$  de la tranche de fluide comprise, au repos, entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , exprimer l'énergie cinétique par unité de longueur :  $\varepsilon_c = \frac{\delta\mathcal{E}_c}{dx}$ .
2. L'énergie potentielle de la tranche de fluide dans l'état perturbé,  $\delta\mathcal{E}_p$ , est définie comme le travail fourni pour comprimer le fluide de l'état initial au repos à l'état actuel. Établir la relation :

$$\delta\mathcal{E}_p = \left[ \rho_0 \int_{\rho_0}^{\rho} P(\rho) \frac{d\rho}{\rho^2} \right] S dx$$

où  $S$  est la mesure de la section droite du cylindre. Cette définition définit l'énergie potentielle par unité de longueur :  $\varepsilon_p = \frac{\delta\mathcal{E}_p}{dx}$ .

3. Entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , les tranches de fluide voisines de la tranche d'épaisseur  $dx$  et d'abscisse  $x_0$  fournissent du travail à cette dernière. On appelle *intensité instantanée* au point  $x_0$  et on note  $I(x_0, t)$  le travail, par unité de temps et par unité de surface, fourni par le fluide située en  $x < x_0$  au fluide situé en  $x > x_0$ . Exprimer  $I(x_0, t)$  en fonction de  $P(x_0, t)$  et de  $\frac{\partial u(x_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=x_0}$ .
4. L'énergie par unité de longueur d'une tranche de fluide est, par définition,  $\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_p$ . En effectuant un bilan énergétique sur la tranche élémentaire située entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , établir une relation entre  $\frac{\partial I}{\partial x}$  et  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}$ .
5. Par définition, la *surpression acoustique* est  $p = P - P_0$  et la *variation relative de masse volumique* est  $s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}$ . Toujours dans le cadre de l'approximation acoustique, on considère l'évolution adiabatique d'une tranche élémentaire de fluide.

Montrer que l'équation de conservation de la masse :  $\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}$ , l'équation de

Newton :  $\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial x}$  et l'équation d'évolution adiabatique :  $\chi_S = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP}$  s'écrivent respectivement sous la forme :

$$s = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad p = \frac{1}{\chi_S} \times s$$

6. On considère ici le cas d'une onde progressive dans le sens des  $x$  croissants et on

pose :

$$p_+ = p \left( t - \frac{x}{c_0} \right), u_+ = u \left( t - \frac{x}{c_0} \right), v_+ = v \left( t - \frac{x}{c_0} \right) \text{ et } s_+ = s \left( t - \frac{x}{c_0} \right)$$

où  $c_0$  désigne la vitesse de propagation de l'onde.

Montrer que les grandeurs  $p_+$  et  $v_+$  sont liées entre elles par une relation du type :  $p_+ = Z v_+$ , où l'impédance caractéristique  $Z$  sera exprimée en fonction de  $\rho_0$  et de  $c_0$ .

7. Qu'en est-il des ondes progressives dans le sens des  $x$  décroissants ?
8. On considère maintenant le cas d'une onde plane stationnaire sinusoïdale, de pulsation  $\omega$  et décrite par :  $p = p_m \cos(\omega t - \varphi)$ . Calculer l'intensité instantanée, telle qu'elle a été définie à la question 3. en fonction de la surpression  $p$  et de l'impédance acoustique  $Z$ .
9. Calculer la valeur moyenne dans le temps de cette intensité instantanée.

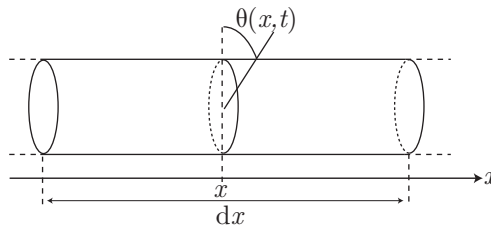
● **138** ————— **Concours de l'E.N.S.**

45 min.

PC-PSI

*Propagation de l'énergie*

On considère un fil de torsion infini, tendu horizontalement, à symétrie de révolution autour de son axe ( $\Delta$ ) et tel que chaque « tranche » de fil, de longueur  $dx$  ( $x$  désigne l'abscisse le long de ( $\Delta$ )) possède un moment d'inertie  $\mathcal{J} dx$  par rapport à ( $\Delta$ ) et une constante de torsion  $\frac{\mathcal{C}}{dx}$ . On désigne par  $\theta(x, t)$  l'angle de torsion du fil par rapport à sa position de repos, à l'abscisse  $x$  et à la date  $t$  :



**I- Équation du mouvement et solutions générales**

1. Montrer que l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $\theta(x, t)$  est de la forme :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \tag{41}$$

où  $v$  est une quantité que l'on exprimera en fonction de  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{C}$ .

2. On fait les changements de variables :  $X = t - \frac{x}{v}$  et  $Y = t + \frac{x}{v}$ .
  - (a) Écrire l'équation aux dérivées partielles précédente, en variables  $X$  et  $Y$ .
  - (b) En déduire que la solution la plus générale de l'équation (41) s'écrit :  $\theta(x, t) = F \left( t - \frac{x}{v} \right) + G \left( t + \frac{x}{v} \right)$ , où  $F$  et  $G$  sont deux fonctions (presque) quelconques d'une seule variable.  
Quelle est la signification physique du résultat précédent ?

3. On désigne par  $\varepsilon(x, t)$  la densité linéique d'énergie mécanique (somme de l'énergie cinétique d'une « tranche » de fil et de son énergie potentielle de torsion).
- (a) Donner l'expression de  $\varepsilon$  en fonction de  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\theta(x, t)$ .
- (b) Montrer qu'il existe une quantité  $\mathcal{G}$  telle qu'on ait, pour tout mouvement  $\theta(x, t)$  solution de l'équation différentielle (41), la relation :  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} = 0$ .
4. On suppose que le mouvement de la chaîne est décrit par une solution du type :  $\theta(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right)$ .
- (a) Montrer que les densités d'énergie cinétique et élastique (*i.e.* de torsion) sont égales pour tout  $x$  et pour tout  $t$ .
- (b) Calculer  $\mathcal{G}$  et montrer qu'il s'exprime très simplement en fonction de  $\varepsilon$ .
5. Répondre aux mêmes questions en supposant un mouvement décrit par :  $\theta(x, t) = G\left(t + \frac{x}{v}\right)$ .
6. On considère maintenant la solution la plus générale, soit :

$$\theta(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

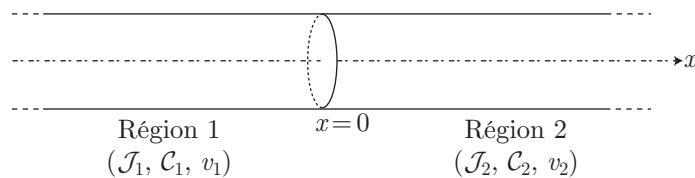
Calculer  $\varepsilon$  et  $\mathcal{G}$ . Que remarque-t-on ?

## II- Traversée d'une discontinuité

Dans cette partie, on étudie la propagation d'ondes de torsion le long d'une chaîne infinie obtenue en accolant, en  $x = 0$ , deux chaînes semi-infinies de caractéristiques différentes :

- pour  $x < 0$  (région notée 1), les caractéristiques de la chaîne sont :  $\mathcal{J}_1$  et  $\mathcal{C}_1$  ;
- pour  $x > 0$  (région notée 2), les caractéristiques sont  $\mathcal{J}_2$  et  $\mathcal{C}_2$ .

On pose :  $Z_1 = \mathcal{J}_1 \times v_1$  et  $Z_2 = \mathcal{J}_2 \times v_2$ .



1. On suppose que la chaîne a été excitée (dans le passé) en  $x = -\infty$ , de sorte qu'une onde de torsion, dite « incidente », s'y propage dans le milieu 1, décrite par :

$$\theta_i(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$$

- (a) Que se passe-t-il lorsque l'onde incidente atteint l'abscisse  $x = 0$  ?
- (b) Comme cela a été établi en I-2.(b), la solution générale de l'équation de propagation (41) s'écrit :

$$\begin{cases} \theta_1(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v_1}\right) + G\left(t + \frac{x}{v_1}\right) & \text{pour } x < 0 \\ \theta_2(x, t) = H\left(t - \frac{x}{v_2}\right) + K\left(t + \frac{x}{v_2}\right) & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

et on se propose de déterminer les trois fonction  $G$ ,  $H$  et  $K$  à partir de  $F$ , supposé connu.

Écrire les trois conditions aux limites du problème.

2. (a) En déduire les expressions de  $G$ ,  $H$  et  $K$  en fonction de  $F$ ,  $Z_1$  et  $Z_2$ .
- (b) Définir et exprimer, en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ , les coefficients de réflexion  $r_{12}$  et de transmission  $t_{12}$  en amplitude pour la variable  $\theta$ .
- (c) Commenter le signe de  $r_{12}$  en fonction des valeurs relatives de  $Z_1$  et  $Z_2$  ( $Z_1$  étant fixé, on pourra examiner les cas limites :  $Z_2 \rightarrow 0$  et  $Z_2 \rightarrow \infty$ ).
3. (a) En s'inspirant des résultats des questions I-4. et I-5., proposer une définition des coefficients de réflexion  $R_{12}$  et de transmission  $T_{12}$  en puissance.
- (b) Exprimer  $R_{12}$  et  $T_{12}$  en fonction de  $Z_1$  et  $Z_2$ .
- (c) Trouver et interpréter une relation simple entre  $R_{12}$  et  $T_{12}$ .

### ● 139 ————— Concours Commun Polytechnique

10 min.

Relation de dispersion

PC-PSI

À cause de la viscosité de l'air, le son est absorbé au cours de sa propagation. On suppose que l'onde sonore se propage suivant la direction  $(Ox)$ . On admet que la surpression  $p(x, t)$  vérifie alors l'équation de propagation suivante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 p}{\partial x^2 \partial t}$$

dans laquelle  $c$  et  $\beta$  sont des constantes positives ( $\beta$  est proportionnel à la viscosité de l'air).

On considère que l'émetteur envoie une onde sinusoïdale de pulsation  $\omega$  et que  $\beta$  vérifie :  $\beta\omega \ll c^2$ .

On cherche, pour la surpression complexe, une solution de la forme :  $\underline{p}(x, t) = p_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}$  où  $\underline{k}$  est complexe :  $\underline{k} = k_1 - j k_2$  ( $k_1$  et  $k_2$  sont des réels positifs).

1. Exprimer  $k_1$  et  $k_2$  en fonction de  $\beta$ ,  $c$  et  $\omega$ , en faisant les approximations qui s'imposent.
2. Donner l'expression réelle  $p(x, t)$  de la surpression.
3. Donner l'expression de la vitesse de phase  $v_\varphi$ . Y a-t-il dispersion ?
4. Si on utilise des ultrasons dans l'air, quelle gamme de fréquences est-il préférable d'utiliser pour limiter leur atténuation au cours de la propagation ?

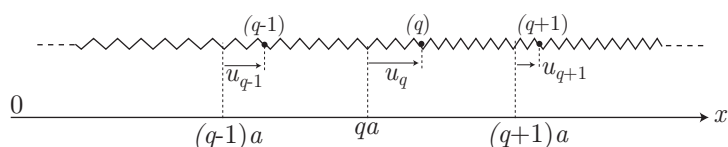
### ● 140 ————— Concours de l'ENS

20 min.

Relation de dispersion

PC-PSI

Dans une chaîne rectiligne d'atomes, les liaisons sont représentées par des ressorts liant les plus proches voisins. Les ressorts, parallèles à  $(Ox)$ , ont tous une raideur  $k$  et une longueur au repos  $a$ . Les atomes, qui ont tous la même masse  $m$ , sont disposés sur l'axe  $Ox$  et sont repérés par un entier  $q$ . L'atome numéro  $q$  a pour abscisse  $qa$ . Nous notons  $u_q$  son déplacement longitudinal.



Pour les fonctions  $u_q(t)$  nous cherchons les solutions harmoniques de pulsation  $\omega$  sous la forme :

$$u_q(t) = u_{q0} \cos(\omega t + \varphi_q)$$

L'image complexe  $\underline{u}_q$  de  $u_q$  est définie par :  $u_q = \text{Re} \{ \underline{u}_q \}$ , avec  $\underline{u}_q = \underline{u}_{q0} e^{j\omega t}$ . On posera :  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ .

1. Exprimer la relation de récurrence liant  $\underline{u}_{q-1}$ ,  $\underline{u}_q$  et  $\underline{u}_{q+1}$ .
2. On rappelle que, si une suite est définie par la relation de récurrence :

$$\underline{u}_{q+1} - S \underline{u}_q + P \underline{u}_{q-1} = 0$$

la solution générale est, pour  $S^2 \neq 4P$  :

$$\underline{u}_{q0} = A r_1^q + B r_2^q \text{ avec } r_1 r_2 = P \text{ et } r_1 + r_2 = S$$

Montrer que, si  $\omega$  est inférieur à une valeur  $\omega_c$  que l'on exprimera, la suite des  $u_q(t)$  peut se décrire par la superposition de deux ondes planes progressives dont on donnera la relation de dispersion.

Décrire brièvement et sans calcul supplémentaire, la forme des solutions pour  $\omega > \omega_c$ .

On ignorera le cas limite  $\omega = \omega_c$ .

3. Déterminer la vitesse de phase  $v_\varphi$  et la vitesse de groupe  $v_g$  d'une onde progressive, si  $\omega < \omega_c$ . Avec quelle approximation peut-on écrire :  $v_\varphi = v_g = c$ ? Donner alors l'expression de  $c$ .

**ÉNONCÉS**

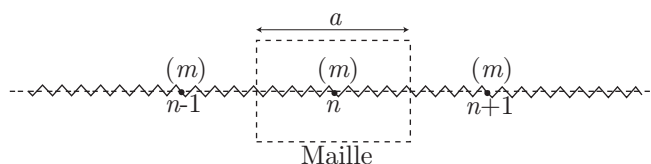
● **141** **Concours de l'ENS Lyon**

20 min.

PC-PSI

*Relation de dispersion*

Un solide cristallin unidimensionnel est modélisé par un système de masses ponctuelles identiques  $m$ , représentant les atomes, couplés par des ressorts identiques de raideur  $k$ .



On suppose infinie la chaîne d'oscillateurs ainsi constituée et l'on note  $u_n(t)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) le déplacement sur l'axe, par rapport à sa position d'équilibre, au temps  $t$ , de la masse repérée par l'indice  $n$ . On note  $a$  la longueur à l'équilibre des ressorts (dimension de la maille du cristal).



1. Montrer que :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$$

Justifier la dénomination d'équation de propagation.

2. On cherche des solutions de la forme :  $u_n(t) = U e^{i(nKa - \omega t)}$  où  $U$  est une constante. Que représentent  $U$ ,  $K$  et  $\omega$  (on supposera  $\omega \gg 0$ ) ?

Montrer que  $K$  et  $\omega$  sont liés par la relation suivante :

$$\omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \left( \frac{Ka}{2} \right)$$

Quelle est la signification de cette équation ? Représenter sur un graphique  $\omega$  en fonction de  $K$ .

3. Exprimer le rapport des déplacements de deux masses consécutives.

En déduire que l'on peut se limiter au domaine de  $K$  suivant :  $-\frac{\pi}{a} \leq K \leq \frac{\pi}{a}$ . Ce domaine de  $K$  définit ce que l'on appelle la *zone de Brillouin* du cristal.

Interpréter physiquement le cas :  $K = \pm \frac{\pi}{a}$ .

4. Donner la définition d'un milieu dispersif. Rappeler la définition et la signification de la vitesse de groupe et de la vitesse de phase.

Calculer la vitesse de groupe,  $v_g$ , d'un paquet d'ondes de pulsation spatiale centrée autour d'une valeur  $K_0$  ( $-\frac{\pi}{a} \leq K_0 \leq \frac{\pi}{a}$ ) et se propageant dans le cristal.

Que vaut  $v_g$  pour  $K_0 = \pm \frac{\pi}{a}$  ? Interpréter ce résultat.

Pour  $K_0 = 0$ , décrire le déplacement relatif de deux atomes consécutifs et interpréter.

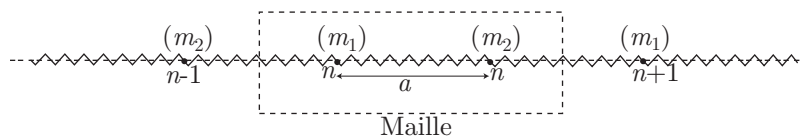
## ● 142 ————— Concours de l'ENS

20 min.

PC-PSI

*Relation de dispersion*

Un solide cristallin unidimensionnel comporte deux atomes par maille. On le modélise par un système de masses ponctuelles, de masses  $m_1$  et  $m_2$  couplées par des ressorts identiques de raideur  $r$ . On suppose  $m_1 > m_2$ .



On suppose que la chaîne d'oscillateurs ainsi constituée est infinie et l'on note  $u_n(t)$  et  $v_n(t)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) les déplacements par rapport à leur position d'équilibre, au temps  $t$ , des masses  $m_1$  et  $m_2$  repérées par l'indice  $(n)$ .

1. Montrer que l'évolution temporelle de la chaîne d'oscillateurs est régie par les équations différentielles ci-dessous :

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k (v_n - v_{n-1} - 2u_n) \\ m_2 \frac{d^2 v_n}{dt^2} = k (u_{n+1} + u_n - 2v_n) \end{cases}$$

2. On recherche les solutions sous la forme :

$$u_n(t) = U e^{j(nKa - \omega t)} \text{ et } v_n(t) = V e^{j(nKa - \omega t)}$$

où  $a$  est la longueur de la maille du cristal.

En déduire la forme suivante de la relation de dispersion :

$$m_1 m_2 \omega^4 - 2k (m_1 + m_2) \omega^2 + 2k^2 [1 - \cos(Ka)] = 0$$

3. Montrer que, dans l'hypothèse où  $Ka$  est petit, on obtient deux équations de dispersion :

$$\begin{cases} \omega^2 \simeq 2k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \text{ (mode optique)} \\ \omega^2 \simeq \frac{k}{2(m_1 + m_2)} K^2 a^2 \text{ (mode acoustique)} \end{cases}$$

Déterminer les expressions de  $\omega^2$  pour  $K = \pm \frac{\pi}{a}$ .

4. Montrer que l'on peut se limiter, pour l'étude des relations de dispersion, au domaine de  $K$  suivant :  $-\frac{\pi}{a} \leq K \leq \frac{\pi}{a}$  (zone de Brillouin).
5. Représenter sommairement l'allure de la courbe de dispersion  $\omega = f(K)$ . On distinguera les deux modes de propagation. Les courbes de dispersion obtenues pour chacun des modes sont appelées *branche optique* et *branche acoustique*.
6. Montrer qu'il existe deux domaines de pulsations pour lesquels aucune onde ne peut se propager.

**ÉNONCÉS**

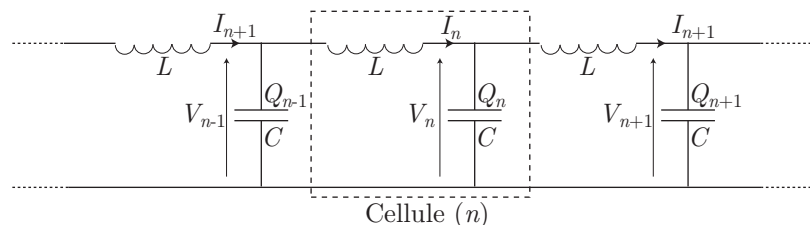
● **143** **Concours Polytechnique**

30 min.

PC-PSI

Relation de dispersion

On considère une « ligne électrique » composée d'une suite de « cellules » identiques. Le schéma de la ligne est donné dans la figure ci-dessous :



Dans la cellule ( $n$ ), on note  $V_n$  la tension aux bornes de la capacité  $C$ ,  $Q_n$  la charge de celle-ci et  $I_n$  le courant traversant l'inductance  $L_n$ . L'étude est menée dans le cadre de l'électrocinétique.

### 1. Équation d'évolution

- Exprimer la dérivée, par rapport au temps, de  $Q_n$ , uniquement en fonction des courants et celle de  $I_n$  en fonction des tensions.
- En déduire que  $\frac{d^2 V_n}{dt^2} = \omega_0^2 (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n)$ , où  $\omega_0$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $L$  et  $C$ .

### 2. Aspect énergétique

Calculer  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} CV_n^2 + \frac{1}{2} LI_n^2 \right)$  et l'exprimer en fonction de  $V_{n-1}$ ,  $V_n$ ,  $I_n$  et  $I_{n+1}$ . Interpréter la relation obtenue en précisant le rôle de chaque terme.

### 3. Propagation

On cherche une solution sinusoïdale  $V_n(t)$  de l'équation obtenue en 1.(b) (en notation complexe :  $\underline{V}_n(t) = A_n e^{j\omega t}$ ) telle que l'effet de chaque cellule soit un déphasage  $\alpha$  fixé :  $\underline{V}_{n+1} = \underline{V}_n e^{-j\alpha}$  (retard si  $\alpha > 0$ ).

- Exprimer  $A_n$  en fonction de  $A_0$ ,  $n$  et  $\alpha$ .
- Trouver la relation de dispersion entre  $\alpha$  et  $\omega$ .
- Montrer que ces solutions n'existent que si  $\omega$  est inférieur à une certaine pulsation  $\omega_c$  que l'on exprimera. Quel est alors le domaine utile de variation de  $\alpha$  ?
- Si cette condition est vérifiée, pourquoi peut-on parler de propagation de la phase ? Préciser la vitesse de propagation  $v_\varphi$  correspondante, la vitesse étant définie ici comme le nombre de cellules parcourues par unité de temps.
- On suppose maintenant  $\omega \ll \omega_0$ . En explicitant  $\alpha$  en fonction de  $\omega$ , exprimer  $v_\varphi$ . En déduire que l'effet d'une cellule sur un signal électrique, composé de fréquences suffisamment basses, se traduit par un retard temporel  $\tau$  que l'on exprimera en fonction de  $\omega_0$ , justifiant ainsi le nom de « ligne à retard » donné à ce système.

### 4. Effets dispersifs

On se place dans le cas où  $\omega < \omega_c$  et  $\alpha > 0$ .

- Rappeler la définition et l'interprétation de la vitesse de groupe  $v_g$ . En donner l'expression en fonction de  $\omega_0$  et  $\alpha$  ; donner l'allure de son graphe en fonction de  $\alpha$ . Que constate-t-on pour  $\alpha = \pi$  ?
- En notation complexe, l'intensité  $I_n$  est de la forme :  $\underline{I}_n(t) = B_n e^{j\omega t}$ . Exprimer  $B_n$  en fonction de  $A_n$ ,  $L$ ,  $\omega_0$  et  $\alpha$ . Calculer la moyenne temporelle de l'énergie de la cellule ( $n$ ) :

$$\mathcal{E} = \left\langle \frac{1}{2} CV_n^2 + \frac{1}{2} LI_n^2 \right\rangle$$

ainsi que celle de la puissance  $\mathcal{P}$  reçue de la cellule ( $n - 1$ ). En déduire le rapport  $\frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\mathcal{E}}$ .

- (c) Expliquer qualitativement comment va évoluer un signal non monochromatique se propageant le long de cette ligne. Comment appelle-t-on ce phénomène ?

### 5. Impédance caractéristique

- (a) Pour un signal sinusoïdal, avec  $\alpha > 0$ , expliciter le rapport  $Z_c = \frac{V_n}{I_{n+1}}$  de la tension et du courant de sortie de la cellule ( $n$ ), appelée *impédance caractéristique*.
- (b) Montrer que la partie réactive  $X_c$  de cette impédance est celle d'une bobine d'inductance  $L'$  que l'on précisera.
- (c) En exprimer sa partie résistive  $R_c$  en fonction de  $L$ ,  $C$  et  $\alpha$ .

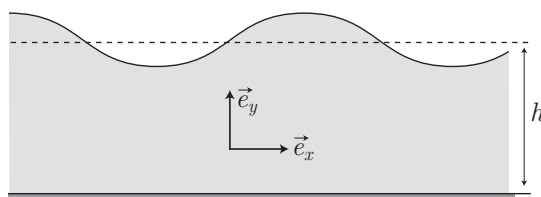
## ● 144 Concours de l'ENS

30 min.

PC-PSI

### Relation de dispersion

On considère une étendue d'eau de profondeur  $h$  uniforme quand aucune vague ne la parcourt, la surface de l'eau occupe alors le plan  $xOz$ . On suppose que la situation physique est invariante selon la direction  $\vec{e}_z$  perpendiculaire au plan de la figure suivante. Une onde se propage, correspondant à la variation  $\xi(x, t)$  de la hauteur de la surface par rapport à la situation au repos. La pression de l'air est prise uniforme et égale à  $P_0$ . L'accélération de la pesanteur à la surface de la Terre est notée  $g$ .



1. L'écoulement est supposé incompressible. Définir un tel écoulement du point de vue de la masse volumique. Quelle est la conséquence pour le champ de vitesse ? Pouvez-vous citer, dans d'autres domaines de la physique, deux champs vectoriels présentant cette propriété ?
2. On choisit d'étudier les solutions potentielles, c'est-à-dire telles que le champ de vitesse s'écrive :  $\vec{v}(M, t) = \text{grad} \phi(M, t)$ . Montrer que le champ de vitesse est irrotationnel. Le choix de  $\phi$  est-il unique ? Comment peut-on modifier le potentiel de manière la plus générale tout en conservant le même champ de vitesse ?
3. Pour  $-h \leq z \leq \xi$ , on cherche une solution de la forme :

$$\phi(x, z, t) = \sin(kx - \omega t) \times f(z)$$

où  $f$  est une fonction à déterminer. Cette onde se propage-t-elle, est-elle plane ? Comment se nomment les constantes  $k$  et  $\omega$  ? Exprimer la longueur d'onde  $\lambda$ . Montrer que  $f(z) = \phi_0 (e^{kz} + A e^{-kz})$ , où  $A$  et  $\phi_0$  sont des constantes.

4. À l'aide d'une condition aux limites, exprimer  $A$ .
5. On rappelle l'équation d'Euler qui régit le champ de vitesse  $\vec{v}(M, t)$  d'un écoulement parfait de masse volumique  $\rho$  :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \text{grad} P$$

où  $P$  est la pression,  $\vec{g}$  est le champ de gravitation et  $\frac{D}{Dt}$  est la dérivée particulaire :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) + (\text{rot} \vec{v}) \wedge \vec{v}$$

Séparer en deux groupements les termes apparaissant dans l'expression de la dérivée particulaire de la vitesse et les commenter. À ce propos, on donnera deux exemples d'écoulements pour lesquels exactement l'un des deux groupes est nul.

6. Une approximation consiste à supposer que l'amplitude  $\xi_0$  des vagues est très faible par rapport à la longueur d'onde  $\lambda$  du phénomène et que  $\left| (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right| \ll \left| \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \right|$ . Comment s'écrit l'équation d'Euler dans ces conditions ?
7. On suppose que l'eau est incompressible. Montrer, compte tenu des hypothèses utilisées que l'équation d'Euler implique :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gz = C(t) \quad (42)$$

où  $C(t)$  est une fonction ne dépendant que du temps et  $\rho$  est la masse volumique de l'eau. Montrer que l'on peut poser :  $C(t) = 0$ .

8. Relier la composante de la vitesse selon  $z$  à la surface et la déformation  $\xi(x, t)$  de l'interface. Montrer que, toujours dans l'hypothèse des vagues de faible amplitude, on obtient à l'ordre le plus bas non nul :

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}(x, t) = v_z(x, z = 0, t) \quad (43)$$

où  $v_z(x, y, t)$  est la composante selon  $z$  de la vitesse de l'eau.

9. En utilisant notamment les relations (42) et (43) et le fait que la pression soit continue à l'interface eau-atmosphère, conclure de l'étude précédente que la relation de dispersion des ondes est :

$$\omega^2 = gk \times \tanh(kh)$$

10. Que devient cette expression en eau peu profonde ? Calculer, au premier ordre, la vitesse de phase  $v_\varphi = v_{\text{surface}}$  et la vitesse de groupe  $v_g$  en eau peu profonde.
11. Rappeler brièvement ce qu'est la dispersion. A-t-on ici un phénomène dispersif, en général et en eau peu profonde ?

## ● 145 ————— Concours de l'ENS

40 min.

PC-PSI

*Propagation en milieu dispersif*

On étudie la propagation d'un paquet d'ondes électromagnétiques quasi monochromatique dans un milieu dispersif absorbant. Le milieu remplit uniformément l'espace entre les plans  $z = 0$  et  $z = L$ . Les demi-espaces  $z < 0$  et  $z > L$  sont vides. Pour simplifier, on considère seulement des ondes incidentes se propageant selon l'axe  $z$  et venant de  $z = -\infty$ . Une onde incidente, monochromatique de pulsation  $\omega$ , possède dans le milieu un vecteur d'onde complexe dirigé suivant  $z$ , que l'on note :

$$\vec{k} = k(\omega) \vec{e}_z = \sqrt{1 + \chi(\omega)} \times \frac{\omega}{c} \vec{e}_z$$

1. Une onde monochromatique incidente donne naissance au champ électrique suivant, dans le demi-espace  $z < 0$  :

$$\vec{E}_\omega(z, t) = \vec{E}_0 e^{j\omega \left(\frac{z}{c} - t\right)}$$

où le vecteur  $\vec{E}_0$  est une constante indépendante de  $z$ ,  $t$  et  $\omega$ . Donner explicitement l'expression du champ électrique correspondant dans le milieu  $0 < z < L$ .

2. On forme un paquet d'ondes en superposant les ondes monochromatiques précédentes avec une distribution gaussienne :

$$\vec{E}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left[-\frac{(\omega - \varpi)^2}{2\sigma^2}\right] \vec{E}_\omega(z, t)$$

Quelle est la signification physique des grandeurs positives  $\sigma$  et  $\varpi$  ?

3. Calculer explicitement la dépendance en  $z$  et en  $t$  du paquet d'ondes dans le demi-espace  $z < 0$ . On donne l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{e^{jqx}}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) = e^{-q^2 \sigma^2 / 2}$$

où  $q$  est un nombre complexe quelconque.

À quelle vitesse le paquet se propage-t-il ? Faire un dessin du champ électrique en fonction de  $z$  à  $t$  fixé, dans le cas où  $\sigma \ll \varpi$ . Caractériser la largeur spatiale du paquet par une longueur  $\Delta z_e$ . Que vaut  $t_e$ , instant d'entrée du *maximum* de l'enveloppe du paquet d'ondes dans le milieu ?

4. On se place dans le cas limite où  $\sigma$  est bien plus faible que l'échelle de variation de  $k(\omega)$  autour de  $\varpi$ , si bien que l'on peut utiliser le développement :

$$k(\omega) \simeq k(\varpi) + (\omega - \varpi) \times k'(\varpi)$$

où le prime représente la dérivée première. Calculer alors la dépendance explicite en  $z$  et en  $t$  du paquet d'ondes dans le demi-espace  $0 < z < L$ .

5. En notation complexe, la composante selon  $\vec{E}_0$  du champ électrique, dans le demi-espace  $z > L$ , peut s'écrire comme le produit d'une enveloppe réelle  $f(z, t)$  et d'une phase  $e^{j\theta(z, t)}$ . Écrire explicitement l'expression de la fonction enveloppe  $f(z, t)$ . On décomposera la fonction complexe  $k(\omega)$  en sa partie réelle et sa partie imaginaire :

$$k(\omega) = k_r(\omega) + j k_i(\omega)$$

L'expression explicite de la fonction de phase  $\theta(z, t)$  n'est pas demandée.

6. Donner explicitement la trajectoire du *maximum* en  $z$  de la fonction enveloppe dans le demi-espace  $z > 0$ . À quelle vitesse se déplace ce *maximum*. À quel instant  $t_s$  sort-il du milieu ?
7. À l'aide de  $t_e$  et  $t_s$ , définir une vitesse de propagation moyenne  $v$  du *maximum* du paquet dans le milieu. Dans le cas où le milieu est non absorbant, quel nom donne-t-on traditionnellement à  $v$  ?

● **146** **Lycée Rabelais, Rennes**

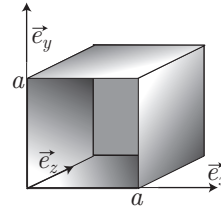
30 min.

Ondes électromagnétiques

MP-PC-PSI-PT

On considère une cavité cubique :

$$\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < a \\ 0 < z < a \end{cases}$$



Cette dernière est entourée de plans parfaitement conducteurs et sera considérée vide.

On admet l'existence, dans cette cavité, d'une onde électromagnétique dont le champ électrique  $\vec{E}$  est donné par :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{-j\omega t} \vec{e}_z$$

1. Démontrer que la pulsation de cette onde ne peut prendre qu'une seule valeur.
2. Exprimer le champ magnétique associé à cette onde.
3. Calculer les énergies électrique et magnétique contenues dans cette cavité. Conclure.

● **147** **Lycée Lakanal, Sceaux**

30 min.

Ondes électromagnétiques

MP-PC-PSI-PT

On étudie la propagation, dans le vide, d'une onde à symétrie cylindrique du type :

$$\begin{cases} E_r(r, z) = E(r) e^{j(\omega t - kz)} \\ E_z = E_\theta = 0 \end{cases}$$

On donne, de plus :  $E(R_1) = E_0$  et l'on admet que cette onde n'est définie que pour  $R_1 < r < R_2$ .

1. À partir de l'équation de Maxwell-Gauss, exprimer  $E(r)$ .
2. En déduire l'expression du champ magnétique en admettant que ce dernier est orthoradial.
3. Exprimer le vecteur de Poynting moyen et exprimer la puissance rayonnée à travers une section  $S$  perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ .

● **148** **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

30 min.

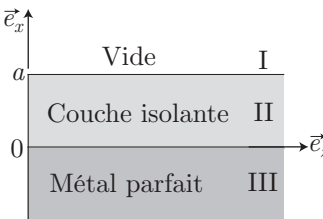
Ondes électromagnétiques

MP-PC-PSI-PT

L'espace contient trois régions distinctes : la région I ( $x > a > 0$ ) est vide, la région II ( $0 < x < a$ ) est constituée d'une mince couche de milieu isolant et la région III ( $x < 0$ ) est constituée d'un métal parfait.

Dans le métal, le champ électromagnétique est nul. Dans le vide, les densités volumiques de charges  $\rho$  et de courant  $\vec{j}$  sont nulles.

On admet que, dans la région isolante, les équations de Maxwell sont données par :



ÉNONCÉS

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{E} &= 0 & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{B} &= \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

$\varepsilon_r$  étant un coefficient positif supérieur à 1, appelé *permittivité relative* du milieu. On étudie la propagation, dans ces régions de l'espace, d'une onde électromagnétique dont le champ magnétique est donné par :

$$\vec{B} = B_0(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y$$

On cherche le champ électrique sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0(x) e^{i(\omega t - kz)}$$

Les constantes  $\omega$  et  $k$  ont la même valeur positive dans les milieux, tandis que la fonction  $B_0(x)$  et les trois composantes de  $\vec{E}_0(x)$  sont des fonctions de  $x$  seulement, avec des expressions différentes dans les trois milieux I, II et III.

1. Exprimer les diverses composantes de  $\vec{E}_0(x)$  en fonction de  $\omega$ ,  $k$ ,  $B_0(x)$ , de ses dérivées et des constantes qui caractérisent le problème, dans la région II.

En déduire les relations analogues s'appliquant dans la région I.

2. Déterminer, dans les régions I et II, les équations différentielles vérifiées par  $B_0(x)$ .
3. On cherche une solution des équations de Maxwell, telle que l'amplitude du champ magnétique est une fonction exponentielle réelle dans le milieu I et une fonction sinusoïdale de  $x$  dans le milieu II.

On notera ces fonctions  $B_1 e^{-\alpha x}$  et  $B_2 \cos(\beta x + \phi)$ .

Déterminer  $\alpha$ ,  $\beta$  et montrer la relation :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{2} \times (\varepsilon_r - 1)$$

Pour la suite, on admet que les relations de passage pour le champ électromagnétique sont les mêmes que celles vues dans le cours à l'exception de la composante tangentielle du champ électrique.

4. Expliquer pourquoi la fonction  $B_0(x)$  est continue en  $x = a$ .
5. Exprimer une relation de passage en  $x = 0$  permettant d'obtenir la valeur de  $\phi$ .
6. Exprimer, de même, des relations de passage en  $x = a$ .
7. Montrer qu'il n'existe pas de solution de la forme demandée pour certaines valeurs de  $\beta a$ .

On supposera bien sûr, dans la suite, que la solution cherchée existe.

8. Établir la relation :

$$\beta \tan(\beta a) = \alpha \times \varepsilon_r$$



## ● 149

## Lycée Amyot, Melun

30 min.

MP-PC-PSI-PT

## Ondes électromagnétiques

Une onde électromagnétique progressive plane  $(\vec{E}_i, \vec{B}_i, \vec{k})$ , harmonique, de pulsation  $\omega = 2\pi f$ , se propage dans l'air, dans la direction  $\vec{u}_x$ .

Le vecteur d'onde associé est  $\vec{k} = k \vec{u}_x$  (avec  $k > 0$ ) et le champ électrique est :

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{j(\omega t - kx)}$$

Cette onde incidente se propage vers un conducteur métallique (acier) de conductivité  $\gamma$ , de perméabilité  $\mu_0$  et de permittivité  $\varepsilon_0$ , occupant le demi-espace  $x > 0$ .

L'onde incidente donne naissance à une onde réfléchie (notée  $r$ ) et à une onde transmise (indiquée  $t$ ), dont les champs électriques s'écrivent, en notation complexe :

$$\vec{E}_r = E_{0r} e^{j(\omega t + k_r x)} \vec{u}_x \text{ et } \vec{E}_t = E_{0t} e^{j(\omega t - k_t x)} \vec{u}_x$$

Dans tout le problème,  $c$  représente la vitesse de propagation d'une onde électromagnétique dans le vide,  $\rho(M, t)$  est la densité de charges libres,  $\vec{j}(M, t)$  est le vecteur densité de courant électrique.

1. Rappeler les équations de Maxwell, écrites à partir des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le métal.
2. Établir, à partir des équations de Maxwell, l'équation locale de conservation de la charge.
3. En déduire une équation différentielle vérifiée, au point  $M$ , par la densité volumique de charge  $\rho(M, t)$  dans le métal. Résoudre cette équation en supposant qu'à l'instant initial  $\rho(M, t) = \rho_0$ .

Application numérique : calculer la constante de temps mise en évidence. Conclure.

Dans toute la suite du problème, le conducteur métallique sera supposé localement neutre, soit :  $\rho = 0$  pour tout point  $M$ .

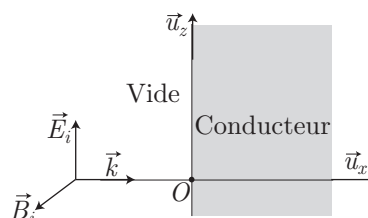
4. Pour quelle gamme de fréquences les courants de déplacement, dans le métal, sont-ils négligeables devant les courants de convection ? En déduire une simplification de l'équation de Maxwell-Ampère. Comment nomme-t-on ce régime de fonctionnement ?

Cette condition restera vérifiée dans la suite du problème.

5. Dans ce cadre, établir l'équation vérifiée par le champ électrique dans le métal. Comment ce type d'équation s'appelle-t-il ?

En déduire la relation de dispersion reliant  $k_t$  à  $\omega$ . Quelle est la seule solution  $k_t$  physiquement acceptable ? Dans ce cas, que représente la partie imaginaire de  $k_t$  ? préciser pourquoi.

6. Calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe de l'onde dans le métal. Le métal est-il dispersif ?



7. Le terme  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$  est un paramètre essentiel pour décrire la propagation de l'onde dans le métal. Comment s'appelle-t-il ? Quelle est sa signification physique ? Calculer  $\delta$ .

On donne :

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= \frac{1}{36\pi \times 10^9} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} & \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} & f &= 100 \text{ kHz} \\ \gamma &= 10^7 \text{ } \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1} & c &= 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

### ● 150 ————— Lycée Descartes, Tours

30 min.

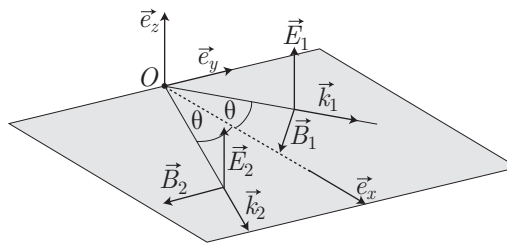
Ondes électromagnétiques

MP-PC-PSI-PT

On considère deux ondes électromagnétiques planes, de même pulsation, de même amplitude et polarisées sur la même direction  $\vec{e}_z$  :

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM})} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}_2 = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM})} \vec{e}_z$$

Les directions de propagation sont contenues dans le plan  $(Ox, Oy)$  et font entre elles un angle  $2\theta$ .



1. Exprimer, en tout point, les champs résultants  $\vec{E}(x, y, z, t)$  et  $\vec{B}(x, y, z, t)$ .
2. Exprimer le vecteur de Poynting associé à cette onde et donner sa valeur moyenne temporelle.
3. Exprimer la vitesse de phase de cette onde.
4. Commenter les cas  $\theta = 0$  et  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

### ● 151 ————— Lycée Condorcet, Paris

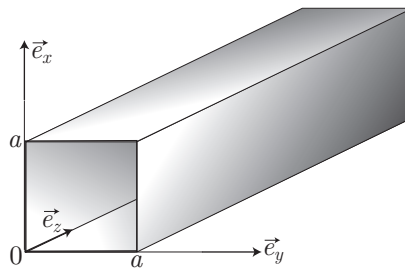
30 min.

Ondes électromagnétiques

MP-PC-PSI-PT

On considère un guide d'onde, de section carrée, constitué de quatre parois métalliques d'équations :  $x = 0, x = a, y = 0, y = a$ .

Les parois sont constituées d'un conducteur parfait.



On étudie la propagation, dans un tel guide, d'une onde du type :

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)}$$

1. Exprimer le champ magnétique  $\vec{B}$  dans ce guide.
2. En déduire l'expression du vecteur de Poynting  $\vec{R}$ . En déduire la moyenne temporelle et spatiale de la puissance qui traverse une section du guide perpendiculaire à  $\vec{e}_z$ .
3. Montrer que, dans un tel guide, toutes les pulsations ne peuvent pas se propager. On fera apparaître une pulsation caractéristique.
4. Exprimer les vitesses de phase et de groupe d'une telle onde.
5. Exprimer les densités surfaciques de charges portées par les plans métalliques du guide.

**ÉNONCÉS**

● 126 **Concours de l'École de l'Air**

1. **Établissement des équations d'onde**

(a) Le mouvement d'une particule fluide est décrit par l'équation d'Euler :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P$$

où :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

si la vitesse  $\vec{v}$  de la particule fluide est assez faible pour que le terme d'ordre 2 :  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  soit négligeable devant celui d'ordre 1 :  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ . Il s'ensuit que :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (44)$$

(b) En hydrostatique, la variation de la pression  $P$  dans un fluide incompressible en équilibre (sa masse volumique est constante et uniforme) est décrite par la loi :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g \Rightarrow dP = -\rho g dz$$

En remarquant qu'à la surface libre de l'eau ( $z = \xi(y, t)$ ), cette équation devient :

$$\int_{P_0}^P dP = -\rho g \int_{\xi(y, t)}^z dz \Rightarrow P = P_0 + \rho \times [\xi(y, t) - z] \quad (45)$$

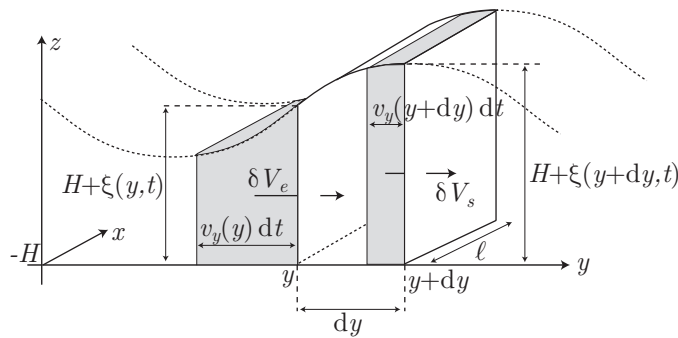
(c) La projection de l'équation (44), dans la direction d'un vecteur unitaire  $\vec{e}_y$  de l'axe  $(Oy)$ , fournit :

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{e}_y = \rho \underbrace{\vec{g} \cdot \vec{e}_y}_{=0} - \overrightarrow{\text{grad}} P \cdot \vec{e}_y \Rightarrow \rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

c'est-à-dire, en tenant compte du résultat (45) :

$$\rho \frac{\partial v_y}{\partial t} = -\rho g \frac{\partial \xi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v_y}{\partial t} = -g \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad (46)$$

(d) Considérons une colonne d'eau d'épaisseur  $dy$  :



Si  $dy$  est assez petit, cette colonne contient un volume d'eau :

$$\begin{aligned} \delta V &= \ell dy \times \left[ H + \frac{\xi(y, t) + \xi(y + dy, t)}{2} \right] \\ &= \ell dy \times \left[ H + \xi(y, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en ne conservant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 1 en  $dy$  :

$$\delta V \simeq \ell dy \times [H + \xi(y, t)]$$

Pendant le temps  $dt$ , le volume  $\delta V$  s'accroît d'une quantité :

$$d(\delta V) = \ell dy \times d\xi = \ell dy \frac{\partial \xi}{\partial t} dt$$

sous l'influence :

- d'un volume  $\delta V_e = v_y(y) dt \times \ell [H + \xi(y, t)]$ , qui entre par la face située en  $y$  ;
- d'un volume :

$$\delta V_s = v_y(y + dy) dt \times \ell [H + \xi(y + dy, t)]$$

qui sort par la face située en  $y + dy$ .

La conservation du volume du fluide incompressible se traduit alors par :  $d(\delta V) = \delta V_e - \delta V_s$ , où :

$$\begin{aligned} \delta V_e - \delta V_s &= v_y(y) dt \times \ell [H + \xi(y, t)] - v_y(y + dy) dt \times \ell [H + \xi(y + dy, t)] \\ &= [v_y(y) - v_y(y + dy)] \times H \ell dt \\ &\quad + \ell dt \times [v_y(y) \xi(y, t) - v_y(y + dy, t) \xi(y + dy, t)] \\ &= -\frac{\partial v_y}{\partial y} \times H \ell dt dy - \frac{\partial(v_y \xi)}{\partial y} \times \ell dt dy \end{aligned}$$

d'où il découle que :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \times \ell dy dt = - \left[ H \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial(v_y \xi)}{\partial y} \right] \times \ell dt dy \quad (47)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \xi}{\partial t} = -H \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial(v_y \xi)}{\partial y} \quad (48)$$

Dans cette équation, le terme  $\frac{\partial(v_y \xi)}{\partial y}$  est d'ordre 2 tandis que  $\frac{\partial \xi}{\partial t}$  et  $H \frac{\partial v_y}{\partial y}$  sont d'ordre 1. C'est pourquoi, à l'ordre 1, on peut poser :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -H \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (49)$$

- (e) La dérivation de l'équation (46) par rapport à  $t$  et de l'équation (49) par rapport à  $y$  conduit à :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial t} \text{ et } \frac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial t} = -H \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}$$

soit encore :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = gH \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = 0$$

où  $c = \sqrt{gH}$  désigne la célérité de la propagation de  $v_y$ .

De même, la dérivation de l'équation (46) par rapport à  $y$  et de l'équation (49) par rapport à  $t$  fournit :

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial t} = -g \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \text{ et } \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -H \frac{\partial^2 v_y}{\partial t \partial y}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = Hg \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0$$

Cette équation (de d'Alembert) révèle que l'onde, décrite par  $\xi$ , se déplace avec une vitesse  $c = \sqrt{gH}$ .

La solution générale de cette équation s'écrit :

$$\xi(y, t) = F\left(t - \frac{y}{c}\right) + G\left(t + \frac{y}{c}\right)$$

où  $F$  et  $G$  sont des fonctions régulières quelconques d'une seule variable chacune. La fonction  $F\left(t - \frac{y}{c}\right)$  décrit une onde progressive qui se déplace dans le sens des  $y$  croissants, tandis que  $G\left(t + \frac{y}{c}\right)$  décrit une onde qui se propage dans le sens inverse.

- (f) Près de la plage, l'approximation  $H \gg \xi$  n'est plus légitime, ce qui se traduit pour l'équation (48) par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= -H \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial(\xi v_y)}{\partial y} \neq -H \frac{\partial v_y}{\partial y} \\ &\simeq -H \frac{\partial v_y}{\partial y} - \xi \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{aligned}$$

Aussi, en première approximation, la célérité de l'onde vaut  $\sqrt{g(H + \xi)}$ , c'est-à-dire, si  $\xi_0$  désigne l'amplitude de  $\xi$  :

- le sommet de la vague se déplace à une vitesse  $\sqrt{g(H + \xi_0)}$ ;
- le creux de la vague se déplace à la vitesse  $\sqrt{g(H - \xi_0)}$ .

Cette différence de vitesse explique pourquoi les vagues se brisent en arrivant près de la plage.

## 2. Onde sinusoïdale

(a) L'onde incidente se déplace avec une célérité :

$$c = \sqrt{gH} = \sqrt{10 \times 5} \simeq 7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Sa pulsation vaut, quant à elle :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6} \simeq 1,05 \text{ s}^{-1}$$

Par conséquent, sa longueur d'onde vaut :

$$\lambda = c \times T = 7 \times 6 = 42 \text{ m}$$

de sorte que :

$$\xi_i(y, t) = a_i \cos(\omega t - ky)$$

où  $a_i = 0,5 \text{ m}$  et  $\frac{2\pi}{\lambda} = 0,14 \text{ m}^{-1}$ .

Le résultat (46) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{iy}}{\partial t} &= -g \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = -gka_i \sin(\omega t - ky) \\ \Rightarrow v_{iy} &= \frac{gka_i}{\omega} \cos(\omega t - ky) \end{aligned}$$

montre que  $v_{iy}$  a pour amplitude :

$$V_{0y} = \frac{gka_i}{\omega} = \frac{10 \times 0,14 \times 0,5}{1,05} \Rightarrow V_{0y} = 0,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

(b) La jetée représente un plan immobile, situé en  $y = 0$ , en conséquence de quoi :

$$v_y(y = 0, t) = 0 \quad (50)$$

L'onde réfléchie est caractérisée par la fonction :

$$v_{ry}(y, t) = A \cos(\omega t + ky)$$

Aussi, la condition (50) impose-t-elle :

$$\begin{aligned} v_y(0, t) = 0 &\Rightarrow v_{iy}(0, t) + v_{ry}(0, t) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{ga_i}{c} \cos(\omega t) + A \cos(\omega t) = 0 \forall t \\ &\Rightarrow A = -\frac{ga_i}{c} \Rightarrow v_{ry}(y, t) = -\frac{ga_i}{c} \cos(\omega t + ky) \end{aligned}$$

À cette vitesse est alors associée une perturbation  $\xi_r(y, t)$  qui vérifie l'équation (46) :

$$\begin{aligned} -g \frac{\partial \xi_r}{\partial y} &= \frac{\partial v_{ry}}{\partial t} = \frac{ga_i \omega}{c} \sin(\omega t + ky) \text{ avec } \omega = kc \\ \Rightarrow \frac{\partial \xi_r}{\partial y} &= -a_i k \sin(\omega t + ky) \\ \Rightarrow \xi_r(y, t) &= a_i \cos(\omega t + ky) \end{aligned}$$

(c) Des résultats précédents ressort l'expression générale de  $\xi(y, t)$  :

$$\begin{aligned} \xi(y, t) &= \xi_i(y, t) + \xi_r(y, t) \\ &= a_i \times [\cos(\omega t + ky) + \cos(\omega t - ky)] \\ \Rightarrow \xi(y, t) &= 2a_i \times \cos(ky) \times \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Cette onde est dite « stationnaire » car elle ne se propage pas : l'amplitude de  $\xi(y, t)$  est simplement modulée dans le temps, de la même manière pour tous les points de la surface.

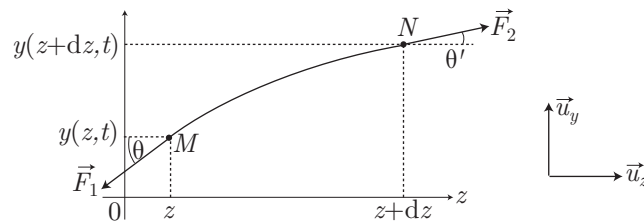
De même, la vitesse  $v_y(y, t)$  a pour expression générale :

$$\begin{aligned} v_y(y, t) &= v_{iy}(y, t) + v_{ry}(y, t) \\ &= \frac{ga_i}{c} [\cos(\omega t - ky) - \cos(\omega t + ky)] \\ &= -2 \frac{ga_i}{c} \times \sin(\omega t) \times \sin(-ky) \\ \Rightarrow v_y(y, t) &= \frac{2ga_i}{c} \times \sin(\omega t) \times \sin(ky) \end{aligned}$$

Il s'agit, ici encore, d'une onde stationnaire qui ne se propage pas.

## ● 127 ————— Concours de l'ESIM

1. Soit un élément de corde  $MN$ , de longueur au repos  $dz$ , dont les extrémités  $M$  et  $N$  sont aux ordonnées  $y(z, t)$  et  $y(z + dz, t)$ .



Cet élément de corde, de masse  $\delta m = \mu dz$  présente une accélération :

$$\vec{\gamma} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{u}_y$$

tandis qu'il est soumis à :



- la force de tension :  $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -F \cos \theta \\ -F \sin \theta \end{pmatrix}$ , où  $\theta \ll 1$  lorsque les déplacements de la corde sont de faible amplitude. Aussi, au premier ordre en  $\theta$  :

$$\vec{F}_1 \simeq -F \underline{u}_z - F \times \theta \underline{u}_y$$

- La force de tension :

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F \cos \theta' \\ F \sin \theta' \end{pmatrix} \simeq F \underline{u}_z + F \times \theta' \underline{u}_y \text{ car } \theta' \ll 1$$

En outre, l'élément de courbe  $y(z, t)$ , compris entre  $M$  et  $N$  a pour dérivée :

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \tan \theta \simeq \theta$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \theta' &= \theta + d\theta = \theta + \frac{\partial \theta}{\partial z} dz = \theta + \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz \\ \Rightarrow \vec{F}_2 &= F \underline{u}_z + F \theta \underline{u}_y + F \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz \underline{u}_y = -\vec{F}_1 + F \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} dz \underline{u}_y \end{aligned}$$

- la force d'amortissement :  $\delta \vec{f} = -\alpha dz \frac{\partial y}{\partial t} \underline{u}_y$ .

Par suite, l'élément de corde est soumis à une force résultante :

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \delta \vec{f} = \left( F \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial y}{\partial t} \right) dz \underline{u}_y$$

qui vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

$$\delta m \vec{\gamma} = \vec{\mathcal{R}} \Rightarrow \mu dz \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \underline{u}_y = \left( F \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial y}{\partial t} \right) dz \underline{u}_y$$

ce qui conduit à l'équation de propagation de l'onde :

$$F \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial y}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

2. En notation complexe, cette équation devient :

$$f \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial y}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

où  $\underline{y} = y_0 e^{j(\omega t - kz)}$  fournit :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = j\omega \underline{y} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{y} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = -k^2 \underline{y}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} -k^2 F - j\alpha\omega + \mu\omega^2 = 0 &\Rightarrow k^2 = \frac{1}{F} (\mu\omega^2 - j\alpha\omega) \\ &= \frac{\mu\omega^2}{F} \left( 1 - j \frac{\alpha}{\mu\omega} \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$k^2 = A \left( 1 - \frac{j}{Q} \right) \text{ avec } A = \frac{\mu\omega^2}{F} \text{ et } Q = \frac{\mu\omega}{\alpha}$$

3. Le résultat précédent s'écrit aussi :

$$k^2 = |k^2| e^{j\phi}$$

avec :

$$|k^2| = \sqrt{A^2 + \frac{A^2}{Q^2}} = A \frac{\sqrt{1+Q^2}}{Q} \quad (51)$$

et :

$$\cos \phi = \frac{A}{|k^2|} = \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}} \quad \sin \phi = \frac{-A}{Q|k^2|} = -\frac{1}{\sqrt{1+Q^2}}$$

C'est pourquoi :

$$k = \sqrt{|k^2|} e^{j\phi/2} = \sqrt{|k^2|} e^{j\phi/2} = \sqrt{\frac{A\sqrt{1+Q^2}}{Q}} \left[ \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + j \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \right] \quad (52)$$

avec :

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1+\cos\phi}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{1+Q^2}+Q}{2\sqrt{1+Q^2}}} \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{A\sqrt{1+Q^2}}{Q}} \cos\phi = \sqrt{\frac{A}{2}} \times \sqrt{\frac{\sqrt{1+Q^2}+Q}{Q}} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) &= -\sqrt{\frac{1-\cos\phi}{2}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{1+Q^2}-Q}{2\sqrt{1+Q^2}}} \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{A\sqrt{1+Q^2}}{Q}} \sin\phi = -\sqrt{\frac{A}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+Q^2}-Q}{Q}} \end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$k = k_r - j k_i \text{ avec } \begin{cases} k_r = \sqrt{\frac{A}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+Q^2}+Q}{Q}} \\ k_i = \sqrt{\frac{A}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1+Q^2}-Q}{Q}} \end{cases}$$

4. Lorsque  $Q \ll 1$  :

$$\sqrt{1+Q^2} \pm Q \simeq 1 \pm Q \simeq 1 \Rightarrow k_r \simeq k_i = \sqrt{\frac{A}{2Q}}$$

Aussi, l'onde est décrite par la fonction complexe :

$$\begin{aligned} \underline{y} &= y_0 e^{j(\omega t - kz)} = y_0 e^{j(\omega t - k_r z + j k_i z)} = y_0 e^{-k_i z} e^{j(\omega t - k_r z)} \\ \Rightarrow y(z, t) &= y_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - k_r z) \end{aligned}$$

ce qui montre que l'onde progresse dans le sens de  $z > 0$ , avec une amplitude qui s'atténue sur une distance caractéristique :

$$\delta = \frac{1}{k_i} = \sqrt{\frac{2Q}{A}}$$

5. Les expressions obtenues pour  $Q = \frac{\mu\omega}{\alpha}$  et pour  $A = \frac{\mu\omega^2}{F}$  montrent que :

$$\frac{2Q}{A} = \frac{2\mu\omega}{\alpha} \times \frac{F}{\mu\omega^2} \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2F}{\omega\alpha}}$$

Par conséquent :

- plus  $F$  est grand, plus  $\delta$  l'est aussi, ce qui signifie que l'onde se propage d'autant mieux que la tension de la corde est plus importante ;
  - la masse linéique reste sans influence sur l'atténuation de l'onde.
6. Un élément de corde, de longueur  $dz$  et donc de masse  $\delta m = \mu dz$ , a pour vitesse :

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y_0 e^{-z/\delta} \sin(\omega t - k_r z)$$

et donc pour énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2} \delta m v^2 = \frac{\mu\omega^2 y_0^2}{2} dz e^{-2z/\delta} \sin^2(\omega t - k_r z) \\ \Rightarrow e_c &= \frac{\delta \mathcal{E}_c}{dz} = \frac{\mu\omega^2 y_0^2}{2} e^{-2z/\delta} \sin^2(\omega t - k_r z) \\ \Rightarrow \langle e_c \rangle &= \frac{\mu\omega^2 y_0^2}{2} e^{-2z/\delta} \times \underbrace{\langle \sin^2(\omega t - k_r z) \rangle}_{=1/2} \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\langle e_c \rangle = \frac{\mu\omega^2 y_0^2}{4} e^{-2z/\delta}$$

De même :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial z} &= y_0 e^{-z/\delta} [-k_i \cos(\omega t - k_r z) + k_r \sin(\omega t - k_r z)] \\ &= -y_0 \sqrt{k_i^2 + k_r^2} e^{-z/\delta} [\cos \psi \cos(\omega t - k_r z) - \sin \psi \sin(\omega t - k_r z)] \\ &= -y_0 \sqrt{k_i^2 + k_r^2} e^{-z/\delta} \cos(\omega t - k_r z + \psi) \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\cos \psi = \frac{k_i}{\sqrt{k_i^2 + k_r^2}} \text{ et } \sin \psi = \frac{k_r}{\sqrt{k_i^2 + k_r^2}}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} e_p &= \frac{1}{2} F \left( \frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 = \frac{F y_0^2 (k_i^2 + k_r^2)}{2} e^{-2z/\delta} \cos^2(\omega t - k_z z + \psi) \\ \Rightarrow \langle e_p \rangle &= \frac{F y_0^2 (k_i^2 + k_r^2)}{2} e^{-2z/\delta} \underbrace{\langle \cos^2(\omega t - k_r z + \psi) \rangle}_{=1/2} \\ \Rightarrow \langle e_p \rangle &= \frac{F y_0^2 (k_i^2 + k_r^2)}{4} e^{-2z/\delta} \end{aligned}$$

Or, de la relation (51), il découle que :

$$k_i^2 + k_r^2 = |k^2| \text{ et } |k^2| = A \frac{\sqrt{1+Q^2}}{Q}$$

c'est-à-dire :

$$\langle e_p \rangle = \frac{F y_0^2 A \sqrt{1+Q^2}}{4Q} e^{-2z/\delta}$$

Finalement :

$$\frac{\langle e_c \rangle}{\langle e_p \rangle} = \frac{\mu \omega^2 y_0^2}{4} \times \frac{4Q}{F y_0^2 A \sqrt{1+Q^2}} = \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}} \times \frac{\mu \omega^2}{AF}$$

où l'on remarque que :

$$A = \frac{\mu \omega^2}{F} \Rightarrow \frac{\langle e_c \rangle}{\langle e_p \rangle} = \frac{Q}{\sqrt{1+Q^2}}$$

Remarque – L'absence d'amortissement se traduit par  $\alpha \simeq 0$ , de sorte que  $Q = \frac{\mu_0 \text{mega}}{\alpha}$  tend vers l'infini, soit encore :

$$\lim_{Q \rightarrow \infty} \left( \frac{\langle e_c \rangle}{\langle e_p \rangle} \right) = 1$$

## ● 128 ————— Banque de la Filière PT

### 1. Recherche des ondes stationnaires

(a) La fonction d'onde :

$$y(x, t) = A \sin(kx + \varphi_1) \sin(\omega t + \varphi_2)$$

est solution de l'équation de propagation :  $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ , où :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 y \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 y \end{cases} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} \Rightarrow \omega = k \times v$$

si l'on décide de choisir  $k$  et  $\omega$  positifs.

(b) La condition  $y(0, t) = 0$  s'écrit :

$$A \sin \varphi_1 \times \sin(\omega t + \varphi_2) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0 \Rightarrow y(x, t) = A \sin(kx) \times \sin(\omega t + \varphi_2)$$

tandis que celle :  $y(L, t) = 0$  a pour conséquence :

$$\begin{aligned} A \sin(kL) \times \sin(\omega t + \varphi_2) = 0 &\Rightarrow kL = n\pi \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow k_n = n \times \frac{\pi}{L} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\omega = kv \Rightarrow \omega_n = n \times \frac{\pi v}{L}$$

et :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

(c) Les calculs précédents montrent que chaque mode propre est décrit par une fonction :

$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

## 2. Aspect énergétique

(a) Un élément de corde, compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , présente une masse  $\delta m = \mu dx$ . Ce faisant, la vitesse verticale :

$$\frac{\partial y_n}{\partial t} = \omega_n A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

lui confère une énergie cinétique :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2} \delta m \left( \frac{\partial y_n}{\partial t} \right)^2 = \frac{\mu \omega_n^2}{2} A_n^2 \sin^2(k_n x) \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) dx \\ &\Rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{\mu}{2} \frac{n^2 \pi^2 v^2}{L^2} A_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n) \int_0^L \sin^2(k_n x) dx \end{aligned}$$

(b) Étant donné que :

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin^2(k_n x) dx &= \int_0^L \frac{1 - \cos(2k_n x)}{2} dx \text{ où } k_n = n \frac{\pi}{L} \\ &= \frac{L}{2} - \frac{1}{2k_n} \left[ \sin\left(\frac{2n\pi}{L} \times L\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{L} \times 0\right) \right] = \frac{L}{2} \end{aligned}$$

il s'ensuit que :  $\mathcal{E}_c = C_1 A_n^2 \cos^2(\omega_n t + \varphi_n)$ , avec  $C_1 = n^2 \frac{\mu \pi^2 v^2}{4L}$  et :

$$v^2 = \frac{T}{\mu} \Rightarrow C_1 = n^2 \frac{\pi^2 T}{4L}$$

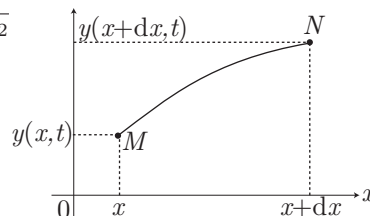
- (c) L'élément de corde situé entre les points  $M [x, y(x, t)]$  et  $N [x + dx, y(x + dx, t)]$  a pour longueur :

$$MN = \sqrt{dx^2 + [y(x + dx, t) - y(x, t)]^2}$$

avec :

$$y(x + dx, t) = y(x, t) + \frac{\partial y}{\partial x} dx$$

Ainsi



$$MN = dx \times \left[ 1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]^{1/2} \simeq dx \times \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right]$$

L'élément de corde  $MN$  a donc subi un allongement :

$$d\ell = MN - dx = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

- (d) La somme de tous les allongements s'identifie à l'allongement total de la corde :

$$\Delta L = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx$$

- (e) Compte tenu de l'expression obtenue pour  $y_n(x, t)$  :

$$\begin{aligned} y_n(x, t) &= A_n \sin(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \\ \Rightarrow \frac{\partial y_n}{\partial x} &= k_n A_n \cos(k_n x) \sin(\omega_n t + \varphi_n) \\ \Rightarrow \Delta L &= \frac{k_n^2 A_n^2}{2} \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) \times \int_0^L \cos^2(k_n x) dx \end{aligned}$$

où  $k_n = n \frac{\pi}{L}$  :

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos^2(k_n x) dx &= \int_0^L \frac{1 + \cos(2k_n x)}{2} dx \\ &= \frac{L}{2} + \frac{1}{4k_n} \left[ \sin\left(\frac{2n\pi}{L} \times L\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{L} \times 0\right) \right] = \frac{L}{2} \\ \Rightarrow \Delta L &= \frac{k_n^2 A_n^2 L}{4} \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) \end{aligned}$$

La masse  $m$  est montée de  $\Delta L$  dans le champ de pesanteur d'intensité  $g$ , auquel cas elle a acquis l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = mg \Delta L$$

Or, cette masse est responsable de la tension  $T$  de la corde, ce qui signifie que :

$$mg = T \Rightarrow \mathcal{E}_p = T \times \Delta L$$

En imposant l'énergie potentielle de la corde arbitrairement nulle au repos, son énergie potentielle vaut alors :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_p &= T \times \Delta L = \frac{k_n^2 A_n^2 L T}{4} \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) \\ &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \times \frac{A_n^2 L T}{4} \sin^2(\omega_n t + \varphi_n)\end{aligned}$$

d'où il découle que :

$$\mathcal{E}_p = C_2 A_n^2 \sin^2(\omega_n t + \varphi_n) \text{ avec } C_2 = n^2 \frac{\pi^2 T}{4L} = C_1$$

(f) À chaque mode propre correspond une énergie mécanique :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n &= \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c = C_1 A_n^2 [\cos^2(\omega_n t + \varphi_n) + \sin^2(\omega_n t + \varphi_n)] \\ &= C_1 A_n^2 \text{ avec } C_1 = \frac{n^2 \pi^2}{4L} T\end{aligned}$$

soit encore :

$$\mathcal{E}_n = K_n T A_n^2 \text{ où } K_n = \frac{n^2 \pi^2}{4L}$$

## ● 129 Banque de la Filière PT

1. (a) La tension étant uniforme, d'intensité  $T$ , les forces élastiques qui s'exercent en  $M$  et  $N$  valent :

$$\vec{T}(x) = \begin{pmatrix} -T \cos \theta(x, t) \\ -T \sin \theta(x, t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{T}(x + \Delta x) = \begin{pmatrix} T \cos(x + \Delta x, t) \\ T \sin(x + \Delta x, t) \end{pmatrix}$$

Or, si l'angle  $\theta$  est suffisamment petit, on peut remplacer, au premier ordre en  $\theta$ ,  $\sin \theta$  par  $\theta$  et  $\cos \theta$  par 1 :

$$\vec{T}(x) \simeq \begin{pmatrix} -T \\ -T \times \theta(x, t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{T}(x + \Delta x) = \begin{pmatrix} T \\ T \times \theta(x + \Delta x, t) \end{pmatrix}$$

Ce faisant, l'élément de corde  $MN$  est soumis à la force résultante :

$$\vec{\mathcal{R}} = \vec{T}(x) + \vec{T}(x + \Delta x) = \begin{pmatrix} 0 \\ T [\theta(x + \Delta x, t) - \theta(x, t)] \end{pmatrix}$$

(b) L'élément de corde  $MN$  a pour longueur :

$$MN = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \times \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

où  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  désigne la pente de la tangente à la courbe  $MN$  en  $M$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \tan \theta(x, t) \simeq \theta(x, t) \\ \Rightarrow MN &= \Delta x \times \sqrt{1 + [\theta(x, t)]^2} \simeq \Delta x\end{aligned}$$

Par conséquent, si  $\mu$  représente la masse linéique de la corde, la masse de  $MN$  vaut :

$$m = \mu \times MN \simeq \mu \times \Delta x$$

En supposant que le mouvement des points de la corde ne s'effectue que verticalement, l'élément  $MN$  a pour accélération :

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \end{pmatrix}$$

(c) La loi fondamentale de la dynamique impose :

$$m \vec{\gamma} = \vec{\mathcal{R}} \Rightarrow \mu \Delta x \times \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \times [\theta(x + \Delta x, t) - \theta(x, t)]$$

c'est-à-dire, si  $\Delta x$  est suffisamment petit :

$$\theta(x + \Delta x, t) = \theta(x, t) + \Delta x \frac{\partial \theta}{\partial x} \Rightarrow \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (53)$$

(d) La courbe  $y(x)$  présente, au point  $M(x, y)$ , une tangente dont la pente vaut  $\tan \theta = \frac{\partial y}{\partial x}$ . Notamment, si  $\theta$  est très petit :

$$\tan \theta \simeq \theta \Rightarrow \theta = \frac{\partial y}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

(e) En remplaçant cette expression de  $\frac{\partial \theta}{\partial x}$  dans l'équation (53), on obtient :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

soit, finalement :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Dans cette équation,  $v$  a la dimension d'une vitesse ; il s'agit en fait de la célérité de l'onde transversale qui se propage le long de la corde.

(f) *Application numérique :*

Soit un élément de corde, de longueur  $\delta L$ , de section  $S$  et de masse  $\delta m$ . Les définitions de la masse linéique  $\mu$  et de la masse volumique  $\rho$  :

$$\mu = \frac{\delta m}{\delta L} \text{ et } \rho = \frac{\delta m}{S \delta L} = \frac{\mu}{S} \Rightarrow \mu = \rho S$$



permettent la détermination de  $\mu$  pour une corde de rayon  $r$  :

$$\mu = \rho \times \pi r^2 = 7,2 \cdot 10^3 \times \pi \times (10^{-3})^2 \Rightarrow \mu = 0,023 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$



d'où se déduit la valeur de  $v$  :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{3000}{0,023}} \Rightarrow v = 361 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

## 2. Recherche des solutions en ondes stationnaires

(a) Les expressions choisies pour  $f(x)$  et  $g(t)$  :

$$\begin{cases} f(x) = a_1 \sin(kx + \varphi_1) \\ g(t) = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2 f}{dx^2} = -k^2 f \\ \frac{d^2 g}{dt^2} = -\omega^2 g \end{cases}$$

associées à celle de l'élongation :

$$y(x, t) = f(x) \times g(t) \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 f g \text{ et } \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 f g$$

donnent à l'équation de propagation la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 &\Rightarrow f(x) g(t) \times \left( k^2 - \frac{\omega^2}{v^2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \omega = kv \text{ (en supposant } v > 0). \end{aligned}$$

(b) La corde étant fixée de façon rigide en  $x = 0$  et en  $x = L$  :

$$y(0, t) = 0 \text{ et } y(L, t) = 0 \text{ pour toute date } t$$

c'est-à-dire, puisque  $y(x, t) = f(x) \times g(t)$  :

$$f(0) = 0 \text{ et } f(L) = 0$$

(c) Le choix de  $f(x) = a_1 \sin(kx + \varphi_1)$  est donc soumis à la condition :

$$f(0) = 0 \Rightarrow a_1 \sin \varphi_1 = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0 \text{ (à } \pi \text{ près)}$$

tandis que la condition  $f(L) = 0$  a pour conséquence :

$$\begin{aligned} a_1 \sin(kL) = 0 &\Rightarrow kL = n\pi \text{ où } n \in \mathbb{N}^* \\ &\Rightarrow \lambda_n = \frac{2\pi}{k} = \frac{2L}{n} \end{aligned}$$

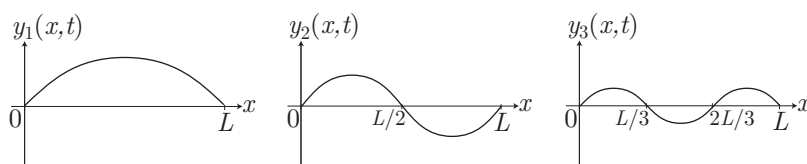
(d) La relation entre  $\omega$  et  $k$  conduit à :

$$\omega = kv \text{ avec } k = n \frac{\pi}{L} \Rightarrow \omega_n = n \frac{\pi v}{L}, n \in \mathbb{N}^*$$

(e) Les expressions de  $k = n \frac{\pi}{L}$  et de  $\omega_n$  fournissent les élongations  $y_n$  des différents modes propres :

$$y_n(x, t) = a_1 a_2 \sin\left(n \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n \frac{\pi v}{L} t + \varphi_2\right)$$

ce qui fournit les représentations graphiques des trois premiers modes propres, pour  $t$  fixé :



### 3. Calculs sur les cordes d'une guitare électrique

(a) La fréquence  $f_1$  du mode fondamental est obtenue en choisissant  $n = 1$  :

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{v}{2L} \Rightarrow v = 2f_1L$$

où  $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ , tandis que la masse linéique  $\mu$  est liée à la masse volumique  $\rho$  par la relation :

$$\begin{aligned} \mu = \rho \times \pi r^2 &= \rho \times \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \rho \times \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{4T}{\pi \rho d^2}} = 2f_1L \quad (54) \\ \Rightarrow \frac{4T}{\pi \rho d^2} &= 4f_1^2 L^2 \Rightarrow T = \pi \rho d^2 f_1^2 L^2 \quad (55) \end{aligned}$$

Corde n°	1	2	3	4	5	6
$f_1$ (Hz)	82,5	110	147	196	247	330
$d$ (mm)	1,12	0,89	0,70	0,55	0,35	0,25
$T$ (N)	83	93	103	113	73	66

(b) Le résultat (55) :

$$T = \pi \rho d^2 L^2 \times f_1^2 \Rightarrow \ln T = \ln(\pi \rho d^2 L^2) + 2 \ln f_1$$

montre qu'une variation  $df_1$  de la fréquence fondamentale est accompagnée d'une variation concomitante de la tension  $T$ , telle que :

$$\frac{dT}{T} = 2 \frac{df_1}{f_1} = 2\%$$

(c) À nouveau, le résultat (55) montre que la fréquence fondamentale  $f_1$  est liée à la longueur de la corde  $L$  selon la loi :

$$L^2 f_1^2 = \text{cte} \Rightarrow L_1 f_1 = \text{cte}$$

Par suite, la variation relative de la longueur est associée à une variation relative de la fréquence fondamentale :

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{\Delta f_1}{f_1} = 1\% = 0,01$$

En outre, pour obtenir une fréquence fondamentale  $f'_1 \neq f_1$  sur la corde n°6, il convient de lui attribuer une longueur  $L'$  telle que :

$$(L' f'_1)^2 = \frac{T}{\pi \rho d^2} = (L f_1)^2 \Rightarrow L' = L \frac{f_1}{f'_1}$$

Ainsi, pour obtenir une fréquence fondamentale  $f'_1$ , à  $\Delta f'_1$  près, il faut que :

$$\frac{\Delta L'}{L'} = \frac{\Delta f'_1}{f'_1} = 0,01 \Rightarrow \Delta L' = 0,01 \times L' = 0,01 \times \frac{L f'_1}{f'_1}$$

Pour  $f'_1 = 500$  Hz :

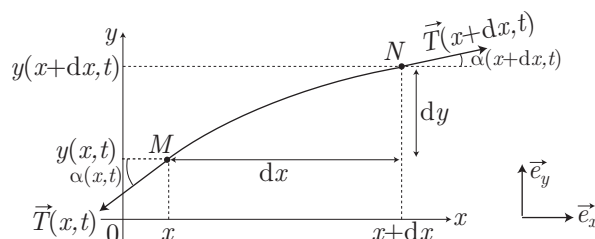
$$\Delta L' = 0,01 \times \frac{0,63 \times 330}{500} \Rightarrow \Delta L' = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4,2 \text{ mm}$$

et pour  $f'_1 = 1$  kHz :

$$\Delta L' = 0,01 \times \frac{0,63 \times 330}{1000} \Rightarrow \Delta L' = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 2,1 \text{ mm}$$

### ● 130 ————— Lycée La Martinière-Montplaisir, Lyon

1. Soit  $MN$  un élément de corde situé entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  des points  $M$  et  $N$ .



Cet élément de corde a pour longueur :

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \text{ où } dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx \\ &= dx \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} \simeq dx \text{ car } \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1 \end{aligned}$$

Son volume étant ainsi :  $\delta V = s dx$ , sa masse vaut  $\delta m = \mu \times s dx$ , où la masse volumique  $\mu$  de la corde est définie à partir de son volume  $V = s L$  et de sa masse  $m$  :

$$\mu = \frac{m}{sL} \Rightarrow \delta m = m \frac{dx}{L}$$

Cet élément de corde est soumis, en  $M$  et  $N$ , aux forces de tension :

$$\begin{aligned} \vec{T}(x, t) &= T(x, t) \begin{pmatrix} -\cos[\alpha(x, t)] \\ -\sin[\alpha(x, t)] \end{pmatrix} \\ \text{et } \vec{T}(x + dx, t) &= T(x + dx) \begin{pmatrix} \cos[\alpha(x + dx, t)] \\ \sin[\alpha(x + dx, t)] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, l'absence de mouvement dans la direction de  $\vec{e}_x$  s'exprime par :

$$T(x, t) \times \cos[\alpha(x, t)] = T(x + dx, t) \times \cos[\alpha(x + dx, t)]$$

Cette équation montre que le produit  $T(x, t) \times \cos[\alpha(x, t)]$  est indépendant de  $x$ , ce qui signifie aussi que :

$$T(x, t) \times \cos[\alpha(x, t)] = T(x + dx, t) \times \cos[\alpha(x + dx, t)] = T_0$$

car  $T = T_0$  là où  $\alpha = 0$ . Il s'ensuit que :

$$T(x, t) = \frac{T_0}{\cos[\alpha(x, t)]} \Rightarrow T(x, t) \sin[\alpha(x, t)] = T_0 \tan[\alpha(x, t)]$$

et :

$$\begin{aligned} T(x + dx, t) &= \frac{T_0}{\cos[\alpha(x + dx, t)]} \\ \Rightarrow T(x + dx, t) \sin[\alpha(x + dx, t)] &= T_0 \tan[\alpha(x + dx, t)] \end{aligned}$$

Par conséquent, en négligeant son poids, l'élément  $MN$  de corde est soumis à une force résultante :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{R}} &= \vec{T}(x, t) + \vec{T}(x + dx, t) \\ &= T(x + dx, t) \times \sin[\alpha(x + dx, t)] \vec{e}_y - T(x, t) \times \sin[\alpha(x, t)] \vec{e}_y \\ &= T_0 \times [\tan \alpha(x + dx, t) - \tan \alpha(x, t)] \vec{e}_y \end{aligned}$$

Or, on remarque que la corde décrit une courbe  $y(x, t)$  dont la tangente fait en  $M$  et en  $N$  un angle  $\alpha(x, t)$  et  $\alpha(x + dx, t)$  par rapport à l'horizontale. Par conséquent :

$$\tan \alpha(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t)$$

et :

$$\begin{aligned} \tan \alpha(x + dx, t) &= \frac{\partial y}{\partial x}(x + dx, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) + dx \times \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t) \\ \Rightarrow \vec{\mathcal{R}} &= T_0 \times \left[ dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \vec{e}_y \end{aligned}$$

Enfin, l'accélération :  $\vec{\gamma} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y$  de l'élément  $MN$  est assujéti à la loi fondamentale de la dynamique :

$$\delta m \vec{\gamma} = \vec{\mathcal{R}} \Rightarrow m \frac{dx}{L} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y = T_0 dx \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \vec{e}_y$$

d'où il découle que :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ avec } c = \sqrt{\frac{LT_0}{m}} \quad (56)$$

2. En adoptant, pour  $y$ , la forme :  $y(x, t) = f(X)$  où  $f(X) = x - vt$ , on impose :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{df}{dX} \frac{\partial X}{\partial t} = -v \frac{dX}{dt} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -v \times \frac{d^2 f}{dX^2} \frac{\partial X}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 f}{dX^2} \quad (57)$$

et :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{df}{dX} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{df}{dX} \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dX^2} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{d^2 f}{dX^2} \quad (58)$$

de sorte que l'équation (56) s'écrit aussi :

$$v^2 \frac{d^2 f}{dX^2} = c^2 \frac{d^2 f}{dX^2} \Rightarrow \frac{d^2 f}{dX^2} \times (v^2 - c^2) = 0$$

Toute fonction  $f$  peut satisfaire cette équation à condition que  $v = c$ .

3. (a) L'équation différentielle :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{YL}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \quad (59)$$

montre que :

$$\left[ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right] = [YL] \times \left[ \frac{1}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right] \Rightarrow \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = [YL] \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\Rightarrow [YL] = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

c'est-à-dire :  $[Y] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$  révèle que  $[YL]$  a la dimension d'une force par une distance, c'est-à-dire une énergie :

$$[YL] = \text{Joule}$$

(b) Cherchons une solution de l'équation (56) sous la forme d'une onde plane progressive, à savoir :

$$y(x, t) = f(X) \text{ avec } X = x - vt$$

auquel cas les relations (57) et (58) demeurent utilisables :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{dX^2} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dX^2}$$

tandis que :  $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \frac{d^4 f}{dX^4}$  donne à l'équation différentielle (59) la forme suivante :

$$v^2 \frac{d^2 f}{dX^2} = c^2 \frac{d^2 f}{dX^2} - \frac{YL}{m} \frac{d^4 f}{dX^4}$$

(c) L'équation précédente conduit à :

$$v^2 \psi = c^2 \psi - \frac{YL}{m} \frac{d^2 \psi}{dX^2} \text{ où } \psi = \frac{d^2 f}{dX^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dX^2} + \frac{m}{YL} (v^2 - c^2) \psi = 0$$

Étudions alors la nature de la fonction  $\psi$ , en fonction des valeurs de  $\frac{v}{c}$ .

• Si  $\frac{v}{c} > 1$ , il existe un nombre réel  $K$  tel que :

$$K^2 = \frac{m}{YL} (v^2 - c^2) > 0 \Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dX^2} + K \psi = 0$$

Ce faisant, la fonction  $\psi$  est de la forme :

$$\psi(X) = \psi_0 \cos(KX + \phi) = \frac{d^2 f}{dX^2} \Rightarrow f(X) = -\frac{\psi_0}{K^2} \cos(KX + \phi) \quad (60)$$

ce qui prouve que :

$$y(x, t) = f(X) \text{ est bornée si } \frac{v}{c} > 1$$

- Si  $\frac{v}{c} = 1$ ,  $\psi(X)$  est solution de l'équation :  $\frac{d^2 \psi}{dX^2} = 0$ , ce qui prouve l'existence de constantes  $a_1, a_2, a_3$  telles que :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dX} = a_1 &\Rightarrow \psi(X) = a_1 X + a_2 = \frac{d^2 f}{dX^2} \\ &\Rightarrow \frac{df}{dX} = \frac{a_1}{2} X^2 + a_2 X + a_3 \\ &\Rightarrow f(X) = \frac{a_1}{6} X^3 + \frac{a_2}{2} X^2 + a_3 X + a_4 \end{aligned}$$

Dans ce cas,  $f(X) = f(x, t)$  ne peut être une fonction bornée autre qu'une constante.

- Si  $\frac{v}{c} < 1$ ,  $\frac{m}{YL} (c^2 - v^2) > 0$  montre qu'il existe un nombre réel  $\kappa$  tel que :

$$\kappa^2 = \frac{m}{YL} (c^2 - v^2) \Rightarrow \frac{d^2 \psi}{dX^2} - \kappa^2 \psi = 0$$

auquel cas la fonction  $\psi(X)$  adopte la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} \psi(X) &= \lambda e^{\kappa X} + \mu e^{-\kappa X} = \frac{d^2 f}{dX^2} \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes} \\ &\Rightarrow \frac{df}{dX} = \frac{\lambda}{\kappa} e^{\kappa X} - \frac{\mu}{\kappa} e^{-\kappa X} + \alpha \\ &\Rightarrow f(X) = \frac{\lambda}{\kappa^2} e^{\kappa X} + \frac{\mu}{\kappa^2} e^{-\kappa X} + \alpha X + \beta \end{aligned}$$

Dans le cas général, si  $\lambda$  et  $\alpha$  ne sont pas simultanément nuls, cette fonction ne peut être bornée.

En conclusion,  $y(x, t)$  est bornée si et seulement si  $\frac{v}{c} > 1$ , auquel cas  $f(x, t)$  adopte la forme (60) :

$$y(x, t) = -F_0 \cos(KX + \phi) \text{ avec } \begin{cases} K = \sqrt{\frac{m}{YL} \left( \frac{v^2}{c^2} - 1 \right)} \times c \\ X = x - vt \end{cases}$$

(d) Quand  $f$  est choisi sous la forme :

$$y(x, t) = A \cos(kx - \omega t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 \times y(x, t) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 \times y(x, t) \\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = k^4 \times y(x, t) \end{cases}$$

ces relations affectent à l'équation de propagation (59) la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{YL}{m} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} &\Rightarrow -\omega^2 = -k^2 c^2 - \frac{YL}{m} k^4 \\ &\Rightarrow \frac{YL}{m} k^4 + k^2 c^2 = \omega^2 \end{aligned}$$

4. (a) La définition de la fonction  $e(x, t) = \frac{m}{2L} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$  conduit à :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{m}{L} \frac{\partial y}{\partial t} \times \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)$$

où l'équation de propagation (56) permet de poser :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \text{ avec } c = \sqrt{\frac{LT_0}{m}} \\ \Rightarrow \frac{m}{L} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= \frac{m}{L} \times \frac{LT_0}{m} \times \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

tandis que  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)$ . Ce faisant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= T_0 \frac{\partial y}{\partial t} \times \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ T_0 \frac{\partial y}{\partial t} \times \frac{\partial y}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

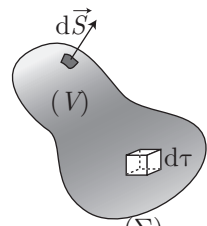
Il existe donc un vecteur :

$$\vec{\Pi} = -T_0 \frac{\partial y}{\partial t} \times \frac{\partial y}{\partial x} \vec{e}_x \quad (61)$$

tel que :

$$\operatorname{div} \vec{\Pi} = -T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \times \frac{\partial y}{\partial x} \right) \Rightarrow \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{\Pi} = 0$$

(b) Considérons un volume ( $V$ ) circonscrit par une surface fermée ( $\Sigma$ ). Le flux de  $\vec{\Pi}$  entrant dans ( $V$ ) à travers ( $\Sigma$ ) s'écrit :

$$\begin{aligned}\Phi(\vec{\Pi}) &= -\iint_{(\Sigma)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} = -\iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{\Pi} d\tau \\ &= \iiint_{(V)} \frac{\partial e}{\partial t} d\tau\end{aligned}$$


Il existe donc une grandeur  $\mathcal{E}(t)$ , caractéristique de  $(V)$ , dont  $e$  est la densité volumique :

$$\mathcal{E} = \iiint_{(V)} e d\tau \Rightarrow \Phi(\vec{\Pi}) = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

Ainsi, si  $\mathcal{E}$  désigne l'énergie contenue dans  $(V)$ ,  $\Phi(\vec{\Pi})$  représente alors la puissance qui entre dans  $(V)$ . On retrouve formellement les mêmes lois que celles relatives à l'électromagnétisme :

	Électromagnétisme	Onde mécanique
Densité volumique d'énergie	$e_{em} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2$	$e = \frac{m}{2L} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$
Densité de flux d'énergie	Vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$	$\vec{\Pi} = -T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) \times \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) \vec{e}_x$

(c) Une fonction de la forme :  $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t)$  a pour dérivées :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \sin(kx - \omega t) \text{ et } \frac{\partial y}{\partial x} = -Ak \sin(kx - \omega t)$$

de sorte que :

$$e = \frac{m}{2L} \times A^2 \omega^2 \sin^2(kx - \omega t) + \frac{T_0}{2} \times A^2 k^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

avec :

$$c = \sqrt{\frac{LT_0}{m}} \Rightarrow L = \frac{mc^2}{T_0} \Rightarrow \frac{m\omega^2}{2L} = \frac{m\omega^2}{2} \times \frac{T_0}{mc^2} = \frac{T_0\omega^2}{2c^2}$$

et :

$$k = \frac{\omega}{c} \Rightarrow \frac{T_0 k^2}{2} = \frac{T_0 \omega^2}{2c^2}$$

d'où il s'ensuit que :

$$e = \frac{T_0 \omega^2}{c^2} \times a^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Quant au vecteur  $\vec{\Pi}$ , sa définition (61) conduit à :

$$\begin{aligned}\vec{\Pi} &= -T_0 \frac{\partial y}{\partial t} \times \frac{\partial y}{\partial x} \vec{e}_x = T_0 \vec{e}_x \times A\omega \sin(kx - \omega t) \times Ak \sin(kx - \omega t) \\ &= T_0 \omega k \times A^2 \sin^2(kx - \omega t) \vec{e}_x \text{ avec } k = \frac{\omega}{c}\end{aligned}$$

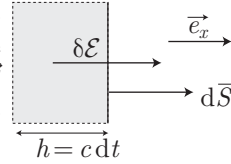
$$\Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{T_0 \omega^2}{c} \times A^2 \sin^2(kx - \omega t) \vec{e}_x$$



Par conséquent :

$$\vec{\Pi} = c e(x, t) \vec{e}_x$$

Ce résultat s'interprète aisément en termes de propagation d'énergie : en considérant que l'énergie se déplace à la vitesse  $c$ , l'énergie  $\delta\mathcal{E}$  qui traverse une surface  $d\vec{S}$  pendant  $dt$  vaut celle contenue dans le volume de surface de base  $dS$  et de hauteur  $h = c dt$  :



$$\delta\mathcal{E} = e \times h dS = e \times c dt dS \Rightarrow \frac{\delta\mathcal{E}}{dt} = ec dS = ec \vec{e}_x \cdot d\vec{S}$$

ce qui confirme la définition du vecteur  $\vec{\Pi}$  :

$$\frac{\delta\mathcal{E}}{dt} = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} \text{ avec } \vec{\Pi} = ec \vec{e}_x$$

### ● 131 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Pour que la surpression  $p(x, t)$  soit nulle en  $x = L$ , il est nécessaire d'envisager la propagation :

- d'une onde progressive (dans le sens de  $\vec{e}_x$ ), caractérisée par une surpression complexe :

$$\underline{p}_i = p_0 e^{j(\omega t - kx)}$$

- d'une onde « régressive » (dans le sens de  $-\vec{e}_x$ ), caractérisée par une surpression complexe :

$$\underline{p}_r = \underline{r} p_0 e^{j(\omega t + kx)}$$

Remarque – Nous considérerons la grandeur  $p_0$  a priori complexe car aucune information n'est fournie quant à la valeur de  $\underline{p}_i$  ou  $\underline{p}_r$  en  $x = 0$ . On peut ainsi admettre l'existence d'un déphasage  $\phi$  tel que :

$$\begin{aligned} p_0 = |p_0| e^{j\phi} &\Rightarrow \underline{p}_i = |p_0| e^{j(\omega t - kx + \phi)} \\ &\Rightarrow p_i(x, t) = \text{Re} \left\{ \underline{p}_i \right\} = |p_0| \cos(\omega t - kx + \phi) \end{aligned}$$

Ce faisant, en un point d'abscisse  $x$ , la surpression a pour image complexe :

$$\underline{p}(x, t) = \underline{p}_i + \underline{p}_r = p_0 e^{j\omega t} \times (e^{-jkx} + \underline{r} e^{jkx})$$

où  $\omega = kc$  lie la pulsation  $\omega$ , la célérité  $c$  de l'onde acoustique et la longueur d'onde  $\lambda = \frac{c}{\omega}$ .

Du reste, la condition imposée par l'énoncé :  $p(L, t) = 0$  se traduit par :

$$\underline{p}(L, t) = 0 \Rightarrow e^{-jkL} + \underline{r} e^{jkL} = 0 \Rightarrow \underline{r} = -e^{-2jkL}$$

en conséquence de quoi :

$$\begin{aligned} \underline{p}(x, t) &= p_0 e^{j\omega t} \times [e^{-jkx} - e^{-2jkL} \times e^{jkx}] \\ &= p_0 e^{j(\omega t - kL)} \times [e^{j(kL - kx)} - e^{-j(kL - kx)}] \end{aligned}$$

soit encore :

$$\underline{p}(x, t) = 2j p_0 e^{j(\omega t - kL)} \times \sin(kL - kx)$$

Quant à la vitesse d'écoulement :  $\underline{v} = \underline{v}(x, t) \vec{e}_x$ , elle est liée à la surpression  $\underline{p}(x, t)$  par la loi :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} &= -\overrightarrow{\text{grad}} \underline{p} = -\frac{\partial \underline{p}}{\partial x} \vec{e}_x \Rightarrow \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} = 2j p_0 k e^{j(\omega t - kL)} \cos(kL - kx) \\ &\Rightarrow \underline{v}(x, t) = \frac{2j p_0 k}{\rho j \omega} e^{j(\omega t - kx)} \cos(kL - kx) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\underline{v}(x, t) = \frac{2p_0 k}{\rho \omega} e^{j(\omega t - kx)} \times \cos(kL - kx) \quad (62)$$

Or, l'énoncé précise qu'en  $x = 0$  la vitesse  $v(0, t) = \text{Re} \{ \underline{v}(0, t) \}$  s'identifie à  $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ , ce qui signifie que :

$$\underline{v}(0, t) = U_0 e^{j\omega t} \Rightarrow v(0, t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (63)$$

Une identification avec les résultat (62) :

$$\underline{v}(0, t) = \frac{2p_0 k}{\rho \omega} e^{j\omega t} \cos(kL) = U_0 e^{j\omega t}$$

conduit à :

$$\frac{2p_0 k}{\rho \omega} \cos(kL) = U_0 \Rightarrow \frac{2p_0 k}{\rho \omega} = \frac{U_0}{\cos(kL)}$$

Finalement, la relation (62) devient :

$$\underline{v}(x, t) = U_0 \frac{\cos(kL - kx)}{\cos(kL)} e^{j(\omega t - kx)}$$

et donc :

$$v(x, t) = \text{Re} \{ \underline{v}(x, t) \} = U_0 \frac{\cos(kL - kx)}{\cos(kL)} \times \cos(\omega t - kx)$$

2. De l'identité (63) il découle que :

$$\underline{v}(0, t) = U_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{\underline{v}}(0, t) = j\omega U_0 e^{j\omega t}$$

Aussi, la puissance sonore  $P(0)$  est proportionnelle à  $\langle \dot{v}^2 \rangle$  en  $x = 0$  (on notera  $K$  la constante de proportionnalité) :

$$\begin{aligned} P(0) &= K \langle \dot{v}^2 \rangle = K \times \frac{1}{2} \text{Re} \{ \dot{\underline{v}} \dot{\underline{v}}^* \} \text{ en } x = 0 \\ &= K \times \frac{1}{2} |\dot{\underline{v}}|^2 \end{aligned}$$

soit aussi :

$$P(0) = \frac{1}{2} K \omega^2 U_0^2$$

De la même manière, l'expression de  $\underline{v}(x, t)$  conduit à :

$$\underline{v}(L, t) = \frac{U_0}{\cos(kL)} e^{j(\omega t - kL)} \Rightarrow \dot{\underline{v}}(L, t) = j\omega \times \frac{U_0}{\cos(kL)} \times e^{j(\omega t - kL)}$$

auquel cas :

$$\begin{aligned} P(L) &= K \langle \dot{v}^2 \rangle = K \times \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \dot{\underline{v}} \dot{\underline{v}}^* \} \text{ en } x = L \\ &= \frac{K}{2} \times |\dot{\underline{v}}|^2 = \frac{K}{2} \frac{\omega^2 U_0^2}{\cos^2(kL)} \end{aligned}$$

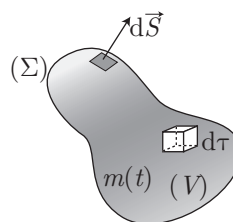
Ce faisant :

$$\frac{P(L)}{P(0)} = \frac{1}{\cos^2(kL)}$$

### ● 132 ————— Concours Commun Polytechnique

1. On considère une surface fermée ( $\Sigma$ ), renfermant un volume ( $V$ ), de masse  $m(t)$  à la date  $t$ . On oriente un élément  $d\vec{S}$  de surface vers l'extérieur de ( $V$ ). Pendant  $dt$ , la masse  $m$  varie de la quantité :

$$\begin{aligned} dm &= m(t + dt) - m(t) \\ &= \iiint_{(V)} \mu(t + dt) d\tau - \iiint_{(V)} \mu(t) d\tau \\ &= \iiint_{(V)} [\mu(t + dt) - \mu(t)] d\tau \\ &= \iiint_{(V)} \frac{\partial \mu}{\partial t} dt d\tau \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \iiint_{(V)} \frac{\partial \mu}{\partial t} d\tau \end{aligned}$$



En outre, une masse  $\delta m$  entre dans ( $V$ ), à travers ( $\Sigma$ ), pendant  $dt$ , telle que :

$$\frac{\delta m}{dt} = - \iint_{(\Sigma)} \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = - \iiint_{(V)} \operatorname{div}(\vec{j}_m) d\tau$$

où  $\vec{j}_m = \mu \vec{v}$  désigne le vecteur densité de courant de masse. Or, la conservation de la masse impose  $dm = \delta m$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} = \frac{\delta m}{dt} &\Rightarrow \iiint_{(V)} \frac{\partial \mu}{\partial t} d\tau = - \iiint_{(V)} \operatorname{div}(\vec{j}_m) d\tau \\ &\Rightarrow \iiint_{(V)} \left[ \operatorname{div}(\vec{j}_m) + \frac{\partial \mu}{\partial t} \right] d\tau = 0 \end{aligned}$$

Cette équation devant être vérifiée pour tout volume ( $V$ ), il s'ensuit que :

$$\operatorname{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \quad (64)$$

2. Un élément de volume  $\delta\tau$ , donc de masse  $\delta m = \mu_0 \delta\tau$ , est soumis à une force résultante  $\vec{\mathcal{R}} = \delta\tau [\vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} P]$ , qui provoque une variation  $d\vec{v}$  de son vecteur vitesse  $\vec{v}$ . Ce dernier, dépendant des paramètres d'espace  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  et du paramètre de temps  $t$ , il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} d\vec{v} &= \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} dt \\ \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{\partial\vec{v}}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \\ \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} &= \left( v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \end{aligned}$$

où  $v_x, v_y, v_z$  sont les composantes de  $\vec{v}$ . On peut ainsi écrire :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$$

Or, le rappel mathématique fourni par l'énoncé peut être utilisé ici :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{v} \cdot \vec{v}) &= \overrightarrow{\text{grad}} (v^2) = 2\vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} + 2(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \\ \Rightarrow (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (v^2) - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \end{aligned}$$

Aussi, de la loi fondamentale de la dynamique :

$$\delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\mathcal{R}} \Rightarrow \mu_0 \delta\tau \frac{d\vec{v}}{dt} = \delta\tau [\vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} P]$$

découle la formule d'Euler :

$$\mu_0 \left[ \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (v^2) - \vec{v} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \right] = \vec{F} - \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (65)$$

3. (a) En posant  $\mu = \mu_0 + \mu_e$ , où  $\mu \simeq \mu_0 \Rightarrow \mu_e \ll \mu_0$ , on peut simplifier :

$$\text{div} (\mu \vec{v}) = \text{div} \left[ \underbrace{(\mu_0 + \mu_e)}_{\simeq \mu_0} \vec{v} \right] \simeq \mu_0 \text{div} \vec{v}$$

et :

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} = \frac{\partial\mu_0}{\partial t} + \frac{\partial\mu_e}{\partial t} = \frac{\partial\mu_e}{\partial t}$$

de manière à présenter l'équation (64) sous la forme :

$$\text{div} (\mu \vec{v}) + \frac{\partial\mu}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mu_0 \text{div} \vec{v} + \frac{\partial\mu_e}{\partial t} = 0 \quad (66)$$

- (b) Le coefficient de compressibilité isentropique est défini par :

$$\chi = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S$$

si bien qu'une surpression  $\delta P = P - P_0 = p$  provoque une variation  $\delta V$  du volume, telle que :

$$\delta V = \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S \delta P = -\chi V \delta P = -\chi V p \quad (67)$$

Or, un volume  $\delta V$  de fluide présente une masse  $\delta m = \mu V$  constante, de sorte que :

$$\delta m = \mu V = \text{cte} \Rightarrow \delta \mu \times V + \mu \times \delta V = 0$$

où  $\delta \mu = \mu - \mu_0 = \mu_e$  désigne la variation de  $\mu$  consécutive à une variation  $p$  de la pression, donnée par l'identité (67) :

$$\mu_e V - \mu \chi V p = 0 \Rightarrow \mu_e - \underbrace{(\mu_0 + \mu_e)}_{\simeq \mu_0} \chi p = 0 \Rightarrow p = \frac{\mu_e}{\chi \mu_0} \quad (68)$$

(c) En l'absence de force  $\vec{F}$  extérieure, l'équation d'Euler (65), relative à un écoulement irrotationnel, devient :

$$\mu \times \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (v^2) \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P$$

où  $\mu = \mu_0 + \mu_e \simeq \mu_0$  et  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \underbrace{\overrightarrow{\text{grad}} P_0}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{\text{grad}} p$  entraînent que :

$$\mu_0 \times \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}} (v^2) \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} p$$

Enfin,  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  étant d'ordre 1 en  $\vec{v}$  alors que  $\overrightarrow{\text{grad}} (v^2)$  est d'ordre 2, cette équation se simplifie à nouveau :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}} p$$

(d) La divergence de cette dernière équation fournit :

$$-\text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} p) = \mu_0 \text{div} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right) \Rightarrow \Delta p = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{v})$$

tandis que les identités (68) et (66) conduisent à :

$$\begin{aligned} \mu_e = \chi \mu_0 p &\Rightarrow \mu_0 \text{div} \vec{v} = -\frac{\partial \mu_e}{\partial t} = -\mu_0 \chi \frac{\partial p}{\partial t} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{v}) = -\chi \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\Delta p = \mu_0 \chi \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$$

- (e) Cette équation de propagation de la surpression s'identifie à l'équation de d'Alembert :

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

où  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi}}$  désigne la célérité du son dans le fluide.

- (f) Une des solutions de cette équation décrit la propagation des ondes planes progressives :

$$p = p(x, t) \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

avec :

$$p(x, t) = f(x - ct)$$

4. (a) Au cours d'une transformation isentropique, la loi de Laplace relie la pression  $P$  au volume  $V$  d'un élément du gaz parfait :

$$\begin{aligned} P V^\gamma = \text{cte} &\Rightarrow \ln P + \gamma \ln V = \text{cte} \Rightarrow \frac{1}{P} + \frac{\gamma}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_S = 0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_S = -\frac{1}{\gamma P} \end{aligned}$$

où  $P = P_0 + p \simeq P_0$  donne finalement :

$$\chi = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_S = \frac{1}{\gamma P_0}$$

- (b) Les conditions normales de température et de pression sont caractérisées par une pression  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5$  Pa et une température  $T_0 = 273$  K. Dans ces conditions :

$$\chi = \frac{1}{1,4 \times 1,013 \cdot 10^5} = 7,05 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$$

tandis que  $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi}}$ , où la masse volumique  $\mu_0$  désigne le rapport de la masse  $m$  par le volume  $V$  qui contient cette masse ; l'équation d'état des gaz parfaits indique, au demeurant, que :

$$\begin{aligned} P_0 V = n R T_0 &= \frac{m R T_0}{M} \Rightarrow \mu_0 = \frac{m}{V} = \frac{M P_0}{R T_0} \\ &\Rightarrow \mu_0 \chi = \frac{M P_0}{R T_0} \times \frac{1}{\gamma P_0} = \frac{M}{\gamma R T_0} \\ &\Rightarrow c = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}} \end{aligned}$$

Application numérique :

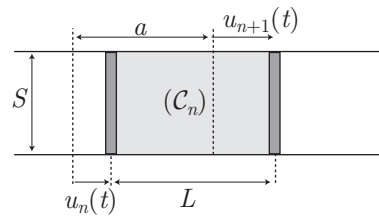
$$c = \sqrt{\frac{1,4 \times 8,314 \times 273}{29 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow c = 331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

### ● 133 ————— Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

#### 1. Suppression sonore

- (a) Considérons le gaz qui se trouve dans le compartiment ( $C_n$ ) sous deux états :
- à l'équilibre, sa pression vaut  $P_1 = P_0$  tandis que son volume vaut  $V_1 = a S$  ;
  - hors équilibre, la distance  $L$  qui sépare les pistons  $\Pi_n$  et  $\Pi_{n+1}$  vérifie :

$$u_n(t) + L = a + u_{n+1}(t) \Rightarrow L = u_{n+1}(t) - u_n(t) + a$$



Par conséquent son volume vaut :

$$V_2 = SL = S \times (a + u_{n+1} - u_n)$$

tandis que sa pression prend la valeur  $P_n$ .

De la loi de Laplace, il découle alors que :

$$\begin{aligned} PV^\gamma = \text{cte} &\Rightarrow P_n V_2^\gamma = P_1 V_1^\gamma \Rightarrow P_n \times (a + u_{n+1} - u_n)^\gamma = P_0 a^\gamma \\ &\Rightarrow P_n = P_0 a^\gamma \times (a + u_{n+1} - u_n)^{-\gamma} \end{aligned}$$

soit encore :

$$P_n = P_0 \times \left(1 + \frac{u_{n+1} - u_n}{a}\right)^{-\gamma}$$

- (b) L'approximation de l'acoustique suggère que  $|\varepsilon| = \left|\frac{u_{n+1} - u_n}{a}\right| \ll 1$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 \times (1 + \varepsilon)^{-\gamma} = P_0 \times (1 - \gamma\varepsilon) = P_0 - P_0\gamma\varepsilon \\ &\Rightarrow P_n - P_0 = -P_0\gamma\varepsilon = -P_0\gamma \times \frac{u_{n+1} - u_n}{a} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$P_n - P_0 = -\frac{1}{\chi} \times \frac{u_{n+1} - u_n}{a} \text{ avec } \chi = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (69)$$

En notant  $\Delta P_n$  la variation de pression dans ( $C_n$ ), lorsque  $u_{n+1}$  est supérieur à  $u_n$ , son volume s'accroît ( $V_2 > V_1$ ), de sorte que :

$$u_{n+1} - u_n > 0 \Rightarrow \chi \Delta P_n = -\frac{u_{n+1} - u_n}{a} < 0$$

où  $\Delta P_n < 0$  se produit lorsque le volume s'accroît ( $V_2 > V_1$ ). C'est pourquoi :

$$\chi = -\frac{u_{n+1} - u_n}{a \Delta P_n} > 0$$

Remarque – Ce résultat est heureusement compatible avec la relation :

$$\chi = \frac{1}{\gamma P_0}!$$

(c) Étant donné que  $\gamma$  est sans dimension et que  $[P_0] = \text{Pa}^{-1}$  :

$$[\chi] = \frac{1}{[P_0]} = \text{Pa}^{-1}$$

Les notations utilisées à la question (a) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} V_2 - V_1 &= \Delta V = S \times (a + u_{n+1} - u_n - a) = S \times (u_{n+1} - u_n) \\ \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_1} &= \frac{u_{n+1} - u_n}{a} \end{aligned}$$

tandis que  $\Delta P = P_n - P_0$ , de sorte que le résultat (69) s'écrit aussi :

$$\Delta P_n = -\frac{1}{\chi} \frac{\Delta V}{V_1} \Rightarrow \frac{\Delta V}{V_1} = -\chi \times \Delta P_n$$

ce qui rend compte de l'accroissement relatif du volume du gaz consécutif à une variation  $\Delta P_n$  de sa pression.

Si les compartiments étaient incompressibles,  $\chi$  serait nul, en conséquence de quoi :

$$\Delta V = 0 \Rightarrow u_{n+1} = u_n \quad \forall n$$

Seul un déplacement global du fluide serait alors observé, ce qui ne correspond pas à la propagation d'une onde.

## 2. Équation discrète de propagation

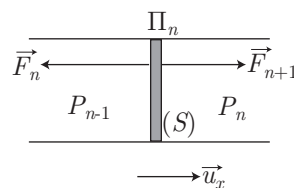
(a) Le piston ( $\Pi_n$ ) est soumis à deux forces de pression, de part et d'autre de son plan :

- la force exercée par ( $\mathcal{C}_n$ ) :

$$\vec{F}_n = -F_n \vec{u}_x = -P_n S \vec{u}_x$$

- la force exercée par ( $\mathcal{C}_{n-1}$ ) :

$$\vec{F}_{n-1} = F_{n-1} \vec{u}_x = P_{n-1} S \vec{u}_x$$



(b) La résultante des forces de pression subies par  $\Pi_n$  vaut :

$$\vec{\mathcal{R}}_n = \vec{F}_n + \vec{F}_{n-1} = (P_{n-1} - P_n) S \vec{u}_x$$

où  $P_n$  et  $P_{n-1}$  sont accessibles à partir de la relation (69) :

$$P_n = P_0 - \frac{1}{\chi a} (u_{n+1} - u_n) \quad \text{et} \quad P_{n-1} = P_0 - \frac{1}{\chi a} (u_n - u_{n-1})$$

de sorte que :

$$\vec{\mathcal{R}}_n = \frac{S}{\chi a} (-u_n + u_{n-1} + u_{n+1} - u_n) \vec{u}_x = \frac{S}{\chi a} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \vec{u}_x$$



Aussi, l'accélération de  $\Pi_n$  :

$$\vec{\gamma}_n = \frac{d^2 x_n}{dt^2} \vec{u}_x = \frac{d^2 u_n}{dt^2} \vec{u}_x \text{ car } x_n(t) = na + u_n(t)$$

vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{\gamma}_n = \vec{\mathcal{R}}_n &\Rightarrow \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{S}{\chi a m} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \\ &= \frac{Sa}{a^2 \chi m} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{c^2}{a^2} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \text{ où } c = \sqrt{\frac{aS}{\chi m}} \quad (70)$$

La définition de la masse volumique :  $\rho_0 = \frac{m}{aS}$  conduit à :

$$\frac{aS}{m} = \frac{1}{\rho_0} \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho_0}}$$

Or, une pression  $P$  étant définie à partir d'une force  $F$  :

$$P = \frac{F}{S} \Rightarrow [P] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} [\chi] = \frac{1}{[P_0]} &= \text{kg}^{-1} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2 \Rightarrow [\chi \rho_0] = \text{kg}^{-1} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^2 \times \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} = \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2} \\ &\Rightarrow [c] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

### 3. Approximation des milieux continus

En se plaçant dans l'hypothèse où  $a \ll x$ , les fonctions  $u_{n+1}(t)$  et  $u_{n-1}(t)$  admettent pour développements limités :

$$u_{n+1}(t) = u(x+a, t) \simeq u(x, t) + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

et :

$$u_{n-1}(t) = u(x-a, t) \simeq u(x, t) - a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

de sorte que :

$$u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n = 2u(x, t) + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

tandis que :

$$u_n(t) = u(x, t) \Rightarrow \frac{d^2 u_n}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

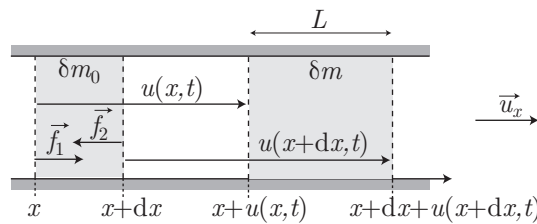
Ce faisant, l'équation (70) se ramène à l'équation :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{c^2}{a^2} \times \left( a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

## ● 134 ————— Concours des Ponts et Chaussées

### I- Généralités

1. Une tranche de fluide, comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  au repos, présente une masse  $\delta m_0 = \rho_0 S dx$ .



Soumise à une perturbation acoustique, cette tranche présente une longueur :

$$\begin{aligned} L &= [x + dx + u(x + dx, t)] - [x + u(x, t)] \\ &= \left[ x + dx + u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right] - [x + u(x, t)] = dx \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

et donc une masse :

$$\delta m = \rho(x, t) \times SL = \rho(x, t) \times S dx \times \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Or, au cours de cette transformation, la masse de la tranche de fluide n'a pas varié, ce qui se traduit par :

$$\delta m = \delta m_0 \Rightarrow \rho(x, t) \times \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho_0 \Rightarrow \rho(x, t) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \quad (71)$$

2. La tranche de fluide, initialement au repos, se met en mouvement sous l'effet des forces de pression :

$$\vec{f}_1 = P(x, t) \times S \vec{u}_x \text{ et } \vec{f}_2 = -P(x + dx, t) \times S \vec{u}_x$$

dont la résultante vaut :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{R}} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 &= [P(x, t) - P(x + dx, t)] \times S \vec{u}_x \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} dx \times S \vec{u}_x \end{aligned}$$

Aussi, la masse  $\delta m_0 = \rho_0 \times S dx$  d'air contenue dans cette tranche subit une

accélération  $\vec{\gamma} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \vec{u}_x$ , qui vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

$$\delta m_0 \vec{\gamma} = \vec{\mathcal{R}} \Rightarrow \rho_0 \times S dx \times \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \vec{u}_x = -\frac{\partial P}{\partial x} \times S dx \vec{u}_x \quad (72)$$

$$\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} \quad (73)$$

3. Si l'on considère  $P$  comme dépendant de  $\rho(x, t)$ , on convient que :

$$P = P(\rho) \Rightarrow dP = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_\rho d\rho = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_\rho \times \frac{\partial \rho}{\partial x} dx$$

c'est-à-dire :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial x} = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_\rho \times \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

où l'identité (71) fournit :

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \times \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Ce faisant, l'équation (73) devient aussi :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0} \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_\rho \times \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}}} \quad (74)$$

## II- Approximation acoustique

1. Dans le cadre de l'approximation acoustique :

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1 \Rightarrow \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-2} \simeq 1 \text{ et } \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} \simeq \rho_0$$

Ce faisant, l'équation (74) se simplifie :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \text{ où } c_0 = \sqrt{\left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{\rho_0}}$$

2. Cette équation de propagation admet pour solution générale :

$$u(x, t) = f(c_0 t - x) + g(c_0 t + x)$$

où  $f(c_0 t - x)$  décrit une onde plane progressive tandis que  $g(c_0 t + x)$  décrit une onde plane régressive.

Considérons deux points,  $M(x)$  et  $N(x + dx)$  (ou  $dx > 0$ ) atteints par l'onde acoustique aux dates respectives  $t$  et  $t + dt > t$ . En l'absence de phénomène dispersif, le son se déplace à une vitesse  $v_{\text{son}} = \frac{dx}{dt}$ , qui assure l'identité :

$$u(x, t) = u(x + dx, t + dt) \Rightarrow f(c_0 t - x) = f(c_0 t + c_0 dt - x - dx)$$

Cette égalité devant être vérifiée quelle que soit la fonction  $f$ , il s'ensuit que :

$$c_0 dt = dx \Rightarrow c_0 = \frac{dx}{dt} = v_{\text{son}}$$

La pression  $P$  étant le rapport d'une force par une surface, il s'ensuit que :

$$[P] = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \times \text{m}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

tandis que :

$$\begin{aligned} [\rho] = \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} &\Rightarrow \left[ \frac{dP}{d\rho} \right] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}} = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \\ &\Rightarrow [c_0] = \left[ \frac{dP}{d\rho} \right]^{1/2} = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

3. La définition du coefficient de compressibilité :

$$\chi = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \Rightarrow \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_{\rho_0} = \frac{1}{\chi \rho_0}$$

conduit à :

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\chi \rho_0}}$$

4. Une masse  $m$  d'air contient un nombre  $n$  de moles de molécules qui occupent un volume  $V$  donné par l'équation d'état des gaz parfaits :

$$PV = nRT = \frac{mRT_0}{M}$$

où  $M$  désigne la masse molaire de l'air. Aussi :

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT_0} \Rightarrow \frac{d\rho}{dP} = \frac{M}{RT_0}$$

mène à :

$$\chi_T = \frac{1}{\rho_0} \times \frac{d\rho}{dP} = \frac{RT_0}{MP_0} \times \frac{M}{RT_0} \Rightarrow \chi_T = \frac{1}{P_0}$$

5. Si la perturbation acoustique est un phénomène isotherme, il se propage alors à la vitesse :

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\chi_T \rho_0}} = \sqrt{\frac{P_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{1,013 \cdot 10^5}{1,2933}} \Rightarrow c_0 \simeq 280 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La Loi de Reech :  $\chi_{\text{adia}} = \frac{1}{\gamma} \chi_T$  permet de trouver la vitesse du son dans le cas où les perturbations seraient adiabatiques :

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\chi_{\text{adia}} \rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma}{\chi_T \rho_0}} = \sqrt{\frac{1,4 \times 1,013 \cdot 10^5}{1,293 \cdot 3}} \Rightarrow 331 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Ce modèle paraît mieux adapté que le modèle isotherme pour interpréter la valeur numérique expérimentale de la célérité du son :  $c_0 \simeq 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

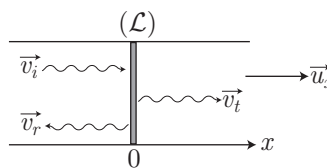
6. Les valeurs numériques fournies pour l'eau donnent pour vitesse de propagation du son dans ce milieu :

$$c_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\chi \rho_0}} = \sqrt{\frac{1}{4,6 \cdot 10^{-10} \times 998}} \Rightarrow c_0 = 1476 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

### ● 135 ————— Concours Centrale

L'onde acoustique en  $(\mathcal{L})$  se compose :

- d'une onde incidente, de vitesse  $\vec{v}_i = v_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \vec{u}_x$  et de surpression  $p_i$  ;
- d'une onde réfléchie, de vitesse  $\vec{v}_r = -r v_0 e^{j(\omega t + k_1 x)}$  et une surpression  $p_r$  ;
- d'une onde transmise, caractérisée par  $\vec{v}_t = \underline{t} v_0 e^{j(\omega t - k_2 x)}$  et une surpression  $p_t$



où l'équation de d'Alembert impose :  $\omega = k_1 c_1 = k_2 c_2$  (la pulsation  $\omega$  des ondes est la même dans les deux milieux). En  $x = 0$ , le mouvement de  $(\mathcal{L})$  est décrit par une

vitesse d'écoulement  $\vec{v} = \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_{x=0} \vec{e}_x$  qui ne peut subir de discontinuité :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \vec{e}_x &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \vec{e}_x \\ &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left[ v_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} + \underline{r} v_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \underline{t} v_0 e^{j(\omega t - k_2 x)} \right] \\ &\Rightarrow v_0 e^{j\omega t} \times (1 + \underline{r}) = v_0 \underline{t} e^{j\omega t} \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$1 + \underline{r} = \underline{t} \quad (75)$$

La relation entre la surpression et la vitesse d'écoulement :  $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad} p$  devient,

en posant  $\vec{v} = v \vec{u}_x$  et  $p = p(x, t) : \rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$ . Par conséquent :

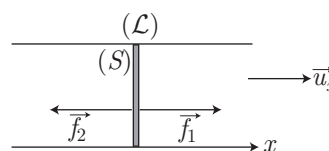
$$\begin{aligned} \frac{\partial p_i}{\partial x} &= -\rho_1 \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\rho_1 j \omega v_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \Rightarrow p_i = \frac{-\rho_1 j \omega v_0}{-j k_1} e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ &\Rightarrow p_i = \rho_1 c_1 v_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} \text{ car } \omega = k_1 c_1 \\ \frac{\partial p_r}{\partial x} &= -\rho_1 \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\rho_1 \underline{r} v_0 j \omega e^{j(\omega t + k_1 x)} \Rightarrow p_r = \frac{-\rho_1 \underline{r} v_0 j \omega}{j k_1} e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ &\Rightarrow p_r = -\rho_1 c_1 \underline{r} v_0 e^{j(\omega t + k_1 x)} \\ \frac{\partial p_t}{\partial x} &= -\rho_2 \frac{\partial v_t}{\partial t} = -\rho_2 \underline{t} v_0 j \omega e^{j(\omega t - k_2 x)} \Rightarrow p_t = \frac{-\rho_2 \underline{t} v_0 j \omega}{-k_2 j} e^{j(\omega t - k_2 x)} \\ &\Rightarrow p_t = \rho_2 c_2 \underline{t} v_0 e^{j(\omega t + k_2 x)} \end{aligned}$$

Ainsi, la membrane  $\mathcal{L}$  est soumise, de part et d'autre de son plan ( $x = 0$ ), aux forces de pression :

$$\vec{f}_1 = [p_i(0, t) + p_r(0, t)] S \vec{u}_x$$

et :

$$\vec{f}_2 = -p_t(0, t) S \vec{u}_x$$



de résultante :

$$\vec{R} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = [\rho_1 c_1 v_0 e^{j\omega t} - \rho_1 c_1 \underline{r} v_0 e^{j\omega t} - \rho_2 c_2 \underline{t} v_0 e^{j\omega t}] S \vec{u}_x$$

Or, son accélération :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_{\mathcal{L}} &= \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v}_i + \vec{v}_r)_{(x=0)} = \left( \frac{\partial \vec{v}_t}{\partial t} \right)_{(x=0)} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [v_0 e^{j(\omega t - k_1 x)} + \underline{r} v_0 e^{j(\omega t + k_1 x)}]_{(x=0)} \vec{u}_x \\ &= j\omega v_0 (1 + \underline{r}) e^{j\omega t} \vec{u}_x \end{aligned}$$

est liée à  $\vec{R}$  par la loi fondamentale de la dynamique, où  $\delta m = S \sigma$  désigne la masse de ( $\mathcal{L}$ ) :

$$\begin{aligned} \delta m \vec{\gamma}_{\mathcal{L}} = \vec{R} &\Rightarrow = \sigma S j\omega v_0 (1 + \underline{r}) e^{j\omega t} \vec{u}_x = S v_0 (\rho_1 c_1 - \rho_1 c_1 \underline{r} - \rho_2 c_2 \underline{t}) e^{j\omega t} \vec{u}_x \\ &\Rightarrow j\omega \sigma (1 + \underline{r}) = \rho_1 c_1 (1 - \underline{r}) - \rho_2 c_2 \underline{t} \end{aligned}$$

Compte tenu de l'identité (75), cette équation devient :

$$\begin{aligned} j\omega \sigma (1 + \underline{r}) &= \rho_1 c_1 (1 - \underline{r}) - \rho_2 c_2 (1 + \underline{r}) \\ &\Rightarrow \underline{r} (j\omega \sigma + \rho_1 c_1 + \rho_2 c_2) = \rho_1 c_1 - \rho_2 c_2 - j\omega \sigma \\ &\Rightarrow \underline{r} = \frac{\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2 - j\omega \sigma}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 + j\omega \sigma} \end{aligned}$$

De même, le résultat (75) fournit :

$$\underline{t} = 1 + \underline{r} = \frac{2 \rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2 + j\omega \sigma}$$

Considérons les phénomènes suivants, décrits en notation complexe :

- l'onde incidente arrive en  $x = 0$  avec une vitesse d'écoulement complexe :

$$\vec{v}_i = \underline{v}_i \vec{e}_x = v_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_x$$

- une partie de cette onde est réfléchiée, avec une vitesse d'écoulement complexe :

$$\vec{v}_r = \underline{r} v_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_x$$

- l'onde transmise dans le compartiment de section  $S$  a pour vitesse d'écoulement complexe :

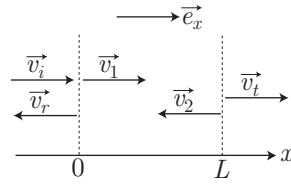
$$\vec{v}_1 = \underline{\alpha} v_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_x$$

- l'onde réfléchiée sur le plan d'abscisse  $x = L$  a pour vitesse d'écoulement complexe :

$$\vec{v}_2 = \underline{\beta} v_0 e^{j(\omega t + kx)} \vec{e}_x$$

- le facteur de transmission  $\underline{t}$  est défini à partir de la vitesse d'écoulement complexe pour  $x > L$  :

$$\vec{v}_t = \underline{t} v_0 e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_x$$



Ce faisant, la vitesse d'écoulement complexe  $\vec{v}$  s'exprime en fonction de l'abscisse de cet écoulement :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_i + \vec{v}_r = v_0 e^{j\omega t} [e^{-jkx} + \underline{r} e^{jkx}] \vec{e}_x \text{ pour } x < 0 \\ \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = v_0 e^{j\omega t} [\underline{\alpha} e^{-jkx} + \underline{\beta} e^{jkx}] \vec{e}_x \text{ pour } 0 < x < L \\ \vec{v} = \vec{v}_t = \underline{t} v_0 e^{j\omega t} e^{-jkx} \vec{e}_x \text{ pour } x > L \end{cases}$$

La continuité du débit se traduit alors :

- en  $x = 0$  par :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [s\vec{v}] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [S\vec{v}] \Rightarrow s(1 + \underline{r}) = S(\underline{\alpha} + \underline{\beta})$$

soit encore :

$$\underline{\alpha} + \underline{\beta} = \rho(1 + \underline{r}) \text{ où } \rho = \frac{s}{S} \tag{76}$$

- en  $x = L$  par :

$$\lim_{x \rightarrow L^-} [S\vec{v}] = \lim_{x \rightarrow L^+} [s\vec{v}] \Rightarrow S[\underline{\alpha} e^{-jkL} + \underline{\beta} e^{jkL}] = s\underline{t} e^{-jkL}$$

c'est-à-dire :

$$\underline{\alpha} e^{-j\phi} + \underline{\beta} e^{j\phi} = \rho \underline{t} e^{-j\phi} \tag{77}$$

En outre, en appelant  $Z = \rho c$  le produit de la masse volumique du fluide par la célérité de l'onde, on rappelle que :

$$\begin{cases} p = Z \times v \text{ pour une onde progressive} \\ p = -Z \times v \text{ pour une onde régressive} \end{cases}$$

Or,  $Z = \rho \times c$  étant une grandeur indépendante de  $x$ , il s'ensuit que la surpression  $p(x, t)$  admet pour images complexes :

$$\begin{cases} \underline{p} = Z v_0 e^{j\omega t} [e^{-jkx} - \underline{r} e^{jkx}] & \text{pour } x < 0 \\ \underline{p} = Z v_0 e^{j\omega t} [\underline{\alpha} e^{-jkx} - \underline{\beta} e^{jkx}] & \text{pour } 0 < x < L \\ \underline{p} = Z \underline{t} v_0 e^{j\omega t} e^{-jkx} \end{cases}$$

Enfin, la continuité de la surpression impose :

- en  $x = 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (\underline{p}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\underline{p}) \Rightarrow 1 - \underline{r} = \underline{\alpha} - \underline{\beta} \quad (78)$$

- en  $x = L$  :

$$\lim_{x \rightarrow L^-} (\underline{p}) = \lim_{x \rightarrow L^+} (\underline{p}) \Rightarrow \underline{\alpha} e^{-jkL} - \underline{\beta} e^{jkL} = \underline{t} e^{-jkL} \quad (79)$$

$$\Rightarrow \underline{\alpha} e^{-j\phi} - \underline{\beta} e^{j\phi} = \underline{t} e^{-j\phi} \quad (80)$$

Les équations (76) et (78) génèrent le système d'équations :

$$\begin{cases} \underline{\alpha} + \underline{\beta} = \rho (1 + \underline{r}) \\ \underline{\alpha} - \underline{\beta} = 1 - \underline{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\alpha} + \underline{\beta} = \rho (1 + \underline{r}) \\ \rho \underline{\alpha} - \rho \underline{\beta} = \rho (1 - \underline{r}) \end{cases} \\ \Rightarrow \underline{\alpha} (1 + \rho) + \underline{\beta} (1 - \rho) = 2\rho$$

De même, les équations (77) et (80) génèrent le système suivant :

$$\begin{cases} \underline{\alpha} e^{-j\phi} + \underline{\beta} e^{j\phi} = \rho \underline{t} e^{-j\phi} \\ \underline{\alpha} e^{-j\phi} - \underline{\beta} e^{j\phi} = \underline{t} e^{-j\phi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\alpha} = \frac{\underline{t}}{2} (\rho + 1) \\ \underline{\beta} = \frac{\underline{t}}{2} (\rho - 1) e^{-2j\phi} \end{cases}$$

Par suite, l'équation (81) s'écrit aussi :

$$\frac{\underline{t}}{2} [(1 + \rho)^2 - (1 - \rho)^2 e^{-2j\phi}] = 2\rho$$

soit encore :

$$\begin{aligned} 2\rho &= \frac{\underline{t}}{2} [(1 + \rho^2) (1 - e^{-2j\phi}) + 2\rho (1 + e^{-2j\phi})] \\ &= \frac{\underline{t} e^{-j\phi}}{2} [(1 + \rho^2) (e^{j\phi} - e^{-j\phi}) + 2\rho (e^{j\phi} + e^{-j\phi})] \\ &= \frac{\underline{t} e^{-j\phi}}{2} [(1 + \rho^2) \times 2j \sin \phi + 2\rho \times 2 \cos \phi] \\ &= \underline{t} e^{-j\phi} [2\rho \cos \phi + j (1 + \rho^2) \sin \phi] \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\underline{t} = \frac{2\rho e^{j\phi}}{2\rho \cos \phi + j (1 + \rho^2) \sin \phi} \text{ où } \rho = \frac{s}{S}$$



La valeur moyenne du vecteur densité de courant d'énergie incidente vaut :

$$\langle \vec{I}_i \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_i \vec{v}_i^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ Z v_0 e^{j(\omega t - kx)} \times v_0 e^{-j(\omega t - kx)} \right\} \vec{e}_x = \frac{Z v_0^2}{2} \vec{e}_x$$

tandis que celle relative à l'énergie transmise vaut :

$$\begin{aligned} \langle \vec{I}_t \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ p_t \vec{v}_t^* \} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ Z \underline{t} v_0 e^{j(\omega t - kx)} \times \underline{t}^* v_0 e^{-j(\omega t - kx)} \right\} \\ &= \frac{Z v_0^2}{2} |\underline{t}|^2 \vec{e}_x = |\underline{t}|^2 \langle \vec{I}_i \rangle \end{aligned}$$

Aussi, la définition du facteur  $T$  de transmission en énergie :

$$\langle \vec{I}_t \rangle = T \langle \vec{I}_i \rangle$$

conduit à :

$$\begin{aligned} T = |\underline{t}|^2 &= \frac{4\rho^2}{4\rho^2 \cos^2 \phi + (1 + \rho^2)^2 \sin^2 \phi} \\ &= \frac{4\rho^2}{4\rho^2 (1 - \sin^2 \phi) + (1 + \rho^2)^2 \sin^2 \phi} \\ \Rightarrow T &= \frac{4\rho^2}{4\rho^2 + (1 - \rho^2)^2 \sin^2 \phi} \text{ avec } \rho = \frac{s}{S} \end{aligned}$$

### ● 136 ————— Concours des Ponts et Chaussées

1. Une tranche de fluide, de section  $S$  et comprise, au repos, entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , présente une masse  $\delta m = \rho_0 S dx$  et une vitesse  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$  qui lui confèrent l'énergie cinétique :

$$\delta \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho_0 S dx \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{\delta \mathcal{E}_c}{dx} = \frac{1}{2} \rho_0 S \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$$

2. Soit  $V$  le volume de la tranche de fluide, qui passe de  $V_0$  à  $V$  sous l'influence d'une pression  $P$ . Le travail reçu par cette tranche pendant la transformation vaut :

$$\delta \mathcal{E}_p = \int_{V_0}^V -P dV$$

Or, au cours de la transformation, la masse  $\delta m$  de cette tranche de fluide ne varie pas, ce qui s'exprime par :

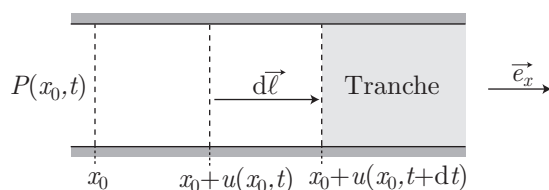
$$\begin{aligned} \delta m = \rho V = \rho_0 V_0 &\Rightarrow V = \frac{\rho_0 V_0}{\rho} \Rightarrow dV = -\frac{\rho_0 V_0}{\rho^2} d\rho \\ &\Rightarrow dV = -\rho_0 S dx \times \frac{d\rho}{\rho^2} \text{ car } V_0 = S dx \end{aligned}$$

Par suite :

$$\delta \mathcal{E}_p = \left[ \rho_0 \int_{\rho_0}^{\rho} P(\rho) \frac{d\rho}{\rho^2} \right] S dx \Rightarrow \varepsilon_p = \frac{\delta \mathcal{E}_p}{dx} = \rho_0 S \int_{\rho_0}^{\rho} P(\rho) \frac{d\rho}{\rho^2}$$

3. La tranche, située en  $x > x_0$  reçoit de la part de celle située en  $x < x_0$  un travail :  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ , au cours d'un déplacement élémentaire :

$$d\vec{\ell} = [x_0 + u(x_0, t + dt) - x_0 - u(x_0, t)] \vec{e}_x = \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial t} dt \vec{e}_x = \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_0} dt \vec{u}_x$$



Or, puisque :

$$\vec{F} = P(x_0, t) S \vec{u}_x$$

il s'ensuit que :

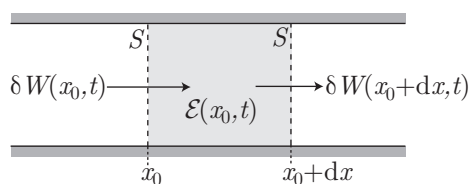
$$\delta W = P(x_0, t) \times \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_0} \times S dt \Rightarrow I(x_0, t) = \frac{\delta W}{S dt} = P(x_0, t) \times \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x_0}$$

4. Considérons une tranche de fluide, comprise entre les abscisses  $x_0$  et  $x_0 + dx$ . Son énergie varie, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , de la quantité :

$$d\mathcal{E} = \mathcal{E}(x_0, t + dt) - \mathcal{E}(x_0, t) = [\varepsilon(x_0, t + dt) - \varepsilon(x_0, t)] \times dx = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \times dx dt$$

Dans le même temps, cette tranche reçoit de l'énergie, sous forme de travail de pression de la part du fluide se trouvant de part et d'autre de la tranche :

$$\delta \mathcal{E} = \delta W(x_0, t) - \delta W(x_0 + dx, t) = [I(x_0, t) - I(x_0 + dx, t)] \times S dt = -\frac{\partial I}{\partial x} \times S dx dt$$



La conservation de l'énergie impose alors :

$$d\mathcal{E} = \delta \mathcal{E} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \times dx dt = -\frac{\partial I}{\partial x} \times S dx dt \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + S \frac{\partial I}{\partial x} = 0$$

5. Étant donné qu'à l'ordre 1 en  $\frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \ll 1$  dans le cadre de l'approximation

acoustique) :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = \rho \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{-1} \simeq \rho_0 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

il s'ensuit que :

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Quant à la définition de la surpression :  $p = P - P_0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$ , elle permet de présenter l'équation de Newton sous la forme :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (81)$$

Enfin, la variation de pression :  $dP = P - P_0 = p$  se calcule à l'aide du coefficient de compressibilité  $\chi_S$  :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \Rightarrow dP = \frac{1}{\chi_S} \times \frac{d\rho}{\rho}$$

où la masse volumique varie de  $\rho_0$  à  $\rho$  pendant que la pression varie de  $P_0$  à  $P$ . C'est pourquoi :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = s \Rightarrow p = \frac{1}{\chi_S} \times s$$

6. Soit  $X = t - \frac{x}{c_0}$  le paramètre permettant d'écrire :

$$v_+ \left(t - \frac{x}{c_0}\right) = v(X) \Rightarrow \frac{\partial v_+}{\partial t} = \frac{dv}{dX} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{dv}{dX}$$

Sachant, en outre, que  $v_+ = \frac{\partial u_+}{\partial t}$ , l'équation (81) devient :

$$-\frac{\partial p_+}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v_+}{\partial t} = \rho_0 \frac{dv}{dX} \Rightarrow \frac{\partial p_+}{\partial x} = -\rho_0 \frac{dv}{dX}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_+}{\partial x} &= \frac{dv}{dX} \frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{1}{c_0} \frac{dv}{dX} \Rightarrow \frac{dv}{dX} = -c_0 \frac{\partial v_+}{\partial x} \\ &\Rightarrow \frac{\partial p_+}{\partial x} = \rho_0 c_0 \frac{\partial v_+}{\partial x} \end{aligned}$$

Il existe donc, entre  $p_+$  et  $v_+$ , la relation :

$$p_+ = Z v_+ \text{ avec } Z = \rho_0 c_0 \quad (82)$$

7. Les ondes progressives dans le sens des  $x$  décroissants sont caractérisées par une surpression  $p_-$  et une vitesse :

$$v_- = v(Y) \text{ où } Y = t + \frac{x}{c_0} \Rightarrow \frac{\partial v_-}{\partial t} = \frac{dv}{dY}$$

Aussi, l'équation (81) équivaut à :

$$-\frac{\partial p_-}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v_-}{\partial t} = \rho_0 \frac{dv}{dY}$$

où :

$$\frac{\partial v_-}{\partial x} = \frac{dv}{dY} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{c_0} \frac{dv}{dY} \Rightarrow \frac{\partial p_-}{\partial x} = -\rho_0 c_0 \frac{\partial v_-}{\partial x} \Rightarrow p_- = -Z v_-$$

8. La pression dans le fluide vaut  $P = P_0 + p$ , tandis que la vitesse d'écoulement :  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$  vérifie la relation (82) :  $v = \frac{1}{Z} p$ . Ce faisant, l'intensité instantanée devient :

$$I(x, t) = P(x, t) \times \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow I(x, t) = (P_0 + p) \times \frac{1}{Z} p$$

9. En choisissant  $p = p_m \cos(\omega t - \varphi)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} I(x, t) &= \frac{P_0}{Z} p_m \cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{Z} p_m^2 \times \cos^2(\omega t - \varphi) \\ \Rightarrow \langle I \rangle &= \frac{P_0}{Z} p_m \langle \cos(\omega t - \varphi) \rangle + \frac{p_m^2}{Z} \langle \cos^2(\omega t - \varphi) \rangle \end{aligned}$$

avec :

$$\langle \cos(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t - \varphi) dt = 0 \text{ car } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

et :

$$\langle \cos^2(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow \langle I \rangle = \frac{p_m^2}{2Z}$$

## ● 137 ————— Concours des Ponts et Chaussées

1. Une tranche de fluide, de section  $S$  et comprise, au repos, entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , présente une masse  $\delta m = \rho_0 S dx$  et une vitesse  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$  qui lui confèrent l'énergie cinétique :

$$\delta \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \delta m v^2 = \frac{1}{2} \rho_0 S dx \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{\delta \mathcal{E}_c}{dx} = \frac{1}{2} \rho_0 S \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$$

2. Soit  $V$  le volume de la tranche de fluide, qui passe de  $V_0$  à  $V$  sous l'influence d'une pression  $P$ . Le travail reçu par cette tranche pendant la transformation vaut :

$$\delta \mathcal{E}_p = \int_{V_0}^V -P dV$$

Or, au cours de la transformation, la masse  $\delta m$  de cette tranche de fluide ne varie pas, ce qui s'exprime par :

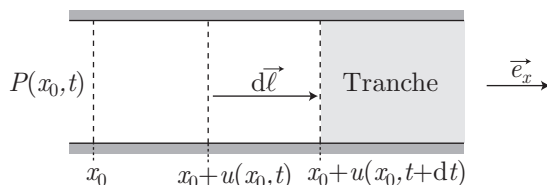
$$\begin{aligned} \delta m = \rho V = \rho_0 V_0 &\Rightarrow V = \frac{\rho_0 V_0}{\rho} \Rightarrow dV = -\frac{\rho_0 V_0}{\rho^2} d\rho \\ &\Rightarrow dV = -\rho_0 S dx \times \frac{d\rho}{\rho^2} \text{ car } V_0 = S dx \end{aligned}$$

Par suite :

$$\delta \mathcal{E}_p = \left[ \rho_0 \int_{\rho_0}^{\rho} P(\rho) \frac{d\rho}{\rho^2} \right] S dx \Rightarrow \varepsilon_p = \frac{\delta \mathcal{E}_p}{dx} = \rho_0 S \int_{\rho_0}^{\rho} P(\rho) \frac{d\rho}{\rho^2}$$

3. La tranche, située en  $x > x_0$  reçoit de la part de celle située en  $x < x_0$  un travail :  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ , au cours d'un déplacement élémentaire :

$$d\vec{\ell} = [x_0 + u(x_0, t + dt) - x_0 - u(x_0, t)] \vec{e}_x = \frac{\partial u(x_0, t)}{\partial t} dt \vec{e}_x = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x_0} dt \vec{u}_x$$



Or, puisque :

$$\vec{F} = P(x_0, t) S \vec{u}_x$$

il s'ensuit que :

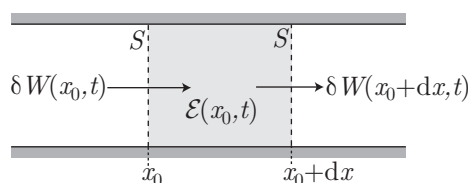
$$\delta W = P(x_0, t) \times \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x_0} \times S dt \Rightarrow I(x_0, t) = \frac{\delta W}{S dt} = P(x_0, t) \times \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{x_0}$$

4. Considérons une tranche de fluide, comprise entre les abscisses  $x_0$  et  $x_0 + dx$ . Son énergie varie, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , de la quantité :

$$d\mathcal{E} = \mathcal{E}(x_0, t + dt) - \mathcal{E}(x_0, t) = [\varepsilon(x_0, t + dt) - \varepsilon(x_0, t)] \times dx = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \times dx dt$$

Dans le même temps, cette tranche reçoit de l'énergie, sous forme de travail de pression de la part du fluide se trouvant de part et d'autre de la tranche :

$$\delta \mathcal{E} = \delta W(x_0, t) - \delta W(x_0 + dx, t) = [I(x_0, t) - I(x_0 + dx, t)] \times S dt = -\frac{\partial I}{\partial x} \times S dx dt$$



**CORRIGÉS**

La conservation de l'énergie impose alors :

$$d\mathcal{E} = \delta\mathcal{E} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \times dx dt = -\frac{\partial I}{\partial x} \times S dx dt \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + S \frac{\partial I}{\partial x} = 0$$

5. Étant donné qu'à l'ordre 1 en  $\frac{\partial u}{\partial x}$  ( $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1$  dans le cadre de l'approximation acoustique) :

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \frac{\partial u}{\partial x}} = \rho_0 \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^{-1} \simeq \rho_0 \left( 1 - \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

il s'ensuit que :

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Quant à la définition de la surpression :  $p = P - P_0 \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$ , elle permet de présenter l'équation de Newton sous la forme :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (83)$$

Enfin, la variation de pression :  $dP = P - P_0 = p$  se calcule à l'aide du coefficient de compressibilité  $\chi_S$  :

$$\chi_S = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dP} \Rightarrow dP = \frac{1}{\chi_S} \times \frac{d\rho}{\rho}$$

où la masse volumique varie de  $\rho_0$  à  $\rho$  pendant que la pression varie de  $P_0$  à  $P$ . C'est pourquoi :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = s \Rightarrow p = \frac{1}{\chi_S} \times s$$

6. Soit  $X = t - \frac{x}{c_0}$  le paramètre permettant d'écrire :

$$v_+ \left( t - \frac{x}{c_0} \right) = v(X) \Rightarrow \frac{\partial v_+}{\partial t} = \frac{dv}{dX} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{dv}{dX}$$

Sachant, en outre, que  $v_+ = \frac{\partial u_+}{\partial t}$ , l'équation (83) devient :

$$-\frac{\partial p_+}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v_+}{\partial t} = \rho_0 \frac{dv}{dX} \Rightarrow \frac{\partial p_+}{\partial x} = -\rho_0 \frac{dv}{dX}$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_+}{\partial x} &= \frac{dv}{dX} \frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{1}{c_0} \frac{dv}{dX} \Rightarrow \frac{dv}{dX} = -c_0 \frac{\partial v_+}{\partial x} \\ &\Rightarrow \frac{\partial p_+}{\partial x} = \rho_0 c_0 \frac{\partial v_+}{\partial x} \end{aligned}$$

Il existe donc, entre  $p_+$  et  $v_+$ , la relation :

$$p_+ = Z v_+ \text{ avec } Z = \rho_0 c_0 \quad (84)$$

7. Les ondes progressives dans le sens des  $x$  décroissants sont caractérisées par une surpression  $p_-$  et une vitesse :

$$v_- = v(Y) \text{ où } Y = t + \frac{x}{c_0} \Rightarrow \frac{\partial v_-}{\partial t} = \frac{dv}{dY}$$

Aussi, l'équation (83) équivaut à :

$$-\frac{\partial p_-}{\partial x} = \rho_0 \frac{\partial v_-}{\partial t} = \rho_0 \frac{dv}{dY}$$

où :

$$\frac{\partial v_-}{\partial x} = \frac{dv}{dY} \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{c_0} \frac{dv}{dY} \Rightarrow \frac{\partial p_-}{\partial x} = -\rho_0 c_0 \frac{\partial v_-}{\partial x} \Rightarrow p_- = -Z v_-$$

8. La pression dans le fluide vaut  $P = P_0 + p$ , tandis que la vitesse d'écoulement :  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$  vérifie la relation (84) :  $v = \frac{1}{Z} p$ . Ce faisant, l'intensité instantanée devient :

$$I(x, t) = P(x, t) \times \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow I(x, t) = (P_0 + p) \times \frac{1}{Z} p$$

9. En choisissant  $p = p_m \cos(\omega t - \varphi)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} I(x, t) &= \frac{P_0}{Z} p_m \cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{Z} p_m^2 \times \cos^2(\omega t - \varphi) \\ \Rightarrow \langle I \rangle &= \frac{P_0}{Z} p_m \langle \cos(\omega t - \varphi) \rangle + \frac{p_m^2}{Z} \langle \cos^2(\omega t - \varphi) \rangle \end{aligned}$$

avec :

$$\langle \cos(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t - \varphi) dt = 0 \text{ car } T = \frac{2\pi}{\omega}$$

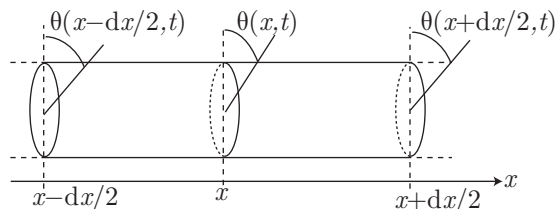
et :

$$\langle \cos^2(\omega t - \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \Rightarrow \langle I \rangle = \frac{p_m^2}{2Z}$$

● 138 **Concours de l'E.N.S.**

**I- Équation du mouvement et solutions générales**

1. Considérons une « tranche » de fil, de longueur  $dx$ , de centre situé à l'abscisse  $x$ .



Cet élément de fil est soumis à :

- à une torsion de la part de sa face située en  $x + \frac{dx}{2}$ , qui s'exprime par un couple de moment :

$$\mathcal{M}_1 = \frac{\mathcal{C}}{dx/2} \times \left[ \theta \left( x + \frac{dx}{2}, t \right) - \theta(x, t) \right] \text{ avec } dx \ll x \quad (85)$$

$$\simeq \frac{2\mathcal{C}}{dx} \times \left[ \frac{dx}{2} \times \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{dx^2}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] \quad (86)$$

- une torsion de la part de sa face située en  $x - \frac{dx}{2}$ , à l'origine d'un couple de moment :

$$\mathcal{M}_2 = \frac{\mathcal{C}}{dx/2} \times \left[ \theta \left( x - \frac{dx}{2} \right) - \theta(x, t) \right] \quad (87)$$

$$\simeq \frac{2\mathcal{C}}{dx} \times \left[ -\frac{dx}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{dx^2}{4} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right] \quad (88)$$

Le moment d'inertie de cet élément de fil valant  $\mathcal{C} dx$ , on peut lui appliquer le théorème du moment cinétique :

$$\mathcal{J} dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = \mathcal{C} dx \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

auquel cas l'équation de propagation de l'onde de torsion s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \text{ avec } v = \sqrt{\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{J}}} \quad (89)$$

2. (a) Considérons les variables  $X = t - \frac{x}{v}$  et  $Y = t + \frac{x}{v}$  permettant de poser :  $\theta(x, t) = \psi(X, Y)$ , où l'on supposera la fonction  $\psi(X, Y)$  régulière. Dans ces conditions, une variation  $dx$  de  $x$  et  $dt$  de  $t$  se traduit par une variation simultanée des fonctions  $\theta$  et  $\psi$  :

$$\begin{aligned} d\theta = d\psi &\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} dt + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\partial \psi}{\partial X} dX + \frac{\partial \psi}{\partial Y} dY \\ &\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} dt + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{\partial \psi}{\partial X} \times \left( dt - \frac{dx}{v} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \times \left( dt + \frac{dx}{v} \right) \\ &\Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial t} dt + \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) dt + \frac{1}{v} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) dx \end{aligned}$$

Ainsi se déduisent les lois de changement de variable :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial X} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \text{ et } \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \right)$$

d'où il découle que :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial X} + \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y}$$



et que :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} &= \frac{1}{v} \times \left[ \frac{\partial}{\partial Y} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial Y} - \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) - \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial Y} - \frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial X} \right) \right] \\ &= \frac{1}{v^2} \times \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} \right]\end{aligned}$$

Par conséquent, l'équation (89) impose :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X \partial Y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial X} \left( \frac{\partial \psi}{\partial Y} \right) = 0$$

ce qui montre que la fonction  $\frac{\partial \psi}{\partial Y}$  ne dépend pas de  $X$  ; on pourra noter :

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y} = K(Y)$$

Il existe donc une fonction  $F(X)$  de  $X$  seulement, telle que :

$$\psi(X, Y) = \int K(Y) dY + F(X)$$

tandis que la primitive de la fonction  $K(Y)$  peut être notée simplement  $G(Y)$ .  
Ce faisant :

$$\psi(X, Y) = F(X) + G(Y)$$

ce qui suffit à montrer que la solution générale de l'équation (89) se met sous la forme :

$$\theta(x, t) = \psi(X, Y) = F(X) + G(Y) \Rightarrow \theta(x, t) = F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

- (b) La fonction  $F\left(t - \frac{x}{v}\right)$  décrit la propagation dans le sens des  $x$  croissants d'une onde progressive plane, tandis que  $G\left(t + \frac{x}{v}\right)$  décrit la propagation d'une onde progressive plane dans le sens inverse ; d'une manière générale,  $\theta(x, t)$  est la superposition de ces deux types d'ondes.

3. (a) La « tranche » de fil précédemment décrite possède une énergie cinétique :

$$\delta \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} \mathcal{J} dx \times \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2$$

Considérons maintenant l'influence sur l'énergie potentielle des phénomènes de torsion :

- La face située à l'abscisse  $x + \frac{dx}{2}$  exerce un moment :

$$\mathcal{M}_1 \simeq \frac{2\mathcal{C}}{dx} \times \frac{dx}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{2\mathcal{C}}{dx} \times \Theta \text{ où } \Theta = \frac{dx}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

À ce moment est donc associé un travail :  $\delta W_1 = -\mathcal{M}_1 \times d\Theta$ , d'où est issue la variation d'énergie potentielle :

$$d\mathcal{E}_{p1} = -\delta W_1 = \frac{2\mathcal{C}}{dx} \times \Theta d\Theta$$

Il s'ensuit que la torsion produite par la face en  $x + \frac{dx}{2}$  est à l'origine de l'énergie potentielle :

$$\delta\mathcal{E}_{p1} = \frac{C}{dx} \times \Theta^2 = \frac{C}{dx} \times \left( \frac{dx}{2} \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{4} C dx \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2$$

- la face située à l'abscisse  $x - \frac{dx}{2}$  est à l'origine, pour les mêmes raisons, d'une énergie potentielle :

$$\delta\mathcal{E}_{p2} = \frac{1}{4} C dx \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2$$

Par suite, l'énergie potentielle de la « tranche » de fil vaut :

$$\delta\mathcal{E}_p = \delta\mathcal{E}_{p1} + \delta\mathcal{E}_{p2} = \frac{1}{2} C dx \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2$$

et, par conséquent, son énergie mécanique prend une valeur :

$$\delta\mathcal{E} = \delta\mathcal{E}_c + \delta\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \mathcal{J} dx \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} C dx \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2$$

à laquelle est associée une densité linéique d'énergie :

$$\varepsilon = \frac{\delta\mathcal{E}}{dx} = \frac{1}{2} \mathcal{J} \left( \frac{\partial\theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} C \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 \quad (90)$$

(b) De cette relation, il découle que :

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \mathcal{J} \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \frac{\partial\theta}{\partial t} + C \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial^2\theta}{\partial t \partial x}$$

où, conformément au résultat (89) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{C}{\mathcal{J}} \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \\ \Rightarrow \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} &= C \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \frac{\partial\theta}{\partial t} + C \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial^2\theta}{\partial t \partial x} \\ \Rightarrow \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} &= C \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Par suite, il existe une fonction  $\mathcal{G}(x, t)$  telle que :

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial x} = 0 \text{ avec } \mathcal{G}(x, t) = -C \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial\theta}{\partial t} \quad (91)$$

4. (a) En vertu de l'identité (90), lorsque  $\theta(x, t) = F(X)$ , avec  $X = t - \frac{x}{v}$ , la densité

d'énergie cinétique vaut :

$$\begin{aligned}\varepsilon_c &= \frac{1}{2} \mathcal{J} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \quad \text{où} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{dF}{dX} \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{dF}{dX} \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{J} \left( \frac{dF}{dX} \right)^2\end{aligned}$$

tandis que la densité d'énergie potentielle vaut :

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= \frac{1}{2} C \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \quad \text{où} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{dF}{dX} \frac{\partial X}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{dF}{dX} \\ &= \frac{1}{2} C \times \frac{1}{v^2} \left( \frac{dF}{dX} \right)^2 = \frac{1}{2} \mathcal{J} \left( \frac{dF}{dX} \right)^2 \quad \text{car} \quad v^2 = \frac{C}{\mathcal{J}}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_p = \frac{1}{2} \mathcal{J} \left( \frac{dF}{dX} \right)^2 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_p = \mathcal{J} \left( \frac{dF}{dX} \right)^2$$

(b) La fonction  $\mathcal{G}(x, t)$  vaut alors :

$$\mathcal{G}(x, t) = -C \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial t} = C \times \frac{1}{v} \frac{dF}{dX} \times \frac{dF}{dX} = \frac{C}{v} \left( \frac{dF}{dX} \right)^2$$

c'est-à-dire :

$$v^2 = \frac{C}{\mathcal{J}} \Rightarrow C = \mathcal{J} v^2 \Rightarrow \mathcal{G}(x, t) = \frac{\mathcal{J}}{v} \left( \frac{dF}{dX} \right)^2 = \varepsilon \times v$$

5. De la même manière, lorsque  $\theta(x, t) = G(Y)$  où  $Y = t + \frac{x}{v}$  :

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2} \mathcal{J} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \quad \text{où} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{dG}{dY} \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{1}{2} \mathcal{J} \left( \frac{dG}{dY} \right)^2$$

et :

$$\begin{aligned}\varepsilon_p &= \frac{1}{2} C \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \quad \text{où} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{v} \frac{dG}{dY} \\ \Rightarrow \varepsilon_p &= \frac{1}{2} \times \frac{C}{v^2} \left( \frac{dG}{dY} \right)^2 = \frac{1}{2} \mathcal{J} \left( \frac{dG}{dY} \right)^2 \quad \text{car} \quad v^2 = \frac{C}{\mathcal{J}}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\varepsilon_c = \varepsilon_p = \frac{1}{2} \mathcal{J} \left( \frac{dG}{dY} \right)^2 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_p = \mathcal{J} \left( \frac{dG}{dY} \right)^2$$

Quant à la fonction  $\mathcal{G}(x, t) = -\mathcal{C} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial t}$ , elle vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x, t) &= -\mathcal{C} \times \frac{1}{v} \frac{dG}{dY} \times \frac{dG}{dY} = -\frac{\mathcal{C}}{v} \left( \frac{dG}{dY} \right)^2 \\ &= -\mathcal{J} v \left( \frac{dG}{dY} \right)^2 \text{ car } \mathcal{C} = \mathcal{J} \times v^2\end{aligned}$$

en raison de quoi :

$$\mathcal{G}(x, t) = -\varepsilon \times v$$

6. En choisissant maintenant la fonction :

$$\begin{aligned}\theta(x, t) &= F\left(t - \frac{x}{v}\right) + G\left(t + \frac{x}{v}\right) = F(X) + G(Y) \\ &\text{avec } X = t - \frac{x}{v} \text{ et } Y = t + \frac{x}{v}\end{aligned}$$

les dérivées de  $\theta$  s'écrivent :

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{dF}{dX} \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{dG}{dY} \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{1}{v} \frac{dF}{dX} + \frac{1}{v} \frac{dG}{dY}$$

et :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{dF}{dX} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{dG}{dY} \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{dF}{dX} + \frac{dG}{dY}$$

Aussi, la densité linéique d'énergie vaut-elle :

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{1}{2} \mathcal{J} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \mathcal{C} \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{J} \left( \frac{dF}{dX} + \frac{dG}{dY} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\mathcal{C}}{v^2} \left( \frac{dG}{dY} - \frac{dF}{dX} \right)^2 \text{ où } \frac{\mathcal{C}}{v^2} = \mathcal{J} \\ \Rightarrow \varepsilon &= \mathcal{J} \left( \frac{dF}{dX} \right)^2 + \mathcal{J} \left( \frac{dG}{dY} \right)^2\end{aligned}$$

tandis que la fonction  $\mathcal{G}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(x, t) &= -\mathcal{C} \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\mathcal{C} \times \left( \frac{1}{v} \frac{dG}{dY} - \frac{1}{v} \frac{dF}{dX} \right) \times \left( \frac{dG}{dY} + \frac{dF}{dX} \right) \\ &= \frac{\mathcal{C}}{v} \left[ \left( \frac{dG}{dY} \right)^2 - \left( \frac{dF}{dX} \right)^2 \right] \\ \Rightarrow \mathcal{G}(x, t) &= v \times \left[ \mathcal{J} \left( \frac{dG}{dY} \right)^2 - \mathcal{J} \left( \frac{dF}{dX} \right)^2 \right]\end{aligned}$$

Dans ces conditions, la fonction  $\varepsilon$  ne s'exprime plus d'une manière simple en fonction de  $\mathcal{G}$ .

**II- Traversée d'une discontinuité**

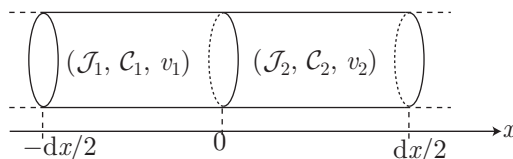
1. (a) Lorsque l'onde incidente atteint l'abscisse  $x = 0$ , elle génère une onde réfléchie dans la région (1) et une onde transmise dans le milieu (2).
- (b) L'onde incidente est décrite par la fonction  $F\left(x - \frac{x}{v_1}\right)$ , l'onde réfléchie dans le milieu (1) par la fonction  $G\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$  et l'onde transmise dans le milieu (2) par la fonction  $H\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$ . Quant à la fonction  $K\left(t + \frac{x}{v_2}\right)$ , elle décrit une onde qui se propagerait dans le milieu (2) vers le milieu (1). Or, l'énoncé précise que le milieu (2) est semi-infini, ce qui interdit toute réflexion dans le milieu (2). C'est pourquoi :

$$K\left(t + \frac{x}{v_2}\right) = 0$$

En outre, à l'abscisse  $x = 0$ , la fonction  $\theta(x, t)$  ne peut subir de discontinuité tant que le fil n'est pas rompu. Cette contrainte se traduit par :

$$\theta_1(0, t) = \theta_2(0, t) \Rightarrow F(t) + G(t) = H(t) \quad (92)$$

Considérons dès lors une « tranche » de fil, centrée en  $x = 0$ , et dont les faces se trouvent aux abscisses respectives  $\frac{dx}{2}$  et  $-\frac{dx}{2}$ , dans les conditions (1) et (2).



Le moment cinétique de cet élément de fil valant :  $L = (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) \frac{dx}{2} \frac{\partial \theta}{\partial t}$ , le théorème du moment cinétique s'y traduit par l'équation :

$$(\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) \frac{dx}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\mathcal{M}_1 - \mathcal{M}_2$$

où les moments  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  sont donnés par les identités (86) et (88) (attention :  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  désignent les moments des couples dûs aux torsions dans les milieux (1) et (2) respectivement) :

$$\mathcal{M}_2 \simeq -\frac{2\mathcal{C}_2}{dx} \times \frac{dx}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{dx/2} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_1 \simeq \frac{2\mathcal{C}_1}{dx} \times \frac{dx}{2} \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{-dx/2}$$

Par suite, le théorème du moment cinétique a pour conséquence :

$$\mathcal{C}_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \Big|_{dx/2} - \mathcal{C}_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \Big|_{-dx/2} = (\mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2) \frac{dx}{2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

Notamment, lorsque  $dx$  tend vers zéro :

$$C_1 \left. \frac{\partial \theta_1}{\partial x} \right|_0 = C_2 \left. \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \right|_0$$

soit encore :

$$\frac{C_1}{v_1} [-F'(t, 0) + G'(t, 0)] = -\frac{C_2}{v_2} H'(t, 0)$$

Or, en remarquant que :

$$v = \sqrt{\frac{C}{J}} \Rightarrow v^2 = \frac{C}{J} \Rightarrow \frac{C}{v} = vJ = Z$$

cette équation s'écrit aussi :

$$Z_1 \times [G'(t, 0) - F'(t, 0)] = -Z_2 \times H'(t, 0)$$

c'est-à-dire, après intégration par rapport à  $t$  :

$$Z_1 \times [G(t, 0) - F(t, 0)] = -Z_2 \times H(t, 0) \quad (93)$$

2. (a) Les résultats (92) et (93) composent le système suivant :

$$\begin{cases} Z_1 \times (G - F) = -Z_2 \times H \\ F + G = H \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_1 \times (G - F) = -Z_2 \times H \\ Z_2 \times (F + G) = Z_2 \times H \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_1 \times (G - F) + Z_2 \times (F + G) = 0$$

$$\Rightarrow (Z_1 + Z_2) \times G = (Z_1 - Z_2) \times F$$

d'où il découle que :

$$G = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \times F$$

Ce faisant, l'identité :  $F + G = H$  conduit à :

$$H = F \times \left( 1 + \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) \Rightarrow H = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \times F$$

(b) Étant donné que  $G\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$  décrit l'onde réfléchie dans le milieu (1), le coefficient de réflexion en amplitude,  $r_{12}$ , est défini par :

$$G(t, 0) = r_{12} \times F(t, 0) \Rightarrow r_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

De même, la fonction  $H\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$  décrivant l'onde transmise dans le milieu (2), le coefficient de transmission en amplitude,  $t_{12}$ , est défini par :

$$H(t, 0) = t_{12} \times F(t, 0) \Rightarrow t_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

(c) Si  $Z_2$  tend vers zéro (ce qui signifie que la région (2) est vide),  $r_{12} = 1$  montre que l'onde se réfléchit, en  $x = 0$ , avec une amplitude double de celle de l'onde

incidente. En revanche, lorsque  $Z_2$  tend vers l'infini (le milieu (2) est alors indéformable),  $r_{12} = -1$  montre qu'en  $x = 0$ , l'amplitude de l'onde est nulle (ce phénomène est à l'origine des ondes stationnaires).

3. (a) La relation (91) montre que la fonction  $\mathcal{G}(x, t) = -C \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial t}$  s'identifie à un flux d'énergie, à partir duquel peuvent être définis les coefficients de réflexion ( $R_{12}$ ) et de transmission ( $T_{12}$ ) en énergie :

$$\mathcal{G}_r(t, 0) = -R_{12} \mathcal{G}_i(t, 0) \text{ avec } \begin{cases} \mathcal{G}_i(t, 0) = -C_1 \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=0} \times \left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_{x=0} \\ \mathcal{G}_r(t, 0) = -C_1 \left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=0} \times \left. \frac{\partial G}{\partial t} \right|_{x=0} \end{cases}$$

et :

$$\mathcal{G}_t(t, 0) = T_{12} \mathcal{G}_i(t, 0) \text{ avec } \mathcal{G}_t(t, 0) = -C_2 \left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{x=0} \times \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{x=0}$$

- (b) La définition de la fonction  $G\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$  conduit à :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{1}{v_1} G'(t, 0) = \frac{r_{12}}{v_1} F'(t, 0) \text{ et } \left. \frac{\partial G}{\partial t} \right|_{x=0} = G'(t, 0) = r_{12} F'(t, 0)$$

C'est pourquoi :

$$\mathcal{G}_r(t, 0) = -\frac{C_1}{v_1} \times [r_{12} F'(t, 0)]^2 = -\frac{C_1}{v_1} \times r_{12}^2 \times [F'(t, 0)]^2$$

tandis que :

$$\mathcal{G}_i(t, 0) = -C_1 \times \left[ -\frac{1}{v_1} F'(t, 0) \right] \times [F'(t, 0)] = \frac{C_1}{v_1} \times [F'(t, 0)]^2$$

Ainsi, la définition de  $R_{12} = -\frac{\mathcal{G}_r(t, 0)}{\mathcal{G}_i(t, 0)} = r_{12}^2$ , associée à l'expression de

$r_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ , fournit :

$$R_{12} = r_{12}^2 = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

De même, la définition de  $H\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$  implique que :

$$\mathcal{G}_t(t, 0) = -C_2 \times \left[ -\frac{1}{v_2} H'(t, 0) \right] \times [H'(t, 0)] = \frac{C_2}{v_2} \times [H'(t, 0)]^2$$

où :

$$\begin{aligned} H'(t, 0) &= t_{12} F'(t, 0) \text{ avec } t_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ \Rightarrow T_{12} &= \frac{\mathcal{G}_t(t, 0)}{\mathcal{G}_i(t, 0)} = \frac{C_2}{v_2} \times \frac{v_1}{C_1} \times \left( \frac{H'(t, 0)}{F'(t, 0)} \right)^2 = \frac{C_2}{v_2} \times \frac{v_1}{C_1} \times t_{12}^2 \end{aligned}$$

Or :

$$v = \sqrt{\frac{C}{J}} \Rightarrow v^2 = \frac{C}{J} \Rightarrow \frac{C}{v} = Jv = Z$$

$$\Rightarrow T_{12} = \frac{Z_2}{Z_1} \times t_{12}^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

(c) De la question précédente, il découle que :

$$R_{12} + T_{12} = \frac{(Z_1^2 - 2Z_1 Z_2 + Z_2^2) + 4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} = \frac{Z_1^2 + 2Z_1 Z_2 + Z_2^2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

$$\Rightarrow R_{12} + T_{12} = 1$$

Cette relation traduit la conservation de l'énergie en  $x = 0$  car :

$$1 = R_{12} + T_{12} \Rightarrow \mathcal{G}_i = R_{12} \mathcal{G}_i + T_{12} \mathcal{G}_i \Rightarrow \mathcal{G}_i = -\mathcal{G}_r + \mathcal{G}_t$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_i \vec{e}_x = -\mathcal{G}_r \vec{e}_x + \mathcal{G}_t \vec{e}_x$$

ce qui signifie également que le flux incident d'énergie se répartit exactement en un flux d'énergie réfléchi dans le milieu (1) et un flux d'énergie transmise dans le milieu (2).

### ● 139 ————— Concours Commun Polytechnique

1. En notation complexe, l'équation de propagation s'écrit :

$$\frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial^3 \underline{p}}{\partial x^2 \partial t}$$

où :

$$\underline{p} = p_0 e^{j(\omega t - kx)} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{p} \\ \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial x^2} = -k^2 \underline{p} \end{cases} \text{ et } \frac{\partial^3 \underline{p}}{\partial x^2 \partial t} = -j\omega k^2 \underline{p}$$

Par conséquent, l'équation de propagation devient :

$$-\omega^2 = -k^2 c^2 - j\beta\omega k^2 \Rightarrow k^2 c^2 \left(1 + j \frac{\beta\omega}{c^2}\right) = \omega^2$$

$$\Rightarrow kc = \omega \times \left(1 + j \frac{\beta\omega}{c^2}\right)^{-1/2}$$

Or, l'hypothèse :  $\beta\omega \ll c^2$  suggère l'emploi d'un développement limité qui conduit à :

$$\underline{kc} \simeq \omega \left(1 - j \frac{\beta\omega}{2c^2}\right) \Rightarrow \underline{k} \simeq \frac{\omega}{c} - j \times \frac{\beta\omega^2}{2c^3}$$

On pourra ainsi poser :

$$\underline{k} = k_1 - j k_2 \text{ avec } k_1 = \frac{\omega}{c} \text{ et } k_2 = \frac{\beta\omega^2}{2c^3}$$



2. En posant  $\underline{k} = k_1 - j k_2$ , il vient :

$$\begin{aligned} \underline{p} &= p_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} = p_0 e^{j(\omega t - k_1 x + j k_2 x)} = p_0 e^{-k_2 x} e^{j(\omega t - k_1 x)} \\ \Rightarrow p(x, t) &= \text{Re} \{ \underline{p} \} = p_0 e^{-k_2 x} \times \cos(\omega t - k_1 x) \end{aligned}$$

3. Cette expression montre que la vitesse de phase vaut :

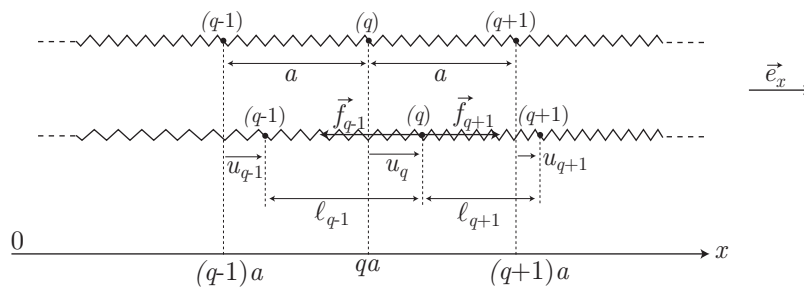
$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_1} = c$$

L'indépendance de  $v_\varphi$  à l'égard de  $\omega$  révèle alors l'absence de dispersion.

4. L'atténuation du signal sonore provient du terme  $e^{-k_2 x}$  et est donc d'autant plus faible que  $k_2 = \frac{\beta \omega^2}{2c^3}$  est petit. Pour limiter cette atténuation, il convient par conséquent d'employer des signaux de fréquence la plus basse possible (signaux presque audibles, dans le cas des ondes ultrasonores).

## 140 ————— Concours de l'ENS

1. Le  $q^{\text{ème}}$  atome est lié aux autres atomes par deux ressorts de longueur  $\ell_{q-1}$  et  $\ell_{q+1}$  :



Ces longueurs vérifient :

$$\begin{cases} \ell_{q-1} + u_{q-1} = a + u_q \\ \ell_{q+1} + u_q = a + u_{q+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_{q-1} - a = u_q - u_{q-1} \\ \ell_{q+1} - a = u_{q+1} - u_q \end{cases}$$

Or, la longueur au repos des ressorts valant  $a$ , il s'ensuit que le  $q^{\text{ème}}$  atome est soumis aux forces de rappel :

$$\begin{cases} \vec{f}_{q-1} = -k(\ell_{q-1} - a) \vec{e}_x = k(u_{q-1} - u_q) \vec{e}_x \\ \vec{f}_{q+1} = k(\ell_{q+1} - a) \vec{e}_x = k(u_{q+1} - u_q) \vec{e}_x \end{cases}$$

et donc à une force résultante :

$$\vec{f} = \vec{f}_{q-1} + \vec{f}_{q+1} = k(u_{q-1} + u_{q+1} - 2u_q) \vec{e}_x$$

La loi fondamentale de la dynamique impose alors :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 u_q}{dt^2} \vec{e}_x = \vec{f} &\Rightarrow m \frac{d^2 u_q}{dt^2} = k(u_{q-1} + u_{q+1} - 2u_q) \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{k}{m} \\ &\Rightarrow \frac{d^2 u_q}{dt^2} = \omega_0^2 (u_{q-1} + u_{q+1}) - 2\omega_0^2 u_q \end{aligned}$$

En notation complexe, cette équation devient :

$$\frac{d^2 \underline{u}_q}{dt^2} = \omega_0^2 (\underline{u}_{q-1} + \underline{u}_{q+1}) - 2\omega_0^2 \underline{u}_q$$

où :

$$\begin{aligned} \underline{u}_q = \underline{u}_{q0} e^{j\omega t} &\Rightarrow \frac{d^2 \underline{u}_q}{dt^2} = -\omega^2 \underline{u}_q \\ &\Rightarrow -\omega^2 \underline{u}_q = \omega_0^2 (\underline{u}_{q-1} + \underline{u}_{q+1}) - 2\omega_0^2 \underline{u}_q \end{aligned}$$

Finalement,  $\underline{u}_{q-1}$ ,  $\underline{u}_q$  et  $\underline{u}_{q+1}$  sont liés par la relation de récurrence :

$$\underline{u}_{q+1} - \left(2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \underline{u}_q + \underline{u}_{q-1} = 0$$

2. En posant :  $S = 2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$  et  $P = 1$ , cette relation de récurrence s'écrit aussi :

$$\underline{u}_{q+1} - S \underline{u}_q + P \underline{u}_{q-1} = 0$$

auquel cas  $\underline{u}_{q0} = A r_1^q + B r_2^q$ , avec :

$$r_2 = \frac{P}{r_1} = \frac{1}{r_1} \text{ et } r_1 + r_2 = S \Rightarrow r_1 + \frac{1}{r_1} = S \Rightarrow r_1^2 - S r_1 + 1 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = S^2 - 4 = (S - 2)(S + 2) = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

génère deux solutions :

$$r_1 = \frac{S + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } r_3 = \frac{S - \sqrt{\Delta}}{2}$$

On pourra alors s'assurer que :

$$r_1 \times r_3 = \frac{S^2 - \Delta}{4} = \frac{S^2 - (S^2 - 4)}{4} = 1$$

auquel cas  $r_3$  s'identifie à  $r_2$  dans la solution générale :

$$\underline{u}_{q0} = A r_1^q + B r_2^q \text{ avec } r_1 = \frac{S + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{S - \sqrt{\Delta}}{2}$$

Notamment, si  $\omega < \omega_c = 2\omega_0$  :

$$\Delta = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) < 0 \Rightarrow \Delta = \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

d'où il s'ensuit que :

$$r_1 = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} + j \frac{\omega}{2\omega_0} \sqrt{4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2} + j \frac{2\omega}{\omega_c} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

et :

$$r_2 = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} - j \frac{\omega}{2\omega_0} \sqrt{4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2} - j \frac{2\omega}{\omega_c} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

Afin, de soulager les calculs, on pourra poser :  $\alpha = 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2}$  et  $\beta = \frac{2\omega}{\omega_c} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$ ,

ces solutions s'écrivent aussi :

$$\begin{cases} r_1 = \alpha + j\beta \\ r_2 = \alpha - j\beta \end{cases} \Rightarrow \underline{u}_{q0} = A e^{\alpha q} e^{j\beta q} + B e^{\alpha q} e^{-j\beta q}$$

$$\Rightarrow \underline{u}_q = A e^{\alpha q} e^{j(\omega t + \beta q)} + B e^{\alpha q} e^{j(\omega t - \beta q)}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} u_q(t) &= \operatorname{Re} \{ \underline{u}_q \} = A e^{\alpha q} \cos(\omega t + \beta q) + B e^{\alpha q} \cos(\omega t - \beta q) \\ &= A e^{\frac{\alpha}{a} q a} \cos\left(\omega t + \frac{\beta}{a} q a\right) + B e^{\frac{\alpha}{a} q a} \cos\left(\omega t - \frac{\beta}{a} q a\right) \end{aligned}$$

soit encore, puisque  $x = qa$  :

$$u(x, t) = A e^{k_i x} \cos(\omega t + k_r x) + B e^{k_i x} \cos(\omega t - k_r x)$$

avec :

$$k_i = \frac{\alpha}{a} = \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2} \right) \text{ et } k_r = \frac{\beta}{a} = \frac{2\omega}{a\omega_c} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$$

Ce résultat montre que  $u(x, t)$  peut se décrire par la superposition de deux ondes progressives :

$$u_1(x, t) = A e^{k_i x} \cos(\omega t + k_r x) = \operatorname{Re} \left\{ A e^{j[\omega t + (k_r - j k_i) x]} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ A e^{j(\omega t + k_1 x)} \right\}$$

et :

$$u_2(x, t) = B e^{k_i x} \cos(\omega t - k_r x) = \operatorname{Re} \left\{ A e^{j[\omega t - (k_r + j k_i) x]} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ A e^{j(\omega t - k_2 x)} \right\}$$

où l'on a posé :

$$k_1 = k_r - j k_i = \frac{2\omega}{a\omega_c} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} - \frac{j}{a} \left( 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2} \right)$$

et :

$$k_2 = k_r + j k_i = \frac{2\omega}{a\omega_c} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} + \frac{j}{a} \left( 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2} \right)$$

Si  $\omega$  est supérieur à  $\omega_c = 2\omega_0$  :

$$\Delta = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left( 4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = -\frac{16\omega^2}{\omega_c^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \right) > 0$$

auquel cas :

$$r_1 = \frac{S + \sqrt{\Delta}}{2} = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} + \frac{2\omega}{\omega_c} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}$$

et :

$$r_2 = \frac{S - \sqrt{\Delta}}{2} = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} - \frac{2\omega}{\omega_c} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}$$

de sorte qu'en posant  $\alpha = 1 - \frac{\omega^2}{2\omega_0^2} = 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2} < 0$  et  $\gamma = \frac{2\omega}{\omega_c} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_c^2} - 1}$  :

$$\begin{aligned} \underline{u}_{q0} &= A e^{\alpha q} e^{\gamma q} + B e^{\alpha q} e^{-\gamma q} \\ \Rightarrow \underline{u}_q &= e^{\alpha q} (A e^{\gamma q} + B e^{-\gamma q}) e^{j\omega t} \end{aligned}$$

Aussi, il existe deux nombres réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que :

$$u_q = e^{-|\alpha|q} [\lambda \cosh(\gamma q) + \mu \sinh(\gamma q)] \cos(\omega t)$$

Ce faisant, une onde évanescente prend naissance.

3. Par définition, la vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k_r} = \frac{a\omega_c}{2} \sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 - \omega^2}}$$

tandis que la vitesse de groupe est définie par :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_r} \Rightarrow v_g = \left( \frac{dk_r}{d\omega} \right)^{-1}$$

avec :

$$\begin{aligned} k_r &= \frac{2\omega}{a\omega_c} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \Rightarrow \frac{dk_r}{d\omega} = \frac{2}{a\omega_c} \times \frac{1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} \\ &\Rightarrow \frac{dk_r}{d\omega} = \frac{2}{a\omega_c} \left( 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2} \right) \sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 - \omega^2}} \\ &\Rightarrow v_g = \frac{a\omega_c}{2} \sqrt{\frac{\omega_c^2 - \omega^2}{\omega_c^2}} \times \left( 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut poser  $v_\varphi \simeq v_g$  à condition que :

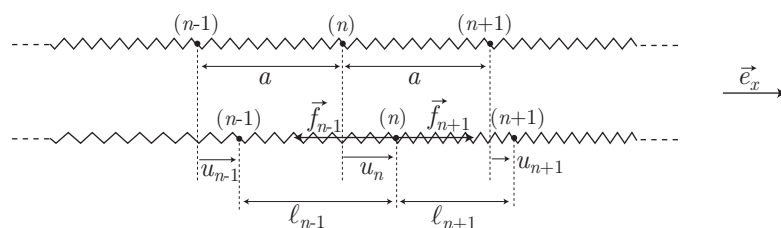
$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\omega_c^2 - \omega^2}{\omega_c^2}} \left( 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2} \right)^{-1} &\simeq \sqrt{\frac{\omega_c^2}{\omega_c^2 - \omega^2}} \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2} = 1 - \frac{2\omega^2}{\omega_c^2} \\ &\Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_c^2} \simeq 0 \end{aligned}$$

soit encore :

$$\omega \ll \omega_c \Rightarrow v_\varphi = v_g = \frac{a\omega_c}{2} = a\omega_0 = c$$

## ● 141 ————— Concours de l'ENS Lyon

1. Soient  $u_{n-1}$ ,  $u_n$  et  $u_{n+1}$  les déplacements de trois atomes successifs, par rapport à leurs positions d'équilibre :



Si  $l_v$  désigne la longueur à vide de chaque ressort, le point  $(n)$  est soumis à deux forces de rappel :

$$\vec{f}_{n+1} = k (\ell_{n+1} - l_v) \vec{e}_x \text{ et } \vec{f}_{n-1} = -k (\ell_{n-1} - l_v) \vec{e}_x$$

avec :

$$\begin{cases} u_{n-1} + \ell_{n-1} = a + u_n \\ u_n + \ell_{n+1} = a + u_{n+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_{n-1} = a + u_n - u_{n-1} \\ \ell_{n+1} = a + u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Ce faisant, le point  $(n)$  est soumis à une force résultante :

$$\vec{f} = \vec{f}_{n+1} + \vec{f}_{n-1} = k (\ell_{n+1} - \ell_{n-1}) \vec{e}_x = k (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \vec{e}_x$$

qui vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d^2 u_n}{dt^2} \vec{e}_x = \vec{f} \Rightarrow m \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) \quad (94)$$

Si l'on suppose  $a$  suffisamment petit (ainsi que les déplacements  $u_j$ ), on peut appliquer l'approximation des milieux quasi continus en posant :

$$x = na \Rightarrow u_n(t) = u(x, t)$$

et :

$$\begin{aligned} u_{n+1}(t) &= u(x+a, t) = u(x, t) + a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x, t)} + \frac{a^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x, t)} \\ u_{n-1}(t) &= u(x-a, t) = u(x, t) - a \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x, t)} + \frac{a^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{(x, t)} \end{aligned}$$

auquel cas l'équation (94) devient :

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ka^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ avec } c = a \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Il s'agit alors de l'équation de d'Alembert, qui décrit la propagation d'une onde longitudinale.

2. La solution complexe :  $u_n(t) = U e^{j(Kna - \omega t)}$  est associée à un déplacement :

$$\operatorname{Re}\{u_n(t)\} = U \cos(Kx - \omega t) \text{ où } x = na$$

d'amplitude  $U$ , de pulsation  $\omega$  et de longueur d'onde  $\lambda = \frac{2\pi}{K}$ .

En adoptant, pour  $u_n$ , cette forme, il s'ensuit que :

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\omega^2 u_n(t) \text{ et } u_{n\pm 1} = e^{\pm jKa} u_n(t)$$

de sorte que l'équation (94) devient :

$$-m\omega^2 = k (e^{jKa} + e^{-jKa} - 2) = 2k [\cos(Ka) - 1]$$

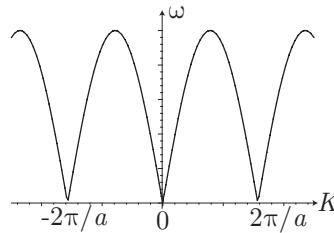
avec :

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos(2\theta) &\Rightarrow \cos(Ka) - 1 = -2 \sin^2 \left( \frac{Ka}{2} \right) \\ &\Rightarrow m\omega^2 = 4k \sin^2 \left( \frac{Ka}{2} \right) \\ &\Rightarrow \omega^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \left( \frac{Ka}{2} \right) \end{aligned}$$

Cette relation, assimilée à une relation de dispersion, montre la non linéarité du milieu : la vitesse de propagation d'une onde dépend de sa pulsation  $\omega$ .

Étant donné que l'énoncé précise que  $\omega$  est positif, il s'ensuit que :

$$\omega = \sqrt{\frac{4k}{m}} \times \left| \sin \left( \frac{Ka}{2} \right) \right| \quad (95)$$



3. Deux masses successives ont pour déplacements :

$$\begin{cases} u_n(t) = U e^{j(nKa - \omega t)} \\ u_{n+1}(t) = U e^{j(nKa + Ka - \omega t)} \end{cases} \Rightarrow \frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} = e^{jKa}$$

Ce rapport est périodique, de période  $\frac{2\pi}{a}$ , de sorte que l'intervalle  $K \in \left[ -\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a} \right]$  permet de décrire le mouvement de tous les nœuds du cristal. Lorsque  $K = \pm \frac{\pi}{a}$  :

$$\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} = e^{\pm j\pi} = -1 \Rightarrow u_{n+1}(t) = -u_n(t)$$

ce qui signifie que deux atomes successifs vibrent en opposition de phase (il s'agit en fait d'un des modes propres du cristal).

4. Le milieu est dispersif lorsque le rapport  $\frac{\omega}{K}$  dépend de  $\omega$  (ou de  $K$ ). Dans un tel milieu, la vitesse de propagation d'une onde dépend de sa fréquence. On appelle vitesse de phase  $v_\varphi$  et vitesse de groupe  $v_g$  les grandeurs :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{K} \text{ et } v_g = \left| \frac{d\omega}{dK} \right|$$

La vitesse de phase représente la vitesse de propagation d'une onde monochromatique, tandis que  $v_g$  représente la vitesse de propagation d'un paquet d'ondes.

La relation (95) fournit :

$$\left| \frac{d\omega}{dK} \right| = \sqrt{\frac{4k}{m}} \times \frac{a}{2} \left| \cos\left(\frac{Ka}{2}\right) \right| \Rightarrow v_g = \sqrt{\frac{ka^2}{m}} \times \left| \cos\left(\frac{Ka}{2}\right) \right|$$

Notamment, lorsque  $K_0 = \pm \frac{\pi}{a}$  :  $v_g = 0$  révèle qu'un paquet d'ondes ne peut se propager dans le cristal.

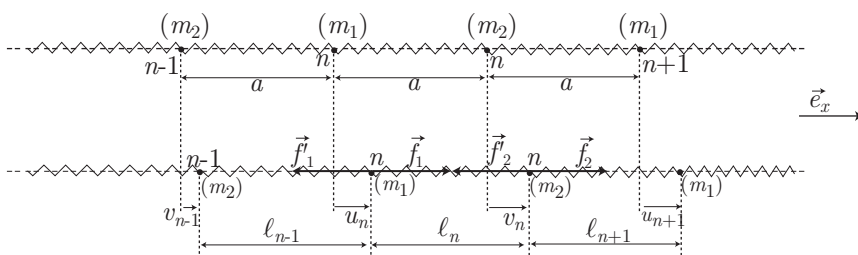
De même, lorsque  $K_0 = 0$  :

$$\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} = 1 \Rightarrow u_{n+1}(t) = u_n(t)$$

ce qui traduit le mouvement d'ensemble (synchrone) de tous les atomes du cristal. Celui-ci se déplace globalement, ce qui ne correspond pas à une propagation d'onde.

## 142 Concours de l'ENS

1. Soient  $u_n(t)$  et  $v_n(t)$  les déplacements des  $n^{\text{èmes}}$  masses  $m_1$  et  $m_2$ .



La  $n^{\text{ème}}$  masse  $m_1$  est soumise aux forces de rappel :

$$\vec{f}_1 = k (\ell_n - \ell_v) \vec{e}_x \text{ et } \vec{f}'_1 = -k (\ell_{n-1} - \ell_v) \vec{e}_x$$

où  $\ell_v$  désigne la longueur à vide des ressorts. Cette masse est donc soumise à une force résultante :

$$\vec{F}_{1n} = \vec{f}_1 + \vec{f}'_1 = k (\ell_n - \ell_{n-1}) \vec{e}_x$$

avec :

$$\begin{cases} \ell_n + u_n = a + v_n \\ \ell_{n-1} + v_{n-1} = a + u_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_n = a + v_n - u_n \\ \ell_{n-1} = a + u_n - v_{n-1} \end{cases} \\ \Rightarrow \ell_n - \ell_{n-1} = v_n + v_{n-1} - 2u_n \\ \Rightarrow \vec{F}_{1n} = k(v_n + v_{n-1} - 2u_n) \vec{e}_x$$

Par suite, la loi fondamentale de la dynamique, appliquée à cette masse, conduit à :

$$m_1 \frac{d^2 u_n}{dt^2} \vec{e}_x = \vec{F}_{1n} \Rightarrow m_1 \frac{d^2 u_n}{dt^2} = k(v_n + v_{n-1} - 2u_n) \quad (96)$$

De même, la  $n^{\text{ème}}$  masse  $m_2$  est soumise aux forces :

$$\vec{f}_2 = k(\ell_{n+1} - \ell_n) \vec{e}_x \text{ et } \vec{f}'_2 = -k(\ell_n - \ell_{n-1}) \vec{e}_x$$

de résultante :  $\vec{F}_{2n} = \vec{f}_2 + \vec{f}'_2 = k(\ell_{n+1} - \ell_n) \vec{e}_x$ , avec :

$$\begin{cases} \ell_{n+1} + v_n = a + u_{n+1} \\ \ell_n + u_n = a + v_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell_{n+1} = a + u_{n+1} - v_n \\ \ell_n = a + v_n - u_n \end{cases} \\ \Rightarrow \vec{F}_{2n} = k(u_{n+1} + u_n - 2v_n) \vec{e}_x$$

Par conséquent, l'application de la loi fondamentale de la dynamique à cette masse conduit à :

$$m_2 \frac{d^2 v_n}{dt^2} \vec{e}_x = \vec{F}_{2n} \Rightarrow m_2 \frac{d^2 v_n}{dt^2} = k(u_{n+1} + u_n - 2v_n) \quad (97)$$

2. En posant :

$$u_n(t) = U e^{j(nKa - \omega t)} \Rightarrow \frac{d^2 u_n}{dt^2} = -\omega^2 U e^{j(nKa - \omega t)}$$

et :

$$v_n(t) = V e^{j(nKa - n\omega t)} \Rightarrow v_{n-1} = e^{-jKa} \times V e^{j(nKa - \omega t)}$$

l'équation (96) devient :

$$-m_1 \omega^2 U = kV(1 + e^{-jKa}) - 2kU \Rightarrow U(2k - m_1 \omega^2) = kV(1 + e^{-jKa})$$

De même :

$$u_n(t) = U e^{j(nKa - \omega t)} \Rightarrow u_{n+1}(t) = e^{jKa} \times U e^{j(nKa - \omega t)}$$

et :

$$v_n(t) = V e^{j(nKa - \omega t)} \Rightarrow \frac{d^2 v_n}{dt^2} = -\omega^2 \times V e^{j(nKa - \omega t)}$$

donnent à l'équation (97) la forme suivante :

$$-m_2 \omega^2 V = kU(1 + e^{jKa}) - 2kV \Rightarrow V(2k - m_2 \omega^2) = kU(1 + e^{jKa})$$

On obtient ainsi un système de deux équations :

$$\frac{U}{V} = \frac{k(1 + e^{-jKa})}{2k - m_1 \omega^2} \text{ et } \frac{U}{V} = \frac{2k - m_2 \omega^2}{k(1 + e^{jKa})}$$



qui fournissent :

$$\begin{aligned} (2k - m_1\omega^2)(2k - m_2\omega^2) &= k^2 (1 + e^{jKa}) (1 + e^{-jKa}) \\ \Rightarrow 4k^2 + m_1m_2\omega^4 - 2k(m_1 + m_2)\omega^2 &= k^2 [2 + 2\cos(Ka)] \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$m_1m_2\omega^4 - 2k(m_1 + m_2)\omega^2 + 2k^2 [1 - \cos(Ka)] = 0 \quad (98)$$

3. En posant  $\omega^2 = \Omega$ , cette équation devient :

$$m_1m_2\Omega^2 - 2k(m_1 + m_2)\Omega + 2k^2 [1 - \cos(Ka)] = 0$$

dont le discriminant réduit vaut :

$$\Delta' = k^2 (m_1 + m_2)^2 - 2m_1m_2k^2 [1 - \cos(Ka)]$$

Il existe donc deux solutions :

$$\Omega_1 = \omega^2 = \frac{k(m_1 + m_2) + \sqrt{\Delta'}}{m_1m_2} \quad \text{ou} \quad \Omega_2 = \omega^2 = \frac{k(m_1 + m_2) - \sqrt{\Delta'}}{m_1m_2}$$

Dans l'hypothèse où  $Ka$  est petit, un développement limité fournit :

$$\begin{aligned} 1 - \cos(Ka) &\simeq 1 - \left(1 - \frac{K^2a^2}{2}\right) = K^2 \frac{a^2}{2} \\ \Rightarrow \Delta' &\simeq k^2 (m_1 + m_2)^2 - k^2 m_1m_2 K^2 a^2 \\ \Rightarrow \sqrt{\Delta'} &\simeq k(m_1 + m_2) \times \left[1 - \frac{m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} K^2 a^2\right]^{1/2} \\ \Rightarrow \sqrt{\Delta'} &\simeq k(m_1 + m_2) \times \left[1 - \frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)^2} K^2 a^2\right] \\ \Rightarrow \sqrt{\Delta'} &\simeq k(m_1 + m_2) - \frac{k m_1m_2}{2(m_1 + m_2)} \times K^2 a^2 \end{aligned}$$

Ce faisant, les solutions  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  deviennent :

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \omega^2 = \frac{2k(m_1 + m_2)}{m_1m_2} - \frac{k}{2(m_1 + m_2)} \times K^2 a^2 \\ \Rightarrow \omega^2 &= 2k \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \text{ car } K^2 a^2 \ll 1 \text{ (mode optique)} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \omega^2 = \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1m_2} - \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1m_2} + \frac{k}{2(m_1 + m_2)} K^2 a^2 \\ \Rightarrow \omega^2 &= \frac{k}{2(m_1 + m_2)} K^2 a^2 \text{ (mode acoustique)} \end{aligned}$$

Lorsque  $K = \pm \frac{\pi}{a}$ ,  $\cos(Ka) = -1$ , de sorte que :

$$\begin{aligned}\Delta' &= k^2 (m_1 + m_2)^2 - 2m_1m_2k^2 [1 - \cos(Ka)] = k^2 (m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2k^2 \\ &= k^2 (m_1 - m_2)^2 \text{ avec } m_1 > m_2 \text{ d'après l'énoncé.}\end{aligned}$$

Ce faisant, l'équation (98) admet pour solutions :

- pour le mode optique :

$$\begin{aligned}\Omega_1 = \omega_{\text{opt}}^2 &= \frac{k(m_1 + m_2) + \sqrt{\Delta'}}{m_1m_2} = \frac{k(m_1 + m_2) + k(m_1 - m_2)}{m_1m_2} = \frac{2k}{m_2} \\ \Rightarrow \omega_{\text{opt}} &= \sqrt{\frac{2k}{m_2}}\end{aligned}$$

- pour le mode acoustique :

$$\begin{aligned}\Omega_2 = \omega_{\text{ac}}^2 &= \frac{k(m_1 + m_2) - \sqrt{\Delta'}}{m_1m_2} = \frac{k(m_1 + m_2) - k(m_1 - m_2)}{m_1m_2} = \frac{2k}{m_1} \\ \Rightarrow \omega_{\text{ac}} &= \sqrt{\frac{2k}{m_1}}\end{aligned}$$

On remarque, à cette étape, que l'inégalité  $m_1 > m_2$  entraîne que :

$$\omega_{\text{ac}} < \omega_{\text{opt}}$$

4. L'équation du second degré (98) adopte une forme qui ne varie pas lorsque  $Ka$  est remplacé par  $Ka + p \times 2\pi$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . C'est pourquoi l'étude des relations de dispersion peut être limitée à un intervalle de taille  $2\pi$ , par exemple :  $-\pi \leq Ka \leq \pi$ , ou encore :

$$-\frac{\pi}{a} \leq K \leq \frac{\pi}{a} \text{ (zone de Brillouin).}$$

5. Pour représenter la courbe de dispersion  $\omega = f(K)$ , il convient de distinguer deux modes :

- le mode optique, pour lequel :

$$\begin{aligned}\omega^2 = \Omega_1 &= \frac{k(m_1 + m_2) + \sqrt{\Delta'}}{m_1m_2} \\ &= \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1m_2} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{2m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2} [1 - \cos(Ka)]} \right]\end{aligned}$$

De l'étude précédente, il ressort que :

$$Ka \ll 1 \Rightarrow \omega^2 = 2k \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) > \omega_{\text{opt}}^2$$

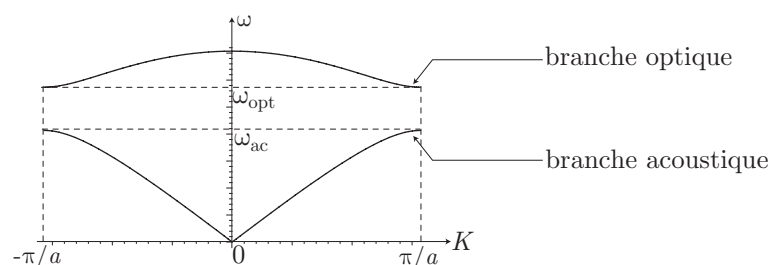
- le mode acoustique, caractérisé par :

$$\begin{aligned} \omega^2 = \Omega_2 &= \frac{k(m_1 + m_2) - \sqrt{\Delta'}}{m_1 m_2} \\ &= \frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} [1 - \cos(Ka)]} \right] \end{aligned}$$

À nouveau, l'étude précédente montre que :

$$Ka \ll 1 \Rightarrow \omega^2 = \frac{k}{2(m_1 + m_2)} K^2 a^2 \simeq 0$$

Ce faisant, la courbe de dispersion  $\omega = f(K)$  présente l'allure suivante :



6. Le graphe précédent révèle que, pour  $\omega_{ac} < \omega < \omega_{opt}$ , aucune onde ne peut se propager.

De même, la branche optique présente un *maximum* en  $K = 0$  :

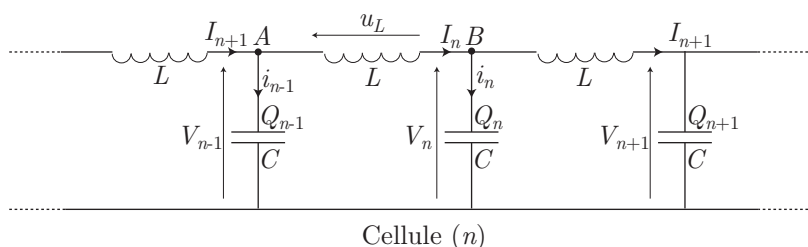
$$\omega_{opt}^{max} = 2k \times \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

Le graphe précédent suggère qu'aucune onde de pulsation supérieure à  $\omega_{opt}^{max}$  ne se propage.

## ● 143 ————— Concours Polytechnique

### 1. Équation d'évolution

- (a) On note  $u_L$  la tension aux bornes de la bobine de la cellule ( $n$ ),  $i_{n-1}$  et  $i_n$  les intensités des courants qui traversent les condensateurs à l'entrée et à la sortie de la cellule ( $n$ ) :



**CORRIGÉS**

Le courant  $i_n$  provoque une variation de la charge  $Q_n$  :  $i_n = \frac{dQ_n}{dt}$ , tandis que la loi des nœuds appliquée à  $B$  impose :

$$i_n = I_n - I_{n+1} \Rightarrow \frac{dQ_n}{dt} = I_n - I_{n+1}$$

On peut d'ores et déjà remarquer que la relation :  $Q_n = C V_n$  se traduit par :

$$C \frac{dV_n}{dt} = I_n - I_{n+1} \quad (99)$$

De même, la tension  $u_L = V_{n-1} - V_n$ , aux bornes de la bobine  $AB$ , est liée au courant qui la traverse par la relation :

$$u_L = L \frac{dI_n}{dt} \Rightarrow L \frac{dI_n}{dt} = V_{n-1} - V_n \quad (100)$$

(b) La dérivée temporelle de l'équation (99) fournit :

$$C \frac{d^2V_n}{dt^2} = \frac{dI_n}{dt} - \frac{dI_{n+1}}{dt}$$

tandis que la relation (100) conduit à :

$$\frac{dI_n}{dt} = \frac{1}{L} (V_{n-1} - V_n) \text{ et } \frac{dI_{n+1}}{dt} = \frac{1}{L} (V_n - V_{n+1})$$

d'où il s'ensuit que :

$$C \frac{d^2V_n}{dt^2} = \frac{1}{L} (V_{n-1} - V_n - V_n + V_{n+1})$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d^2V_n}{dt^2} = \omega_0^2 (V_{n+1} + V_{n-1} - 2V_n) \text{ en posant : } \omega^2 = \frac{1}{LC} \quad (101)$$

## 2. Aspect énergétique

En notant  $\mathcal{E}_n = \frac{1}{2} C V_n^2 + \frac{1}{2} L I_n^2$  l'énergie électromagnétique accumulée dans la cellule ( $n$ ), on trouve :

$$\frac{d\mathcal{E}_n}{dt} = C V_n \frac{dV_n}{dt} + L \frac{dI_n}{dt} I_n$$

où la relation (99) et la relation (100) fournissent :

$$C \frac{dV_n}{dt} = I_n - I_{n+1} \text{ et } L \frac{dI_n}{dt} = V_{n-1} - V_n$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_n}{dt} &= V_n \times (I_n - I_{n+1}) + (V_{n-1} - V_n) \times I_n \\ &\Rightarrow \frac{d\mathcal{E}}{dt} = I_n V_{n-1} - I_{n+1} V_n \end{aligned}$$

En remarquant que les termes :  $\mathcal{P}_e = I_n V_{n-1}$  et  $\mathcal{P}_s = I_{n+1} V_n$  désignent respectivement la puissance électrique transmise par la cellule  $(n-1)$  et celle émise par la cellule  $(n)$ , l'équation :

$$\frac{d\mathcal{E}_n}{dt} = \mathcal{P}_e - \mathcal{P}_s$$

traduit la conservation de l'énergie.

### 3. Propagation

(a) La relation de récurrence :  $\underline{V}_{n+1} = \underline{V}_n e^{-j\alpha}$  fournit le terme général  $A_n$  :

$$\begin{cases} \underline{V}_n = A_n e^{j\omega t} \\ \underline{V}_{n+1} = A_{n+1} e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow A_{n+1} = e^{-j\alpha} A_n \Rightarrow A_n = A_0 e^{-jn\alpha}$$

(b) Cette définition :

$$\underline{V}_n = A_n e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{V}_{n+1} = e^{-j\alpha} \underline{V}_n \text{ et } \underline{V}_{n-1} = e^{j\alpha} \underline{V}_n$$

associée à l'équation (101) conduit à :

$$-\omega^2 \underline{V}_n = \omega_0^2 (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} - 2) \underline{V}_n \Rightarrow \omega^2 = 2\omega_0^2 (1 - \cos \alpha)$$

avec :

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \Rightarrow \omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \omega = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| \quad (102)$$

(c) Puisque  $\left| \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| \leq 1$ , il apparaît que :

$$\omega \leq 2\omega_0 \Rightarrow \omega \leq \omega_c = 2\omega_0$$

Étant donné que  $|\sin(x + \pi)| = |\sin x|$ , les valeurs de  $\frac{\alpha}{2}$  comprises dans un intervalle de longueur  $\frac{\pi}{2}$  suffisent à obtenir toutes les valeurs de  $\omega$  décrites par la relation (102) ; on pourra ainsi choisir :

$$-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ ou } 0 \leq \alpha \leq \pi$$

(d) Les définitions de  $\underline{V}_n(t) = A_n e^{j\omega t}$  et de  $A_n = A_0 e^{-jn\alpha}$  conduisent à :

$$\underline{V}_n(t) = A_0 e^{j(\omega t - n\alpha)} \Rightarrow V_n(t) = A_0 \cos(\omega t - n\alpha) \quad (103)$$

La phase  $\phi_n(t) = \omega t - n\alpha$  se propage, dans la mesure où elle atteint la cellule  $(n+p)$  à une date  $\Delta t$  telle que :

$$\begin{aligned} \phi_{n+p}(t + \Delta t) = \phi_n(t) &\Rightarrow \omega \times (t + \Delta t) - (n+p)\alpha = \omega t - n\alpha \\ &\Rightarrow \omega \Delta t - p\alpha = 0 \Rightarrow p = \frac{\omega}{\alpha} \Delta t \end{aligned}$$

Ce faisant, la vitesse de propagation de  $\phi_n(t)$  (nombre de cellules parcourues par unité de temps) vaut :

$$v_\varphi = \frac{p}{\Delta t} = \frac{\omega}{|\alpha|}$$

(e) Lorsque  $\omega \ll \omega_0$ , la relation de dispersion (102) se linéarise :

$$\begin{aligned}\omega &= 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| \simeq 2\omega_0 \times \frac{|\alpha|}{2} \Rightarrow \omega = |\alpha| \omega_0 \\ \Rightarrow v_\varphi &= \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\end{aligned}$$

Lorsque  $\alpha > 0$ , l'identité :  $|\alpha| = \frac{\omega}{\omega_0}$  permet de présenter  $V_n(t)$  sous la forme :

$$V_n(t) = A_0 \cos\left(\omega t - \frac{n\omega}{\omega_0}\right) = A_n \cos\left[\omega\left(t - \frac{n}{\omega_0}\right)\right]$$

c'est-à-dire :

$$V_n(t) = V_0(t - \tau) \text{ où } \tau = \frac{n}{\omega_0}$$

Cette relation justifie le nom donné à ce montage : « ligne à retard », car elle induit un retard de phase qui croît à chaque cellule.

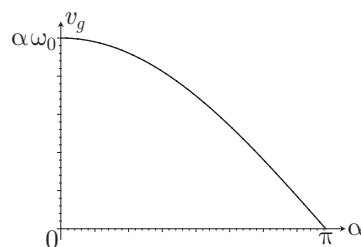
#### 4. Effets dispersifs

(a) Si  $\alpha > 0$  et  $v_\varphi = \frac{\omega}{\alpha}$ , la vitesse de groupe est définie par :

$$v_g = \frac{d\omega}{d\alpha}$$

Cette grandeur représente la vitesse à laquelle se propage un paquet d'ondes, c'est-à-dire la vitesse de propagation de l'énergie véhiculée par un paquet d'onde. La relation (102) fournit, pour  $\alpha > 0$  :

$$\omega = 2\omega_0 \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow v_g = \alpha\omega_0 \times \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ pour } 0 < \alpha \leq \pi$$



On constate alors que pour  $\alpha = \pi$ ,  $v_g = 0$ , ce qui signifie que l'énergie ne se propage pas le long de la ligne électrique.

(b) En posant  $\underline{I}_n(t) = B_n e^{j\omega t}$  et  $\underline{V}_n(t) = A_0 e^{j(\omega t - n\alpha)}$ , la loi (100) conduit à :

$$\begin{aligned} L \frac{d\underline{I}_n}{dt} &= \underline{V}_{n-1} - \underline{V}_n \Rightarrow L\omega j B_n = A_0 e^{-jn\alpha} e^{j\alpha} - A_0 e^{-jn\alpha} \text{ où } A_0 e^{-jn\alpha} = A_n \\ &\Rightarrow B_n = \frac{A_n}{L\omega j} \times (e^{j\alpha} - 1) \\ &\Rightarrow B_n = \frac{A_n}{L\omega} e^{j\alpha/2} \times \frac{e^{j\alpha/2} - e^{-j\alpha/2}}{j} \\ &\Rightarrow B_n = \frac{2A_n}{L\omega} e^{j\alpha/2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

où la relation de dispersion (102) impose :

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\omega}{2\omega_0} \Rightarrow B_n = \frac{A_n}{L\omega_0} e^{j\alpha/2}$$

Ce faisant, les expressions :

$$\underline{V}_n = A_0 e^{j(\omega t - n\alpha)} \text{ et } \underline{I}_n = \frac{A_n}{L\omega_0} e^{j\alpha/2} e^{j\omega t} = \frac{A_0}{L\omega_0} e^{j\alpha/2} e^{j(\omega t - n\alpha)}$$

permettent le calcul de :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \left\langle \frac{1}{2} CV_n^2 + \frac{1}{2} LI_n^2 \right\rangle = \frac{C}{2} \langle V_n^2 \rangle + \frac{L}{2} \langle I_n^2 \rangle \\ &= \frac{C}{2} \times \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{V}_n \underline{V}_n^* \} + \frac{L}{2} \times \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{I}_n \underline{I}_n^* \} \\ &= \frac{C}{4} |V_n|^2 + \frac{L}{4} |I_n|^2 \\ &= \frac{C}{4} A_0^2 + \frac{L}{4} \times \frac{A_0^2}{L^2 \omega_0^2} \text{ avec } \frac{1}{\omega_0^2} = LC \\ &\Rightarrow \mathcal{E} = \frac{1}{2} CA_0^2 \end{aligned}$$

La cellule  $(n-1)$  transmet à la cellule  $(n)$  une puissance  $\mathcal{P} = I_n V_{n-1}$ , de valeur moyenne :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \langle I_n V_{n-1} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{I}_n \underline{V}_{n-1}^* \}$$

où :

$$\begin{aligned} V_{n-1} &= A_0 e^{j\alpha} e^{j(\omega t - n\alpha)} \Rightarrow \underline{V}_{n-1}^* = A_0 e^{-j\alpha} e^{-j(\omega t - n\alpha)} \\ &\Rightarrow \underline{I}_n \underline{V}_{n-1}^* = \frac{A_0}{L\omega_0} e^{j\alpha/2} \times A_0 e^{-j\alpha} = \frac{A_0^2}{L\omega_0} e^{-j\alpha/2} \\ &\Rightarrow \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{A_0^2}{2L\omega_0} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\mathcal{E}} &= \frac{A_0^2}{2L\omega_0} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \times \frac{2}{CA_0^2} = \frac{1}{LC\omega_0} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \Rightarrow \frac{\langle \mathcal{P} \rangle}{\mathcal{E}} &= \omega_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ car } \frac{1}{LC} = \omega_0^2\end{aligned}$$

- (c) La vitesse de phase :  $v_\varphi = \frac{\omega}{|\alpha|}$  dépend de la pulsation  $\omega$ , de sorte qu'un paquet d'ondes de pulsations différentes se propage en subissant une déformation : chaque composante spectrale du paquet d'ondes se déplace avec sa propre vitesse. Ce phénomène est appelé *dispersion* du paquet d'ondes.

### 5. Impédance caractéristique

- (a) Étant donné la définition :  $\underline{Z}_c = \frac{V_n}{I_{n+1}} \Rightarrow V_n = \underline{Z}_c I_{n+1}$ , l'équation (99) devient :

$$I_n - I_{n+1} = C \frac{dV_n}{dt} = C\omega j V_n = C\omega j \underline{Z}_c I_{n+1} \quad (104)$$

$$\Rightarrow I_n = (1 + C\omega j \underline{Z}_c) I_{n+1} \quad (105)$$

De même, l'équation (100) conduit à :

$$L \frac{dI_n}{dt} = V_{n-1} - V_n \Rightarrow L\omega j I_n = \underline{Z}_c I_n - \underline{Z}_c I_{n+1} \quad (106)$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c - L\omega j} I_{n+1} \quad (107)$$

Ce faisant, les équations (105) et (107) ont pour conséquence :

$$\begin{aligned}1 + C\omega j \underline{Z}_c &= \frac{\underline{Z}_c}{\underline{Z}_c - L\omega j} \Rightarrow \underline{Z}_c - L\omega j + C\omega j \underline{Z}_c^2 + LC\omega^2 \underline{Z}_c = \underline{Z}_c \\ &\Rightarrow C\omega j \underline{Z}_c^2 + LC\omega^2 \underline{Z}_c - L\omega j = 0\end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = (LC\omega^2)^2 - 4LC\omega^2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 - 4 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 4\right)$$

est négatif car  $\omega < \omega_c = 2\omega_0 \Rightarrow \frac{\omega^2}{\omega_0^2} < 4$ . Il s'ensuit que :

$$\Delta = \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left(4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

de sorte que :

$$\underline{Z}_c = \frac{-LC\omega^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2C\omega j} = j \frac{L\omega}{2} \pm \frac{1}{2C\omega_0} \sqrt{4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

- (b) La partie réactive de cette impédance :



$$X_c = \frac{L\omega}{2} j = L'\omega j \text{ avec } L' = \frac{L}{2}$$

est donc celle d'une bobine d'inductance  $L' = \frac{L}{2}$ .

(c) Quant à sa partie résistive, elle vaut :

$$R_c = \frac{1}{2C\omega_0} \sqrt{4 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \text{ où } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \times \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4\omega_0^2}}$$

Or, la relation de dispersion (102) impose :

$$\begin{aligned} \omega = 2\omega_0 \left| \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| &\Rightarrow \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} = \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{4\omega_0^2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &\Rightarrow R_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \left| \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

## ● 144 ————— Concours de l'ENS

1. Dans un fluide incompressible, la masse volumique  $\rho$  est constante et indépendante du lieu où elle est mesurée. Le champ de vitesse  $\vec{v}$  de l'eau vérifie, en outre, l'équation :

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

qui traduit la conservation de la masse. Notamment, dans le cas du fluide incompressible, cette loi se simplifie :

$$\rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (108)$$

Il existe, en physique, deux champs de vecteurs qui vérifient la même équation :

- le champ magnétique  $\vec{B}$  qui dérive d'un potentiel vecteur  $\vec{A}$  :

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

- le champ électrique  $\vec{E}$  produit en tout point où la densité volumique de charge électrique vaut  $\rho_e$  :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0 \text{ dans le vide.}$$

2. En choisissant pour champ de vecteur vitesse :  $\vec{v} = \operatorname{grad} \phi$ , on impose :

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \phi) = \vec{0}$$

Cependant, si une fonction  $\phi$  permet de décrire  $\vec{v} = \operatorname{grad} \phi$ , toute autre fonction :

$$\phi'(M, t) = \phi(M, t) + \Phi_0(t) \quad (109)$$

décrit également le même champ de vecteur  $\vec{v}$ , quelle que soit la fonction  $\Phi_0(t)$  dépendant uniquement de  $t$ .

3. Dans la solution :  $\phi(x, z, t) = \sin(kx - \omega t) \times f(z)$ , qui caractérise une onde plane (tous les points d'un plan perpendiculaire à  $(Ox)$  présentent la même phase :  $kx - \omega t$  ; ce plan se déplace dans le sens de  $\vec{e}_x$ ),  $k$  s'appelle le nombre d'onde et  $\omega$  la pulsation de l'onde. Quant à la longueur d'onde  $\lambda$  elle vaut :

$$\lambda = \frac{k}{2\pi}$$

Étant donné que  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ , la loi (108) impose :

$$\text{div } \vec{v} = 0 \Rightarrow \text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}} \phi \right) = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 0$$

où le Laplacien de  $\phi(x, z, t)$  est défini par :

$$\Delta \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \underbrace{\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}}_{=0} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Or,  $\phi(x, z, t) = \sin(kx - \omega t) \times f(z)$  fournit :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -k^2 \sin(kx - \omega t) f(z) \text{ et } \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \sin(kx - \omega t) \times \frac{d^2 f}{dz^2}$$

Il s'ensuit que  $f(z)$  est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0$$

dont l'équation caractéristique :

$$X^2 - k^2 = 0 \Rightarrow X_1 = k \text{ et } X_2 = -k$$

révèle la forme générale de la solution :

$$f(z) = C_1 e^{X_1 z} + C_2 e^{X_2 z} = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme :

$$f(z) = \phi_0 (e^{kz} + A e^{-kz})$$

4. Au niveau du sol, la composante verticale  $v_z = \vec{v} \cdot \vec{e}_z$  de la vitesse de l'eau est nulle, de sorte qu'en  $z = -h$  :

$$v_z = \left( \overrightarrow{\text{grad}} \phi \right) \cdot \vec{e}_z = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) &= \sin(kx - \omega t) \times f(z) \Rightarrow \left. \frac{df}{dz} \right|_{z=-h} = 0 \\ &\Rightarrow k \phi_0 (e^{-kh} - A e^{kh}) = 0 \\ &\Rightarrow A e^{kh} = e^{-kh} \Rightarrow A = e^{-2kh} \end{aligned}$$

On pourra ainsi poser :

$$f(z) = \phi_0 (e^{kz} + e^{-2kh} \times e^{-kz}) = \phi_0 e^{-kh} \times [e^{k(z+h)} + e^{-k(z+h)}]$$

soit encore :

$$f(z) = 2\phi_0 e^{-kh} \times \cosh(kz + kh)$$

5. Dans l'expression :  $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  se distinguent deux termes :

- le premier :  $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$  qui rend compte de la variation de  $\vec{v}$  en fonction de  $t$  en chaque point du fluide ; en régime stationnaire ce terme est nul ;
- le second :  $(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$  qui tient compte de la variation de  $\vec{v}$  entre les points du fluide, pour une date fixée. Si  $\vec{v}$  est uniforme, ce terme est nul.

6. Dans le cadre de l'approximation :  $|(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}| \ll \left| \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \right|$ , l'équation d'Euler se simplifie :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} \simeq \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \Rightarrow \rho \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \simeq \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (110)$$

7. La définition de  $\phi$  impose :

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi \Rightarrow \rho \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \right)$$

tandis que :

$$\vec{g} = -g \vec{e}_z \Rightarrow \vec{g} = -\frac{\partial(gz)}{\partial z} \vec{e}_z = -\overrightarrow{\text{grad}} (gz)$$

Par suite, l'équation (110) devient :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \rho \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}} (\rho gz) - \overrightarrow{\text{grad}} P \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + gz + \frac{P}{\rho} \right) = \vec{0}$$

ce qui suffit à montrer qu'il existe une fonction  $C(t)$  de  $t$  seulement, telle que :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + gz + \frac{P}{\rho} = C(t)$$

Or, conformément au résultat (109) toute fonction  $\phi'(M, t) = \phi(M, t) + \Phi_0(t)$  décrit aussi bien le champ de vitesse  $\vec{v}$  :

$$\frac{\partial\phi'}{\partial t} + gz + \frac{P}{\rho} = C(t) \Rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi_0}{\partial t} + gz + \frac{P}{\rho} = C(t)$$

où la fonction  $\Phi_0(t)$  est quelconque ; notamment, on peut choisir  $\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} = C(t)$  afin de ne conserver que l'équation :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + gz + \frac{P}{\rho} = 0 \quad (111)$$

8. À la surface de l'eau,  $z = \xi$  permet d'exprimer la vitesse :

$$v_z \text{ surface} = v_z(x, z = \xi, t)$$

Du reste,  $v_z \text{ surface} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$  car  $z = \xi$  à la surface de l'eau. Il s'ensuit que :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) = v_z(x, z = \xi, t) = v_z(x, z = 0, t) + \xi \left. \frac{\partial v_z}{\partial z} \right|_{z=0}$$

À l'ordre le plus bas, cette équation devient alors :

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) = v_z(x, z = 0, t) \quad (112)$$

9. La dérivation de l'équation (111) par rapport à  $t$  procure :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

Cette équation demeure exacte à la surface de l'eau, où la pression  $P = P_0$  est constante et où  $z = \xi$ . Par conséquent :

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=\xi} + g \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) = 0$$

Or, conformément à l'identité (112) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t}(x, t) &= v_z(x, z = 0, t) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} \text{ car } \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi \\ \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=\xi} + g \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} &= 0 \end{aligned}$$

En outre :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=\xi} &\simeq \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \xi \times \left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \right|_{z=0} \\ &= \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \xi \left. \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \xi \left( \left. \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} \right) \right|_{z=0} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu de la relation (112) :

$$v_z(x, z = 0, t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=\xi} \simeq \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} + \xi \left. \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} \right|_{z=0}$$

où le terme  $\xi \times \left. \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^3} \right|_{z=0}$ , d'ordre 2 en  $\xi$ , peut être négligé de manière à ne conserver que :

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=\xi} \simeq \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} \Rightarrow \left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} + g \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (113)$$

Aussi, en adoptant l'expression :

$$\phi(x, z, t) = \sin(kx - \omega t) \times f(z) \text{ avec } f(z) = 2\phi_0 e^{-kh} \times \cosh(kz + kh)$$

on obtient :

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right|_{z=0} = -\omega^2 \sin(kx - \omega t) \times 2\phi_0 e^{-kh} \cosh(kh)$$

et :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = \sin(kx - \omega t) \times 2k\phi_0 e^{-kh} \sinh(kh)$$

Ce faisant, l'équation (113) devient :

$$-\omega^2 \cosh(kh) + gk \sinh(kh) = 0$$

d'où ressort la relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk \times \tanh(kh)$$

10. En eau peu profonde, la condition  $h \ll \lambda$  se traduit par :

$$kh = 2\pi \times \frac{h}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow \tanh(kh) \simeq kh \Rightarrow \omega^2 \simeq gh \times k^2$$

auquel cas la relation de dispersion s'écrit :  $\omega = \sqrt{gh} \times k$ .

Par suite, la vitesse de phase vaut :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gh}$$

tandis que la vitesse de groupe est définie par :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{gh}$$

11. La dispersion d'une onde se produit lorsque la vitesse de phase dépend de la fréquence de l'onde : un paquet d'ondes, constitué de plusieurs composantes spectrales, se déforme lors de sa propagation, car chaque composante progresse à sa propre vitesse. Dans le cas général, la relation de dispersion :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= gk \times \tanh(kh) \\ \Rightarrow 2\omega \frac{d\omega}{dk} &= g \times \left[ \tanh(kh) + \frac{gkh}{\cosh^2(kh)} \right] \\ \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} &= \frac{g}{2\omega} \times \left[ \tanh(kh) + \frac{gkh}{\cosh^2(kh)} \right] \end{aligned}$$

fournit une vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\frac{g}{4k \tanh(kh)}} \times \left[ \tanh(kh) + \frac{gkh}{\cosh^2(kh)} \right]$$

qui dépend de  $k$  ; il y a alors dispersion.

En revanche, en eau peu profonde, la vitesse de groupe :  $v_g = \sqrt{gh}$  est indépendante de  $k$ , ce qui révèle l'absence de phénomène dispersif.

● 145 **Concours de l'ENS**

1. À toute date  $t$ , le plan situé en  $z = 0$  reçoit le champ électrique :

$$\vec{E}_\omega(0, t) = \vec{E}_0 e^{-j\omega t}$$

Ce champ est transmis intégralement, dans le milieu situé en  $z \in [0, L]$ , avec un vecteur d'onde  $\vec{k} = k(\omega) \vec{e}_z$ , c'est-à-dire sous la forme :

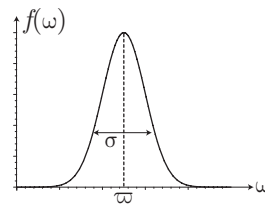
$$\vec{E}_\omega(z, t) = \vec{E}_0 e^{j[k(\omega)z - \omega t]} \text{ pour } z \in [0, L] \quad (114)$$

2. La distribution gaussienne :

$$f(\omega) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\omega - \varpi)^2}{2\sigma^2} \right]$$

est caractérisée par :

- sa valeur maximale, en  $\omega = \varpi$ , où  $\varpi$  désigne aussi la valeur moyenne de  $\omega$  :



$$\varpi = \langle \omega \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \omega \, d\omega \exp \left[ -\frac{(\omega - \varpi)^2}{2\sigma^2} \right]$$

- son écart type :

$$\sigma = \sqrt{\langle \omega^2 \rangle - \varpi^2}$$

Cet écart type caractérise la largeur de la distribution gaussienne.

3. Dans le demi-espace  $z < 0$ ,  $\vec{E}_\omega(z, t) = \vec{E}_0 e^{j(\frac{z}{c} - t)}$  conduit à :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\omega - \varpi)^2}{2\sigma^2} \right] \vec{E}_0 e^{j\omega(\frac{z}{c} - t)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\omega - \varpi)^2}{2\sigma^2} \right] \vec{E}_0 e^{j\omega q} \text{ avec } q = \frac{z}{c} - t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) \vec{E}_0 e^{j\varpi q} e^{jqx} \\ &\quad \text{en posant } x = \omega - \varpi \Rightarrow \omega = x + \varpi \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'indication fournie par l'énoncé :

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= E_0 e^{j\varpi q} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{x^2}{2\sigma^2} \right) e^{jqx} \\ &= \vec{E}_0 \times e^{-q^2 \sigma^2 / 2} \times e^{j\varpi q} \\ \Rightarrow \vec{E}(z, t) &= \vec{E}_0 \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{z}{c} - t \right)^2 \right] \times e^{j\omega \left( \frac{z}{c} - t \right)} \text{ pour } z < 0 \end{aligned}$$

En notation réelle, ce champ s'écrit :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{z}{c} - t \right)^2 \right] \times \cos \left[ \varpi \left( \frac{z}{c} - t \right) \right]$$

ce qui montre que l'onde a pour enveloppe :

$$f(z, t) = E_0 \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2} \left( \frac{z}{c} - t \right)^2 \right]$$

qui se déplace, sans déformation, avec une vitesse  $v$  telle que :

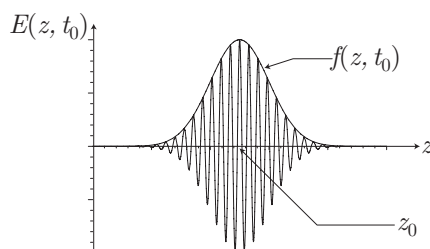
$$\begin{aligned} f(z + dz, t + dt) &= f(z, t) \text{ si } dz = v dt \\ \Rightarrow \frac{z + dz}{c} - (t + dt) &= \frac{z}{c} - t \\ \Rightarrow \frac{v dt}{c} - dt &= 0 \Rightarrow v = c \end{aligned}$$

À une date  $t = t_0$ ,  $f(z)$  admet une valeur *maximum* en  $z = z_0$  telle que :  $\frac{z_0}{c} - t_0 = 0 \Rightarrow z_0 = ct_0$ . En outre :

$$f(z, t_0) = E_0 \exp \left[ -\frac{\sigma^2}{2c^2} (z - z_0)^2 \right]$$

est une gaussienne centrée sur  $z_0$  et dont la largeur  $\Delta z_e$  s'identifie à l'écart-type :

$$f(z, t_0) = E_0 \exp \left[ -\frac{(z - z_0)^2}{2 \Delta z_e^2} \right] \Rightarrow \Delta z_e = \frac{c}{\sigma}$$



De ce qui précède, il ressort que le *maximum* de l'enveloppe du paquet d'ondes pénètre dans le milieu ( $z = 0$ ) à la date  $t_e = 0$ .

4. Afin de soulager les notations, nous poserons :  $k_0 = f(\varpi)$  et  $k'_0 = \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\varpi}$ , de sorte que :

$$k(\omega) \simeq k(\varpi) + (\omega - \varpi) \times k'(\varpi) = k_0 + (\omega - \varpi) k'_0$$

Ce faisant, dans la région  $0 < z < L$ , le champ électrique vaut :

$$\vec{E}(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(\omega - \varpi)^2}{2\sigma^2} \right] \vec{E}_\omega(z, t)$$

où  $\vec{E}_\omega(z, t)$  est donné par le résultat (114) :

$$\begin{aligned}\vec{E}_\omega(z, t) &= \vec{E}_0 e^{j[k(\omega)z - \omega t]} = \vec{E}_0 e^{j[k_0 z + k'_0(\omega - \varpi)z - \omega t]} \\ \Rightarrow \vec{E}(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\omega - \varpi)^2}{2\sigma^2}\right] \vec{E}_0 e^{j[k_0 z + k'_0(\omega - \varpi)z - \omega t]}\end{aligned}$$

Le changement de variable  $\omega - \varpi = x \Rightarrow \omega = x + \varpi$  et  $d\omega = dx$  conduit alors à :

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \times \vec{E}_0 e^{j[k_0 z + k'_0 x z - x t - \varpi t]} \\ &= \vec{E}_0 e^{j(k_0 z - \varpi t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) e^{jqx} \\ &\quad \text{avec } q = k'_0 z - t\end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu du rappel de l'énoncé :

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{j(k_0 z - \varpi t)} e^{-\frac{\sigma^2}{2} (k'_0 z - t)^2} \quad (115)$$

5. Soit  $k(\omega) = k_r(\omega) + j k_i(\omega)$  la fonction complexe telle que :

$$k_0 = k(\varpi) = k_r(\varpi) + j k_i(\varpi) = k_{r0} + j k_{i0} \text{ avec } \begin{cases} k_{r0} = k_r(\varpi) \\ k_{i0} = k_i(\varpi) \end{cases}$$

et :

$$\begin{aligned}k'_0 &= \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\varpi} = \left. \frac{dk_r}{d\omega} \right|_{\varpi} + j \left. \frac{dk_i}{d\omega} \right|_{\varpi} = k'_{r0} + j k'_{i0} \\ \text{où } k'_{r0} &= \left. \frac{dk_r}{d\omega} \right|_{\varpi} \text{ et } k'_{i0} = \left. \frac{dk_i}{d\omega} \right|_{\varpi}\end{aligned}$$

Ces notations permettent de poser :

$$e^{j(k_0 z - \varpi t)} = e^{j(k_{r0} z + j k_{i0} z - \varpi t)} = e^{-k_{i0} z} \times e^{j(k_{r0} z - \varpi t)}$$

et :

$$\begin{aligned}e^{-\frac{\sigma^2}{2} (k'_0 z - t)^2} &= e^{-\frac{\sigma^2}{2} (k'_{r0} z + j k'_{i0} z - t)^2} \\ &= e^{-\frac{\sigma^2}{2} [(k'_{r0} z - t)^2 - k'_{i0}{}^2 z^2 + 2j k'_{i0} z (k'_{r0} z - t)]}\end{aligned}$$

Par conséquent, l'identité (115) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= \vec{E}_0 e^{-k_{i0} z} \times e^{j(k_{r0} z - \varpi t)} \times e^{-\frac{\sigma^2}{2} [(k'_{r0} z - t)^2 - k'_{i0}{}^2 z^2]} \times e^{-j\sigma^2 k'_{i0} z (k'_{r0} z - t)} \\ &= \vec{E}_0 \underbrace{e^{j[k_{r0} z - \varpi t - \sigma^2 k'_{i0} z (k'_{r0} z - t)]}}_{e^{j\theta(z, t)}} \times \underbrace{e^{-\frac{\sigma^2}{2} [(k'_{r0} z - t)^2 - k'_{i0}{}^2 z^2] - k_{i0} z}}_{f(z, t)}\end{aligned}$$

L'enveloppe de  $\vec{E}(z, t)$  a donc pour expression :

$$f(z, t) = e^{\phi(z, t)} \text{ avec } \phi(z, t) = -\frac{\sigma^2}{2} [(k'_{r0} z - t)^2 - k'_{i0}{}^2 z^2] - k_{i0} z$$



6. À une date  $t_m$ , cette enveloppe admet un *maximum* en  $z = z_m$  tel que :

$$\left. \frac{df}{dz} \right|_{z_m} = 0 \Rightarrow e^{\phi(z_m, t_m)} \times \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z_m} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z_m} = 0$$

Or :

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dz} &= -\frac{\sigma^2}{2} \left[ 2k'_{r0} (k'_{r0} z - t) - k'_{i0}{}^2 \times 2z \right] - k_{i0} \\ &= -\sigma^2 \left[ (k'_{r0}{}^2 - k'_{i0}{}^2) z - k'_{r0} t \right] - k_{i0} \end{aligned}$$

Par suite, le *maximum* de l'enveloppe est repéré en  $r = z_m$ , tel que :

$$\sigma^2 \left[ (k'_{r0}{}^2 - k'_{i0}{}^2) z_m - k'_{r0} t_m \right] = -k_{i0}$$

de sorte que ce *maximum* se déplace conformément à la loi :

$$z_m = \frac{1}{k'_{r0}{}^2 - k'_{i0}{}^2} \left( k'_{r0} t_m - \frac{k_{i0}}{\sigma^2} \right)$$

Ce faisant, le *maximum* du paquet d'ondes se déplace à une vitesse :

$$v_m = \frac{dz_m}{dt_m} = \frac{k'_{r0}}{k'_{r0}{}^2 - k'_{i0}{}^2}$$

Ce *maximum* sort du milieu à une date  $t_m = t_s$  qui assure :

$$\begin{aligned} z_m = L &\Rightarrow \frac{1}{k'_{r0}{}^2 - k'_{i0}{}^2} \left( k'_{r0} t_s - \frac{k_{i0}}{\sigma^2} \right) = L \\ &\Rightarrow t_s = \left[ (k'_{r0}{}^2 - k'_{i0}{}^2) L + \frac{k_{i0}}{\sigma^2} \right] \times \frac{1}{k'_{r0}} \end{aligned}$$

7. Le *maximum* du paquet d'ondes entre dans le milieu à une date  $t_e = 0$  et en ressort à la date  $t_s$ , ce qui signifie qu'il parcourt la longueur  $L$  du milieu à une vitesse moyenne :

$$v_g = \frac{L}{t_s - t_e} \Rightarrow v_g = \frac{k'_{r0} \times L}{(k'_{r0}{}^2 - k'_{i0}{}^2) L + k_{i0}/\sigma^2}$$

Dans le cas où le milieu est non absorbant,  $k_{i0} = 0$  et  $k'_{i0} = 0$ , de sorte que :

$$v_g = \frac{k'_{r0}}{k'_{r0}{}^2} = \frac{1}{k'_{r0}} \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} \text{ car } k = k_r$$

Cette vitesse est communément appelée *vitesse de groupe*.

## ● 146 ————— Lycée Rabelais, Rennes

1. Dans le vide, le champ électrique obéit à l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Pour l'onde considérée, elle se traduit par :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0$$

d'où :

$$E_z \times \left[ \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \right] = 0 \Rightarrow \omega = \frac{\pi c \sqrt{2}}{a}$$

2. Pour exprimer le champ magnétique, utilisons l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned} \vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ où } \vec{\text{rot}} \vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial y} \vec{e}_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \vec{e}_y = j\omega \vec{B} \\ \Rightarrow j\omega \vec{B} &= \frac{\pi E_0}{a} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_y \right] e^{-j\omega t} \\ \Rightarrow \vec{B} &= -\frac{\pi E_0}{a\omega} \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_x - \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_y \right] \times j e^{-j\omega t} \end{aligned}$$

ce qui donne, en notation réelle :

$$\vec{B} = -\frac{\pi E_0}{a\omega} \times \left[ \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_x - \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_y \right] \times \sin(\omega t)$$

et :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

3. L'énergie électrique contenue dans un volume  $V$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_e &= \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint_V E^2 d\tau \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \iiint_V \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t) dx dy dz \\ &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \cos^2(\omega t) \times \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) dy \times \int_0^a dz \\ \Rightarrow \mathcal{E}_e &= \frac{\varepsilon_0 E_0^2 a^3}{8} \cos^2(\omega t) \text{ car } \int_0^a \sin^2\left(\frac{\pi u}{a}\right) du = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

De même, l'énergie magnétique confinée dans un volume  $V$  vaut :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V B^2 d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{\pi^2 E_0^2 a}{2\omega^2} \sin^2(\omega t)$$

Étant donné que  $\omega^2 = 2 \times \left(\frac{\pi c}{a}\right)^2$ , on obtient finalement :

$$\mathcal{E}_m = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 a^2}{8} \sin^2(\omega t) \text{ car } \frac{1}{\mu_0 c^2} = \varepsilon_0$$

Au cours du temps, l'énergie oscille de sa forme magnétique à sa forme électrique ; on peut même remarquer que :

$$\langle \mathcal{E}_e \rangle = \langle \mathcal{E}_m \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 a^2}{16}$$

● 147 ————— Lycée Lakanal, Sceaux

1. L'équation de Maxwell-Gauss :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  s'écrit simplement, dans le vide :

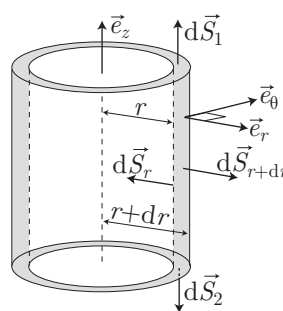
$$\operatorname{div} \vec{E} = 0$$

Le flux de  $\vec{E}$  à travers une surface fermée est donc nul :

$$\phi = \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Définissons la surface fermée délimitée par  $S_r$ , cylindre de rayon  $r$ , de hauteur  $H$ ,  $S_{r+dr}$ , cylindre de rayon  $r + dr$  et de même hauteur,  $S_1$  et  $S_2$  les couronnes haute et basse. Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} \phi &= \iint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S}_r + \iint_{S_{r+dr}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{r+dr} \\ &+ \iint_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 \end{aligned}$$



$\vec{E}(r, z)$  étant perpendiculaire à  $d\vec{S}_1$  et à  $d\vec{S}_2$ , les deux dernières intégrales sont nulles. Les directions de  $d\vec{S}_r = -dS_r \vec{e}_r$  et de  $d\vec{S}_{r+dr} = dS_{r+dr} \vec{e}_r$  conduisent, en outre, à :

$$\iint_{S_r} \vec{E} \cdot d\vec{S}_r = -e^{j(\omega t - kz)} \iint_{S_r} E(r) dS_r$$

et :

$$\iint_{S_{r+dr}} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{r+dr} = e^{j(\omega t - kz)} \iint_{S_{r+dr}} E(r + dr) dS_{r+dr}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \phi &= 2\pi H e^{j(\omega t - kz)} \times [(r + dr) E(r + dr) - r E(r)] \\ &= 2\pi H e^{j(\omega t - kz)} \times \frac{d}{dr} [r E(r)] \times dr \end{aligned}$$

L'égalité  $\phi = 0$  implique alors que  $r \times E(r)$  est constant. Comme nous connaissons la valeur  $E(R_1) = E_0$ , nous en déduisons finalement que :

$$\vec{E} = \frac{E_0 R_1}{r} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_r$$

2. Le champ magnétique est porté par le vecteur  $\vec{e}_\theta$  ; il s'écrit :  $\vec{B} = B(r, \theta, z, t) \vec{e}_\theta$ , expression dans laquelle la symétrie cylindrique impose :  $B(r, \theta, z, t) = B(r, z, t)$ .

La forme intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday s'écrit, quant à elle :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \left( \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \right)$$

$S$  étant une surface qui s'appuie sur un contour  $C$ . Choisissons, comme contour, un cadre  $(A, B, C, D)$ , dans un plan dont l'angle polaire  $\theta$  demeure constant, de hauteur  $dz$  et de largeur  $dr$ .

Pour le sens d'orientation choisi pour  $C$ , la surface  $S$  est orientée de sorte que  $d\vec{S} = -dS \vec{e}_\theta$ .

Le flux de  $\vec{B}$  à travers cette surface élémentaire,  $dS = dr dz$  s'écrit alors :

$$\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B(r, t) dr dz$$

Le calcul de la circulation de  $\vec{E}$  donne, quant à lui :

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= E(r) e^{j(\omega t - kz)} dr dz - E(r) e^{j[\omega t - k(z + dz)]} dr dz \\ &= E(r) e^{j(\omega t - kr)} dr dz \times (1 - e^{-jk dz}) \end{aligned}$$

Étant donné que  $dz$  est très petit :  $e^{-jk dz} \simeq 1 - jk dz$ , ce qui permet de simplifier l'expression de la circulation de  $\vec{E}$  :

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = jk E(r) e^{j(\omega t - kz)} dr dz$$

Il suffit alors d'identifier les deux termes de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\frac{dB}{dt} = jk E(r) e^{j(\omega t - kz)} \Rightarrow \vec{B} = \frac{k E(r)}{\omega} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_\theta$$

3. Le vecteur de Poynting s'écrit, en notation réelle :

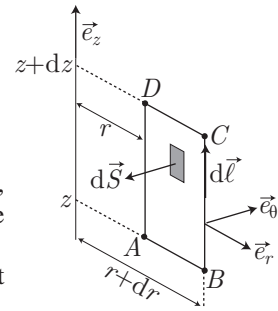
$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{k E^2(r)}{\omega \mu_0} \cos^2(\omega t - kz) \vec{e}_z$$

Il est bien dirigé dans le sens de propagation de l'onde et sa valeur moyenne temporelle vaut :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{k E^2(r)}{2\omega \mu_0} \vec{e}_z = \frac{k E_0^2 R_1^2}{2\omega \mu_0 r^2} \vec{e}_z$$

Du reste, la puissance est donnée par le flux du vecteur de Poynting à travers une surface de base en forme de couronne de rayon  $r \in [R_1, R_2]$  :

$$\begin{aligned} \langle \varphi \rangle &= \iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot (dS \vec{e}_z) = \iint_S \langle \vec{R} \rangle \cdot (r d\theta dr \vec{e}_z) \\ &= \frac{k E_0^2 R_1^2}{2\mu_0 \omega} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \times \int_0^{2\pi} d\theta \Rightarrow \langle \varphi \rangle = \frac{\pi R_1^2 E_0^2 k}{\mu_0 \omega} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) \end{aligned}$$



● 148 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. De l'équation de Maxwell :  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ , se déduisent trois équations différentielles :

$$\begin{cases} -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial E_x}{\partial t} \\ 0 = \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{cases}$$

Sachant que  $B_y = B_0(x) e^{i(\omega t - kz)}$ , nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial z} &= -ik B_0(x) e^{i(\omega t - kz)} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{ikc^2}{\varepsilon_r} B_0(x) e^{i(\omega t - kz)} \\ \Rightarrow E_x &= \frac{kc^2}{\omega \varepsilon_r} B_0(x) e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned}$$

De la même manière, on a :  $\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{dB_0}{dx} e^{i(\omega t - kz)}$ , ce qui donne :

$$E_z = \frac{c^2}{i\omega \varepsilon_r} \frac{dB_0(x)}{dx}$$

Dans le milieu I, les relations sont similaires, à condition de remplacer  $\varepsilon_r$  par 1, de sorte que :

$$E_x = \frac{kc^2}{\omega} B_0(x) e^{i(\omega t - kz)} \text{ et } E_z = \frac{c^2}{i\omega} \frac{dB_0(x)}{dx}$$

2. Les relations :  $\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B}$ ,  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ,  
 $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  et  $\text{div} \vec{B} = 0$  conduisent à :

$$-\Delta \vec{B} = \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \Delta \vec{B} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

avec :

$$\Delta \vec{B} = \left( \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} \right) \vec{u}_y = \left[ \frac{d^2 B_0(x)}{dx^2} - k^2 B_0(x) \right] e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$$

De plus, la relation  $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\omega^2 B_0(x) e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_y$  fournit directement l'équation de propagation du champ magnétique dans le milieu II :

$$\frac{d^2 B_0(x)}{dx^2} + \left( \frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2} - k^2 \right) \times B_0(x) = 0$$

Par analogie, dans le milieu I, le champ magnétique vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 B_0(x)}{dx^2} + \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \right) \times B_0(x) = 0$$

3. Dans le milieu I, où le champ magnétique est de type :

$$B_0(x) = A_1 e^{\alpha x} + B_1 e^{-\alpha x}$$

les conditions :  $\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 < 0$ , avec  $A_1 = 0$  assurent la convergence de cette solution. C'est pourquoi on pose :

$$\alpha^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow B_0(x) = B_1 e^{-\alpha x}$$

En revanche, dans le milieu II, on doit avoir :  $\frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2} - k^2 > 0$ , en raison de quoi on pose :

$$\beta^2 = \frac{\varepsilon_r \omega^2}{c^2} - k^2 \Rightarrow B_0(x) = A'_1 \cos(\beta x) + B'_1 \sin(\beta x) = B_2 \cos(\beta x + \phi)$$

On montre immédiatement que :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_r - 1)$$

4. La fonction  $B_0(x)$  est continue en  $x = a$  puisqu'il n'y a pas de courant sur la surface de séparation entre l'isolant et le vide.
5. En  $x = 0$ , c'est la composante tangentielle du champ électrique qui est continue. Comme est nulle dans le métal :

$$E_z(x = 0^+) = 0 = -\frac{ic^2}{\omega \varepsilon_r} \left. \frac{dB_0}{dx} \right|_{x=0}$$

c'est-à-dire :

$$\left. \frac{dB_0}{dx} \right|_{x=0} = -\beta B_2 \sin \phi = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

6. En  $x = a$ , la continuité de  $B_0(x)$  impose :  $B_1 e^{-\alpha a} = B_2 \cos(\beta a)$ . De plus, la continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$ , toujours en  $x = a$ , se traduit par :

$$\left. \frac{dB_0}{dx} \right|_{x=a^+} = \frac{1}{\varepsilon_r} \left. \frac{dB_0}{dx} \right|_{x=a^-} \Rightarrow \alpha B_1 e^{-\alpha a} = B_2 \frac{\beta}{\varepsilon_r} \sin(\beta a)$$

7. Si  $\sin(\beta a) = 0$  ou  $\cos(\beta a) = 0$  alors  $B_1 = B_2 = 0$ . Donc, de façon générale, il n'y a pas de solution si :

$$\beta a = \frac{p\pi}{2} \text{ avec } p \in \mathbb{Z}$$

8. Le rapport :  $\frac{\alpha B_1 e^{-\alpha a}}{B_1 e^{-\alpha a}} = \frac{B_2 \beta \sin(\beta a)}{\varepsilon_r B_2 \cos(\beta a)}$  donne immédiatement :

$$\alpha \varepsilon_r = \beta \tan(\beta a)$$

● **149** ————— **Lycée Amyot, Melun**

1. Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

2. Nous savons que la divergence d'un rotationnel est nulle, auquel cas :

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{B}) = 0 = \operatorname{div} (\mu_0 \vec{j}) + \mu_0 \varepsilon_0 \operatorname{div} \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{E})$$

De l'équation :  $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$  découle l'expression de la conservation de la charge :

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

3. On sait que, dans un milieu conducteur, la loi locale d'Ohm :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  implique que :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{div} \vec{j}$$

L'équation de Maxwell-Gauss :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\gamma \rho}{\varepsilon_0}$$

couplée à l'équation de conservation de la charge, donne alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \rho = 0$$

Cette équation a pour solution :

$$\rho(M, t) = \rho(M, 0) e^{-\gamma t / \varepsilon_0} = \rho_0 e^{-\gamma t / \varepsilon_0}$$

La constante de temps valant :

$$\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma} = 8,8 \cdot 10^{-19} \text{ s}$$

on en déduit que si, à un instant donné, la fonction  $\rho$  est non nulle en un point de l'espace, alors elle va très vite tendre vers zéro. Dans la suite, nous pourrions considérer que  $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ .

4. On doit comparer le courant de conduction :  $\vec{j} = \gamma \vec{E}$  au courant de déplacement :

$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ . Étant donné que, pour les fonctions sinusoïdales, la dérivée temporelle  $\frac{\partial}{\partial t}$  équivaut à une multiplication par  $j\omega$ , la norme du courant de déplacement

est donnée par :  $\varepsilon_0 \omega E$  et celle du courant de conduction par  $\gamma E$ . Les courants de déplacement dans le métal sont donc négligeables devant les courants de conduction à condition que :

$$\varepsilon_0 \omega E \ll \gamma E \Rightarrow \omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} \Rightarrow \omega \ll 1,13 \cdot 10^{18} \text{ s}^{-1} \Rightarrow f \ll 1,8 \cdot 10^{17} \text{ Hz}$$

Dans ce cas, on se trouvant dans l'approximation des régimes quasi permanents ; dans la suite, nous pourrions considérer que :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

5. Nous avons l'égalité :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = \overrightarrow{\text{grad}} \left( \underbrace{\text{div} \vec{E}}_{=0} \right) - \Delta \vec{E}$$

avec  $\overrightarrow{\text{rot}} \left( \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = \overrightarrow{\text{rot}} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} \right)$

Étant donné que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \gamma \vec{E}$ , nous obtenons :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} \right) = -\mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

d'où découle l'équation vérifiée par le champ électrique dans le métal :

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

Il s'agit d'une équation de diffusion.

Injectons la solution  $\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{j(\omega t - k_t z)}$  dans l'équation précédente, sachant que :

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = j\omega \vec{E} \text{ et } \Delta \vec{E} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ E_{0t} e^{j(\omega t - k_t x)} \right] \vec{u}_x = -k_t^2 E_{0t} e^{j(\omega t - k_t x)} \vec{u}_x$$

Nous obtenons ainsi l'équation :

$$k_t^2 = -j\omega\mu_0\gamma$$

qui admet comme solutions :

$$k_t = (1 - j) \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}} \text{ et } k_t = (j - 1) \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}$$

La seconde solution donne un champ électrique qui devient infini dans le métal, ce qui n'est pas acceptable physiquement. La partie imaginaire de  $k_t$  représente le terme d'amortissement pour la propagation de l'onde dans le métal, tandis la partie réelle représente le terme de propagation. Si l'on pose :  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}}$ , on aura :

$$\vec{E}_t = E_{0t} e^{-x/\delta} e^{j(\omega t - x/\delta)} \vec{u}_x$$



6. La vitesse de phase est donnée par :  $V_\varphi = \frac{\omega}{k_{\text{prop.}}}$  où  $k_{\text{prop.}}$  représente le nombre d'onde caractéristique de la propagation dans le terme  $e^{j(\omega t - k_{\text{prop.}}x)}$ . Ainsi :

$$k_{\text{prop.}} = \frac{1}{\delta} \Rightarrow V_\varphi = \omega\delta \Rightarrow V_\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}}$$

Cette vitesse dépend de  $\omega$ , ce qui signifie que le milieu est dispersif.

En notant  $k_{\text{prop.}} = \frac{1}{\delta}$  le nombre d'onde spatial :

$$k_{\text{prop.}} = \frac{1}{\delta} \Rightarrow k_{\text{prop.}} = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\gamma}{2}}$$

la vitesse de groupe :  $V_g = \frac{d\omega}{dk_{\text{prop.}}}$  vérifie :

$$\frac{1}{V_g} = \frac{dk_{\text{prop.}}}{d\omega} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{\mu_0\gamma}{2\omega}} \Rightarrow V_g = 2 \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0\gamma}} \Rightarrow V_g = 2V_\varphi$$

## ● 150 ————— Lycée Descartes, Tours

1. Le champ résultant s'écrit, en notation réelle :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_0 \vec{e}_z \left[ \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM}) + \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM}) \right]$$

avec :

$$\vec{k}_1 = k_1 \cos \theta \vec{e}_x + k_1 \sin \theta \vec{e}_y \text{ et } \vec{k}_2 = k_2 \cos \theta \vec{e}_x - k_2 \sin \theta \vec{e}_y$$

La propagation se faisant dans le vide, chaque onde obéit à l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Comme de surcroît les deux ondes étudiées sont planes, progressives et monochromatiques, les normes  $\|\vec{k}_1\| = k_1$  et  $\|\vec{k}_2\| = k_2$  vérifient alors :

$$k_1^2 = k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k_1 = k_2 = k = \frac{\omega}{c}$$

Le champ résultant est donc donné par :

$$\vec{E}(M) = E_0 \vec{e}_z [\cos(\omega t - kx \cos \theta - ky \sin \theta) + \cos(\omega t - kx \cos \theta + ky \sin \theta)]$$

En utilisant l'identité trigonométrique :

$$\cos a + \cos b = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

nous obtenons alors :

$$\vec{E}(M) = 2E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t - kx \cos \theta) \times \cos(ky \sin \theta)$$

Le champ magnétique peut être obtenu à partir de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ 0 = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \end{cases}$$

ce qui signifie que :

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} = -2E_0 k \sin \theta \sin(ky \sin \theta) \cos(\omega t - kx \cos \theta)$$

et :

$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} = -2E_0 k \cos \theta \cos(ky \sin \theta) \sin(\omega t - kx \cos \theta)$$

Étant donné que l'on ne s'intéresse qu'à des termes de propagation, nous posons :  $B_z = 0$ . De ce fait :

$$\begin{cases} B_x = \frac{2E_0}{\omega} k \sin \theta \sin(ky \sin \theta) \sin(\omega t - kx \cos \theta) \\ B_y = -\frac{2E_0}{\omega} k \cos \theta \cos(ky \sin \theta) \cos(\omega t - kx \cos \theta) \end{cases}$$

d'où découle l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c} \sin \theta \sin(ky \sin \theta) \sin(\omega t - kx \cos \theta) \vec{e}_x - \frac{2E_0}{c} \cos \theta \cos(ky \sin \theta) \cos(\omega t - kx \cos \theta) \vec{e}_y$$

2. Par définition, le vecteur de Poynting vaut :

$$\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = -E_z B_y \vec{e}_x + E_z B_x \vec{e}_y$$

On en déduit les composantes de  $\vec{R}$  :

$$R_x = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(ky \sin \theta) \cos^2(\omega t - kx \cos \theta) \cos \theta \quad R_z = 0$$

et :

$$R_y = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \cos(ky \sin \theta) \cos(\omega t - kx \cos \theta) \sin(ky \sin \theta) \sin(\omega t - kx \cos \theta) \sin \theta$$

Compte tenu des valeurs moyennes, dans le temps :

$$\langle \cos^2(\omega t - kx \cos \theta) \rangle = \frac{1}{2} \text{ et } \langle \cos(\omega t - kx \cos \theta) \times \sin(\omega t - kx \cos \theta) \rangle = 0$$

la moyenne temporelle du vecteur de Poynting vaut finalement :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(ky \sin \theta) \cos \theta \vec{e}_x$$

3. La vitesse de phase de cette onde est donnée par :

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k_{\text{prop.}}} = \frac{\omega}{k \cos \theta}$$

car le nombre d'onde  $k_{\text{prop.}}$  caractérisant la propagation est celui qui intervient dans les expressions  $\cos(\omega t - k_{\text{prop.}}x)$  et  $\sin(\omega t - k_{\text{prop.}}x)$

4. Dans le cas où  $\theta = 0$ , les expressions précédentes deviennent :

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = 2E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t - kx) \\ \vec{B} = -\frac{2E_0}{c} \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{R} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx) \vec{e}_x \\ \langle \vec{R} \rangle = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c} \vec{e}_x \end{cases}$$

On retrouve la propagation, selon  $\vec{e}_x$ , d'une onde plane d'amplitude  $2E_0$ , la vitesse de phase valant  $c$ .

En revanche, dans le cas où  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , les expressions :

$$\begin{cases} \vec{E}(M) = 2E_0 \vec{e}_z \cos(\omega t) \cos(ky) \\ \vec{R} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c} \cos(ky) \cos(\omega t) \sin(ky) \sin(\omega t) \vec{e}_y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{B} = \frac{2E_0}{c} \sin(ky) \sin(\omega t) \vec{e}_x \\ \langle \vec{R} \rangle = \vec{0} \end{cases}$$

montrent qu'on se trouve dans le cas d'une onde stationnaire ; l'énergie ne se propage pas.

## ● 151 ————— Lycée Condorcet, Paris

1. L'équation de Maxwell-Faraday permet de calculer le champ magnétique :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \\ -\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial z} \\ -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial y} \end{cases}$$

d'où l'on déduit, en notation réelle :

$$E = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \times \cos(\omega t - kz) \Rightarrow \begin{cases} B_x = 0 \\ B_y = \frac{kE_0}{\omega} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos(\omega t - kz) \\ B_z = \frac{E_0 \pi}{a\omega} \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \end{cases}$$

2. Le vecteur de Poynting :  $\vec{R} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$  s'écrit alors :  $\vec{R} = R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z$ , avec :

$$\begin{cases} R_y = -\frac{\pi E_0^2}{a\omega\mu_0} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin(\omega t - kz) \cos(\omega t - kz) \\ R_z = \frac{kE_0^2}{\omega\mu_0} \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos^2(\omega t - kz) \end{cases}$$

Des valeurs moyennes, dans le temps :

$$\langle \sin(\omega t - kz) \times \cos(\omega t - kz) \rangle = 0 \text{ et } \langle \cos^2(\omega t - kz) \rangle = \frac{1}{2}$$

se déduit la valeur moyenne de  $\vec{R}$  dans le temps :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{kE_0^2}{2\omega\mu_0} \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) \vec{e}_z$$

qui a pour valeur moyenne, dans l'espace :

$$\langle \langle \vec{R} \rangle \rangle = \frac{kE_0^2}{4\omega\mu_0} \vec{e}_z$$

La puissance moyenne qui traverse une section perpendiculaire de guide vaut :

$$\phi = \iint_{\pi a^2} \vec{R} \cdot dS \vec{e}_z \Rightarrow \phi = \frac{kE_0^2 a^2}{2\mu_0 \omega}$$

3. L'onde se propage dans le vide. Elle obéit donc à l'équation de d'Alembert :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

avec :  $\Delta \vec{E} = \left( \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} \right) \vec{e}_z$  et  $E = E_0 \vec{e}_x \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) e^{j(\omega t - kz)}$ . Par conséquent :

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} = - \left[ k^2 + \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 \right] \vec{E} \\ \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\omega^2 \vec{E} \end{cases} \Rightarrow k^2 = \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - \left( \frac{\pi}{a} \right)^2$$

On obtient ainsi :  $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_C^2}{c^2}$  si l'on pose :  $\omega_C = \frac{\pi c}{a}$ . Pour que l'onde se propage, il faut donc que :

$$k > 0 \Rightarrow \omega > \omega_C = \frac{\pi c}{a}$$

4. La vitesse de phase se définit comme :

$$V_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_C^2}{\omega^2}}}$$

La vitesse de groupe se définit, quant à elle, par :

$$\frac{1}{V_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{d}{d\omega} \left( \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_C^2}}{c} \right) = \frac{\omega}{c \sqrt{\omega^2 - \omega_C^2}}$$
$$\Rightarrow V_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_C^2}{\omega^2}}$$

5. Les relations de continuité du champ électrique imposent :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{1 \rightarrow 2}$$

Sachant que le champ électrique est nul dans un métal parfait, on obtient alors :

$$\sigma(a, y, z, t) = -\varepsilon_0 E_0 \cos(\omega t - kz) \text{ et } \sigma(0, y, z, t) = -\sigma(a, y, z, t)$$



## Chapitre 6

# Thermodynamique

### 6.1 Rappels de première année

#### 6.1.1 Éléments de statique des fluides

**Définition 1** On appelle gaz parfait un gaz dont les constituants sont de volume propre négligeable, sans interaction les uns avec les autres et dont la viscosité est nulle.

L'équation d'état d'un gaz parfait lie sa pression  $p$  (en Pa), son volume  $V$  (en  $\text{m}^3$ ), sa température  $T$  (en K) et sa quantité de matière  $n$  (en moles) :

$$pV = nRT$$

où  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  désigne la constante molaire des gaz parfaits.

**⚠** Le nombre  $n$  de moles de gaz est celui qui est responsable de la pression  $p$ . Par exemple, dans un mélange de  $\text{O}_2$  et  $\text{N}_2$  à la pression  $p$ , écrire  $pV = n_{\text{O}_2}RT$  serait faux ; il conviendrait de poser :  $pV = (n_{\text{O}_2} + n_{\text{N}_2})RT$ .

**Remarque** – Sauf indication contraire, les gaz mentionnés dans les énoncés sont supposés parfaits.

Soit un fluide en équilibre, de masse volumique  $\mu$ , immergé dans le champ de pesanteur d'intensité  $g$ . La pression  $p$  à l'intérieur de ce fluide varie en fonction de l'altitude  $z$  conformément à la loi :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g \quad (1)$$



Dans la troposphère, la loi d'évolution de la température est :

$$T(z) = T_0 - az$$

où  $T_0$  et  $a$  sont des constantes.

En déduire la loi de pression  $p(z)$  en fonction de  $p_0$  (pression lorsque  $z = 0$ ),  $a$ ,  $T_0$ ,  $M$  (masse molaire de l'air),  $g$  (intensité de la pesanteur) et  $R$  (constante molaire des gaz parfaits).

**RÉPONSE** La variation de  $p$  en fonction de  $z$  est accessible à partir de la loi (1), dans laquelle  $\mu$  doit être explicité (l'air est un fluide compressible). Or, une masse  $m$  d'air, occupant un volume  $V$ , contient  $n$  moles de molécules, de masse molaire moyenne  $M = \frac{m}{n} \Rightarrow n = \frac{m}{M}$  et vérifie l'équation d'état des gaz parfaits :

$$pV = nRT = m \frac{RT}{M} \Rightarrow \mu = \frac{m}{V} = p \frac{M}{RT} \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -p \frac{Mg}{RT}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R} \times \frac{dz}{T}$$

c'est-à-dire :

$$\int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{R} \int_0^z \frac{dz}{T_0 + az} \Rightarrow \ln \left[ \frac{p(z)}{p_0} \right] = -\frac{Mg}{Ra} \ln \left( \frac{T_0 + az}{T_0} \right)$$

d'où il découle que :

$$p(z) = p_0 \times \left( 1 + \frac{az}{T_0} \right)^{-Mg/Ra}$$

**Remarque** – Dans un problème à trois dimensions, la loi (1) doit être remplacée par :

$$\vec{\text{grad}} p = \vec{f}_v$$

où  $\vec{f}_v$  désigne la densité volumique de force, c'est-à-dire le rapport de la force  $\delta \vec{f}$  par le volume  $\delta V$  sur lequel elle s'exerce :  $\vec{f}_v = \frac{\delta \vec{f}}{\delta V}$ .

## 6.1.2 Premier principe de la thermodynamique

### 6.1.2.1 L'énergie interne

Soit  $\mathcal{E}_c^*$  l'énergie cinétique d'un système dans son référentiel barycentrique et soit  $\mathcal{E}_{p_{\text{int}}}$  l'énergie potentielle de ce système, liées à ses interactions internes. On appelle énergie interne la grandeur :

$$U = \mathcal{E}_c^* + \mathcal{E}_{p_{\text{int}}}$$

Un gaz parfait obéit à la première loi de Joule :

l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température.

C'est pourquoi sa variation est proportionnelle à celle de la température :

$$dU = C_V dT \text{ ou } \Delta U = C_V \Delta T$$

$C_V$  représente la capacité thermique à volume constant du gaz parfait.

Si  $n$  désigne le nombre de moles de ce gaz et  $m$  sa masse, on définit également les capacités thermiques molaire  $C_{V_m}$  et massique  $c_V$  à volume constant, de telle manière que :

$$dU = nC_{V_m} dT \text{ et } dU = mc_V dT$$



### 6.1.2.2 Bilan d'énergie

Le système peut recevoir, de l'extérieur :

- de l'énergie thermique (chaleur) :  $\delta Q$  ;
- un travail des forces de pression, si le système est déformable :

$$\delta W_p = -p_e dV$$

où  $p_e$  désigne la pression extérieure qui s'exerce sur le système, dont le volume  $V$  varie de  $dV$  ;

- un travail autre que celui des forces de pression (travail mécanique d'une turbine, travail électrique,...) :  $W'$ .

Le travail total des forces provenant de l'extérieur au système vaut ainsi :

$$W_{\text{ext}} = W_p + W'$$

Sous l'influence de ces différents apports, l'énergie mécanique  $\mathcal{E}$  du système varie de :

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathcal{E}_c + \Delta \mathcal{E}_c^* + \Delta \mathcal{E}_{\text{pint}} + \Delta \mathcal{E}_{\text{pext}}$$

où  $\Delta \mathcal{E}_c$  désigne la variation d'énergie cinétique de son barycentre,  $\Delta \mathcal{E}_{\text{pext}} = -W_{\text{ext}}^{(c)}$  la variation de l'énergie potentielle provenant du travail  $W_{\text{ext}}^{(c)}$  des forces conservatives qui proviennent de l'extérieur.

La variation  $\Delta \mathcal{E}$  provient alors du travail des forces dissipatives extérieures et de la chaleur reçus par le système :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} = W_{\text{ext}}^{(d)} + Q &\Rightarrow \Delta \mathcal{E}_c + \Delta (\mathcal{E}_c^* + \mathcal{E}_{\text{pint}}) - W_{\text{ext}}^{(c)} = W_{\text{ext}}^{(d)} + Q \\ &\Rightarrow \Delta \mathcal{E}_c + \Delta U = W_{\text{ext}} + Q \quad \text{car } W_{\text{ext}} = W_{\text{ext}}^{(c)} + W_{\text{ext}}^{(d)} \end{aligned}$$

Ce résultat constitue la formulation mathématique du premier principe de la thermodynamique, que l'on retrouve également sous forme différentielle :


$$d\mathcal{E}_c + dU = \delta W_{\text{ext}} + \delta Q$$

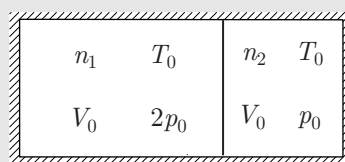
*Remarque* – Dans de nombreux problèmes, l'énergie cinétique du système ne varie pas, auquel cas le premier principe de la thermodynamique se simplifie :

$$\Delta U = W_{\text{ext}} + Q \quad \text{ou} \quad dU = \delta W_{\text{ext}} + \delta Q$$

**Définition 2** Une transformation est réversible si le système qui la subit est en permanence en équilibre avec l'extérieur. Cet équilibre implique :

- l'équilibre thermique : la température du système s'identifie à celle de l'extérieur ;
- l'équilibre mécanique : la pression du système compense les forces extérieures. Notamment, si seules des forces de pression s'exercent sur le système, l'identité :  $p_e = p$  (pression du système) est une condition nécessaire à la réversibilité d'un processus.

 Un récipient calorifugé est séparé en deux compartiments par un piston perméable à la chaleur. Le premier compartiment contient  $n_1$  moles d'un gaz parfait à la température  $T_0$ , dans le volume  $V_0$  et sous la pression  $2p_0$ . Le second contient  $n_2$  moles du même gaz, à la température  $T_0$ , dans le volume  $V_0$  et sous la pression  $p_0$ .



On libère le piston. Calculer les températures, pressions et volumes des deux compartiments lorsque le nouvel équilibre est atteint.

**RÉPONSE** Remarquons au préalable que l'état final est caractérisé par :

- l'équilibre thermique entre les deux compartiments ; leur température commune sera notée  $T_f$  ;
- l'équilibre mécanique du piston : la pression qui règne dans les deux compartiments prend une valeur commune, notée  $p_f$ .

Au cours de cette transformation, l'énergie interne du gaz contenu dans chaque compartiment varie de :

$$\Delta U_1 = n_1 C_{V_m} (T_f - T_0) \text{ et } \Delta U_2 = n_2 C_{V_m} (T_f - T_0)$$

de sorte que l'énergie interne du gaz contenu dans l'ensemble du récipient varie de :

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = (n_1 + n_2) C_{V_m} (T_f - T_0)$$

Or, conformément au premier principe de la thermodynamique, la variation d'énergie interne  $U$  provient :

- de la chaleur reçue :  $Q = 0$ , car le récipient est calorifugé ;
- du travail  $W$  des forces extérieures ;  $W = 0$  car le récipient, indéformable, n'est soumis à aucun travail.

Par suite :

$$\Delta U = W + Q = 0 \Rightarrow T_f = T_0$$

En outre, les gaz contenus dans les récipients sont soumis, dans les deux états d'équilibre, à l'équation d'état des gaz parfaits :

- dans l'état initial :

$$\begin{cases} 2p_0 V_0 = n_1 R T_0 \\ p_0 V_0 = n_2 R T_0 \end{cases} \Rightarrow 3p_0 V_0 = (n_1 + n_2) R T_0 \quad (2)$$

et le rapport des deux équations d'état fournit :

$$2 = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow n_1 = 2 n_2$$

- dans l'état final (les compartiments ont pour volumes  $V_1$  et  $V_2$ ) :

$$\begin{cases} p_f V_1 = n_1 R T_0 \\ p_f V_2 = n_2 R T_0 \end{cases} \Rightarrow p_f (V_1 + V_2) = (n_1 + n_2) R T_0 \quad (3)$$

$$\Rightarrow 2 p_f V_0 = (n_1 + n_2) R T_0 \quad (4)$$

car le volume du récipient n'a pas varié au cours de la transformation.

Le rapport des équations (4) et (2) fournit :

$$\frac{2 p_f}{3 p_0} = 1 \Rightarrow p_f = \frac{3}{2} p_0$$

compte tenu de ce résultat, l'équation d'état liée au premier compartiment :

$$2 p_0 V_0 = n_1 R T_0 \text{ et } p_f V_1 = n_1 R T_0 = \frac{3}{2} p_0 V_1$$

conduit à :

$$2p_0V_0 = \frac{3}{2}p_0V_1 \Rightarrow V_1 = \frac{4}{3}V_0$$

tandis que :

$$V_1 + V_2 = 2V_0 \Rightarrow V_2 = 2V_0 - V_1 = 2V_0 - \frac{4}{3}V_0 \Rightarrow V_2 = \frac{2}{3}V_0$$

### 6.1.2.3 Enthalpie

**Définition 3** L'enthalpie d'un corps de pression  $p$ , de volume  $V$  et d'énergie interne  $U$  est définie par :  $H = U + pV$

Remarque – À l'instar de l'énergie interne, l'enthalpie est une fonction d'état, en conséquence de quoi, au cours d'un cycle :

$$\Delta U = \oint dU = 0 \quad \text{et} \quad \Delta H = \oint dH = 0$$

Lorsqu'un fluide, de volume  $V$ , est soumis à une pression extérieure  $p_e$  qui s'identifie à la pression  $p$  du fluide, la variation d'enthalpie s'écrit :

$$dH = \delta Q + V dp$$

si l'énergie cinétique du fluide ne varie pas. C'est pourquoi un apport de chaleur ( $Q_p$ , à pression constante ou  $Q_V$ , à volume constant) s'identifie aux variations de  $U$  ou de  $H$  pour un fluide :

$$Q_p = \Delta H \quad \text{et} \quad Q_V = \Delta U$$

Un gaz parfait vérifie, quant à lui, la *seconde loi de Joule* :

l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépend que de sa température :

$$dH = C_p dT$$

où  $C_p$  désigne la capacité thermique du gaz, à pression constante, à partir de laquelle sont définies :

- la capacité thermique molaire, à pression constante,  $C_{pm}$  telle que :

$$dH = n C_{pm} dT$$

- la capacité thermique massique, à pression constante,  $c_p$  telle que :

$$dH = m c_p dT$$

Les capacités thermiques  $C_p$  et  $C_V$  sont à l'origine de la définition de l'exposant isentropique :

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_{pm}}{C_{Vm}} = \frac{c_p}{c_V}$$

En outre, pour un gaz parfait de masse molaire  $M$ ,  $C_p$  et  $C_V$  sont liés par la *relation de Mayer* :

$$C_p - C_V = nR \text{ ou } C_{pm} - C_{Vm} = R \text{ ou } c_p - c_V = \frac{R}{M}$$

d'où il découle que :

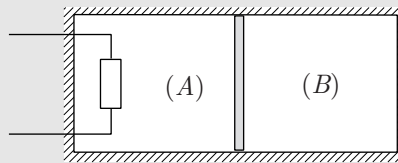
$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \text{ et } C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$$

Un gaz parfait qui subit une transformation adiabatique réversible vérifie la *loi de Laplace* :

$$pV^\gamma = \text{cte} \text{ ou } TV^{\gamma-1} = \text{cte} \text{ ou } T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte}$$



On considère un compartiment calorifugé séparé en deux par un piston calorifugé qui peut bouger sans frottements sur les parois. À l'instant initial, chaque compartiment contient  $n_0 = 1$  mole de gaz parfait ( $C_{Vm} \simeq 12 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $C_{pm} \simeq 20 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ), à température  $T_0 = 298 \text{ K}$  et pression  $p_0 = 1 \text{ bar}$ .



On chauffe, de manière quasi statique, le compartiment (A) à l'aide d'une résistance électrique, jusqu'à  $T_A = 445 \text{ K}$ .

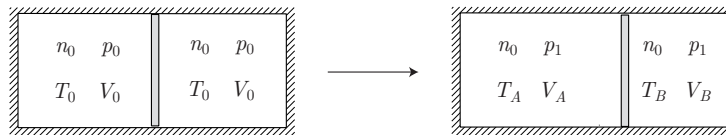
- Déterminer la pression d'équilibre final  $p_1$ .

On admettra que la solution de l'équation :  $x^{0,4} + 1,493 = 2x$  est  $x = 1,302$ .

- Déterminer l'énergie fournie par la résistance électrique.

#### RÉPONSE

- Soient  $T_A = 445 \text{ K}$  et  $T_B$  les températures finales dans les compartiments (A) et (B), de volumes  $V_A, V_B$ , dans lesquels règne la même pression  $p_1$  à l'équilibre.



Étant donné qu'initialement les deux compartiments contiennent la même quantité de gaz, à la même température et sous la même pression, ils présentent le même volume  $V_0$  tel que :

$$p_0 V_0 = n_0 R T_0 \Rightarrow V_0 = \frac{n_0 R T_0}{p_0} \quad (5)$$

et le volume total du récipient vaut alors  $V_{\text{tot}} = 2V_0$ .

En outre, dans l'état d'équilibre final, le gaz contenu dans chaque compartiment vérifie l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\begin{cases} p_1 V_A = n_0 R T_A \\ p_1 V_B = n_0 R T_B \end{cases} \Rightarrow p_1 (V_A + V_B) = n_0 R (T_A + T_B)$$

Or, puisque le volume du récipient n'a pas varié :

$$V_A + V_B = V_{\text{tot}} = 2V_0 \Rightarrow 2p_1V_0 = n_0R (T_A + T_B)$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'identité (5) :

$$\frac{2p_1}{p_0} \times n_0RT_0 = n_0R (T_A + T_B) \Rightarrow 2 \frac{p_1}{p_0} = \frac{T_A}{T_0} + \frac{T_B}{T_0} \quad (6)$$

Au cours de la manipulation, le gaz parfait contenu dans le compartiment (B) subit une transformation adiabatique réversible, auquel cas la loi de Laplace s'y applique :

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte} \Rightarrow T_B^\gamma p_1^{1-\gamma} = T_0^\gamma p_0^{1-\gamma} \Rightarrow \frac{T_B}{T_0} = \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Ce faisant, l'équation (6) devient :

$$2 \frac{p_1}{p_0} = \frac{T_A}{T_0} + \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

c'est-à-dire, en posant  $x = \frac{p_1}{p_0}$  :

$$2x = \frac{T_A}{T_0} + x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

avec  $T_A = 445 \text{ K}$ ,  $T_0 = 298 \text{ K}$  et  $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{Vm}} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ , cette équation devient :

$$2x = 1,493 + x^{0,4}$$

dont l'énoncé donne la solution :  $x = 1,302$ . Par conséquent :

$$\frac{p_1}{p_0} = x = 1,302 \Rightarrow p_1 = 1,302 \times p_0 = 1,302 \text{ bar}$$

2. Au cours de la transformation, le récipient reçoit la chaleur  $Q$  dissipée par effet Joule tandis que le travail  $W$  échangé avec l'extérieur est nul. Par suite, l'énergie interne  $U$  des gaz contenus dans le récipient varie de :

$$\Delta U = Q + W = Q$$

Or, chaque compartiment contient  $n_0$  moles de gaz parfait, dont la variation d'énergie interne suit la première loi de Joule :

$$\Delta U_A = n_0C_{Vm} (T_A - T_0) \text{ et } \Delta U_B = n_0C_{Vm} (T_B - T_0)$$

d'où il s'ensuit que :

$$Q = \Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = n_0C_{Vm} (T_A + T_B - 2T_0)$$

L'identité (6) fournit, du reste :

$$T_A + T_B = 2T_0 \times \frac{p_1}{p_0} \Rightarrow Q = n_0C_{Vm} \times 2T_0 \left(\frac{p_1}{p_0} - 1\right)$$

Application numérique :

$$Q = 1 \times 12 \times 2 \times 298 \times (1,302 - 1) \Rightarrow Q = 2160 \text{ J}$$

La chaleur  $Q$  reçue (à pression ou à volume constants) par une phase condensée (liquide ou solide) ne dépend que de sa variation de température :

$$Q = C \Delta T$$

auquel cas, pour de tels corps :

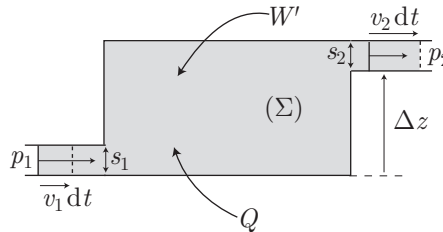
$$\Delta U = C \Delta T \text{ et } \Delta H = C \Delta T$$

où  $C$  désigne la capacité thermique du corps.

### 6.1.2.4 Fluide en écoulement

Le résultat établi ci-après est exigible des étudiants de la filière PT.

On considère un fluide qui pénètre dans un système  $(\Sigma)$ , avec une vitesse  $v_1$ , sous l'action d'une pression extérieure  $p_1$  et qui sort de  $(\Sigma)$  avec une vitesse  $v_2$ , sous l'action d'une pression extérieure  $p_2$ .



Pendant une durée  $dt$ , un volume  $V_1 = v_1 s_1 dt$  pénètre dans  $(\Sigma)$  par une canalisation de section  $s_1$  et un volume  $V_2 = v_2 s_2 dt$  en ressort par une canalisation de section  $s_2$ . À l'intérieur de  $(\Sigma)$ , le fluide reçoit en outre une chaleur  $Q$  et un travail  $W'$  autre que celui des forces de pression.



À l'entrée du dispositif, le fluide reçoit un travail  $W_1$  de la force  $\vec{f}_1$  associée à la pression  $p_1$  :

$$W_1 = \vec{f}_1 \cdot d\vec{x}_1 = f_1 \times dx_1 = p_1 s_1 \times v_1 dt = p_1 V_1$$

tandis qu'à la sortie du dispositif, une force de pression  $\vec{f}_2$  exerce sur le fluide le travail :

$$W_2 = \vec{f}_2 \cdot d\vec{x}_2 = -f_2 \times dx_2 = p_2 s_2 \times v_2 dt = -p_2 V_2$$

Finalement, en notant  $\Delta\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$  (où  $m$  désigne la masse comprise entre les volumes  $V_1$  et  $V_2$ ). Le premier principe de la thermodynamique se traduit par :

$$\begin{aligned} \Delta U + \Delta\mathcal{E}_c &= Q + W + W_1 + W_2 + W' \\ \Rightarrow U_2 - U_1 + m \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) &= Q + p_1 V_1 - p_2 V_2 + W' \\ \Rightarrow (U_2 + p_2 V_2) - (U_1 + p_1 V_1) + m \left( \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) &= Q + W' \end{aligned}$$

où l'on reconnaît la définition de l'enthalpie  $H$  à l'entrée et à la sortie du système  $(\Sigma)$  :

$$H_2 - H_1 + m \left( \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 \right) = Q + W' \Rightarrow \Delta H + \Delta\mathcal{E}_c = Q + W' \quad (7)$$

On note :

- $h$ , l'enthalpie massique du fluide :  $H = mh$  ;
- $e_c$  l'énergie cinétique massique du fluide :  $\mathcal{E}_c = m e_c$ , avec  $e_c = \frac{1}{2} v^2$  ;

- $q_e$  la chaleur reçue par une unité de masse de fluide :  $Q = m q_e$  ;
- $w'$  le travail des forces autres que celles de pression, reçu par une unité de masse de fluide.

Avec ces notations, la loi (7) s'écrit aussi :

$$\Delta h + \Delta e_c = q_e + w'$$

Le poids  $\vec{P}$  qui s'exerce sur la masse  $m$  de fluide est à l'origine d'une variation d'énergie potentielle  $\Delta \mathcal{E}_p = mg \Delta z$  associée au travail  $W(\vec{P})$  de  $\vec{P}$  :

$$\Delta \mathcal{E}_p = -W(\vec{P}) \Rightarrow W(\vec{P}) = -mg \Delta z$$

Aussi, le travail que les forces extérieures exercent sur la masse  $m$  de fluide peut-il s'écrire :

$$W' = W(\vec{P}) + W_i = -mg \Delta z + W_i = -m \Delta(gz) + W_i$$

où  $W_i$  désigne le travail des forces extérieures, hormis celui du poids et des forces de pression. C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} w' &= \frac{W'}{m} = -\Delta(gz) + w_i \\ \Rightarrow \Delta h + \Delta e_c &= q_e - \Delta(gz) + w_i \end{aligned}$$

ce qui conduit finalement à :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = q_e + w_i$$



On considère une tuyère à la sortie d'une fusée. Un gaz, supposé parfait, pénètre dans la tuyère à une température  $T_1$ , à la pression  $p_1$  et à la vitesse  $v_1$ . Il en ressort à la température  $T_2$ , à la pression  $p_2$  et avec une vitesse  $v_2$ . Il n'y a ni échange de travail avec l'extérieur, ni échange thermique. Les transformations sont supposées réversibles.

1. Établir la relation :

$$H_{2m} + \frac{1}{2} M v_2^2 = H_{1m} + \frac{1}{2} M v_1^2$$

où  $H_{2m}$  et  $H_{1m}$  désignent les enthalpies molaires respectives à l'entrée et à la sortie de la tuyère et  $M$  la masse molaire du gaz.

2. Exprimer  $v_2$  en fonction de  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ ,  $R$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $T_1$ ,  $v_1$  et  $M$ .
3. Application numérique :  $v_1 = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\gamma = 1,4$ ,  $T_1 = 3\,500 \text{ K}$ ,  $T_2 = 298 \text{ K}$ ,  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

#### RÉPONSE

1. En l'absence d'échanges mécaniques ou thermiques avec l'extérieur, la loi (7) se simplifie :

$$Q = W' = 0 \Rightarrow \Delta H + \Delta \mathcal{E}_c = 0$$

où,  $n$  désignant le nombre de moles de gaz possédant la masse  $m$  :

$$\begin{aligned}\Delta H &= n \Delta H_m = n (H_{2m} - H_{1m}) \\ \Rightarrow n (H_{2m} - H_{1m}) + \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 &= 0 \\ \Rightarrow H_{2m} + \frac{1}{2} \frac{m}{n} v_2^2 &= H_{1m} + \frac{1}{2} \frac{m}{n} v_1^2\end{aligned}$$

Or, en remarquant que  $\frac{m}{n} = M$ , on obtient :

$$H_{2m} + \frac{1}{2} M v_2^2 = H_{1m} + \frac{1}{2} M v_1^2$$

2. La relation précédente s'écrit également :

$$\frac{1}{2} M v_2^2 = \frac{1}{2} M v_1^2 + (H_{1m} - H_{2m})$$

dans laquelle la variation d'enthalpie d'un gaz parfait est proportionnelle à sa variation de température :

$$H_1 - H_2 = C_p (T_1 - T_2)$$

et où la relation de Mayer conduit à :

$$\begin{aligned}C_p - C_V = nR &\Rightarrow C_p \left(1 - \frac{C_V}{C_p}\right) = nR \Rightarrow C_p \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) = nR \\ \Rightarrow C_p &= n \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \\ \Rightarrow H_1 - H_2 &= n \times \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = n (H_{1m} - H_{2m}) \\ \Rightarrow H_{1m} - H_{2m} &= \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2)\end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$v_2^2 = v_1^2 + \frac{2\gamma R}{(\gamma - 1)M} (T_1 - T_2) \quad (8)$$

Par ailleurs, la transformation :  $(p_1, T_1) \rightarrow (p_2, T_2)$  est supposée réversible par l'énoncé, en conséquence de quoi la loi de Laplace s'applique :

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte} \Rightarrow T_2^\gamma p_2^{1-\gamma} = T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} \Rightarrow T_2 = T_1 \times \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Finalement, la vitesse  $v_2$  est donnée par la relation :

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + \frac{2\gamma R T_1}{(\gamma - 1)M} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right]}$$

3. Dans l'identité (8), les valeurs numériques fournies par l'énoncé conduisent à :

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 \times 1,4 \times 8,314}{0,4 \times 18.10^{-3}} \times (3500 - 298)} \Rightarrow v_2 = 3217 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

## 6.1.3 Deuxième principe de la thermodynamique

### 6.1.3.1 Définitions et propriétés de l'enthalpie

Le deuxième principe de la thermodynamique admet deux énoncés équivalents :

- **l'énoncé de Clausius** : une machine thermique ( $\mathcal{M}$ ) qui effectue des cycles monothermes ne peut fournir de travail à l'extérieur. Si  $W$  désigne le travail reçu par ( $\mathcal{M}$ ), ce principe s'écrit aussi :



$$W = \oint_{\text{isotherme}} \delta W = 0 \text{ pour un cycle réversible}$$

$$W = \oint_{\text{monotherme}} \delta W > 0 \text{ pour un cycle irréversible.}$$

- **l'énoncé de Kelvin** : la chaleur ne peut s'échanger spontanément que d'un corps (dit chaud) de température  $T_c$  vers un corps (froid) de température  $T_f < T_c$ .

On notera désormais, avec les indices  $_{\text{rév}}$  ou  $_{\text{irr}}$ , des transferts thermiques qui se produisent au cours de transformations réversibles ou irréversibles.

**Définition 4** Les inégalités de Clausius établissent qu'au cours d'une transformation cyclique :

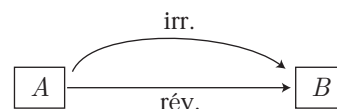
$$\oint \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T} = 0 \text{ et } \oint \frac{\delta Q_{\text{irr}}}{T} < 0$$

Ces relations sont à l'origine de la définition de la fonction entropie :

**Définition 5** Un corps ( $C$ ), en équilibre avec un thermostat à la température  $T$ , duquel il reçoit une chaleur  $\delta Q_{\text{rév}}$ , présente une variation d'entropie  $S$  :

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T}$$

Considérons un système qui évolue d'un état  $A$  vers un état  $B$ , de manière réversible ou irréversible. Au cours de la transformation réversible, si le corps échange une chaleur  $\delta Q_{\text{rév}}$  avec des thermostats de températures  $T$ , la variation de son entropie vaut :



$$\Delta S = S_B - S_A = \int_{T_A}^{T_B} \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T} \tag{9}$$

En revanche, si la transformation est réalisée de manière irréversible :

$$\int_A^B \frac{\delta Q_{\text{irr}}}{T} < \Delta S = S_B - S_A \tag{10}$$



Pour calculer la variation d'entropie d'un système, deux cas peuvent se présenter :

- si la transformation est réversible, il suffit d'évaluer :  $\Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T}$  ;
- si la transformation est irréversible, il faut imaginer une transformation réversible permettant de relier les mêmes états  $A$  et  $B$ . La variation d'entropie est alors fournie par le calcul de  $\Delta S$  selon la relation (9), pour cette transformation réversible fictive.

Étant donné que l'entropie est une fonction d'état, pour calculer une variation d'entropie on peut directement utiliser les résultats suivants :

- Pour  $n$  moles de gaz parfait :

$$S(T, V) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(TV^{\gamma-1}) + \text{cte}$$

$$S(T, p) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T^\gamma p^{1-\gamma}) + \text{cte}$$

$$S(p, V) = nR \ln(pV^\gamma) + \text{cte}$$

- pour une phase condensée, de capacité thermique  $C$  :

$$S = C \ln T + \text{cte}$$

### 6.1.3.2 Création d'entropie

Des relations (9) et (10) il découle que, quelle que soit la nature d'une transformation :

$$\Delta S_{AB} \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

**Définition 6** On appelle entropie d'échange thermique la grandeur :

$$S_{\text{éch}} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

Il existe donc une grandeur  $S_{\text{cr}}$ , appelée entropie créée, telle que :

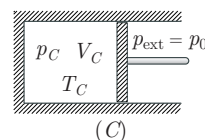
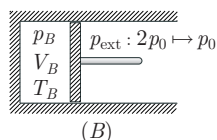
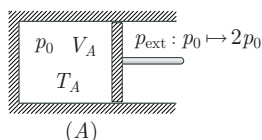
$$\Delta S_{AB} = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}} \text{ avec } S_{\text{éch}} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} \text{ et } S_{\text{cr}} \geq 0 \quad (11)$$

Remarque – L'égalité  $S_{\text{cr}} = 0$  n'est réalisée qu'au cours d'une transformation réversible, tandis qu'en l'absence d'échange thermique, la variation d'entropie  $\Delta S$  s'identifie à l'entropie créée  $S_{\text{cr}}$ .



Un gaz parfait est enfermé dans une enceinte calorifugée, fermée par un piston en équilibre avec la pression extérieure  $p_0$ . On fait passer, très rapidement, la pression extérieure à  $2p_0$  et, une fois l'équilibre rétabli, on relâche rapidement la pression extérieure jusqu'à ce qu'elle retombe à  $p_0$ . Déterminer l'état du gaz une fois l'équilibre rétabli et calculer la création d'entropie.

**RÉPONSE** Soit  $A(p_A = p_0, V_A, T_A)$  l'état d'équilibre du gaz parfait (contenant  $n$  moles),  $B(p_B = 2p_0, V_B, T_B)$  l'état d'équilibre intermédiaire et  $C(p_C = p_0, V_C, T_C)$  l'état d'équilibre final.



Au cours de la transformation (irréversible)  $A \rightarrow B$ , l'énergie interne du gaz parfait varie de :

$$\Delta U_{AB} = C_V (T_B - T_A) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_B - T_A)$$

tandis qu'il reçoit un travail  $W_{AB}$  de la force de pression extérieure ( $Q_{AB} = 0$  car l'enceinte est calorifugée) :

$$\delta W_{AB} = -p_{\text{ext}} dV = -2p_0 dV \Rightarrow W_{AB} = -2p_0 \int_A^B dV = 2p_0 (V_A - V_B)$$

Le premier principe de la thermodynamique impose alors :

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} \Rightarrow \frac{nR}{\gamma - 1} (T_B - T_A) = 2p_0 V_A - 2p_0 V_B$$

Quant aux états d'équilibre  $A$  et  $B$ , ils sont soumis à l'équation d'état des gaz parfaits (avec  $p_B = 2p_0$ ) :

$$p_0 V_A = nRT_A \text{ et } 2p_0 V_B = nRT_B \quad (12)$$

Par conséquent :

$$\frac{nR}{\gamma - 1} (T_B - T_A) = 2nRT_A - nRT_B \quad (13)$$

$$\Rightarrow T_B - T_A = 2(\gamma - 1) T_A - (\gamma - 1) T_B \quad (14)$$

$$\Rightarrow (1 + \gamma - 1) T_B = (2\gamma - 2 + 1) T_A = (2\gamma - 1) T_A \quad (15)$$

$$\Rightarrow T_B = \frac{2\gamma - 1}{\gamma} T_A \quad (16)$$

Ce faisant, les expressions (12) conduisent à :

$$\frac{2p_0 V_B}{p_0 V_A} = \frac{nRT_B}{nRT_A} \Rightarrow \frac{2V_B}{V_A} = \frac{2\gamma - 1}{\gamma} \Rightarrow V_B = \frac{2\gamma - 1}{2\gamma} V_A$$

De même, au cours de la transformation  $B \rightarrow C$ , l'énergie interne du gaz varie de la quantité  $\Delta U_{BC}$  sous l'influence du seul travail  $W_{BC}$  de la force de pression extérieure :

$$\delta W_{BC} = -p_{\text{ext}} dV = -p_0 dV \Rightarrow W_{BC} = -p_0 \int_B^C dV = p_0 V_B - p_0 V_C$$

Aussi :

$$\Delta U_{BC} = W_{BC} \Rightarrow \frac{nR}{\gamma - 1} (T_C - T_B) = p_0 V_B - p_0 V_C$$

Quant aux états d'équilibre  $B$  et  $C$ , ils sont caractérisés par les équations d'état :

$$2p_0 V_B = nRT_B \text{ et } p_0 V_C = nRT_C \quad (17)$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{nR}{\gamma - 1} (T_C - T_B) = \frac{nRT_B}{2} - nRT_C \Rightarrow T_C - T_B = \frac{\gamma - 1}{2} T_B - (\gamma - 1) T_C$$

$$\Rightarrow (1 + \gamma - 1) T_C = \left( \frac{\gamma - 1}{2} + 1 \right) T_B$$

$$\Rightarrow T_C = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} T_B$$

où  $T_B$  est fourni par le résultat (16) :

$$T_B = \frac{2\gamma - 1}{\gamma} T_A \Rightarrow T_C = \frac{(2\gamma - 1)(\gamma + 1)}{2\gamma^2} T_A$$

tandis que les équations d'état (12) et (17) conduisent à :

$$\begin{cases} p_0 V_A = nRT_A \\ p_0 V_C = nRT_C \end{cases} \Rightarrow \frac{V_C}{V_A} = \frac{T_C}{T_A} \Rightarrow V_C = \frac{(2\gamma - 1)(\gamma + 1)}{2\gamma^2} V_A$$

Au cours de la transformation totale  $A \rightarrow C$ , la variation d'entropie  $\Delta S_{AC}$  du gaz parfait vérifie l'équation (11) :

$$\Delta S_{AC} = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}}$$

où  $S_{\text{éch}} = \int_A^C \frac{\delta Q}{T} = 0$  car l'enceinte est calorifugée. C'est pourquoi :

$$S_{\text{cr}} = \Delta S_{AC} = S_C - S_A$$

Or, l'entropie d'un gaz parfait ne dépend que des paramètres d'état, par exemple  $p$  et  $V$  :

$$S = nR \ln(pV^\gamma) + \text{cte}$$

ce qui fournit les entropies des états  $A(p_0, V_A)$  et  $C(p_0, V_C)$  :

$$\begin{cases} S_C = nR \ln(p_0 V_C^\gamma) \\ S_A = nR \ln(p_0 V_A^\gamma) \end{cases} \Rightarrow \Delta S_{AC} = nR \ln \left( \frac{V_C}{V_A} \right)^\gamma = \gamma nR \ln \left( \frac{V_C}{V_A} \right)$$

soit encore :

$$S_{\text{cr}} = \Delta S_{AC} = \gamma nR \ln \left[ \frac{(2\gamma - 1)(\gamma + 1)}{2\gamma^2} \right]$$

Remarque – On pourra s'assurer que  $S_{\text{cr}} > 0$  (il s'agit d'une transformation irréversible), car :

$$\frac{(2\gamma - 1)(\gamma + 1)}{2\gamma^2} = \frac{2\gamma^2 + \gamma - 1}{2\gamma^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma^2} > 1$$

étant donné que  $\gamma > 1$ .

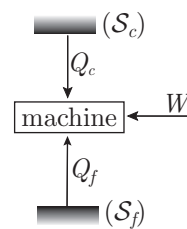
## 6.1.4 Généralités sur les machines thermiques

### 6.1.4.1 Définitions

On s'intéressera ici aux machines thermiques dithermes, qui effectuent donc des cycles au cours desquels elles reçoivent les chaleurs  $Q_c$  et  $Q_f$  de la part d'une source chaude  $S_c$  et d'une source froide  $S_f$ , ainsi qu'un travail  $W$ .

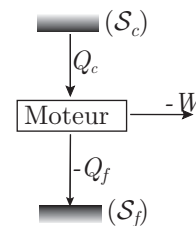


Pour représenter les échanges énergétiques dans le sens où ils se produisent réellement, il suffit d'orienter les flèches dans le sens correspondant et de rajouter un signe négatif lorsque la flèche part de la machine.



**Définition 7** Un moteur thermique ditherme est une machine qui fournit un travail en recevant la chaleur  $Q_c$  de la source chaude et en transmettant la chaleur  $-Q_f$  à la source froide, ce qui permet de poser :

$$\begin{cases} Q_c > 0 \\ Q_f < 0 \\ W < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_c = |Q_c| \\ Q_f = -|Q_f| \\ W = -|W| \end{cases}$$



Le premier principe de la thermodynamique indique qu'au cours d'un cycle, la variation d'énergie interne (nulle) suit la loi :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \oint dU = W + Q_f + Q_c = 0 \\ \Rightarrow & -W = Q_f + Q_c \Leftrightarrow |W| = |Q_c| - |Q_f| \end{aligned}$$

**Définition 8** On appelle rendement d'un moteur le rapport :  $\eta_{\text{moteur}} = \frac{|W|}{|Q_c|}$

De cette définition, il découle que :

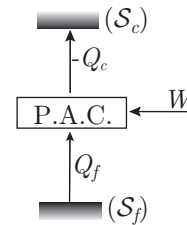
$$\eta_{\text{moteur}} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|} < 1$$

**Définition 9** Une pompe à chaleur (PAC) extrait une chaleur  $|Q_f|$  à la source froide pour transmettre une chaleur  $|Q_c|$  à la source chaude, grâce au travail  $W$  qu'elle reçoit :

$$\begin{cases} Q_c < 0 \\ Q_f > 0 \\ W > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_c = -|Q_c| \\ Q_f = |Q_f| \\ W = |W| \end{cases}$$

À nouveau, le premier principe de la thermodynamique établit que :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \oint dU = W + Q_f + Q_c = 0 \\ \Rightarrow -Q_c &= W + Q_f \Leftrightarrow |Q_c| = |W| + |Q_f| \end{aligned}$$



**Définition 10** Le coefficient d'efficacité d'une pompe à chaleur est défini par le rapport :

$$\eta_{\text{PAC}} = \frac{|Q_c|}{|W|}$$

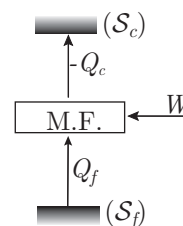
Cette définition conduit à :

$$\eta_{\text{PAC}} = 1 + \frac{|Q_f|}{|W|} = 1 + \frac{Q_f}{W} > 1$$

**Définition 11**

Une machine frigorifique (MF) a pour rôle le retrait d'une chaleur  $|Q_f|$  à une source froide, en recevant un travail  $W$  et en restituant une chaleur  $|Q_c|$  à la source chaude :

$$\begin{cases} Q_c < 0 \\ Q_f > 0 \\ W > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q_c = -|Q_c| \\ Q_f = |Q_f| \\ W = |W| \end{cases}$$



Les analogies entre la machine frigorifique et la pompe à chaleur permettent de poser directement :

$$Q_f = -Q_c - W \Rightarrow |Q_f| = |Q_c| - |W|$$

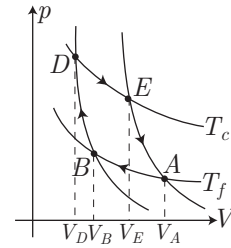
tandis que son coefficient d'efficacité est défini par :

$$\eta_{MF} = \frac{|Q_f|}{|W|} = \frac{|Q_c|}{|W|} - 1 = -\frac{Q_c}{W} - 1$$

#### 6.1.4.2 Moteur et théorèmes de Carnot

Le moteur de Carnot est un moteur ditherme fictif composé de  $n$  moles d'un gaz parfait qui effectue des transformations réversibles suivantes :

- $A(T_f, V_A) \rightarrow B(T_f, V_B)$  : isotherme telle que  $V_B < V_A$  ;
- $B(T_f, V_B) \rightarrow D(T_c, V_D)$  : adiabatique telle que  $T_c > T_f$  ;
- $D(T_c, V_D) \rightarrow E(T_c, V_E)$  : isotherme telle que  $V_E > V_D$  ;
- $E(T_c, V_E) \rightarrow A(T_f, V_A)$  : adiabatique telle que  $T_f < T_c$ .



Les seules chaleurs échangées avec l'extérieur par le gaz parfait sont  $Q_{AB}$  et  $Q_{DE}$ , au cours des transformations isothermes (aux températures  $T_0 = T_c$  ou  $T_f$ ), pendant lesquelles le volume passe de  $V_i$  ( $V_A$  ou  $V_D$ ) à  $V_f$  ( $V_B$  ou  $V_E$ ). Au cours d'une transformation isotherme, l'énergie interne d'un gaz parfait ne varie pas :

$$dU = 0 = \delta Q + \delta W \Rightarrow \delta Q = -\delta W = p_{\text{ext}} dV$$

où  $p_{\text{ext}}$  s'identifie à la pression du gaz parfait :  $p = \frac{nRT_0}{V}$ , au cours d'une transformation réversible. C'est pourquoi :

$$\delta Q = nRT_0 \frac{dV}{V} \Rightarrow Q = nRT_0 \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} = nRT_0 \ln \left( \frac{V_f}{V_i} \right)$$

c'est-à-dire :

$$Q_{AB} = nRT_f \ln \left( \frac{V_B}{V_A} \right) \text{ et } Q_{DE} = nRT_c \ln \left( \frac{V_E}{V_D} \right)$$

avec :

$$V_B < V_A \Rightarrow Q_{AB} < 0 \text{ et } V_E > V_D \Rightarrow Q_{DE} > 0$$

Par conséquent, le moteur reçoit les chaleurs  $Q_f < 0$  et  $Q_c > 0$  que l'on peut identifier respectivement à  $Q_{AB}$  et  $Q_{DE}$ , afin d'exprimer son rendement :

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_{AB}}{Q_{DE}} = 1 + \frac{T_f}{T_c} \times \frac{\ln(V_B/V_A)}{\ln(V_E/V_D)}$$

En outre, les transformations adiabatiques réversibles  $B \rightarrow D$  et  $E \rightarrow A$  sont caractérisées par la loi de Laplace :

$$TV^{\gamma-1} = \text{cte} \Rightarrow \begin{cases} T_f V_B^{\gamma-1} = T_c V_D^{\gamma-1} \\ T_f V_A^{\gamma-1} = T_c V_E^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_D}{V_E}$$

$$\Rightarrow \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Des inégalités de Clausius se déduisent les théorèmes de Carnot :

**Premier théorème de Carnot**

Un moteur ditherme qui effectue des cycles réversibles, au contact de deux sources de chaleur de températures  $T_f$  et  $T_c > T_f$ , présente le même rendement  $\eta_{rév}$  que le moteur de Carnot fonctionnant entre les mêmes sources :

$$\eta_{rév} = \eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

**Second théorème de Carnot**

Un moteur ditherme qui effectue des cycles irréversibles, au contact de deux sources de chaleur de températures  $T_f$  et  $T_c < T_f$ , présente un rendement  $\eta_{irr}$  inférieur à celui du moteur de Carnot fonctionnant entre les mêmes sources :

$$\eta_{irr} < \eta_{Carnot} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$



Un moteur thermique réversible est doté de deux sources de capacités thermiques identiques  $C = 4.10^5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ . La température initiale de la première est  $T_{10} = 283 \text{ K}$ , celle de la seconde est  $T_{20} = 273 \text{ K}$ . Les températures  $T_1$  et  $T_2$  des sources ne sont pas constantes.

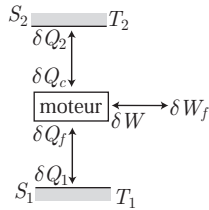
1. Faire un schéma, préciser le fonctionnement et le sens des échanges.
2. Quelle est la température finale des deux sources ?
3. Calculer le travail  $W_{fourni}$  obtenu lorsque le moteur s'arrête.
4. Calculer le rendement obtenu et comparer au rendement dans le cas où les températures restent constantes.

**RÉPONSE**

1. On note :

- $S_1$  la source à la température  $T_1$  et  $S_2$  la source à la température  $T_2$  ;
- $\delta Q_1 = C dT_1$  et  $\delta Q_2 = C dT_2$  les chaleurs reçues par  $S_1$  et  $S_2$  au cours d'un cycle effectué par le moteur ;
- $\delta Q_c = -\delta Q_2$  et  $\delta Q_f = -\delta Q_1$  les chaleurs que  $S_1$  et  $S_2$  fournissent au cours du cycle ;
- $\delta W = -\delta W_f$  le travail reçu par le moteur au cours du cycle.

Le fonctionnement du moteur peut être schématisé comme ci-contre, où les échanges énergétiques se réalisent de la manière suivante : le moteur reçoit la chaleur  $\delta Q_c$  qu'il transforme en travail  $\delta W_f$  et en chaleur  $\delta Q_1$  qu'il restitue à la source froide.



2. Au cours d'un cycle réversible, le rapport  $\frac{\delta Q_{rév}}{T}$  s'identifie à la variation élémentaire d'entropie  $dS$  :

$$\oint \frac{\delta Q_{rév}}{T} = \oint dS = 0 \Rightarrow \frac{\delta Q_f}{T_1} + \frac{\delta Q_c}{T_2} = 0 \Rightarrow -C \frac{dT_1}{T_1} - C \frac{dT_2}{T_2} = 0$$

En fin de fonctionnement, les deux sources présentent la même température  $T_f$ , de sorte que :

$$\int_{T_{10}}^{T_f} \frac{dT_1}{T_1} + \int_{T_{20}}^{T_f} \frac{dT_2}{T_2} = 0 \Rightarrow \ln \left( \frac{T_f^2}{T_1 T_2} \right) = 0 \Rightarrow T_f = \sqrt{T_1 T_2}$$

Application numérique :

$$T_f = \sqrt{283 \times 273} = 325 \text{ K}$$

3. Au cours d'un cycle, l'énergie interne du moteur ne varie pas, ce que traduit le premier principe de la thermodynamique :

$$\delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2 = 0 \Rightarrow \delta W = -\delta Q_1 - \delta Q_2 = C (dT_1 + dT_2)$$

Entre l'instant initial ( $T_1 = T_{10}, T_2 = T_{20}$ ) et l'instant final ( $T_1 = T_2 = T_f$ ), le moteur fournit donc un travail :

$$W_f = -W = C (T_{10} + T_{20} - 2T_f)$$

Application numérique :

$$W_f = 4.10^5 \times (283 + 373 - 2 \times 325) = 24.10^5 \text{ J}$$

4. La chaleur  $\delta Q_c$  que reçoit le moteur pendant un cycle vaut :

$$\delta Q_c = -\delta Q_2 = -C dT_2$$

de sorte qu'à l'issue de la totalité des cycles, le moteur a reçu la chaleur :

$$Q_c = -C \int_{T_{20}}^{T_f} dT_2 = C \times (T_{20} - T_f)$$

Par suite, le rendement du moteur vaut :

$$\eta = -\frac{W}{Q_c} = \frac{T_{10} + T_{20} - 2T_f}{T_{20} - T_f} \Rightarrow \eta = 1 + \frac{T_{10} - T_f}{T_{20} - T_f}$$

Application numérique :

$$\eta = 1 + \frac{283 - 325}{373 - 325} = 12,5\%$$

Si les températures  $T_1$  et  $T_2$  demeuraient constantes, le moteur effectuerait des cycles réversibles di-thermes, auquel cas son rendement s'identifierait à celui du moteur de Carnot opérant entre les mêmes sources, conformément au premier théorème de Carnot :

$$\eta_{\text{rév}} = \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_{10}}{T_{20}} = 1 - \frac{283}{373} \Rightarrow \eta_{\text{rév}} = 24,1\%$$

## 6.2 Transferts thermiques et diffusion de particules

La chaleur peut se propager de trois façons :

- par **conduction**, auquel cas le transfert thermique s'opère dans un milieu matériel, sans qu'il y ait transfert de matière (par exemple, une réaction chimique exothermique transmet, à travers les parois du récipient qui la contient, la chaleur qui augmente la température externe de ce récipient) ;
- par **convection**, essentiellement dans les fluides où une inhomogénéité de la température est responsable de l'inhomogénéité de la masse volumique, qui provoque des mouvements convectifs de fluide ;
- par **rayonnement**, qui ne requiert aucun support matériel ; c'est de cette manière que le Soleil chauffe la Terre à distance.

### 6.2.1 Loi de Fourier

#### 6.2.1.1 Définitions

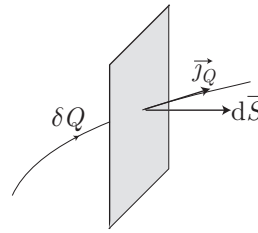


**Définition 12**

Soit  $\delta Q$  la chaleur qui traverse une surface  $d\vec{S}$  pendant une durée  $dt$ . On appelle puissance thermique par conduction le rapport :

$$\delta\phi = \frac{\delta Q}{dt} \text{ (en W)}$$

Cette grandeur est aussi appelée flux thermique.



**Définition 13** La puissance thermique par unité de surface définit le vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}_Q$ , tel que :

$$\delta\phi = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \text{ (avec } \vec{j}_Q \text{ en } \text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$$

Selon cette définition, le flux total qui traverse une surface  $S$  s'écrit :

$$\phi = \frac{\delta Q}{dt} = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$$

Dans un milieu où la température  $T(x, t)$  dépend d'une abscisse  $x$  et du temps  $t$ ,  $j_Q = \|\vec{j}_Q\|$  est proportionnel à  $\frac{\partial T}{\partial x}$ . Cette loi empirique constitue la **loi de Fourier** :

$$j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \text{ ou } \vec{j}_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$$

où  $\lambda$  est un coefficient numérique (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ) appelé **conductivité thermique** du matériau traversé par la chaleur.

**Définition 14** Un milieu est soumis à un régime stationnaire (ou permanent) lorsque sa température ne varie pas dans le temps :

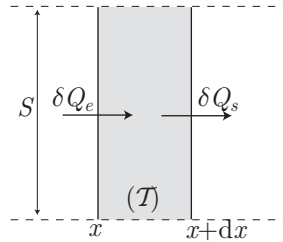
$$\text{Régime stationnaire} \Leftrightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

**Définition 15** Un milieu est homogène lorsque ses paramètres intensifs  $\lambda$ ,  $c$  (capacité thermique massique) et  $\mu$  (masse volumique) ne dépendent pas du point où ils sont mesurés :

$$\text{Milieu homogène} \Leftrightarrow \frac{\partial \lambda}{\partial x} = 0, \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0 \text{ et } \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

### 6.2.1.2 Équation de diffusion thermique

Considérons un matériau de conductivité thermique  $\lambda$ , de capacité thermique massique  $c$  et de masse volumique  $\mu$ . Une tranche ( $\mathcal{T}$ ) de ce matériau, de section droite  $S$ , comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , présente un volume  $\delta V = S dx$ , une masse  $\delta m = \mu \delta V$  et donc à une capacité thermique  $C = \delta m c = \mu c S dx$ .



Un bilan énergétique permet d'établir que, pendant  $dt$  :

- une chaleur  $\delta Q_e$  pénètre dans ( $\mathcal{T}$ ) à l'abscisse  $x$ , telle que :

$$\phi(x, t) = \frac{\delta Q_e}{dt} = j_Q(x, t) \times S \Rightarrow \delta Q_e = j_Q(x, t) \times S dt$$

- une chaleur  $\delta Q_s$  sort de ( $\mathcal{T}$ ) à l'abscisse  $x + dx$ , telle que :

$$\begin{aligned} \phi(x + dx) &= \frac{\delta Q_s}{dt} = j_Q(x + dx, t) \times S = \left[ j_Q(x, t) + \frac{\partial j_Q}{\partial x} dx \right] \times S \\ \Rightarrow \delta Q_s &= \left[ j_Q(x, t) + \frac{\partial j_Q}{\partial x} dx \right] \times S dt \end{aligned}$$

- des sources internes de chaleur peuvent produire, dans  $\delta V$ , une chaleur :

$$\delta Q_p = \mathcal{P} \delta V dt$$

où  $\mathcal{P}$  désigne la puissance thermique créée par unité de volume.

Ce faisant, ( $\mathcal{T}$ ) reçoit une chaleur globale :

$$\delta Q = \delta Q_p + \delta Q_e + \delta Q_s = \mathcal{P} \delta V dt - \frac{\partial j_Q}{\partial x} \times dt \times \underbrace{S dx}_{\delta V}$$

Or, le volume de ( $\mathcal{T}$ ) ne variant pas, le premier principe de la thermodynamique permet de relier directement  $\delta Q$  à la variation  $dU$  d'énergie interne de ( $\mathcal{T}$ ) :

$$\delta Q = dU = C dT = \delta m c dT = \mu c \delta V dT = \mu c \delta V \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

C'est ainsi que l'on retrouve l'équation de la diffusion thermique :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{P} - \frac{\partial j_Q}{\partial x} = \mathcal{P} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (18)$$

qui devient, en milieu homogène :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{P} + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (19)$$

Remarque – La loi de Fourier, ainsi que l'équation de la diffusion thermique, admettent des généralisations tridimensionnelles :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad \text{et} \quad \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{P} + \lambda \Delta T + \frac{d\lambda}{dT} \times (\overrightarrow{\text{grad}} T)^2$$



Soit une pièce, de température  $T_p$  et un mur en brique d'épaisseur  $e_1$  et de surface  $S$ . On admettra le régime stationnaire établi.

1. Calculer la puissance thermique qui traverse le mur,  $T_e$  étant la température extérieure.
2. Quelle est l'épaisseur  $e_2$  de polystyrène qu'il faut ajouter pour que la puissance thermique soit divisée par 5 ?
3. Faire l'application numérique avec :

$$\lambda_1 = 1,16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \quad \lambda_2 = 4.10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1} \quad e_1 = 15 \text{ cm}$$

**RÉPONSE**

1. Dans un matériau homogène, lorsque le régime permanent est établi, et en l'absence de source interne de chaleur, l'équation (19) devient :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

ce qui prouve l'existence de deux constantes  $a$  et  $b$  telles que :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = a \Rightarrow T(x) = ax + b$$

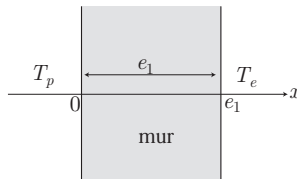
En connaissant les valeurs de  $T$  à deux abscisses :  $T_1 = T(x_1)$  et  $T_2 = T(x_2)$ , on peut déterminer  $a$  et  $b$  :

$$\begin{cases} T_1 = ax_1 + b \\ T_2 = ax_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_1 - T_2 = a(x_1 - x_2) \\ b = T_1 - ax_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} \\ b = T_1 - ax_1 \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + T_1 \tag{20}$$

Le mur de briques étant situé entre les abscisses  $x = 0$  et  $x = e_1$ , où les températures valent respectivement  $T_p$  et  $T_e$  :



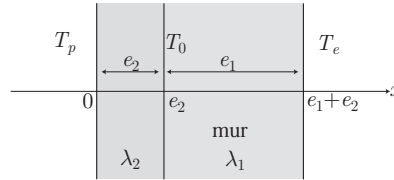
la loi (20) devient :

$$T(x) = \frac{T_e - T_p}{e_1} x + T_p$$

Aussi, la puissance thermique qui traverse le mur est soumise à la loi de Fourier :

$$\phi = -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \phi = \lambda_1 \frac{T_p - T_e}{e_1}$$

2. On suppose désormais qu'une épaisseur  $e_2$  de polystyrène isole la pièce du mur :



tandis qu'à l'interface du mur et du polystyrène, la température prend la valeur  $T_0$ , de sorte que la relation (20) fournit :

- dans le polystyrène :

$$T_2(x) = \frac{T_0 - T_p}{e_2} x + T_p$$

- dans le mur :

$$T_1(x) = \frac{T_e - T_0}{e_1} (x - e_2) + T_0$$

ce qui signifie que le polystyrène et le mur sont traversés par les flux thermiques respectifs :

$$\phi_2 = -\lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\lambda_2 (T_p - T_0)}{e_2} \quad \text{et} \quad \phi_1 = -\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} = \lambda_1 \frac{T_0 - T_e}{e_1}$$

En outre, la relation (18) révèle qu'en régime stationnaire :

$$\frac{\partial j_Q}{\partial x} = -\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

c'est-à-dire que  $j_Q$  ne dépend pas de  $x$ , de même que  $\phi = j_Q \times S$ . C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} \phi_1 = \phi_2 &\Rightarrow \frac{\lambda_1}{e_1} (T_0 - T_e) = \frac{\lambda_2}{e_2} (T_p - T_0) \\ &\Rightarrow T_0 \times \left( \frac{\lambda_1}{e_1} + \frac{\lambda_2}{e_2} \right) = \frac{\lambda_2 T_p}{e_2} + \frac{\lambda_1 T_e}{e_1} \\ &\Rightarrow T_0 = \frac{\lambda_2 e_1 T_p + \lambda_1 e_2 T_e}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1} \end{aligned}$$

Par suite, le flux  $\phi' = \phi_1 = \phi_2$  qui traverse le mur et son isolant vaut :

$$\begin{aligned} \phi' = \frac{\lambda_2}{e_2} \times (T_p - T_0) &= \frac{\lambda_2}{e_2} \times \frac{(T_p - T_e) \lambda_1 e_2}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1} \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_2 (T_p - T_e)}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1} \end{aligned}$$

Aussi, la condition  $\phi' = \frac{1}{5} \phi$  est vérifiée dès que :

$$\begin{aligned} \frac{\phi'}{\phi} = \frac{1}{5} &\Rightarrow \frac{\lambda_1 \lambda_2 (T_p - T_e)}{\lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1} \times \frac{e_1}{\lambda_1 (T_p - T_e)} = \frac{1}{5} \\ &\Rightarrow 5\lambda_2 e_1 = \lambda_1 e_2 + \lambda_2 e_1 \\ &\Rightarrow e_2 = \frac{4\lambda_2 e_1}{\lambda_1} \end{aligned}$$

3. Application numérique :

$$e_2 = \frac{4 \times 0,04 \times 15}{1,16} \Rightarrow e_2 = 2 \text{ cm}$$

### 6.2.1.3 Échanges thermiques convectifs

Cette partie n'est pas au programme des étudiants de la filière PT.


Considérons un solide dont la surface  $S$ , à la température  $T_s$ , est au contact d'un fluide à la température  $T_f$ . Un mouvement convectif peut se produire au niveau de l'interface des deux milieux, sous l'influence de la chaleur  $\delta Q$  qui traverse  $S$  pendant  $dt$  :

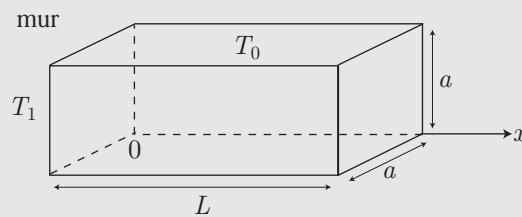
$$\frac{\delta Q}{dt} = J_Q S$$

où  $J_Q$  est donné par la loi de Newton :

$$J_Q = h (T_s - T_f)$$

$h$  est le coefficient de transfert thermique par convection (en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ).

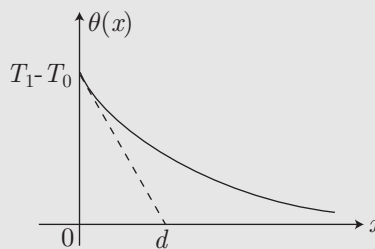
 Une barre, de section carrée de côté  $a$ , est accolée à un mur ; le système est en régime stationnaire et la température  $T(x)$  de la barre ne dépend que de  $x$ .



On supposera la barre suffisamment grande pour qu'aucun transfert thermique ne soit observé à travers la face située à la distance  $L$  du mur.

On rappelle l'expression du flux conducto-convectif par unité de surface, de la barre vers l'air :  $\phi = h [T(x) - T_0]$ . Le mur est à la température  $T_1$ , l'air ambiant à  $T_0$ .

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(x) = T(x) - T_0$ .
2. Donner  $d$ , point d'intersection de l'axe  $(Ox)$  avec la tangente à l'origine.



#### RÉPONSE

1. Considérons un élément ( $\mathcal{E}$ ) de la barre, situé entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

Pendant une durée  $dt$  :

- une chaleur  $\delta Q_e$  entre dans ( $\mathcal{E}$ ) par la face (de surface  $a^2$ ) située en  $x$  :

$$\frac{\delta Q_e}{dt} = j(x, t) a^2 \Rightarrow \delta Q_e = j(x, t) a^2 dt$$

- une chaleur  $\delta Q_s$  sort de ( $\mathcal{E}$ ) par la face (de surface  $a^2$ ) située en  $x + dx$  :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_s}{dt} &= j(x + dx, t) \times a^2 = \left[ j(x) + \frac{\partial j}{\partial x} dx \right] \times a^2 \\ \Rightarrow \delta Q_s &= \left[ j(x) + \frac{\partial j}{\partial x} dx \right] \times a^2 dt \end{aligned}$$

- une chaleur  $\delta Q_\ell$  sort par chacune des quatre faces latérales (de surface  $a dx$ ) :

$$\frac{\delta Q_\ell}{dt} = \phi \times a dx = h [T(x) - T_0] \times a dx \Rightarrow \delta Q_\ell = ah [T(x) - T_0] dx dt$$

Aussi, pendant  $dt$ , ( $\mathcal{E}$ ) reçoit globalement la chaleur  $\delta Q$  :

$$\begin{aligned} \delta Q &= \delta Q_e - \delta Q_s - 4 \delta Q_\ell = -\frac{\partial j}{\partial x} dx \times a^2 dt - 4ah [T(x) - T_0] dx dt \\ &= -a^2 \left[ \frac{\partial j}{\partial x} + 4 \frac{h}{a} [T(x) - T_0] \right] dx dt \end{aligned}$$

Si  $C$  représente la capacité thermique de ( $\mathcal{E}$ ), le premier principe de la thermodynamique prévoit que  $\delta Q$  s'identifie à la variation d'énergie interne de ( $\mathcal{E}$ ) :

$$\delta Q = dU = C dT = C \frac{\partial T}{\partial t} dt \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial x} + \frac{4h}{a} [T(x) - T_0] = -\frac{C}{a dx} \frac{\partial T}{\partial t}$$

En régime stationnaire,  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , tandis que la loi de Fourier précise que :

$$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{4h}{a} [T(x) - T_0] = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{4h}{\lambda a} \theta(x) = 0 \text{ avec } \theta(x) = T(x) - T_0$$

2. L'équation caractéristique de cette équation différentielle :

$$X^2 - \frac{4h}{\lambda a} = 0 \Rightarrow X = \pm \alpha \text{ avec } \alpha = \sqrt{\frac{4h}{\lambda a}}$$

admet deux solutions, en conséquence de quoi la solution générale adopte la forme :

$$\theta(x) = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}$$

Or, lorsque  $x$  devient très grand, il est peu probable que  $|\theta(x)|$  tende vers l'infini, ce qui signifie que  $A = 0$ . Quant à la constante  $B$ , elle s'obtient à partir de la condition :

$$T(x=0) = T_1 \Rightarrow \theta(x=0) = T_1 - T_0 = B \Rightarrow \theta(x) = (T_1 - T_0) e^{-\alpha x}$$

Cette expression est confirmée par la courbe  $\theta(x)$  fournie par l'énoncé et permet le calcul de :

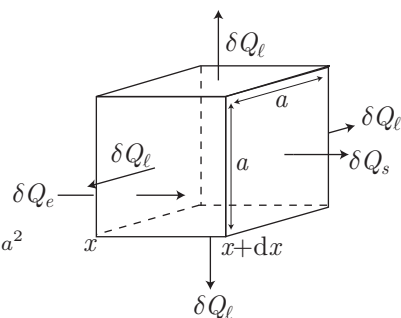
$$\left. \frac{d\theta}{dx} \right|_0 = -\alpha (T_1 - T_0) \text{ et } \theta(x=0) = T_1 - T_0$$

qui permet d'exprimer la tangente  $\Theta(x)$  à la courbe  $\theta(x)$  en  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= \left. \frac{d\theta}{dx} \right|_0 \times x + \theta(0) = T_1 - T_0 - \alpha x (T_1 - T_0) \\ &= (T_1 - T_0) (1 - \alpha x) = (T_1 - T_0) \times \left( 1 - \sqrt{\frac{4h}{\lambda a}} x \right) \end{aligned}$$

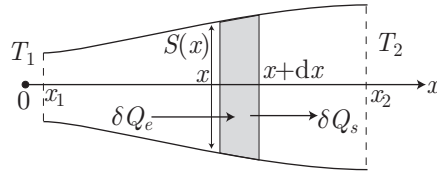
Notamment, cette tangente atteint l'axe ( $Ox$ ) à une abscisse  $x = d$  telle que :

$$\Theta(d) = 0 = (T_1 - T_0) \times \left( 1 - \sqrt{\frac{4h}{\lambda a}} d \right) = 0 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{\lambda a}{4h}}$$



**6.2.1.4 Résistance et conductance thermiques**

Considérons un système compris entre les abscisses  $x_1$  et  $x_2$ , où la température prend respectivement les valeurs  $T_1$  et  $T_2$ .



Un élément ( $\mathcal{E}$ ) de ce système, compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  :

- reçoit, pendant  $dt$ , une chaleur  $\delta Q_e$  telle que :

$$\frac{\delta Q_e}{dt} = j(x, t) S(x) = \phi(x, t) \Rightarrow \delta Q_e = \phi(x, t) dt$$

- perd, à travers sa surface d'abscisse  $x + dx$ , une chaleur  $\delta Q_s$  telle que :

$$\frac{\delta Q_s}{dt} = j(x + dx, t) \times S(x + dx) = \phi(x + dx, t) \Rightarrow \delta Q_s = \phi(x + dx) dt$$

Ce faisant, pendant  $dt$ , ( $\mathcal{E}$ ) reçoit la chaleur :

$$\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s = [\phi(x, t) - \phi(x + dx, t)] dt$$

qui pourrait faire varier la température de ( $\mathcal{E}$ ) (de capacité thermique  $C$ ) de la quantité :

$$\delta Q = C dT = C \frac{\partial T}{\partial t} dt \Rightarrow C \frac{\partial T}{\partial t} = \phi(x, t) - \phi(x + dx, t)$$

Aussi, en régime permanent,  $T(x)$  ne dépend que de  $x$ , ce qui signifie que :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \phi(x + dx, t) = \phi(x, t)$$

Donc le flux thermique, noté dorénavant  $\phi$ , ne dépend pas de  $x$ . Ce faisant :

$$\phi = j_Q(x) S(x) \Rightarrow j_Q(x) = \frac{\phi}{S(x)}$$

tandis que la loi de Fourier impose :

$$j_Q = -\lambda(x) \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\phi}{S(x) \lambda(x)}$$

Or, entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  la température varie de la quantité :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx = -\phi \frac{dx}{S(x) \lambda(x)} \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\phi \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{S(x) \lambda(x)}$$

**Définition 16** On appelle résistance thermique la grandeur :

$$R_{th} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{S(x) \lambda(x)}$$

qui permet aussi de poser :

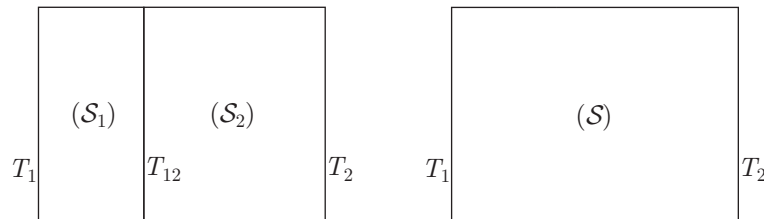
$$T_1 - T_2 = R_{th} \times \phi$$

Dans le cas d'une barre homogène, de section  $S$  constante et de longueur  $L$ , la résistance thermique vaut alors :

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S} \text{ (pour une barre).}$$

### Association en série

Soient deux systèmes  $(S_1)$  et  $(S_2)$  associés en série :



En régime stationnaire, chacun de ces systèmes est caractérisé par une résistance thermique  $R_{th1}$  ou  $R_{th2}$  telle que :

$$T_1 - T_{12} = R_{th1} \phi_1 \text{ et } T_{12} - T_2 = R_{th2} \phi_2$$

Or, en régime stationnaire,  $\phi_1 = \phi_2$  permet d'additionner ces deux relations :

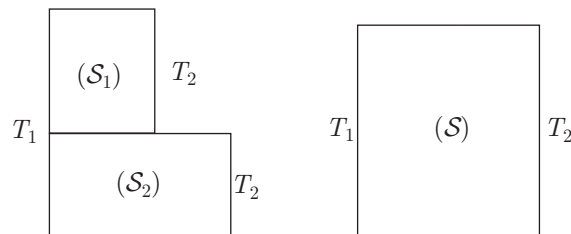
$$T_1 - T_2 = (R_{th1} + R_{th2}) \phi \text{ avec } \phi = \phi_1 = \phi_2$$

ce qui montre que l'ensemble  $\{(S_1) + (S_2)\}$  est équivalent à un système  $(S)$  de résistance thermique :  $R_{\acute{e}q} = R_{th1} + R_{th2}$ . Par généralisation, on retiendra que :

$$R_{\acute{e}q} = \sum_{i=1}^n R_{th_i} \text{ pour } n \text{ systèmes en série.}$$

### Association en parallèle

Soient deux systèmes  $(S_1)$  et  $(S_2)$ , associés en parallèle, dont les faces extrêmes sont portées aux températures  $T_1$  et  $T_2$  :





Ces systèmes, de résistances thermiques  $R_{th1}$  et  $R_{th2}$ , sont traversés par des flux  $\phi_1$  et  $\phi_2$  tels que :

$$\phi_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th1}} \text{ et } \phi_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th2}}$$

Par conséquent, le système  $\{(S_1) + (S_2)\}$  est traversé par un flux thermique total :

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = (T_1 - T_2) \times \left( \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}} \right)$$

et est donc équivalent à un système  $(S)$ , de résistance thermique  $R_{\acute{e}q}$  telle que :

$$\frac{1}{R_{\acute{e}q}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}}$$

**Définition 17** La conductance thermique  $G_{th}$  d'un matériau représente l'inverse de sa résistance thermique :

$$G_{th} = \frac{1}{R_{th}}$$

Aussi, l'association en série de  $n$  systèmes équivaut à un système de conductance thermique :

$$G_{\acute{e}q} = \sum_{i=1}^n G_{th_i} \text{ pour } n \text{ systèmes en parallèle.}$$

### 6.2.1.5 Analogies avec l'électrocinétique

De nombreuses analogies existent entre l'électrocinétique et la conduction thermique, dont la terminologie est souvent empruntée à la première. Ces analogies sont regroupées dans le tableau ci-dessous :

Conduction thermique	Électrocinétique
Chaleur $\delta Q$	Charge $\delta q$
Flux thermique $\phi = \frac{\delta Q}{dt}$	Courant électrique $i = \frac{\delta q}{dt}$
Densité de courant $\phi = \iint \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$	Densité de courant $i = \iint \vec{j}_e \cdot d\vec{S}$
Loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$	Loi d'Ohm $\vec{j}_e = \sigma \vec{E} / \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$
Conductivité thermique $\lambda$	Conductivité électrique $\sigma$
Résistance thermique : $T_1 - T_2 = R_{th} \phi$	Résistance électrique $U_{12} = V_1 - V_2 = R_e i$
Pour une barre $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$	Pour une barre $R_e = \rho \frac{L}{S} / \rho = \frac{1}{\sigma}$
Association en série : $R_{\acute{e}q} = R_1 + R_2 + \dots$	Association en série : $R_{\acute{e}q} = R_1 + R_2 + \dots$
Association en parallèle : $G_{\acute{e}q} = G_1 + G_2 + \dots$	Association en parallèle $G_{\acute{e}q} = G_1 + G_2 + \dots$

## 6.2.2 Transferts thermiques par rayonnement

### 6.2.2.1 Rayonnement thermique

Le rayonnement thermique est un rayonnement électromagnétique émis par une source. Une source de surface  $dS$  émet, dans chaque demi-espace, une puissance thermique  $\delta \mathcal{P}$ , par rayonnement, proportionnelle à  $dS$  :

$$\delta\mathcal{P} = M \times dS \Rightarrow \mathcal{P} = M \times S$$

où  $M$  représente l'émittance de la source.

Lorsque la source émet un rayonnement dont la longueur d'onde est comprise entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ , l'émittance s'exprime en fonction d'une émittance monochromatique  $M_\lambda(T)$  qui dépend de  $\lambda$  et de la température de la source :

$$dM = M_\lambda(T) d\lambda$$

Une source polychromatique pour laquelle  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$  a donc une émittance totale :

$$M_{\text{tot}} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} M_\lambda(T) d\lambda$$

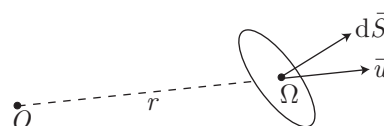
Une source ponctuelle  $O$  émet, dans l'espace d'angle solide  $\Omega_{\text{espace}} = 4\pi$ , une puissance thermique  $\mathcal{P}_0$ . Si un corps ( $\mathcal{C}$ ) présente un angle solide  $\Omega$  vu depuis  $O$ , ce corps reçoit une fraction de la puissance  $\mathcal{P}_0$  émise :

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}} = \frac{\Omega}{\Omega_{\text{espace}}} \times \mathcal{P}_0 = \frac{\Omega}{4\pi} \times \mathcal{P}_0$$

### Rappel sur les angles solides

#### Définition 18

Soient  $O$  et  $\Omega$  deux points de l'espace, dont  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire directeur de  $\overrightarrow{O\Omega}$ . Un élément de surface  $d\vec{S}$  étant centrée sur  $\Omega$ , avec  $r = O\Omega$ , l'angle solide  $d\Omega$  sous lequel est vu  $dS$  depuis  $O$  est défini par :

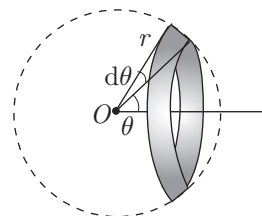


$$d\Omega = \frac{\vec{u} \cdot d\vec{S}}{r^2}$$

Quelques angles solides, dont les expressions découlent de cette définition, sont à retenir :

- angle solide d'une couronne circonscrite sur une sphère de rayon  $r$ , centrée en  $O$ , comprise entre les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  :

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$$

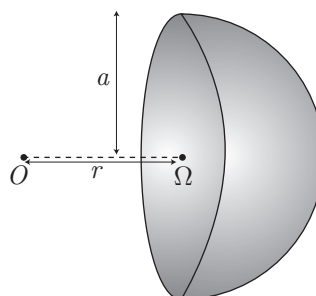


- angle solide de l'espace :

$$\Omega_{\text{espace}} = 4\pi$$

- angle solide d'une coquille hémisphérique, de rayon  $a$ , centrée sur un point  $\Omega$  tel que  $O\Omega = r$  :

$$\Omega = \pi \frac{a^2}{r^2}$$



### 6.2.2.2 Corps noir - Loi de Planck

**Définition 19** On appelle corps noir un corps qui absorbe tous les rayonnements électromagnétiques, quelle que soit leur longueur d'onde  $\lambda$ .

Pour un corps noir en équilibre thermique à la température  $T$ , l'émittance suit la loi de Planck :

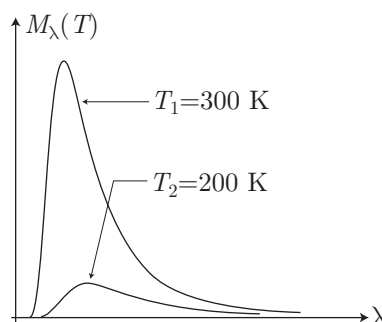
$$M_\lambda(T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \times \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

où :

- $h \simeq 6,62 \text{ J} \cdot \text{s}$  est la constante de Planck ;
- $c \simeq 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  est la vitesse de la lumière dans le vide ;
- $k \simeq 1,38.10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  est la constante de Boltzmann.

**Remarque** – L'exponentielle qui apparaît dans la loi de Planck contient deux termes d'énergie :

- l'énergie d'un photon correspondant à une longueur d'onde  $\lambda$  :  $\varepsilon_{ph} = \frac{hc}{\lambda}$  ;
- l'énergie d'agitation thermique d'une particule de gaz parfait monoatomique dont les particules ne peuvent se déplacer que selon une direction :  $\langle \varepsilon_c \rangle = \frac{1}{2} kT$ .



Par généralisation, on dit qu'un corps rayonnant se comporte comme un corps noir lorsque son émittance suit la loi de Planck.

### 6.2.2.3 Loi de Wien

Les courbes précédentes indiquent que la fonction  $M_\lambda(t)$  admet un *maximum* pour une longueur d'onde qui décroît avec  $T$ . Ce résultat peut être confirmé par la dérivée logarithmique de la loi de Planck :

$$\begin{aligned}\ln [M_\lambda(T)] &= \ln (2\pi hc^2) - 5 \ln \lambda - \ln \left( e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right) \\ \Rightarrow \frac{1}{M_\lambda(T)} \frac{dM_\lambda}{dT} &= -\frac{5}{\lambda} + \frac{hc}{\lambda^2 kT} \times \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \\ \Rightarrow \frac{1}{M_\lambda(T)} \frac{dM_\lambda}{dT} &= \frac{1}{\lambda} \left( -5 + x \times \frac{e^x}{e^x - 1} \right) \text{ avec } x = \frac{hc}{\lambda kT}\end{aligned}$$

Ce faisant, puisque  $M_\lambda(T) > 0$ , la fonction  $M_\lambda(T)$  admet un *maximum* pour une valeur  $\lambda_m$ , c'est-à-dire pour  $x_m$ , tel que :

$$5 (e^{x_m} - 1) = x_m \times e^{x_m} \Rightarrow 5 (1 - e^{-x_m}) = x_m$$

Une résolution numérique fournit :

$$\begin{aligned}x_m \simeq 4,965\,11 &\Rightarrow \frac{hc}{\lambda_m kT} = 4,965\,11 \Rightarrow \lambda_m T = \frac{hc}{4,965\,11 \times k} \\ &\Rightarrow \lambda_m T = \text{cte} = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}\end{aligned}$$

Cette identité constitue la *loi de Wien*.

### 6.2.2.4 Loi de Stefan

Lorsque la source émet des rayonnements dont les longueurs d'onde varient de zéro à l'infini, elle présente une émittance totale :

$$M_{\text{tot}} = \int_0^\infty M_\lambda(T) d\lambda = 2\pi hc^2 \int_0^\infty \frac{1}{\lambda^5} \times \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} d\lambda$$

soit, en posant :

$$x = \frac{hc}{\lambda kT} \Rightarrow \lambda = \frac{hc}{xkT} \Rightarrow d\lambda = -\frac{hc}{x^2 kT} dx$$


cette intégrale devient :

$$\begin{aligned}M_{\text{tot}} &= 2\pi hc^2 \times \left( \frac{kT}{hc} \right)^5 \times \left( \frac{hc}{kT} \right) \int_\infty^0 -\frac{x^3 dx}{e^x - 1} \\ &= \frac{2\pi k^4}{h^3 c^2} T^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \text{ avec } \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}\end{aligned}$$

d'où découle la *loi de Stefan* :

un corps, de surface  $S$ , en équilibre thermique à la température  $T$ , émet un rayonnement de puissance totale :

$$\mathcal{P} = S \times \sigma T^4 \text{ avec } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$$

 Le Soleil, de rayon  $R$  et de température  $T$ , est considéré comme un corps noir. La Terre, ainsi qu'un de ses satellites sphérique, de rayon  $r$ , de capacité thermique  $C$ , considéré comme un corps noir, est à la distance  $a$  du Soleil. Le satellite est soumis au rayonnement solaire.

1. Quelle est la température du satellite à l'équilibre ?
2. À  $t = 0$ , le satellite sort du cône d'ombre de la Terre et sa température est  $0^\circ\text{C}$  ; donner l'évolution de sa température en fonction du temps.

**RÉPONSE**

1. Le Soleil, à la température  $T$ , se comporte comme un corps noir de surface  $S = 4\pi R^2$  qui émet, dans l'espace, une puissance donnée par la loi de Stefan :

$$P_{\odot} = S \times \sigma T^4 = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

Quant au satellite, de rayon  $r$ , il présente par rapport au Soleil un angle solide  $\Omega = \frac{\pi r^2}{a^2}$  et reçoit, par conséquent, la fraction de puissance solaire :

$$P_s = P_{\odot} \times \frac{\Omega}{4\pi} = R^2 \sigma T^4 \times \frac{\pi r^2}{a^2}$$

Or, puisque le satellite se comporte également comme un corps noir, sa surface  $s = \frac{4\pi r^2}{2}$  exposée au Soleil absorbe une puissance  $P_s$  liée à sa température  $T_1$  :

$$\begin{aligned} P_s = s \times \sigma T_1^4 &\Rightarrow R^2 \sigma T^4 \times \frac{\pi r^2}{a^2} = 2\pi r^2 \times \sigma T_1^4 \\ &\Rightarrow T_1 = T \times \left(\frac{R^2}{2a^2}\right)^{1/4} \end{aligned}$$

2. À la date  $t = 0$ , le satellite présente la température  $T_0 = 273 \text{ K}$  ( $0^\circ\text{C}$ ) tandis que sa température  $T_s$  varie de  $dT_s$  sous l'influence d'un apport de chaleur  $\delta Q = C dT_s$ . Or, le satellite reçoit une puissance  $P_s = \frac{R^2 \sigma \pi r^2}{a^2} T^4$ , c'est-à-dire, pendant  $dt$ , une chaleur  $\delta Q_s$  telle que :

$$\begin{aligned} P_s = \frac{\delta Q_s}{dt} &\Rightarrow \frac{R^2 \sigma \pi r^2}{a^2} \times T_s^4 = C \frac{dT_s}{dt} \\ &\Rightarrow dt = \frac{Ca^2}{R^2 \sigma \pi r^2} \times \frac{dT_s}{T_s^4} \end{aligned}$$

Notamment, à la date  $t = 0$ ,  $T_s = T_0$  implique que :

$$\begin{aligned} \frac{R^2 \sigma \pi r^2}{Ca^2} \int_0^t dt &= \int_{T_0}^{T_s(t)} \frac{dT_s}{T_s^4} \Rightarrow \frac{R^2 \sigma \pi r^2}{Ca^2} t = \left[ \frac{1}{3T_s^3} \right]_{T_0}^{T_s(t)} \\ &\Rightarrow \frac{1}{3T_s^3} = \frac{1}{3T_0^3} + \frac{R^2 \sigma \pi r^2}{Ca^2} t \\ &\Rightarrow T_s = \sqrt[3]{\frac{3Ca^2 T_0}{R^2 \sigma \pi r^2 \times 3T_0 t + Ca^2}} \end{aligned}$$

**6.2.2.5 Bilan radiatif**

Un corps qui reçoit un flux de rayonnement incident  $\phi_i$  peut être le siège :

- de l'absorption d'un flux  $\phi_a$  ;
- de la réflexion d'un flux  $\phi_r$  ;

- de la transmission d'un flux  $\phi_t$ .

La conservation de l'énergie impose alors :

$$\phi_i = \phi_a + \phi_r + \phi_t$$

De la même manière, le flux d'énergie  $\phi_E$  issu d'un corps est composé :

- d'un flux  $\phi_e$  de rayonnement émis par le corps ;
- d'un flux  $\phi_r$  d'énergie réfléchi et d'un flux  $\phi_t$  d'énergie transmise.

C'est pourquoi :

$$\phi_E = \phi_e + \phi_r + \phi_t$$

**Définition 20** On appelle bilan radiatif d'un corps le flux globalement reçu par ce corps, sous forme de rayonnement :

$$\Phi = \phi_i - \phi_E = \phi_a - \phi_e$$

L'équilibre radiatif est atteint lorsque  $\Phi = 0$ , c'est-à-dire  $\phi_a = \phi_e$ .

On peut distinguer trois types remarquables de corps :

- un corps parfaitement transparent ne réfléchit ni absorbe de rayonnement :

$$\begin{cases} \phi_r = 0 \\ \phi_a = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi_i = \phi_t$$

et :

$$\phi_e = \phi_a = 0 \text{ à l'équilibre radiatif.}$$

- un corps parfaitement réfléchissant n'absorbe ni transmet de rayonnement, en conséquence de quoi :

$$\begin{cases} \phi_t = 0 \\ \phi_a = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi_i = \phi_r$$

et, lorsque l'équilibre radiatif est établi :

$$\phi_e = \phi_a = 0$$

- un corps noir absorbe la totalité du rayonnement qu'il reçoit, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \phi_r = 0 \\ \phi_t = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi_i = \phi_a$$

auquel cas l'équilibre radiatif est caractérisé par :

$$\phi_e = \phi_a = \phi_i$$

### Bilan d'énergie de rayonnement pour un corps noir

On s'intéresse à un corps noir ( $\mathcal{C}$ ) convexe (le plan tangent à ( $\mathcal{C}$ ) en tout point ne coupe la surface extérieure de ( $\mathcal{C}$ ) qu'en un seul point), de capacité thermique  $C$  et de température  $T$ . ( $\mathcal{C}$ ) est immergé dans un milieu de température  $T_{\text{ext}}$ , dont il reçoit la chaleur  $\delta Q_{\text{ext}}$  par rayonnement thermique. On supposera que ce milieu ne transmet à ( $\mathcal{C}$ ) aucune autre forme d'énergie. En outre, ( $\mathcal{C}$ ) émet par rayonnement une chaleur  $\delta Q_e$ . Par définition, si  $S$  désigne la surface extérieure de ( $\mathcal{C}$ ) :

$$\frac{\delta Q_{\text{ext}}}{dt} = \sigma T_{\text{ext}}^4 \times S \text{ et } \frac{\delta Q_e}{dt} = \sigma T^4 \times S$$

de sorte que la puissance totale reçue par ( $\mathcal{C}$ ) vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{reçue}} = \frac{\delta Q_{\text{ext}}}{dt} - \frac{\delta Q_e}{dt} = \sigma S \times (T_{\text{ext}}^4 - T^4)$$

En vertu du premier principe de la thermodynamique, la variation d'énergie interne de ( $\mathcal{C}$ ) :  $dU = C dT = C \frac{dT}{dt} dt$  provient de la quantité de chaleur  $\delta Q_{\text{ext}} - \delta Q_e$  globalement reçue par ( $\mathcal{C}$ ) :

$$\begin{aligned} C \frac{dT}{dt} dt = \delta Q_{\text{ext}} - \delta Q_e &\Rightarrow C \frac{dT}{dt} = \frac{\delta Q_{\text{ext}}}{dt} - \frac{\delta Q_e}{dt} \\ &\Rightarrow C \frac{dT}{dt} = \sigma S (T_{\text{ext}}^4 - T^4) \end{aligned}$$

Lorsque  $T$  et  $T_{\text{ext}}$  sont très proches :

$$\begin{aligned} T_{\text{ext}}^4 - T^4 &= (T_{\text{ext}} - T) (T_{\text{ext}}^3 + T_{\text{ext}}^2 T + T_{\text{ext}} T^2 + T^3) \\ &\simeq (T_{\text{ext}} - T) \times 4T_{\text{ext}}^3 \\ &\Rightarrow C \frac{dT}{dt} = 4\sigma S T_{\text{ext}}^3 (T_{\text{ext}} - T) \end{aligned}$$

Remarque – L'équilibre thermique du corps noir est défini par :

$$\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow T_{\text{ext}} = T$$

## 6.2.3 Diffusion de particules

Cette section en s'adresse qu'aux étudiants des filières PC et PSI.

### 6.2.3.1 Équation de conservation de la matière

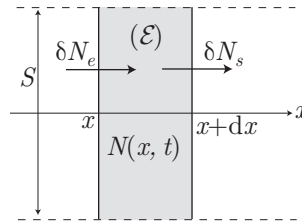
**Définition 21** Si, pendant une durée  $dt$ ,  $\delta N$  particules traversent une surface, on appelle courant de matière le flux  $\phi$  de ces particules :

$$\phi = \frac{\delta N}{dt} : \text{courant de matière.}$$

**Définition 22** Le flux  $\delta\phi$  de matière traversant une surface élémentaire orientée  $d\vec{S}$  est à l'origine de la définition du vecteur densité de courant  $\vec{j}$ :

$$\delta\phi = \vec{j} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \phi = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Considérons un milieu dans lequel des particules se déplacent dans la seule direction  $(Ox)$ , de vecteur unitaire directeur  $\vec{e}_x$ . Isolons, dans ce milieu, un élément  $(\mathcal{E})$  dont les faces sont situées aux abscisses  $x$  et  $x + dx$ , lesquelles faces présentent la même surface  $S$ .



On note  $N(x, t)$  le nombre de particules présentes dans  $(\mathcal{E})$  à un instant  $t$  et l'on définit la densité volumique de particules (ou concentration)  $n(x, t)$  par le nombre  $N(x, t)$  de particules comprises dans le volume  $\delta\tau = S dx$  de  $(\mathcal{E})$ :

$$n(x, t) = \frac{N(x, t)}{\delta\tau} \Rightarrow N(x, t) = n(x, t) \times S dx$$

Pendant la durée  $dt$ :

- un nombre  $\delta N_e$  de particules pénètre dans  $(\mathcal{E})$  par la face située en  $x$ :

$$\frac{\delta N_e}{dt} = j(x, t) \times S \Rightarrow \delta N_e = j(x, t) \times S dt$$

- un nombre  $\delta N_s$  de particules sort de  $(\mathcal{E})$  par la face située en  $x + dx$ :

$$\begin{aligned} \frac{\delta N_s}{dt} &= j(x + dx, t) \times S = \left[ j(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x} dx \right] \times S \\ \Rightarrow \delta N_s &= \left[ j(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x} dx \right] \times S dt \end{aligned}$$

- un nombre  $\delta N_p$  de particules est produit dans  $(\mathcal{E})$  (par exemple issues de réactions chimiques, nucléaires,...), avec une densité volumique par unité de volume  $p$ :

$$p = \frac{\delta N_p}{\delta\tau dt} \Rightarrow \delta N_p = p \times \delta\tau dt$$

Aussi, pendant  $dt$ , il s'accumule un nombre  $\delta N$  de particules dans  $(\mathcal{E})$ :

$$\delta N = \delta N_e - \delta N_s + \delta N_p = -\frac{\partial j}{\partial x} \times S dx dt + p \times \delta\tau dt = \left( p - \frac{\partial j}{\partial x} \right) \times \delta\tau dt$$

à l'origine de l'augmentation de  $N(x, t)$ :

$$\delta N = dN = dn \times S dx = \frac{\partial n}{\partial t} dt \times \delta\tau$$



Il s'ensuit que :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = p - \frac{\partial j}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = p \quad (21)$$

traduit le bilan de matière dans ( $\mathcal{E}$ ).

Remarque – Dans un problème à trois dimensions, cette équation doit être remplacée par l'équation de continuité :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = p$$

### 6.2.3.2 Équation de diffusion

**Loi de Fick** : la densité de courant est proportionnelle au gradient de concentration :

$$\vec{j} = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{e}_x \text{ ou } : \vec{j} = -D \overrightarrow{\operatorname{grad}} n$$

où  $D$  est appelé coefficient *coefficient d'autodiffusion* ou *diffusivité*.

Dans un problème à une dimension, la loi de Fick :  $j = -D \frac{\partial n}{\partial x}$  confère à l'équation (21) la forme suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial n}{\partial x} \right) = p \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial n}{\partial x} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = p$$

appelée *équation de diffusion des particules*. On rencontrera fréquemment les situations suivantes :

- si  $D$  est indépendant de  $x$  :  $\frac{\partial n}{\partial t} - D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = p$  ;
- en régime permanent :  $\frac{\partial n}{\partial t} = 0 \Rightarrow D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = p$  ;
- en l'absence de production interne de matière :  $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$ .

Remarque – À trois dimensions, l'équation de diffusion se généralise :

$$\frac{\partial n}{\partial t} - \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}} D \right) \left( \overrightarrow{\operatorname{grad}} n \right) - D \Delta n = p$$

## 6.3 Étude du corps pur sous deux phases

### 6.3.1 Potentiels thermodynamiques

Cette section ne s'adresse qu'aux étudiants de la filière PC.

### 6.3.1.1 Condition d'évolution et équilibre

**Définition 23** On appelle *potentiel thermodynamique* une fonction d'état qui devient minimum lorsque l'équilibre thermodynamique d'un système est atteint.

Par exemple, au cours d'une évolution adiabatique, l'entropie varie de :

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A \geq \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow S_B \geq S_A$$

On définit alors une *négentropie*  $-S$  telle que :  $-S_B \leq -S_A$  : le système effectue spontanément la transformation  $A \rightarrow B$  telle que la négentropie diminue ; à l'équilibre, la négentropie est alors *minimum*.

#### Évolution monotherme

Considérons un système dont la température extérieure demeure constante et égale à  $T_0$  (pas nécessairement égale à la température  $T$  du système). Au cours d'une transformation élémentaire, pendant laquelle le volume  $V$  et l'entropie  $S$  du système varient de  $dV$  et  $dS$ , le premier principe de la thermodynamique fournit la variation  $dU$  de l'énergie interne de ce système :

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q + \delta W_{\text{ext}} \text{ avec } dS \geq \frac{\delta Q}{T_0} \Rightarrow \delta Q \leq T_0 dS \\ &\Rightarrow dU \leq T_0 dS + \delta W_{\text{ext}} = d(T_0 S) + \delta W_{\text{ext}} \end{aligned}$$

On note  $\delta W_{\text{réc}} = -\delta W_{\text{ext}}$  le travail récupérable, issu du système, de sorte que :

$$dU \leq d(T_0 S) - \delta W_{\text{ext}} \Rightarrow \delta W_{\text{réc}} \leq d(T_0 S - U)$$

C'est ainsi qu'est définie une fonction :

$$F^* = U - T_0 S$$

telle que :

$$\delta W_{\text{réc}} \leq -dF^* \Leftrightarrow W_{\text{réc}} \leq -\Delta F^* \quad (22)$$

Ce faisant :

Au cours d'une transformation monotherme  $A \rightarrow B$ , le travail *maximum* récupérable vaut :

$$W_{\text{réc}}^{(\text{max})} = -\Delta F_{AB}^* = F_A^* - F_B^*$$

avec :

$$F_A^* = U_A - T_0 S_A \text{ et } F_B^* = U_B - T_0 S_B$$

Or, par définition,  $W_{\text{réc}} \geq 0$  suffit à montrer que :

$$\Delta F^* \leq -W_{\text{réc}} \leq 0$$

c'est-à-dire :

$$F_B^* - F_A^* \leq 0 \Rightarrow F_B^* \leq F_A^* \text{ pour la transformation monotherme } A \rightarrow B.$$

Cette inégalité montre qu'au cours d'une transformation monotherme, la fonction  $F^*$  décroît spontanément ; l'équilibre est alors atteint lorsque  $F^*$  est *minimum* et c'est pourquoi  $F^*$  est un potentiel thermodynamique.

Remarque – Au cours d'une transformation monotherme cyclique :

$$\Delta F^* = \oint dF^* = \oint dU - T_0 \oint dS = 0$$

ce qui a pour conséquence :

$$W_{\text{réc}}^{(\text{max})} = -\Delta F^* \Rightarrow W_{\text{réc}}^{(\text{max})} = 0$$

L'énoncé de Kelvin du deuxième principe de la thermodynamique est confirmé : au cours de cycles monothermes, une machine thermique ne peut fournir de travail mécanique.

### Évolutions monobare et monotherme

Considérons un système, de volume  $V$  (éventuellement variable), en contact avec un milieu extérieur à la température  $T_0$  et à la pression  $p_0$  constantes. Au cours d'une transformation élémentaire, ce système reçoit une quantité de chaleur  $\delta Q$ , un travail  $\delta W_p = -p_0 dV$  des forces de pression et un travail  $\delta W'$  des forces autres que celles de pression. Son énergie interne accuse alors une variation donnée par le premier principe de la thermodynamique :

$$dU = \delta Q + \delta W_p + \delta W' = \delta Q - p_0 dV + \delta W' = \delta Q - d(p_0 V) + \delta W'$$

En outre, le deuxième principe de la thermodynamique indique que l'entropie de ce système varie d'une quantité :

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T_0} \Rightarrow \delta Q \leq T_0 dS = d(T_0 S)$$

où l'égalité est établie lorsque la transformation est réversible. Par suite :

$$dU \leq d(T_0 S) - d(p_0 V) + \delta W' \Rightarrow d(U - T_0 S + p_0 V) \leq \delta W'$$

On définit alors la fonction :

$$G^* = U - T_0 S + p_0 V + \delta W' \Rightarrow dG^* \leq \delta W' \quad (23)$$

Aussi, le travail récupérable, autre que celui des forces de pression :  $\delta W'_{\text{réc}} = -\delta W'$  vérifie :

$$\delta W'_{\text{réc}} \leq -dG^* \Leftrightarrow W'_{\text{réc}} \leq -\Delta G^*$$

ce qui montre que ce travail récupérable admet pour valeur *maximum* :

$$W'_{\text{réc}}^{(\text{max})} = -\Delta G^*$$

Supposons en outre que le système n'échange pas de travail avec l'extérieur, autre que celui des forces de pression :  $W'_{\text{réc}} = 0$  conduit à :

$$\Delta G^* \leq 0$$

Cette inégalité montre que  $G^*$  est un potentiel thermodynamique :

Un système qui subit une transformation monotherme et monobare, sans échanger de travail avec l'extérieur autre que celui des forces de pression, évolue de manière à diminuer la fonction  $G^* = U - T_0S + p_0V$ .

Remarque – Les conditions opératoires assurant la diminution de  $G^*$  conviennent aux réactions chimiques effectuées au laboratoire en récipient ouvert et aux changements d'état.

### 6.3.1.2 Énergie libre et enthalpie libre

Lorsqu'un système évolue en restant en équilibre thermique avec un thermostat (sa température  $T$  s'identifie avec la température  $T_0$  du thermostat) le travail récupérable qu'il fournit vérifie la loi (22) :

$$\delta W_{\text{réc}} \leq T \, dS - dU = d(TS - U)$$

d'où est définie la fonction d'état *énergie libre* :

$$F = U - TS$$

qui est un potentiel thermodynamique car  $\delta W_{\text{réc}} \geq 0$  impose :

$$0 \leq \delta W_{\text{réc}} \leq -dF \Rightarrow dF \leq 0$$

Cette relation montre que l'évolution d'un tel système s'accompagne d'une diminution de  $F$ .



Lorsqu'un système évolue de manière isotherme, sans échanger de travail avec l'extérieur, l'énergie libre  $F = U - TS$  permet d'étudier aisément cette évolution.

Considérons maintenant un système qui effectue la transformation infinitésimale :  $A(p, V) \rightarrow B(p + dp, V + dV)$ , de manière réversible ( $T = T_0$  et  $p = p_0$ ), sa variation d'énergie libre entre ces deux états vaut :

$$dF_{AB}^{(\text{rév})} = F_B - F_A = dU - d(TS)$$

avec :  $dU = \delta Q^{\text{rév}} - p \, dV$  si seules les forces de pression exercent un travail sur le système. En outre :

$$\begin{aligned} \delta Q_{\text{rév}} = T \, dS &\Rightarrow dU = T \, dS - p \, dV \\ &\Rightarrow dF_{AB}^{(\text{rév})} = T \, dS - p \, dV - (T \, dS + S \, dT) \\ &\Rightarrow dF_{AB}^{(\text{rév})} = -S \, dT - p \, dV \end{aligned}$$

Or, la fonction  $F$  étant fonction d'état,  $dF_{AB}$  ne dépend pas de la nature de la transformation  $A \rightarrow B$  de sorte que  $dF_{AB}^{(\text{rév})} = F_B - F_A$  est vérifiée quelle que soit la nature de la transformation. C'est pourquoi on note :

$$dF = -S \, dT - p \, dV$$

Cette inégalité révèle que la fonction  $F(T, V)$  dépend des paramètres d'état  $T$  et  $V$ , avec :

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV \text{ où : } \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \text{ et } \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p$$

De même, lorsque le système évolue de manière isotherme et isobare (sa température  $T$  et sa pression  $p$  s'identifient respectivement à la température  $T_0$  et à la pression  $p_0$  extérieures) la définition (23) conduit à définir la fonction d'état *enthalpie libre*  $G$  :

$$G = U - TS + pV = H - TS \quad (24)$$

avec  $\Delta G \leq -W'_{\text{réc}}$ . Ainsi, au cours d'une transformation isobare et isotherme, si le système n'échange aucun travail autre que celui des forces de pression ( $W'_{\text{réc}} = 0$ ) avec l'extérieur :

$$\Delta G \leq 0$$

Cette inégalité suffit à montrer qu'un système, qui effectue une transformation isotherme et isobare, évolue vers son *minimum* d'enthalpie libre ;  $G$  est un potentiel thermodynamique.

**Remarque** – *L'équilibre thermodynamique d'un tel système est atteint lorsque  $G$  atteint sa valeur minimale, c'est-à-dire  $dG = 0$ .*

Considérons maintenant un système qui effectue la transformation infinitésimale :  $A(p, T) \rightarrow B(p + dp, T + dT)$ , de manière réversible. La définition (24) fournit la variation concomitante de l'enthalpie libre de ce système :

$$dG_{AB}^{(\text{rév})} = dU - d(TS) + d(pV)$$

avec, en l'absence de travail autre que celui des forces de pression :

$$dU = \delta Q_{\text{rév}} + \delta W_{\text{rév}} = T dS - p dV$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} dG_{AB}^{(\text{rév})} &= T dS - p dV - (T dS + S dT) + (p dV + V dp) \\ &= -S dT + V dp \end{aligned}$$

Or, la fonction  $G$  étant fonction d'état, il s'ensuit que  $dG_{AB}$  ne dépend pas de la nature de la transformation  $A \rightarrow B$  ; quelle que soit celle-ci :

$$dG_{AB} = dG_{AB}^{(\text{rév})} \Rightarrow dG_{AB} = -S dT + V dp$$

Ainsi,  $G$  apparaît comme une fonction de  $T$  et  $p$ , avec :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp \text{ où : } \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S \text{ et } \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V \quad (25)$$

## 6.3.2 Corps pur sous deux phases

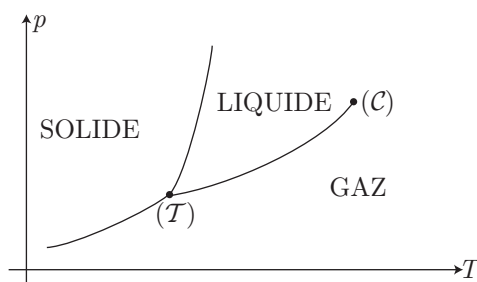
### 6.3.2.1 Définitions

*Cette partie est spécifiquement destinée aux étudiants de la filière PT. Cependant, les autres étudiants pourront la consulter à titre de révision.*

**Définition 24** On appelle *changement d'état d'un corps pur* la transformation, à température et pression constantes, visant à modifier l'état physique (gazeux, liquide ou solide) de ce corps pur.

États	Transformation
solide → liquide	fusion
liquide → gaz	vaporisation
solide → gaz	sublimation
gaz → solide	condensation
gaz → liquide	liquéfaction
liquide → solide	solidification

Dans un diagramme  $(p, T)$ , on représente les domaines d'existence de chaque phase, les courbes séparant ces domaines représentant les points  $p(T)$  d'équilibre entre ces deux phases :



On distingue, dans ce diagramme :

- le *point triple*  $(T)$  de coexistence stable des trois phases ;
- le *point critique*  $(C)$  au delà duquel les phases liquide et gazeuse se confondent en une seule phase (fluide hypercritique).

Au cours d'un changement d'état  $X_1 \rightarrow X_2$ , la chaleur reçue par le système pour transformer une masse  $m$  de  $X_1$  en  $X_2$  s'identifie à la variation d'enthalpie (température et pression demeurant constantes) :

$$Q = \Delta H_{12}$$

**Définition 25** L'enthalpie massique  $\Delta h_{12}$  de changement d'état est appelée *chaleur latente massique*  $\ell_{12}$  :

$$\Delta h_{12} = m \times \ell_{12} \text{ (avec } \ell_{12} = \Delta h_{12} \text{)}$$

Les chaleurs latentes massiques de sublimation, de vaporisation et de fusion sont toujours positives.

**Définition 26** Soit  $\Delta H_{12}$  la variation d'enthalpie consécutive au changement d'état  $X_1 \rightarrow X_2$  de  $n$  moles de  $X_1$ . On appelle *enthalpie molaire* (ou *chaleur latente molaire*) de changement d'état la grandeur  $\Delta H_{12,m}$  telle que :

$$\Delta H_{12} = n \times \Delta H_{12m}$$

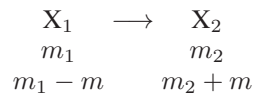
Soit le changement d'état :  $X_1 \rightarrow X_2$  effectué de manière isotherme (à la température  $T$ ) et isobare, au cours duquel le milieu reçoit la chaleur  $Q_{12} = \Delta H_{12}$  associée à la variation d'entropie  $\Delta S_{12} = \frac{Q_{12}}{T}$  :

$$\Delta S_{12} = \frac{\Delta H_{12}}{T} \quad (26)$$

Si  $s_i$  désigne les entropies massiques de  $X_1$  et  $X_2$ ,  $m_1$  et  $m_2$  les masses de  $X_1$  et  $X_2$ , les entropies  $S_1$  et  $S_2$  de  $X_1$  et  $X_2$  valent :

$$S_1 = m_1 s_1 \text{ et } S_2 = m_2 s_2$$

Au cours du changement d'état d'une masse  $m$  de  $X_1$  :



l'entropie du système varie de :

$$\Delta S_{12} = [(m_1 - m) s_1 + (m_2 + m) s_2] - (m_1 s_1 + m_2 s_2) = m (s_2 - s_1)$$

tandis que  $\Delta H_{12} = m \ell_{12}$  permet de transformer la relation (26) :

$$s_2 - s_1 = \frac{\ell_{12}}{T} \quad (27)$$

**Définition 27** On appelle vapeur saturante la phase gazeuse en équilibre avec la phase liquide d'un corps pur. La pression partielle de vapeur saturante  $p_s$  ne dépend que de la température :  $p_s = p_s(T)$ .



Une phase gazeuse peut se comporter de deux manières différentes :

- la vapeur sèche (en l'absence de la phase liquide) peut être assimilée à un gaz parfait :

$$pV = n_0 RT \Rightarrow p = \frac{n_0 RT}{V}$$

où le nombre de moles  $n_0$  demeure constant, tandis que  $p$  dépend de  $V$ .

- la vapeur saturante peut aussi être assimilée à un gaz parfait :

$$p_s V = n_v RT \Rightarrow p_s = \frac{n_v RT}{V}$$

mais la quantité  $n_v$  de vapeur varie avec  $V$  de manière à maintenir  $p_s(T)$  indépendant de  $V$ .

**Définition 28** On appelle titre en vapeur  $x_{vap}$  (resp. en liquide  $x_{liq}$ ) le rapport des masses de la phase gazeuse  $m_{vap}$  (resp. liquide :  $m_{liq}$ ) par la masse totale  $m$  du corps pur :

$$x_{vap} = \frac{m_{vap}}{m} \quad x_{liq} = \frac{m_{liq}}{m}$$



Dans un récipient vide, de volume  $V = 1 \text{ L}$ , maintenu à la température  $T_0 = 373 \text{ K}$ , on introduit une masse  $m = 1 \text{ g}$  d'eau liquide. Calculer les titres en vapeur d'eau et en eau liquide.

On donne :

- la pression de vapeur saturante à  $T_0$  :  $p_s = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ;
- la constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- la masse molaire de l'eau :  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**RÉPONSE** En introduisant de l'eau liquide dans le récipient vide, on provoque une vaporisation (totale ou partielle) de l'eau :  $n_v$  moles de vapeur sont produites, qui se comportent comme un gaz parfait à la pression  $p_s$  :

$$p_s V = n_v R T_0 \Rightarrow n_v = \frac{p_s V}{R T_0}$$

Aussi, la masse de la vapeur d'eau vaut :

$$m_v = n_v \times M = \frac{p_s V M}{R T_0}$$

ce qui représente un titre massique :

$$x_v = \frac{m_v}{m} = \frac{p_s V M}{R T_0 m} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \times 10^{-3} \times 18}{8,31 \times 373 \times 1} \Rightarrow x_v = 0,59 = 59\%$$

Aussi, le titre massique  $x_\ell$  du liquide est défini à partir de la masse  $m_\ell = m - m_v$  d'eau liquide restante :

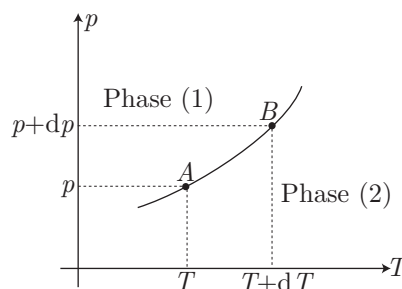
$$x_\ell = \frac{m_\ell}{m} = \frac{m - m_v}{m} = 1 - x_v = 0,41 = 41\%$$

### 6.3.2.2 Formule de Clapeyron

Les étudiants de la filière PC sont concernés par l'intégralité de cette section, tandis que ceux de la filière PSI peuvent n'en retenir que le résultat.

Considérons un corps pur en équilibre sous deux phases (repérées par les indices 1 et 2). En notant  $g_1(T, p)$  et  $g_2(T, p)$  les enthalpies libres massiques de ces phases, de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ , l'enthalpie libre du système diphasé, à  $T$  et  $p$ , vaut :

$$G(T, p) = m_1 g_1(T, p) + m_2 g_2(T, p)$$



Lors d'une transformation infinitésimale isotherme et isobare, les masses des deux phases varient de  $dm_1$  et  $dm_2$ , tandis que la masse totale  $m$  du système demeure constante :

$$m = m_1 + m_2 \Rightarrow 0 = dm_1 + dm_2 \Rightarrow dm_2 = -dm_1$$



C'est pourquoi  $G(T, p)$  varie de la quantité :

$$dG = dm_1 g_1(T, p) + dm_2 g_2(T, p) = dm_1 [g_1(T, p) - g_2(T, p)]$$

Ce faisant, l'inégalité :  $dG \leq 0$  permet d'envisager plusieurs situations :

- si  $g_1(T, p) > g_2(T, p)$ , cette inégalité n'est vérifiée que si  $dm_1 < 0$  (c'est-à-dire  $dm_2 > 0$ ) : la matière passe de la phase (1) à la phase (2) ;
- si  $g_1(T, p) < g_2(T, p)$ ,  $dm_1$  est positif, ce qui signifie que la matière passe de la phase (2) à la phase (1) ;
- si  $g_1(T, p) = g_2(T, p)$ , aucun des phénomènes précédents n'est observé : l'équilibre est atteint.

Si, aux points  $A(T, p)$  et  $B(T + dT, p + dp)$  le système est en équilibre, les propos précédents conduisent à :

$$g_1(T, p) = g_2(T, p) \quad (28)$$

et :

$$\begin{aligned} g_1(T + dT, p + dp) &= g_2(T + dT, p + dp) \\ \Rightarrow g_1(T, p) + \left(\frac{\partial g_1}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial g_1}{\partial p}\right)_T dp \\ &= g_2(T, p) + \left(\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial g_2}{\partial p}\right)_T dp \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'identité (28) :

$$\left[ \left(\frac{\partial g_2}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial g_1}{\partial T}\right)_p \right] dT = \left[ \left(\frac{\partial g_1}{\partial p}\right)_T - \left(\frac{\partial g_2}{\partial p}\right)_T \right] dp$$

Or, si  $s_1, s_2, v_1, v_2$  désignent les entropies massiques des phases (1) et (2) et leurs volumes massiques, les identités (25) s'écrivent aussi :

$$\begin{aligned} dG_i = -S_i dT + V_i dp &\Rightarrow dg_i = -s_i dT + v_i dp \\ &\Rightarrow \left(\frac{\partial g_i}{\partial T}\right)_p = -s_i \text{ et } \left(\frac{\partial g_i}{\partial p}\right)_T = v_i \end{aligned}$$

Par suite :

$$(s_1 - s_2) dT = (v_1 - v_2) dp \Rightarrow s_2 - s_1 = (v_2 - v_1) \frac{dp}{dT}$$

Enfin, l'identité (27) fournit :

$$s_2 - s_1 = \frac{\ell_{12}}{T} \Rightarrow \ell_{12} = T (s_2 - s_1)$$

ce qui conduit à la *formule de Clapeyron*, liant la chaleur latente massique de changement d'état à la pente  $\frac{dp}{dT}$  de la courbe d'équilibre  $(p, T)$  :

$$\ell_{12} = T (v_2 - v_1) \frac{dp}{dT}$$

## 6.4 Étude de l'équilibre liquide-vapeur

Cette section s'adresse aux étudiants de la filière PT, mais elle est accessible aux étudiants des autres filières.

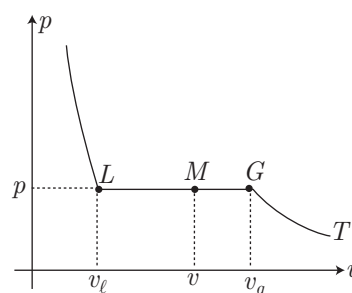
### 6.4.1 Diagramme de Clapeyron

#### 6.4.1.1 Courbes de saturation

Le diagramme de Clapeyron consiste à représenter la pression  $p$  d'un système en fonction de son volume massique  $v$ .

Dans le cas d'un mélange liquide-vapeur d'un corps pur, on distingue, sur un tel diagramme, pour une température  $T$  fixée :

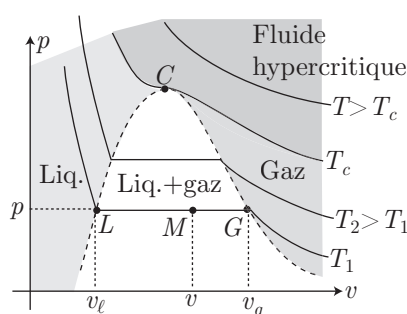
- un point  $G$  qui correspond à la phase gazeuse, de volume massique  $v_g$  ; en  $G$  apparaît une première goutte de liquide ;
- un point  $L$  caractéristique de la phase liquide, de volume massique  $v_\ell$  ; en  $L$  apparaît la première bulle de gaz.



Le palier  $LG$ , pour lequel la pression  $p$  demeure constante (il s'agit de la pression de vapeur saturante à la température  $T$ ), est appelé *palier de changement d'état* ; il comporte des points ( $M$ ) donnant l'état du mélange liquide-vapeur.

En traçant plusieurs isothermes (appelées *isothermes d'Andrews*), un réseau de courbes fait apparaître, de surcroît, un point critique ( $C$ ), à la température critique  $T_c$  et dont l'isotherme admet un point d'inflexion et une tangente horizontale :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_{T_c} = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_{T_c} = 0$$



L'ensemble des points  $CG$  décrit la *courbe de rosée* et l'ensemble des points  $CL$  la *courbe d'ébullition*. La réunion de ces deux courbes s'appelle la *courbe de saturation*. Quatre domaines sont ainsi mis en évidence :

- le domaine d'existence de la phase gazeuse, à droite de la courbe de rosée et sous l'isotherme  $T_c$  ; dans ce domaine, le gaz est assimilé à un gaz parfait ;
- le domaine d'existence de la phase liquide, à gauche de la courbe d'ébullition et sous l'isotherme  $T_c$  ;

- le domaine de coexistence des phases liquide et gazeuse, sous la courbe de saturation ;
- le domaine caractéristique du *fluide hypercritique* au dessus de l'isotherme  $T_c$ .

Soit  $m$  la masse d'un mélange liquide-vapeur, représenté par un point  $M(v, p)$ . Ce mélange est composé de phases liquide et gazeuse de masses respectives  $m_\ell$  et  $m_g$  :

$$m = m_\ell + m_g \Rightarrow m_\ell = m - m_g$$

Quant au volume  $V = mv$  du mélange, il réunit les volumes  $V_g = m_g v_g$  et  $V_\ell = m_\ell v_\ell$  des phases gazeuse et liquide respectivement :

$$\begin{aligned} mv = m_g v_g + m_\ell v_\ell &\Rightarrow mv = m_g v_g + (m - m_g) v_\ell \\ &\Rightarrow m(v - v_\ell) = m_g(v_g - v_\ell) \end{aligned}$$

Ce faisant, la fraction massique de vapeur vaut :

$$x_g = \frac{m_g}{m} = \frac{v - v_\ell}{v_g - v_\ell} = \frac{ML}{GL}$$

#### 6.4.1.2 Entropie massique du mélange

Considérons un corps pur occupant les états  $G$  ou  $L$  pour une température  $T$  donnée. On note  $c_p$  la capacité thermique massique du corps dans cet état,  $\delta Q$  la chaleur qu'il reçoit lorsque la température varie de  $dT$ , la pression de  $dp$ , tandis que le point caractéristique suit la courbe de saturation. Une masse  $m$  de ce corps subit alors une variation d'enthalpie :

$$dH = \delta Q + V dp \Rightarrow \delta Q = dH - V dp$$

c'est-à-dire, en notant  $v$  le volume massique du corps :

$$\delta Q = mc_p dT - mv dp = m(c_p dT - v dp)$$

Or, puisque le point représentatif de la transformation suit la courbe de saturation, la pression ne dépend que de la température, de sorte que :

$$dp = \frac{dp}{dT} dT \Rightarrow \delta Q = m \left( c_p - v \frac{dp}{dT} \right) dT$$

On notera dorénavant  $c_i$  la capacité thermique de la phase considérée, définie par :

$$\delta Q = mc_i dT \text{ avec } c_i = c_p - v \frac{dp}{dT}$$

Ce faisant, au cours de cette transformation, l'entropie du corps varie de :

$$dS = mc_i \frac{dT}{T} \quad (29)$$

Envisageons alors un cycle de transformations représenté ci-dessous, contenant quatre étapes :

- au cours de la transformation  $AB$ , une masse  $m$  de liquide se transforme intégralement en gaz. La chaleur reçue par le corps valant  $Q_{AB} = m\ell_v(T)$  (où  $\ell_v(T)$  représente la chaleur latente massique de vaporisation à la température  $T$ ); l'entropie du système varie de la quantité :

$$\Delta S_{AB} = \frac{Q_{AB}}{T} = m \frac{\ell_v(T)}{T}$$

- la transformation  $BC$  s'accompagne d'une variation d'entropie donnée par la loi (29), où  $c_i = c_g$  est associé à la phase gazeuse :

$$dS_{BC} = mc_g \frac{dT}{T}$$

- au cours de la transformation  $CD$ , la masse  $m$  du corps se liquéfie à la température constante  $T + dT$ ; elle reçoit ainsi la chaleur :

$$Q_{CD} = -m\ell_v(T + dT)$$

à laquelle est associée une variation d'entropie :

$$\Delta S_{CD} = \frac{Q_{CD}}{T + dT} = -m \frac{\ell_v(T + dT)}{T + dT}$$

- l'entropie du liquide ainsi formé (de capacité thermique  $c_i = c_\ell$ ) varie, au cours de la transformation  $DA$ , d'une quantité vérifiant la relation (29) :

$$dS_{DA} = -mc_\ell \frac{dT}{T + dT} \simeq -mc_\ell \frac{dT}{T} \text{ (à l'ordre 1).}$$

L'enthalpie étant une fonction d'état, elle ne varie pas au cours de ce cycle, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \oint dS = 0 &\Rightarrow \Delta S_{AB} + dS_{BC} + \Delta S_{CD} + dS_{DA} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\ell_v(T)}{T} + c_g \frac{dT}{T} - \frac{\ell_v(T + dT)}{T + dT} - c_\ell \frac{dT}{T} = 0 \end{aligned}$$

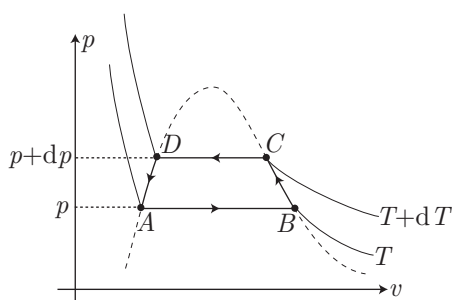
c'est-à-dire, en remarquant que :

$$\frac{\ell_v(T + dT)}{T + dT} = \frac{\ell_v(T)}{T} + dT \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\ell_v}{T} \right)$$

cette relation devient :

$$\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\ell_v}{T} \right) = \frac{c_g - c_\ell}{T} \Rightarrow \frac{\partial \ell_v}{\partial T} - \frac{\ell_v}{T} = c_g - c_\ell \quad (30)$$

Considérons maintenant une masse  $m$  d'un corps pur constitué de sa phase gazeuse, de masse  $m_g = xm$ , en équilibre avec sa phase liquide, de masse  $m_\ell = m(1 - x)$ . À la



température  $T$ , ce système est représenté par son état  $(x, T)$ , tandis qu'à la température  $T + dT$ , l'état du système est  $(x + dx, T + dT)$ . Soit  $dS$  la variation d'entropie de ce mélange au cours de la transformation  $(x, T) \rightarrow (x + dx, T + dT)$ , que l'on peut décomposer en deux transformations :

- modification de la composition, à température constante :

$$(x, T) \rightarrow (x + dx, T)$$

au cours de laquelle le système reçoit, de manière réversible, la chaleur :

$$\delta Q_1 = \delta m_g \times \ell_v = m dx \ell_v$$

à laquelle est associée la variation d'entropie :  $dS_1 = m \frac{dx \ell_v}{T}$ .

- variation de la température, à composition constante :

$$(x + dx, T) \xrightarrow{\delta Q_2} (x + dx, T + dT)$$

Le système étant composé d'une masse  $m_g = m(x + dx)$  de vapeur et d'une masse  $m_\ell = m(1 - x - dx)$  de liquide, de capacités thermiques respectives  $c_g$  et  $c_\ell$ , il reçoit, de manière réversible, la chaleur :

$$\delta Q_2 = m_g c_g dT + m_\ell c_\ell dT = m [c_g(x + dx) + c_\ell(1 - x - dx)] dT$$

c'est-à-dire, en ne conservant que les termes d'ordre 1 :

$$\delta Q_2 = m [c_g x + c_\ell(1 - x)] dT = m [c_\ell + (c_g - c_\ell)x] dT$$

à laquelle correspond la variation d'entropie :

$$\begin{aligned} dS_2 &= \frac{\delta Q_2}{T + dT} = m [c_\ell + (c_g - c_\ell)x] \frac{dT}{T + dT} \\ &\simeq m [c_\ell + (c_g - c_\ell)x] \frac{dT}{T} \text{ à l'ordre 1.} \end{aligned}$$

Aussi, la variation d'entropie totale du mélange vaut :

$$dS = dS_1 + dS_2 = m \frac{dx \ell_v}{T} + m [c_\ell + (c_g - c_\ell)x] \frac{dT}{T}$$

et celle de l'entropie massique vaut :

$$ds = \frac{1}{m} dS = \frac{\ell_v}{T} dx + c_\ell \frac{dT}{T} + (c_g - c_\ell) \frac{dT}{T} \times x$$

Or, conformément à la relation (30) :

$$\begin{aligned} \frac{c_g - c_\ell}{T} &= \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\ell_v}{T} \right) \Rightarrow ds = c_\ell \frac{dT}{T} + \frac{\ell_v}{T} dx + \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\ell_v}{T} \right) dT \times x \\ &\Rightarrow ds = c_\ell \frac{dT}{T} + \frac{\ell_v}{T} \times dx + d \left( \frac{\ell_v}{T} \right) \times x \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$s = c_\ell \ln T + \frac{x \ell_v}{T} + s_0 \quad (31)$$

où  $s_0$  désigne une constante.

## 6.4.2 Diagramme entropique

### 6.4.2.1 Courbe de saturation

Dans un diagramme entropique, l'entropie massique  $s$  d'un corps pur est représentée en fonction de sa température. On y distingue essentiellement trois domaines :

- le liquide saturant ( $x = 0$ ), dont l'entropie suit la loi (31) :

$$s = c_\ell \ln T + s_0$$

Par convention, on supposera l'entropie du liquide saturant nulle au point triple, de température  $T_t$  :

$$0 = c_\ell \ln T_t + s_0 \Rightarrow s_0 = -c_\ell \ln T_t \Rightarrow c_\ell \ln \left( \frac{T}{T_t} \right) \quad (32)$$

$$\Rightarrow T = T_t \exp \left( \frac{s}{c_\ell} \right) \quad (33)$$

La courbe (1) associée au liquide saturant est, par conséquent, celle d'une exponentielle.

- la vapeur saturante, également soumise à la loi (31). Si  $A(T, s_\ell)$  est un point caractérisant le liquide saturant :

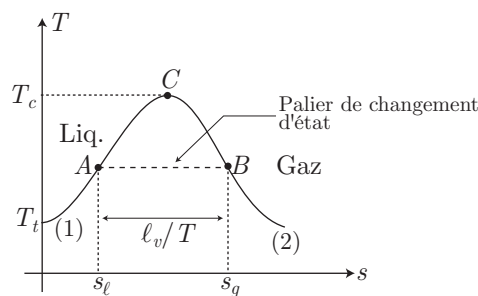
$$s_\ell = c_\ell \ln T + s_0$$

alors le point  $B(T, s_g)$  représentatif de la vapeur saturante ( $x = 1$ ) vérifie :

$$s_g = c_\ell \ln T + s_0 + \frac{\ell_v}{T} \Rightarrow s_g = s_\ell + \frac{\ell_v}{T}$$

Ainsi, la courbe (2) représentative de la vapeur saturante se déduit de la courbe (1) par translation de  $\frac{\ell_v}{T}$ .

- le mélange liquide-vapeur ( $0 < x < 1$ ) est alors caractérisé par un palier horizontal ( $T$  demeurant constant) de longueur  $\frac{\ell_v}{T}$ .



Remarque – Le point critique ( $C$ ) est le point d'intersection des courbes (1) et (2) car, conformément à la relation de Clapeyron :

$$\ell_v(T_c) = (u_g - u_\ell) \times T_c \left. \frac{dp}{dT} \right|_{T_c} = 0 \text{ car } u_g = u_\ell$$

de sorte que la distance  $AB$  vaut :

$$AB = \frac{\ell_v(T_c)}{T_c} = 0$$

### 6.4.2.2 Courbes isotitres

Considérons un point  $M$  du palier  $AB$ , de coordonnées  $M(s, T)$ . À ce point est associé un titre massique de vapeur  $x$  vérifiant la relation (31) :

$$s = c_\ell \ln T + s_0 + \frac{x\ell_v}{T}$$

tandis que les points  $A$  et  $B$  ont pour abscisses :

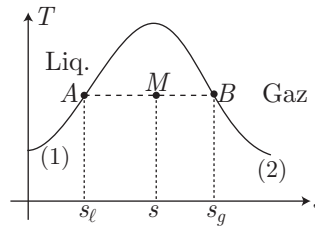
$$s_\ell = s(x = 0) = c_\ell \ln T + s_0$$

et :

$$s_g = s(x = 1) = c_\ell \ln T + s_0 + \frac{\ell_v}{T} = s_\ell + \frac{\ell_v}{T} \Rightarrow \frac{\ell_v}{T} = s_g - s_\ell$$

Par suite, l'entropie massique du mélange repéré par  $M$  vaut :

$$s = s_\ell + (s_g - s_\ell) \times x \Rightarrow x = \frac{s - s_\ell}{s_g - s_\ell} = \frac{AM}{AB}$$



### 6.4.2.3 Courbes isobares et isochores

- La vapeur sèche (à droite de la courbe 2) se comporte comme un gaz parfait qui vérifie la deuxième loi de Joule :  $dH = mc_p dT$ . Aussi, l'expression du premier principe de la thermodynamique fournit :

$$\begin{aligned} dH &= \delta Q + V dp = T dS \text{ car } dp = 0 \\ \Rightarrow dS &= mc_p \frac{dT}{T} \Rightarrow ds = c_p \frac{dT}{T} \end{aligned}$$

En notant  $s_g$  l'entropie molaire du point  $B$ , à la température  $T_B$ , cette équation s'intègre aisément :

$$\begin{aligned} \int_{s_g}^s ds &= c_p \int_{T_B}^T \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{s - s_g}{c_p} = \ln \left( \frac{T}{T_B} \right) \\ \Rightarrow T &= T_B \times \exp \left( \frac{s - s_g}{c_p} \right) \end{aligned}$$

ce résultat révèle que la courbe isobare de la phase gazeuse adopte la forme d'une exponentielle.

- Le palier  $AB$  constitue une courbe isobare pour le mélange liquide-vapeur ; la pression y prend la valeur de la pression de vapeur saturante.
- Juste avant l'ébullition, la capacité thermique massique  $c_\ell$  du liquide est presque constante, de sorte que :

$$\delta Q = mc_\ell dT \Rightarrow dS = mc_\ell \frac{dT}{T} \Rightarrow ds = c_\ell \frac{dT}{T}$$

En outre, la courbe isobare passant par le point  $A(s_\ell, T_A)$ , il s'ensuit que :

$$\int_{s_\ell}^s ds = c_\ell \int_{T_A}^T \frac{dT}{T} \Rightarrow s - s_\ell = c_\ell \left( \frac{T}{T_A} \right) \Rightarrow T = T_A \exp\left(\frac{s - s_\ell}{c_\ell}\right)$$

Or, le point  $A$  appartient également à la courbe (1) décrite par la loi (33), en conséquence de quoi :

$$T_A = T_t \exp\left(\frac{s_\ell}{c_\ell}\right) \Rightarrow T = T_t \exp\left(\frac{s}{c_\ell}\right)$$

De fait, la courbe isobare s'identifie, pour la phase liquide, à la courbe (1).

L'entropie de  $n$  moles de gaz parfait se présente sous la forme :

$$S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(TV^{\gamma-1}) + \text{cte} \Rightarrow s = \frac{R}{M(\gamma - 1)} \ln(TV^{\gamma-1}) + \text{cte} = c_V \ln(TV^{\gamma-1}) + \text{cte}$$

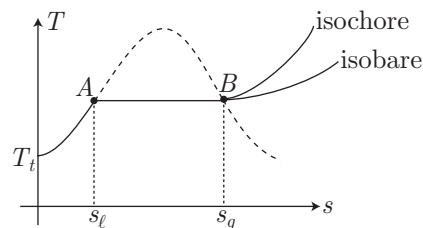
Au cours d'une transformation isochore, dont l'entropie massique prend la valeur  $s_g$  à la température  $T_B$  :

$$\begin{cases} s = c_V \ln(TV^{\gamma-1}) + \text{cte} \\ s_g = c_V \ln(T_B V^{\gamma-1}) + \text{cte} \end{cases} \Rightarrow \frac{s - s_g}{c_V} = \ln\left(\frac{T}{T_B}\right) \\ \Rightarrow T = T_B \times \exp\left(\frac{s - s_g}{c_V}\right)$$

La comparaison des expressions des courbes isobare  $T_p(s)$  et isochore  $T_V(s)$  :

$$\begin{cases} T_p(s) = T_B \times \left(\frac{s - s_g}{c_p}\right) \\ T_V(s) = T_B \times \exp\left(\frac{s - s_g}{c_V}\right) = T_B \times \exp\left(\gamma \frac{s - s_g}{c_p}\right) \end{cases} \text{ car } c_p = \gamma c_V$$

montre que la courbe isochore reproduit une exponentielle plus pentue que la courbe isobare.



### 6.4.3 Diagramme de Mollier

Encore appelé *diagramme enthalpique*, le diagramme de Mollier vise à représenter l'enthalpie massique d'un système en fonction de son entropie massique.



### 6.4.3.1 Courbe de saturation

Par convention, on admet que :

l'enthalpie et l'entropie massiques du liquide saturant sont nulles au point triple (de température  $T_t$ ).

- La courbe d'ébullition est confondue avec l'isobare du liquide saturant, auquel cas l'identité fondamentale :  $dH = T dS + V dp$  devient :

$$dh = T ds + v dp = T ds \text{ car } dp = 0 \quad (34)$$

En outre, la chaleur massique  $\delta q_p$ , apportée à pression constante au liquide, s'identifie à la variation  $dh$  :

$$dh = \delta q_p = c_\ell dT \Rightarrow T ds = c_\ell dT \Rightarrow ds = c_\ell \frac{dT}{T}$$

En supposant qu'à la température  $T_t$  du point triple l'entropie massique  $s$  du liquide saturant est nulle, on impose :

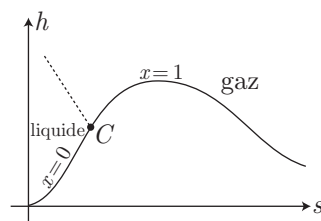
$$\int_0^s ds = c_\ell \int_{T_t}^T \frac{dT}{T} \Rightarrow \frac{s}{c_\ell} = \ln\left(\frac{T}{T_t}\right) \Rightarrow T = T_t e^{s/c_\ell}$$

Ce faisant, la relation (34) devient :

$$\begin{aligned} dh = T ds = T_t e^{s/c_\ell} ds &\Rightarrow \int_0^h dh = T_t \int_0^s e^{s/c_\ell} ds \\ &\Rightarrow h = T_t c_\ell \times (e^{s/c_\ell} - 1) \end{aligned}$$

Cette expression montre qu'avant le point critique  $C$  (à partir duquel la phase liquide n'existe plus), la courbe d'ébullition s'identifie à une exponentielle.

- La relation (34) :  $\frac{dh}{ds} = T$  montre que la pente du diagramme enthalpique s'identifie à la température  $T$  du système, laquelle est inférieure à la température  $T_C$  du point critique. C'est pourquoi la courbe de saturation admet un point d'inflexion en  $C$ .
- La courbe de rosée part du point critique et admet un *maximum*.



### 6.4.3.2 Palier de changement d'état

Lors du changement d'état,  $x \in [0, 1]$  et :  $\Delta h = x \ell_v$ . Soient  $h_\ell$  et  $s_\ell$  les coordonnées du point  $L$  représentatif du liquide saturant, cette relation s'écrit aussi :

$$h - h_\ell = x \ell_v$$

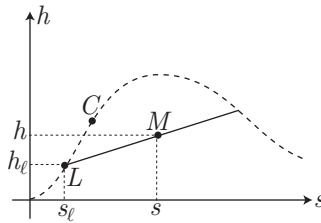
tandis que l'entropie massique varie de :

$$\Delta s = \frac{x \ell_v}{T} \Rightarrow x \ell_v = T \times (s - s_\ell)$$

où  $T$  demeure constant, ainsi que la chaleur latente massique de vaporisation  $\ell_v(T, p)$ . Il s'ensuit que :

$$h = h_\ell + T \times (s - s_\ell) \quad (35)$$

ce qui montre que le palier de changement d'état est un segment de droite dont la pente vaut la température du changement d'état.



#### 6.4.3.3 Courbes isobares et isothermes

- La courbe d'ébullition s'identifie à l'isobare du liquide saturant ;
- le palier de changement d'état est une courbe isobare ;
- pour la vapeur, l'enthalpie ne dépend que de la température, conformément à la deuxième loi de Joule :

$$dh = c_p dT \quad (36)$$

tandis que la variation d'enthalpie massique est fournie par la loi fondamentale :

$$\begin{aligned} dh &= T ds + v dp = T ds \text{ car } dp = 0 \\ \Rightarrow c_p dT &= T ds \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{1}{c_p} ds \end{aligned}$$

Or, la courbe isobare passe par le point  $G(s_g, h_g)$  de la courbe de rosée, caractéristique de la vapeur saturante, à la température  $T_0$  du changement d'état :

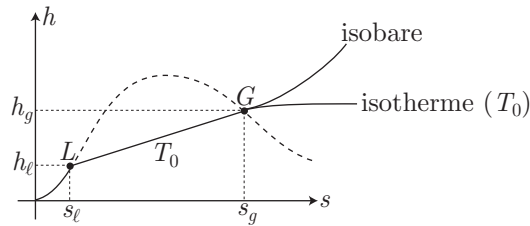
$$\begin{aligned} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} &= \frac{1}{c_p} \int_{s_g}^s ds \Rightarrow \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = \frac{s - s_g}{c_p} \\ \Rightarrow T &= T_0 \times \exp\left(\frac{s - s_g}{c_p}\right) \\ \Rightarrow dT &= \frac{T_0}{c_p} \exp\left(\frac{s - s_g}{c_p}\right) ds \end{aligned}$$

Ce faisant, l'équation (36) devient :

$$\begin{aligned} dh &= T_0 \exp\left(\frac{s - s_g}{c_p}\right) ds \Rightarrow \int_{h_g}^h dh = T_0 \int_{s_g}^s \exp\left(\frac{s - s_g}{c_p}\right) ds \\ \Rightarrow h &= h_g + c_p T_0 \left[ \exp\left(\frac{s - s_g}{c_p}\right) - 1 \right] \end{aligned}$$

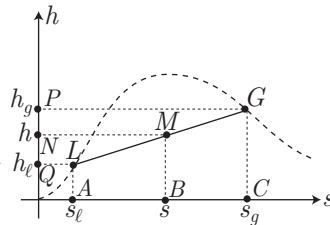
La courbe  $h(s)$  est donc une exponentielle qui passe par le point  $G(s_g, h_g)$ .

- Le palier de changement d'état coïncide également avec l'isotherme  $T_0$  ;
- L'enthalpie massique de la vapeur ne dépendant que de la température ( $dh = c_p dT$ ), il s'ensuit que l'isotherme de la phase gazeuse tend rapidement vers une asymptote horizontale.



#### 6.4.3.4 Courbes isotitres

Soient  $L(s_\ell, h_\ell)$  et  $G(s_g, h_g)$  les points d'intersection de la courbe de saturation avec le palier de changement d'état. Le système est caractérisé par son titre massique  $x$  de vapeur, ce qui signifie qu'une masse  $m$  de ce système contient une masse  $m_g = xm$  de vapeur et  $m_\ell = m(1 - x)$  de liquide. Le point  $M$  représentatif de ce système a pour coordonnées  $(s, h)$ .



L'enthalpie  $H = mh$  de ce système est la somme des enthalpies  $H_\ell = m_\ell h_\ell$  de la phase liquide et  $H_g = m_g h_g$  de la phase gazeuse :

$$\begin{aligned} H = H_\ell + H_g &\Rightarrow mh = m_\ell h_\ell + m_g h_g \\ &\Rightarrow mh = m(1 - x)h_\ell + mxh_g \\ &\Rightarrow h = h_\ell + (h_g - h_\ell)x \\ &\Rightarrow x = \frac{h - h_\ell}{h_g - h_\ell} = \frac{NQ}{PQ} \end{aligned}$$

Or, à la température  $T_0$  du changement d'état, la relation (35) fournit :

$$h - h_\ell = T_0 \times (s - s_\ell) \Rightarrow h_g - h_\ell = T_0 \times (s_g - s_\ell) \Rightarrow x = \frac{s - s_\ell}{s_g - s_\ell} = \frac{AB}{AC}$$

## 6.5 Thermodynamique des fluides en écoulement

### 6.5.1 Définitions en thermodynamique industrielle

En thermodynamique industrielle, on définit :

- le travail massique des forces de pression :  $\delta w_p = -p_{\text{ext}} dv$  ;
- le travail massique des forces de frottement :  $\delta w_f$  ;
- le *travail massique indiqué*,  $\delta w_i$ , qui est celui exercé sur le système par des parties mobiles incluses dans le système (pales d'une turbine, d'une pompe, ...) à l'exclusion d'autres champs de forces extérieurs ;

- le travail massique  $\delta w'$  des forces conservatives extérieures au système (champ de pesanteur, champ électrique, ...).

Le travail massique infinitésimale reçu par un système vaut ainsi :

$$\delta = \delta w_p + \delta w_f + \delta w_i + \delta w'$$

Le système reçoit également de l'énergie thermique, par unité de masse :

- $\delta q_e$  : par échange thermique avec l'extérieur ;
- $\delta q_f$  : par dissipation thermique liée aux frottements des parties mobiles, à la viscosité du fluide, ...

La chaleur totale reçue par le système vaut par conséquent :

$$\delta q = \delta q_e + \delta q_f$$

où  $\delta q_f$  a pour origine les sources d'irréversibilité dans le système.

### 6.5.2 Expressions du premier et du deuxième principes

L'énergie interne  $U$  d'un système prend en compte l'énergie cinétique  $\mathcal{E}_c^*$  dans le référentiel du centre de masse et l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{p \text{ int}}$  des forces internes au système :

$$U = \mathcal{E}_c^* + \mathcal{E}_{p \text{ int}}$$

Les forces conservatives extérieures au système dérivent d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_{p \text{ ext}}$  de sorte que :

$$d\mathcal{E}_{p \text{ ext}} = -\delta W_p - \delta W_i - \delta W'$$

Aussi, en notant  $\mathcal{E}_c$  l'énergie cinétique du centre de masse du système dans le référentiel d'étude,  $E_c = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_c^*$  l'énergie cinétique totale du système,  $E_p = \mathcal{E}_{p \text{ int}} + \mathcal{E}_{p \text{ ext}}$  son énergie potentielle totale, l'énergie mécanique :

$$E = E_c + E_p$$

varie sous l'influence de la chaleur totale  $Q$  reçue par le système et du travail  $W_f$  des forces de frottements :

$$\begin{aligned} dE = \delta Q + \delta W_f &\Rightarrow dE_c + dE_p = \delta Q + \delta W_f \\ &\Rightarrow d\mathcal{E}_c^* + d\mathcal{E}_c + d\mathcal{E}_{p \text{ int}} + d\mathcal{E}_{p \text{ ext}} = \delta Q + \delta W_f \\ &\Rightarrow dU + d\mathcal{E}_c + d\mathcal{E}_{p \text{ ext}} = \delta Q + \delta W_f \\ &\Rightarrow dU + d\mathcal{E}_c - \delta W_p - \delta W_i - \delta W' = \delta Q + \delta W_f \\ &\Rightarrow dU + d\mathcal{E}_c = \delta Q + \delta W_f + \delta W_p + \delta W_i + \delta W' \end{aligned}$$

c'est-à-dire, pour l'unité de masse :

$$\begin{aligned} du + de_c &= \delta q + \delta w_f + \delta w_p + \delta w_i + \delta w' \\ &= \delta q_e + \delta q_f + \delta w_f + \delta w_p + \delta w_i + \delta w' \end{aligned}$$

Or, l'énergie cédée par les forces de frottement est intégralement dissipée sous forme de chaleur :

$$\delta q_f + \delta w_f = 0 \Rightarrow du + de_c = \delta q_e + \delta w_p + \delta w_i + \delta w' \Rightarrow \Delta u + \Delta e_c = q_e + w_p + w_i + w'$$

Pour un fluide en écoulement, il a été établi (voir page 854) que le travail des forces de pression vaut :

$$w_p = -\Delta(pv) \Rightarrow \Delta u + \Delta(pv) + \Delta e_c = q_e + w_i + w' \quad (37)$$

$$\Rightarrow \Delta h + \Delta e_c = q_e + w_i + w' \quad (38)$$

Lorsque le fluide passe de l'altitude  $z$  à l'altitude  $z + \Delta z$ , le travail du poids vaut :

$$W' = -mg \Delta z = -m\Delta(gz) \Rightarrow w' = -\Delta(gz)$$

auquel cas la loi (38) devient :

$$\Delta h + \Delta e_c + \Delta(gz) = q_e + w_i$$

Dans beaucoup de situations, on négligera la variation d'altitude du fluide, de manière à poser :

$$\Delta h + \Delta e_c = q_e + w_i \Rightarrow dh + de_c = \delta q_e + \delta w_i \quad (39)$$

Si  $\delta s_e = \frac{\delta q_e}{T}$  désigne la variation d'entropie massique liée aux échanges thermiques, l'inégalité de Clausius prévoit que la variation d'entropie massique du système vérifie :

$$ds \geq \frac{\delta q_e}{T} \Rightarrow ds \geq \delta s_e$$

d'où l'on déduit qu'il se crée de l'entropie  $\delta s_c$  dans le système, telle que :

$$ds = \delta s_e + \delta s_c \text{ avec } \delta s_c \geq 0$$

Cette création d'entropie massique provient de phénomènes irréversibles (frottements, viscosité du fluide ...) et c'est pourquoi on posera :

$$\delta s_c = \frac{\delta q_f}{T} \geq 0$$

Remarque - L'inégalité précédente montre que  $\delta q_f \geq 0$ , c'est-à-dire :

$$\delta w_f = -\delta q_f \leq 0$$

ce qui confirme la nature résistante des forces de frottement (ou de viscosité).

Étant donné que  $\delta q = \delta q_e + \delta q_f$ , il s'ensuit que l'on posera :

$$ds = \delta s_e + \delta s_c = \frac{\delta q_e}{T} + \frac{\delta q_f}{T} \Rightarrow ds = \frac{\delta q}{T}$$

En tenant compte de la loi fondamentale de la thermodynamique :

$$dH = T dS + V dp \Rightarrow dh = T ds + v dp$$

on retiendra que le premier et le deuxième principes de la thermodynamique sont à l'origine des lois :

$$dh + de_c = \delta q_e + \delta w_i \quad T ds = \delta q_e + \delta q_f \quad dh = T ds + v dp \quad (40)$$

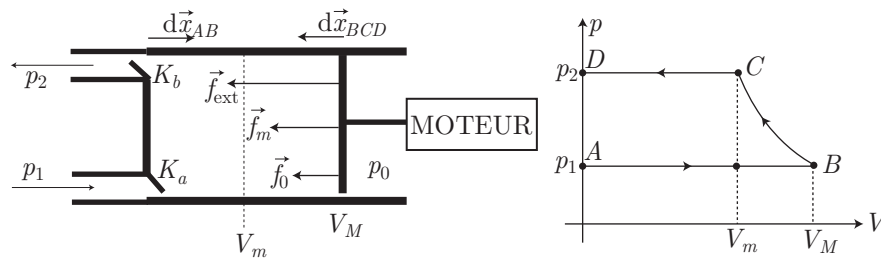
### 6.5.3 Travail de transvasement

#### 6.5.3.1 Définition

On appelle *travail de transvasement*  $w_t$  le travail qu'il faut fournir à une pompe pour amener un fluide de la pression  $p_1$  à la pression  $p_2$ .

On notera :

- $p_0$  la pression atmosphérique (constante) ;
- $V_M$  le volume *maximum* du corps de pompe ;
- $S$  la surface du piston sur laquelle s'exerce la pression extérieure  $p_0$  et une force  $\vec{f}_m$  (par exemple exercée par un moteur) ;
- $p$  la pression du fluide qui subit le transvasement ;
- $V$  le volume occupé par le fluide dans le corps de pompe.



On admettra que le transvasement est réalisé de manière réversible, c'est-à-dire que la pression extérieure  $p_{\text{ext}}$  qui s'exerce sur le piston demeure toujours égale à la pression  $p$  du fluide :  $p_{\text{ext}} = p$ . En outre, si  $\vec{f}_0$  désigne la force associée à la pression  $p_0$ , la force  $\vec{f}_{\text{ext}}$  que l'extérieur exerce sur le piston vérifie :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{f}_0 + \vec{f}_m &\Rightarrow p_{\text{ext}} S = p_0 S + f_m \Rightarrow f_m = (p_{\text{ext}} - p_0) S \\ &\Rightarrow f_m = (p - p_0) S \end{aligned}$$

Il convient de distinguer trois phases :

- la *phase d'admission*  $A \rightarrow B$ , pendant laquelle le fluide pénètre à la pression constante  $p_1$  dans le cylindre jusqu'à occuper le volume  $V_M$ . La force  $\vec{f}_m$  exerce un travail élémentaire :

$$\delta W_a = \vec{f}_m \cdot d\vec{x}_{AB} = -f_m dx_{AB} = -(p_1 - p_0) S dx_{AB}$$

où  $S dx_{AB}$  désigne l'accroissement du volume  $V$  :

$$\delta W_a = -(p_1 - p_0) dV \Rightarrow W_a = -(p_1 - p_0) \int_0^{V_M} dV = -(p_1 - p_0) V_M$$

- la *phase de compression*  $B \rightarrow C$ , pendant laquelle la pression du fluide passe de  $p_1$  à  $p_2$  (les soupapes d'admission  $K_a$  et d'échappement  $K_b$  sont fermées). La force  $\vec{f}_m$  exerce alors un travail élémentaire :

$$\delta W_c = \vec{f}_m \cdot d\vec{x}_{BCD} = f_m dx_{BCD} = (p - p_0) S dx_{BCD}$$

Étant donné que  $S dx_{BCD} = -dV$ , il s'ensuit que :

$$\delta W_c = -(p - p_0) dV \Rightarrow W_c = - \int_{V_M}^{V_m} (p - p_0) dV = \int_{V_m}^{V_M} (p - p_0) dV$$

c'est-à-dire :

$$W_c = \int_{V_m}^{V_M} p dV - p_0 (V_M - V_m)$$

- la phase d'échappement  $C \rightarrow D$ , au cours de laquelle la pression du fluide demeure constante et égale à  $p_2$  (la soupape  $K_b$  est ouverte tandis que la soupape  $K_a$  est fermée). La force  $\vec{f}_m$  exerce un travail élémentaire :

$$\delta W_e = \vec{f}_m \cdot d\vec{x}_{BCD} = f_m dx_{BCD} = (p_2 - p_0) S dx_{BCD}$$

où :

$$\begin{aligned} S dx_{BCD} = -dV &\Rightarrow \delta W_e = -(p_2 - p_0) dV \\ &\Rightarrow W_e = -(p_2 - p_0) \int_{V_m}^0 dV = (p_2 - p_0) V_m \end{aligned}$$

Ce faisant, au cours d'un cycle ( $ABCD A$ ), la force  $\vec{f}_m$  exerce le travail :

$$\begin{aligned} W_t &= \oint \delta W = W_a + W_c + W_e \\ &= -p_1 V_M + p_0 V_M + \int_{V_m}^{V_M} p dV - p_0 (V_M - V_m) + p_2 V_m - p_0 V_m \\ &= p_2 V_m - p_1 V_M + \int_{V_m}^{V_M} p dV \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} p_2 V_m - p_1 V_M &= \int_{V_M}^{V_m} d(pV) = \int_{V_M}^{V_m} (p dV + V dp) \\ &= - \int_{V_m}^{V_M} p dV + \int_B^C V dp \\ &\Rightarrow W_t = \int_B^C V dp \end{aligned}$$

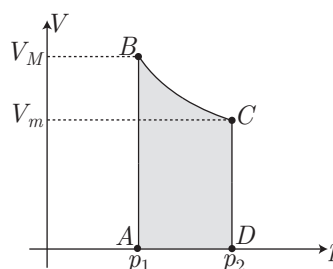
Le travail  $W_t$  désigne le *travail de transvasement*, dont l'expression massique est :

$$w_t = \int_B^C v dp \Rightarrow v dp = \delta w_t \quad (41)$$

Remarque – Si l'on représente graphiquement la transformation dans un diagramme  $(p, V)$ , on constate que :

$$W_t = \int_B^C V dp = \int_{p_1}^{p_2} V dp$$

désigne l'aire sous la courbe  $V(p)$ .



### 6.5.3.2 Relation entre $w_t$ et $w_i$

Désormais, on négligera la variation d'énergie cinétique  $de_c$ , tandis que l'expression (41) permet de présenter les résultats (40) de la page 901 sous la forme suivante :

$$\begin{cases} dh = \delta q_e + \delta w_i \\ T ds = \delta q_e + \delta q_f = \delta q \\ dh = T ds + \delta w_t \end{cases}$$

Ce faisant :

$$\delta q_e + \delta w_i = \delta q_e + \delta q_f + \delta w_t \text{ avec } \delta q_f = T \delta s_c \geq 0 \quad (42)$$

$$\Rightarrow w_i = w_t + q_f \quad (43)$$

Lorsque les transformations sont réversibles,  $q_f = \int T \delta s_c = 0$ , tandis que dans le cas où des processus irréversibles interviennent,  $q_f > 0$ . C'est pourquoi :

$$w_i \geq w_t$$

### 6.5.4 Utilisation des diagrammes entropiques

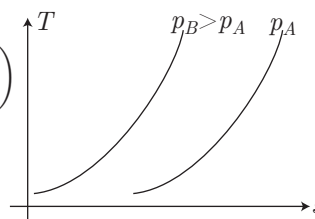
Dans cette partie, nous nous intéresserons au diagramme entropique d'un gaz parfait, de masse molaire  $M$ , de capacité thermique massique à pression constante  $c_p$  et dont la constante massique des gaz parfaits est définie par  $r = \frac{R}{M}$ . L'entropie  $S(T, p)$  d'un tel gaz est donnée par :

$$\begin{aligned} S(T, p) &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T^\gamma p^{1-\gamma}) + S_0 = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) + S_0 \\ &= m \times \frac{r\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) + S_0 = mc_p \ln\left(Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) + S_0 \\ &\Rightarrow s(T, p) = c_p \ln\left(Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) + s_0 \end{aligned}$$

Soit  $s_A = S(T, p_A)$  une courbe isobare, à pression  $p_A$ , dans le diagramme entropique :

$$\frac{s_A - s_0}{c_p} = \ln\left(Tp_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right) \Rightarrow T = p_A^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \exp\left(\frac{s_A - s_0}{c_p}\right)$$

Cette loi montre que l'isobare est une branche d'exponentielle, d'autant plus grande que  $p_A$  est important.





**6.5.4.1 Transformations réversibles**

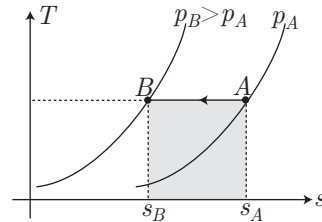
COMPRESSION ISOTHERME

Le gaz subit une transformation  $A \rightarrow B$  isotherme et par conséquent réversible. Il s'ensuit que :

$$w_i = w_t \text{ et } \delta q = \delta q_e \text{ car } \delta q_f = 0$$

Ce faisant :

$$\delta q_e = T ds \Rightarrow q_e = \int_A^B T ds = -\mathcal{A}$$



si  $\mathcal{A}$  désigne l'aire (grisée) comprise sous le segment de droite  $AB$ . En outre, la deuxième loi de Joule se traduit par :

$$\begin{aligned} dh &= c_p dT = 0 \text{ car } T = \text{cte} \\ \Rightarrow \delta q_e + \delta w_i &= 0 \Rightarrow w_i = -q_e = \mathcal{A} \\ \Rightarrow w_i &= w_t = \mathcal{A} \end{aligned}$$

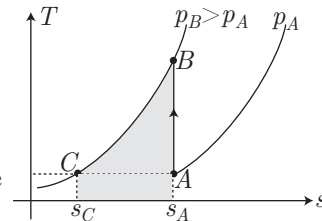
COMPRESSION ADIABATIQUE RÉVERSIBLE

Soit  $C$  le point d'intersection de l'isobare  $p_B = \text{cte}$  avec l'isotherme  $T_A = T_C$ . Compte tenu de la deuxième loi de Joule :

$$dh_{AC} = c_p dT = 0 \Rightarrow h_C = h_A \Rightarrow h_B - h_A = h_B - h_C = \int_C^B dh$$

Or, le long de l'isobare  $p_B = \text{cte}$  :

$$\begin{aligned} dh &= T ds + \delta w_t = T ds + v dp = T ds \\ \Rightarrow \int_C^B dh &= h_B - h_C = \int_C^B T ds = \mathcal{A} \end{aligned}$$



si  $\mathcal{A}$  désigne l'aire (grisée sur la figure) sous la courbe isobare  $p_B = \text{cte}$ , entre  $s_C$  et  $s_A$ .

En outre, la transformation adiabatique ( $\delta q_e = 0$ ) réversible ( $\delta q_f = 0$  et  $w_t = w_i$ ) est caractérisée par :

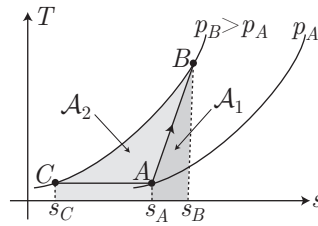
$$q_e = 0 \quad q_f = 0 \quad ds = 0 \quad w_t = w_i$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} dh = \delta q_e + \delta w_i &\Rightarrow dh = \delta w_i \\ \Rightarrow w_i &= \int_A^B dh = h_B - h_A = h_B - h_C \\ \Rightarrow w_i &= \mathcal{A} = w_t \end{aligned}$$

**6.5.4.2 Transformations irréversibles**

Considérons une compression irréversible  $A \rightarrow B$  qui fait passer la pression du gaz parfait de  $p_A$  à  $p_B$ . On note également  $C$  le point d'intersection de l'isotherme passant par  $A$  et de l'isobare  $p_B$ .



Soient :

- $\mathcal{A}_1$  l'aire sous la courbe (AB) pour  $s \in [s_A, s_B]$ ;
- $\mathcal{A}_2$  l'aire comprise à l'intérieur de (ABC) et sous l'isotherme (AC) pour  $s \in [s_C, s_A]$ .

Pour une transformation quelconque :

$$\delta q = T ds \Rightarrow q = \int_A^B T ds \Rightarrow q_e + q_f = \mathcal{A}_1$$

tandis qu'au cours de la transformation isotherme  $A \rightarrow C$ , l'enthalpie du gaz parfait ne varie pas (conformément à la deuxième loi de Joule) :  $h_C = h_A$ . Il s'ensuit que :

$$\int_A^B dh = h_B - h_A = h_B - h_C = \int_C^B dh \quad (44)$$

Or, le long de l'isobare  $p_B$ , la pression  $p$  du gaz ne varie pas, ce qui a pour conséquence :

$$\begin{aligned} \delta w_t = v dp = 0 &\Rightarrow dh_{CB} = T ds + \delta w_t = T ds \\ &\Rightarrow \int_C^B dh = \int_C^B T ds = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu de la relation (44) :

$$h_B - h_A = \int_A^B dh = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

En outre, le long de la transformation  $A \rightarrow B$  :

$$\begin{aligned} dh = T ds + \delta w_t &\Rightarrow \int_A^B dh = \int_A^B T ds + w_t \Rightarrow \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + w_t \\ &\Rightarrow w_t = \mathcal{A}_2 \end{aligned}$$

Si la compression est, de surcroît, adiabatique :

$$q = q_e + q_f = q_f \Rightarrow q_f = \mathcal{A}_1$$

tandis que la loi :  $w_t = \mathcal{A}_2$  demeure valable. Enfin, la relation (43) :  $w_i = w_t + q_f$  conduit à :

$$w_i = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$$

● **152** ————— **Lycée Saint-Louis, Paris**

5 min.

Travail des forces de pression

MP-PC-PSI-PT

Une bulle de savon, de rayon  $a$ , contient de l'air assimilé à un gaz parfait. La pression du gaz est  $p$  et sa température est  $T$ .

L'air extérieur est à la température  $T$  et à la pression constante  $p_0$ .

Le travail nécessaire pour augmenter la surface de la couche savonneuse (phénomène de tension superficielle) est donné par l'expression :

$$\delta W = 2 A_0(T) dS$$

où  $S$  est la surface de la sphère de rayon  $a$ .

Calculer la différence de pression  $p - p_0$  en fonction de  $A_0$  et de  $a$ .

● **153** ————— **Concours ENAC - Pilotes**

10 min.

Machines thermiques

MP-PC-PSI-PT

Pour maintenir la température d'un immeuble à  $T_2 = 20^\circ\text{C}$ , alors que la température à l'extérieur vaut  $T_1 = 5^\circ\text{C}$ , il faut lui fournir une quantité de chaleur  $Q = 2.10^8$  J par heure.

1. On utilise pour cela une pompe à chaleur. Donner le schéma de principe en indiquant par des flèches le sens des échanges de chaleur et de travail.
2. Indiquer dans quelles conditions la pompe à chaleur doit fonctionner pour que la puissance mécanique consommée soit minimale. On démontrera le résultat.
3. Calculer cette puissance minimale consommée par la pompe à chaleur.
4. Définir et calculer l'efficacité théorique maximale  $e$  de cette pompe dans ces conditions ; montrer qu'elle ne dépend que de  $T_1$  et de  $T_2$ . Indiquer clairement la signification de  $e$ .
5. La température extérieure est toujours  $T_1 = 5^\circ\text{C}$ . Pour quelle température  $T_2$  à l'intérieur,  $e$  est-il *maximum* ? Interpréter.

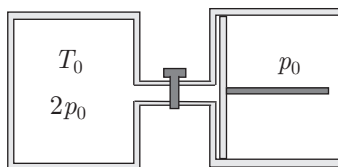
● **154** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

Calcul d'entropie

MP-PC-PT-PSI

Un piston, muni d'une vanne, sépare en deux compartiments un récipient adiabatique. À l'état initial, le piston est complètement à gauche, la vanne est fermée et le premier compartiment contient deux moles de gaz parfait à  $T_0, 2p_0$ . La pression extérieure vaut  $p_0$ . On ouvre la vanne.



1. Déterminer l'état final du gaz.
2. Calculer la variation d'entropie du gaz.

3. Que valent l'entropie créée  $S_{cr}$  et l'entropie échangée  $S_{éch}$  ?

Pour les applications numériques, on prendra :

$$T_0 = 300 \text{ K} \quad R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \gamma = \frac{5}{3}$$

### ● 155 ————— Lycée du Parc, Lyon

10 min.

Écoulement d'un fluide

MP-PC-PSI-PT

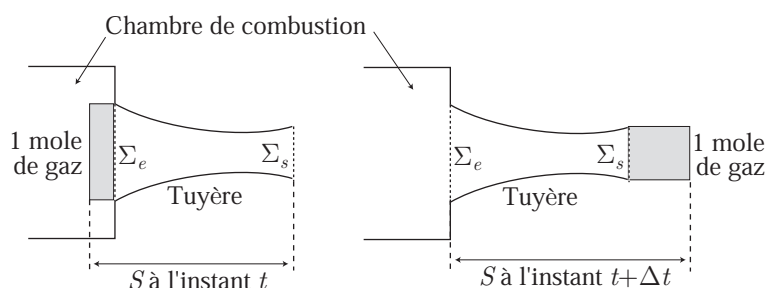
Une chambre de combustion fournit un mélange gazeux que l'on considère comme un gaz parfait de masse molaire  $M$  et de capacité thermique molaire à pression constante  $C_{pm}$ . Dans la chambre de combustion, la vitesse du gaz est négligeable, la pression est  $p_e$ , la température est  $T_e$ . Ce gaz subit, à travers une tuyère, une détente adiabatique réversible qui l'amène à la pression  $p_s$  et à la température  $T_s$ . La vitesse d'éjection du gaz à la sortie de la tuyère est alors  $u_s$ .

On désigne par  $U_{em}$ ,  $H_{em}$ ,  $V_{em}$  l'énergie interne, l'enthalpie et le volume molaires du gaz dans la chambre de combustion. À la sortie ces valeurs deviennent  $U_{sm}$ ,  $H_{sm}$ ,  $V_{sm}$ .

Entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ , une mole de gaz entre dans la tuyère en traversant la section  $\Sigma_e$  et une mole sort de la tuyère en traversant  $\Sigma_s$ .

On définit le système  $S$  fermé, constitué de la réunion de :

- $S_1$  : gaz contenu dans la tuyère
- $S_2$  : une mole de gaz



- En appliquant le premier principe de la thermodynamique, exprimer  $u_s^2$  en fonction de  $M$ ,  $H_{em}$  et  $H_{sm}$ .
- Exprimer  $u_s^2$  en fonction de  $R$ ,  $M$ ,  $T_e$ ,  $p_s$ ,  $p_e$  et du rapport  $\gamma$ .
- Le propergol utilisé est un mélange équimolaire  $\{\text{F}_2 + \text{H}_2\}$ . On donne :  
 $T_e = 4990 \text{ K}$ ,  $\gamma = 1,4$ ,  $\frac{p_e}{p_s} = 5$ ,  $M_H = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $M_F = 19 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  
 $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

### ● 156 ————— Concours ENGEES

15 min.

Machines thermiques

MP-PC-PSI-PT

Un moteur réel fonctionne entre des sources aux températures  $T_f = 400 \text{ K}$  et  $T_c = 650 \text{ K}$ , il reçoit un transfert thermique de  $1500 \text{ J}$  et fournit un travail  $500 \text{ J}$ .

1. Calculer le rendement du moteur réel et celui du moteur de Carnot fonctionnant entre les mêmes sources.
2. Que vaut l'entropie créée  $S_{cr}$  dans le moteur réel ?
3. Que vaut la différence de travail entre le moteur réel et le moteur de Carnot ? Montrer qu'elle vaut  $T_f S_{cr}$ .

● **157** ————— **Lycée Hoche, Versailles**

15 min.

Premier et deuxième principes de la thermodynamique

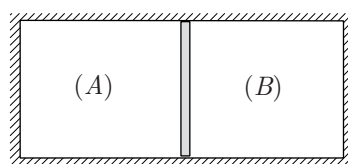
MP-PC-PSI-PT

Un cylindre fermé à ses deux extrémités, d'axe horizontal, est divisé en deux compartiments  $A$  et  $B$  par un piston mobile sans frottements. Les parois du cylindre sont adiabatiques. On néglige la capacité thermique du cylindre et du piston.

Chaque compartiment renferme le même nombre  $n$  de moles d'hydrogène, assimilable à un gaz parfait dont les capacités thermiques molaires  $C_{pm}$  (à pression constante) et  $C_{Vm}$  (à volume constant) sont constantes. On appelle  $R$  la constante molaire des gaz parfaits et  $\gamma$  le rapport  $\frac{C_{pm}}{C_{Vm}}$ .

On donne :

$$n = 0,4 \text{ mol} \quad R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \gamma = 1,40$$



On connaît l'état initial :

	Pression	Volume	Température
Compartiment $A$	$p_1 = 10^5 \text{ Pa}$	$V_{A_1}$	$T_{A_1} = 400 \text{ K}$
Compartiment $B$	$p_1 = 10^5 \text{ Pa}$	$V_{B_1}$	$T_{B_1} = 250 \text{ K}$

Après un certain temps, le piston étant faiblement conducteur de la chaleur, tout l'hydrogène dans le cylindre est à la même température : soit  $T_2$  cette température finale. L'état final est donc caractérisé par :

	Pression	Volume	Température
Compartiment $A$	$p_2$	$V_{A_2}$	$T_2$
Compartiment $B$	$p_2$	$V_{B_2}$	$T_2$

On suppose que l'hydrogène contenu dans le compartiment  $A$  subit une transformation quasi statique (de même pour l'hydrogène contenu dans le compartiment  $B$ ).

1. (a) Déterminer la variation d'énergie interne  $\Delta U$  de tout l'hydrogène contenu dans le cylindre.  
(b) Déterminer la température  $T_2$ .
2. (a) Déterminer la pression finale  $p_2$  de l'hydrogène dans le cylindre.  
(b) Montrer que l'hydrogène dans le compartiment  $A$  et l'hydrogène dans le compartiment  $B$  ont subi une transformation isobare.

3. (a) Déterminer le signe de la variation d'entropie  $\Delta S$  de tout l'hydrogène contenu dans le cylindre. Justifier soigneusement la réponse.  
 (b) Calculer  $\Delta S$ .

● **158** ————— **Lycée La Martinière Mon Plaisir, Lyon**

15 min.

Premier principe de la thermodynamique

MP-PC-PSI-PT

Soit un gaz parfait monoatomique  $\left(\gamma = \frac{5}{3}\right)$  à  $T_0 = 1\,000\text{ K}$  et  $p_0 = 10^6\text{ Pa}$ .

On donne :  $R = 8,32\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

On cherche à extraire de ce fluide une énergie mécanique maximale.

1. Montrer qu'une transformation adiabatique qui amènerait le gaz à  $0\text{ K}$  permettrait de récupérer entièrement l'énergie interne du fluide, sous forme de travail mécanique (par convention, on prendra  $U = 0$  pour  $T = 0\text{ K}$ ).
2. La détente est adiabatique réversible. Déterminer la loi d'évolution du rapport des températures finale et initiale  $\frac{T_1}{T_0}$  en fonction du rapport des pressions finale et initiale  $\frac{p_1}{p_0}$ . Évaluer également le travail mécanique fourni par le fluide. Calculer numériquement la température  $T_1$  et l'énergie extraite par mole pour  $p_1 = 10^5\text{ Pa}$ .
3. On enferme une mole de gaz parfait dans les conditions  $(p_0, T_0)$ , dans un cylindre adiabatique fermé par un piston de masse négligeable. La détente est réalisée de façon irréversible en lâchant le piston sur lequel s'applique la pression  $p_2$  constante. Soit  $T_2$  la température de l'équilibre final. Montrer que :

$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{1}{\gamma} \left[ 1 + (\gamma - 1) \frac{p_2}{p_0} \right]$$

Calculer numériquement  $T_2$  et l'énergie mécanique fournie par le fluide pour  $p_2 = 10^5\text{ Pa}$ .

4. Tracer, sur le même graphe, le rapport des températures initiale et finale  $\frac{T}{T_0}$  en fonction de  $\frac{p}{p_0}$  pour les deux modes de détente précédents. Placer soigneusement les deux courbes l'une part rapport à l'autre et conclure.

● **159** ————— **Lycée Saint-Louis, Paris**

40 min.

Premier et deuxième principes de la thermodynamique

MP-PC-PSI-PT

On considère une barre cylindrique, de section  $\Sigma$ , de longueur  $L$  (barre de cuivre par exemple) calorifugée sur sa surface latérale et mise au contact thermique, à l'extrémité  $x = 0$ , avec une source de chaleur à la température  $T_1$  et, à l'extrémité  $x = L$ , avec une source de chaleur à la température  $T_2$ .

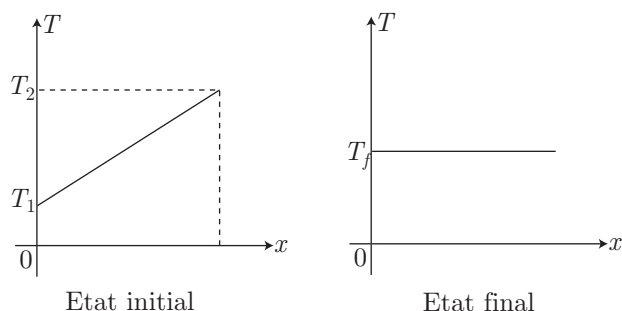
On sait que, dans ces conditions, un régime permanent finit par s'installer, tel que :

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$$

1. On isole complètement la barre. La température finale de la barre est uniforme et vaut  $T_f$ . Montrer que :

$$T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

On négligera tout phénomène de dilatation.



Pour les dessins ci-dessus, on a choisi  $T_2 > T_1$ .

2. On se propose de calculer la variation d'entropie de la barre entre l'état initial et l'état final.
- Quel est, avant tout calcul, le signe de la variation d'entropie de la barre :  $\Delta S = S_f - S_i$  ? justifier la réponse.
  - Calculer d'abord la variation d'entropie  $dS_x$  d'un élément de barre compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . On note  $\rho$  la masse volumique de la barre,  $c$  sa capacité thermique massique ( $\rho$  et  $c$  sont des constantes).
  - En déduire  $\Delta S$  pour toute la barre.

On aura intérêt, pour le calcul, à utiliser  $T(x) = ax + b$  et  $T_f$  et l'on ne réintroduira  $T_1$  et  $T_2$  qu'en fin de calcul.

On donne :

$$\int \ln(ax + b) dx = \frac{ax + b}{a} \ln(ax + b) - x$$

On mettra  $\Delta S$  sous la forme :

$$\Delta S = \rho \Sigma c L \left[ 1 + \ln \left( \frac{T_f}{T_2} \right) - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \right]$$

● **160** **Lycée Hoche, Versailles**

45 min.

Statique des fluides

MP-PC-PSI-PT

Dans ce problème, on considère l'air comme un gaz parfait. Cet air est en équilibre statique dans le champ de pesanteur terrestre, d'intensité  $g$ . ( $Oz$ ) désignant l'axe vertical ascendant, on désire étudier les évolutions de la pression  $p$ , de la température  $T$  et de la masse volumique  $\rho$  en fonction de l'altitude  $z$  du point considéré.

On pose :  $p_0 = p(z = 0)$ ,  $T_0 = T(z = 0)$ ,  $\rho_0 = \rho(z = 0)$ . Pour les applications numériques, on prendra :

$$g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \rho_0 = 1,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad p_0 = 10^5 \text{ Pa} \quad T_0 = 290 \text{ K}$$

**ÉNONCÉS**

**1. Modèle de l'atmosphère isotherme**

On suppose l'air en équilibre isotherme à la température  $T_0$ . Déterminer la pression  $p$  et la masse volumique  $\rho$  à l'altitude  $z$  en fonction de  $p_0, \rho_0, g$ .

*Application numérique* : à quelle altitude  $h_0$  a-t-on  $\rho = \frac{\rho_0}{2}$  ?

**2. Modèle de l'atmosphère adiabatique**

On admet maintenant qu'il existe, entre  $p$  et  $\rho$ , une relation de la forme :

$$p = p_0 \times \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \text{ avec } \gamma = \text{constante.}$$

(a) Sachant que le gaz est parfait, établir l'équation différentielle vérifiée par  $T$  et montrer que :

$$\frac{dT}{T_0} = -\alpha dz$$

où  $\alpha$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $\gamma, \rho_0, g, p_0$ .

(b) En déduire alors  $T(z), p(z)$  et  $\rho(z)$ .

(c) Montrer que, dans ce modèle, l'atmosphère est limitée et calculer la hauteur limite  $h_1$  en fonction de  $p_0, g, \rho_0$  et  $\gamma$ .

*Application numérique* : en plus des valeurs précédentes, on donne  $\gamma = 1,4$  ; calculer  $h_1$ .

(d) Quelle valeur faudrait-il donner à  $\gamma$  pour que ce modèle coïncide avec celui de l'atmosphère isotherme ?

On rappelle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x$$

**3. Modèle de l'atmosphère standard**

Pour étudier les performances d'un hélicoptère, on définit habituellement une atmosphère *standard* où l'on admet que  $\rho$  et  $T$  varient de la manière suivante :

$$\rho = \rho_0 \times \frac{H - z}{H + z} \quad T = T_0 - \lambda z \text{ avec } H = 20 \text{ km et } \lambda = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$$

Ce modèle n'est valable que pour  $z < 11$  km.

Montrer que, si l'on donne à  $\gamma$  une certaine valeur  $\gamma_s$ , les modèles de l'atmosphère adiabatique et de l'atmosphère *standard* donnent la même évolution de la température  $T$ . Exprimer  $\gamma_s$  en fonction de  $\lambda, \rho_0, p_0, T_0$  et  $g$ . Calculer la valeur numérique de  $\gamma_s$ .

● **161** ————— **Concours de la Banque Agro**

10 min.

*Conduction thermique*

MP-PC-PSI-PT

On étudie les transferts thermiques dans un local maintenu à la température  $T_1$ . On supposera que ces transferts s'effectuent, par conduction thermique, à travers les surfaces vitrées de la pièce. Celles-ci représentent une surface  $S = 6,5 \text{ m}^2$ .

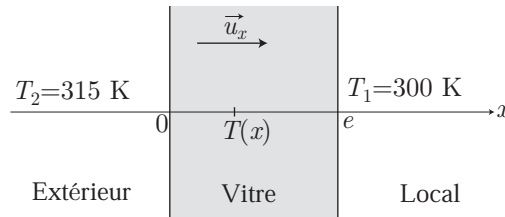
On veut déterminer le transfert thermique à travers un simple vitrage d'épaisseur  $e = 5,0 \text{ mm}$ , d'aire  $S$ , de masse volumique  $\mu$  et de capacité thermique massique  $c$ .



La conductivité thermique du verre est  $\lambda = 1,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

On suppose que le phénomène de conduction est unidirectionnel suivant la direction du vecteur unitaire  $\vec{u}_x$ .

On rappelle la loi de Fourier :  $\vec{j} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x$ , où  $\vec{j}$  est le vecteur densité de flux thermique et  $T(x, t)$  la température à l'intérieur de la vitre.



1. En faisant le bilan d'énergie dans un volume élémentaire de section  $S$  et d'épaisseur  $dx$ , établir l'équation différentielle vérifiée par la température  $T(x, t)$  à l'intérieur du vitrage :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

On exprimera  $D$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $c$ .

2. Déterminer, en régime stationnaire, l'expression de  $T(x)$ . En déduire l'expression du flux thermique  $\phi$  qui traverse la surface vitrée, en fonction de  $\lambda$ ,  $S$ ,  $e$ ,  $T_1$  et  $T_2$  puis calculer sa valeur numérique.

### ● 162 ————— Concours Commun Polytechnique

15 min.

Conduction thermique

MP-PC-PSI-PT

Quatre explorateurs construisent un *igloo* hémisphérique sur la banquise. L'épaisseur de la glace est d'environ 0,5 m, sa conductivité thermique est  $\lambda = 2,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , la température extérieure est  $T_e = -10^\circ\text{C}$ ; chaque explorateur dégage une puissance de 50 W. On néglige les transferts par conduction-convection.

1. Pour avoir chaud à l'intérieure, les explorateurs ont-ils intérêt à construire un *igloo* de grand ou petit rayon ?
2. Calculer la température intérieure en régime permanent pour un *igloo* de rayon intérieur 1 m.

### ● 163 ————— Banque de la Filière PT

15 min.

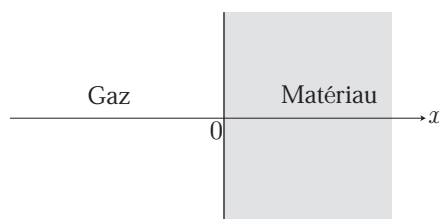
Conduction thermique

MP-PC-PSI-PT

On propose un modèle simple de propagation de la chaleur, à l'échelon local, transversalement dans un matériau  $\mathcal{R}$  (en cuivre) caractérisé par :

- sa conductivité thermique :  $\lambda = 440 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- sa capacité thermique massique :  $c = 320 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- sa masse volumique :  $\mu = 8\,960 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

On suppose que la température ne dépend que de  $x$  et du temps  $t$ .



1. Par application du premier principe de la thermodynamique à une tranche de matériaux de section droite  $s$ , d'épaisseur  $dx$  et en utilisant la loi de Fourier, établir l'équation dite « de diffusion » qui régit l'évolution de la température dans le matériau :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (45)$$

2. On suppose que la température du matériau tend vers  $T_0$  lorsque  $x$  tend vers l'infini et obéit, dans le plan  $x = 0$ , à la loi :

$$T(0, t) = T_0 + A \cos(\omega t)$$

- (a) Examiner à quelle condition sur la valeur de la constante  $d$  (ci-dessous) la fonction :

$$T(x, t) = T_0 + \operatorname{Re} \left\{ A + \exp j \left[ \omega t - \frac{(1+j)x}{d} \right] \right\}$$

est solution, en régime établi, de l'équation (45) dans les conditions imposées. On rappelle que  $(j)^2 = -1$  et que  $\operatorname{Re} \{z\}$  désigne ici la partie réelle du complexe  $z$ .

- (b) Calculer  $d$  pour le matériau envisagé (cuivre), avec  $\omega = 25$  Hz.  
 (c) On met en œuvre le matériau dans des conditions où son épaisseur  $e$  est négligeable devant  $d$ . Indiquer la propriété simple du profil de température  $T(x)$  à  $t$  donné, pour  $x$  compris entre 0 et  $e$ .

Quel ordre de grandeur peut-on donner à l'épaisseur  $e$  dans le cas du cuivre ?

ÉNONCÉS

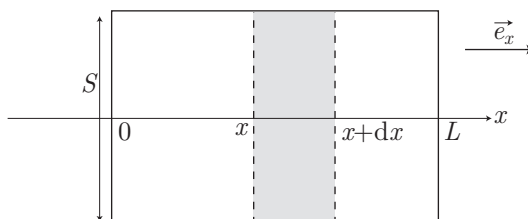
## ● 164 ————— Concours Commun Polytechnique

15 min.

Conduction thermique

MP-PC-PSI-PT

On considère un corps homogène de section droite  $S$ , de longueur  $L$ , de masse volumique  $\rho$ , de conductivité thermique  $\lambda$  et de capacité thermique massique  $c$ , avec  $\lambda$ ,  $\rho$ ,  $c$  constants. La température du matériau ne dépend que de  $x$  et de  $t$  et sera notée  $T(x, t)$ . Les parois parallèles à l'axe  $(Ox)$  sont isolées thermiquement et l'on note  $\vec{J}(x, t) = J(x, t) \vec{e}_x$  le vecteur densité de courant thermique.



1. (a) Que représente  $J(x, t)$  ? Énoncer alors la loi de Fourier.
- (b) Effectuer un bilan énergétique pour un volume élémentaire de matériau compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , en supposant qu'il n'existe pas d'apport énergétique autre que par conduction et qu'il n'y a pas de production d'énergie interne. Donner alors l'équation aux dérivées partielles vérifiée par  $T(x, t)$ .

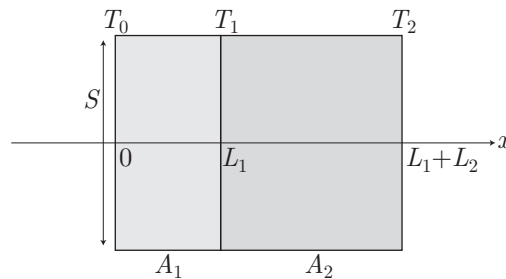
On se place désormais, pour la suite des questions, en régime stationnaire.

- (c) Donner les lois de variation  $T(x)$  et  $J(x)$  en supposant que les extrémités du matériau sont maintenues à températures constantes :  $T(0) = T_0$  et  $T(L) = T_L$ .

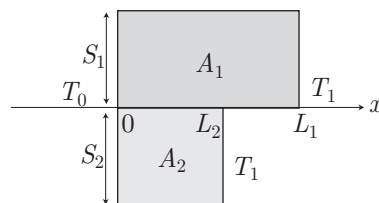
**2. Résistance thermique due à la conduction**

$P_{th}$  représente le flux thermique à travers la section droite  $S$  du matériau, on définit  $R_{th}$ , résistance thermique de conduction du matériau de longueur  $L$  et de surface  $S$  par la relation :  $T_0 - T_L = R_{th} P_{th}$ .

- (a) Exprimer  $R_{th}$  en fonction de  $L$ ,  $S$  et  $\lambda$ . En faisant l'analogie avec l'électrocinétique, justifier le terme de résistance thermique et préciser d'unité de  $R_{th}$ . Quelle doit être la condition sur  $R_{th}$  pour que le flux transmis soit faible ?
- (b) On associe deux corps  $A_1$  et  $A_2$  de résistances thermiques  $R_{th1}$  et  $R_{th2}$ , de même section  $S$ , l'un de conductivité thermique  $\lambda_1$  est compris entre  $x = 0$  et  $x = L_1$ , le second, de conductivité thermique  $\lambda_2$ , est compris entre  $x = L_1$  et  $x = L_1 + L_2$ . On note  $T_0, T_1, T_2$  les températures pour  $x = 0, x = L_1, x = L_1 + L_2$ . Établir l'expression de la résistance thermique  $R_{th}$  de l'ensemble en fonction de  $R_{th1}$  et  $R_{th2}$ .



- (c) Même question lorsque les deux corps  $A_1$ , de section  $S_1$  et de longueur  $L_1$  et  $A_2$ , de section  $S_2$  et de longueur  $L_2$ , sont associés en « parallèle ». On note  $T_0$  la température sur les faces d'entrée pour  $x = 0$  et  $T_1$  la température sur les faces de sortie pour  $x = L_1$  pour  $A_1$  et  $x = L_2$  pour  $A_2$ .



**ÉNONCÉS**

## ● 165 ————— Concours de l'École de l'air

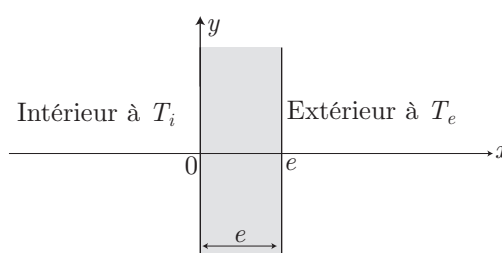
30 min.

Conduction thermique

MP-PC-PSI-PT

Dans ce problème on traitera des aspects thermiques d'un simple vitrage (fenêtre à une vitre) : on s'intéressera au flux de chaleur qui la traverse. Ensuite, on verra l'effet d'un double vitrage sur ce flux.

On considère une plaque de verre de conductivité thermique  $\lambda_v = 0,8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . Son épaisseur est  $e = 4 \text{ mm}$ , sa masse volumique est  $\mu$  et elle est de capacité thermique massique à pression constante  $c$ . On n'envisage pas les effets de bord : contact avec autres matériaux de conductivité, d'épaisseur différentes. On fera une étude unidimensionnelle : le seul paramètre de position considéré sera celui suivant la perpendiculaire à la surface de la vitre. On respectera les notations introduites sur le schéma ci-après :



Les applications numériques seront faites pour une salle de classe dont la surface vitrée est de  $12 \text{ m}^2$ .

### 1. Étude thermique d'un simple vitrage

La plaque de verre est utilisée dans une fenêtre. L'intérieur de la pièce où elle est installée est à une température  $T_i = 20^\circ\text{C}$  et l'extérieur à une température  $T_e = 0^\circ\text{C}$ .

- Établir l'équation de conduction thermique : équation différentielle qui régit l'évolution de  $T(x, t)$  à l'intérieur de la plaque, dans le cas unidimensionnel envisagé ici.
- On suppose maintenant le régime permanent établi. Que signifie ce terme ? Déterminer alors la température  $T(x)$  à l'intérieur de la vitre, à l'abscisse  $x$ . Les températures de surface seront prises égales aux températures de l'air au contact des parois.
- Déterminer le flux thermique  $\phi$  par unité de surface qui traverse alors la vitre.
- La salle de classe, de  $60 \text{ m}^2$ , qui possède une surface vitrée de  $12 \text{ m}^2$  donnant sur l'extérieur, doit être chauffée. En ne considérant que les pertes thermiques liées à la conduction à travers les vitres, déterminer le nombre de radiateurs *standard* de  $2 \text{ kW}$  nécessaires pour maintenir la température à  $20^\circ\text{C}$  dans la pièce, lorsque l'extérieur est à  $0^\circ\text{C}$ . Conclure.
- Quelle économie réaliserait-on en réduisant la température de  $1^\circ\text{C}$  ?
- On définit, en électricité, la résistance d'un conducteur ohmique par  $\frac{\Delta V}{I}$ , où  $\Delta V$  est la différence de potentiels entre les bornes et  $I$  l'intensité du courant électrique qui traverse le conducteur. On définit également une résistance dans les problèmes thermiques. Quelle en est la définition ? Donner l'expression de la résistance thermique  $R_v$  de la surface vitrée étudiée.

2. Double vitrage et isolation

Un double vitrage est qualifié de « 4-10-4 » lorsqu'il est constitué d'une vitre d'épaisseur  $e = 4$  mm, d'une couche d'air sec de  $e' = 10$  mm puis d'une deuxième vitre d'épaisseur 4 mm. On va examiner les différences qui apparaissent avec un simple vitrage. La conductivité de l'air sec est  $\lambda_a = 0,025 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et on néglige les échanges en surface entre les deux vitres pour l'air emprisonné.

(a) En utilisant, par exemple, le raisonnement de la partie 1, déterminer la résistance thermique de la surface vitrée de la pièce définie en début de problème, lorsqu'on l'équipe de double vitrage 4-10-4. Combien de radiateurs de 2 000 W sont alors nécessaires pour chauffer la pièce ?

Dégager l'intérêt de cet équipement en comparaison de la solution d'économie évoquée en 1.

(b) On donne, pour des matériaux de construction, le coefficient de transfert thermique  $k$  défini par le flux thermique par unité de surface et l'écart de température aux surfaces d'un mur d'épaisseur  $e$  :

Matériau	$k$ (en $\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ )
20 cm de béton armé . . . . .	2,9
30 cm de béton cyclopéen (à gros éléments)	1,3
30 cm de béton aéré ( $600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) . . . . .	0,94
30 cm de brique creuse . . . . .	1,5

Déterminer  $k$  pour le simple vitrage et pour le double vitrage étudiés.

A-t-on intérêt à renforcer le double vitrage en isolation ?

● 166

Concours ESIM

60 min.

Conduction thermique

MP-PC-PSI-PT

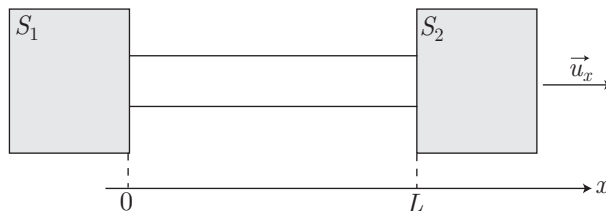
Une barre homogène, de masse volumique  $\rho$ , de capacité thermique massique  $c$ , de conductivité thermique  $\lambda$  (tous paramètres supposés invariants), est modélisée par un cylindre de longueur  $L$  et de section droite  $\Sigma$ .

Les parois latérales du cylindre sont calorifugées de telle sorte que les pertes thermiques latérales sont négligeables ; en revanche, chaque extrémité de la barre est en contact avec un thermostat.

L'axe  $Ox$  est choisi parallèlement à la génératrice du cylindre ; l'abscisse  $x = 0$  étant prise à l'extrémité de la barre en contact avec le thermostat  $S_1$ , l'autre extrémité de la barre est alors d'abscisse  $x = L$  en contact avec le thermostat  $S_2$ .

$T(x, t)$  est la température thermodynamique de la barre en un point d'abscisse  $x$  à l'instant  $t$ .

Les thermostats  $S_1$  et  $S_2$  imposent les températures  $T_1 = T_1(0, t)$  et  $T_2 = T_2(L, t)$ .



ÉNONCÉS

### 1. Bilan énergétique

Dans la barre métallique modélisée précédemment, la conduction thermique est unidirectionnelle, le vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_Q$  suivant la loi de Fourier :

$$\vec{j}_Q = -\overrightarrow{\text{grad}} T(x, t) \text{ avec } \vec{j}_Q = j_Q(x, t) \vec{u}_x$$

- (a) Effectuer un bilan d'énergie sur une tranche élémentaire de conducteur, comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  et établir une relation entre  $\frac{\partial j_Q}{\partial x}$  et  $\frac{\partial T}{\partial t}$ .
- (b) En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par la température  $T(x, t)$  :

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

Expliciter  $D$  et donner son unité.

- (c) Dans cette seule question, les deux thermostats ont des capacités thermiques infinies. En déduire :
- que les thermostats imposent alors des températures  $T_1$  et  $T_2$  constantes ;
  - la distribution de température  $T(x)$  dans la barre, en régime permanent (on peut supposer  $T_1 > T_2$  et faire apparaître dans  $T(x)$  un signe pertinent) ;
  - la résistance thermique  $R_{\text{th}}$  de la barre métallique, après avoir rappelé sa définition.

Dans les deux questions qui suivent, les deux thermostats, de conductivité infinie, ont la même capacité thermique  $C$ , non infinie mais très grande devant la capacité thermique totale de la barre ; l'ensemble constitué par les thermostats et la barre est parfaitement calorifugé. Le thermostat  $S_1$  a une température initiale  $T_{10}$  et le thermostat  $S_2$  a une température initiale  $T_{20}$ .

- (d) Quelles conséquences, sur les températures des thermostats et de la barre, les différentes hypothèses faites à propos des thermostats entraînent-elles ?
- (e) Montrer que  $\frac{dT_1}{dt} = -\frac{dT_2}{dt}$  et établir les expressions des températures  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  des thermostats au cours du temps (on supposera que  $T_{10} > T_{20}$  et on écrira  $T_1(t)$  et  $T_2(t)$  sous des formes physiquement pertinentes à l'aide de  $T_{10}$ ,  $T_{20}$ ,  $t$  et d'un temps  $\tau$  à exprimer).

### 2. Bilan entropique

On considère, d'abord, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , une tranche élémentaire de la barre comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

- (a) Exprimer successivement :
- la variation d'entropie  $dS$  de la tranche élémentaire (supposée indalatable) pendant  $dt$  en fonction, entre autres, de  $\frac{\partial T}{\partial t}$  ;
  - l'entropie échangée  $\delta S_{\text{éch}}$  par la tranche élémentaire pendant  $dt$ , en fonction de  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j_Q}{T} \right)$  ;
  - l'entropie créée  $\delta S_{\text{cr}}$  par la tranche élémentaire pendant  $dt$  en fonction de  $\sigma(x, t)$ , la quantité d'entropie créée par unité de volume et de temps.

- (b) En déduire la relation entre les grandeurs spatio-temporelles précédentes traduisant le bilan d'entropie local.

La fin du problème concerne la totalité de la barre uniquement dans le régime permanent de la partie 1.(c).

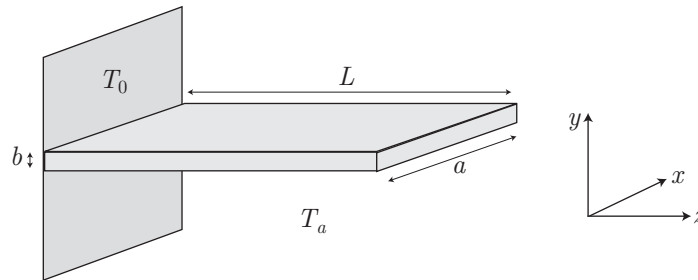
- (c) Exprimer  $\sigma(x)$ , l'entropie créée par unité de volume et de temps, en fonction de  $x$  et des données. En déduire la quantité totale  $S_{cr}$  d'entropie créée dans la barre par unité de temps.
- (d) Évaluer directement l'entropie échangée  $S_{ech}$  par la barre avec les thermostats par unité de temps.
- (e) Déduire des questions précédentes la variation  $\Delta S$  d'entropie de la barre par unité de temps. Ce résultat était-il prévisible ?

● **167** ————— **Concours TPE**  
15 min.

Conduction thermique et convection

MP-PC-PSI

On donne une plaque de température  $T_0$ . Une ailette de refroidissement la touche. On modélise cette ailette par un parallélépipède de longueur  $L$ , de hauteur  $b$  et de largeur  $a$ , avec  $b \ll a$ . Sa conductivité thermique est  $\lambda$ .



La température de l'air ambiant est notée  $T_a$ . Une partie de la chaleur est évacuée par convection. Soit  $Q$  la chaleur évacuée par convection entre l'ailette et l'air ambiant par unité de temps et de surface :

$$Q = \alpha (T - T_a)$$

où  $T = T(z)$  désigne la température de l'ailette à une distance  $z$  de la plaque.

On pose :  $m^2 = \frac{2\alpha}{\lambda b}$ .

- Établir, en régime permanent, l'équation différentielle vérifiée par  $T(z)$ .
- Les conditions aux limites sont :  $T(0) = T_0$  et  $T(L) = T_a$ . Établir la loi  $T(z)$ .
- Calculer la chaleur totale évacuée par l'ailette, par unité de temps.

● **168** ————— **Concours Centrale-Supélec**  
20 min.

Conduction thermique et convection

MP-PC-PSI

Une sphère d'uranium, de rayon  $R$ , est plongée dans une cuve d'eau. Elle est le siège de réactions nucléaires : on note  $s$  la puissance dissipée par unité de volume de la sphère. On note  $\lambda$  la conductivité thermique de l'uranium et  $\lambda_e$  celle de l'eau. On suppose le régime permanent établi.

1. Par un bilan énergétique, calculer le vecteur densité de courant thermique pour chacun des deux milieux.
2. On note  $T_0$  la température de l'eau en un point très éloigné de la sphère. À la surface de celle-ci, le flux surfacique de Newton vaut  $h [T_e(R) - T(R)]$ ; calculer la température en tout point de la sphère.

● **169** **Concours ESIM**

30 min.

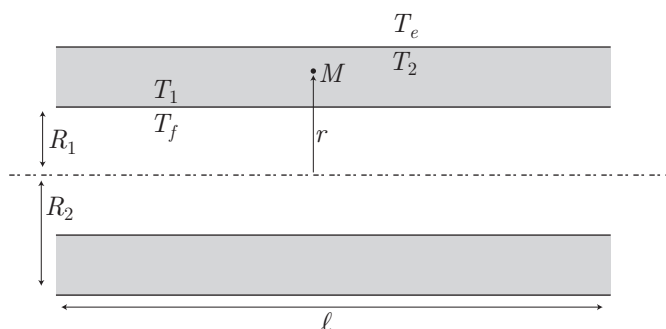
Conduction thermique et convection

MP-PC-PSI

Un tuyau cylindrique a un rayon intérieur  $R_1$  et un rayon extérieur  $R_2$ .

La température  $T_f$  du fluide intérieur est constante, de même que la température  $T_e$  de l'air ambiant à l'extérieur du tuyau. Soient  $T_1$  et  $T_2$  les températures respectivement des parois intérieure et extérieure du tuyau.

Le régime stationnaire est atteint.



1. La chaleur se propage, en un point  $M$  situé à la distance  $r$  de l'axe du tuyau, selon la loi de Fourier :

$$j_Q = -k_1 \frac{\partial T}{\partial r}$$

$j_Q$  est la densité de courant de chaleur. Le tuyau est assez long pour que l'on néglige tout effet de bord ; sa longueur  $\ell$  est telle que  $2\pi R_2 \ell = 1 \text{ m}^2$ .

Calculer le flux de chaleur  $\phi$  à travers la surface latérale de ce cylindre, en fonction de  $k_1, T_1, T_2, R_2, R_1$  et  $\ell$ .

2. L'échange de chaleur au niveau paroi-fluide se fait principalement par convection selon une loi de Newton :  $\phi = hs \Delta T$  ;  $\Delta T$  est l'excès de température de la surface  $s$  soumise à la convection, sur la température du fluide ;  $h$  est le coefficient de convection.

Calculer le flux thermique au contact fluide-paroi intérieure et le flux thermique au contact paroi extérieure-air ambiant. Nous admettrons que le coefficient  $h$  est le même pour les deux surfaces d'échange.

3. Des questions précédentes, déduire une relation donnant  $\phi$  en fonction de  $T_f, T_e, h, k_1, R_1$  et  $R_2$ .



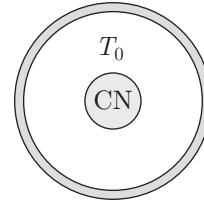
● **170** **Lycée Vernet, Grenoble**

5 min.

Rayonnement thermique

MP

Soit un corps noir (CN), de surface extérieure  $S$ , de capacité thermique  $C$  constante et de température  $T$  uniforme. (CN) est contenu dans une enceinte où règne un rayonnement à la température  $T_0$  constante.



1. Exprimer l'équation différentielle vérifiée par  $T(t)$ .

À la date  $t = 0$ ,  $T$  vaut  $T_i$ . On pose :

$$T = T_0 + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \ll T_0$$

2. Après avoir exprimé le développement limité de  $(T - T_0)^4$  au premier ordre en  $\varepsilon$ , réécrire l'équation différentielle vérifiée par  $T(t)$  ; on posera :  $\tau = \frac{C}{4\sigma ST_0^3}$ .
3. Résoudre cette équation différentielle et représenter graphiquement l'allure de la courbe  $T(t)$  pour  $T_0 > T_i$ .

● **171** **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

Rayonnement thermique

MP

Un vase Dewar est un récipient dont les parois présentent une surface  $S = 10 \text{ dm}^2$ . Les parois possèdent deux faces : l'une en contact avec le milieu extérieur à la température  $T_a = 290 \text{ K}$  et l'autre, interne, au contact d'azote liquide à la température  $T_i = 77 \text{ K}$ . Ces deux faces sont séparées par une atmosphère raréfiée qui limite les échanges thermiques par conduction et par convection ; on pourra admettre que les pertes thermiques sont à imputer au seul phénomène de rayonnement par les parois qui se comportent comme des corps noirs en équilibre thermique. On rappelle, à ce sujet, la valeur numérique de la constante de Stefan :  $\sigma = 57.10^{-9} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ .

On constate que ce phénomène de rayonnement est responsable de la vaporisation d'un litre d'azote liquide par heure. En déduire la valeur de la chaleur latente  $L$  (en  $\text{kJ} \cdot \text{L}^{-1}$ ) de vaporisation de 1 litre d'azote liquide.

● **172** **Concours Commun Polytechnique**

10 min.

Rayonnement thermique

MP

La puissance  $P_R$  rayonnée par l'unité de surface d'un corps noir, et répartie sur toutes les fréquences  $\nu$ , est donnée par :

$$P_R = \int_0^{\infty} P(\nu) d\nu \text{ avec } P(\nu) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2 \left[ \exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right]}$$

où  $h = 6,63.10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  (constante de Planck),  $k = 1,38.10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  (constante de Boltzmann) et  $c = 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (vitesse de la lumière dans le vide).

1. Montrer que  $P_R$  est donné par la loi de Stefan :  $P_R = \sigma T^4$ . Exprimer  $\sigma$  en fonction de  $k$ ,  $h$  et  $c$ . On donne :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

2. On rappelle que la loi de Wien, liant la longueur d'onde  $\lambda_m$  du *maximum* d'émission du corps noir, à sa température  $T$ , s'écrit :  $\lambda_m T = 2898 \mu\text{m} \cdot \text{K}$ . On admet que l'ensemble des couches de l'atmosphère rayonne comme un corps noir à la température  $T_e = 263 \text{ K}$ . Calculer les valeurs respectives des longueurs d'onde  $\lambda_{m_a}$  et  $\lambda_{m_s}$  du rayonnement thermique de l'atmosphère terrestre et du rayonnement thermique solaire. À quels domaines du spectre électromagnétique ces longueurs d'onde appartiennent-elles ?

On rappelle que la température à la surface du Soleil est de l'ordre de  $5700 \text{ K}$ .

3. On considère une surface  $S$  délimitant un corps à la température  $T$  en contact avec un environnement à la température  $T_e$ . Le corps et l'environnement se conduisant comme des corps noirs, donner l'expression de la puissance  $P$  échangée par rayonnement, à travers  $S$ , entre le corps et l'environnement (sortant algébriquement du corps vers l'environnement).
4. On suppose que  $T$  est très proche de  $T_e$  et l'on pose :  $T = T_e + \Delta T$  avec  $\Delta T \ll T_e$ . Montrer que  $P$  peut se mettre sous la forme approchée :  $P = G \times (T - T_e)$  et donner l'expression de  $G$  en fonction de  $T_e$ ,  $\sigma$  et  $S$ . Quelle est la résistance thermique  $R_{\text{th}}$  correspondante ?

### ● 173 ————— Concours de l'ENS Paris-Lyon

30 min.

Rayonnement thermique

MP

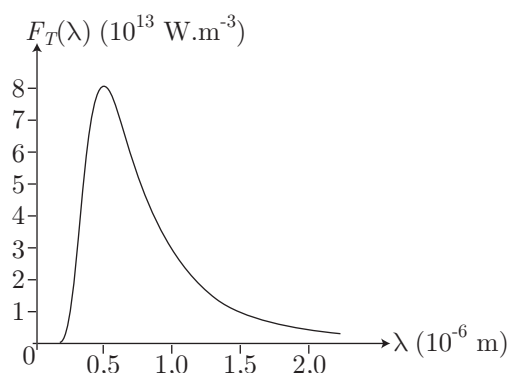
On définit un *corps noir* comme un corps idéal, capable d'absorber intégralement tout rayonnement incident, quelle que soit sa longueur d'onde. Un corps noir émet un rayonnement isotrope dont le spectre ne dépend pas de la nature du corps, mais seulement de sa température. La loi de Planck donne la fonction universelle qui caractérise le flux spectral émis par un corps noir et peut s'écrire sous la forme :

$$F_T(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \times \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

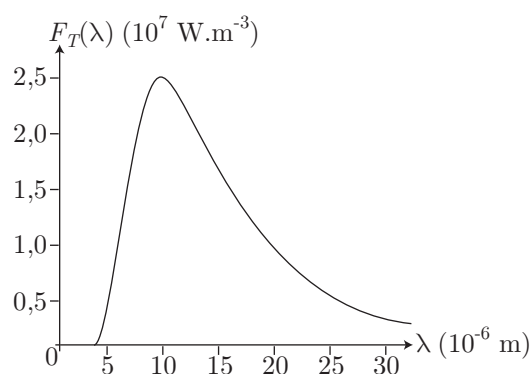
où  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  est la constante de Planck,  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  la vitesse de la lumière et  $k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  la constante de Boltzmann.

Par définition de la fonction  $F_T(\lambda)$ , les radiations de longueur d'onde comprises entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ , émises par l'élément de surface  $dS$  du corps noir, transportent une puissance  $F_T(\lambda) dS d\lambda$  vers le demi-espace extérieur.

Les courbes suivantes représentent la fonction  $F_T(\lambda)$  pour deux températures,  $5800 \text{ K}$  et  $290 \text{ K}$ . Elles donnent une approximation très élémentaire du rayonnement de la surface du Soleil et de celle de la Terre.



Flux spectral d'un corps noir à  $T = 5\,800\text{ K}$



Flux spectral d'un corps noir à  $T = 290\text{ K}$

1. Montrer que la grandeur  $F_T(\lambda)$  a une dimension conforme à la définition donnée ci-dessus. Le rapport  $y = \frac{hc}{\lambda kT}$  compare deux énergies. Préciser la signification physique de chacune de ces énergies.
2. La position du *maximum* de  $F_T(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$  correspond à une valeur constante  $y_M$  du rapport  $y$ . À partir des deux courbes précédentes, estimer la valeur de  $y_M$ .
3. Donner l'expression de la dérivé logarithmique de la fonction de Planck. Vérifier numériquement que  $F_T(\lambda)$  est *maximum* pour la longueur d'onde  $\lambda_M$  vérifiant :  $\frac{hc}{\lambda_M kT} = y_M$ .  
En déduire la relation  $\lambda_M T = w$  (loi de Wien) et calculer la valeur numérique de la constante  $w$ .
4. Montrer que la puissance totale du rayonnement émis par unité de surface du corps noir est de la forme  $M(T) = \sigma T^4$  (loi de Stefan) et donner l'expression algébrique de la constante  $\sigma$  en fonction des constantes fondamentales  $h, k, c$  et de l'intégrale  $I = \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$ .

**ÉNONCÉS**

On ne développera pas le calcul de  $\sigma$  et on admettra sa valeur numérique :

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

5. On peut caractériser la largeur de la fonction  $F_T(\lambda)$  par l'intervalle  $\Delta\lambda$  défini par :

$$\Delta\lambda F_T(\lambda_M) = \sigma T^4$$

Montrer que  $\Delta\lambda$  est proportionnel à  $\lambda_M$ , sans expliciter le facteur de proportionnalité. On admettra le résultat  $\Delta\lambda \simeq 1,5 \times \lambda_M$ .

Faire un schéma indiquant ce que représente la largeur  $\Delta\lambda$  (dite *largeur équivalente*).

6. Justifier sans calcul le fait que l'essentiel de la puissance émise par le corps noir est rayonnée dans un intervalle spectral centré sur  $\lambda_M$  dont la largeur est de l'ordre de  $\Delta\lambda$ .

## ● 174 ————— Concours des Mines-Ponts

30 min.

MP

*Bilan radiatif*

Dans tout le problème, étoile et planète seront considérées comme des sphères en équilibre thermique qui se comportent comme des corps noirs.

1. On modélise la surface de la Terre par une coquille sphérique de température uniforme, en équilibre thermodynamique : puissance absorbée et puissance émise sont égales. Soit  $P_S$  la puissance totale émise par le soleil. Exprimer  $P_S$  en fonction du rayon solaire  $R_S$  et de la température solaire  $T_S$ .

Exprimer, en fonction de  $P_S$  et du rayon terrestre  $R_T$ , la puissance  $P_0$  reçue par la Terre, à la distance  $D_{ST}$  du Soleil, supposé ponctuel. Exprimer alors la température à la surface de la Terre  $T_T$ .

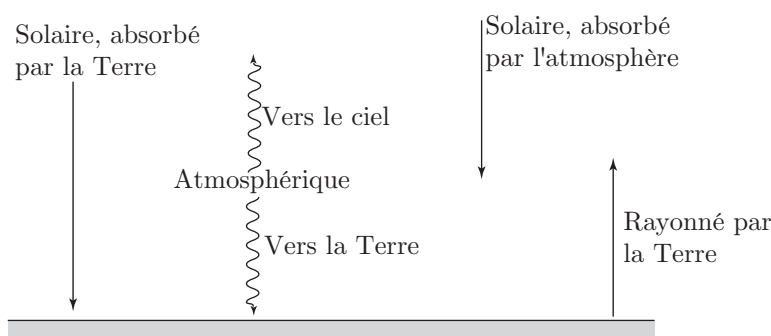
2. En réalité, la puissance absorbée par la surface de la Terre n'est qu'une fraction de la puissance du rayonnement solaire incident : la surface terrestre réfléchit la fraction  $A_T$ , nommée *albédo*, de ce rayonnement. L'albédo moyen de la Terre est égal à 0,35, ce qui signifie que 65% du rayonnement solaire incident est absorbé. Établir l'expression suivante de la température de la surface de la Terre :

$$T_T^4 = \left( \frac{R_S}{2 D_{ST}} \right)^2 (1 - A_T) T_S^4$$

3. Calculer alors la valeur numérique de  $T_T$  ; ne pas s'offusquer de la valeur trouvée à partir de ce premier modèle.

L'atmosphère joue un rôle essentiel dans le bilan thermique terrestre. Désormais, on entendra par « Terre » la planète proprement dite, de rayon  $R_T$ , entourée d'une pellicule de gaz, qui constitue l'atmosphère.

L'atmosphère est modélisée par une couche d'épaisseur  $e \ll R_T$  et de température uniforme  $T_a$  ; elle absorbe la fraction  $\alpha$  du rayonnement solaire non réfléchi ; elle absorbe aussi la totalité du rayonnement du corps noir émis par la surface de la Terre. La Terre absorbe la totalité du rayonnement émis par l'atmosphère vers celle-ci.



- À quoi pourrait être due la différence d'absorption de l'atmosphère pour les rayonnements solaire et terrestre ?
- Soit  $T'_T$  la température superficielle moyenne de la Terre calculée en tenant compte de l'atmosphère. Exprimer  $P_1$ , puissance solaire absorbée par la surface terrestre ; exprimer  $P_2$ , puissance rayonnée par l'atmosphère vers la Terre. Effectuer un bilan thermique pour l'atmosphère. En déduire la relation :

$$T'_T{}^4 = (2 - \alpha) T_T^4$$

- Application numérique : calculer  $T'_T$  pour  $\alpha = 0,35$  (l'égalité  $\alpha = A_T$  est fortuite).
- Montrer que la température de l'atmosphère,  $T_a$ , est égale à  $T_T$ .

Données numériques :

- rayon solaire :  $R_S \simeq 7.10^5$  km ;
- température de surface solaire :  $T_S \simeq 5800$  K ;
- l'angle solide sous lequel on voit la Terre depuis le Soleil est :  $\pi \frac{R_T^2}{D_{ST}^2}$  ;
- rayon terrestre :  $R_T \simeq 6,38.10^3$  km ;
- distance Terre-Soleil :  $D_{ST} = 1,5.10^8$  km ;
- albédo terrestre :  $A_T \simeq 0,35$  ;
- constante de Stefan :  $\sigma = 5,7.10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{K}^{-4}$ .

### ● 175 ————— Concours de l'École de l'air

60 min.

Rayonnement thermique

MP

On a du café brûlant et on veut obtenir du café au lait plus froid. Pour obtenir du café au lait à bonne température le plus rapidement possible vaut-il mieux : verser le lait froid puis attendre  $\Delta t_1$  ou attendre  $\Delta t_2$  puis verser le lait froid ?

On considérera des échanges radiatifs avec l'extérieur et on pourra linéariser les équations obtenues.

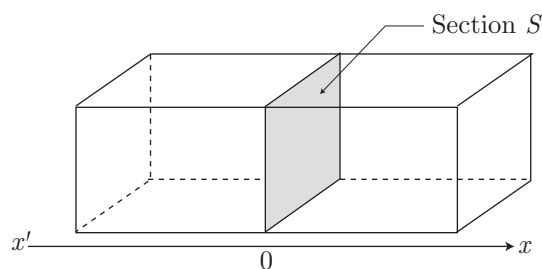
### ● 176 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

10 min.

Diffusion de particules

PC-PSI

On considère un système dans lequel sont introduites  $N_0$  molécules marquées (isotopes par exemple) par unité de section droite, en  $x = 0$  et à la date  $t = 0$ .



Ce système est de longueur infinie dans la direction  $x'$  et la diffusion des molécules ne s'effectue que selon cette direction.

On note  $n(x, t)$  la concentration, en  $x$  et à la date  $t$ , des molécules marquées.

1. Montrer que :

$$n(x, t) = \frac{A}{\sqrt{t}} \times \exp\left(-\alpha \frac{x^2}{t}\right) \text{ où } A = \text{cte et } \alpha = \text{cte}$$

est solution de l'équation de diffusion.

2. On rappelle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}}$$

En exprimant, en fonction de  $N_0$  et  $S$ , le nombre total de molécules présentes dans le système, en déduire que :

$$n(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \times e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

3. Représenter graphiquement l'allure de  $N(x, t)$  pour quelques dates  $t$  différentes.

### ● 177 ————— Lycée Chateaubriand, Rennes

15 min.

PC-PSI

*Diffusion de particules*

On étudie la diffusion des neutrons dans un milieu fissile. On se limite à un problème à une dimension et on note  $n(x, t)$  la densité volumique de ces neutrons à l'abscisse  $x$  et à la date  $t$ .

Deux phénomènes se produisent dans la matière fissile :

- la réaction de fission absorbe des neutrons et on considère qu'en moyenne  $\frac{n(x, t)}{\tau}$  neutrons sont absorbés par unité de temps et de volume au point d'abscisse  $x$  ;
- la réaction de fission produit de nouveaux neutrons et on considère que pour un neutron absorbé, il y a  $K$  neutrons produits ( $K > 1$ ).

Le coefficient de diffusion des neutrons dans le milieu est noté  $D$ .

1. En utilisant le bilan des neutrons absorbés ou produits dans une tranche d'épaisseur  $dx$  à l'abscisse  $x$ , montrer que  $n(x, t)$  vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \beta n$$

où  $\beta$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $K$  et  $\tau$ .

2. Le milieu est limité entre les plans  $x = -a$  et  $x = +a$ .  
 On suppose de plus que  $n(x = -a) = n(x = +a) = 0$  et  $n(x = 0) = n_0$ .
- (a) Déterminer  $n(x)$  en régime permanent.
- (b) Montrer que le régime permanent n'est possible que pour une valeur particulière  $K_c$  de  $K$ , que l'on exprimera en fonction de  $a$ ,  $D$  et  $\tau$ .

● 178 **Concours des Mines-Ponts**

40 min.

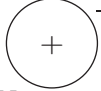
Diffusion de particules

PC-PSI


On étudie une méthode d'enregistrement d'un hologramme. On se limite à des phénomènes unidimensionnels selon l'axe  $(Ox)$ . L'intensité lumineuse éclairant le milieu lors que l'enregistrement s'exprimera par :  $I(x) = I_0 [1 + m \cos(kx)]$ .

Un cristal photoréactif est un cristal transparent dont l'indice est modifiable par l'éclairement. Il est modélisé par une matrice de permittivité diélectrique statique  $\varepsilon$ , dans laquelle sont présents deux types de sites, l'un et l'autre fixes dans le réseau :

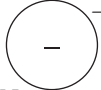
- des sites donneurs d'électrons, notés  $(D)$ , qui peuvent chacun s'ioniser en donnant un site chargé  $(D^+)$ . On note  $N_D$  la densité particulière totale de ces sites et on la suppose uniforme et constante. On note  $N_D^+(x, t)$  la densité particulière de sites ionisés  $(D^+)$  à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$ . Avec les notations du tableau ci-dessous,  $N_D = N_D^0 + N_D^+$ .
 



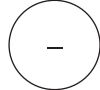
Neutre :  $D^0$



Ionisé :  $D^+$
- des sites accepteurs, notés  $(A)$ , qui peuvent chacun capter un électron pour former un site chargé  $(A^-)$ . La densité particulière totale de ces sites, notée  $N_A$ , est uniforme et constante. Dans les conditions de cette étude, tous les accepteurs sont ionisés :  $N_A = N_A^-$ .
 



Neutre :  $A^0$



Ionisé :  $A^-$

On suppose enfin  $N_D$  très supérieur aux autres densités particulières, en particulier  $N_D \simeq N_D^0$ .

Types	Symbole	Concentration
Donneur neutre	$D^0$	$N_D^0$
Donneur ionisé	$D^+$	$N_D^+(x, t)$
Accepteur ionisé	$A^-$	$N_A^- = N_A$
Électron	$e^-$	$N_e(x, t)$

Le courant électrique, dans le cristal, est uniquement dû aux électrons libérés par l'ionisation des donneurs. La densité particulière d'électrons libres à l'abscisse  $x$  et à l'instant  $t$  est notée  $N_e(x, t)$ .

L'ionisation des donneurs peut s'effectuer selon deux mécanismes : l'ionisation résulte du transfert spontané d'électrons en sites  $(D)$  vers les sites  $(A)$  ; l'inégalité  $N_D \gg N_A$  permet donc l'ionisation totale des accepteurs. L'ionisation de sites  $(D)$  se produit aussi lorsque le cristal est éclairé par une onde lumineuse d'intensité  $I(x)$ . À l'instant  $t$  et à l'abscisse  $x$ , le nombre de sites  $(D)$  ionisés par unité de temps et de volume est donc, pour ce mécanisme :

$$\alpha I(x) [N_D - N_D^+(x, t)] \simeq \alpha I(x) N_D$$

ÉNONCÉS

où  $\alpha$  est une constante positive.

Des électrons libres peuvent se recombiner avec des sites ( $D^+$ ) et les neutraliser. Le nombre de recombinaisons par unité de temps et de volume est  $\beta N_D^+(x, t) N_e(x, t)$  où  $\beta$  est une autre constante caractéristique du cristal. On a donc, pour  $t > 0$  :

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = \alpha I(x) [N_D - N_D^+(x, t)] - \beta N_D^+(x, t) N_e(x, t)$$

Avant irradiation :  $N_D^+(x, 0) = N_A$  et  $N_e(x, 0)$ .

1. Justifier que, immédiatement après l'irradiation, l'ionisation des sites ( $D$ ) est plus importante dans les zones d'éclairement maximal. Rappeler la loi de Fick pour la diffusion particulière (on notera  $D$  la constante qui intervient dans cette loi). Préciser la direction des courants électriques de diffusion qui résultent de l'éclairement.
2. Quel est, dans les régions d'éclairement maximal, le signe de la densité volumique de charge associée à la diffusion des électrons libres. Même question pour les zones d'éclairement minimal. En déduire la direction du champ électrique  $\vec{E}_c$  dans une région située dans une zone d'éclairement maximal et une zone d'éclairement minimal.
3. Quelle est l'influence de ce champ électrique sur le mouvement des électrons libres dans le cristal ?
4. On pose :  $\vec{E}_c = E_c(x, t) \vec{u}_x$  et on note  $\vec{j}_e$  la densité de courant électrique dû au mouvement des électrons libres. Quelle est l'expression de  $\frac{\partial E_c}{\partial x}$  en fonction de  $\varepsilon$ ,  $e$ ,  $N_e$ ,  $N_A (= N_A^-)$  et  $N_D^+$  ? Exprimer la conservation de la charge (équation de continuité) reliant  $\vec{j}_e$  aux densités particulières  $N_e$ ,  $N_A$  et  $N_D^+$ . On admet, pour un cristal isolé, que  $\vec{j}_e$  est nul en régime permanent.
5. Le flux d'électrons est la somme du flux diffusif  $\vec{j}_{\text{diff}}$ , qui suit la loi de Fick, et du flux  $\vec{j}_{\text{der}}$ , dû au champ électrique  $\vec{E}_c$  dérivant du potentiel  $V(x)$ . À l'équilibre thermodynamique, la densité des électrons est donnée par la loi de Boltzmann :

$$N_e(x) = N_0 \exp \left[ \frac{e V(x)}{k_B T} \right]$$

où  $k_B$  représente la constante de Boltzmann,  $e$  la charge élémentaire ( $e > 0$ ) et  $T$  la température. Quelle relation en résulte-t-il entre  $N_e(x)$ ,  $\frac{dN_e}{dx}$  et  $E_c(x)$  ? En déduire l'expression de  $\vec{j}_{\text{der}}(x)$  à l'équilibre, en fonction de  $N_e(x)$  et  $E_c(x)$ . La vitesse de dérive des électrons, à l'équilibre, s'écrivant :  $\vec{v}_{\text{der}} = -\mu \vec{E}_c$ , déterminer  $\mu$  en fonction de  $e$ ,  $D$  et  $\sigma$  ; c'est la *relation d'Einstein*.

6. Admettant que la relation d'Einstein reste applicable en régime lentement variable (même si  $N_e(x)$  n'est plus celui donné par la loi de Boltzmann), exprimer la densité de courant électrique total en présence du champ électrique  $\vec{E}_c$ .
7. On suppose qu'un état stationnaire est atteint. Déduire des questions précédentes les équations suivantes, modélisant le comportement du milieu en régime perma-



ment :

$$\alpha I(x) N_D - \beta N_D^+(x) N_e(x) = 0 \quad (46)$$

$$\frac{dE_c}{dx} = \frac{e}{\varepsilon} [N_D^+(x) - N_A - N_e(x)] \quad (47)$$

$$\frac{dN_e}{dx} = -\frac{e}{k_B T} N_e(x) E_c(x) \quad (48)$$

8. L'intensité lumineuse, dans le cristal, est uniforme ( $m = 0$ ). Que vaut alors le champ électrique  $\vec{E}_c$ ? On cherche, en régime permanent, la solution uniforme des équations précédentes. Établir l'équation vérifiée par  $N_e$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $I_0$  et  $N_A$ . Exprimer ensuite  $N_e$  dans l'hypothèse où  $N_e \ll N_A$ . Quelle est l'inégalité relative à  $I_0$  équivalente à cette hypothèse?

## ● 179 ————— Concours de l'École de l'air

45 min.

Diffusion de particules

PC-PSI

On considère un gaz dilué à l'équilibre thermodynamique, à la température  $T$ .

### 1. Libre parcours moyen $L$

On assimile chaque molécule à une sphère de diamètre  $d$ . On se propose d'effectuer un calcul sommaire de la distance moyenne  $L$ , distance parcourue par une molécule entre deux chocs successifs avec d'autres molécules de gaz.

- (a) On suppose immobiles toutes les molécules sauf une ; celle-ci est animée de la vitesse constante  $\vec{v}_0$ . Déterminer le volume  $\Delta V$  dans lequel doit se trouver le centre d'une autre molécule pour qu'une collision ait lieu dans l'intervalle de temps  $\Delta t$ .
- (b) En déduire  $L$  en fonction de  $d$  et du nombre de molécules  $n_0$  par unité de volume (concentration particulaire) dans le gaz.
- (c) Un calcul plus correct donne  $L = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{n_0 \pi d^2}$ . Pourquoi trouve-t-on précédemment un résultat plus grand ?

### 2. Diffusion

Pour accéder à  $L$ , on peut étudier dans le gaz le phénomène de diffusion. On suppose que certains constituants du gaz, en proportion très faible, peuvent être identifiés (par exemple à la suite d'un marquage radioactif) mais que leur interaction avec les autres molécules n'est pas modifiée.

À l'instant pris comme origine de l'étude, la distribution de ces molécules marquées est non uniforme : elle est repérée par la concentration particulaire  $n(x, t)$  (nombre de particules par unité de volume).

- (a) On se place dans le cadre du modèle sommaire suivant : la distribution des vitesses est isotrope et le module de la vitesse moyenne, suivant  $x$  (vitesse quadratique moyenne dans le gaz) est notée  $v_c$ .

Montrer que la densité du flux,  $\vec{j} = j(x, t) \vec{e}_x$ , des constituants marqués à travers un plan perpendiculaire à  $Ox$  se ramène à :

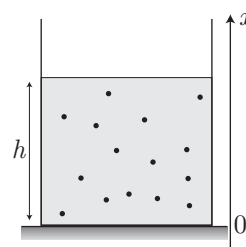
$$\vec{j} = \frac{1}{6} v_c [n(x - L, t) - n(x + L, t)] \vec{e}_x$$

- (b) Rappeler la loi de Fick. En déduire l'expression du coefficient de diffusion  $D$  pour le modèle adopté.

### 3. Influence du champ de pesanteur sur la diffusion : la sédimentation

Dans cette partie, on s'intéresse à des suspensions de petites particules au sein d'un fluide en équilibre et à la façon dont elles s'y répartissent.

On considérera, dans la suite, que les suspensions considérées sont diluées, de sorte que les particules en suspension n'interagissent pas entre elles. On considère un tube cylindrique d'axe vertical, de section  $S$ , de hauteur  $h$  et contenant un liquide, de l'eau par exemple. Ce liquide contient  $N$  particules en suspension, de masse  $m$  chacune. On note  $\rho_p$  la masse volumique de particules,  $\rho$  celle du liquide et l'on suppose que  $\rho_p > \rho$ . Dans l'état initial du système, le mélange a été rendu homogène par agitation.



- (a) Chaque particule est soumise à son poids, à la poussée d'Archimède due au liquide et à une force de frottement visqueux :  $-6\eta R \vec{v}$ , lorsque la particule est animée d'une vitesse  $\vec{v}$ , où  $\eta$  est la viscosité dynamique du liquide et  $R$  le rayon d'une particule (formule de Stokes).

Établir l'équation différentielle à laquelle satisfait la vitesse  $\vec{v}$  des particules.

- (b) On choisira un axe  $Ox$  vertical ascendant, tel que  $x = 0$  au niveau du fond du tube.

Montrer que la composante  $v_x$  de  $\vec{v}$  tend vers une limite  $v_L$  que l'on calculera en fonction de la masse apparente  $m^* = m \left( \frac{\rho}{\rho_p} - 1 \right)$  des particules dans ce liquide, afin d'en alléger l'écriture.

- (c) On suppose que la vitesse limite  $v_L$  est atteinte très rapidement. On note toujours  $n(x, t)$  la concentration particulaire en un point de cote  $x$ . Calculer la densité de flux  $j_1(x, t)$  résultant du mouvement ci-dessus des particules.

- (d) Du fait de ce mouvement, il se crée dans le liquide un gradient de concentration particulaire, donnant lieu à un phénomène de diffusion. Calculer la densité de flux de particules  $j_2(x, t)$  due à la diffusion (on appellera  $D$  le coefficient de diffusion des particules considérées dans le liquide).

- (e) Au bout d'un temps plus ou moins long, un équilibre (dit *équilibre de sédimentation*) finit par s'établir. À quelle équation différentielle obéit alors la concentration particulaire  $n(x, t)$  ?

- (f) Montrer que l'équilibre de sédimentation est caractérisé par une concentration particulaire de la forme :

$$n(x) = A e^{-x/H}$$

Calculer  $A$  et  $H$  en fonction de  $N$ ,  $S$ ,  $h$ ,  $D$ ,  $\eta$ ,  $R$ ,  $m^*$  et de l'intensité  $g$  du champ de pesanteur.

## ● 180 ————— Lycée La Martinière Mon Plaisir, Lyon

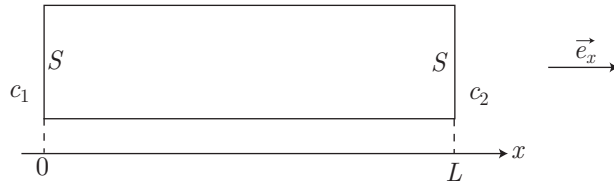
Diffusion de particules

60 min.

PC-PSI

I- On ne tient pas compte de la gravité pour les phénomènes de transfert de matière.

Un tube cylindrique, de longueur  $L$ , de section d'aire  $S$ , contient une espèce chimique en solution, dont le coefficient de diffusion  $D$  est donné et dont la concentration molaire volumique en régime permanent,  $C(x)$ , ne dépend que de l'abscisse  $x$  le long de l'axe du cylindre. Les concentrations aux extrémités sont imposées :  $c(0) = c_1$  et  $c(L) = c_2$ .



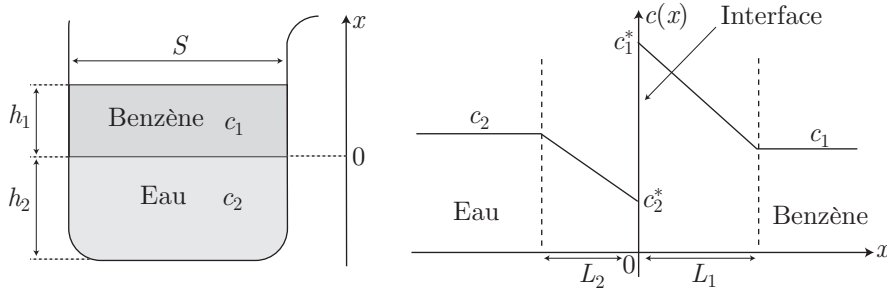
On appelle flux de matière  $J_m$  le nombre de moles de cette espèce qui traversent une section du tube pendant l'unité de temps, dans le sens de  $\vec{e}_x$ .

1. Rappeler la loi de Fick donnant l'expression de  $J_m$ .  
Donner l'unité de chaque terme la composant.
2. En déduire l'expression du nombre de moles  $d^2n$  reçues par une tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$  pendant l'intervalle de temps  $[t, t + dt]$ , l'expression de  $c(x, t)$  étant donnée. En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $c(x, t)$ .
3. Combien vaut cette quantité de matière,  $d^2n$ , en régime permanent ?  
En déduire les expressions littérales de  $c(x)$  et de  $J_m$ .

**II-** Un béccher, de section  $S$ , contient de l'eau sur une hauteur  $h_2$  et du benzène sur une hauteur  $h_1$  et on propose un modèle simplifié pour l'étude cinétique du transfert, vers le benzène, de l'iode contenu dans l'eau.

À un instant quelconque, on assimile la concentration de l'iode  $c(x)$ , en fonction de  $x$ , au profil indiqué ci-après : les concentrations dans l'eau et dans le benzène sont notées respectivement  $c_2$  et  $c_1$  et elles sont supposées uniformes, hormi dans une mince couche de diffusion, appelée *couche limite* ; les épaisseurs de ces couches limites sont notées  $L_2$  dans l'eau et  $L_1$  dans le benzène. Dans ces couches limites, la concentration varie linéairement en fonction de  $x$  et l'on note  $c_1^*$  et  $c_2^*$  les concentrations dans le benzène et dans l'eau au niveau de l'interface, à un instant quelconque  $t$ .

On suppose que la quantité d'iode, dans les couches limites, est négligeable devant celle contenue dans le reste du solvant et on négligera le volume de ces couches devant les volumes  $V_2$  et  $V_1$  de l'eau et du benzène.



Les coefficients de diffusion de l'iode dans l'eau et dans le benzène sont notés respectivement  $D_2$  et  $D_1$ .

**ÉNONCÉS**

- On donne  $c_1(t = 0) = 0$  et  $c_2(t = 0) = c_0$ . Donner la relation liant  $c_1$  et  $c_2$  à chaque instant  $t$ .
- On suppose que l'expression du flux de matière établie en I- 3. est valable à chaque instant  $t$ ; donner deux expressions de la quantité d'iode  $\frac{dn}{dt}$  qui passe, par unité de temps, de l'eau et vers le benzène.  
Justifier le profil des concentrations.
- Dans la suite, afin d'alléger l'écriture, on prendra  $h_2 = 10 h_1$ ,  $D_1 = D_2$ ,  $L_2 = 10 L_1$  et on ne conservera que  $D = D_1 = D_2$ ,  $h = h_2$  et  $L = L_2$  comme paramètres.  
On suppose que seul le phénomène de diffusion limite la vitesse de transfert et que l'équilibre chimique est réalisé à chaque instant au niveau de l'interface :  $c_1^* = K c_2^*$ ,  $K$  est la *constante de partage*.  
(a) Donner le système d'équations simplifiées liant  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_1^*$  et  $c_2^*$ .  
(b) Déterminer  $c_1^*$  et  $c_2^*$  en fonction de  $c_2$ .
- Donner l'équation différentielle vérifiée par  $c_2(t)$ . Montrer qu'il apparaît une constante de temps  $\tau$  que l'on donnera en fonction des paramètres.
- Donner les expressions de  $\frac{c_2}{c_0}$  et de  $\frac{c_1}{c_0}$  en fonction du temps.
- Application numérique :

$$D = 2.10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad L = 2 \text{ mm} \quad K = 500 \quad h = 5 \text{ cm}$$

$$\text{Calculer } \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{c_2}{c_0} \right) \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{c_1}{c_0} \right).$$

$$\text{Calculer } t_1 \text{ tel que } \frac{c_2}{c_1} = 0,5.$$

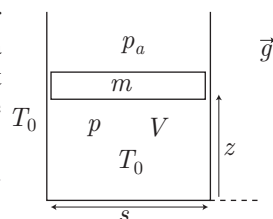
### ● 181 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-jolie

15 min.

PC

#### Potentiels thermodynamiques

Un cylindre vertical contient, dans sa partie inférieure,  $n$  moles d'un gaz parfait. Le haut du cylindre est fermé par un piston parfaitement mobile, de masse  $m$ , et soumis à la pression atmosphérique  $p_a$ . L'ensemble est parfaitement diatherme, de sorte que la température du gaz demeure égale à  $T_0$ , tandis que son volume vaut  $V = zs$ .



- En appliquant la loi fondamentale de la dynamique, exprimer la valeur  $z_e$  de  $z$  (en fonction de  $n$ ,  $R$ ,  $T_0$ ,  $p_a$ ,  $s$ ,  $m$  et  $g$ ) lorsque l'état d'équilibre est atteint.
- Rappeler les expressions de l'énergie interne  $U$  et de l'entropie  $S(T, V)$  d'un gaz parfait, de capacités thermiques  $C_V$  et  $C_p$ .
- On note  $p_0$  la pression exercée par le piston sur le gaz. Trouver l'expression de la fonction :

$$G^*(T, z) = U - T_0 S + p_0 V$$

- Montrer que  $G^*(T, z)$  est un potentiel thermodynamique pour le gaz étudié. Qu'en serait-il de la fonction  $F^* = U - T_0 S$  ?

5. Déterminer la valeur  $z_e$  de  $z$  qui assure l'équilibre du système et comparer avec le résultat du 1.  
 Montrer que cet équilibre est stable.

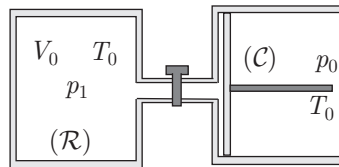
● **182** ————— **Concours Commun Polytechnique**

15 min.

Potentiels thermodynamiques

PC

On considère un réservoir ( $\mathcal{R}$ ) de volume  $V_0$  associé à un cylindre ( $\mathcal{C}$ ) fermé par un piston.



À l'instant initial, le piston est en butée à gauche, un gaz parfait occupant le réservoir ( $\mathcal{R}$ ) dans les conditions  $(p_1 = 2p_0, V_0, T_0)$ .

On débloque le piston, lequel peut coulisser sans frottements dans le cylindre ( $\mathcal{C}$ ). Le système est thermostaté à la température  $T_0$  et est relié à l'atmosphère de pression  $p_0$ .

On prendra  $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \text{cte}$  et l'on supposera connues les capacités thermiques

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \text{ et } C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \text{ du gaz contenu dans le système.}$$

1. Prouver que  $G^* = U - T_0S + p_0V$  est un potentiel thermodynamique adapté au système.
2. Déterminer  $G^*(T, p)$  lorsque le gaz est dans un état thermodynamique caractérisé par une température  $T$  et une pression  $p$ .  
 Retrouver les valeurs  $T_f$  et  $p_f$  de  $T$  et  $p$  à l'équilibre.
3. On pose  $F^* = U - T_0S$ . Calculer  $\Delta F^*$  pour la transformation globale.

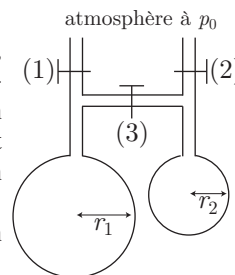
● **183** ————— **Concours Centale-Sup'elec**

40 min.

Potentiels thermodynamiques

PC

On considère le dispositif expérimental de la figure ci-contre : deux bulles sphériques d'eau savonneuse, de rayons différents, sont formées aux extrémités des deux tubes en soufflant, les robinets (1) et (2) étant ouverts et le robinet (3) fermé. Puis on ferme les robinets (1) et (2) et on ouvre le robinet (3) qui met en contact les deux bulles. On se propose d'étudier l'évolution des bulles.



Dans tout le problème, on néglige le volume du tube de liaison entre les deux bulles.

On étudie les évolutions quasi statiques : dans chaque bulle, on peut définir à chaque instant une température  $T_1$  ou  $T_2$  et une pression  $p_1$  et  $p_2$  uniformes. Par ailleurs, l'atmosphère impose une pression  $p_0$  uniforme à l'extérieur des bulles. L'atmosphère se comporte comme un thermostat à la température  $T$  et on suppose l'équilibre thermique atteint à chaque instant :  $T_1 = T_2 = T$ .

**ÉNONCÉS**

### I- Loi de Laplace

Le robinet (3) étant fermé, un manomètre permet de mesurer la différence de pression  $p_1 - p_0$ . L'expérience montre que les pressions sont données, à l'équilibre, par la loi de Laplace :

$$p_1 - p_0 = \frac{4\sigma}{r_1} \text{ et } p_2 - p_0 = \frac{4\sigma}{r_2} \quad (49)$$

où la constante positive  $\sigma$  est appelée coefficient de tension superficielle. Dans toute la suite, on suppose que l'équilibre mécanique entre chaque bulle et l'atmosphère est atteint, de telle sorte que les relations (49) soient vérifiées. Préciser, en donnant un argument qualitatif s'appuyant sur les relations (49), l'évolution du système : le rayon des bulles évolue-t-il ? Est-ce la grosse bulle qui se « vide » dans la petite ou est-ce le contraire ?

### II- Approche quantitative

- Rappeler la définition d'un potentiel thermodynamique.
- Pour un système fermé, d'énergie interne  $U$ , d'entropie  $S$  et de volume  $V$ , en évolution monotherme (température extérieure  $T$ ) et monobare (pression extérieure  $p_0$ ), n'échangeant pas d'autre travail avec l'extérieur que celui des forces de pression, justifier que  $G^* = U - TS + p_0V$  est un potentiel thermodynamique.
- On néglige le volume d'air contenu dans le tube de liaison entre (1) et (2) et l'on étudie le système constitué :

- d'une part de l'air dans les deux bulles et assimilé à un gaz parfait ; on note, avec  $i = 1$  ou  $2$  selon le compartiment,  $V_i$  le volume,  $r_i$  le rayon,  $p_i$  la pression,  $N_i$  le nombre de moles d'air,  $S_i$  l'entropie de l'air ; la température  $T$  est commune aux deux compartiments.
- d'autre part des membranes d'eau savonneuse qui limitent les deux bulles, d'épaisseur négligeable, d'énergies internes respectives  $U_{mi}$ , de températures  $T_{mi} = T$ , d'entropies  $S_{mi}$  et de surfaces  $\Sigma_{mi} = 8\pi r_i^2$  (double de la surface de la sphère, car il y a deux interfaces air-eau savonneuse), pour lesquelles l'identité thermodynamique s'écrit :  $dU_{mi} = T dS_{mi} + \sigma d\Sigma_{mi}$ .

- (a) Montrer que :

$$dG^* = dU_1 + dU_2 - T dS_1 - T dS_2 + p_0 (dV_1 + dV_2) + \sigma d\Sigma_{m1} + \sigma d\Sigma_{m2}$$

- (b) En déduire, à l'aide de la relation (49) que :

$$dG^* = dU_1 + dU_2 - T dS_1 - T dS_2 + p_1 dV_1 + p_2 dV_2$$

- (c) Soit  $G_i = U_i - TS_i + p_i V_i$  l'enthalpie libre dans la bulle ( $i$ ). Du fait que le nombre de moles  $N_i$  varie, l'identité thermodynamique fondamentale s'écrit :

$$dG_i = -S_i dT + V_i dp_i + \mu_i dN_i$$

où  $\mu_i(p_i, T) = \left( \frac{\partial G_i}{\partial N} \right)_{T, p_i}$  est le potentiel chimique de l'air dans la bulle ( $i$ ).

Montrer que :

$$dG^* = \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2$$

(d) On montre, dans le cours de chimie, que pour un gaz parfait :

$$\mu_i(p_i, T) = f(T) + RT \ln p_i$$

où  $f(T)$  est une fonction de la température, identique dans les deux bulles car le gaz est le même. En déduire que :

$$dG^* = RT \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) dN_1$$

- Justifier que les variables  $p_1, p_2, r_1, r_2, N_1$  et  $N_2$  sont liées par cinq relations de telle sorte qu'une seule de ces variables suffit à déterminer toutes les autres. Dans la suite, on prend  $r_1$  comme variable. Montrer que  $\frac{dp_i}{dr_i} < 0$  et  $\frac{dN_i}{dr_i} > 0$ . Quand  $r_1$  croît, en déduire le sens de l'évolution de  $p_1, N_1, N_2, r_2$  et  $p_2$ .
- Prévoir l'évolution de deux bulles de rayons initiaux tels que  $r_1 > r_2$ . Que peut-on dire d'un état initial  $r_1 = r_2$  ?

## ● 184 ————— Concours INA - ENSA

45 min.

PC

Potentiels thermodynamiques

On rappelle qu'un état d'équilibre, pour un système, peut être *stable* ou *instable*. La discussion sur la stabilité peut s'effectuer :

- soit en définissant un potentiel associé au type d'équilibre étudié : le système est en équilibre stable lorsque ce potentiel prend une valeur *minimum* ; il est en équilibre instable lorsqu'il prend une valeur *maximum*.
- soit en étudiant l'évolution du système autour de sa position d'équilibre : si, écarté de cette position sous l'effet d'une légère perturbation, il tend à y revenir, l'équilibre est stable ; s'il tend à s'en éloigner davantage, l'équilibre est instable.

Par ailleurs, on dit qu'un système est en équilibre métastable lorsque, étant dans un état d'équilibre stable, il est susceptible d'évoluer vers un autre état d'équilibre plus stable sous l'effet d'une petite perturbation. Le but de cet exercice est d'illustrer ce concept en thermodynamique.

- On considère un système thermodynamique fermé, en contact avec une atmosphère dont la pression est une constante  $p_0$  et avec un thermostat dont la température est  $T_0$ . On envisage une évolution infinitésimale, non nécessairement réversible, au cours de laquelle le système échange la quantité de chaleur  $\delta Q$  et le travail  $\delta W$ , son énergie interne variant de  $dU$  et son entropie de  $dS$ . On pose :

$$G^* = U + p_0V - T_0S$$

En écrivant les deux principes de la thermodynamique, montrer que :

$$dG^* \leq 0 \quad (50)$$

si le système ne reçoit de l'extérieur aucun travail autre que celui des forces de pression.

Il découle de l'inégalité (50) qu'un équilibre stable du système est caractérisé par un *minimum* de  $G^*$  ; on admettra qu'un *maximum* de  $G^*$  correspond à un équilibre instable.  $G^*$  représente alors le potentiel pour les évolutions observées. Dans la

suite, le système est en équilibre mécanique et thermique avec le milieu extérieur de sorte qu'on peut confondre sa pression  $p$  et la pression constante  $p_0$  de l'atmosphère, sa température  $T$  et la température  $T_0$  du thermostat, et par conséquent  $G^*$  à l'enthalpie libre  $G$ .

On suppose désormais que la glace et l'eau liquide ont la même masse volumique. On s'intéresse à l'équilibre d'un système constitué d'un cristal de glace sphérique de rayon  $r$  plongé dans l'eau liquide occupant un volume  $\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3$ ; le tout forme un système fermé de volume constant et égal à  $\frac{4}{3}\pi R^3$  et évoluant à pression  $p$  et à température  $T$  constantes. Le rayon  $r$  du cristal peut varier de  $r = 0$  (toute l'eau est alors liquide) à  $r = R$  (toute l'eau est alors solide).

2. On suppose d'abord que l'enthalpie libre du mélange est de la forme :

$$G = g_L \left( \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \right) + g_S \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

où  $g_S$  et  $g_L$  sont des fonctions de  $T$  et  $p$ , qui sont donc constantes à  $T$  et  $p$  fixés. On suppose que  $T$  et  $p$  sont tels que  $g_L > g_S$ .

Déduire de l'inégalité (50) le sens de l'évolution de  $r$ . Quel est l'état final du système ?

3. En réalité, on doit plutôt écrire :

$$G = g_L \left( \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 \right) + g_S \times \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2 A$$

où  $A$  est une constante positive à  $T$  fixé. On suppose toujours que  $g_L > g_S$ .

- (a) Étudier la fonction  $G(r)$  et tracer l'allure de son graphe pour  $0 < r < R$  (et en supposant que  $G(0) > G(R)$ ). Montrer que, si  $R$  est convenablement choisi, il existe un état d'équilibre instable  $B$  et exprimer  $r_B$  en fonction de  $A$ ,  $g_L$  et  $g_S$ ; que peut-on alors dire des états  $E(r = 0)$  et  $F(r = R)$  ?
- (b) Calculer  $\Delta G_a = G_B - G_E$  et  $\Delta G'_a = G_B - G_F$  en fonction de  $A$ ,  $g_L$ ,  $g_S$  et  $R$ . Comment faut-il choisir  $R$ , en fonction de  $A$ ,  $g_L$ ,  $g_S$ , pour que l'état  $E$  puisse être métastable ?
4. À l'aide des résultats précédents, on se propose d'interpréter l'expérience suivante : on dispose d'eau liquide dans un béccher, sous une pression  $p = 1$  bar et à une température  $t = -5^\circ\text{C}$  où elle devrait être solide ; on dit que l'eau est *surfondue*. Lorsqu'on agite, toute l'eau se solidifie instantanément ; la surfusion cesse.
- (a) Comment expliquer l'existence d'eau surfondue (état initial de l'expérience) dans des conditions de pression et de température telles que l'eau devrait être solide ?
- (b) Quel est le rôle de l'agitation dans l'expérience ?
- (c) Citer un exemple de manifestation concrète ou d'utilisation du phénomène de surfusion.

## ● 185 ————— Concours des Mines

15 min.

Équilibre liquide-vapeur

PC-PSI-PT

1. Rappeler la formule de Clapeyron donnant l'expression de la chaleur latente massique de vaporisation  $\ell_v$ .



En déduire une formule définissant la pression d'équilibre,  $p_{\text{sat}}(T)$ , à la température  $T$ , en adoptant les hypothèses suivantes (le fluide est de l'eau) :

- (a) pour  $T \ll T_c$  (température critique) et  $\ell_v = \ell_0 = \text{cte}$  sur l'intervalle de température considéré, centré sur  $T_0 = 373 \text{ K}$ . On prendra  $p_{\text{sat}}(T_0) = p_0 = 1 \text{ bar}$ ,  $\ell_0 = \ell(T_0) = 2250 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  (masse molaire de l'eau),  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  (constante molaire des gaz parfaits). Calculer  $p_{\text{sat}}(423 \text{ K})$ .
- (b) pour  $T \ll T_c$  et  $\ell_v = 3340 - 2,93 \times T$  (en  $\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ). Calculer  $p_{\text{sat}}(423 \text{ K})$ .
2. On introduit, dans une enceinte thermostatée à la température  $T_1 = 423 \text{ K}$ , initialement vide, une masse  $m_0 = 100 \text{ g}$  d'eau liquide prise dans les conditions  $(T_1, p_{\text{sat}}(T_1))$ . Déterminer l'état final lorsque le volume de l'enceinte vaut  $V_0 = 1 \text{ L}$ . On prendra  $p_{\text{sat}}(T_1) = 4,60 \text{ bar}$ ,  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$  et on supposera que le volume massique de l'eau liquide vaut  $v_\ell = 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ .

### ● 186 ————— Concours Commun Polytechnique

15 min.

Équilibre liquide-vapeur

MP-PC-PSI-PT

De l'eau, dans l'état de vapeur saturante à  $T_1 = 373 \text{ K}$  et à pression atmosphérique  $p = p_0$ , est enfermée dans un cylindre à parois diathermes, fermé par un piston pouvant coulisser sans frottements. La pression extérieure est maintenue constante. On place ce cylindre dans un thermostat à  $T_0 = 290 \text{ K}$ .

On donne :

- la masse de vapeur d'eau introduite :  $m$  ;
- la chaleur latente massique de fusion à  $T_1$  :  $\ell_v$  ;
- la capacité thermique massique de l'eau liquide à  $290 \text{ K}$  :  $c_\ell$  ;
- le volume massique de l'eau liquide à  $290 \text{ K}$  :  $v_\ell$  ;
- le volume massique de la vapeur d'eau à  $373 \text{ K}$  :  $v_g$ .

1. Déterminer les échanges thermiques et mécaniques subis.
2. Trouver l'expression de l'entropie créée dans le milieu.

### ● 187 ————— Concours Commun Polytechnique

30 min.

Changement d'état

MP-PC-PSI-PT

Le changement d'état réversible solide-liquide du corps pur eau ( $\text{H}_2\text{O}$ ) intervient à la température  $T_0$  et sous la pression atmosphérique  $p_0$ .

On rappelle la relation entre la chaleur latente massique de fusion du corps pur  $\ell_f(T, p)$  et les volumes massiques  $u_L$  de sa phase liquide et  $u_S$  de sa phase solide (relation de Clapeyron) :

$$\ell_f(T, p) = T (u_L - u_S) \frac{dp}{dT}$$

Sauf indications contraires, toutes les expériences décrites dans cet exercice se déroulent sous la pression  $p_0$ .

Données numériques :

- $T_0 = 273 \text{ K}$  et  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  ;
- $\ell_f(T_0, p_0) = 334 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$  : chaleur latente massique de fusion de l'eau ;
- $c_{pL} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  : coefficient thermique massique (constant) de l'eau liquide ;
- $c_{pS} = 2,09 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  : coefficient thermique massique (constant) de la glace ;
- $u_L = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  : volume massique (constant) de l'eau liquide ;
- $u_S = 1,09 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$  : volume massique (constant) de la glace.

### I- Transferts de chaleur

1. Une masse  $M_S$  de glace, initialement à la température  $T_1$  ( $T_1 < T_0$ ), est placée au contact d'une source de chaleur (thermostat) maintenue à la température  $T_0$ . En fin de transformation, la masse  $M_S$  est entièrement liquide à  $T_0$ .
  - (a) Déterminer l'expression littérale de la variation d'enthalpie  $\Delta H$  de la masse  $M_S$  au cours de cette évolution.
  - (b) Application numérique :  $M_S = 1,00 \text{ kg}$  et  $T_1 = 253 \text{ K}$ . Calculer  $\Delta H$ .
2. Un calorimètre, thermiquement isolé et de capacité thermique négligeable, contient une masse  $M_L$  d'eau liquide, initialement à la température  $T_2$  ( $T_2 > T_0$ ). Une masse  $M_S$  de glace, initialement à la température  $T_1$  ( $T_1 < T_0$ ) est ajoutée dans le calorimètre.
  - (a) Déterminer l'expression littérale de la température initiale minimale  $T_{2 \text{ min}}$  de la masse  $M_L$  au dessus de laquelle, à l'équilibre, la masse totale ( $M_S + M_L$ ) d'eau est liquide.
  - (b) Application numérique :  $M_S = M_L = 1,00 \text{ kg}$  et  $T_1 = 253 \text{ K}$ . Calculer  $T_{2 \text{ min}}$ .

### II- Cessation d'un état métastable

Dans un calorimètre thermiquement isolé et de capacité thermique négligeable, on place une masse  $M_L$  d'eau en état surfondu, c'est-à-dire liquide à une température  $T_3$  inférieure à la température de changement d'état réversible ( $T_3 < T_0$ ). L'introduction d'un germe cristallisé de glace, de masse négligeable, provoque la solidification partielle de l'eau.

1. Quelle est la température finale  $T_f$  à l'équilibre ?
2. Déterminer l'expression littérale de la masse  $m_S$  d'eau solidifiée.
3. Même question pour la variation d'entropie  $\Delta S$  de l'eau.
4. Application numérique :  $M_L = 1,00 \text{ kg}$  et  $T_3 = 263 \text{ K}$ .
  - (a) Calculer la masse d'eau solide  $m_S$ .
  - (b) Calculer la variation d'entropie  $\Delta S$ .
  - (c) Y a-t-il création d'entropie dans l'univers ? La transformation est-elle réversible ?

**III- Diagramme  $p = f(T)$  du corps pur**

- Dessiner l'allure générale du diagramme  $p = f(T)$  d'un corps pur. Annoter le schéma en identifiant les courbes représentatives des équilibres de changement d'état et les différents domaines d'existence des phases.
- Dans ce diagramme, la courbe de fusion est la courbe représentative de l'équilibre solide-liquide.
  - Calculer, au point  $M_0(T_0, p_0)$ , la pente de la tangente à la courbe de fusion de l'eau.
  - On réalise la compression isotherme (température  $T_0$ ) d'une masse d'eau. Préciser l'état final du corps pur, en justifiant qualitativement la réponse, dans les deux cas suivants :
    - l'eau est initialement solide à  $T_0$  et  $p_0$  ;
    - l'eau est initialement liquide à  $T_0$  et  $p_0$ .
- Lors d'une randonnée pédestre sur glacier, l'utilisation de chaussures à crampons métalliques est-elle raisonnable ? expliquer brièvement.

● **188****QCM**

30 min.

MP-PC-PSI-PT

*Changement d'état*

- Calculer la chaleur latente de fusion de l'eau à 273 K [ $\ell_f(273 \text{ K})$ ] ainsi que la chaleur latente de vaporisation de l'eau à 373 K [ $\ell_v(373 \text{ K})$ ]. On supposera pour cela que la vapeur d'eau saturante peut être assimilée à un gaz parfait.
  - $\ell_f(273 \text{ K}) = 58 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $\ell_v(373 \text{ K}) = 1,52 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .
  - $\ell_f(273 \text{ K}) = 335 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $\ell_v(373 \text{ K}) = 2,28 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .
  - $\ell_f(273 \text{ K}) = 335 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $\ell_v(373 \text{ K}) = 1,52 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .
  - $\ell_f(273 \text{ K}) = 58 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $\ell_v(373 \text{ K}) = 2,28 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .
- On rappelle que le titre massique en vapeur d'un système liquide-vapeur est égal au rapport de la masse de vapeur sur la masse totale du fluide.  
On considère un système constitué d'un bloc de glace de masse  $m = 0,5 \text{ kg}$  pris à la température 255 K sous la pression  $p_{\text{réf}} = 1,0132 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ . Par une transformation monobare, sous la pression  $p_{\text{réf}}$ , on effectue un échauffement du système jusqu'à obtenir un état d'équilibre liquide-vapeur (noté  $B$ ) de titre massique en vapeur  $x_B = 0,1$  et de température  $T_B$ . À cette pression, la température de fusion de l'eau pure est proche de 273 K et la température de vaporisation de l'eau pure est proche de 373 K.  
Calculer la quantité d'énergie reçue sous forme de chaleur par l'eau au cours de cette transformation.
  - 186,4 kJ
  - 1 307 kJ
  - 509,4 kJ
  - 327 kJ
- Le système liquide-vapeur étant dans l'état  $B$  défini ci-dessus, on effectue une transformation adiabatique réversible jusqu'à obtention d'un système constitué uniquement de liquide dans les conditions de saturation à la température  $T_C$  (état  $C$ ). On note  $\ell_v(T_B)$  la chaleur latente massique de vaporisation à la température  $T_B$ . Quelle est l'expression de la température  $T_C$  ?

$$(a) T_C = T_B \exp \left[ 1 + \frac{x_B \ell_v(T_B)}{c_\ell T_B} \right] \quad (b) T_C = T_B \exp \left[ 1 - \frac{x_B \ell_v(T_B)}{c_\ell T_B} \right]$$

$$(c) T_C = T_B \exp \left[ \frac{x_B \ell_v(T_B)}{c_\ell T_B} - 1 \right] \quad (d) T_C = T_B \exp \left[ \frac{x_B \ell_v(T_B)}{c_\ell T_B} \right]$$

4. On cherche à déterminer la pression  $p_C$  de l'état  $C$  défini ci-dessus. Pour cela, on suppose que la chaleur latente de vaporisation de l'eau pure obéit à une loi linéaire du type :  $\ell_v = a + bT$ . La vapeur d'eau saturante sera assimilée à un gaz parfait et on négligera le volume massique de la phase liquide devant celui de la vapeur.

(a)  $p_C > p_{\text{réf}}$

(b)  $p_C < p_{\text{réf}}$

(c)  $p_C = p_{\text{réf}} \left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{R/bM_e} \times \exp \left[ \frac{aM_e}{R} \left( \frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_B} \right) \right]$

(d)  $p_C = p_{\text{réf}} \left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{bM_e/R} \times \exp \left[ \frac{aM_e}{R} \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_C} \right) \right]$

5. On néglige toujours le volume massique de la phase liquide devant celui de la vapeur. On cherche à estimer l'énergie  $W_{BC}$  reçue sous forme de travail par le système au cours de la transformation définie dans la question 3, pour aller de l'état  $B$  à l'état  $C$ . On note  $U$  et  $H$ , respectivement, les fonctions thermodynamiques énergie interne et enthalpie.

(a)  $W_{BC} = H_C - H_B$

(b)  $W_{BC} = U_C - U_B$

(c)  $W_{BC} = m \frac{x_B RT_B}{M_e}$

(d)  $W_{BC} = m \left[ \frac{x_B RT_B}{M_e} - \ell_v(T_B) x_B + c_\ell (T_C - T_B) \right]$

Données numériques :

- masse volumique de l'eau solide (supposée constante) :  $\rho_s = 910 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;
- masse volumique de l'eau liquide (supposée constante) :  $\rho_\ell = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;
- capacité thermique massique de l'eau solide (supposée constante) :

$$c_s = 2,10 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

- capacité thermique de l'eau liquide (supposée constante) :  $c_\ell = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- pente de la courbe de fusion (supposée constante) :  $\left( \frac{dp}{dT} \right)_f = -124.10^5 \text{ Pa} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- pente de la courbe de saturation de l'eau à 373 K :  $\left( \frac{dp}{dT} \right)_v = 0,036.10^5 \text{ Pa} \cdot \text{K}^{-1}$
- pression de vapeur saturante de l'eau pure à 373 K :  $p_s(373 \text{ K}) = 1,0132.10^5 \text{ Pa}$  ;
- masse molaire de l'eau :  $M_e = 18.10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

## ● 189 ————— Concours Commun Polytechnique

30 min.

Machines thermiques

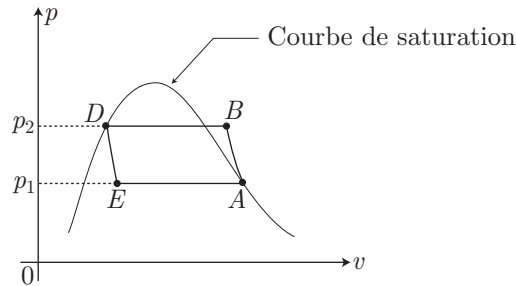
MP-PC-PSI-PT

Le cycle représenté dans un diagramme de Clapeyron, par la figure ci-dessous, constitue un modèle de fonctionnement d'une machine de réfrigération dans laquelle une masse  $m$  de fluide frigorigène subit les transformations suivantes :

- $A \rightarrow B$  : compression adiabatique dans le compresseur ;
- $B \rightarrow D$  : refroidissement et liquéfaction isobares de la vapeur dans le condenseur ;
- $D \rightarrow E$  : détente adiabatique et isenthalpique dans le détendeur ;
- $E \rightarrow A$  : vaporisation isobare dans l'évaporateur.

Les sources froide  $\Sigma_F$  (intérieur de l'enceinte à réfrigérer) et chaude  $\Sigma_C$  (milieu ambiant) sont assimilées à des thermostats de températures respectives  $T_F$  et  $T_C$  constantes.

Les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle du fluide sont négligeables.



Donnée numériques :

- $m = 1 \text{ kg}$  ;
- $T_F = 278 \text{ K}$  ;  $T_C = 293 \text{ K}$  ;
- enthalpies massiques du fluide frigorigène dans les états représentés par les points A, B et D :

$$h_A = 390,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad h_B = 448,6 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \quad h_D = 286,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

### A- Performances de l'installation

1. Un système fermé subit une transformation isobare qui le fait évoluer de l'état initial ( $i$ ) à l'état final ( $f$ ). Au cours de cette transformation, le système reçoit les quantités d'énergie  $Q_{i \rightarrow f}$  par transfert thermique et  $W_{i \rightarrow f}$  par transfert mécanique (travail).
  - (a) Appliquer le premier principe de la thermodynamique à cette transformation.
  - (b) Établir la relation entre la variation d'enthalpie  $\Delta H_{i \rightarrow f}$  du système et  $Q_{i \rightarrow f}$ .
2. On désigne par  $Q_F$  et  $Q_C$  les quantités d'énergie reçues par le fluide, par transfert thermique, respectivement au contact de la source froide et au contact de la source chaude, au cours du cycle défini ci-dessus.
  - (a) Exprimer  $Q_F$  et  $Q_C$  en fonction des données.
  - (b) Calculer  $Q_F$  et  $Q_C$ .

ÉNONCÉS

3. On désigne par  $W$  l'énergie reçue par le fluide, par transfert mécanique (travail), au cours du cycle.
  - (a) Exprimer  $W$  en fonction des données.
  - (b) Calculer  $W$ .
4. On désigne par  $S_F$  et  $S_C$  les valeurs algébriques des entropies échangées par le fluide, respectivement avec la source froide et la source chaude, au cours du cycle.
  - (a) Exprimer  $S_F$  et  $S_C$  en fonction des données.
  - (b) Calculer  $S_F$  et  $S_C$ .
  - (c) Calculer l'entropie  $S_p$  créée au cours du cycle. Conclusion.
5. Calculer l'efficacité  $\mu$  de cette installation.
6. Sachant que la puissance  $\mathcal{P}_F$  à extraire de la source froide, pour maintenir sa température constante, est de 500 W, calculer le débit massique  $q_m$  que l'on doit imposer au fluide calorigène.

### B- Étude de la compression de la vapeur

La vapeur issue de l'évaporateur est comprimée de la pression  $p_1 = 2,008$  bar (état  $A$ ) à la pression  $p_2 = 16,810$  bar (état  $B$ ).

Dans cette partie du problème, on admettra que l'on peut assimiler la vapeur à un gaz parfait dont le rapport  $\gamma$  des capacités thermiques conserve une valeur constante égale à 1,14 dans le domaine étudié.

1. On envisage le cas où cette compression pourrait être supposée adiabatique et réversible.
  - (a) Établir la relation que vérifieraient les variables température  $T$  et pression  $p$ .
  - (b) Sachant que  $T_A = 263$  K, calculer la température  $T'$  que l'on atteindrait en fin de compression.
2. En réalité, la compression  $A \rightarrow B$  subie par la vapeur peut être supposée adiabatique mais n'est pas réversible car on ne peut pas négliger les frottements fluides qui se produisent à l'intérieur du compresseur ; de ce fait, la température en fin de compression est supérieure à celle calculée précédemment.

La transformation isentropique  $A \rightarrow B$  est la transformation réversible qui permettrait au fluide d'évoluer de l'état  $A$  à l'état  $B$  en recevant, par transfert thermique, une quantité d'énergie  $Q_f$  équivalente à celle générée par les frottements internes au cours de la transformation irréversible  $A \rightarrow B$ .

Pour établir la loi d'évolution polytropique, on considère une transformation élémentaire réversible, caractérisée par les variations d'énergie interne  $dU$ , d'entropie  $dS$  et de volume  $dV$ . La quantité d'énergie  $\delta Q_f$  reçue par le fluide, par transfert thermique, s'écrit  $\delta Q_f = a dU$ . Dans cette expression,  $a$  désigne un facteur qui sera supposé constant dans tout le domaine étudié.

- (a) Exprimer  $dU$  en fonction de  $dS$  et  $dV$ .
- (b) Montrer qu'au cours de l'évolution polytropique  $A \rightarrow B$  les variables pression  $p$  et volume  $V$  vérifient la relation :  $pV^k = \text{cte}$ , dans laquelle  $k$  désigne une constante appelée *facteur polytropique*. Exprimer  $k$  en fonction de  $a$  et  $\gamma$ .

## ● 190

## Concours ESIM

40 min.

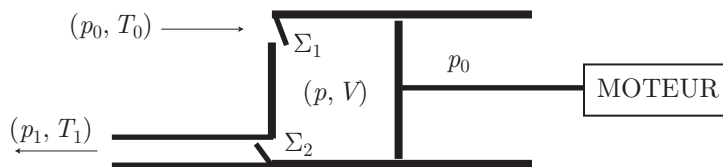
Machines thermiques

MP-PC-PSI-PT

Le problème étudie un moteur à air comprimé (celui d'un marteau-piqueur par exemple), entraîné par de l'air issu d'un compresseur. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , de capacité thermique massique à pression constante  $c_p = 1,00 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ , de rapport des capacités thermiques à pression et à volume constants :  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$  et de constante :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**I- Le compresseur**

L'air est aspiré dans les conditions atmosphériques (pression  $p_0 = 1 \text{ bar}$ , température  $T_0 = 290 \text{ K}$ ) et est refoulé à la température  $T_1$  dans un milieu où la pression est  $p_1 = 6 \text{ bar}$ . Bien que le mécanisme réel d'un compresseur soit différent nous supposons ici que celui-ci fonctionne comme une pompe à piston qui se compose d'un cylindre, d'un piston coulissant entraîné par un moteur et de deux soupapes.



- La soupape d'entrée  $\Sigma_1$  est ouverte si la pression  $p$  dans le corps de pompe est inférieure à la pression atmosphérique  $p_0$ .
  - La soupape de sortie  $\Sigma_2$  est ouverte si  $p$  est supérieur à  $p_1$ .
  - Le volume  $V$  du corps de pompe est compris entre 0 et  $V_m$ .
  - À chaque cycle (aller-retour du piston), la pompe aspire et refoule une mole d'air.
1. Tracer le diagramme de Clapeyron ( $p$  en ordonnée et  $V$  en abscisse) l'allure de la courbe représentant un aller et un retour du piston. Indiquer le sens du parcours par une flèche.  
Représenter, sur ce diagramme, le travail fourni par le moteur qui actionne le piston.  
On supposera que le mouvement est assez lent pour que l'évolution soit réversible.
  2. Pendant la phase de compression, l'air suit une loi *polytropique* :

$$pV^k = \text{constante}$$

Il sort du compresseur à la température  $T_1 = 391 \text{ K}$ .

- (a) Montrer que  $k = 1,20$ .
- (b) Exprimer le travail mécanique  $W_m$  fourni par le moteur pendant un cycle, par une intégrale de la forme :

$$W_m = \int_{p_0}^{p_1} f(p) dp$$

On pourra s'aider du diagramme de Clapeyron, établi à la question précédente. Calculer numériquement  $W_m$ .

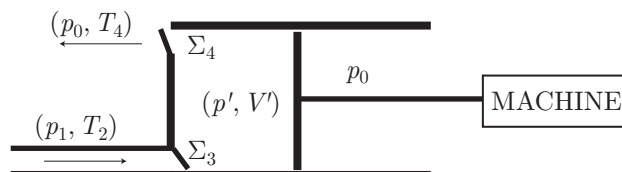
(c) Au cours d'un cycle, le système constitué par une mole d'air est transvasé et reçoit, par transfert thermique, une chaleur  $Q$ .

Vérifier que la somme  $W_m + Q$  est égale à la variation d'une fonction d'état que l'on nommera.

Calculer numériquement  $Q$  et interpréter le signe de  $Q$ .

3. Le débit est de  $0,013 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Calculer la puissance  $\mathcal{P}_m$  fournie par le moteur.

## II- Moteur à air comprimé



Le moteur à air se compose d'un cylindre, d'un piston et de deux soupapes  $\Sigma_3$  et  $\Sigma_4$ . Il est alimenté en air à la pression  $p_1 = 6 \text{ bar}$  et à la température  $T_2 = 320 \text{ K}$ .

Sa cylindrée, ou volume *maximum*, est  $V'_m = 1 \text{ litre}$ .

Le piston étant complètement poussé ( $V' = 0$ ), la soupape d'admission  $\Sigma_3$  s'ouvre. Le cylindre se remplit d'air dans les conditions  $(p_1, T_2)$  jusqu'à ce que  $V'$  soit égal à  $0,4 \times V'_m$ .

Les deux soupapes étant fermées, le piston continue sa course jusqu'à ce que  $V' = V'_m$ . La soupape  $\Sigma_4$  s'ouvre alors ; l'air se détend très rapidement jusqu'à la pression extérieure  $p_0$ .

La soupape  $\Sigma_4$  se ferme, la soupape  $\Sigma_3$  s'ouvre et le cycle se répète.

On suppose toujours que les déplacements du piston sont suffisamment lents pour être considérés comme réversibles.

1. Tracer, sur un diagramme de Clapeyron ( $p'$  en ordonnée,  $V'$  en abscisse), l'allure de la courbe représentant un aller et un retour du piston. Indiquer le sens du parcours par une flèche.

Présenter, sur ce diagramme, le travail fourni à la machine.

2. Pendant la phase de détente, l'évolution de l'air est adiabatique et réversible. Le moteur effectue cinq cycles par seconde. Calculer numériquement :

(a) la température  $T_3$  et la pression  $p_3$  de l'air lorsque le volume  $V'$  atteint sa valeur maximale  $V'_m$  ;

(b) le débit massique moyen  $D_m$  ;

(c) la puissance mécanique moyenne  $\mathcal{P}'$  reçue par la machine.

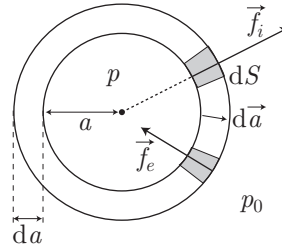


● 152 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

Considérons la sphère dont le rayon  $a$  s'accroît de  $da$ . Le gaz à l'intérieur de cette sphère exerce, sur une surface élémentaire  $dS$ , une force  $\vec{f}_i$  de norme  $p dS$ , dont le travail est défini par :

$$\delta^2 W = \vec{f}_i \cdot d\vec{a} = p \times dS da = p \times d^2 V$$

où  $d^2 V$  désigne le volume élémentaire du cylindre de hauteur  $da$  et de section droite  $dS$ .



Aussi, sur l'ensemble de la surface de la bulle, ce travail vaut :

$$\delta W_i = p S da$$

où  $S = 4\pi a^2$  désigne la surface de la sphère de rayon  $a$ . De même, la pression extérieure exerce une force  $\vec{f}_e$ , de norme  $f_e = p_0 dS$ , qui réalise un travail élémentaire :

$$\delta^2 W_e = \vec{f}_e \cdot d\vec{a} = -p_0 \times dS da \Rightarrow \delta W_e = -p_0 S da$$

Par suite, le travail nécessaire pour augmenter la surface de la couche savonneuse :

$$\delta W = \delta W_i + \delta W_e = (p - p_0) S da = (p - p_0) \times 4\pi a^2 da$$

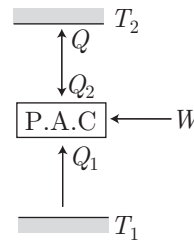
s'identifie à celui fourni par l'énoncé :

$$\begin{aligned} \delta W &= 2A_0 dS, \text{ avec } dS = d(4\pi a^2) = 8\pi a da \\ \Rightarrow (p - p_0) \times 4\pi a^2 da &= 16\pi A_0 a da \\ \Rightarrow p - p_0 &= \frac{4A_0}{a} \end{aligned}$$

● 153 ————— Concours ENAC Pilotes

1. Une pompe à chaleur (P.A.C.) consomme un travail mécanique  $W$  afin de prélever une chaleur  $Q_1$  à la source froide (de température  $T_1 = 278$  K) et de restituer une chaleur  $Q$  à la source chaude (de température  $T_2 = 293$  K), dont elle reçoit alors une chaleur  $Q_2 = -Q$ .

Par la suite, on raisonnera sur des échanges énergétiques se produisant pendant une heure, afin de confondre ces énergies avec leur puissance associée.



2. L'inégalité de Clausius stipule que :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \Rightarrow Q_1 \leq -\frac{T_1}{T_2} Q_2 = \frac{T_1}{T_2} Q$$

où l'égalité n'est vérifiée que si le cycle est décrit de manière réversible.

**CORRIGÉS**

En outre, au cours d'un cycle de fonctionnement, l'énergie interne de la pompe à chaleur ne varie pas :

$$\begin{aligned}\Delta U = \oint dU = 0 &\Rightarrow W + Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow W = -Q_1 - Q_2 = Q - Q_1 \\ &\Rightarrow W \geq Q \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = W_{\min}\end{aligned}$$

Aussi, la puissance minimale  $W_{\min}$  est celle que consomme la machine lorsqu'elle fonctionne de manière réversible ; elle vaut alors :

$$W_{\min} = Q \times \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$$

3. *Application numérique :*

$$W_{\min} = 2.10^8 \times \left(1 - \frac{278}{293}\right) \Rightarrow W_{\min} = 1,02.10^7 \text{ J} \cdot \text{h}^{-1}$$

4. Par définition, l'efficacité de la pompe à chaleur vaut :

$$e = \frac{|Q_2|}{W} = \frac{Q}{W}$$

Or, dans la question précédente, il a été établi que :

$$W \geq W_{\min} \Rightarrow e \leq \frac{Q}{W_{\min}} = \frac{1}{1 - T_1/T_2}$$

ce qui montre qu'il existe une valeur maximale  $e_{\max}$  de  $e$  telle que :

$$e \leq e_{\max} \text{ avec } e_{\max} = \frac{1}{1 - T_1/T_2} \quad (51)$$

*Application numérique :*

$$e_{\max} = \frac{1}{1 - \frac{278}{293}} \Rightarrow e_{\max} = 19,5\%$$

De sa définition :  $Q = e \times W$ , l'efficacité d'une pompe à chaleur représente la fraction de l'énergie qu'elle consomme qui est efficacement transformée en chaleur utilisable pour maintenir la température de l'immeuble à 20°C.

5. Le résultat (51) révèle que  $e_{\max}$  prend une valeur d'autant plus grande que le rapport  $\frac{T_1}{T_2}$  s'approche de 1, c'est-à-dire que  $T_2$  est voisin de  $T_1$ . Physiquement, cela signifie que  $e_{\max}$  est d'autant plus grand que la température  $T_2$  de l'immeuble se rapproche de la température  $T_1 = 5^\circ\text{C}$  de l'extérieur. L'utilité d'une telle pompe est pour le moins discutable. Aussi, une pompe à chaleur d'efficacité  $e_{\max}$  infinie est inutile !

● **154** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

1. Soit  $V_0$  le volume initial du gaz et  $V_f$  son volume final. Les états extrêmes de la transformation :

$$(2p_0, V_0, T_0) \rightarrow (p_0, V_f, T_f)$$

sont des états d'équilibre, qui suivent l'équation d'état :

$$2p_0V_0 = 2RT_0 \text{ et } p_0V_f = 2RT_f \quad (52)$$

Ce faisant, la pression extérieure ( $p_0$ ) exerce un travail :

$$-p_e \Delta V = -p_0 (V_f - V_0) = p_0V_0 - p_0V_f = R (T_0 - 2T_f)$$

Or, la première loi de Joule indique que l'énergie interne du gaz ne dépend que de sa température, de sorte que :

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_0) = \frac{2R}{\gamma - 1} (T_f - T_0)$$

tandis que le premier principe de la thermodynamique impose :

$$\begin{aligned} \Delta U = W + Q = W &\Rightarrow \frac{2R}{\gamma - 1} (T_f - T_0) = R (T_0 - 2T_f) \\ &\Rightarrow 2T_f - 2T_0 = (\gamma - 1) T_0 - (2\gamma - 2) T_f \\ &\Rightarrow 2\gamma T_f = (\gamma + 1) T_0 \\ &\Rightarrow T_f = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} T_0 \end{aligned}$$

Aussi, l'équation d'état (52) devient :

$$\begin{cases} p_0V_f = 2RT_f \\ 2p_0V_0 = 2RT_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_f}{2V_0} = \frac{T_f}{T_0} \Rightarrow V_f = \frac{\gamma + 1}{\gamma} V_0$$

Application numérique :

$$T_f = \frac{8/3}{10/3} \times 300 \Rightarrow T_f = 240 \text{ K}$$

2. L'entropie d'un gaz parfait peut être présentée comme une fonction de  $T$  et  $p$  :

$$S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln (T^\gamma p^{1-\gamma}) + \text{cte} = \frac{2R}{\gamma - 1} \ln (T^\gamma p^{1-\gamma}) + \text{cte}$$

de sorte que la variation d'entropie du gaz vaut :

$$\begin{aligned} \Delta S &= S_f - S_0 = \frac{2R}{\gamma - 1} \ln \left[ \left( \frac{T_f}{T_0} \right)^\gamma \times \left( \frac{p_0}{2p_0} \right)^{1-\gamma} \right] \\ &= \frac{2R}{\gamma - 1} \ln \left[ \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right)^\gamma \times 2^{\gamma-1} \right] \\ &\Rightarrow \Delta S = \frac{2R}{\gamma - 1} \times \left[ \gamma \ln \left( \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \right) + (\gamma - 1) \ln 2 \right] \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\Delta S = \frac{2 \times 8,314}{2/3} \times \left[ \frac{5}{3} \times \ln \left( \frac{8/3}{10/3} \right) + \frac{2}{3} \ln 2 \right] \Rightarrow \Delta S = 2,25 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

3. Le récipient étant adiabatique, la chaleur  $\delta Q$  que le gaz reçoit est nulle, ce qui signifie que l'entropie échangée vaut :

$$S_e = \int \frac{\delta Q}{T} = 0$$

Aussi, le bilan d'entropie conduit à :

$$\Delta S = S_e + S_{cr} \Rightarrow S_{cr} = \Delta S = 2,25 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

## ● 155 ————— Lycée du Parc, Lyon

1. Soit  $V_{em}$  le volume de la mole de gaz qui pénètre dans la tuyère, sous la pression  $p_e$  et soit  $V_{sm}$  le volume de la mole de gaz qui sort de la tuyère pendant  $\Delta t$ . Le travail exercé par les forces de pression vaut :

$$W = p_e V_{em} - p_s V_{sm}$$

tandis que le gaz peut recevoir, dans la tuyère, une quantité de chaleur  $Q$  et un travail  $W'$  autre que celui des forces de pression. Le premier principe de la thermodynamique prévoit une variation  $\Delta U = U_{sm} - U_{em}$  de l'énergie interne d'une mole de gaz et une variation  $\Delta \mathcal{E}_c = \frac{1}{2} M u_s^2 - \frac{1}{2} M u_e^2$  de l'énergie cinétique du gaz, de masse molaire  $M$  et de vitesse  $u_e$  à l'entrée de la tuyère :

$$\begin{aligned} \Delta U + \Delta \mathcal{E}_c &= W + W' + Q \\ \Rightarrow U_{sm} - U_{em} + \Delta \mathcal{E}_c &= p_e V_{em} - p_s V_{sm} + W' + Q \\ \Rightarrow (U_{sm} + p_s V_{sm}) - (U_{em} + p_e V_{em}) + \Delta \mathcal{E}_c &= W' + Q \end{aligned}$$

où l'on reconnaît les expressions de l'enthalpie  $H_{sm} = U_{sm} + p_s V_{sm}$  et  $H_{em} = U_{em} + p_e V_{em}$  de la mole de gaz qui entre et qui sort de la tuyère. En outre, puisque  $W'$  et  $Q$  sont nuls, le premier principe de la thermodynamique a pour conséquence :

$$H_{sm} - H_{em} + \Delta \mathcal{E}_c = 0 \Rightarrow H_{sm} - H_{em} + \frac{1}{2} M (u_s^2 - u_e^2) = 0$$

où  $u_e^2$  peut être négligé devant  $u_s^2$ , d'après l'énoncé. Par conséquent :

$$u_s^2 = \frac{2}{M} (H_{em} - H_{sm}) \quad (53)$$

2. La variation d'enthalpie de  $n$  moles de gaz parfait ne dépend que de sa variation de température  $\Delta T = T_s - T_e$  :

$$\Delta H = H_s - H_e = n C_{pm} (T_s - T_e) = \frac{n \gamma R}{\gamma - 1} (T_s - T_e)$$

d'où se déduit la variation d'enthalpie molaire :

$$H_{em} - H_{sm} = \frac{1}{n} (H_e - H_s) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_e - T_s)$$

En outre, l'énoncé précise que, dans la tuyère, le gaz parfait subit une détente adiabatique réversible, auquel cas la loi de Laplace peut s'appliquer :

$$\begin{aligned} T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte} &\Rightarrow T_s^\gamma p_s^{1-\gamma} = T_e^\gamma p_e^{1-\gamma} \Rightarrow T_s = T_e \times \left(\frac{p_e}{p_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ &\Rightarrow H_{em} - H_{sm} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} T_e \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right] \end{aligned}$$

Ce faisant, la relation (53) devient :

$$u_s^2 = \frac{2\gamma RT_e}{M(\gamma - 1)} \times \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_s}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right]$$

3. Une mole de propergol est constituée de 0,5 mole de  $F_2$  et de 0,5 mole de  $H_2$ , dont les masses molaires  $M_{F_2} = 38 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $M_{H_2} = 2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  permettent le calcul de la masse  $M$  de chaque mole de propergol :

$$M = \frac{1}{2} (M_{F_2} + M_{H_2}) = 20 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Aussi :

$$u_s^2 = \frac{2 \times 1,4 \times 8,31 \times 4990}{20 \cdot 10^{-3} \times 0,4} \times \left[1 - 5^{-\frac{0,4}{1,4}}\right] \Rightarrow u_s = 2313 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

## ● 156 ————— Concours ENGEES

1. Soient, pendant un cycle de fonctionnement du moteur :

- $Q_c > 0$  la chaleur que le moteur reçoit de la source chaude à la température  $T_c$  ( $Q_c = 1500 \text{ J}$  pour le moteur réel) ;
- $Q_f < 0$  la chaleur que le moteur reçoit de la source froide à la température  $T_f$  ;
- $W < 0$  le travail reçu par le moteur ( $W = -500 \text{ J}$  pour le moteur réel).

Par définition, le rendement du moteur vaut :

$$\eta_{\text{mot}} = \frac{|W|}{|Q_c|} = \frac{500}{1500} \Rightarrow \eta_{\text{mot}} = 33,3\%$$

Un moteur de Carnot fonctionnant entre les mêmes sources de chaleur présente, en revanche, un rendement :

$$\eta_C = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{400}{650} = 38,4\%$$

2. Au cours d'un cycle de fonctionnement, la variation d'entropie  $\Delta S = \oint dS$  du moteur réel est nulle ( $S$  est une fonction d'état), tandis que le moteur réel échange

les quantités de chaleur  $Q_c$  et  $Q_f$  avec les sources. Par définition, l'entropie échangée par transfert thermique vaut :

$$S_{\text{éch}} = \oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}$$

et le bilan d'entropie permet d'introduire l'entropie créée  $S_{\text{cr}}$  dans le moteur :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}} = 0 \Rightarrow S_{\text{cr}} = -S_{\text{éch}} = -\left(\frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}\right)$$

En outre, l'énergie interne  $U$  du moteur ne varie pas au cours d'un cycle, auquel cas le premier principe de la thermodynamique impose :

$$\Delta U = \oint dU = 0 \Rightarrow W + Q_c + Q_f = 0 \Rightarrow Q_f = -W - Q_c$$

C'est pourquoi :

$$S_{\text{cr}} = -\frac{Q_c}{T_c} + \frac{W + Q_c}{T_f} \quad (54)$$

Application numérique :

$$S_{\text{cr}} = \frac{-500 + 1\,500}{400} - \frac{1\,500}{650} \Rightarrow S_{\text{cr}} = 0,19 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

3. Par définition, le rendement du moteur de Carnot dépend du travail  $W_C$  reçu par ce moteur :

$$\eta_C = -\frac{W_C}{Q_c} = \frac{|W_C|}{Q_c} \Rightarrow |W_C| = \eta_C Q_c = 0,384 \times 1\,500 = 576 \text{ J}$$

Aussi, la différence entre le travail  $|W_C|$  fourni par le moteur de Carnot et celui,  $|W|$ , fourni par le moteur réel vaut :

$$|W_C| - |W| = 576 - 500 = 76 \text{ J}$$

On peut s'assurer d'ores et déjà que :

$$T_f \times S_{\text{cr}} = 400 \times 0,19 = 76 \text{ J} = |W_C| - |W|$$

mais il convient de démontrer ce résultat plutôt que de le vérifier.

En vertu du résultat (54) :

$$\begin{aligned} S_{\text{cr}} + \frac{Q_c}{T_c} &= \frac{W + Q_c}{T_f} \Rightarrow W = T_f S_{\text{cr}} + Q_c \left(\frac{T_f}{T_c} - 1\right) \\ &\Rightarrow |W| = -T_f S_{\text{cr}} + Q_c \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) \end{aligned}$$

tandis que la définition du rendement du moteur de Carnot fournit :

$$\eta_C = \frac{|W_C|}{Q_c} = 1 - \frac{T_f}{T_c} \Rightarrow |W_C| = Q_c \times \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right)$$

d'où il s'ensuit que :

$$|W_C| - |W| = Q_c \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) + T_f S_{cr} - Q_c \left(1 - \frac{T_f}{T_c}\right) \Rightarrow |W_C| - |W| = T_f \times S_{cr}$$

### ● 157 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. (a) Le cylindre étant calorifugé, le gaz reçoit une chaleur  $Q = 0$ . De même, le volume total  $V_{\text{tot}}$  du cylindre étant constant, le gaz reçoit le travail global  $W = 0$ . Aussi, conformément au premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U = Q + W = 0$$

- (b) Soient  $T_A$  et  $T_B$  les températures des gaz contenus, à chaque instant, dans les compartiments  $A$  et  $B$ , où règne une pression  $p$  commune. Les énergies internes des deux gaz varient des quantités :

$$\Delta U_A = nC_{Vm} (T_A - T_{A_1}) \text{ et } \Delta U_B = nC_{Vm} (T_B - T_{B_1})$$

Or, compte tenu de la question précédente :

$$\Delta U_A + \Delta U_B = 0 \Rightarrow T_A + T_B = T_{A_1} + T_{B_1} \quad (55)$$

et notamment, en fin de transformation :  $T_A = T_2$  et  $T_B = T_2$  conduisent à :

$$2T_2 = T_{A_1} + T_{B_1} \Rightarrow T_2 = \frac{T_{A_1} + T_{B_1}}{2} = 325 \text{ K} \quad (56)$$

2. (a) L'état initial des deux gaz obéit à l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\begin{cases} p_1 V_{A_1} = nRT_{A_1} \\ p_1 V_{B_1} = nRT_{B_1} \end{cases} \Rightarrow p_1 V_{\text{tot}} = nR (T_{A_1} + T_{B_1}) \text{ car } V_{\text{tot}} = V_{A_1} + V_{B_1} \quad (57)$$

De même, l'état final des deux gaz vérifie la même équation d'état :

$$\begin{cases} p_2 V_{A_2} = nRT_2 \\ p_2 V_{B_2} = nRT_2 \end{cases} \Rightarrow p_2 V_{\text{tot}} = 2nRT_2 \text{ car } V_{\text{tot}} = V_{A_2} + V_{B_2} \quad (58)$$

Le rapport des équations (58) et (57) fournit alors :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2T_2}{T_{A_1} + T_{B_1}}$$

c'est-à-dire, en tenant compte du résultat (56) :

$$2T_2 = T_{A_1} + T_{B_1} \Rightarrow p_2 = p_1$$

- (b) À tout autre instant, l'équation d'état des gaz parfaits fournit :

$$\begin{cases} pV_A = nRT_A \\ pV_B = nRT_B \end{cases} \Rightarrow pV_{\text{tot}} = nR (T_A + T_B)$$

car la pression  $p$  est identique de part et d'autre du piston et  $V_{\text{tot}} = V_A + V_B$ .

Le rapport de cette équation par la relation (57) fournit alors :

$$\frac{pV_{\text{tot}}}{p_1 V_{\text{tot}}} = \frac{nR (T_A + T_B)}{nR (T_{A_1} + T_{B_1})} \Rightarrow p = p_1 \times \frac{T_A + T_B}{T_{A_1} + T_{B_1}}$$

Ce faisant, le résultat (55) conduit à :

$$\frac{T_A + T_B}{T_{A_1} + T_{B_1}} = 1 \Rightarrow p = p_1 = \text{cte}$$

**Δ** Le résultat :  $p_2 = p_1$  n'était pas suffisant pour conclure que la transformation est isobare, car la pression pourrait prendre des valeurs différentes de  $p_1$  au cours de la transformation. En revanche, le résultat  $p = \text{cte}$ , associé à l'information fournie par l'énoncé (la transformation est quasi statique) suffit à montrer que les gaz subissent une transformation isobare.

3. (a) L'inégalité de Clausius permet d'affirmer que :

$$\Delta S > \int_A^B \frac{\delta Q_{\text{irr}}}{T}$$

où  $\delta Q_{\text{irr}}$  désigne la chaleur élémentaire reçue par le système au cours d'une transformation irréversible, comme l'est celle étudiée ici (les gaz ne sont pas en équilibre thermique ou mécanique avec l'extérieur). C'est pourquoi :

$$\delta Q_{\text{irr}} = 0 \Rightarrow \Delta S > 0$$

(b) L'entropie d'un gaz parfait est une fonction de  $T$  et  $p$  :

$$S(T, p) = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(T^\gamma p^{1-\gamma}) + \text{cte}$$

Aussi, l'entropie de chaque compartiment varie de :

$$\Delta S_A = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left[ \left( \frac{T_2}{T_{A_1}} \right)^\gamma \times \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\gamma} \right] = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T_2}{T_{A_1}} \right)$$

et :

$$\Delta S_B = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left[ \left( \frac{T_2}{T_{B_1}} \right)^\gamma \times \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1-\gamma} \right] = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T_2}{T_{B_1}} \right)$$

en conséquence de quoi l'entropie du système varie de :

$$\Delta S = \Delta S_A + \Delta S_B = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} \ln \left( \frac{T_2^2}{T_{A_1} T_{B_1}} \right)$$

Application numérique :

$$\Delta S = \frac{1,4 \times 0,4 \times 8,31}{0,4} \ln \left[ \frac{(325)^2}{400 \times 250} \right] \Rightarrow \Delta S = 0,64 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Le signe positif de  $\Delta S$  est ainsi confirmé.

### ● 158 ————— Lycée La Martinière Mon Plaisir, Lyon

1. Soient  $U(T)$  et  $U(0) = 0 \text{ J}$  les énergies internes du gaz aux températures  $T$  et  $0 \text{ K}$ , soit  $Q$  la chaleur reçue par le gaz au cours de sa transformation adiabatique



( $Q = 0$ ) et  $W$  le travail reçu par le gaz. Le premier principe de la thermodynamique impose :

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow U(0) - U(T) = 0 + W \Rightarrow W = -U(T)$$

Aussi, le gaz fournit un travail mécanique :

$$W_f = -W = U(T)$$

2. Au cours d'une transformation adiabatique réversible  $(p_0, T_0) \rightarrow (p_1, T_1)$ , les paramètres d'état du gaz parfait suivent la loi de Laplace :

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte} \Rightarrow T_1^\gamma p_1^{1-\gamma} = T_0^\gamma p_0^{1-\gamma} \Rightarrow \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (59)$$

Application numérique :

$$T_1 = 1000 \times \left(\frac{10^5}{10^6}\right)^{2/5} \Rightarrow T_1 = 398 \text{ K}$$

L'énergie interne d'une mole de gaz parfait varie concomitamment de :

$$\begin{aligned} \Delta U &= C_{Vm} (T_1 - T_0) = \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) \\ &= \frac{8,32}{2/3} \times (398 - 1000) = -12\,082 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Aussi, conformément au premier principe de la thermodynamique, le gaz fournit un travail  $W_f$  qui vérifie :

$$\Delta U = Q - W_f \Rightarrow W_f = -\Delta U = 12\,082 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

3. Étant donné que la pression finale du gaz vaut  $p_2$  à l'équilibre, la transformation adiabatique  $(p_0, V_0, T_0) \rightarrow (p_2, V_2, T_2)$  est caractérisée par :

- sa variation d'énergie interne qui vaut, conformément à la première loi de Joule :

$$\Delta U = nC_{Vm} (T_2 - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_0) \quad (60)$$

- le travail  $W$  reçu par le gaz, sous l'influence d'une pression extérieure  $p_e = p_2$  constante :

$$\delta W = -p_e dV = -p_2 dV \Rightarrow W = -p_2 \int_{V_0}^{V_2} dV = p_2 V_0 - p_2 V_2$$

où l'équation d'état du gaz parfait impose :

$$p_2 V_2 = nRT_2 \text{ et } p_0 V_0 = nRT_0 \Rightarrow V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} \quad (61)$$

- une chaleur  $Q$ , nulle au cours de la transformation adiabatique.

Des équations (60) et (61) il découle que ( $\Delta U = W + Q$ ) :

$$\frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_0) = nRT_0 \frac{p_2}{p_0} - nRT_2 \quad (62)$$

$$\Rightarrow T_2 - T_0 = (\gamma - 1) \frac{p_2}{p_0} T_0 - (\gamma - 1) T_2 \quad (63)$$

$$\Rightarrow \gamma T_2 = \left[ 1 + (\gamma - 1) \frac{p_2}{p_0} \right] T_0 \quad (64)$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_0} = \frac{1}{\gamma} \left[ 1 + (\gamma - 1) \frac{p_2}{p_0} \right] \quad (65)$$

Application numérique :

$$T_2 = \frac{1\,000}{5/3} \left[ 1 + \left( \frac{5}{3} - 1 \right) \times \frac{10^5}{10^6} \right] \Rightarrow T_2 = 640 \text{ K}$$

De nouveau, l'énergie interne d'une mole de gaz parfait varie de :

$$\begin{aligned} \Delta U &= \frac{R}{\gamma - 1} (T_2 - T_0) = \frac{8,32}{2/3} \times (640 - 1\,000) = -4\,493 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Rightarrow W_f &= -\Delta U = 4\,493 \text{ J} \end{aligned}$$

4. • Au cours de la transformation adiabatique réversible, la courbe représentative  $\mathcal{C}_1$  de  $y = \frac{T}{T_0}$  en fonction de  $x = \frac{p}{p_0}$  est décrite par l'équation (59) :

$$y = x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

qui montre que  $\mathcal{C}_1$  passe par le point  $A(x = 1, y = 1)$ , où  $\mathcal{C}_1$  admet comme tangente une droite de pente :

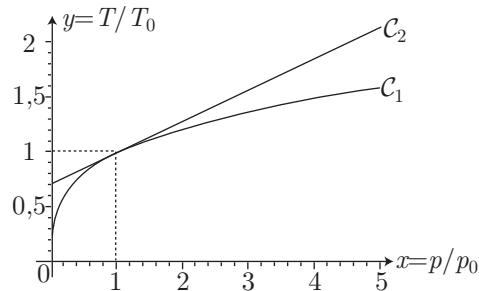
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} x^{-1/\gamma} \leq \frac{\gamma - 1}{\gamma} \text{ pour } x \geq 1$$

Aussi, bien que croissante, la courbe  $\mathcal{C}_1$  demeure sous sa tangente en  $x = 1$ .

- La courbe représentative  $\mathcal{C}_2$  associée à la transformation irréversible est décrite par l'équation :

$$y = \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} x$$

qui représente l'équation de la droite de pente  $\frac{\gamma - 1}{\gamma}$ , passant également par le point  $A(1, 1)$ .



Ces courbes montrent que pour une transformation réversible le rapport  $\frac{T}{T_0}$  est inférieur à celui d'une transformation irréversible. Or, le travail fourni au cours de ces transformations vaut :

$$W_f = -\Delta U = \frac{R}{\gamma - 1} (T_0 - T) = \frac{RT_0}{\gamma - 1} \left( 1 - \frac{T}{T_0} \right)$$

et est une fonction décroissante de  $y = \frac{T}{T_0}$ . C'est pourquoi :

$$W_f^{(\text{rév})} > W_f^{(\text{irr})}$$

signifie que c'est au cours d'une transformation réversible que le gaz fournit la plus grande quantité d'énergie mécanique.

● 159 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

- On considère un élément de la barre, de section  $\Sigma$ , compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

Un tel élément présente un volume  $\delta V = \Sigma dx$ , donc une masse  $\delta m = \rho \delta V = \rho \Sigma dx$  et par conséquent une capacité thermique :

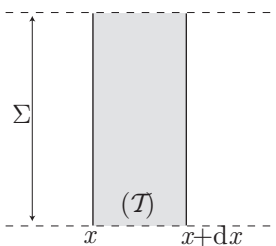
$$C = \delta m \times c = \rho c \Sigma dx$$

Pendant le retour de la barre vers son régime permanent, la température de cet élément varie de la quantité  $\Delta T_x = T_f - T(x)$ , ce qui provoque une variation de son énergie interne :

$$\Delta U_x = C \Delta T_x = \rho c \Sigma \times [T_f - T(x)] dx$$

Par conséquent, au cours de la manipulation, l'énergie interne de la barre varie de :

$$\Delta U = \rho c \Sigma \int_0^L [T_f - T(x)] dx$$



**CORRIGÉS**

où :  $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L} x + T_1$  conduit à :

$$\begin{aligned}\Delta U &= \rho c \Sigma \times \left\{ T_f \int_0^L dx - \frac{T_2 - T_1}{L} \int_0^L x dx - T_1 \int_0^L dx \right\} \\ &= \rho c \Sigma \times \left\{ T_f L - \frac{T_2 - T_1}{L} \times \frac{L^2}{2} - T_1 L \right\} \\ &= \rho c \Sigma L \times \left( T_f - \frac{T_1 + T_2}{2} \right)\end{aligned}$$

Or, puisque la barre ne reçoit aucun travail de l'extérieur et aucune chaleur, le premier principe de la thermodynamique prévoit que :

$$\Delta U = 0 \Rightarrow T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$$

2. (a) Au cours d'une transformation pendant laquelle un système, de température  $T$ , reçoit la chaleur  $\delta Q$ , la variation d'entropie du système est liée à l'entropie créée  $S_{cr}$  dans ce système :

$$\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} + S_{cr}$$

c'est-à-dire, pour un système isolé thermiquement :

$$\delta Q = 0 \Rightarrow \Delta S = S_{cr}$$

En outre, un tel système ne peut évoluer de manière réversible, puisqu'il n'est pas en équilibre thermique avec l'extérieur. Par conséquent :

$$S_{cr} > 0 \Rightarrow \Delta S > 0$$

- (b) Si un élément de barre, de capacité thermique  $C = \rho c \Sigma dx$  reçoit une chaleur  $\delta Q$  d'un thermostat à la température  $T(x)$ , avec lequel s'établit un équilibre thermique, alors l'entropie d'un tel élément varie de :

$$d^2 S_x = \frac{\delta Q}{T(x)}$$

où  $\delta Q$  est responsable de la variation de la température  $T = T(x)$  de l'élément de barre :

$$\delta Q = C dT = \rho c \Sigma dx dT \Rightarrow d^2 S_x = \rho c \Sigma dx \frac{dT}{T(x)} = \rho c \Sigma dx \frac{dT}{T}$$

Ainsi, pendant que la température  $T$  passe de  $T(x)$  à  $T_f$ , l'entropie de l'élément de barre varie de la quantité :

$$dS_x = \rho c \Sigma dx \int_{T(x)}^{T_f} \frac{dT}{T} = \rho c \Sigma dx \ln \left[ \frac{T_f}{T(x)} \right]$$

avec :

$$T(x) = ax + b \Rightarrow dS_x = \rho c \Sigma dx \times [\ln T_f - \ln(ax + b)]$$

(c) Du calcul précédent découle la variation d'entropie de la totalité de la barre :

$$\begin{aligned}\Delta S &= \rho c \Sigma \int_0^L [\ln T_f - \ln(ax + b)] dx \\ &= \rho c \Sigma \left[ \ln T_f \int_0^L dx - \int_0^L \ln(ax + b) dx \right]\end{aligned}$$

où l'énoncé renseigne sur le calcul de la dernière intégrale :

$$\begin{aligned}\Delta S &= \rho c \Sigma \left\{ L \ln T_f - \left[ \frac{ax + b}{a} \ln(ax + b) - x \right]_0^L \right\} \\ &= \rho c \Sigma \left\{ L \ln T_f - \frac{aL + b}{a} \ln(aL + b) + L + \frac{b}{a} \ln b \right\}\end{aligned}$$

Du reste, lorsque  $x = 0$  et  $x = L$ ,  $T$  prend les valeurs :

$$T(0) = b = T_1 \text{ et } T(L) = aL + b = T_2 \text{ et } a = \frac{T_2 - T_1}{L}$$

d'où il ressort que :

$$\begin{aligned}\Delta S &= \rho c \Sigma \left[ L \ln T_f - \frac{T_2 L}{T_2 - T_1} \ln T_2 + L + \frac{T_1 L}{T_2 - T_1} \ln T_1 \right] \\ &= \rho c \Sigma L \left[ 1 + \ln T_f - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \ln T_2 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln T_1 \right] \\ &= \rho c \Sigma L \left[ 1 + \ln \left( \frac{T_f}{T_2} \right) + \ln T_2 - \frac{T_2}{T_2 - T_1} \ln T_2 + \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln T_1 \right] \\ &= \rho c \Sigma L \left\{ 1 + \ln \left( \frac{T_f}{T_2} \right) - \frac{T_1}{T_2 - T_1} (\ln T_2 - \ln T_1) \right\}\end{aligned}$$

c'est-à-dire, finalement :

$$\Delta S = \rho c \Sigma L \times \left[ 1 + \ln \left( \frac{T_f}{T_2} \right) - \frac{T_1}{T_2 - T_1} \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) \right]$$

## ● 160 ————— Lycée Hoche, Versailles

### 1. Modèle de l'atmosphère isotherme

Soit un volume  $V$  contenant un nombre  $n$  de moles d'air, c'est-à-dire une masse  $m$  de gaz, sous la pression  $p$ , à la température  $T$ . L'air étant assimilé à un gaz parfait, il vérifie l'équation d'état :

$$pV = nRT = m \frac{RT}{M}$$

si  $M$  désigne sa masse molaire. Aussi, la masse volumique de l'air est définie par :

$$\rho = \frac{m}{V} = p \times \frac{M}{RT} \Rightarrow \rho_0 = p_0 \times \frac{M}{RT_0} \Rightarrow \rho = \rho_0 \times \frac{p}{p_0} \times \frac{T_0}{T} \quad (66)$$

Or, dans le modèle isotherme,  $T$  demeure égal à  $T_0 = T(z = 0)$ , ce qui simplifie l'expression de  $\rho$  :

$$\rho = p \times \frac{\rho_0}{p_0} \quad (67)$$

Ce faisant, la loi fondamentale de la statique des fluides devient :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -p \times \frac{\rho_0 g}{p_0} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} dz \quad (68)$$

$$\Rightarrow \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \int_0^z dz \quad (69)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\rho_0 g z}{p_0} \quad (70)$$

$$\Rightarrow p = p_0 \times \exp\left(-\frac{\rho_0 g z}{p_0}\right) \quad (71)$$

Conformément à la relation (67), ce résultat fournit également :

$$\rho = \rho_0 \times \frac{p}{p_0} \Rightarrow \rho = \rho_0 \times \exp\left(-\frac{\rho_0 g z}{p_0}\right)$$

Aussi,  $\rho$  vaut  $\frac{\rho_0}{2}$  à une altitude  $z = h_0$  telle que :

$$\frac{\rho_0}{2} = \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g h_0}{p_0}\right) \Rightarrow \frac{\rho_0 g h_0}{p_0} = \ln 2 \Rightarrow h_0 = \frac{p_0 \ln 2}{\rho_0 g}$$

Application numérique :

$$h_0 = \frac{10^5 \times \ln 2}{1,25 \times 9,8} = 5\,658 \text{ m}$$

## 2. Modèle de l'atmosphère adiabatique

(a) Compte tenu de la loi fournie par l'énoncé et du résultat (66) :

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \text{ et } \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{T_0}{T} \times \frac{p}{p_0} \quad (72)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^\gamma \times \left(\frac{T_0}{T}\right)^\gamma \quad (73)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\gamma} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^\gamma \quad (74)$$

$$\Rightarrow (1-\gamma) \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\gamma \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \quad (75)$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} \quad (76)$$

Ce faisant la loi fondamentale de la statique des fluides devient :

$$\begin{aligned} dp &= -\rho g dz = -\rho_0 g \times \frac{p}{p_0} \times \frac{T_0}{T} dz \\ \Rightarrow \frac{dp}{p} &= -\frac{\rho_0 g}{p_0} \times \frac{T_0}{T} dz \Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} = -\frac{\rho_0 g}{p_0} \times \frac{T_0}{T} dz \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dT}{T_0} = -\alpha dz \text{ avec } \alpha = \frac{(\gamma-1)\rho_0 g}{\gamma p_0}$$

(b) Compte tenu de la condition  $T(z=0) = T_0$ , l'équation précédente conduit à :

$$\int_{T_0}^{T(z)} dT = -\alpha T_0 \int_0^z dz \Rightarrow T(z) = T_0 (1 - \alpha z) \quad (77)$$

En outre, l'équation (75) fournit :

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = \ln\left[\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right] \Rightarrow p = p_0 \times \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

soit encore :

$$p(z) = p_0 \times (1 - \alpha z)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (78)$$

Enfin, la loi fournie par l'énoncé mène directement à :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma} \Rightarrow \rho(z) = \rho_0 \times (1 - \alpha z)^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

(c) La température ne pouvant être négative, le résultat (77) impose :

$$T(z) > 0 \Rightarrow 1 - \alpha z > 0 \Rightarrow z < \frac{1}{\alpha} = h_1 \text{ avec } h_1 = \frac{\gamma p_0}{(\gamma-1)\rho_0 g}$$

Application numérique :

$$h_1 = \frac{1,4 \times 10^5}{0,4 \times 1,25 \times 9,8} \Rightarrow h_1 = 28\,571 \text{ m}$$

(d) Les modèles de l'atmosphère isotherme et adiabatique coïncident à condition que les expressions (71) et (78) de  $p(z)$  soient équivalentes, ce qui se traduit par :

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g}{p_0} z\right) = p_0 \times (1 - \alpha z)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

avec :

$$\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma} \times \frac{\rho_0 g}{p_0} \Rightarrow \frac{\rho_0 g}{p_0} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \alpha \quad (79)$$

$$\Rightarrow \exp\left(-\frac{\gamma}{\gamma-1} \alpha z\right) = (1 - \alpha z)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (80)$$

Posons désormais :

$$x = \frac{-\gamma\alpha z}{\gamma - 1} \text{ et } n = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \Rightarrow -\alpha z = \frac{\gamma - 1}{\gamma} x = \frac{x}{n}$$

afin de présenter l'équation (80) sous la forme :

$$e^x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Pour cette équation, l'énoncé rappelle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

ce qui signifie que  $n = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$  tend vers l'infini, c'est-à-dire que  $\gamma = 1$ .

Remarque – Ce résultat peut être confirmé par les équations qui décrivent les modèles isotherme et adiabatique :

$$\frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0}{p_0} \text{ pour le modèle isotherme ;}$$

$$p = p_0 \times \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma \text{ pour le modèle adiabatique.}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \text{ et } \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

Ces deux modèles sont évidemment équivalents pour  $\gamma = 1$ .

### 3. Modèle de l'atmosphère standard

L'évolution de la température dans les modèles adiabatique et *standard* de l'atmosphère :

$$T(z) = T_0 - \alpha T_0 z \text{ et } T(z) = T_0 - \lambda z$$

est identique, à condition que :

$$\begin{aligned} \lambda &= \alpha T_0 = \frac{(\gamma - 1) \rho_0 g}{\gamma p_0} T_0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\gamma} = \frac{\lambda p_0}{\rho_0 g T_0} \\ \Rightarrow \frac{1}{\gamma} &= 1 - \frac{\lambda p_0}{\rho_0 g T_0} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que  $\gamma$  adopte la valeur :

$$\gamma_s = \frac{1}{1 - \frac{\lambda p_0}{\rho_0 g T_0}}$$

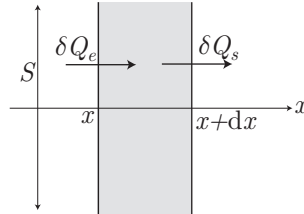
Application numérique :

$$\gamma_s = \frac{1}{1 - \frac{6,5 \cdot 10^{-3} \times 10^5}{1,25 \times 9,8 \times 290}} \Rightarrow \gamma_s = 1,22$$



## ● 161 ————— Concours de la Banque Agro

1. Considérons une portion du vitrage comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  :



Pendant une durée  $dt$ , cette portion :

- reçoit, en  $x$ , une chaleur  $\delta Q_e$  telle que :

$$\frac{\delta Q_e}{dt} = j(x, t) \times S \Rightarrow \delta Q_e = j(x, t) \times S dt$$

- perd en  $x + dx$ , une chaleur  $\delta Q_s$  qui vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_s}{dt} &= j(x + dx, t) \times S = \left[ j(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x} dx \right] \times S \\ \Rightarrow \delta Q_s &= \left[ j(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x} dx \right] \times S dt \end{aligned}$$

Ainsi, cette portion reçoit globalement la chaleur :

$$\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s = -\frac{\partial j}{\partial x} \times S dx \times dt$$

c'est-à-dire, en désignant par  $\delta V$  le volume de cette portion de vitrage :

$$\delta Q = -\frac{\partial j}{\partial x} \times \delta V dt$$

Si  $\delta m$  représente la masse de la portion de vitrage, la chaleur  $\delta Q$  reçue est responsable de son augmentation de température pendant  $dt$  :

$$\delta Q = \delta m c dT = \delta m c \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Ce faisant :

$$\delta m c \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial j}{\partial x} \times \delta V \times dt \Rightarrow \frac{\delta m}{\delta V} c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

En remarquant que  $\frac{\delta m}{\delta V}$  représente la masse volumique  $\mu$  de la vitre et en appliquant la loi de Fourier, on obtient finalement :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \Rightarrow \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

soit encore :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \text{ avec } D = \frac{\lambda}{\mu c}$$

2. En régime stationnaire,  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  montre qu'il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = a \Rightarrow T(x) = ax + b$$

qui rendent compte des conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(0) = T_2 \\ T(e) = T_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = T_2 \\ T_1 = ae + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = T_2 \\ a = \frac{T_1 - T_2}{e} \end{cases}$$

d'où il découle que :

$$T(x) = \frac{T_1 - T_2}{e} x + T_2$$

Par définition, le flux thermique  $\phi$  vaut  $j \times S$ , c'est-à-dire compte tenu de la loi de Fourier :

$$\phi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \phi = \lambda S \times \frac{T_2 - T_1}{e}$$

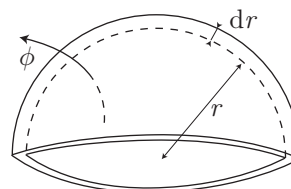
Application numérique :

$$\phi = 1 \times 6,5 \times \frac{315 - 300}{5 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \phi = 19,5 \text{ kW}$$

## ● 162 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Considérons une coquille hémisphérique de glace, comprise entre les rayons  $r$  et  $r + dr$ .

Un flux  $\phi$  de chaleur traverse une longueur  $dr$  de glace (vers l'extérieur), sur une surface  $S(r) = \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2$  (surface d'un hémisphère de rayon  $r$ ). Par conséquent, la résistance thermique  $\delta R_{\text{th}}$  de cette coquille élémentaire vaut :



$$\delta R_{\text{th}} = \frac{dr}{2\pi\lambda r^2}$$

Pour reconstituer la totalité de l'*igloo*, il suffit de superposer (en série) les coquilles élémentaires, dont les rayons varient de  $R$  à  $R + e$  ( $e$  étant l'épaisseur de la glace). La résistance thermique résultante vaut :

$$\begin{aligned} R_{\text{th}} &= \int_R^{R+e} \frac{dr}{2\pi\lambda r^2} = -\frac{1}{2\pi\lambda} \left[ \frac{1}{R+e} - \frac{1}{R} \right] \\ &\Rightarrow R_{\text{th}} = \frac{e}{2\pi\lambda R(R+e)} \end{aligned}$$

Pour isoler efficacement les explorateurs de l'extérieur, la résistance thermique aura intérêt à être la plus grande possible :

plus  $R$  est petit, meilleure est l'isolation thermique assurée par l'*igloo*.

2. Soit  $\delta Q_s$  la chaleur qui traverse l'igloo pendant  $dt$ , le flux associé est défini par :

$$\phi = \frac{\delta Q_s}{dt}$$

et permet de définir la résistance thermique à partir de la différence de température  $T_i - T_e$  entre l'intérieur et l'extérieur de l'igloo :

$$T_i - T_e = \phi \times R_{th}$$

En outre, si  $P = 4 \times 50 = 200$  W représente la puissance thermique dégagée par les quatre personnes, une chaleur  $\delta Q_p$  est produite dans l'igloo pendant  $dt$ , telle que :

$$P = \frac{\delta Q_p}{dt} \Rightarrow \delta Q_p = P dt$$

Enfin, en régime stationnaire,  $\delta Q_p = \delta Q_s$ , sans quoi la température  $T_i$  varierait. C'est pourquoi :

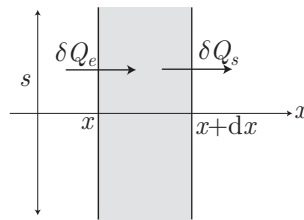
$$\begin{aligned} \phi = \frac{\delta Q_s}{dt} = \frac{\delta Q_p}{dt} = P &\Rightarrow T_i - T_e = P \times R_{th} \\ &\Rightarrow T_i = T_e + \frac{P \times e}{2\pi\lambda R \times (R + e)} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$T_i = -10 + \frac{200 \times 0,5}{2\pi \times 1 \times 1 \times 1,5} \Rightarrow T_i = -0,6^\circ\text{C}$$

## ● 163 ————— Banque de la Filière PT

1. Soit une tranche de matériau de section droite  $s$  et comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  :



On note  $J$  la densité de courant thermique à partir de laquelle s'expriment :

- la chaleur  $\delta Q_e$  qui entre dans la tranche en  $x$  :

$$\frac{\delta Q_e}{dt} = J(x, t) s \Rightarrow \delta Q_e = J(x, t) s dt$$

- la chaleur  $\delta Q_s$  qui sort de la tranche en  $x + dx$  :

$$\frac{\delta Q_s}{dt} = J(x + dx, t) s = \left[ J(x, t) + \frac{\partial J}{\partial x} dx \right] s \Rightarrow \delta Q_s = \left[ J(x, t) + \frac{\partial J}{\partial x} dx \right] s dt$$

Le bilan thermique établit qu'une chaleur  $\delta Q$  entre dans la tranche de volume  $\delta V = s dx$  :

$$\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s = -\frac{\partial J}{\partial x} s dx dt = -\frac{\partial J}{\partial x} \delta V dt$$

qui est responsable de son augmentation  $dT$  de température :

$$\delta Q = C dT = \rho \delta V c dT = \rho c \delta V \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

C'est pourquoi :

$$\rho c \delta V \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial J}{\partial x} \delta V dt \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

Enfin, la loi de Fourier introduit la proportionnalité de  $J$  et de  $\frac{\partial T}{\partial x}$  :

$$J = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (81)$$

2. (a) L'énoncé propose :

$$T(x, t) = T_0 + \operatorname{Re} \left\{ A e^{j\omega t} \times e^{-(1+j)\frac{x}{d}} \right\} \quad (82)$$

d'où peut se définir l'image complexe :

$$\underline{T} = T_0 + A e^{j\omega t} e^{-(1+j)\frac{x}{d}} \Rightarrow T(x, t) = \operatorname{Re} \{ \underline{T} \}$$

qui s'écrit aussi :

$$\underline{T} = T_0 + A e^{-x/d} e^{j(\omega t - \frac{x}{d})}$$

de sorte que :

$$T(x, t) = \operatorname{Re} \{ \underline{T} \} = T_0 + A e^{-x/d} \cos \left( \omega t - \frac{x}{d} \right)$$

Or, il est physiquement inconcevable que  $\lim_{x \rightarrow \infty} [T(x, t)] = \infty$ , ce qui impose :

$$d > 0$$

(b) En notation complexe, l'équation de propagation de la chaleur (81) devient :

$$\rho c \frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2}$$

où :

$$\frac{\partial \underline{T}}{\partial t} = j\omega A e^{j\omega t} e^{-(1+j)\frac{x}{d}} \text{ et } \frac{\partial^2 \underline{T}}{\partial x^2} = \frac{(1+j)^2}{d^2} \times A e^{j\omega t} e^{-(1+j)\frac{x}{d}}$$

conduisent à :

$$\rho c \times j\omega = \frac{\lambda}{d^2} \times (1+j)^2 = \frac{2\lambda}{d^2} j \Rightarrow \rho c \omega = \frac{2\lambda}{d^2} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{2\lambda}{\rho c \omega}}$$

Application numérique :

$$d = \sqrt{\frac{2 \times 440}{8960 \times 320 \times 25}} \Rightarrow d = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 3,5 \text{ mm}$$

- (c) Si  $e \ll d$  et étant donné que  $x < e \Rightarrow x \ll d$ , le rapport  $\frac{x}{d}$  qui apparaît dans l'expression (82) peut être simplifié, auquel cas :

$$T(x, t) \simeq T_0 + \text{Re} [A e^{j\omega t}] \Rightarrow T(x, t) \simeq T_0 + A \cos(\omega t) = T(0, t)$$

Dans ces conditions, le matériau peut être considéré comme parfaitement conducteur thermique.

Typiquement, dans le cas du cuivre, il suffirait de choisir :

$$e = 0,35 \text{ mm} \Rightarrow d \ll e$$

### ● 164 ————— Concours Commun Polytechnique

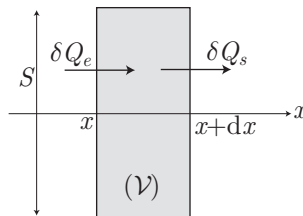
1. (a) Soit  $\delta Q$  la chaleur qui traverse, pendant  $dt$ , une surface  $dS$ , la densité de courant thermique  $J(x, t)$  représente le flux thermique par unité de surface :

$$\frac{1}{dS} \frac{\delta Q}{dt} = J(x, t) \Rightarrow \frac{\delta Q}{dt} = J(x, t) dS \quad (83)$$

La loi de Fourier précise, quant à elle, que  $\vec{J}(x, t)$  est proportionnel à la variation de température :

$$\vec{J}(x, t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{e}_x \Rightarrow J(x, t) = -\lambda \frac{\partial J}{\partial x} \quad (84)$$

- (b) Considérons un élément de volume ( $\mathcal{V}$ ), de section  $S$  et compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  :



Pendant la durée  $dt$ , la chaleur  $\delta Q_e$  entre dans ( $\mathcal{V}$ ) par la face située en  $x$  et la chaleur  $\delta Q_s$  sort de ( $\mathcal{V}$ ) par la face située en  $x + dx$ . C'est pourquoi la loi (83) permet de poser :

$$\delta Q_e = J(x, t) S dt$$

et :

$$\delta Q_s = J(x + dx, t) S dt = \left[ J(x, t) + \frac{\partial J}{\partial x} dx \right] S dt$$

Le bilan thermique :

$$\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s = -\frac{\partial J}{\partial x} dx S dt$$

est responsable de la variation de température de ( $\mathcal{V}$ ) pendant  $dt$  :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Or, en notant  $d\tau = S dx$  le volume de ( $\mathcal{V}$ ), sa capacité thermique vaut :

$$C = \rho S c dx$$

liée à  $\delta Q$  et à  $dT$  :

$$\delta Q = C dT \Rightarrow \rho S c dx \frac{\partial T}{\partial t} dt = - \frac{\partial J}{\partial x} S dx dt \quad (85)$$

$$\Rightarrow \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial J}{\partial x} \quad (86)$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la loi de Fourier (84) :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

(c) En régime stationnaire,  $T$  demeure constant, de sorte que :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Il existe donc deux constantes  $a$  et  $b$  telles que :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = a \Rightarrow J(x) = ax + b$$

dont les expressions découlent des conditions aux limites :

$$\begin{cases} T(0) = T_0 \\ T(L) = T_L \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_0 = b \\ T_L = aL + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = T_0 \\ a = \frac{T_L - T_0}{L} \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$T(x) = \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0$$

## 2. Résistance thermique due à la conduction

(a) Par définition, la puissance thermique s'exprime par :

$$P_{\text{th}} = \frac{\delta Q}{dt} = J(x) S \quad (87)$$

où  $J(x)$  vérifie la loi de Fourier (84) :

$$\begin{aligned} J(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} &= -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{T_L - T_0}{L} x + T_0 \right] \Rightarrow J(x) = \frac{\lambda}{L} (T_0 - T_L) \\ \Rightarrow P_{\text{th}} &= \frac{\lambda S}{L} (T_0 - T_L) \end{aligned}$$

Par conséquent, la résistance thermique s'exprime par :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_0 - T_L}{P_{\text{th}}} \Rightarrow R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}$$

Par analogie, en électrocinétique,  $P_{\text{th}} = \frac{\delta Q}{dt}$  apparaît comme un courant :  $i = \frac{\delta q}{dt}$ , tandis que la différence de température  $T_L - T_0$  a pour analogue une différence de potentiels :  $V_1 - V_2 = U_{12}$ . La résistance électrique :

$$R_{\text{élec}} = \frac{U_{12}}{i} = \frac{V_1 - V_2}{i}$$

est par conséquent l'analogie électrocinétique de la résistance thermique :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_L - T_0}{P_{\text{th}}}$$

L'unité de  $R_{\text{th}}$  s'obtient à l'aide de l'équation aux dimensions :

$$[R_{\text{th}}] = \frac{[T_L - T_0]}{[P_{\text{th}}]} \Rightarrow [R_{\text{th}}] = \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$$

(b) Conformément à la loi (87) :  $P_{\text{th}} = J(x) S$  et à la loi (86) :

$$\frac{\partial J}{\partial x} = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial P_{\text{th}}}{\partial x} = S \frac{\partial J}{\partial x} = 0$$

ce qui montre que  $P_{\text{th}}$  est indépendant de  $x$ . Aussi, les résistances thermiques des corps  $A_1$  et  $A_2$  sont définies par :

$$\begin{cases} T_0 - T_1 = R_{\text{th}_1} P_{\text{th}} \\ T_1 - T_2 = R_{\text{th}_2} P_{\text{th}} \end{cases} \Rightarrow T_0 - T_2 = (R_{\text{th}_1} + R_{\text{th}_2}) P_{\text{th}}$$

Or, la résistance thermique de l'ensemble des deux corps vérifie :

$$T_0 - T_2 = R_{\text{th}} P_{\text{th}} \Rightarrow R_{\text{th}} = R_{\text{th}_1} + R_{\text{th}_2}$$

(c) Les corps  $A_1$  et  $A_2$  sont respectivement traversés par les puissances thermiques :

$$P_{\text{th}_1} = \frac{T_0 - T_1}{R_{\text{th}_1}} \text{ et } P_{\text{th}_2} = \frac{T_0 - T_1}{R_{\text{th}_2}}$$

de sorte que l'ensemble  $\{A_1 + A_2\}$  est traversé par la puissance thermique résultante :

$$\begin{aligned} P_{\text{th}} &= P_{\text{th}_1} + P_{\text{th}_2} = (T_0 - T_1) \times \left( \frac{1}{R_{\text{th}_1}} + \frac{1}{R_{\text{th}_2}} \right) \\ \Rightarrow P_{\text{th}} &= \frac{R_{\text{th}_1} + R_{\text{th}_2}}{R_{\text{th}_1} R_{\text{th}_2}} \times (T_0 - T_1) \end{aligned}$$

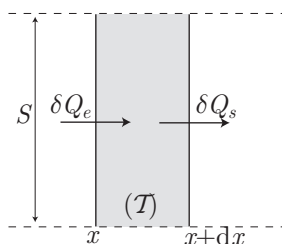
auquel cas la résistance thermique de cet ensemble vaut :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_0 - T_1}{P_{\text{th}}} \Rightarrow R_{\text{th}} = \frac{R_{\text{th}_1} \times R_{\text{th}_2}}{R_{\text{th}_1} + R_{\text{th}_2}}$$

## ● 165 ————— Concours de l'École de l'air

### 1. Étude thermique d'un simple vitrage

- (a) Considérons une tranche ( $\mathcal{T}$ ) de vitrage, de section droite  $S$ , comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , à la température  $T(x, t)$ .



En notant  $\phi(x, t)$  le flux thermique par unité de surface, la chaleur  $\delta Q$  qui traverse une surface  $S$ , pendant  $dt$  est définie par :

$$\frac{\delta Q}{dt} = \phi(x, t) \times S \Rightarrow \delta Q = \phi(x, t) \times S dt$$

Aussi, à l'abscisse  $x$ , une chaleur  $\delta Q_e$  pénètre dans ( $\mathcal{T}$ ) :

$$\delta Q_e = \phi(x, t) \times S dt$$

tandis qu'une chaleur  $\delta Q_s$  sort par la face située à l'abscisse  $x + dx$  :

$$\delta Q_s = \phi(x + dx, t) \times S dt = \left[ \phi(x, t) + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right] \times S dt$$

Ce faisant, pendant  $dt$ , ( $\mathcal{T}$ ) reçoit globalement une chaleur :

$$\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \times S dx dt = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \tau dt$$

où  $\delta \tau = S dx$  désigne le volume de ( $\mathcal{T}$ ). Or, cette chaleur est responsable de l'augmentation  $dT$  de la température de ( $\mathcal{T}$ ) :

$$\delta Q = C dT = C \frac{\partial T}{\partial t} dt = \mu c \delta \tau \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

Par conséquent :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} \delta \tau dt = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \delta \tau dt \Rightarrow \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

En outre, la loi de Fourier indique que :

$$\phi = -\lambda_v \frac{\partial T}{\partial x} \quad (88)$$

ce qui conduit finalement à l'équation de conduction thermique :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_v \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$



- (b) Le régime permanent est atteint lorsque la température  $T$  ne varie plus dans le temps, ce qui a pour conséquence l'existence de deux constantes  $a$  et  $b$  telles que :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial x} = a \Rightarrow T(x) = ax + b$$

Or, les conditions aux limites :  $T(0) = T_i$  et  $T(e) = T_e$  imposent :

$$\begin{cases} T_i = b \\ T_e = ae + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = T_i \\ a = \frac{T_e - T_i}{e} \end{cases} \Rightarrow T(x) = \frac{T_e - T_i}{e} x + T_i$$

- (c) La loi de Fourier (88) fournit directement :

$$\phi = -\lambda_v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{T_e - T_i}{e} x + T_i \right) \Rightarrow \phi = \lambda_v \frac{T_i - T_e}{e} \quad (89)$$

- (d) En régime permanent,  $\phi$  ne dépend ni de  $x$  ni de  $t$  (comme le montre le résultat précédent). Par suite, les quantités de chaleur qui traversent les surfaces situées aux abscisses  $x$  et  $x + dx$  :

$$\delta Q_e = \phi(x, t) \times S dt = \phi S dt \text{ et } \delta Q_s = \phi(x + dx) \times S dt = \phi S dt$$

sont identiques et désignent alors la chaleur  $\delta Q_p$  perdue par le local pendant  $dt$  :

$$\delta Q_p = \phi S dt = \frac{\lambda_v S}{e} (T_i - T_e) dt$$

En outre, chaque radiateur, de puissance  $P_r = 2 \text{ kW}$  fournit au local une chaleur  $\delta Q_1 = P_r dt$  pendant  $dt$ . Aussi,  $n$  radiateurs fournissent la chaleur  $\delta Q_n = nP_r dt$ . Or, la température du local étant constante, il s'ensuit que :

$$\delta Q_n = \delta Q_p \Rightarrow nP_r dt = \frac{\lambda_v S}{e} (T_i - T_e) dt \Rightarrow n = \frac{\lambda_v S}{e P_r} (T_i - T_e) \quad (90)$$

*Application numérique :*

$$n = \frac{0,8 \times 12}{4 \cdot 10^{-3} \times 2 \cdot 10^3} \times (20 - 0) \Rightarrow n = 24 \text{ radiateurs.}$$

Une telle quantité de radiateurs dans un local de  $60 \text{ m}^2$  présenterait d'inévitables problèmes esthétiques. Il conviendrait alors d'installer des radiateurs plus puissants.

- (e) Avec une différence de température  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ , le local subit une perte thermique :

$$\delta Q_p = \frac{\lambda_v S}{e} \Delta T dt$$

tandis qu'avec une différence de température  $\Delta T' = 19^\circ\text{C}$ , les pertes thermiques s'élèveraient à :

$$\delta Q'_p = \frac{\lambda_v S}{e} \Delta T' dt$$

ce qui représente une différence absolue :

$$\delta Q_p - \delta Q'_p = \frac{\lambda_v S}{e} (\Delta T - \Delta T') dt$$

c'est-à-dire une économie relative de :

$$\frac{\delta Q_p - \delta Q'_p}{\delta Q_p} = \frac{\Delta T - \Delta T'}{\Delta T}$$

Application numérique :

$$\frac{\delta Q_p - \delta Q'_p}{\delta Q_p} = \frac{20 - 19}{20} = 5\%$$

(f) Par analogie avec l'électrocinétique, la résistance thermique est définie en remplaçant :

- la différence de potentiel  $\Delta V$  par la différence de température  $\Delta T = T_i - T_e$  ;
- le courant électrique  $I$  par le courant de chaleur :  $\phi S = \frac{\delta Q_p}{dt}$  .

Ce faisant, la résistance thermique sera définie par :

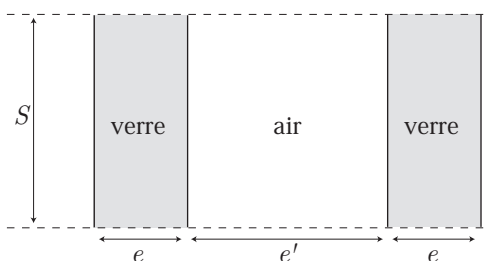
$$R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi S} = \frac{T_i - T_e}{\phi S} \quad (91)$$

Compte tenu de l'identité (89), la résistance thermique de la surface vitrée est donnée par :

$$\phi = \frac{\lambda_v (T_i - T_e)}{e} \Rightarrow R_v = \frac{e}{\lambda_v S}$$

## 2. Double vitrage et isolation

(a) Le double vitrage est composé d'une succession « en série » de trois couches de matériaux.



En notant  $R_a = \frac{e'}{\lambda_a S}$  la résistance thermique de l'air, celle du double vitrage vaut :

$$R = R_v + R_a + R_v \Rightarrow R = \left( \frac{2e}{\lambda_v} + \frac{e'}{\lambda_a} \right) \times \frac{1}{S}$$

Application numérique :

$$R = \left( \frac{2 \times 4 \cdot 10^{-3}}{0,8} + \frac{10 \cdot 10^{-3}}{0,025} \right) \times \frac{1}{12} \Rightarrow R = 0,034 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$$

Compte tenu du résultat (91), la résistance thermique dépend du flux de chaleur  $\phi = \frac{\delta Q_p}{dt}$  qui traverse le double vitrage :

$$R = \frac{T_i - T_e}{\phi S} \Rightarrow \phi = \frac{\delta Q_p}{dt} = \frac{T_i - T_e}{SR} \quad (92)$$

Par suite,  $n'$  radiateurs de puissance totale  $n' P_r = \frac{\delta Q_r}{dt}$  sont nécessaires pour maintenir la température du local à  $20^\circ\text{C}$  :

$$\frac{\delta Q_r}{dt} = \frac{\delta Q_p}{dt} \Rightarrow n' P_r = \frac{T_i - T_e}{SR} \Rightarrow n' = \frac{T_i - T_e}{SR P_r}$$

Application numérique :

$$n' = \frac{20 - 0}{12 \times 0,034 \times 2.10^3} \Rightarrow n' = 0,024$$

Par conséquent, un seul radiateur de puissance 2000 W est nécessaire pour maintenir le local à la température  $T_i = 20^\circ\text{C}$  (ce radiateur ne fonctionnant d'ailleurs pas à pleine puissance).

Un abaissement de la température de  $1^\circ\text{C}$  se traduit, pour un simple vitrage, par l'emploi de  $n''$  radiateurs tels que :

$$n'' = \frac{\lambda_v S}{e P_r} \Delta T'$$

tandis que  $n = 24$  provient de la relation (90) :

$$n = \frac{\lambda_v S}{e P_r} \Delta T \Rightarrow \frac{n''}{n} = \frac{\Delta T'}{\Delta T} = \frac{19}{20} \Rightarrow n'' = \frac{19}{20} \times 24 = 22,8$$

Aussi, la solution par abaissement de la température, évoquée en 1, se traduit par une économie d'un radiateur, tandis que le double vitrage permet de se dispenser de 23 radiateurs !

(b) Le flux thermique par unité de surface est donné par les lois (89) et (92) :

$$\phi = \frac{\lambda_v}{e} (T_i - T_e) \text{ pour le simple vitrage}$$

$$\phi = \frac{1}{SR} (T_i - T_e) \text{ pour le double vitrage.}$$

C'est pourquoi on pourra écrire :  $\phi = k (T_i - T_e)$ , avec :

- pour le simple vitrage :

$$k_1 = \frac{\lambda_v}{e} = \frac{0,8}{4.10^{-3}} \Rightarrow k_1 = 200 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

- pour le double vitrage :

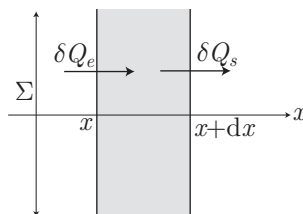
$$k_2 = \frac{1}{SR} = \frac{1}{12 \times 0,034} \Rightarrow k_2 = 2,45 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

Pour que la perte thermique  $\phi = k (T_i - T_e)$  soit la plus faible possible, il faut donc que  $k$  soit le plus petit possible (pour une différence de température  $\Delta T = T_i - T_e$  donnée). La valeur de  $k_2$ , bien que très inférieure à celle de  $k_1$ , est toutefois du même ordre de grandeur que celle des matériaux de construction. Notamment, pour les trois derniers matériaux, les valeurs de  $k$  sont inférieures à celle de  $k_2$ , ce qui signifie aussi que les pertes thermiques sont plus importantes à travers les vitres qu'à travers les murs ; une isolation supplémentaire de ces murs est superflue.

## ● 166 ————— Concours ESIM

### 1. Bilan énergétique

- (a) Considérons une tranche de conducteur située entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ , de section droite  $\Sigma$  et donc de volume  $\delta V = \Sigma dx$  et de masse  $\delta m = \rho \delta V$ .



Pendant  $dt$ , cette tranche :

- reçoit une chaleur  $\delta Q_e$  en  $x$ , telle que :

$$\frac{\delta Q_e}{dt} = j_Q(x, t) \Sigma \Rightarrow \delta Q_e = j_Q(x, t) \Sigma dt$$

- perd une chaleur  $\delta Q_s$  en  $x + dx$ , telle que :

$$\frac{\delta Q_s}{dt} = j_Q(x + dx, t) \Sigma = \left[ j_Q(x, t) + \frac{\partial j_Q}{\partial x} dx \right] \Sigma$$

$$\Rightarrow \delta Q_s = \left[ j_Q(x, t) + \frac{\partial j_Q}{\partial x} dx \right] \Sigma dt$$

Par conséquent, pendant  $dt$ , la tranche de conducteur reçoit une chaleur globale :

$$\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} \Sigma dx dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} \delta V dt$$

qui provoque une augmentation de sa température  $T(x, t)$  :

$$\delta Q = \delta m c dT = \delta m c \frac{\partial T}{\partial t} dt = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} \delta V dt \text{ avec } \delta m = \rho \delta V$$

c'est-à-dire :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} \quad (93)$$

- (b) Selon la loi de Fourier,  $T(x, t)$  vérifie :

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \Rightarrow j_Q \vec{u}_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x \Rightarrow j_Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad (94)$$

Ce faisant, l'équation (93) conduit à :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \text{ avec } D = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (95)$$

L'unité de  $D$  peut se déduire de cette équation :

$$[D] \times \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] = \left[ \frac{\partial T}{\partial t} \right] \Rightarrow [D] \times \text{K} \cdot \text{m}^{-2} = \text{K} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow [D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

- (c) Soient  $\delta Q_1 = C dT_1$  et  $\delta Q_2 = C dT_2$  les chaleurs reçues par les sources  $S_1$  et  $S_2$  pendant  $dt$ . Ces définitions conduisent à :

$$\frac{dT_1}{dt} = \frac{1}{C} \frac{\delta Q_1}{dt} \text{ et } \frac{dT_2}{dt} = \frac{1}{C} \frac{\delta Q_2}{dt}$$

Notamment, lorsque  $C$  tend vers l'infini :

$$\frac{dT_1}{dt} = 0 \text{ et } \frac{dT_2}{dt} = 0 \text{ car } \lim_{C \rightarrow \infty} \left( \frac{\delta Q_1}{dt} \right) \neq \infty \text{ et } \lim_{C \rightarrow \infty} \left( \frac{\delta Q_2}{dt} \right) \neq \infty$$

ce qui suffit à prouver que les températures  $T_1$  et  $T_2$  sont constantes.

En régime permanent, la température de la barre ne varie pas dans le temps ( $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ), ce qui simplifie l'équation (95) :  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ . Il existe par conséquent deux constantes  $a$  et  $b$  telles que :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = a \Rightarrow T(x) = ax + b$$

qui sont ajustées aux conditions aux limites :  $T(0) = T_1$  et  $T(L) = T_2$  :

$$\begin{cases} T_1 = b \\ T_2 = aL + T_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = T_1 \\ a = \frac{T_2 - T_1}{L} \end{cases} \Rightarrow T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \quad (96)$$

Soit  $\phi = j_Q \Sigma$  le flux thermique qui traverse la barre, où  $j_Q$  vérifie la loi (93) :

$$\frac{\partial j_Q}{\partial x} = -\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow j_Q = \text{cte}$$

ce qui prouve que  $\phi$  adopte une valeur indépendante de  $x$ . Ce faisant, la résistance thermique  $R_{\text{th}}$  est définie par :

$$R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\phi} \quad (97)$$

Compte tenu de l'identité (94), on trouve ainsi :

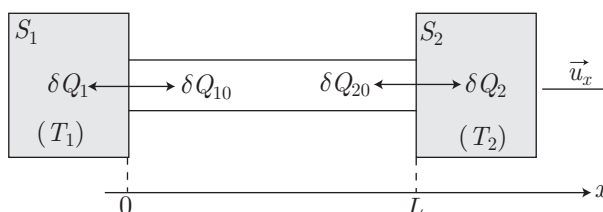
$$\begin{aligned} j_Q &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \right) = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \\ &\Rightarrow \phi = j_Q \Sigma = (T_1 - T_2) \times \frac{\lambda \Sigma}{L} \\ &\Rightarrow R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda \Sigma} \end{aligned}$$

(d) Étant donnée de la loi de Fourier (94) :

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda} j_Q$$

lorsque la conductivité thermique  $\lambda$  est infinie,  $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$  montre que la température est uniforme à l'intérieur des sources  $S_1$  et  $S_2$ .

On notera dorénavant  $\delta Q_{10} = -\delta Q_1$  et  $\delta Q_{20} = -\delta Q_2$  les chaleurs transmises par  $S_1$  et  $S_2$  à la barre pendant  $dt$ .



La barre reçoit par conséquent la chaleur :

$$\delta Q = \delta Q_{10} + \delta Q_{20}$$

Les hypothèses concernant les capacités thermiques de la barre et des sources permettent, en outre, de prédire que la barre adopte un régime pseudo-stationnaire tandis que les températures des sources varient lentement.

(e) Pour que la barre demeure en régime pseudo-stationnaire, il faut que  $\delta Q = 0$ , avec :

$$\begin{cases} \delta Q_{10} = -\delta Q_1 = -C dT_1 \\ \delta Q_{20} = -\delta Q_2 = -C dT_2 \end{cases} \Rightarrow dT_1 + dT_2 = 0 \Rightarrow \frac{dT_1}{dt} = -\frac{dT_2}{dt}$$

Cette équation montre que :

$$\frac{d}{dt} (T_1 + T_2) = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 = K$$

où la constante  $K$  s'obtient à partir des valeurs initiales de  $T_1$  et  $T_2$  :

$$T_{10} + T_{20} = K \Rightarrow T_1 + T_2 = T_{10} + T_{20} \Rightarrow T_1 = T_{10} + T_{20} - T_2$$

Or, conformément à la définition (97) de la résistance thermique :

$$\phi \times R_{th} = T_1 - T_2 = T_{10} + T_{20} - 2T_2$$

où le flux thermique s'exprime, notamment en  $L$ , par :

$$\phi = \frac{\delta Q_2}{dt} = C \frac{dT_2}{dt} \Rightarrow R_{th} C \frac{dT_2}{dt} + 2T_2 = T_{10} + T_{20}$$

En notant  $\tau = R_{th} C = \frac{LC}{\lambda \Sigma}$ , cette équation différentielle :

$$\tau \frac{dT_2}{dt} + 2T_2 = T_{10} + T_{20}$$

admet :

- une solution  $T_{2_s}$  de l'équation dépourvue de second membre :

$$\tau \frac{dT_{2_s}}{dt} + 2T_{2_s} = 0$$

dont l'équation caractéristique :  $\tau X + 2 = 0 \Rightarrow X = -\frac{2}{\tau}$  révèle que :

$$T_{2_s} = A e^{-2t/\tau} \quad (A = \text{constante})$$

- une solution  $T_{2_h}$  homogène au second membre (constant), c'est-à-dire constante :

$$\underbrace{\tau \frac{dT_{2_h}}{dt}}_{=0} + 2T_{2_h} = T_{10} + T_{20} \Rightarrow T_{2_h} = \frac{T_{10} + T_{20}}{2}$$

Par suite, la solution générale de l'équation différentielle :

$$T_2 = T_{2_h} + T_{2_s} = \frac{T_{10} + T_{20}}{2} + A e^{-2t/\tau}$$

présente une constante  $A$  dont l'expression se déduit de la valeur initiale de  $T_2$  :

$$T_{20} = \frac{T_{10} + T_{20}}{2} + A \Rightarrow A = \frac{T_{20} - T_{10}}{2}$$

Il s'ensuit que :

$$T_2 = \frac{T_{10} + T_{20}}{2} + \frac{T_{20} - T_{10}}{2} e^{-2t/\tau}$$

tandis que :

$$T_1 = T_{10} + T_{20} - T_2 \Rightarrow T_1 = \frac{T_{10} + T_{20}}{2} + \frac{T_{10} - T_{20}}{2} e^{-2t/\tau}$$

## 2. Bilan entropique

- (a) Pendant une durée  $dt$ , la tranche reçoit globalement la chaleur :

$$\delta Q = \Sigma dx \rho c dT$$

avec :

$$dT = \frac{\partial T}{\partial t} dt \Rightarrow \delta Q = \Sigma dx dt \times \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$$

d'où provient sa variation d'entropie :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \Sigma dx dt \times \frac{\rho c}{T} \frac{\partial T}{\partial t}$$

De même, pendant  $dt$ , la tranche élémentaire reçoit une entropie :

$$\delta S_1 = \frac{\delta Q_e}{T(x,t)} = \Sigma dt \times \frac{j_Q(x,t)}{T(x,t)}$$

alors qu'elle restitue une entropie :

$$\delta S_2 = \frac{\delta Q_s}{T(x+dx,t)} = \Sigma dt \times \frac{j_Q(x+dx,t)}{T(x+dx,t)}$$

Aussi, en définissant la fonction :  $\psi(x, t) = \frac{j_Q(x, t)}{T(x, t)}$ , l'entropie reçue par cette tranche, par échange thermique, vaut :

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{éch}} = \delta S_1 - \delta S_2 &= \Sigma dt \times [\psi(x, t) - \psi(x + dx, t)] \\ &= -\Sigma dt \times \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\delta S_{\text{éch}} = -\Sigma dx dt \times \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j_Q}{T} \right)$$

Si  $\sigma(x, t)$  désigne l'entropie créée par unité de volume et de temps, l'entropie  $\delta S_{\text{cr}}$  créée dans le volume  $\Sigma dx$  de la tranche, pendant  $dt$  vérifie :

$$\sigma(x, t) = \frac{\delta S_{\text{cr}}}{\Sigma dx dt} \Rightarrow \delta S_{\text{cr}} = \sigma(x, t) \times \Sigma dx dt$$

(b) Localement, le bilan d'entropie dans la tranche de matériau se traduit par :

$$dS = \delta S_{\text{éch}} + \delta S_{\text{cr}} \Rightarrow \frac{\rho c}{T} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j_Q}{T} \right) + \sigma(x, t) \quad (98)$$

(c) En régime permanent,  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  tandis que  $j_Q(x)$  et  $T(x)$  sont fournis par les expressions (94) et (96) :

$$\begin{cases} T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x \\ j_Q(x) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \end{cases} \Rightarrow \frac{j_Q}{T} = \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{L T_1 + (T_2 - T_1) x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j_Q}{T} \right) = \frac{\lambda (T_1 - T_2)^2}{[L T_1 + (T_2 - T_1) x]^2}$$

Ce faisant, l'équation (98) conduit à :

$$\sigma(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j_Q}{T} \right) = \frac{\lambda (T_1 - T_2)^2}{[L T_1 + (T_2 - T_1) x]^2}$$

Aussi, la quantité totale d'entropie créée dans la barre, par unité de temps, vaut-elle :

$$\begin{aligned} S_{\text{cr}} &= \int_{x=0}^L \sigma(x) \Sigma dx = \Sigma \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{j_Q}{T} \right) dx = \Sigma \left[ \frac{j_Q(x)}{T(x)} \right]_0^L \\ &= \Sigma \times \left[ \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{L T_1 + (T_2 - T_1) L} - \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{L T_1} \right] \\ &= \Sigma \times \frac{\lambda (T_1 - T_2)}{L} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \\ &\Rightarrow S_{\text{cr}} = \frac{\lambda \Sigma (T_1 - T_2)^2}{L T_1 T_2} \end{aligned}$$



(d) Le flux thermique, déduit de la relation (97) :

$$\phi = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} \Rightarrow R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda \Sigma}$$

permet d'établir qu'en :

- $x = 0$ , la barre reçoit, pendant  $dt$ , une chaleur :

$$\delta Q_1 = \phi dt = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} dt$$

de la part d'une source à la température  $T_1$  ; elle reçoit ainsi une entropie :

$$\delta S_1 = \frac{\delta Q_1}{T_1} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} \frac{dt}{T_1}$$

- $x = L$ , la barre cède, pendant  $dt$  à la source de température  $T_2$ , une chaleur  $\delta Q_2$  telle que :

$$\frac{\delta Q_2}{dt} = \phi \Rightarrow \delta Q_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} dt$$

associée à une entropie cédée à la source ( $S_2$ ) :

$$\delta S_2 = \frac{\delta Q_2}{T_2} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} \frac{dt}{T_2}$$

Par suite, l'entropie échangée par transfert thermique par la barre, par unité de temps vaut :

$$\begin{aligned} S_{\text{éch}} &= \frac{\delta S_1}{dt} - \frac{\delta S_2}{dt} = \frac{T_1 - T_2}{R_{\text{th}}} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \\ \Rightarrow S_{\text{éch}} &= - \frac{\lambda \Sigma (T_1 - T_2)^2}{L T_1 T_2} \end{aligned}$$

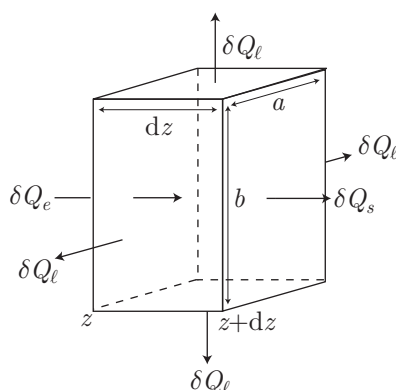
(e) Aussi, l'entropie de la barre varie, par unité de temps, de la quantité :

$$\Delta S = S_{\text{éch}} + S_{\text{cr}} \Rightarrow \Delta S = 0$$

Ce résultat était prévisible étant donné qu'en régime stationnaire la barre ne subit aucune transformation ; son entropie ne varie pas au cours du temps.

## ● 167 ————— Concours TPE

1. Soit ( $\mathcal{P}$ ) une portion de l'ailette, située entre  $z$  et  $z + dz$  :



Pendant une durée  $dt$ , l'ailette :

- reçoit, par sa face située en  $z$ , une chaleur  $\delta Q_e$  telle que :

$$\frac{\delta Q_e}{dt} = j(z, t) \times ab \Rightarrow \delta Q_e = j(z, t) \times ab dt$$

où  $j(z, t)$  désigne la densité de flux thermique à travers la face située en  $z$ .

- cède, par sa face située en  $z + dz$ , la chaleur  $\delta Q_s$  telle que :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_s}{dt} &= j(z + dz, t) \times ab = \left[ j(z, t) + \frac{\partial j}{\partial z} dz \right] \times ab \\ \Rightarrow \delta Q_s &= \left[ j(z, t) + \frac{\partial j}{\partial z} dz \right] \times ab dt \end{aligned}$$

- cède, par les deux surfaces latérales les plus grandes (les deux autres ont des dimensions suffisamment faibles pour que soient négligées les pertes thermiques qui s'y produisent), d'aire  $a dz$ , une chaleur  $\delta Q_\ell$  :

$$\delta Q_\ell = 2Q \times a dz dt = 2\alpha a (T - T_a) dz dt \quad (99)$$

Par suite la portion ( $\mathcal{P}$ ), de capacité thermique  $C$ , reçoit globalement la quantité de chaleur :

$$\delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s - \delta Q_\ell = -\frac{\partial j}{\partial z} ab dz dt - 2\alpha a (T - T_a) dz dt$$

responsable de son augmentation de température :

$$\begin{aligned} \delta Q &= C dT = C \frac{\partial T}{\partial t} dt = ab \left[ -\frac{\partial j}{\partial z} - \frac{2\alpha}{b} (T - T_a) \right] dz dt \\ \Rightarrow \frac{\partial j}{\partial z} + \frac{2\alpha}{b} (T - T_a) &= \frac{-C}{ab dz} \times \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

Or, en régime permanent,  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ , tandis que  $j$  suit la loi de Fourier :

$$j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Rightarrow -\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{2\alpha}{b\lambda} (T - T_a) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - m^2 (T - T_a) = 0 \text{ avec } m^2 = \frac{2\alpha}{\lambda b}$$

2. L'équation caractéristique de cette équation (où  $\Delta T = T - T_a$ ) :

$$\frac{\partial^2 (\Delta T)}{\partial z^2} - m^2 \Delta T = 0 \Rightarrow X^2 - m^2 = 0$$

admet deux solutions :  $X = m$  ou  $X = -m$ , en conséquence de quoi il existe deux constantes  $A$  et  $B$  telles que :

$$\Delta T = A e^{mz} + B e^{-mz} \Rightarrow T(z) = T_a + A e^{mz} + B e^{-mz}$$

Or, en  $z = 0$ , la température vaut  $T_0$  :

$$T_0 = T_a + A + B \Rightarrow A + B = T_0 - T_a \quad (100)$$

tandis qu'en  $z = L$ , elle prend la valeur  $T_a$  :

$$T_a = T_a + A e^{mL} + B e^{-mL} \Rightarrow B e^{-mL} = -A e^{mL} \Rightarrow B = -A e^{2mL}$$

Ce faisant, l'équation (100) devient :

$$A (1 - e^{2mL}) = T_0 - T_a \Rightarrow A = \frac{T_0 - T_a}{1 - e^{2mL}} \Rightarrow B = \frac{T_a - T_0}{1 - e^{2mL}} \times e^{2mL}$$

C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} T(z) &= T_a + \frac{T_0 - T_a}{1 - e^{2mL}} (e^{mz} - e^{2mL} \times e^{-mz}) \\ &= T_a + (T_0 - T_a) \times \frac{e^{mL}}{1 - e^{2mL}} \times [e^{m(z-L)} - e^{-m(z-L)}] \\ &= T_a + (T_0 - T_a) \times \frac{e^{m(z-L)} - e^{-m(z-L)}}{e^{-mL} - e^{mL}} \end{aligned}$$

soit encore :

$$T(z) = T_a + (T_a - T_0) \times \frac{\sinh [m(z-L)]}{\sinh(mL)}$$

3. Par unité de temps, la chaleur évacuée par les surfaces latérales d'aire  $a dz$  est donnée par la loi (99) :

$$\frac{\delta Q_\ell}{dt} = 2\alpha a (T - T_a) dz \Rightarrow \frac{\delta Q_\ell}{dt} = \frac{2\alpha a (T_a - T_0)}{\sinh(mL)} \times \sinh [m(z-L)] dz$$

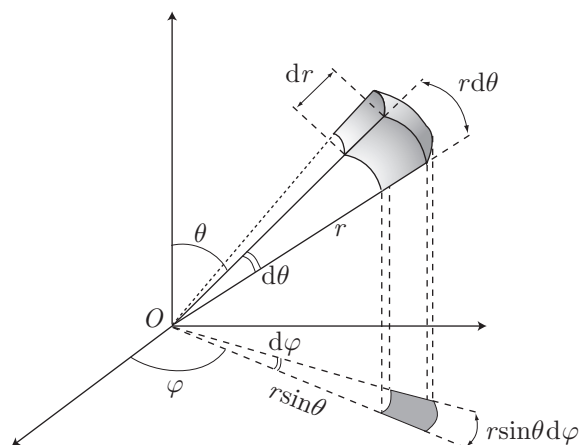
Aussi, la chaleur totale évacuée par l'ailette, par unité de temps vaut :

$$\begin{aligned} \frac{Q_\ell}{dt} &= \frac{2\alpha a (T_a - T_0)}{\sinh(mL)} \times \int_0^L \sinh [m(z-L)] dz \\ &= \frac{2\alpha a (T_a - T_0)}{m \sinh(mL)} \times [\cosh [m(z-L)]]_0^L \\ &= \frac{2\alpha a (T_a - T_0)}{m \sinh(mL)} \times [1 - \cosh(mL)] \\ &\Rightarrow \frac{Q_\ell}{dt} = \frac{2\alpha a (T_0 - T_a)}{m \sinh(mL)} [\cosh(mL) - 1] \end{aligned}$$

● 168 ————— Concours Centrale-Supélec

1. En coordonnées sphériques, un élément de sphère compris entre  $(r, r + dr)$ ,  $(\theta, \theta + d\theta)$  et  $(\varphi, \varphi + d\varphi)$  a pour volume :

$$d\tau = dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\varphi = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$



tandis que pendant  $dt$  :

- de la chaleur  $\delta Q_e = j(r, \theta, \varphi) \delta S(r, \theta, \varphi) dt$  entre par la face située à une distance  $r$  de  $O$  :

$$\delta S(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta d\varphi \times r d\theta = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

- de la chaleur  $\delta Q_s = j(r + dr, \theta, \varphi) \delta S(r + dr, \theta, \varphi) dt$  sort par la face située à une distance  $r + dr$  de  $O$ , d'aire :

$$\delta S(r + dr, \theta, \varphi) = (r + dr) \sin \theta d\varphi \times (r + dr) d\theta = (r + dr)^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

- de la chaleur  $\delta Q_p = s \delta \tau dt = sr^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi dt$  est éventuellement produite à l'intérieur de l'élément.

Par conséquent, pendant  $dt$ , l'élément de sphère reçoit globalement la chaleur :

$$\begin{aligned} \delta Q &= \delta Q_e - \delta Q_s + \delta Q_p \\ &= [j(r, \theta, \varphi) \times r^2 - j(r + dr, \theta, \varphi) \times (r + dr)^2] \sin \theta d\theta d\varphi dt \\ &\quad + sr^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi dt \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en définissant une fonction :

$$\psi(r, \theta, \varphi) = j(r, \theta, \varphi) \times r^2$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} j(r + dr, \theta, \varphi) \times (r + dr)^2 &= \psi(r + dr, \theta, \varphi) = \psi(r, \theta, \varphi) + \frac{\partial \psi}{\partial r} dr \\ &= j(r, \theta, \varphi) \times r^2 + \frac{\partial (r^2 j)}{\partial r} dr \end{aligned}$$

la chaleur  $\delta Q$  s'écrit aussi :

$$\delta Q = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi dt \times \left[ s - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j)}{\partial r} \right] = \delta \tau dt \left[ s - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j)}{\partial r} \right]$$

Or, cette chaleur contribue à l'augmentation  $dT$  de la température de l'élément de sphère, de masse volumique  $\mu$  et de capacité thermique massique  $c$  :

$$\delta Q = \mu c \delta \tau dT = \mu c \delta \tau \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

C'est pourquoi l'équation de la chaleur s'écrit, dans le cas d'une géométrie sphérique :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = s - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j)}{\partial r}$$

où le régime permanent se traduit par :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j)}{\partial r} = s \quad (101)$$

- Dans l'uranium, l'équation (101) montre qu'il existe une constante  $\alpha$  telle que :

$$\frac{\partial(r^2 j_u)}{\partial r} = sr^2 \Rightarrow r^2 j_u(r) = \frac{sr^3}{3} + \alpha \Rightarrow j_u(r) = \frac{sr}{3} + \frac{\alpha}{r^2}$$

Or, en  $r = 0$ ,  $j_u$  ne peut tendre, physiquement, vers l'infini, ce qui impose :

$$j_u(r) = \frac{sr}{3} \Rightarrow \vec{j}_u(r) = \frac{sr}{3} \vec{e}_r \quad (102)$$

où  $\vec{e}_r$  est le vecteur unitaire radial.

- Dans l'eau, aucune réaction nucléaire ne produit de chaleur ( $s = 0$ ), ce qui montre qu'il existe une constante  $\beta$  telle que :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j_e)}{\partial r} = 0 \Rightarrow r^2 j_e(r) = \beta \Rightarrow j_e(r) = \frac{\beta}{r^2}$$

Or, le régime stationnaire impose :

$$j_e(R) = j_u(R) \Rightarrow \frac{\beta}{R^2} = \frac{sR}{3} \Rightarrow \beta = s \frac{R^3}{3}$$

de sorte que :

$$j_e(r) = \frac{sR^3}{3r^2} \Rightarrow \vec{j}_e = \frac{sR^3}{3r^2} \vec{e}_r$$

2. La loi de Fourier :

$$\vec{j} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \Rightarrow j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$$

s'impose :

- à l'uranium, auquel cas :

$$-\lambda \frac{\partial T_u}{\partial r} = \frac{sr}{3} \Rightarrow \frac{\partial T_u}{\partial r} = -\frac{sr}{3\lambda} \Rightarrow T_u(r) = K - \frac{sr^2}{6\lambda} \quad (103)$$

où  $K$  est une constante.

- à l'eau, en raison de quoi :

$$-\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \frac{sR^3}{3r^2} \Rightarrow \frac{\partial T_e}{\partial r} = -\frac{sR^3}{3r^2\lambda_e} \Rightarrow T_e(r) = K' + \frac{sR^3}{3\lambda_e r}$$

Or, l'énoncé précise que  $\lim_{r \rightarrow \infty} [T_e(r)] = T_0$ , d'où il s'ensuit que :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[ K' + \frac{sR^3}{3\lambda_e r} \right] = T_0 \Rightarrow K' = T_0 \Rightarrow T_e(r) = T_0 + \frac{sR^3}{3\lambda_e r} \quad (104)$$

Enfin, le flux surfacique de Newton défini par  $j_u(R)$  ou  $j_e(R)$  vérifie la loi :

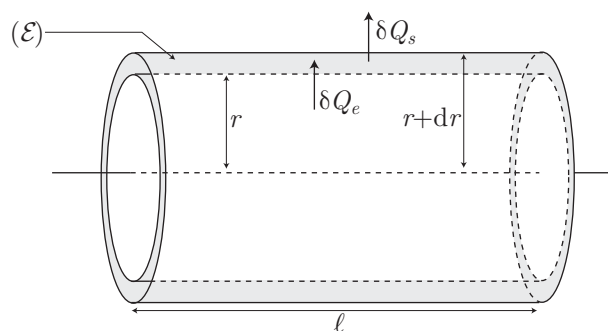
$$j_u(R) = h [T_e(R) - T(R)]$$

Les résultats (102), (103) et (104) conduisent alors à :

$$\begin{aligned} \frac{sR}{3} &= h \times \left[ T_0 + \frac{sR^2}{3\lambda_e} - K + \frac{sR^2}{6\lambda} \right] \\ \Rightarrow T_0 - K &= \frac{sR}{3h} - \frac{sR^2}{3} \left( \frac{1}{\lambda_e} - \frac{1}{2\lambda} \right) \\ \Rightarrow T(r) &= T_0 - \frac{sR}{3h} + \frac{sR^2}{3} \left( \frac{1}{\lambda_e} - \frac{1}{2\lambda} \right) - \frac{sr^2}{6\lambda} \end{aligned}$$

## ● 169 Concours ESIM

1. Soit  $(\mathcal{E})$  un élément du tuyau situé entre deux surfaces cylindriques coaxiales, de rayons  $r$  et  $r + dr$  et de longueur  $\ell$ .



Pendant une durée  $dt$  :

- $(\mathcal{E})$  reçoit une chaleur  $\delta Q_e$  telle que :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_e}{dt} &= j_Q(r) \times S(r) \text{ avec } S(r) = 2\pi r \ell \\ \Rightarrow \delta Q_e &= j_Q(r) r \times 2\pi \ell dt \end{aligned}$$

- ( $\mathcal{E}$ ) perd une chaleur  $\delta Q_s$  telle que :

$$\begin{aligned} \frac{\delta Q_s}{dt} &= j_Q(r+dr) \times S(r+dr) \text{ avec } S(r+dr) = 2\pi(r+dr) \times 2\pi\ell \\ &= [j_Q(r+dr) \times (r+dr)] \times 2\pi\ell \\ &= \left[ j_Q(r) \times r + \frac{\partial(j_Q \times r)}{\partial r} dr \right] \times 2\pi\ell \\ \Rightarrow \delta Q_s &= \left[ j_Q(r) \times r + \frac{\partial(j_Q \times r)}{\partial r} dr \right] \times 2\pi\ell dt \end{aligned}$$

Or, en régime permanent,  $\delta Q_e = \delta Q_s$ , sans quoi la température de ( $\mathcal{E}$ ) varierait. C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} j_Q(r) \times r \times 2\pi\ell dt &= \left[ j_Q(r) \times r + \frac{\partial(j_Q \times r)}{\partial r} dr \right] \times 2\pi\ell dt \\ \Rightarrow \frac{\partial(j_Q \times r)}{\partial r} &= 0 \end{aligned}$$

En outre, la loi de Fourier indique que :

$$j_Q = -k_1 \frac{\partial T}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left[ -k_1 \frac{\partial T}{\partial r} \times r \right] = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$$

Cette équation révèle l'existence de deux constantes  $a$  et  $b$  telles que :

$$r \frac{\partial T}{\partial r} = a \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{a}{r} \Rightarrow T(r) = a \ln r + b$$

et qui doivent être adaptées aux conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \begin{cases} T(R_1) = T_1 \\ T(R_2) = T_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} T_1 = a \ln R_1 + b \\ T_2 = a \ln R_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = T_1 - a \ln R_1 \\ T_2 - T_1 = a \ln(R_2/R_1) \end{cases} \\ &\Rightarrow T(r) = T_1 + a (\ln r - \ln R_1) = T_1 + a \ln \left( \frac{r}{R_1} \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$T(r) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)} \times \ln \left( \frac{r}{R_1} \right)$$

Du reste, le flux  $\phi$  qui traverse une surface  $S = 2\pi\ell r$  est défini par :

$$\phi = j_Q \times S = -k_1 \times \frac{\partial T}{\partial r} \times S = -k_1 \times \frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)r} \times 2\pi\ell r$$

d'où il s'ensuit que

$$\phi = \frac{2\pi k_1 \ell (T_1 - T_2)}{\ln(R_2/R_1)} \quad (105)$$

2. D'après la loi de Newton les transferts thermiques aux contacts fluide-paroi intérieure et paroi extérieure-air valent respectivement :

$$\phi_i = h s_1 (T_f - T_1) \text{ et } \phi_e = h s_2 (T_2 - T_e) \text{ avec } \begin{cases} s_1 = 2\pi\ell R_1 \\ s_2 = 2\pi\ell R_2 \end{cases}$$

3. Des deux relations précédentes, il ressort que :

$$T_f - T_1 = \frac{\phi_i}{hs_1} \Rightarrow T_1 = T_f - \frac{\phi_i}{2\pi h\ell R_1}$$

et :

$$T_2 - T_e = \frac{\phi_e}{hs_2} \Rightarrow T_2 = T_e + \frac{\phi_e}{2\pi h\ell R_2}$$

D'autre part, pour assurer le régime permanent, il est nécessaire que  $\phi_i = \phi_e = \phi$ , sans quoi une accumulation d'énergie s'observerait. C'est pourquoi :

$$\begin{cases} T_1 = T_f - \frac{\phi}{2\pi h\ell R_1} \\ T_2 = T_e + \frac{\phi}{2\pi h\ell R_2} \end{cases} \Rightarrow T_1 - T_2 = T_f - T_e - \frac{\phi}{2\pi\ell} \left( \frac{1}{hR_1} + \frac{1}{hR_2} \right)$$

Ce faisant, le résultat (105) devient :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{2\pi\ell k_1}{\ln(R_2/R_1)} \times (T_1 - T_2) = \frac{2\pi\ell k_1}{\ln(R_2/R_1)} \times \left[ T_f - T_e - \frac{\phi}{2\pi\ell} \left( \frac{1}{hR_1} + \frac{1}{hR_2} \right) \right] \\ \Rightarrow \phi &\times \left[ \frac{\ln(R_2/R_1)}{k_1} + \frac{1}{hR_1} + \frac{1}{hR_2} \right] = 2\pi\ell (T_f - T_e) \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$\phi = \frac{2\pi\ell \times (T_f - T_e)}{\frac{\ln(R_2/R_1)}{k_1} + \frac{1}{hR_1} + \frac{1}{hR_2}}$$

## ● 170 ————— Lycée Vernet, Grenoble

1. Le corps noir, à la température  $T$ , rayonne pendant  $dt$  une chaleur  $\delta Q_e = \sigma S T^4 dt$  tandis qu'il reçoit, par rayonnement de l'enceinte, la chaleur :  $\delta Q_r = \sigma S T_0^4 dt$ . Globalement, la chaleur  $\delta Q = \delta Q_r - \delta Q_e$  reçue par (CN) est responsable de l'accroissement  $dU = C dT$  de son énergie, car (CN) n'échange aucun travail avec l'extérieur :

$$\begin{aligned} dU = \delta Q &\Rightarrow C dT = \sigma S (T_0^4 - T^4) dt \\ &\Rightarrow C \frac{dT}{dt} = \sigma S (T_0^4 - T^4) \end{aligned}$$

2. Le développement limité d'ordre 1 de la fonction  $f(x) = x^4$  s'écrivant :

$$f(x_0 + \varepsilon) \simeq f(x_0) + \varepsilon f'(x_0) \Rightarrow (x_0 + \varepsilon)^4 \simeq x_0^4 + \varepsilon \times 4x_0^3$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} T^4 &= (T_0 + \varepsilon)^4 \simeq T_0^4 + 4T_0^3 \times \varepsilon \\ \Rightarrow T_0^4 - T^4 &\simeq -4T_0^3 \times \varepsilon = -4T_0^3 \times (T - T_0) \\ \Rightarrow C \frac{dT}{dt} &= -4T_0^3 \sigma S (T - T_0) \end{aligned}$$



c'est-à-dire :

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{\tau} (T - T_0)$$

3. En posant  $\theta = T - T_0$ , cette équation différentielle s'écrit aussi :

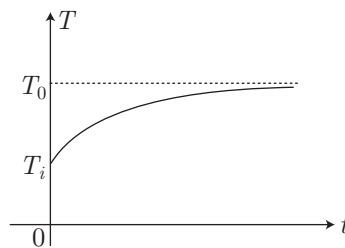
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{\tau} \theta \Rightarrow \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{1}{\tau} dt$$

où, à la date  $t = 0$ ,  $\theta$  vaut  $T_i - T_0$ . Par suite :

$$\int_{T_i - T_0}^{T - T_0} \frac{d\theta}{\theta} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \left( \frac{T - T_0}{T_i - T_0} \right) = -\frac{t}{\tau} \Rightarrow T - T_0 = (T_i - T_0) e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow T = T_0 + (T_i - T_0) e^{-t/\tau}$$

De la limite :  $\lim_{t \rightarrow \infty} T = T_0$  découle alors la représentation graphique de  $T(t)$  :



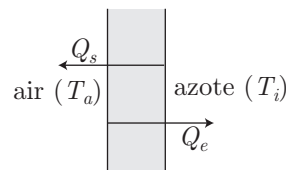
● 171 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-jolie

Chaque paroi, à la température  $T$ , émet un rayonnement thermique de flux  $\phi = \sigma T^4 S$ , c'est-à-dire que pendant une durée  $\Delta t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ , les parois émettent les chaleurs :

$$Q_s = \sigma T_i^4 S \Delta t \text{ et } Q_e = \sigma T_a^4 S \Delta t$$

Par suite, l'azote reçoit globalement la chaleur :

$$Q = Q_e - Q_s = \sigma (T_a^4 - T_i^4) S \Delta t$$



Cette quantité de chaleur sert à la vaporisation de  $V = 1 \text{ L}$  d'azote liquide :

$$Q = V \times L \Rightarrow V \times L = \sigma (T_a^4 - T_i^4) S \Delta t$$

$$\Rightarrow L = \frac{\sigma (T_a^4 - T_i^4) S \Delta t}{V}$$

Application numérique :

$$L = \frac{57.10^{-9} \times [(290)^4 - (77)^4] \times 10.10^{-2} \times 3600}{1} \Rightarrow L = 144,4 \text{ kJ} \cdot \text{L}^{-1}$$

**CORRIGÉS**

● 172 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Compte tenu des données de l'énoncé :

$$P_R = \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \frac{\nu^3 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}$$

c'est-à-dire, en posant :

$$\frac{h\nu}{kT} = x \Rightarrow \nu = \frac{kT}{h} x \Rightarrow d\nu = \frac{kT}{h} dx$$

cette expression devient :

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{2\pi h}{c^2} \times \left(\frac{kT}{h}\right)^4 \times \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \\ &= \frac{2\pi k^4 T^4}{c^2 h^3} \times \frac{\pi^4}{15} = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} \times T^4 \end{aligned}$$

d'où se déduit la loi de Stefan :

$$P_R = \sigma T^4 \text{ avec } \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2}$$

2. Selon la loi de Wien, la température  $T$  peut être associée à une longueur d'onde  $\lambda_m$  :

$$\lambda_m = \frac{2898}{T} \text{ (en } \mu\text{m)}$$

ce qui fournit les résultats suivants :

	$T$	$\lambda_m$	Rayonnement
Terre	$T_e = 263 \text{ K}$	$11 \mu\text{m}$	Infrarouge
Soleil	$T_s = 5700 \text{ K}$	$508 \text{ nm}$	Visible

3. La grandeur  $P_R = \sigma T^4$  désigne la puissance rayonnée par l'unité de surface d'un corps noir. Si ce dernier présente une surface  $S$ , il rayonne une puissance  $\varphi = P_R \times S = \sigma S T^4$ . En outre, ce corps reçoit une puissance  $\varphi' = P'_R S = \sigma S T_e^4$ , de sorte que la puissance résultante rayonnée par ce corps vaut :

$$P = \varphi - \varphi' = \sigma S (T^4 - T_e^4)$$

4. Le résultat précédent s'écrit aussi :

$$P = \sigma S (T^2 - T_e^2) (T^2 + T_e^2) = \sigma S (T + T_e) (T^2 + T_e^2) \times (T - T_e)$$

et, notamment :

$$T - T_e = \Delta T \ll T_e \Rightarrow T + T_e \simeq 2T_e \text{ et } T^2 + T_e^2 = 2T_e^2$$

ce qui amène une linéarisation de  $P$  :

$$P \simeq \sigma S \times 2T_e \times 2T_e^2 (T - T_e) \Rightarrow P = G \times (T - T_e) \text{ avec } G = 4\sigma S T_e^3$$

La résistance thermique correspondante,  $R_{\text{th}}$ , est alors définie par :

$$T - T_e = R_{\text{th}} \times P \Rightarrow R_{\text{th}} = \frac{T - T_e}{P} \Rightarrow R_{\text{th}} = \frac{1}{G} = \frac{1}{4\sigma ST_e^3}$$

### ● 173 ————— Concours de l'ENS de Paris-Lyon

1. L'expression de  $F_T(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \times \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$  permet d'en déduire la dimension :

$$[F_T(\lambda)] = \frac{[h] \times [c]^2}{[\lambda]^5} = \frac{\text{J} \cdot \text{s} \times \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^5} = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$$

ce qui conduit à celle de  $\delta\mathcal{P} = F_T(\lambda) dS d\lambda$  :

$$[\delta\mathcal{P}] = [F_T(\lambda)] \times [dS] \times [d\lambda] = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{m}^2 \times \text{m} = \text{J} \cdot \text{s}^{-1}$$

qui correspond à une puissance, conformément à ce qu'annonce l'énoncé.

Le rapport  $y = \frac{hc}{\lambda kT}$  est également celui de l'énergie  $\varepsilon_{\text{ph}}$  du photon et celle  $\varepsilon_{\text{GP}}$  d'agitation thermique d'une mole de gaz parfait monoatomique :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\text{ph}} = \frac{hc}{\lambda} \\ \varepsilon_{\text{GP}} = \frac{3}{2} kT \end{cases} \Rightarrow y = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{\text{ph}}}{\varepsilon_{\text{GP}}}$$

2. Les courbes fournies par l'énoncé donnent une estimation du rapport  $y_M$  correspondant à  $y = \frac{hc}{\lambda kT}$ , lorsque  $\lambda$  adopte la valeur  $\lambda_M$  telle que  $F_T(\lambda)$  soit *maximum* :

- pour  $T = 5\,800 \text{ K}$ ,  $\lambda_M \simeq 5.10^{-7} \text{ m}$  :

$$y_M = \frac{6,626.10^{-34} \times 3.10^8}{5.10^{-7} \times 1,381.10^{-23} \times 5\,800} \Rightarrow y_M = 4,963$$

- pour  $T = 290 \text{ K}$ ,  $\lambda_M \simeq 10^{-5} \text{ m}$  :

$$y_M = \frac{6,626.10^{-34} \times 3.10^8}{10^{-5} \times 1,381.10^{-23} \times 290} \Rightarrow y_M = 4,963$$

3. La fonction de Planck :

$$F_T(\lambda) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \times \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \Rightarrow \ln [F_T(\lambda)] = \ln (2\pi hc^2) - 5 \ln \lambda - \ln \left( e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)$$

admet pour dérivée logarithmique :

$$\frac{d \ln [F_T(\lambda)]}{d\lambda} = -\frac{5}{\lambda} + \frac{hc}{\lambda^2 kT} \times \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} = -\frac{5}{\lambda} + \frac{y}{\lambda} \times \frac{1}{1 - e^{-y}}$$

$$\Rightarrow \frac{d \ln [F_T(\lambda)]}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left( \frac{y}{1 - e^{-y}} - 5 \right)$$

Notamment, pour  $y = y_M = 4,963$  :

$$\left. \frac{d \ln [F_T(\lambda)]}{d\lambda} \right|_{\lambda_M} \simeq \frac{1}{\lambda} \times (-2.10^{-3}) \simeq 0$$

ce qui montre que  $F_T(\lambda)$  est *extremum* pour  $\lambda = \lambda_M$ . Or, puisque  $F_T(\lambda)$  est positif, avec :

$$[F_T(\lambda)] = 0 \text{ et } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [F_T(\lambda)] = 0$$

il s'ensuit que cet *extremum* est un *maximum*. Finalement :

$$F_T(\lambda_M) \text{ est maximum, avec : } \frac{hc}{\lambda_M kT} = y_M$$

De ce résultat se déduit la loi de Wien :

$$\lambda_M T = w \text{ avec } w = \frac{hc}{ky_M} = \text{cte}$$

La valeur numérique de  $w$  peut se déduire des couples :

$$\{\lambda_M = 5.10^{-7} \text{ m}, T = 5800 \text{ K}\} \Rightarrow w = 2,9.10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

$$\{\lambda_M = 10^{-5} \text{ m}, T = 290 \text{ K}\} \Rightarrow w = 2,9.10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

4. La puissance émise par une surface  $dS$ , pour un rayonnement de longueur d'onde comprise entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ , est donnée par :

$$\delta \mathcal{P} = F_T(\lambda) dS d\lambda$$

d'où découle la puissance rayonnée par unité de surface de la source, dans la même gamme de longueurs d'onde :

$$dM = \frac{\delta \mathcal{P}}{dS} = F_T(\lambda) d\lambda$$

Par suite, la puissance totale émise par unité de surface de corps noir vaut :

$$M(T) = \int_0^{\infty} F_T(\lambda) d\lambda = 2\pi hc^2 \times \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^5} \times \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$

c'est-à-dire, en utilisant la variable :

$$\begin{aligned} y = \frac{hc}{\lambda kT} &\Rightarrow \lambda = \frac{hc}{kTy} \Rightarrow d\lambda = -\frac{hc}{kT} \times \frac{dy}{y^2} \\ \Rightarrow M(T) &= 2\pi hc^2 \times \int_{\infty}^0 \frac{-hc}{kT} \frac{dy}{y^2} \times \left(\frac{kTy}{hc}\right)^5 \times \frac{1}{e^y - 1} \\ \Rightarrow M(T) &= \frac{2\pi k^4}{h^3 c^2} \times T^4 \times \int_0^{\infty} \frac{y^3}{e^y - 1} dy \end{aligned}$$

soit encore :

$$M(T) = \sigma T^4 \text{ avec } \sigma = \frac{2\pi k^4}{h^3 c^2} \times I \text{ où } I = \int_0^{\infty} \frac{y^3}{e^y - 1} dy$$

5. La loi de Wien :

$$\lambda_M T = w \Rightarrow \frac{hc}{\lambda_M kT} = \frac{hc}{kw} = \text{cte}$$

permet de présenter  $F_T(\lambda)$  sous la forme :

$$F_T(\lambda_M) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda_M^5} \times \frac{1}{e^{hc/kw} - 1}$$

et la loi de Stefan sous la forme :

$$\sigma T^4 = \sigma \times \left(\frac{w}{\lambda_M}\right)^4 = \frac{\sigma w^4}{\lambda_M^4}$$

C'est pourquoi la définition de  $\Delta\lambda$  conduit à :

$$\begin{aligned} \Delta\lambda &= \frac{\sigma T^4}{F_T(\lambda_M)} = \frac{\sigma w^4}{\lambda_M^4} \times \frac{\lambda_M^5}{2\pi hc^2} \times (e^{hc/kw} - 1) \\ \Rightarrow \Delta\lambda &= K \times \lambda_M \text{ où } K = \frac{\sigma w^4 (e^{hc/kw} - 1)}{2\pi hc^2} = \text{cte} \end{aligned}$$

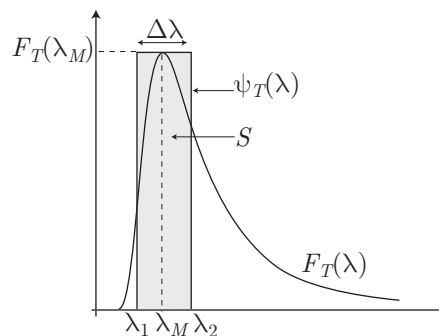
Soit la fonction  $\psi(T)$  définie par :

$$\begin{cases} \psi_T(\lambda) = F_T(\lambda) \text{ pour } \lambda \in \left[\lambda_M - \frac{\Delta\lambda}{2}, \lambda_M + \frac{\Delta\lambda}{2}\right] \\ \psi_T(\lambda) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Ce faisant :

$$F_T(\lambda_M) \Delta\lambda = \int_0^\infty \psi_T(\lambda) d\lambda = \sigma T^4 = \int_0^\infty F_T(\lambda) d\lambda$$

montre que  $F_T(\lambda) \Delta\lambda$  présente la même surface  $S$  que celle comprise entre la courbe  $F_T(\lambda)$  et l'axe des abscisses :



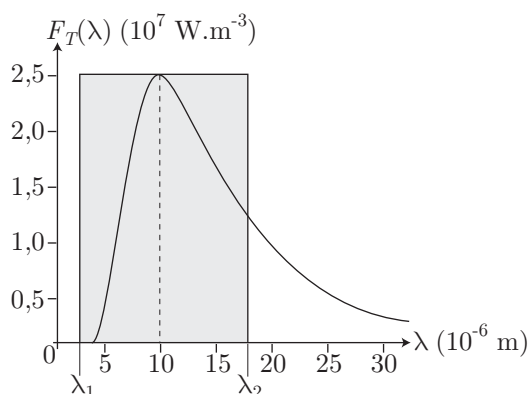
Cette représentation montre que  $\Delta\lambda$  représente la largeur spectrale que devrait présenter une source de puissance surfacique  $\psi_T(\lambda) = F_T(\lambda_M)$  constante pour émettre la même puissance surfacique que le corps noir.

**CORRIGÉS**

6. Étant donné que  $\Delta\lambda = 1,5 \lambda_M$ , il est possible de calculer  $\lambda_1 = \lambda_M - \frac{\Delta\lambda}{2}$  et

$\lambda_2 = \lambda_M + \frac{\Delta\lambda}{2}$  pour le corps noir à la température  $T = 290 \text{ K}$  :

$$\begin{cases} \lambda_1 = 10 \cdot 10^{-6} - \frac{1,5 \times 10 \cdot 10^{-6}}{2} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ \lambda_2 = 10 \cdot 10^{-6} + \frac{1,5 \times 10 \cdot 10^{-6}}{2} = 17,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} \end{cases}$$



Cette représentation graphique semble indiquer que pour  $\lambda < \lambda_1$  ou  $\lambda > \lambda_2$ ,  $F_T(\lambda)$  devient vite négligeable, de sorte que l'essentiel de la puissance émise par le corps noir est rayonné dans l'intervalle spectral  $[\lambda_1, \lambda_2]$ .

## ● 174 ————— Concours des Mines-Ponts

1. La densité surfacique de puissance émise par un corps noir en équilibre thermique à la température  $T$  est donnée par la loi de Stefan :  $M = \sigma T^4$ . Aussi, un corps noir de surface  $S$  émet une puissance :

$$P = M \times S = \sigma S T^4$$

notamment, pour le Soleil, de température  $T_S$  et de surface  $S = 4\pi R_S^2$ , cette puissance vaut :

$$P_S = 4\pi\sigma R_S^2 T_S^4 \quad (106)$$

Le Soleil émet la puissance  $P_S$  dans toutes les directions de l'espace, c'est-à-dire dans un angle solide  $\Omega_{\text{espace}} = 4\pi$ . En revanche, la Terre présente un angle solide  $\Omega_T = \pi \frac{R_T^2}{D_{ST}^2}$  vu depuis le Soleil, auquel cas la puissance  $P_0$  reçue par la Terre ne représente qu'une fraction de  $P_S$  :

$$P_0 = \frac{\Omega_T}{\Omega_{\text{espace}}} \times P_S \Rightarrow P_0 = \left( \frac{R_T}{2 D_{ST}} \right)^2 \times P_S \quad (107)$$

La Terre étant assimilée à un corps noir en équilibre thermique à la température  $T_T$ , la puissance  $P_0$  qu'elle absorbe suit la loi de Stefan :

$$P_0 = S_T \times \sigma T_T^4$$

où  $S_T = 4\pi R_T^2$  représente la surface terrestre. Ainsi les résultats (106) et (107) conduisent à :

$$\begin{aligned} \left(\frac{R_T}{2D_{ST}}\right)^2 \times 4\pi\sigma R_S^2 T_S^4 &= 4\pi\sigma R_T^2 T_T^4 \\ \Rightarrow T_T^4 &= \left(\frac{R_S}{2D_{ST}}\right)^2 T_S^4 \\ \Rightarrow T_T &= \sqrt{\frac{R_S}{2D_{ST}}} \times T_S \end{aligned}$$

2. La Terre reçoit réellement la puissance :  $P_T = (1 - A_T) P_0$ , c'est-à-dire, en tenant compte du résultat (107) :

$$P_T = (1 - A_T) \times \left(\frac{R_T}{2D_{ST}}\right)^2 P_S$$

où  $P_S = 4\pi\sigma R_S^2 T_S^4$  tandis que  $P_T = 4\pi R_T^2 \times \sigma T_T^4$ . Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} 4\pi R_T^2 \times \sigma T_T^4 &= (1 - A_T) \times \left(\frac{R_T}{2D_{ST}}\right)^2 \times 4\pi R_S^2 \times \sigma T_S^4 \\ \Rightarrow T_T^4 &= (1 - A_T) \times \left(\frac{R_S}{2D_{ST}}\right)^2 \times T_S^4 \end{aligned}$$

3. Cette expression conduit à :

$$T_T^4 = (1 - 0,35) \times \left(\frac{7 \cdot 10^5}{2 \times 1,5 \cdot 10^8}\right)^2 \times (5800)^4 \Rightarrow T_T = 252 \text{ K } (-21^\circ\text{C})$$

4. L'atmosphère est composée de gaz qui absorbent les rayonnements infrarouges ; une partie du rayonnement solaire qui atteint le sol est renvoyée dans l'atmosphère sous forme de rayons infrarouges, alors absorbés par l'atmosphère.
5. En négligeant l'albédo de la Terre, le Soleil fait parvenir à l'atmosphère la puissance  $P_T = S\sigma T_T^4$  où  $S$  désigne la surface illuminée de la Terre ou de son atmosphère. Une fraction  $\alpha$  de ce rayonnement est absorbée par l'atmosphère, tandis qu'une autre fraction  $(1 - \alpha)$  parvient au sol, qui reçoit par conséquent une puissance :

$$P_1 = (1 - \alpha) P_T = (1 - \alpha) S\sigma T_T^4$$

En outre, l'atmosphère, de température  $T_a$ , émet un rayonnement vers le sol et vers l'espace. C'est pourquoi l'atmosphère émet vers la Terre une puissance thermique :

$$P_2 = S\sigma T_a^4$$

Ce faisant, l'atmosphère :

- reçoit de la Terre le rayonnement de puissance  $P'_T = \sigma S T_T'^4$  ;

- absorbe une fraction  $\alpha$  de la puissance  $P_T$  émise par le Soleil :

$$P_a = \alpha P_T = \alpha \sigma S T_T^4$$

- émet, vers l'espace et vers la Terre, la puissance totale  $2P_2$ .

L'équilibre radiatif de l'atmosphère impose alors :

$$P'_T + P_a = 2P_2 \Rightarrow T'_T{}^4 + \alpha T_T^4 = 2T_a^4 \quad (108)$$

De même, la Terre :

- reçoit, du Soleil, la puissance  $P_1 = (1 - \alpha) \sigma S T_T^4$  ;
- reçoit, de l'atmosphère, la puissance  $P_2 = \sigma S T_a^4$  ;
- rayonne, vers l'atmosphère, une puissance  $P'_T = \sigma S T'_T{}^4$ .

Ce faisant, l'équilibre radiatif de la Terre est conditionné par :

$$P_1 + P_2 = P'_T \Rightarrow (1 - \alpha) T_T^4 + T_a^4 = T'_T{}^4$$

Les deux bilans radiatifs conduisent ainsi au système d'équations :

$$\begin{cases} T'_T{}^4 + \alpha T_T^4 = 2T_a^4 \\ (1 - \alpha) T_T^4 + T_a^4 = T'_T{}^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T'_T{}^4 + \alpha T_T^4 = 2T_a^4 \\ (2 - 2\alpha) T_T^4 + 2T_a^4 = 2T'_T{}^4 \end{cases}$$

dont l'addition fournit :

$$T'_T{}^4 = (2 - \alpha) T_T^4 \quad (109)$$

6. Application numérique :

$$T'_T{}^4 = (2 - 0,35) \times (252)^4 \Rightarrow T'_T = 286 \text{ K } (13^\circ\text{C})$$

7. Les équations (108) et (109) imposent :

$$2T_a^4 = T'_T{}^4 + \alpha T_T^4 = 2T_T^4 \Rightarrow T_a = T_T$$

## ● 175 ————— Concours de l'École de l'air

Soit  $T$  la température d'un corps ( $C$ ), de surface extérieure  $S$ , qui émet par conséquent une chaleur  $\delta Q_e$ , pendant  $dt$ , vérifiant la loi de Stefan :

$$\frac{\delta Q_e}{dt} = S\sigma T^4$$

Pendant la même période  $dt$ , si ( $C$ ) se comporte comme un corps noir plongé dans un milieu de température  $T_e$ , il reçoit la chaleur  $\delta Q_r$  telle que :

$$\frac{\delta Q_r}{dt} = S\sigma T_e^4$$

Aussi, la chaleur  $\delta Q = \delta Q_r - \delta Q_e$  globalement reçue par ( $C$ ) se traduit par une variation  $dU = \delta Q$  de son énergie interne, avec :

$$dU = C dT = \delta Q_r - \delta Q_e$$



où  $C$  désigne la capacité thermique de  $(C)$ . Par suite :

$$C \frac{dT}{dt} = \frac{\delta Q_r}{dt} - \frac{\delta Q_e}{dt} = S\sigma (T_e^4 - T^4)$$

En outre, si les températures  $T$  et  $T_e$  sont assez voisins :

$$\begin{aligned} T_e^4 - T^4 &= (T_e - T) \times (T_e^3 + T_e^2 T + T_e T^2 + T^3) \\ &\simeq 4T_e^3 \times (T_e - T) \\ \Rightarrow \frac{dT}{dt} &= \frac{4S\sigma T_e^3}{C} \times (T_e - T) \end{aligned}$$

En notant  $\tau = \frac{C}{4S\sigma T_e^3}$  et en appelant  $T_i$  la température initiale de  $(C)$ , cette équation différentielle mène à :

$$\int_{T_i}^T \frac{dT}{T_e - T} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \left( \frac{T_e - T_i}{T_e - T} \right) = \frac{1}{\tau} \times t$$

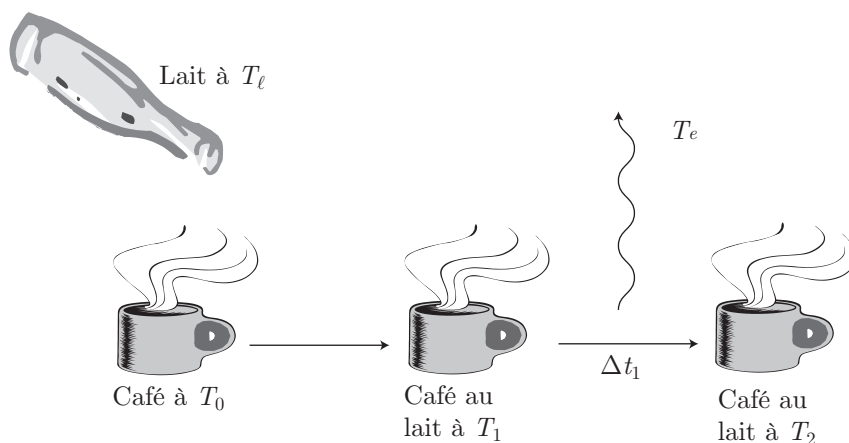
Ainsi, pour que la température de  $(C)$  passe de  $T_i$  à  $T$ , il convient d'attendre :

$$\Delta t = \tau \ln \left( \frac{T_e - T_i}{T_e - T} \right) \quad (110)$$

Envisageons désormais deux solutions :

#### Première solution

Au café, de capacité thermique  $C_c$  et de température  $T_0$ , on ajoute du lait de capacité thermique  $C_\ell$  et de température  $T_\ell$  ; la température du café au lait passe instantanément à la valeur  $T_1$ . On attend ensuite  $\Delta t_1$  pour que le café au lait atteigne une température  $T_2$  par échange radiatif avec l'extérieur, à la température  $T_e$ .



Au cours de la première étape, on observe que :

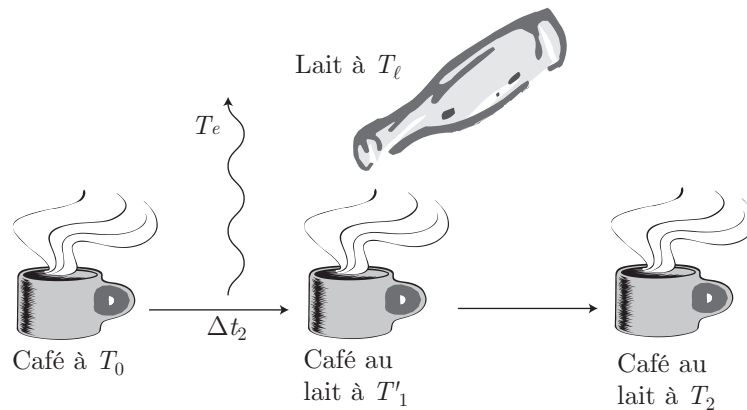
$$C_c (T_1 - T_0) + C_\ell (T_1 - T_\ell) = 0 \Rightarrow T_1 - T_0 = \frac{C_\ell}{C_c} (T_\ell - T_1) \quad (111)$$

tandis que la loi (110) montre qu'au cours du refroidissement du café au lait par échange radiatif :

$$\Delta t_1 = \tau \times \ln \left( \frac{T_e - T_1}{T_e - T_2} \right) \quad (112)$$

### Deuxième solution

La température du café passe de  $T_0$  à  $T'_1$  sous l'effet des échanges radiatifs, tandis que l'ajout de la même quantité de lait que précédemment fait passer la température du café au lait de  $T'_1$  à  $T_2$ .



À nouveau, la relation (110) permet d'établir que :

$$\Delta t_2 = \tau \ln \left( \frac{T_e - T_0}{T_e - T'_1} \right) \quad (113)$$

tandis que l'ajout de lait se traduit par :

$$C_l (T_2 - T_l) + C_c (T_2 - T'_1) = 0 \Rightarrow T_2 - T'_1 = \frac{C_l}{C_c} (T_l - T_2) \quad (114)$$

Étant donné que  $T_2 < T_1$  (le café au lait se refroidit à l'issue de la première solution), il s'ensuit que :

$$T_1 - T_l > T_2 - T_l \Rightarrow \frac{C_l}{C_c} (T_1 - T_l) > \frac{C_l}{C_c} (T_2 - T_l)$$

c'est-à-dire, compte tenu des équations (111) et (114) :

$$T_0 - T_1 > T'_1 - T_2 > 0$$

Ce faisant :

$$\begin{aligned} T_0 - T_e + T_e - T_1 &> T'_1 - T_e + T_e - T_2 \\ \Rightarrow (T_e - T_1) \left( 1 + \frac{T_0 - T_e}{T_e - T_1} \right) &> (T_e - T_2) \left( 1 + \frac{T'_1 - T_e}{T_e - T_2} \right) \end{aligned}$$

où  $T_e < T_1$  et  $T_e < T_2$  imposent :

$$(T_1 - T_e) \left(1 - \frac{T_0 - T_e}{T_1 - T_e}\right) < (T_2 - T_e) \left(1 - \frac{T'_1 - T_e}{T_2 - T_e}\right)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{T_0 - T_e}{T_1 - T_e} < \frac{T_2 - T_e}{T_1 - T_e} \times \left(1 - \frac{T'_1 - T_e}{T_2 - T_e}\right)$$

et :  $T_2 < T_1 \Rightarrow T_2 - T_e < T_1 - T_e$  permet de poser :

$$1 - \frac{T_0 - T_e}{T_1 - T_e} < 1 - \frac{T'_1 - T_e}{T_2 - T_e} \Rightarrow \frac{T_0 - T_e}{T_1 - T_e} > \frac{T'_1 - T_e}{T_2 - T_e}$$

$$\Rightarrow \frac{T_2 - T_e}{T_1 - T_e} \times \frac{T_0 - T_e}{T'_1 - T_e} > 1$$

Ce faisant, les expressions (112) et (113) conduisent à :

$$\Delta t_2 - \Delta t_1 = \tau \ln \left( \frac{T_e - T_0}{T_e - T'_1} \times \frac{T_e - T_2}{T_e - T_1} \right) = \tau \ln \left( \frac{T_0 - T_e}{T'_1 - T_e} \times \frac{T_2 - T_e}{T_1 - T_e} \right) > 0$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 > \Delta t_1$$

Ce résultat signifie que :

l'ajout initial du lait assure le refroidissement le plus rapide du café au lait.

## ● 176 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. L'équation de diffusion :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (115)$$

impose le calcul de :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = A e^{-\frac{\alpha x^2}{t}} \times \left( -\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{\alpha x^2}{t^2 \sqrt{t}} \right)$$

et de :

$$\frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha x^2}{t}} \times \frac{2\alpha x}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = -\frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{\alpha x^2}{t}} \times \left( \frac{2\alpha}{t} - \frac{4\alpha^2}{t^2} x^2 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = A e^{-\frac{\alpha x^2}{t}} \times \left( -\frac{2\alpha}{t^{3/2}} + \frac{4\alpha^2}{t^2 \sqrt{t}} x^2 \right)$$

Aussi, l'équation de diffusion (115) est vérifiée à condition que :

$$-\frac{1}{2t^{3/2}} + \frac{\alpha x^2}{t^2 \sqrt{t}} = -\frac{2\alpha D}{t^{3/2}} + \frac{4\alpha^2 D}{t^2 \sqrt{t}} x^2$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2} = 2\alpha D \text{ et } \alpha = 4\alpha^2 D$$

C'est pourquoi :

$$\alpha = \frac{1}{4D} \Rightarrow n(x, t) = \frac{A}{\sqrt{t}} \times \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$$

2. Initialement, si  $S$  désigne la section droite du système, ce dernier contient  $N_0 \times S$  molécules. Or, dans une tranche comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  (c'est-à-dire de volume  $\delta V = S dx$ ) se trouvent  $\delta N$  particules :

$$\delta N = n(x, t) \times \delta V = n(x, t) \times S dx = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \times S dx$$

En admettant qu'aucune particule n'ait disparu ou n'ait été formée, on impose :

$$N_0 S = \frac{AS}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx$$

avec :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-kx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{k}} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} dx = \sqrt{4\pi Dt} \text{ en posant } k = \frac{1}{4Dt}$$

Par suite :

$$N_0 = \frac{A}{\sqrt{t}} \times \sqrt{4\pi Dt} = A \sqrt{4\pi D} \Rightarrow A = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi D}}$$

Il s'ensuit que :

$$n(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

3. Pour  $t$  fixé (et non nul) :

$$\frac{\partial n}{\partial x} = -\frac{2N_0 x}{4D\sqrt{4\pi Dt} \times t} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

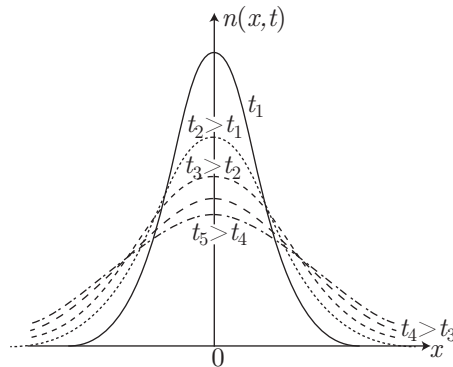
avec :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [n(x, t)] = 0$$

ce qui permet de dresser le tableau de variations suivant :

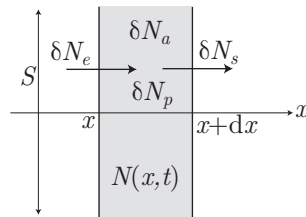
$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$\frac{\partial n}{\partial x}$		$+$	$-$
$n(x, t)$		$\nearrow$	$\searrow$

tandis que  $n(0, t \neq 0) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}}$  montre que  $n(0, t \neq 0)$  décroît dans le temps. C'est ainsi que l'on obtient un réseau de courbes pour diverses valeurs non nulles de  $t$  :



● 177 ————— Lycée Chateaubriand, Rennes

1. Considérons un élément ( $\mathcal{E}$ ) du matériau fissile, de section  $S$ , situé entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  (donc de volume  $\delta V = S dx$ ) et dans lequel la diffusion des neutrons s'effectue avec une densité de courant  $j$ .



Pendant  $dt$ , ( $\mathcal{E}$ ) est le siège :

- d'une entrée de  $\delta N_e$  neutrons, à l'abscisse  $x$  :

$$\frac{\delta N_e}{dt} = j(x, t) S \Rightarrow \delta N_e = j(x, t) \times S dt$$

- d'un départ de  $\delta N_s$  neutrons, à l'abscisse  $x + dx$  :

$$\begin{aligned} \frac{\delta N_s}{dt} &= j(x + dx, t) S = \left[ j(x, t) + \frac{\partial j}{\partial x} dx \right] \times S \\ \Rightarrow \delta N_s &= j(x, t) \times S dt + \frac{\partial j}{\partial x} \times S dx dt \end{aligned}$$

- d'une absorption de  $\delta N_a$  neutrons, dans le volume  $\delta V = S dx$ , telle que :

$$\frac{\delta N_a}{dt \delta V} = \frac{n(x, t)}{\tau} \Rightarrow \delta N_a = \frac{n(x, t)}{\tau} \times S dx dt$$

- d'une production de  $\delta N_p = K \delta N_a$  neutrons :

$$\delta N_p = K \frac{n(x, t)}{\tau} \times S dx dt$$

**CORRIGÉS**

Ce faisant, le nombre  $N(x, t)$  de neutrons dans ( $\mathcal{E}$ ) varie, pendant  $dt$ , de la quantité :

$$\begin{aligned} dN &= \delta N_e - \delta N_s + \delta N_p - \delta N_a \\ &= -\frac{\partial j}{\partial x} \times S dx dt + \frac{K-1}{\tau} n(x, t) \times S dx dt \end{aligned}$$

où  $N(x, t)$  est lié à la concentration volumique  $n(x, t)$  :

$$\begin{aligned} N(x, t) = n(x, t) \times \delta V &\Rightarrow dN = \frac{\partial n}{\partial t} \times dt \delta V \\ &\Rightarrow \frac{\partial n}{\partial t} \times dt S dx = \left( -\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{K-1}{\tau} n \right) \times S dx dt \end{aligned}$$

La loi de Fick :  $j = -D \frac{\partial n}{\partial x}$  conduit alors à :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{K-1}{\tau} n$$

soit encore :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \beta n \text{ avec } \beta = \frac{K-1}{\tau}$$

2. (a) En régime permanent, cette équation différentielle devient :

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{\beta}{D} n = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + k^2 n = 0 \text{ avec } k = \sqrt{\frac{\beta}{D}} = \sqrt{\frac{K-1}{D\tau}}$$

et admet pour solution générale :

$$n(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

où les constantes  $A$  et  $B$  sont adaptées aux conditions initiales :

- en  $x = 0$ ,  $n(x) = n_0$  impose :

$$n_0 = A \Rightarrow n(x) = n_0 \cos(kx) + B \sin(kx)$$

- en  $x = -a$  et  $x = +a$ ,  $n(x) = 0$  :

$$\begin{cases} 0 = n_0 \cos(ka) - B \sin(ka) \\ 0 = n_0 \cos(ka) + B \sin(ka) \end{cases}$$

L'addition et la soustraction de ces équations conduisent à :

$$n_0 \cos(ka) = 0 \quad (116)$$

et :

$$B \sin(ka) = 0 \quad (117)$$

Cette dernière équation impose, soit  $\sin(ka) = 0$  auquel cas  $\cos(ka) \neq 0$  rend impossible l'équation (116), soit :

$$B = 0 \Rightarrow n(x) = n_0 \cos(kx)$$

(b) Pour  $n_0 \neq 0$ , l'équation (116) admet comme solutions :

$$\cos(ka) = 0 \Rightarrow ka = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad (p \in \mathbb{Z})$$

Or, si  $\sin(ka)$  ne s'annule pas ailleurs qu'en  $x = \pm a$ ,  $p$  est nul de sorte que :

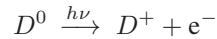
$$ka = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{K-1}{D\tau}} \times a = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{K-1}{D\tau}} = \frac{\pi}{2a}$$

ce qui montre que l'existence d'un régime permanent est conditionnée par une valeur particulière  $K_c$  de  $K_a$  :

$$K_c = 1 + \frac{\pi^2 D\tau}{4a^2}$$

● **178** **Concours des Mines - Ponts**

1. Dans les zones fortement irradiées, les photons dissocient les électrons des donneurs d'électrons :



d'où une ionisation très marquée des sites ( $D$ ).

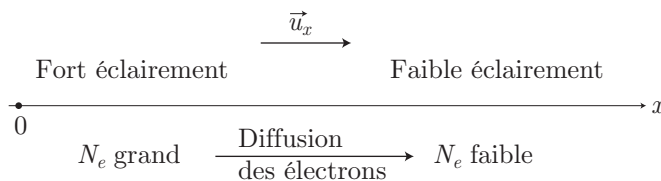
La loi de Fick précise que la densité de courant  $\vec{j}_{\text{diff}}$  est proportionnelle au gradient de la concentration des particules mobiles (en l'occurrence des électrons) :

$$\vec{j}_{\text{diff}} = -D \overrightarrow{\text{grad}} N_e$$

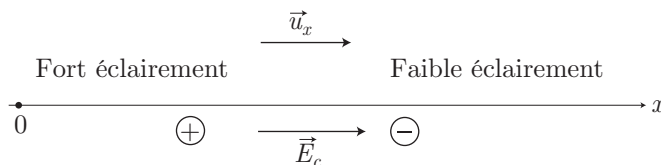
ou encore :

$$\vec{j}_{\text{diff}} = -D \frac{\partial N_e}{\partial x} \vec{u}_x \tag{118}$$

en considérant que la diffusion ne s'effectue que selon une direction ( $Ox$ ). Cette équation montre que les particules mobiles diffusent spontanément des zones les plus concentrées vers les zones les moins concentrées :



2. En l'absence de diffusion, les zones de fort (ou faible) éclairement demeureraient globalement neutres. Cependant, la diffusion des électrons entraîne un déficit d'électrons dans les zones de fort éclairement, au profit des zones de faible éclairement. Une polarisation du milieu apparaît :



**CORRIGÉS**

Ce schéma révèle que la polarité acquise sous l'effet du rayonnement induit un champ électrique dirigé de la zone de fort éclairnement vers la zone de faible éclairnement.

- Les électrons libres, soumis au champ  $\vec{E}_c$  précédemment évoqué, subissent une force  $\vec{f} = -e \vec{E}_c$  qui s'oppose à la diffusion.
- La densité volumique de charge, dans le matériau, vaut :

$$\rho(x, t) = e [N_D^+ - N_A - N_e] \quad (\text{car } N_A^- = N_A)$$

Aussi, la loi locale de Gauss peut s'appliquer au champ  $\vec{E}_c = E_c(x, t) \vec{u}_x$  :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{\partial E_c}{\partial x} = \frac{e}{\varepsilon} [N_D^+(x, t) - N_A - N_e(x, t)] \quad (119)$$

Soit  $\vec{j}_e$  le vecteur densité de courant électrique dans le matériau ; l'équation de continuité :

$$\text{div } \vec{j}_e + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

s'écrit, à une dimension :

$$\frac{\partial j_e}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial t} [N^+(x, t) - N_A - N_e(x, t)] = 0$$

- De la loi de Boltzmann, il découle que :

$$N_e(x) = N_0 \exp \left[ \frac{eV(x)}{k_B T} \right] \Rightarrow \frac{dN_e}{dx} = \frac{e}{k_B T} \times \frac{dV}{dx} \times \underbrace{N_0 \exp \left[ \frac{eV(x)}{k_B T} \right]}_{N_e(x)}$$

c'est-à-dire, en remarquant que :

$$\vec{E}_c = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow E_c \vec{u}_x = -\frac{dV}{dx} \vec{u}_x \Rightarrow \frac{dV}{dx} = -E_c(x)$$

il ressort que :

$$\frac{dN_e}{dx} = -\frac{e}{k_B T} N_e(x) E_c(x) \quad (120)$$

À l'équilibre, les électrons cessent de se déplacer, ce qui signifie que :

$$\vec{j}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{j}_{\text{der}} + \vec{j}_{\text{diff}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{j}_{\text{der}} = -\vec{j}_{\text{diff}} = -j_{\text{diff}} \vec{u}_x$$

où  $j_{\text{diff}}$  est donné par la loi de Fick (118) :

$$j_{\text{diff}} = -D \frac{dN_e}{dx} = \frac{De}{k_B T} N_e(x) E_c(x)$$

Finalement :

$$\vec{j}_{\text{der}} = -\frac{De}{k_B T} N_e(x) E_c(x) \vec{u}_x = -\frac{De}{k_B T} N_e(x) \vec{E}_c(x)$$



On montre, en électrocinétique, que :

$$\vec{j}_{\text{der}} = \rho_m \vec{v}_{\text{der}}$$

où  $\rho_m = N_e(x)$  désigne la densité volumique des porteurs mobiles de charge (ici les électrons). Il s'ensuit que :

$$\vec{j}_{\text{der}} = N_e(x) \vec{v}_{\text{der}} = -N_e(x) \mu \vec{E}_c \text{ car } \vec{v}_{\text{der}} = -\mu \vec{E}_c$$

La comparaison avec le résultat précédent fournit alors :

$$\vec{j}_{\text{der}} = -\mu N_e(x) \vec{E}_c = -\frac{De}{k_B T} N_e(x) \vec{E}_c \Rightarrow \mu = \frac{De}{k_B T}$$

6. Des questions précédentes, il ressort qu'un courant électrique, de densité  $\vec{j}_e$ , prend naissance sous l'influence :

- de la diffusion, conformément à la loi de Fick :

$$\vec{j}_{\text{diff}} = -D \frac{\partial N_e}{\partial x} \vec{u}_x$$

- du champ électrique  $\vec{E}_c$  :

$$\vec{j}_{\text{der}} = -N_e(x) \mu \vec{E}_c = -\frac{De}{k_B T} N_e(x) \vec{E}_c$$

Ce faisant :

$$\vec{j}_e = \vec{j}_{\text{diff}} + \vec{j}_{\text{der}} = -D \frac{\partial N_e}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{De}{k_B T} N_e(x) \vec{E}_c$$

7. En régime permanent,  $\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = 0$  donne à la relation fournie par l'énoncé la forme :

$$\frac{\partial N_D^+}{\partial t} = \alpha I(x) [N_D - N_D^+(x)] - \beta N_D^+(x) N_e(x) = 0$$

où  $N_D \gg N_D^+(x)$  conduit à :

$$\alpha I(x) N_D - \beta N_D^+(x) N_e(x) = 0 \quad (121)$$

En outre, puisque  $N^+$  et  $N_e$  ne dépendent pas du temps  $t$  en régime permanent, des équations (119) et (120) on déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dx} &= \frac{e}{\epsilon} [N_D^+(x) - N_A - N_e(x)] \\ \frac{dN_e}{dx} &= -\frac{e}{k_B T} N_e(x) E_c(x) \end{aligned}$$

8. Si  $I(x)$  est uniforme :  $m = 0 \Rightarrow I(x) = I_0$ , le phénomène de polarisation décrit dans la question 2. ne peut se produire, auquel cas :

$$\vec{E}_c = \vec{0}$$

En outre, la solution uniforme des équations ci-dessus s'obtient en posant  $\frac{dE_c}{dx} = 0$  (car  $E_c = 0$ ) et  $\frac{dN_e}{dx} = 0$  (pour les mêmes raisons). La première de ces équations fournit ainsi :

$$N_D^+ = N_A + N_e$$

De plus, l'équation (121) impose :

$$\alpha I_0 N_D = \beta N_D^+ N_e \Rightarrow \alpha I_0 N_D = \beta (N_A + N_e) N_e$$

L'hypothèse  $N_A \gg N_e$  a pour conséquence :

$$N_A + N_e \simeq N_A \Rightarrow \alpha I_0 N_D \simeq \beta N_A N_e \Rightarrow N_e \simeq \frac{\alpha I_0 N_D}{N_A}$$

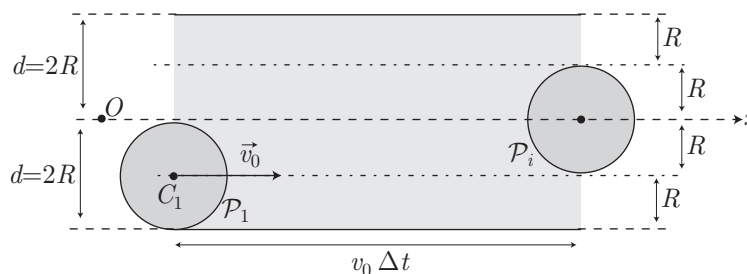
Ce faisant :

$$N_e \ll N_A \Rightarrow \frac{\alpha I_0 N_D}{N_A} \ll N_A \Rightarrow I_0 \ll \frac{N_A^2}{\alpha N_D}$$

## ● 179 ————— Concours de l'École de l'air

### 1. Libre parcours moyen\*

- (a) Considérons un cylindre, de rayon  $R = \frac{d}{2}$ , dont l'axe  $Ox$  passe par le centre d'une molécule  $\mathcal{P}_i$  immobile, et de hauteur  $v_0 \Delta t$ .



La particule  $\mathcal{P}_1$ , de centre  $C_1$ , peut atteindre  $\mathcal{P}_i$  pendant  $\Delta t$  si  $C_1$  appartient au cylindre de hauteur  $v_0 \Delta t$  et de section  $\pi d^2$ , c'est-à-dire de volume :

$$\Delta V = v_0 \pi d^2 \Delta t$$

- (b) Si  $v_0 \Delta t$  vaut  $L$ , cela signifie que le volume  $\Delta V$  contient exactement une molécule (c'est-à-dire deux demi-sphères) ;  $\Delta V$  vaut alors  $L\pi d^2$ . Or, le nombre de molécules par unité de volume est défini par :

$$n_0 = \frac{1}{\Delta V} = \frac{1}{L\pi d^2} \Rightarrow L = \frac{1}{n_0 \pi d^2} \quad (122)$$

- (c) Le résultat (122) suppose que :

- toutes les molécules comme  $\mathcal{P}_1$  possèdent une vitesse  $\vec{v}_0$  dirigée vers  $\mathcal{P}_i$ . Or, l'isotropie éventuelle du milieu conduirait plutôt à supposer que seul

$\frac{1}{6}$  de ces molécules présente une vitesse  $\vec{v}_0$  orientée convenablement, bien qu'appartenant à  $\Delta V$ .

- les particules  $\mathcal{P}_i$ , supposées immobiles, ne doivent pas rentrer dans le calcul du nombre  $\delta N = v_0 \Delta t$  de particules dans le volume  $\Delta V$ .

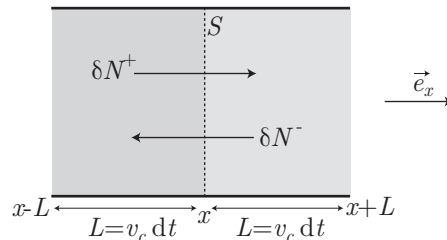
C'est pourquoi des calculs probabilistes conduiraient au résultat :

$$L = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{n_0 \pi d^2}$$

inférieur à celui (122) trouvé précédemment.

## 2. Diffusion

- (a) Considérons une surface  $S$ , située à l'abscisse  $x$ , traversée par  $\delta N^+$  molécules dans le sens de  $\vec{e}_x$  et par  $\delta N^-$  molécules dans le sens inverse, pendant  $dt$  :



Si l'on suppose que toutes les molécules se déplacent librement sur un parcours  $L$ , à une vitesse  $v_c$ , pendant  $dt$ , seul le sixième des molécules situées dans les volumes  $\delta V = v_c S dt$ , de part et d'autre de  $S$ , ont des vecteurs vitesse  $\vec{v}_c$  orientés correctement pour traverser  $S$ . En effet, des six directions et sens possibles pour  $\vec{v}_c$ , un seul permet à une molécule de se diriger vers  $S$ . C'est pourquoi  $S$  est traversé, dans le sens et la direction de  $\vec{e}_x$ , par un nombre global de molécules :

$$\begin{aligned} \delta N &= \delta N^+ - \delta N^- \text{ avec } \begin{cases} \delta N^+ = \frac{1}{6} n(x-L, t) \delta V \\ \delta N^- = \frac{1}{6} n(x+L, t) \delta V \end{cases} \\ \Rightarrow \delta N &= \frac{1}{6} \times v_c \times [n(x-L, t) - n(x+L, t)] \times S dt \\ \Rightarrow \frac{\delta N}{dt} &= \frac{v_c}{6} \times [n(x-L, t) - n(x+L, t)] \times S \end{aligned}$$

En orientant le vecteur surface  $\vec{S}$  dans le sens de  $\vec{e}_x$  :  $\vec{S} = S \vec{e}_x$ , il apparaît que :

$$\frac{\delta N}{dt} = \vec{j} \cdot \vec{S} \text{ avec } \vec{j} = \frac{v_c}{6} \times [n(x-L, t) - n(x+L, t)] \vec{e}_x \quad (123)$$

- (b) La loi de Fick stipule que :

$$\vec{j} = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{e}_x$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion des molécules. Or :

$$n(x-L, t) \simeq n(x, t) - L \frac{\partial n}{\partial x} \text{ et } n(x+L, t) \simeq n(x, t) + L \frac{\partial n}{\partial x}$$

permet d'écrire le résultat (123) sous la forme :

$$\vec{j} = -\frac{v_c L}{3} \frac{\partial n}{\partial x} \vec{e}_x \Rightarrow D = \frac{v_c L}{3}$$

### 3. Influence du champ de pesanteur sur la diffusion : la sédimentation

(a) Chaque particule, de masse  $m$ , est soumise à :

- son poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_x$ , si  $\vec{e}_x$  désigne un vecteur unitaire directeur de l'axe  $Ox$  ascendant ;
- la poussée d'Archimède  $\vec{A}$ . Or, chaque particule, de volume  $V$ , présente une masse  $m = \rho_P V$ , et déplace le même volume de liquide, de masse  $m_\ell = \rho V$ . C'est pourquoi :

$$\|\vec{A}\| = \rho V g = m \frac{\rho}{\rho_P} g \Rightarrow \vec{A} = m \frac{\rho}{\rho_P} g \vec{e}_x$$

- la force de frottement :

$$\vec{F}_f = -6\pi\eta R \vec{v} = -6\pi\eta R v \vec{e}_x$$

La loi fondamentale de la dynamique conduit à :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{P} + \vec{A} + \vec{F}_f = \left( m \frac{\rho}{\rho_P} g - mg \right) \vec{e}_x - 6\pi\eta R \vec{v} \\ \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} &= m \left( \frac{\rho}{\rho_P} - 1 \right) g \vec{e}_x - 6\pi\eta R \vec{v} \end{aligned}$$

(b) Cette équation différentielle montre que  $\vec{v}$  admet une limite  $\vec{v}_L$  telle que :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}_L}{dt} = \vec{0} &\Rightarrow 6\pi\eta R \vec{v}_L = m^* g \vec{e}_x \text{ avec } m^* = m \left( \frac{\rho}{\rho_P} - 1 \right) \\ \Rightarrow \vec{v}_L &= \frac{m^* g}{6\pi\eta R} \vec{e}_x \end{aligned}$$

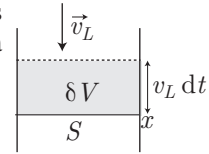
Or, en remarquant que  $\rho_P > \rho \Rightarrow m^* < 0$ , on constate qu'il existe un réel positif  $v_L$  tel que :

$$\vec{v}_L = -v_L \vec{e}_x \text{ avec } v_L = \frac{mg}{6\pi\eta R} \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_P} \right) = \frac{m^* g}{6\pi\eta R} \quad (124)$$

(c) Le résultat précédent montre que la gravitation est responsable de la chute des particules, avec une vitesse  $v_L$ .

Pendant la durée  $dt$ , seules les particules situées dans le volume  $\delta V = S \times v_L dt$  peuvent traverser la surface  $S$  vers le bas. En notant  $n = n(x, t)$  la concentration particulaire à l'altitude  $x$ , ce nombre de particules :

$$\delta N_1 = n \times \delta V = n S v_L dt$$



est associé à un flux  $\vec{j}_1$  tel que :

$$\frac{\delta N_1}{dt} = \vec{j}_1 \cdot S \vec{e}_x \Rightarrow \vec{j}_1 = -n v_L \vec{e}_x = n \vec{v}_L$$

- (d) Conformément à la loi de Fick, le gradient de concentration  $n$  est à l'origine d'un flux de particules, de densité :

$$\vec{j}_2 = -D \overrightarrow{\text{grad}} n \Rightarrow \vec{j}_2 = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{e}_x$$

- (e) Compte tenu de ce qui précède, un flux global  $\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$  de particules traverse la surface  $S$  pendant  $dt$ . Or, lorsque l'équilibre de sédimentation est atteint :

$$\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \vec{j}_1 + \vec{j}_2 = \vec{0} \Rightarrow -D \frac{\partial n}{\partial x} - n v_L = 0 \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{v_L}{D} n = 0$$

- (f) L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle :

$$X + \frac{v_L}{D} = 0 \Rightarrow X = -\frac{v_L}{D}$$

montre que la solution générale se met sous la forme :

$$n = A e^X \Rightarrow n = A e^{-x/H} \text{ où } H = \frac{D}{v_L} = \frac{6\pi\eta R D}{m^* g} \quad (125)$$

Dans le volume  $\delta V = S dx$ , situé à l'altitude  $x$ , se trouvent  $\delta N = n \delta V$  particules, c'est-à-dire :

$$\delta N = A S e^{-x/H} dx \text{ particules.}$$

Aussi, l'ensemble de la colonne de liquide, de hauteur  $h$ , contient  $N$  particules, avec :

$$N = A S \int_0^h e^{-x/H} dx = -A S H \times (e^{-h/H} - 1)$$

soit, en tenant compte des expressions (125) et (124) de  $v_L$  :

$$N = \frac{A S D}{v_L} \times (1 - e^{-\frac{v_L h}{D}})$$

$$\Rightarrow A = \frac{N v_L}{S D} \times \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{v_L h}{D}\right)} \text{ avec } v_L = \frac{m^* g}{6\pi\eta R}$$

● 180 ————— Lycée La Martinère Mon Plaisir, Lyon

## I-

1. Soit  $\delta n$  le nombre de moles d'une espèce traversant une surface d'aire  $S$  pendant  $dt$ . Le flux de matière est défini par :

$$\frac{\delta n}{dt} = J_m S \quad (126)$$

où  $J_m$  vérifie la loi de Fick :

$$J_m = -D \frac{\partial c}{\partial x} \quad (127)$$

La définition (126) fournit :

$$\begin{aligned} J_m = \frac{1}{S} \frac{\delta n}{dt} &\Rightarrow [J_m] = \frac{1}{[S]} \times \frac{[n]}{[t]} = \frac{1}{\text{m}^2} \times \frac{\text{mol}}{\text{s}} \\ &\Rightarrow [J_m] = \text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

tandis que la loi de Fick conduit à :

$$\begin{aligned} [J_m] = [D] \times \frac{[c]}{[x]} &\Rightarrow \text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} = [D] \times \frac{\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}}{\text{m}} \\ &\Rightarrow [D] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

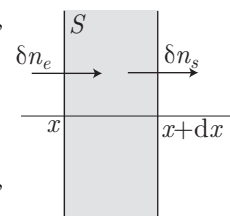
2. Une tranche comprise entre  $x$  et  $x + dx$  :

- reçoit, pendant  $dt$ , un nombre  $\delta n_e$  de moles de molécules, tel que :

$$\frac{\delta n_e}{dt} = J_m(x, t) S \Rightarrow \delta n_e = J_m(x, t) S dt$$

- perd, pendant  $dt$ , un nombre  $\delta n_s$  de moles de molécules, tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\delta n_s}{dt} &= J_m(x + dx, t) S = \left[ J_m(x, t) + \frac{\partial J_m}{\partial x} dx \right] S \\ &\Rightarrow \delta n_s = \left[ J_m(x, t) + \frac{\partial J_m}{\partial x} dx \right] \times S dt \end{aligned}$$



Aussi, pendant  $dt$ , cette tranche reçoit globalement un nombre  $d^2 n$  de molécules :

$$d^2 n = \delta n_e - \delta n_s = -\frac{\partial J_m}{\partial x} \times S dx dt = -\frac{\partial J_m}{\partial x} \times dV dt$$

où  $dV = S dx$  désigne le volume de la tranche. En outre, conformément à la loi de Fick :

$$J_m = -D \frac{\partial c}{\partial x} \Rightarrow d^2 n = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \times dV dt$$

Or, cette accumulation est responsable de l'augmentation du nombre  $n$  de molécules dans le volume  $dV$  :

$$d^2n = dV dc = dV \times \frac{\partial c}{\partial t} dt$$

d'où il découle que :

$$dV \times \frac{\partial c}{\partial t} dt = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \times dV dt \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (128)$$

3. En régime permanent :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = 0 \Rightarrow d^2n = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} = 0$$

Cette équation montre l'existence de deux constantes  $a$  et  $b$  telles que :

$$\frac{\partial c}{\partial x} = a \Rightarrow c(x) = ax + b \quad (129)$$

qui peuvent être déduites des conditions aux limites :

$$\begin{cases} c(0) = c_1 \\ c(L) = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = b \\ c_2 = aL + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = c_1 \\ a = \frac{c_2 - c_1}{L} \end{cases}$$

Ce faisant, on obtient :

$$c(x) = \frac{c_2 - c_1}{L} x + c_1$$

tandis que la loi de Fick (127) indique que :

$$J_m = -D \frac{\partial c}{\partial x} \Rightarrow J_m = \frac{D}{L} \times (c_1 - c_2) \quad (130)$$

## II-

1. Le volume de la couche limite étant négligeable, l'iode se trouve dans le volume  $v_1 = Sh_1$ , à la concentration  $c_1$  et dans le volume  $v_2 = Sh_2$  à la concentration  $c_2$ . Aussi, la quantité totale de molécules d'iode que contient le bécher vaut :

$$n(t) = c_1 V_1 + c_2 V_2 = c_1 S h_1 + c_2 S h_2$$

Or, cette quantité ne varie pas dans le temps et prend donc la même valeur qu'à l'instant initial :

$$n(t = 0) = c_0 S h_2$$

Il s'ensuit que :

$$c_1 h_1 + c_2 h_2 = c_0 h_2 \quad (131)$$

2. Les flux de molécules se produisent dans les couches limites, où les concentrations ne sont pas uniformes. Conformément au résultat (130) :

- pendant  $dt$ , un nombre  $dn$  de molécules quitte l'eau, tel que :

$$\frac{dn}{dt} = J_m S = \frac{D_2 S}{L_2} (c_2 - c_2^*) \quad (132)$$

- pendant  $dt$ , le même nombre de molécules arrive dans la couche limite du benzène :

$$\frac{dn}{dt} = J_m S = \frac{D_1 S}{L_1} (c_1^* - c_1) \quad (133)$$

Dans la couche limite de l'eau, la concentration  $c(x)$  varie de  $c(-L_2) = c_2$  à  $c(0) = c_2^*$ , conformément à la loi (129) :

$$c(x) = ax + b$$

avec :

$$\begin{aligned} \begin{cases} c(-L_2) = c_2 \\ c(0) = c_2^* \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} c_2 = -aL_2 + b \\ b = c_2^* \end{cases} \\ &\Rightarrow a = \frac{c_2^* - c_2}{L_2} \\ &\Rightarrow c(x) = \frac{c_2^* - c_2}{L_2} x + c_2^* \text{ pour } -L_2 < x < 0 \end{aligned}$$

De même, dans la couche limite du benzène, la concentration  $c(x)$  varie de  $c(0) = c_1^*$  à  $c(L_1) = c_1$ , suivant la loi linéaire (129), avec :

$$\begin{aligned} \begin{cases} c(0) = c_1^* \\ c(L_1) = c_1 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} b = c_1^* \\ c_1 = aL_1 + b \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} b = c_1^* \\ a = \frac{c_1 - c_1^*}{L_1} \end{cases} \\ &\Rightarrow c(x) = \frac{c_1 - c_1^*}{L_1} x + c_1^* \text{ pour } L_1 > x > 0 \end{aligned}$$

Ces deux expressions de  $c(x)$  confirment l'existence de segments de droites décroissantes dans les couches limites.

3. (a) En choisissant  $h_2 = h$ ,  $h_1 = \frac{h}{10}$ ,  $D_1 = D_2 = D$ ,  $L_2 = L$  et  $L_1 = \frac{L}{10}$ , les équations (131), (132) et (133) deviennent :

$$c_1 h_1 + c_2 h_2 = c_0 h_2 \Rightarrow c_1 \frac{h}{10} + c_2 h = c_0 h \Rightarrow c_1 + 10 c_2 = 10 c_0 \quad (134)$$

et :

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} = \frac{D_2 S}{L_2} (c_2 - c_2^*) &= \frac{D_1 S}{L_1} (c_1^* - c_1) \\ &\Rightarrow \frac{DS}{L} (c_2 - c_2^*) = \frac{DS \times 10}{L} (c_1^* - c_1) \\ &\Rightarrow c_2 - c_2^* = 10 c_1^* - 10 c_1 \end{aligned}$$



où  $c_1^* = K c_2^*$  conduit :

$$c_2 - c_2^* = 10 K c_2^* - 10 c_1 \Rightarrow (1 + 10 K) c_2^* = c_2 + 10 c_1 \quad (135)$$

(b) L'équation (134) fournit :

$$c_1 = 10 c_0 - 10 c_2$$

de sorte que l'équation (135) s'écrit aussi :

$$(1 + 10 K) c_2^* = c_2 + 100 c_0 - 100 c_2 \quad (136)$$

$$\Rightarrow c_2^* = \frac{100 c_0 - 99 c_2}{1 + 10 K} \quad (137)$$

$$\Rightarrow c_1^* = K c_2^* = \frac{100 K c_0 - 99 K c_2}{1 + 10 K} \quad (138)$$

4. Si  $n_2 = c_2 V_2 = c_2 S h_2$  désigne le nombre de moles d'iode présentes dans l'eau, son accroissement  $dn$  dans le benzène s'accompagne d'une diminution de  $n_2$  :

$$dn_2 = -dn \Rightarrow \frac{dn}{dt} = -\frac{dn_2}{dt} = -S h_2 \frac{dc_2}{dt}$$

Aussi, l'identité (132) devient :

$$\frac{dn}{dt} = \frac{D_2 S}{L_2} (c_2 - c_2^*) \Rightarrow -S h_2 \frac{dc_2}{dt} = \frac{D_2 S}{L_2} (c_2 - c_2^*)$$

où le résultat (137) fournit :

$$c_2 - c_2^* = c_2 - \frac{100 c_0 - 99 c_2}{1 + 10 K} = \frac{(100 + 10 K) c_2 - 100 c_0}{1 + 10 K}$$

tandis que :  $h_2 = h$  et  $L_2 = L$ . Ce faisant :

$$-10 h \frac{dc_2}{dt} = \frac{D}{L} \times \frac{(100 + 10 K) c_2 - 100 c_0}{1 + 10 K}$$

conduit à l'équation différentielle vérifiée par  $c_2(t)$  :

$$h \frac{dc_2}{dt} + \frac{D}{L} \times \frac{100 + 10 K}{1 + 10 K} c_2 = \frac{100 D c_0}{L (1 + 10 K)}$$

Il apparaît ainsi une constante de temps  $\tau$  telle que :

$$\frac{dc_2}{dt} + \frac{1}{\tau} c_2 = \frac{100 D c_0}{h L (1 + 10 K)} \text{ avec } \tau = \frac{L h}{D} \times \frac{1 + 10 K}{100 + 10 K}$$

5. Soit  $f = \frac{c_2}{c_0}$  la fonction solution de l'équation différentielle :

$$\frac{df}{dt} + \frac{1}{\tau} f = \frac{100 D}{h L (1 + 10 K)}$$

composée :

- d'une solution  $f_s$  de l'équation différentielle dépourvue de son second membre :

$$\frac{df_s}{dt} + \frac{1}{\tau} f_s = 0$$

dont l'équation caractéristique ( $X + \frac{1}{\tau} = 0 \Rightarrow X = -\frac{1}{\tau}$ ) révèle qu'il existe une constante  $A$  telle que :

$$f_s = A e^{Xt} = A e^{-t/\tau}$$

- D'une solution  $f_h$  homogène au second membre, et donc constante :

$$\underbrace{\frac{df_h}{dt} + \frac{1}{\tau} f_h}_{=0} = \frac{100 D}{hL(1+10K)} \Rightarrow f_h = \frac{100 D}{hL(1+10K)} \times \frac{hL}{D} \times \frac{1+10K}{100+10K}$$

$$= \frac{10}{10+K}$$

Aussi, la solution générale de l'équation différentielle :

$$f = \frac{c_2}{c_0} = f_h + f_s = \frac{10}{10+K} + A e^{-t/\tau}$$

comporte une constante  $A$  qui est ajustée à la valeur initiale de  $c_2$  :

$$c_2(t=0) = c_0 \Rightarrow 1 = \frac{10}{10+K} + A \Rightarrow A = \frac{K}{10+K}$$

Ainsi :

$$\frac{c_2}{c_0} = \frac{10}{10+K} + \frac{K}{10+K} e^{-t/\tau}$$

Quant à la relation (134), elle fournit :

$$c_1 + 10 c_2 = 10 c_0 \Rightarrow \frac{c_1}{c_0} = 10 \left( 1 - \frac{c_2}{c_0} \right)$$

$$= 10 \times \left( 1 - \frac{10}{10+K} - \frac{K}{10+K} e^{-t/\tau} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{c_1}{c_0} = \frac{10K}{10+K} - \frac{10K}{10+K} e^{-t/\tau}$$

#### 6. Application numérique.

Ces deux derniers résultats permettent le calcul de :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{c_2}{c_0} \right) = \frac{10}{10+K} = \frac{10}{10+500} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{c_2}{c_0} \right) = 19,6 \cdot 10^{-2} \simeq 0,2$$

et :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{c_1}{c_0} \right) = \frac{10K}{10+K} = \frac{10 \times 500}{10+500} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{c_1}{c_0} \right) = 9,8$$

En outre, le rapport  $\frac{c_2}{c_1}$  prend la valeur 0,5 à une date  $t_1$  telle que :

$$\begin{aligned} \frac{10 + K e^{-t_1/\tau}}{10K - 10K e^{-t_1/\tau}} = 0,5 &\Rightarrow 10 + K e^{-t_1/\tau} = 5K - 5K e^{-t_1/\tau} \\ &\Rightarrow 6K e^{-t_1/\tau} = 5K - 10 \\ &\Rightarrow t_1 = \tau \ln \left( \frac{6K}{5K - 10} \right) \text{ avec } \tau = \frac{Lh}{D} \times \frac{1 + 10K}{100 + 10K} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$t_1 = \frac{2.10^{-3} \times 5.10^{-2}}{2.10^{-9}} \times \frac{5001}{5100} \times \ln \left( \frac{3000}{2490} \right) \Rightarrow t_1 = 9136 \text{ s} = 2 \text{ h } 36 \text{ min } 16 \text{ s}$$

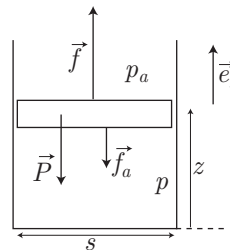
● **181** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

1. Le piston est soumis à trois forces :

- son poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$  ;
- la force de pression atmosphérique :

$$\vec{f}_a = -p_a s \vec{e}_z$$

- la force de pression exercée par le gaz :



$$\vec{f} = ps \vec{e}_z = \frac{nRT_0}{V} s \vec{e}_z = \frac{nRT_0}{z} \vec{e}_z \text{ car } pV = nRT_0 \text{ et } V = sz$$

dont la résultante :

$$\vec{F} = \vec{f} + \vec{f}_a + \vec{P} = \left( \frac{nRT_0}{z} - p_a s - mg \right) \vec{e}_z$$

est nulle à l'équilibre. Ce dernier est donc atteint pour une valeur  $z_e$  de  $z$  telle que :

$$\frac{nRT_0}{z_e} = p_a s + mg \Rightarrow z_e = \frac{nRT_0}{p_a s + mg} \quad (139)$$

2. L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température (conformément à la première loi de Joule) :

$$U = C_V T + U_0 \text{ où } U_0 \text{ est constant}$$

tandis que son entropie vaut :

$$\begin{aligned} S(T, V) &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln(TV^{\gamma-1}) + S_0 = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln T + nR \ln V + S_0 \text{ avec } \frac{nR}{\gamma - 1} = C_V \\ &\Rightarrow S(T, V) = C_V \ln T + nR \ln V + S_0 \quad (S_0 = \text{cte}) \end{aligned}$$

**CORRIGÉS**

3. Le gaz est soumis au poids  $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$  du piston et à la force de pression  $\vec{f}_a = -p_a s \vec{e}_z$ . La force résultante :

$$\vec{F}_0 = -(mg + p_a s) \vec{e}_z$$

est associée à une pression  $p_0$ , définie par :

$$\vec{F}_0 = -p_0 s \vec{e}_z \Rightarrow p_0 = p_a + \frac{mg}{s}$$

Aussi, en notant  $V = sz$ , la fonction  $G^*$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} G^* &= U - T_0 S + p_0 V \\ &= C_V T + U_0 - T_0 C_V \ln T - nRT_0 \ln(sz) - T_0 S_0 + \left(p_a + \frac{mg}{s}\right) \times sz \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant  $G_0^* = U_0 - T_0 S_0$  :

$$G^*(T, z) = C_V T - T_0 C_V \ln T - nRT_0 \ln(sz) + (sp_a + mg)z + G_0^*$$

4. La variation de la fonction  $G^* = U - T_0 S + p_0 V$  vaut :

$$dG^* = dU - T_0 dS + p_0 dV$$

où, lorsque le gaz reçoit une chaleur  $\delta Q$ , un travail  $\delta W = -p_0 dV$  des forces extérieures de pression et un travail  $\delta W'$  des forces autres que celles de pression :

$$dU = \delta Q - p_0 dV + \delta W' \Rightarrow dG^* = \delta Q - T_0 dS + \delta W'$$

Or, l'inégalité de Clausius impose :

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T_0} \Rightarrow \delta Q \leq T_0 dS \Rightarrow dG^* \leq \delta W'$$

Notamment, dans le cas étudié ici :

$$\delta W' = 0 \Rightarrow dG^* \leq 0$$

ce qui montre que lors d'une évolution monotherme ( $T_0$ ) et monobare ( $p_0$ ), la fonction  $G^*$  décroît ; l'équilibre est alors atteint lorsque  $G^*$  est *minimum*, ce qui est caractéristique d'un potentiel thermodynamique.

En revanche, la variation de la fonction  $F^* = U - T_0 S$  :

$$dF^* = dU - T_0 dS = \delta Q - p_0 dV + \delta W' - T_0 dS$$

avec :

$$\delta Q \leq T_0 dS \Rightarrow dF^* \leq -p_0 dV + \delta W'$$

est conditionnée par :

$$dF^* \leq -p_0 dV \text{ car } \delta W' = 0$$

Ce résultat ne permet pas de conclure quant à la variation (augmentation ou diminution) de  $F^*$ , il s'agit là d'une fonction mal adaptée au problème.

5. Compte tenu de ce qui précède, la position d'équilibre est atteinte pour une valeur  $z_e$  de  $z$  telle que :

$$dG^* = \left( \frac{\partial G^*}{\partial T} \right)_z dT + \left( \frac{\partial G^*}{\partial z} \right)_T dz = 0$$

pour toute valeur de  $dT$  et de  $dz$ . Cette condition impose :

$$\left( \frac{\partial G^*}{\partial z} \right)_{(T_0, z_e)} = 0 \Rightarrow \frac{-nRT_0}{z_e} + (sp_a + mg) = 0 \Rightarrow z_e = \frac{nRT_0}{sp_a + mg}$$

Ce résultat est heureusement compatible avec la relation (139) établi par la mécanique.

En outre, l'équilibre est stable si  $G^*(z_e, T_0)$  représente un *minimum* de  $G^*(z, T_0)$ , vers lequel  $G^*$  tendra au cours de toute évolution. Or :

$$\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = \frac{nRT_0}{z_e^2} > 0$$

suffit à montrer que  $G^*(z_e, T_0)$  est un *minimum* de la fonction  $G^*(T, z)$  ; la position d'équilibre est stable.

## ● 182 ————— Concours Commun Polytechnique

1. La variation  $\Delta G^* = \Delta U - T_0 \Delta S + p_0 \Delta V$  est accessible à partir de celle de l'énergie interne :

$$\Delta U = Q + W$$

où le travail reçu entre l'état initial ( $A$ ) et l'état final ( $B$ ) vaut :

$$W = - \int_A^B p_{\text{ext}} dV = - \int_A^B p_0 dV = -p_0 \Delta V$$

et où la chaleur reçue par le gaz vérifie l'inégalité de Clausius :

$$\begin{aligned} \Delta S &\geq \frac{Q}{T_0} \Rightarrow Q \leq T_0 \Delta S \\ &\Rightarrow \Delta U \leq T_0 \Delta S - p_0 \Delta V \\ &\Rightarrow \Delta G^* \leq (T_0 \Delta S - p_0 \Delta V) - T_0 \Delta S + p_0 \Delta V \\ &\Rightarrow \Delta G^* \leq 0 \end{aligned}$$

Cette inégalité montre que lors d'une évolution monotherme et monobare la fonction  $G^*$  ne peut que décroître ; l'égalité  $\Delta G^* = 0$  n'est vérifiée que lorsque l'équilibre est atteint. C'est pourquoi  $G^* = U - T_0 S + p_0 V$  est un potentiel thermodynamique adapté au système.

2. L'énergie interne du gaz parfait ne dépend que de sa température :

$$U = C_V T + U_0 \quad (U_0 = \text{cte})$$

tandis que son entropie peut s'exprimer en fonction de  $T$ ,  $p$  et d'une constante  $S_0$  :

$$\begin{aligned} S &= \frac{nR}{\gamma-1} \ln(T^\gamma p^{1-\gamma}) + S_0 = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} \ln T - nR \ln p + S_0 \\ &= C_p \ln T - nR \ln p + S_0 \end{aligned}$$

Enfin, l'équation d'état du gaz parfait :

$$pV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{p}$$

permet de trouver l'expression du potentiel thermodynamique :

$$\begin{aligned} G^* &= U - T_0 S + p_0 V \\ &= C_V T + U_0 - C_p T_0 \ln T + nRT_0 \ln p - T_0 S_0 + nRT \frac{p_0}{p} \end{aligned}$$

soit encore, en posant  $G_0^* = U_0 - T_0 S_0$  :

$$G^*(T, p) = C_V T - C_p T_0 \ln T + nRT_0 \ln p + nRT \frac{p_0}{p} + G_0^*$$

En outre, l'équilibre du gaz est atteint lorsque  $G^*(T, p)$  est *minimum*, c'est-à-dire lorsque :

$$dG^* = \left( \frac{\partial G^*}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial G^*}{\partial p} \right)_T dp$$

s'annule quelles que soient les valeurs de  $dT$  et  $dp$ , ce qui impose :

$$\left( \frac{\partial G^*}{\partial p} \right)_{(T_f, p_f)} = 0 \Rightarrow \frac{nRT_0}{p_f} - \frac{nRT_f p_0}{p_f^2} = 0 \quad (140)$$

$$\Rightarrow \frac{nRT_f}{p_f} \left( \frac{T_0}{T_f} - \frac{p_0}{p_f} \right) = 0 \quad (141)$$

$$\Rightarrow \frac{T_0}{T_f} = \frac{p_0}{p_f} \quad (142)$$

et :

$$\left( \frac{\partial G^*}{\partial T} \right)_{(T_f, p_f)} = 0 \Rightarrow C_V - \frac{C_p T_0}{T_f} + nR \frac{p_0}{p_f} = 0$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'équation (142) :

$$C_V - \frac{C_p T_0}{T_f} + \frac{nRT_0}{T_f} = \frac{C_V T_f - (C_p - nR) T_0}{T_f} = 0$$

où la relation de Mayer conduit à :

$$C_p - C_V = nR \Rightarrow C_p - nR = C_V \Rightarrow \frac{C_V}{T_f} (T_f - T_0) = 0 \Rightarrow T_f = T_0$$

Ce faisant, l'équation (142) devient :

$$\frac{p_0}{p_f} = 1 \Rightarrow p_f = p_0$$

3. Les définitions de  $U = C_V T + U_0$  et de  $S = C_p \ln T - nR \ln p + S_0$  conduisent à poser :

$$F^* = U - T_0 S = C_V T - T_0 C_p \ln T + nRT_0 \ln p + U_0 - T_0 S_0$$

Entre l'état initial  $(T_0, p_1 = 2p_0)$  et l'état final  $(T_0, p_0)$ , la fonction  $F^*$  est donc passée de

$$F^*(T_0, 2p_0) = C_V T_0 - T_0 C_p \ln T_0 + nRT_0 \ln(2p_0) + U_0 - T_0 S_0$$

à :

$$F^*(T_0, p_0) = C_V T_0 - T_0 C_p \ln T_0 + nRT_0 \ln p_0 + U_0 - T_0 S_0$$

ce qui représente une variation :

$$\Delta F^* = F^*(T_0, p_0) - F^*(T_0, 2p_0) \Rightarrow \Delta F^* = -nRT_0 \ln 2 < 0$$

## ● 183 ————— Concours Centrale - Sup'elec

### I- Loi de Laplace

Si  $r_1 > r_2$ , la loi de Laplace prévoit que :

$$\frac{4\sigma}{r_1} < \frac{4\sigma}{r_2} \Rightarrow p_1 - p_0 < p_2 - p_0 \Rightarrow p_1 < p_2$$

Aussi, la surpression qui apparaît dans la bulle la plus petite provoque le déplacement de l'air vers la bulle la plus grande :

la petite bulle se « vide » dans la plus grande.

### II- Approche quantitative

1. Un potentiel thermodynamique est une fonction d'état d'un système qui devient *minimum* lorsque ce système atteint une position d'équilibre.
2. Au cours d'une évolution monotherme ( $T$ ) et monobare ( $p_0$ ), le système ne reçoit de l'extérieur que le travail  $\delta W = -p_0 dV$  et la chaleur  $\delta Q$ , soumise à l'inégalité de Clausius :

$$\delta Q \leq T dS$$

Aussi, l'énergie interne de ce système varie de la quantité :

$$dU = \delta Q + \delta W \leq -p_0 dV + T dS$$

de sorte que la fonction  $G^* = U - TS + p_0 V$  varie de :

$$\begin{aligned} dG^* &= dU - T dS + p_0 dV \leq (-p_0 dV + T dS) - T dS + p_0 dV \\ &\Rightarrow dG^* \leq 0 \end{aligned}$$

Cette inégalité suffit à montrer que  $G^*$  est un potentiel thermodynamique : au cours d'une transformation monobare et monotherme  $G^*$  décroît.

3. (a) Le système étudié comporte quatre parties : les deux gaz et les membranes savonneuses. Aussi, l'énergie interne de ce système vaut :

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + U_{m1} + U_{m2} \\ \Rightarrow dU &= dU_1 + dU_2 + dU_{m1} + dU_{m2} \\ \Rightarrow dU &= dU_1 + dU_2 + T dS_{m1} + \sigma d\Sigma_{m1} + T dS_{m2} + \sigma d\Sigma_{m2} \end{aligned}$$

Quant à son entropie et son volume, ils valent :

$$S = S_1 + S_2 + S_{m1} + S_{m2} \Rightarrow T dS = T dS_1 + T dS_2 + T dS_{m1} + T dS_{m2}$$

et :

$$V = V_1 + V_2 + V_{m1} + V_{m2} \Rightarrow p_0 dV \simeq p_0 dV_1 + p_0 dV_2$$

en supposant constants les volumes d'eau savonneuse. C'est pourquoi :

$$dG^* = dU - T dS + p_0 dV$$

c'est-à-dire :

$$dG^* = dU_1 + dU_2 - T dS_1 - T dS_2 + p_0 (dV_1 + dV_2) + \sigma d\Sigma_{m1} + \sigma d\Sigma_{m2} \quad (143)$$

- (b) Compte tenu des relations fournies par l'énoncé :

$$p_0 = p_1 - \frac{4\sigma}{r_1} \text{ et } p_0 = p_2 - \frac{4\sigma}{r_2}$$

il s'ensuit que :

$$p_0 dV_1 + p_0 dV_2 = p_1 dV_1 + p_2 dV_2 - 4\sigma \frac{dV_1}{r_1} - 4\sigma \frac{dV_2}{r_2}$$

avec :

$$V_i = \frac{4}{3} \pi r_i^3 \Rightarrow dV_i = 4\pi r_i^2 dr_i \Rightarrow 4\sigma \frac{dV_i}{r_i} = 16\sigma \pi r_i dr_i$$

En outre :

$$\Sigma_{mi} = 8\pi r_i^2 \Rightarrow d\Sigma_{mi} = 16\pi r_i dr_i$$

De ce fait, l'identité (143) devient :

$$\begin{aligned} dG^* &= dU_1 + dU_2 - T dS_1 - T dS_2 + p_1 dV_1 + p_2 dV_2 \\ &\quad - 16\sigma \pi r_1 dr_1 - 16\sigma \pi r_2 dr_2 + 16\sigma \pi r_1 dr_1 + 16\sigma \pi r_2 dr_2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, après simplification :

$$dG^* = dU_1 + dU_2 - T dS_1 - T dS_2 + p_1 dV_1 + p_2 dV_2 \quad (144)$$

- (c) La définition de l'enthalpie libre :

$$G_i = U_i - TS_i + p_i V_i \Rightarrow dG_i = dU_i - T dS_i - S_i dT + p_i dV_i + V_i dp_i$$

associée à la différentielle fournie par l'énoncé :

$$dG_i = -S_i dT + V_i dp_i + \mu_i dN_i$$



conduit à :

$$\begin{aligned} dU_i - T dS_i - S_i dT + p_i dV_i + V_i dp_i &= -S_i dT + V_i dp_i + \mu_i dN_i \\ \Rightarrow dU_i &= T dS_i - p_i dV_i + \mu_i dN_i \end{aligned}$$

Ce faisant, la relation (144) s'écrit :

$$\begin{aligned} dG^* &= (T dS_1 - p_1 dV_1 + \mu_1 dN_1) + (T dS_2 - p_2 dV_2 + \mu_2 dN_2) \\ &\quad - T dS_1 - T dS_2 + p_1 dV_1 + p_2 dV_2 \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$dG^* = \mu_1 dN_1 + \mu_2 dN_2$$

(d) L'expression du potentiel chimique d'un gaz parfait, rappelée dans l'énoncé :

$$\mu_i(p_i, T) = RT \ln p_i + f(T)$$

conduit à poser :

$$dG^* = RT [dN_1 \ln p_1 + dN_2 \ln p_2] + (dN_1 + dN_2) f(T)$$

Or, le système étant fermé, le nombre  $N = N_1 + N_2$  de moles d'air demeure constant, si bien que :

$$dN = dN_1 + dN_2 = 0 \Rightarrow dN_2 = -dN_1 \quad (145)$$

$$\Rightarrow dG^* = RT \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \times dN_1 \quad (146)$$

4. Les variables  $p_1, p_2, r_1, r_2, N_1$  et  $N_2$  sont liées par :

- la loi de conservation de la matière :

$$N_1 + N_2 = \text{cte} \quad (147)$$

- l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p_1 V_1 = N_1 RT \Rightarrow p_1 \times \frac{4}{3} \pi r_1^3 = N_1 RT$$

$$p_2 V_2 = N_2 RT \Rightarrow p_2 \times \frac{4}{3} \pi r_2^3 = N_2 RT$$

- la loi de Laplace :

$$p_1 = p_0 + \frac{4\sigma}{r_1} \quad \text{et} \quad p_2 = p_0 + \frac{4\sigma}{r_2}$$

De la loi de Laplace, il découle que :

$$p_i = p_0 + \frac{4\sigma}{r_i} \Rightarrow \frac{dp_i}{dr_i} = -\frac{4\sigma}{r_i^2} < 0 \quad (148)$$

tandis que l'équation d'état des gaz parfaits conduit à :

$$\begin{aligned} N_i RT &= p_i \times \frac{4}{3} \pi r_i^3 = \left( p_0 + \frac{4\sigma}{r_i} \right) \times \frac{4}{3} \pi r_i^3 \\ &= \frac{4}{3} \pi (p_0 r_i^3 + 4\sigma r_i^2) \\ \Rightarrow \frac{dN_i}{dr_i} &= \frac{4\pi}{3RT} (3p_0 r_i^2 + 8\sigma r_i) > 0 \end{aligned}$$

Ce faisant, quand  $r_1$  croît :

- $p_1$  diminue, conformément à la relation (148) :  $\frac{dp_1}{dr_1} < 0$  ;
- $N_1$  augmente car  $\frac{dN_1}{dr_1} > 0$  ;
- $N_2$  diminue, en vertu de la loi (147) :  $N_1 + N_2 = \text{cte}$  ;
- $r_2$  diminue aussi car  $\frac{dN_2}{dr_2} > 0$  ;
- $p_2$  augmente, selon la relation (148) :  $\frac{dp_2}{dr_2} < 0$ .

5. Compte tenu de la loi de Laplace :

$$r_1 > r_2 \Rightarrow p_0 + \frac{4\sigma}{r_1} < p_0 + \frac{4\sigma}{r_2} \Rightarrow p_1 < p_2$$

Ce faisant, la relation (146) :

$$dG^* = RT \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \times dN_1 \leq 0$$

doit être vérifiée pour  $\ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) < 0$ , ce qui n'est possible que si  $dN_1 \geq 0$ . Ainsi, lorsque  $r_1 > r_2$ ,  $N_1$  augmente au détriment de  $N_2$  : la petite bulle se « vide » dans la grande.

En revanche, si  $r_1 = r_2$ , la loi de Laplace montre que  $p_1 = p_2$ , de sorte que :

$$\frac{\partial G^*}{\partial N_1} = RT \ln \left( \frac{p_1}{p_2} \right) = 0$$

ce qui signifie que  $G^*$  est *minimum* ; l'équilibre est atteint.

## ● 184 ————— Concours INA - ENSA

1. Étant en contact avec un milieu de pression extérieure  $p_{\text{ext}} = p_0$ , le système reçoit un travail :

$$\delta W = -p_{\text{ext}} dV = -p_0 dV$$

de sorte que son énergie interne varie de la quantité :

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - p_0 dV$$

Or, conformément à l'inégalité de Clausius, la variation d'entropie  $dS$  de ce système vérifie :

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T_0} \Rightarrow \delta Q \leq T_0 dS \Rightarrow dU \leq T_0 dS - p_0 dV$$

C'est pourquoi la variation de la fonction  $G^* = U + p_0 V - T_0 S$  vaut :

$$\begin{aligned} dG^* &= dU + p_0 dV - T_0 dS \leq (T_0 dS - p_0 dV) + p_0 dV - T_0 dS \\ &\Rightarrow dG^* \leq 0 \end{aligned}$$

2. L'enthalpie libre du système :

$$G = g_L \left( \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{4}{3} \pi r^3 \right) + g_S \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

varie de la quantité :

$$dG = 4\pi r^2 dr \times (g_S - g_L)$$

où  $g_L > g_S$ . Ce faisant, l'inégalité  $dG \leq 0$  ne peut être satisfaite qu'à condition que  $dr \geq 0$ , c'est-à-dire que :

le rayon  $r$  du cristal de glace augmente jusqu'à atteindre la valeur  $R$ ; le système est alors totalement solide.

3. (a) Soit la fonction :

$$G(r) = \frac{4}{3} \pi R^3 g_L + \frac{4}{3} \pi r^3 \times (g_S - g_L) + 4\pi r^2 A$$

dont la dérivée par rapport à  $r$  vaut :

$$\frac{dG}{dr} = 4\pi r^2 \times (g_S - g_L) + 8\pi r A = 4\pi r \times [(g_S - g_L) r + 2A]$$

et s'annule pour les valeurs :

$$r_0 = 0 \text{ et } r_B = \frac{2A}{g_L - g_S} > 0$$

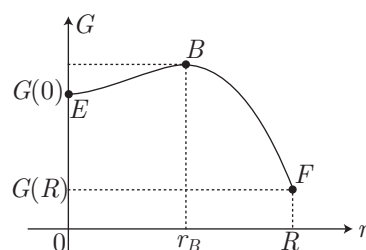
En outre :

$$\frac{d^2G}{dr^2} = 8\pi r \times (g_S - g_L) + 8\pi A$$

montre que :

$$\left. \frac{d^2G}{dr^2} \right|_{r_0} = 8\pi A > 0 \text{ et } \left. \frac{d^2G}{dr^2} \right|_{r_B} = -8\pi A < 0$$

c'est-à-dire qu'aux valeurs  $r = r_0 = 0$  et  $r = r_B$ , la fonction  $G$  est respectivement *minimum* et *maximum*.



Cette courbe révèle que  $E$  et  $F$  sont des états d'équilibre stables. Cependant l'équilibre instable  $B$  ne peut réellement être atteint qu'à condition que  $R > r_B$ , c'est-à-dire :

$$R > \frac{2A}{g_L - g_S}$$

(b) Déterminons, au préalable, les expressions de  $G$  en  $E$ ,  $B$  et  $F$  :

$$G_E = G(r = 0) = \frac{4}{3} \pi R^3 g_L$$

$$\begin{aligned} G_B = G(r = r_B) &= g_L \times \frac{4}{3} \pi R^3 + (g_S - g_L) \times \frac{4}{3} \pi r_B^3 + 4\pi A r_B^2 \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 g_L + 4\pi r_B^2 \left[ \frac{g_S - g_L}{3} r_B + A \right] \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 g_L + 4\pi \left( \frac{2A}{g_L - g_S} \right)^2 \times \left[ \frac{g_S - g_L}{3} \times \frac{2A}{g_L - g_S} + A \right] \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 g_L + 4\pi \times \frac{4A^2}{(g_L - g_S)^2} \times \left( -\frac{2A}{3} + A \right) \end{aligned}$$

soit encore :

$$G_B = \frac{4}{3} \pi R^3 g_L + \frac{16\pi A^3}{3 (g_L - g_S)^2}$$

et enfin :

$$G_F = G(r = R) = g_S \times \frac{4}{3} \pi R^3 + 4\pi R^2 A$$

À partir de ces résultats, il est possible de calculer :

$$\Delta G_a = G_B - G_E = \frac{16\pi A^3}{3 (g_L - g_S)^2}$$

et :

$$\Delta G'_a = G_B - G_F = \frac{4}{3} \pi R^3 (g_L - g_S) + \frac{16\pi A^3}{3 (g_L - g_S)^2} - 4\pi R^2 A$$

Si  $\Delta G_a$  et  $\Delta G'_a$  sont importants, l'état  $E$  est stable. Aussi, pour que l'état  $E$  soit métastable, il faut que  $\Delta G_a$  soit assez faible, d'où il découle que :

$$\begin{aligned} \Delta G'_a &= \frac{4}{3} \pi R^3 (g_L - g_S) + \Delta G_a - 4\pi R^2 A \\ &\simeq \frac{4}{3} \pi R^3 (g_L - g_S) - 4\pi R^2 A \end{aligned}$$

En outre, pour que l'état  $F$  soit atteint par le système, il doit être plus stable que l'état  $B$ , ce qui s'exprime par :

$$\begin{aligned} \Delta G'_a > 0 &\Rightarrow 4\pi R^2 \left[ \frac{R}{3} (g_L - g_S) - A \right] > 0 \\ &\Rightarrow R > \frac{3A}{g_L - g_S} \end{aligned}$$

4. (a) L'eau surfondue existe car l'état  $E$  correspondant est stable.  
 (b) L'agitation apporte au système une énergie nécessaire au franchissement de  $\Delta G_a = G_B - G_E$ . Ce faisant, le système peut atteindre l'état  $B$ , d'où il rejoint l'état  $F$  ; tout le système se solidifie alors.

Remarque – L'apport d'un germe de glace aurait le même effet, car un morceau de glace dans ce système serait caractérisé par  $r \neq 0$  (si  $r > r_B$ , le système se solidifie).

- (c) La surfusion permet d'expliquer comment agissent les pluies verglaçantes : de l'eau froide (à une température inférieure à  $0^\circ\text{C}$ ) atteint le sol sous forme liquide. Le choc avec le sol apporte l'énergie nécessaire au passage de l'eau de son état métastable à son état stable : la glace.

● **185** **Concours des Mines**

1. Soient  $v_g$  et  $v_\ell$  les volumes massiques de la phase gazeuse et de la phase liquide d'un corps pur. La pression  $p_{\text{sat}}$  d'équilibre entre ces deux phases, à la température  $T$ , vérifie la formule de Clapeyron :

$$\ell_v = T (v_g - v_\ell) \frac{dp_{\text{sat}}}{dT}$$

Compte tenu de la densité du gaz et de celle du liquide, il est possible de négliger  $v_\ell$  devant  $v_g$  :

$$\ell_v \simeq T v_g \frac{dp_{\text{sat}}}{dT} \tag{149}$$

En outre, une quantité  $n_g$  de moles de vapeur saturante (de masse  $m_g = n_g M$ ), à la température  $T$  et à la pression  $p_{\text{sat}}$ , occupant le volume  $V_g$ , se comporte comme un gaz parfait, d'équation d'état :

$$p_{\text{sat}} V_g = n_g R T = m_g \frac{R T}{M} \Rightarrow v_g = \frac{V_g}{m_g} = \frac{R T}{M p_{\text{sat}}}$$

auquel cas l'équation (149) devient :

$$\ell_v = \frac{R T^2}{M p_{\text{sat}}} \frac{dp_{\text{sat}}}{dT} \Rightarrow \frac{dp_{\text{sat}}}{p_{\text{sat}}} = \frac{M}{R} \frac{\ell_v dT}{T^2}$$

Notamment, puisqu'à  $T = T_0 = 373 \text{ K}$ ,  $p_{\text{sat}} = p_0 = 1 \text{ bar}$  :

$$\int_{p_0}^{p_{\text{sat}}} \frac{dp_{\text{sat}}}{p_{\text{sat}}} = \frac{M}{R} \int_{T_0}^T \frac{\ell_v}{T^2} dT \Rightarrow \ln \left( \frac{p_{\text{sat}}}{p_0} \right) = \frac{M}{R} \int_{T_0}^T \frac{\ell_v}{T^2} dT \tag{150}$$

**CORRIGÉS**

(a) Lorsque  $\ell_v = \ell_0$  est constant, cette équation conduit à :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{p_{\text{sat}}}{p_0}\right) &= \frac{M\ell_0}{R} \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2} = \frac{M\ell_0}{R} \times \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) \\ \Rightarrow p_{\text{sat}} &= p_0 \times \exp\left[\frac{M\ell_0}{R} \times \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right]\end{aligned}$$

*Application numérique :* pour  $T = 423 \text{ K}$  :

$$p_{\text{sat}} = 1 \times \exp\left[\frac{18.10^{-3} \times 2250.10^3}{8,314} \times \left(\frac{1}{373} - \frac{1}{423}\right)\right] \Rightarrow p_{\text{sat}}(423 \text{ K}) = 4,68 \text{ bar}$$

(b) En choisissant  $\ell_v = \alpha - \beta T$  avec  $\alpha = 3340.10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $\beta = 2,93.10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ , l'équation (150) devient :

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{p_{\text{sat}}}{p_0}\right) &= \frac{M}{R} \left[ \int_{T_0}^T \frac{\alpha}{T^2} dT - \int_{T_0}^T \beta \frac{dT}{T} \right] \\ &= \frac{M}{R} \left[ \alpha \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right) + \beta \ln\left(\frac{T_0}{T}\right) \right] \\ \Rightarrow \frac{p_{\text{sat}}}{p_0} &= \exp\left[\frac{\alpha M}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right] \times \exp\left[\frac{\beta M}{R} \ln\left(\frac{T_0}{T}\right)\right]\end{aligned}$$

soit encore :

$$p_{\text{sat}} = p_0 \times \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\beta M/R} \times \exp\left[\frac{\alpha M}{R} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right]$$

*Application numérique :*

$$\begin{aligned}p_{\text{sat}} &= 1 \times \left(\frac{373}{423}\right)^{\frac{2,93.10^3 \times 18.10^{-3}}{8,314}} \\ &\quad \times \exp\left[\frac{3340.10^3 \times 18.10^{-3}}{8,314} \times \left(\frac{1}{373} - \frac{1}{423}\right)\right] \\ \Rightarrow p_{\text{sat}}(423 \text{ K}) &= 4,45 \text{ bar}\end{aligned}$$

2. Soit  $V_g$  le volume occupé par  $n_g$  moles de vapeur saturante, à la température  $T_1$  et à la pression  $p_{\text{sat}} = 4,6 \text{ bar}$  :

$$p_{\text{sat}} V_g = n_g R T_1 = m_g \frac{R T_1}{M} \Rightarrow V_g = m_g \times \frac{R T_1}{M p_{\text{sat}}}$$

Le volume  $V_0$  de l'enceinte contient un volume  $V_g$  de gaz et un volume  $V_\ell$  de liquide :  $V_0 = V_g + V_\ell$ . Aussi, en notant  $m_\ell = m_0 - m_g$  la masse de la phase li-

guide :

$$\begin{aligned}
 V_\ell = m_\ell v_\ell = m_0 v_\ell - m_g v_\ell &\Rightarrow V_0 = m_g \times \frac{RT_1}{Mp_{\text{sat}}} + m_0 v_\ell - m_g v_\ell \\
 &\Rightarrow m_g \left( \frac{RT_1}{Mp_{\text{sat}}} - v_\ell \right) = V_0 - m_0 v_\ell \\
 &\Rightarrow m_g = \frac{V_0 - m_0 v_\ell}{\frac{RT_1}{Mp_{\text{sat}}} - v_\ell}
 \end{aligned}$$

Application numérique :

$$m_g = \frac{10^{-3} - 0,1 \times 10^{-3}}{\frac{8,314 \times 423}{18 \cdot 10^{-3} \times 4,6 \cdot 10^5} - 10^{-3}} \Rightarrow m_g = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 2,1 \text{ g}$$

et :

$$m_\ell = m_0 - m_g = 100 - 2,1 = 97,9 \text{ g}$$

**⚠** Il aurait été hasardeux d'écrire :

$$p_{\text{sat}} V_0 = n_g RT_1 \Rightarrow n_g = \frac{p_{\text{sat}} V_0}{RT_1} \Rightarrow m_g = \frac{p_{\text{sat}} V_0}{RT_1} \times M$$

car ces équations suggèrent que la phase gazeuse occupe tout le volume  $V_0$  de l'enceinte. Or, les résultats précédents montrent que le volume d'eau liquide n'est pas négligeable par rapport à celui de la vapeur d'eau.

## ● 186 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Les échanges thermiques  $Q$  se réalisant à pression  $p_0$  constante, il s'identifient à la variation d'enthalpie  $\Delta H$  du système.

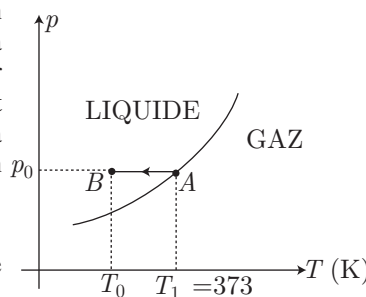
Or, l'eau subit la transformation  $A(T_1, p_0) \rightarrow B(T_0, p_0)$ , où  $T_0$  est inférieur à la température  $T_1$  d'équilibre liquide-vapeur à la pression  $p_0$ . C'est pourquoi dans l'état  $B$  l'eau est totalement liquide. En outre, la transformation  $A \rightarrow B$  peut se décomposer en deux étapes :

- liquéfaction de la masse  $m$  de gaz, à  $T_1$  et  $p_0$  ; la variation d'enthalpie du système vaut :

$$\Delta H_1 = -m\ell_v$$

- refroidissement du liquide de  $T_1$  à  $T_0$  ; la température  $T$  de l'eau variant de  $dT$ , le système reçoit la chaleur :

$$\delta Q = mc_\ell dT$$



**CORRIGÉS**

c'est-à-dire que l'enthalpie du système varie de :

$$dH_2 = \delta Q = mc_\ell dT \Rightarrow \Delta H_2 = mc_\ell (T_0 - T_1)$$

Finalement, au cours de la transformation  $A \rightarrow B$ , l'enthalpie de l'eau a varié de :

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = mc_\ell (T_0 - T_1) - m\ell_v$$

ce qui signifie que ce système a reçu la chaleur :

$$Q = \Delta H = mc_\ell (T_0 - T_1) - m\ell_v$$

Soient  $V_g$  et  $V_\ell$  les volumes du gaz à  $T_1$  et du liquide à  $T_0$ . La pression extérieure  $p_0$  exerce un travail :

$$\delta W = -p_0 dV \Rightarrow W = -p_0 (V_\ell - V_g)$$

où les volumes massiques du liquide et du gaz sont définis par :

$$v_\ell = \frac{V_\ell}{m} \Rightarrow V_\ell = mv_\ell \text{ et } v_g = \frac{V_g}{m} \Rightarrow V_g = mv_g$$

Il s'ensuit que :

$$W = -p_0 m (v_\ell - v_g)$$

2. La transformation  $A \rightarrow B$  peut être décomposée en :

- une étape de liquéfaction (en  $A$ ) à la température  $T_1$  constante. Au cours de cette transformation (réversible), le gaz reçoit la chaleur :

$$Q_1 = -m\ell_v$$

à laquelle est associée une variation d'entropie :

$$\Delta S_1 = -\frac{m\ell_v}{T_1}$$

- une étape de refroidissement du liquide, de la température  $T_1$  à la température  $T_0$ . Pour que cette transformation soit réversible, il convient de maintenir la température extérieure en permanence égale à la température  $T$  du liquide, qui reçoit alors une chaleur :

$$\delta Q_2 = mc_\ell dT$$

à laquelle est alors associée la variation d'entropie :

$$dS_\ell = mc_\ell \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_2 = mc_\ell \int_{T_1}^{T_0} \frac{dT}{T} = mc_\ell \ln \left( \frac{T_0}{T_1} \right)$$

Aussi, à l'issue de la transformation  $A \rightarrow B$ , l'entropie du système varie de :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\frac{m\ell_v}{T_1} + mc_\ell \ln \left( \frac{T_0}{T_1} \right)$$

En outre, le système reçoit la chaleur totale :

$$Q = Q_1 + Q_2 = -m\ell_v + mc_\ell (T_0 - T_1)$$



alors qu'il est en contact avec un thermostat à la température  $T_0$ . L'entropie ainsi reçue par transfert thermique vaut :

$$S_e = \frac{Q}{T_0} = -\frac{m\ell_v}{T_0} + mc_\ell \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right)$$

Par conséquent il se crée, dans le système, une entropie  $S_c$  telle que :

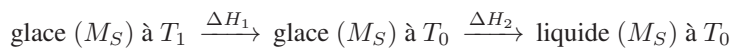
$$\Delta S = S_e + S_c \Rightarrow S_c = \Delta S - S_e$$

$$\Rightarrow S_c = m \left[ c_\ell \ln \left( \frac{T_0}{T_1} \right) - c_\ell \left( 1 - \frac{T_1}{T_0} \right) + \ell_v \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right) \right]$$

## ● 187 ————— Concours Commun Polytechnique

### I- Transferts de chaleur

1. (a) Pour effectuer la transformation (glace à  $T_1 < T_0$ )  $\rightarrow$  (liquide à  $T_0$ ), on peut envisager un état intermédiaire où la glace se trouve à la température  $T_0$  :



Au cours de la première étape, l'enthalpie de la glace varie de la quantité :

$$\Delta H_1 = M_S c_{pS} (T_0 - T_1)$$

tandis que le changement d'état à  $T_0$  provoque une variation d'enthalpie :

$$\Delta H_2 = M_S \ell_f(T_0, p_0)$$

Ainsi, au cours de la totalité de la transformation, l'enthalpie de l'eau varie de :

$$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 = M_S [c_{pS} (T_0 - T_1) + \ell_f(T_0, p_0)]$$

- (b) Application numérique :

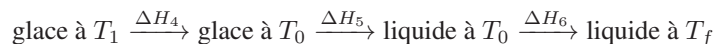
$$\Delta H = 1 \times [2,09 \cdot 10^3 \times (273 - 253) + 334 \cdot 10^3] \Rightarrow \Delta H = 375,8 \text{ kJ}$$

2. (a) Soit  $T_f \geq T_0$  la température finale de l'eau liquide.

- La masse  $M_L$  d'eau liquide passe simplement de la température  $T_2$  à la température  $T_f$  ; son enthalpie varie de :

$$\Delta H_3 = M_L c_{pL} (T_f - T_2)$$

- La masse  $M_S$  de glace subit un échauffement de la température  $T_1$  à la température  $T_0$ , puis une fusion totale à la température  $T_0$  et enfin un échauffement de la température  $T_0$  à la température  $T_f$  :



Au cours de chacune de ces étapes, l'enthalpie de la masse  $M_S$  d'eau varie de :  $\Delta H_4 = M_S c_{pS} (T_0 - T_1)$ ,  $\Delta H_5 = M_S \ell_f(T_0, p_0)$  et  $\Delta H_6 = M_S c_{pL} (T_f - T_0)$ .

Ainsi, l'enthalpie de l'eau contenue dans le calorimètre varie de la quantité totale :

$$\begin{aligned}\Delta H_{\text{tot}} &= \Delta H_3 + \Delta H_4 + \Delta H_5 + \Delta H_6 \\ &= M_L c_{pL} (T_f - T_2) + M_S c_{pS} (T_0 - T_1) \\ &\quad + M_S \ell_f(T_0, p_0) + M_S c_{pL} (T_f - T_0) \\ &= (M_L c_{pL} + M_S c_{pL}) T_f + M_S c_{pS} (T_0 - T_1) + M_S \ell_f(T_0, p_0) \\ &\quad - (M_L c_{pL} T_2 + M_S c_{pL} T_0)\end{aligned}$$

Or, à pression constante,  $\Delta H_{\text{tot}}$  s'identifie à la chaleur  $Q = 0$  transférée à travers les parois du calorimètre (calorifugé). C'est pourquoi :

$$M_L c_{pL} T_2 + M_S c_{pL} T_0 - M_S c_{pS} (T_0 - T_1) - M_S \ell_f(T_0, p_0) = (M_L c_{pL} + M_S c_{pL}) T_f$$

où  $T_f \geq T_0$  assure la présence d'eau exclusivement liquide. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}M_L c_{pL} T_2 + M_S c_{pL} T_0 - M_S c_{pS} (T_0 - T_1) - M_S \ell_f(T_0, p_0) &\geq (M_L c_{pL} + M_S c_{pL}) T_0 \\ \Rightarrow M_L c_{pL} T_2 &\geq M_S \ell_f(T_0, p_0) + M_S c_{pS} (T_0 - T_1) + M_L c_{pL} T_0 \\ \Rightarrow T_2 &\geq \frac{M_S \ell_f(T_0, p_0) + M_S c_{pS} (T_0 - T_1) + M_L c_{pL} T_0}{M_L c_{pL}}\end{aligned}$$

Il existe donc une température *minimum* :

$$T_{2 \min} = \frac{M_S \ell_f(T_0, p_0) + M_S c_{pS} (T_0 - T_1) + M_L c_{pL} T_0}{M_L c_{pL}}$$

(b) Application numérique :

$$\begin{aligned}T_{2 \min} &= \frac{334.10^3 + 2,09.10^3 \times (273 - 253) + 4,18.10^3 \times 273}{4,18.10^3} \\ \Rightarrow T_{2 \min} &= 363 \text{ K}\end{aligned}$$

## II- Cessation d'un état métastable

1. Lorsque l'équilibre est atteint, une masse  $m_S$  de glace coexiste avec une masse  $M_L - m_S$  d'eau liquide (la solidification de l'eau est partielle). C'est pourquoi :

$$T_f = T_0 = 273 \text{ K}$$

2. La rupture de l'équilibre métastable peut être envisagée en deux étapes :

- réchauffement de la masse  $M_L$  de liquide de la température  $T_3$  à la température  $T_f = T_0$  :

$$\Delta H_7 = M_L c_{pL} (T_0 - T_3)$$

- solidification, à  $T_0$ , d'une masse  $m_S$  d'eau, qui provoque une variation d'enthalpie :

$$\Delta H_8 = -m_S \ell_f(T_0, p_0)$$

Ce faisant, au cours de cette transformation, l'enthalpie du système varie de :

$$\Delta H = \Delta H_7 + \Delta H_8 = M_L c_{pL} \times (T_0 - T_3) - m_S \ell_f(T_0, p_0)$$

Or, à pression constante,  $\Delta H$  s'identifie au transfert thermique  $Q$ , nul dans une enceinte calorifugée. C'est pourquoi :

$$m_S \ell_f(T_0, p_0) = M_L c_{pL} \times (T_0 - T_3) \Rightarrow m_S = \frac{M_L c_{pL} \times (T_0 - T_3)}{\ell_f(T_0, p_0)} \quad (151)$$

3. À nouveau, la rupture de la surfusion peut être envisagée en deux étapes :

- réchauffement réversible de la masse  $M_L$  d'eau liquide, de la température  $T_3$  à la température  $T_0$  : lorsque le liquide adopte une température  $T$ , il est mis en contact avec un thermostat de température  $T + dT \simeq T$ . Sa température augmente de  $dT$  tandis qu'il reçoit, de manière quasi-statique, la chaleur :

$$\delta Q_7^{(\text{rév})} = M_L c_{pL} dT$$

conséquemment, son entropie varie de :

$$dS_7 = \frac{\delta Q_7^{(\text{rév})}}{T} = M_L c_{pL} \frac{dT}{T}$$

Aussi, à l'issue du réchauffement de  $T_3$  à  $T_0$ , l'entropie de l'eau varie de la quantité :

$$\Delta S_7 = M_L c_{pL} \int_{T_3}^{T_0} \frac{dT}{T} = M_L c_{pL} \ln \left( \frac{T_0}{T_3} \right)$$

- la solidification d'une masse  $m_S$  d'eau peut être effectuée de manière réversible en maintenant un contact thermique avec un thermostat à  $T_0$ . La chaleur  $\delta Q_8^{(\text{rév})}$  reçue par l'eau est à l'origine de sa variation d'entropie :

$$dS_8 = \frac{\delta Q_8^{(\text{rév})}}{T_0} \Rightarrow \Delta S_8 = \int \frac{\delta Q_8^{(\text{rév})}}{T_0} = \frac{Q_8^{(\text{rév})}}{T_0}$$

où  $Q_8^{(\text{rév})} = -m_S \ell_f(T_0, p_0)$  désigne la chaleur totale requise pour la solidification d'une masse  $m_S$  d'eau.

Finalement, l'entropie du système varie de :

$$\Delta S = \Delta S_7 + \Delta S_8 = M_L c_{pL} \ln \left( \frac{T_0}{T_3} \right) - m_S \frac{\ell_f(T_0, p_0)}{T_0}$$

c'est-à-dire, compte tenu du résultat (151) :

$$m_S \ell_f(T_0, p_0) = M_L c_{pL} \times (T_0 - T_3) \quad (152)$$

$$\Rightarrow \Delta S = M_L c_{pL} \left[ \ln \left( \frac{T_0}{T_3} \right) - \left( 1 - \frac{T_3}{T_0} \right) \right] \quad (153)$$

$$\Rightarrow \Delta S = M_L c_{pL} \left[ \frac{T_3}{T_0} - 1 - \ln \left( \frac{T_3}{T_0} \right) \right] \quad (154)$$

4. (a) Le résultat (151) conduit à :

$$m_S = \frac{1 \times 4,18.10^3 \times (273 - 263)}{334.10^3} \Rightarrow m_S = 0,125 \text{ kg} = 125 \text{ g}$$

(b) Quant au résultat (154), il fournit :

$$\Delta S = 1 \times 4,18 \cdot 10^3 \times \left[ \frac{263}{273} - 1 - \ln \left( \frac{263}{273} \right) \right] \Rightarrow \Delta S = 2,87 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

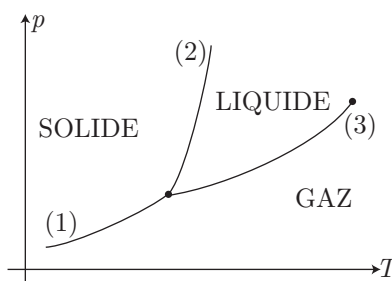
(c) Étant donné que le système est isolé de l'extérieur, l'entropie  $S_{\text{ext}}$  de l'extérieur ne varie pas. Ainsi l'entropie de l'univers  $S_{\Omega} = S + S_{\text{ext}}$  varie de :

$$\Delta S_{\Omega} = \Delta S + \underbrace{\Delta S_{\text{ext}}}_{=0} = 2,87 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

ce qui prouve la création d'entropie dans l'univers.

### III- Diagramme $p = f(T)$ du corps pur

1. D'une manière générale, le diagramme  $p = f(T)$  présente l'allure ci-dessous, où l'on distingue les courbes : (1) de sublimation, (2) de fusion et (3) de vaporisation.



2. (a) La pente de la courbe de fusion,  $\left( \frac{dp}{dT} \right)_{\text{fus}}$ , est directement accessible à partir de la relation de Clapeyron :

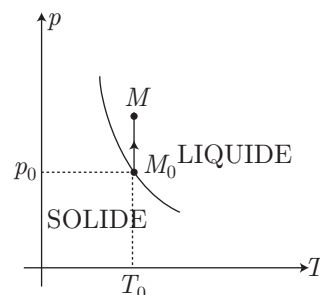
$$\ell_f(T_0, p_0) = T_0 (u_L - u_S) \left( \frac{dp}{dT} \right)_{M_0} \Rightarrow \left( \frac{dp}{dT} \right)_{M_0} = \frac{\ell_f(T_0, p_0)}{T_0 (u_L - u_S)}$$

Ainsi :

$$\left( \frac{dp}{dT} \right)_{M_0} = \frac{334 \cdot 10^3}{273 \times (10^{-3} - 1,09 \cdot 10^{-3})} \Rightarrow \left( \frac{dp}{dT} \right)_{M_0} = -136 \cdot 10^5 \text{ Pa} \cdot \text{K}^{-1}$$

(b) Ce résultat montre que la courbe de fusion, au voisinage du point  $M_0(T_0, p_0)$ , est décroissante (il s'agit là d'une spécificité de l'eau). Aussi, une compression isotherme (à  $T_0$ ) peut se traduire par :

- une fusion de la glace si, en  $M_0$ , l'eau est solide ;
- une absence de changement d'état si, en  $M_0$ , l'eau est liquide.



(c) De ce qui précède, il découle que des crampons, sur de la glace, exercent une compression qui entraîne sa fusion. Ce faisant, les crampons s'enfoncent dans

la glace, ce qui assure la marche du randonneur. En outre, tant que la compression s'exerce sur l'eau, celle-ci reste liquide ; les crampons ne restent pas « emprisonnés » dans une gangue de glace. Ainsi, non seulement l'usage des crampons est raisonnable, mais elle est surtout judicieuse.

## ● 188 QCM

1. Soient  $v_\ell = \frac{1}{\mu_\ell}$  et  $v_s = \frac{1}{\mu_s}$  les volumes massiques de l'eau liquide et solide. À la température  $T_f = 273$  K, la chaleur latente de fusion vérifie la relation de Clapeyron :

$$\begin{aligned} \ell_f &= T_f (v_\ell - v_s) \left( \frac{dp}{dT} \right)_f = 273 \times \left( \frac{1}{1000} - \frac{1}{910} \right) \times (-124.10^5) \\ &= \ell_f = 335 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \end{aligned}$$

En outre, un nombre  $n_g$  de moles de vapeur (de masse  $m_g$ ) occupe un volume  $v_g$  à la température  $T_v = 373$  K et à la pression  $p_s = 1,0132.10^5$  Pa, conformément à l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p_s V_g = n_g R T_v = m_g \frac{R T_v}{M_e} \Rightarrow \frac{V_g}{m_g} = \frac{R T_v}{p_s M_e} \quad (155)$$

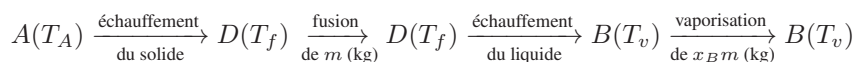
Aussi, connaissant le volume massique  $v_g = \frac{V_g}{m_g}$  de la vapeur d'eau, l'emploi de la relation de Clapeyron fournit :

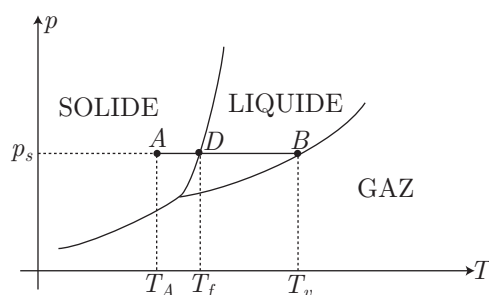
$$\begin{aligned} \ell_v &= T_v (v_g - v_\ell) \left( \frac{dp}{dT} \right)_v = T_v \left( \frac{R T_v}{p_s M_e} - \frac{1}{\mu_\ell} \right) \left( \frac{dp}{dT} \right)_v \\ &= 373 \times \left( \frac{8,314 \times 373}{1,0132.10^5 \times 18.10^{-3}} - \frac{1}{1000} \right) \times 0,036.10^5 \\ &= 2,28.10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \end{aligned}$$

Aussi :

la réponse (b) :  $\ell_f = 335 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $\ell_v = 2,28.10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  convient.

2. Compte tenu de l'allure des courbes de fusion et de vaporisation de l'eau, le passage de l'état  $A$  ( $m = 0,5$  kg de glace à  $T_A = 255$  K et  $p_{\text{ref}} = 1,0132.10^5$  Pa) à l'état  $B$  ( $x_B m$  kilogrammes de gaz et  $(1 - x_B) m$  kilogrammes de liquide à  $T_B = T_f$  et à  $p_{\text{ref}} = 1,0132.10^5$  Pa) s'accompagne d'un changement d'état solide  $\rightarrow$  liquide au point  $D$  (à  $T_D = T_f$  et à  $p = p_{\text{ref}}$ ). C'est pourquoi l'ensemble des transformations subies par le système peut s'écrire :





Au cours de ces transformations monobares, le système reçoit, sous forme de chaleur, les énergies :

- $Q_{AD} = mc_s (T_f - T_A)$
- $Q_D = m\ell_f$
- $Q_{DB} = mc_\ell (T_v - T_f)$
- $Q_B = mx_B \ell_v$

Ce faisant, le système reçoit la chaleur :

$$\begin{aligned} Q &= Q_{AD} + Q_D + Q_{DB} + Q_B \\ &= m [c_s (T_f - T_A) + \ell_f + c_\ell (T_v - T_f) + x_B \ell_v] \\ &= 0,5 \times [2,1 \cdot 10^3 \times (273 - 255) + 335 \cdot 10^3 \\ &\quad + 4,18 \cdot 10^3 \times (373 - 273) + 0,1 \times 2,28 \cdot 10^6] \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$Q = 509,4 \text{ kJ (réponse c)}$$

3. La transformation proposée par l'énoncé peut se décomposer en :

- une liquéfaction d'une masse  $mx_B$  de vapeur d'eau, à la température  $T_B$ . À cette occasion, le système reçoit une chaleur  $Q = -mx_B \ell_v(T_B)$ , à laquelle correspond une variation d'entropie :  $\Delta S_1 = -m \frac{x_B \ell_v(T_B)}{T_B}$ .
- un échauffement de la masse  $m$  de liquide, de la température  $T_B$  à la température  $T_C$ . Au cours d'une évolution élémentaire, le système reçoit une chaleur :  $\delta Q_2 = mc_\ell dT$  et son entropie varie de :

$$dS_2 = mc_\ell \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_2 = mc_\ell \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T} = mc_\ell \ln \left( \frac{T_C}{T_B} \right)$$

La totalité de la transformation  $B \rightarrow C$  s'accompagne donc d'une variation d'entropie :

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m \left[ c_\ell \ln \left( \frac{T_C}{T_B} \right) - x_B \frac{\ell_v(T_B)}{T_B} \right]$$

nulle parce que la transformation est adiabatique et réversible :

$$\Delta S = 0 \Rightarrow \ln \left( \frac{T_C}{T_B} \right) = \frac{x_B \ell_v(T_B)}{c_\ell T_B} \quad (156)$$

$$\Rightarrow T_C = T_B \times \exp \left[ \frac{x_B \ell_v(T_B)}{c_\ell T_B} \right] \quad (\text{réponse d}) \quad (157)$$

Remarque – Il aurait été dangereux ici de considérer que le système recevait une chaleur  $Q = Q_1 + Q_2 = 0$ . En effet, pour passer de l'état B à l'état C, nous avons dû imaginer un état intermédiaire B' (eau totalement liquide à la température  $T_B$ ). Or, la chaleur n'étant pas une fonction d'état, il n'est pas légitime d'écrire :  $Q = Q_1 + Q_2 = Q_{BB'} + Q_{B'C}$ . En revanche, la variation d'entropie peut s'écrire :

$$\Delta S = S_C - S_B = (S_C - S_{B'}) + (S_{B'} - S_B) = \Delta S_2 + \Delta S_1$$

4. Le point C appartient à la courbe de vaporisation  $p(T)$ , dont la pente est fournie par la relation de Clapeyron :

$$\ell_v(T) = T (v_g - v_\ell) \left( \frac{dp}{dT} \right)_v \simeq T v_g \left( \frac{dp}{dT} \right)_v$$

Or, la relation (155) fournit :

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{RT}{pM_e} \Rightarrow \ell_v(T) = \frac{RT^2}{M_e} \times \frac{1}{p} \left( \frac{dp}{dT} \right)_v \\ &\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{M_e}{R} \times \frac{\ell_v(T)}{T^2} dT \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \ell_v(T) = a + bT &\Rightarrow \int_{p_{\text{réf}}}^{p_C} \frac{dp}{p} = \frac{M_e}{R} \times \left\{ a \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T^2} + b \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T} \right\} \\ &\Rightarrow \ln \left( \frac{p_C}{p_{\text{réf}}} \right) = \frac{aM_e}{R} \times \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_C} \right) + \frac{bM_e}{R} \ln \left( \frac{T_C}{T_B} \right) \\ &\Rightarrow \ln \left( \frac{p_C}{p_{\text{réf}}} \right) = \ln \left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{bM_e/R} + \frac{aM_e}{R} \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_C} \right) \end{aligned}$$

soit encore :

$$p_C = p_{\text{réf}} \left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{bM_e/R} \times \exp \left[ \frac{aM_e}{R} \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_C} \right) \right] \quad (\text{réponse d})$$

En outre, le résultat (157) montre que :

$$T_C = T_B \exp \left[ \frac{x_B \ell_v(T_B)}{c_\ell T_B} \right] > T_B \text{ car } \frac{x_B \ell_v(T_B)}{c_\ell T_B} > 0$$

ce qui a pour conséquence :

$$\left( \frac{T_C}{T_B} \right)^{bM_e/R} > 1 \text{ et } \exp \left[ \frac{aM_e}{R} \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_C} \right) \right] > 1 \text{ car } \frac{1}{T_B} > \frac{1}{T_C}$$

Par suite :

$$p_C > p_{\text{réf}} \quad (\text{réponse a})$$

5. La transformation :  $B(x = 0,1 \text{ et } T_B) \rightarrow C(x = 0 \text{ et } T_C)$  peut être effectuée en passant par un état  $B'$  intermédiaire où l'eau est totalement liquide ( $x = 0$ ) à la température  $T_B$  :

$$B \left( \begin{array}{l} x = 0,1 \\ T = T_B \end{array} \right) \xrightarrow{\Delta U_1} B' \left( \begin{array}{l} x = 0 \\ T = T_B \end{array} \right) \xrightarrow{\Delta U_2} C \left( \begin{array}{l} x = 0 \\ T = T_C \end{array} \right)$$

- Au cours de la transformation  $B \rightarrow B'$ , l'enthalpie du système varie d'une quantité  $\Delta H_1$  telle que :

$$\Delta H_1 = \Delta U_1 + \Delta(pV) \Rightarrow \Delta U_1 = \Delta H_1 - \Delta(pV)$$

avec :

$$\Delta H_1 = -m x_B \ell_v(T_B)$$

et :

$$\Delta(pV) = p_{\text{réf}} (V_\ell - V_g) \simeq -p_{\text{réf}} V_g$$

où le volume  $V_g$  de la vapeur d'eau, dans l'état  $B$ , suit l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\begin{aligned} p_{\text{réf}} V_g &= n R T_B = m \frac{x_B R T_B}{M_e} \Rightarrow \Delta(pV) = -m \frac{x_B R T_B}{M_e} \\ \Rightarrow \Delta U_1 &= m \left[ -x_B \ell_v(T_B) + \frac{x_B R T_B}{M_e} \right] \end{aligned}$$

- Au cours de la transformation  $B' \rightarrow C$ , la masse  $m$  d'eau liquide est chauffée de la température  $T_B$  à la température  $T_C$  ; son énergie interne varie de la quantité :

$$\Delta U_2 = m c_\ell (T_C - T_B)$$

Finalement, puisque l'énergie interne est une fonction d'état, sa variation  $\Delta U$  entre les états  $B$  et  $C$  vaut :

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

tandis que le système reçoit une quantité de chaleur  $Q = 0$  au cours de cette transformation adiabatique. C'est pourquoi le système reçoit une énergie  $W_{BC}$ , sous forme de travail, qui vérifie :

$$\Delta U = W_{BC} + Q \Rightarrow W_{BC} = U_C - U_B \quad (\text{réponse a})$$

$$\Rightarrow W_{BC} = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

$$\Rightarrow W_{BC} = m \left[ \frac{x_B R T_B}{M_e} - x_B \ell_v(T_B) + c_\ell (T_C - T_B) \right] \quad (\text{réponse d})$$

## ● 189 ————— Concours Commun Polytechnique

### A- Performances de l'installation

1. (a) Soit  $\Delta U_{i \rightarrow f}$  la variation d'énergie interne du système,  $\Delta \mathcal{E}_c$  la variation de son énergie cinétique et  $W'_{i \rightarrow f}$  le travail qu'il reçoit des forces autres que celles de



pression. Le premier principe de la thermodynamique établit que :

$$\Delta U_{if} + \Delta \mathcal{E}_c = W_{i \rightarrow f} + Q_{i \rightarrow f} + W'_{i \rightarrow f}$$

Notamment, si  $\Delta \mathcal{E}_c$  et  $W'_{i \rightarrow f}$  sont nuls :

$$\Delta U_{if} = W_{i \rightarrow f} + Q_{i \rightarrow f}$$

(b) Lorsque seules les forces de pression fournissent un travail :

$$\delta W = -p_{\text{ext}} dV$$

où  $V$  désigne le volume du système et  $p_{\text{ext}}$  la pression extérieure qui s'exerce sur celui-ci. Lors d'une transformation réversible :  $p_{\text{ext}} = p$  (pression qui règne à l'intérieur du système) permet de poser :

$$\delta W = -p dV \Rightarrow dU = -p dV + \delta Q$$

Or, l'enthalpie est définie par :

$$\begin{aligned} H = U + pV &\Rightarrow dH = dU + d(pV) = (-p dV + \delta Q) + (p dV + V dp) \\ &\Rightarrow dH = \delta Q + V dp \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$\Delta H_{if} = Q_{i \rightarrow f} + \int_i^f V dp \quad (158)$$

c'est-à-dire, au cours de la transformation isobare :

$$\Delta H_{if} = Q_{i \rightarrow f}$$

2. (a) Évaluons les divers transferts thermiques que le système réalise au cours du cycle ( $ABDEA$ ) :

- au cours de la transformation  $A \rightarrow B$ , adiabatique, aucun transfert de chaleur n'est réalisé ;
- pendant la transformation  $B \rightarrow D$ , à pression  $p_2$  constante, l'identité (158) devient :

$$Q_{B \rightarrow D} = \Delta H_{BD} = H_D - H_B$$

Or, pour une masse  $m = 1$  kg de fluide,  $H = h$  entraîne que :

$$Q_{B \rightarrow D} = h_D - h_B < 0 \text{ car } h_B > h_D$$

- la transformation  $D \rightarrow E$  étant adiabatique, le fluide reçoit la chaleur  $Q_{D \rightarrow E} = 0$  ;
- la pression  $p_1$  étant constante pendant la transformation  $E \rightarrow A$ , la chaleur reçue par le fluide est donnée par la relation (158) :  $\Delta H_{EA} = Q_{E \rightarrow A}$  avec, pour  $m = 1$  kg :

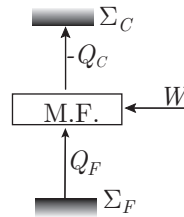
$$\Delta H_{EA} = h_A - h_E \Rightarrow Q_{E \rightarrow A} = h_A - h_E$$

Du reste, la transformation  $D \rightarrow E$  est isenthalpique, ce qui signifie que  $h_D = h_E$ , en conséquence de quoi :

$$Q_{E \rightarrow A} = h_A - h_D > 0 \text{ car } h_A > h_D$$

La machine frigorifique (MF) est conçue pour prélever la chaleur  $Q_F > 0$  à  $\Sigma_F$  et restitue la chaleur  $|Q_C|$  ( $Q_C < 0$ ) à  $\Sigma_C$ , à l'aide du travail  $W > 0$  qu'elle reçoit. L'analyse des signes de  $Q_{B \rightarrow D}$  et de  $Q_{E \rightarrow A}$  permet l'identification avec  $Q_C$  et  $Q_F$  :

$$Q_C = Q_{B \rightarrow D} = h_D - h_B \text{ et } Q_F = Q_{E \rightarrow A} = h_A - h_D$$



(b) Application numérique :

$$Q_C = 286,4 - 448,6 = -162,2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

et

$$Q_F = 390,2 - 286,4 = 103,8 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

3. (a) Au cours d'un cycle de fonctionnement, le premier principe de la thermodynamique impose :

$$\Delta U = Q_F + Q_C + W \text{ avec } \Delta U = \oint dU = 0 \Rightarrow W = -(Q_F + Q_C)$$

(b) Application numérique :

$$W = -(103,8 - 162,2) \Rightarrow W = 58,4 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

4. (a) Les transformations  $B \rightarrow D$  et  $E \rightarrow A$  sont réalisées aux températures respectives  $T_C$  et  $T_F$ , en raison de quoi le fluide échange les entropies :

$$S_F = \frac{Q_F}{T_F} = \frac{h_A - h_D}{T_F} \text{ et } S_C = \frac{Q_C}{T_C} = \frac{h_D - h_B}{T_C}$$

(b) Application numérique :

$$S_F = \frac{103,8 \cdot 10^3}{278} = 373,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

et :

$$S_C = -\frac{162,2 \cdot 10^3}{293} = -553,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

(c) Au cours d'un cycle, la variation d'entropie  $\Delta S$  d'un fluide provient des entropies échangées ( $S_F$  et  $S_C$ ) et de l'entropie créée  $S_p$  :

$$\Delta S = S_F + S_C + S_p \text{ avec } \Delta S = \oint dS = 0 \Rightarrow S_p = -(S_F + S_C)$$

Application numérique :

$$S_p = -(373,4 - 553,6) \Rightarrow S_p = 180,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

Le signe positif de  $S_p$  révèle que l'ensemble du cycle est effectué de manière irréversible.

5. La machine frigorifique est conçue pour extraire une chaleur  $Q_F$  à la source froide, en consommant un travail  $W$ . C'est pourquoi son efficacité est définie par :

$$\mu = \frac{Q_F}{W} = \frac{103,8}{58,4} \Rightarrow \mu = 1,78$$

6. Pendant une durée  $\Delta t$ , la machine extrait, à la source froide, la chaleur :

$$Q = \mathcal{P}_F \Delta t$$

qui est transférée à une masse  $\Delta m$  de fluide :

$$Q = \Delta m Q_F \Rightarrow \mathcal{P}_F \Delta t = \Delta m Q_F$$

d'où l'on déduit le débit massique :

$$q_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\mathcal{P}_F}{Q_F} = \frac{500}{103,8 \cdot 10^3} \Rightarrow q_m = 4,8 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$

### B- Étude de la compression de la vapeur

1. (a) Si l'on suppose que le gaz parfait subit une transformation réversible, la définition de l'enthalpie conduit à :

$$dH = \delta Q + V dp = V dp$$

car la compression est supposée adiabatique. Du reste, le gaz parfait respecte la deuxième loi de Joule :  $dH = C_p dT$  et l'équation d'état :

$$pV = nRT \Rightarrow V = \frac{nRT}{p} \Rightarrow C_p dT = nRT \frac{dp}{p} \Rightarrow C_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dp}{p} = 0$$

Quant à la relation de Mayer, elle fournit :

$$\begin{aligned} C_p - C_V = nR &\Rightarrow C_p \left(1 - \frac{C_V}{C_p}\right) = nR \Rightarrow nR = C_p \times \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \\ &\Rightarrow C_p \frac{dT}{T} - C_p \times \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p} = 0 \\ &\Rightarrow \gamma \frac{dT}{T} + (1 - \gamma) \frac{dp}{p} = 0 \end{aligned}$$

soit encore :

$$\gamma d(\ln T) + (1 - \gamma) d(\ln p) = 0 \Rightarrow T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte}$$

- (b) Si la compression  $A(T_A, p_1) \rightarrow B(T', p_2)$  est adiabatique réversible, ses paramètres d'état doivent vérifier la loi précédente :

$$(T')^\gamma p_2^{1-\gamma} = T_A^\gamma p_1^{1-\gamma} \Rightarrow T' = T_A \times \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Application numérique :

$$T' = 263 \times \left(\frac{2,008}{16,81}\right)^{-\frac{0,14}{1,14}} \Rightarrow T' = 341 \text{ K}$$

2. (a) La transformation polytropique étant réversible,  $\delta Q_f = T dS$  tandis que le travail reçu par le fluide vaut  $\delta W = -p dV$ . C'est pourquoi le premier principe s'écrit :

$$dU = \delta Q_f + \delta W \Rightarrow dU = T dS - p dV$$

- (b) Étant donné que  $\delta Q_f = a dU$  et  $pV = nRT$ , le premier principe de la thermodynamique impose :

$$dU = a dU - nRT \frac{dV}{V} \Rightarrow (1 - a) dU + nRT \frac{dV}{V} = 0$$

où  $dU = C_V dT$  pour un gaz parfait :

$$C_V (1 - a) \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = 0$$

Or, la relation de Mayer indique que :

$$\begin{aligned} C_p - C_V = nR &\Rightarrow C_V \left( \frac{C_p}{C_V} - 1 \right) = nR \Rightarrow nR = C_V \times (\gamma - 1) \\ &\Rightarrow (1 - a) \frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \end{aligned}$$

Enfin, l'équation d'état du gaz parfait conduit à :

$$\begin{aligned} pV = nRT &\Rightarrow \ln p + \ln V = \ln(nR) + \ln T \Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T} \\ &\Rightarrow (1 - a) \left( \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} \right) + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \\ &\Rightarrow (1 - a) \frac{dp}{p} + (\gamma - a) \frac{dV}{V} = 0 \end{aligned}$$

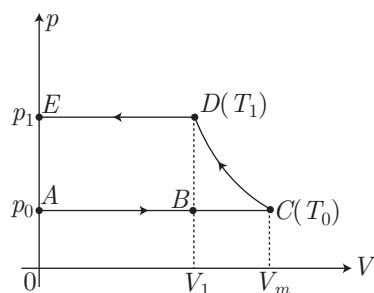
ce qui signifie aussi que :

$$d(\ln p) + \frac{\gamma - a}{1 - a} d(\ln V) = 0 \Rightarrow pV^k = \text{cte avec } k = \frac{\gamma - a}{1 - a}$$

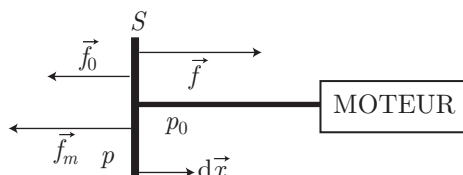
## ● 190 \_\_\_\_\_ Concours ESIM

### I- Le compresseur

1. Au cours de la phase d'admission  $ABC$ , le gaz pénètre dans le cylindre sous la pression constante  $p_0$  tandis que le volume du cylindre passe de 0 à  $V_m$ . La phase de compression  $CD$  est caractérisée par une augmentation de la pression qui passe de  $p_0$  à  $p_1$  pendant que le volume du cylindre diminue de  $V_m$  à  $V_1$ . Lorsque la pression du gaz atteint la valeur  $p_1$ , la soupape  $\Sigma_2$  s'ouvre ; le gaz s'échappe à la pression constante  $p_1$  tandis que le volume diminue jusqu'à s'annuler :



Pendant le déplacement du cylindre, le moteur exerce une force  $\vec{f}_m$  sur la section  $S$  du piston, tandis que la pression extérieure  $p_0$  exerce une force  $\vec{f}_0$ .



En outre, le gaz exerce une pression  $p$  sur le piston, à laquelle correspond une force  $\vec{f}$ .

La réversibilité des transformations impose l'équilibre permanent du piston :

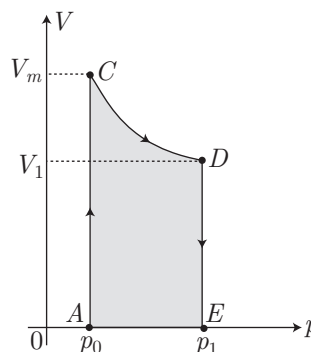
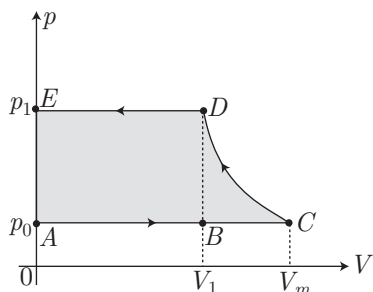
$$\vec{f} + \vec{f}_m + \vec{f}_0 = \vec{0} \Rightarrow \vec{f} \cdot d\vec{x} + \vec{f}_m \cdot d\vec{x} + \vec{f}_0 \cdot d\vec{x} = 0$$

avec :  $\vec{f} \cdot d\vec{x} = f dx$  et  $\vec{f}_0 \cdot d\vec{x} = -f_0 dx$ , tandis que le travail élémentaire exercé par le le moteur sur le piston est défini par :

$$\delta W_m = \vec{f}_m \cdot d\vec{x} \Rightarrow \delta W_m = f_0 dx - f dx$$

c'est-à-dire, compte tenu de la définition des pressions :  $f = pS$ ,  $f_0 = p_0S$  tandis que la variation du volume du cylindre vaut  $dV = S dx$  :

$$\delta W_m = (p_0 - p) dV$$



**CORRIGÉS**

Au cours d'un cycle  $ACDEA$ , le moteur fournit alors un travail :

$$W_m = \int_A^C (p_0 - p_0) dV + \int_C^D (p_0 - p) dV + \int_D^E (p_0 - p_1) dV \quad (159)$$

$$= - \int_C^D p dV + p_0 \int_C^D dV + (p_0 - p_1) \int_D^E dV \quad (160)$$

$$= - \int_C^D p dV + p_0 (V_1 - V_m) - (p_0 - p_1) V_1 \quad (161)$$

$$= - \int_C^D p dV + p_1 V_1 - p_0 V_m \quad (162)$$

$$= - \int_C^D p dV + [pV]_C^D \quad (163)$$

$$= - \int_C^D p dV + \int_C^D d(pV) \quad (164)$$

$$= - \int_C^D p dV + \int_C^D p dV + \int_C^D V dp \Rightarrow W_m = \int_C^D V dp \quad (165)$$

Ce résultat montre que le travail fourni par le moteur sur un cycle s'identifie à l'aire (grisée sur le schéma ci-dessus) de ce cycle.

2. (a) La mole de gaz parfait suit l'équation d'état :

$$pV = RT \Rightarrow V = \frac{RT}{p}$$

de sorte que la loi polytropique s'écrit :

$$pV^k = \text{cte} \Rightarrow p \times \left(\frac{T}{p}\right)^k \times R^k = \text{cte} \Rightarrow p \times \left(\frac{T}{p}\right)^k = \text{cte}$$

Cette loi demeure valable tout au long de la transformation  $CD$ , ce qui impose :

$$\begin{aligned} p_0 \left(\frac{T_0}{p_0}\right)^k &= p_1 \left(\frac{T_1}{p_1}\right)^k \Rightarrow \left(\frac{T_0 p_1}{p_0 T_1}\right)^k = \frac{p_1}{p_0} \Rightarrow k \ln \left(\frac{T_0 p_1}{T_1 p_0}\right) = \ln \left(\frac{p_1}{p_0}\right) \\ &\Rightarrow k = \frac{\ln(p_1/p_0)}{\ln(T_0 p_1/T_1 p_0)} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$k = \frac{\ln 6}{\ln \left(\frac{290 \times 6}{391 \times 1}\right)} \quad k = 1,20$$

(b) Le volume  $V$  suit la loi polytropique :

$$pV^k = \text{cte} = p_0 V_m^k = p_1 V_1^k \Rightarrow p^{1/k} \times V = p_0^{1/k} V_m = p_1^{1/k} V_1$$

que l'on peut aussi écrire :

$$V = \alpha \times p^{-1/k}$$

où  $\alpha$  prend indifféremment les valeurs  $\alpha = p_0^{1/k} V_m$  ou  $\alpha = p_1^{1/k} V_1$ . Le résultat (165) devient ainsi :

$$W_m = \int_{p_0}^{p_1} \alpha p^{-1/k} dp$$

d'où l'on déduit que :

$$W_m = \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{k}} \left[ p^{1 - \frac{1}{k}} \right]_{p_0}^{p_1} = \frac{k}{k-1} \left[ \alpha p_1^{1-1/k} - \alpha p_0^{1-1/k} \right]$$

expression dans laquelle  $\alpha$  peut être remplacé par  $p_0^{1/k} V_m$  ou par  $p_1^{1/k} V_1$  :

$$W_m = \frac{k}{k-1} \left[ V_1 p_1^{1/k} \times p_1^{1-1/k} - V_m p_0^{1/k} \times p_0^{1-1/k} \right] = \frac{k}{k-1} (p_1 V_1 - p_0 V_m)$$

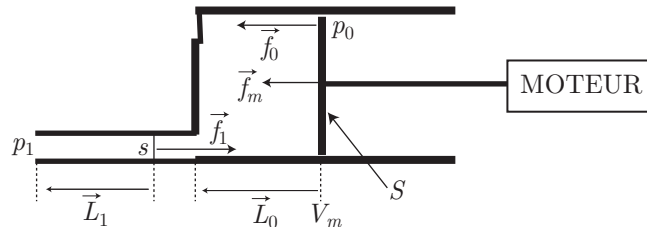
c'est-à-dire, compte tenu de l'équation d'état :

$$\begin{cases} p_0 V_m = RT_0 \\ p_1 V_1 = RT_1 \end{cases} \Rightarrow W_m = \frac{kR}{k-1} \times (T_1 - T_0)$$

Application numérique :

$$W_m = \frac{1,2 \times 8,31}{0,2} \times (391 - 290) \Rightarrow W_m = 5,04 \text{ kJ}$$

- (c) Lors de la phase d'admission, aucun travail n'est fourni au gaz par le piston, contrairement aux phases de compression et d'échappement.



Soient  $S$  et  $s$  les sections respectives du piston et du tuyau d'échappement. Au cours de la compression et de l'échappement, sur le piston s'exercent de l'extérieur : la force de pression  $\vec{f}_0$  (de norme  $f_0 = S p_0$ ) et la force du moteur, dont les travaux valent respectivement :

$$\delta W_0 = \vec{f}_0 \cdot d\vec{L}_0 \Rightarrow W_0 = \int_0^{L_0} dL_0 = p_0 S L_0 = p_0 V_m$$

et

$$W_m = \int_0^{L_0} \vec{f}_m \cdot d\vec{L}_0$$

En outre, le gaz qui s'échappe dans le tuyau est soumis à une force de pression  $\vec{f}_1$  (de norme  $f_1 = p_1 s$ ) qui exerce un travail :

$$\delta W_1 = \vec{f}_1 \cdot d\vec{L}_1 = -f_1 dL_1 = -p_1 s dL_1 \Rightarrow W_1 = -p_1 s L_1 = -p_1 V'_m \text{ où } V'_m = s L_1$$

Par suite, le gaz reçoit le travail total :

$$W = W_0 + W_1 + W_m = p_0 V_m - p_1 V'_m + W_m$$

Le premier principe de la thermodynamique prévoit alors que :

$$\Delta U = W + Q$$

où  $\Delta U = U_1 - U_0$  désigne la variation d'énergie interne qui passe de  $U_0$  (lorsque le gaz occupe le volume  $V_m$  sous la pression  $p_0$ ) à  $U_1$  (le gaz occupe un volume  $V'_m$  sous la pression  $p_1$ ). Par suite :

$$U_1 - U_0 = p_0 V_m - p_1 V'_m + W_m + Q \Rightarrow (U_1 + p_1 V'_m) - (U_0 + p_0 V_m) = W_m + Q$$

où l'on reconnaît la variation d'enthalpie du gaz :

$$\begin{cases} H_1 = U_1 + p_1 V'_m \\ H_0 = U_0 + p_0 V_m \end{cases} \Rightarrow H_1 - H_0 = W_m + Q \Rightarrow \Delta H = W_m + Q$$

La mole de gaz, de masse  $M$ , qui subit cette compression voit sa température varier de  $T_0$  à  $T_1$ , auquel cas son enthalpie varie de :

$$\Delta H = M c_p (T_1 - T_0) = 29 \cdot 10^{-3} \times 10^3 \times (391 - 290) = 2,93 \text{ kJ}$$

ce qui fournit :

$$Q = \Delta H - W_m = 2,93 - 5,04 \Rightarrow Q = -2,11 \text{ kJ}$$

Le signe négatif de  $Q$  révèle que le gaz cède de la chaleur au cours de cette phase de compression-échappement.

3. Si  $\Delta m$  désigne la masse d'air admise pendant  $\Delta t$  dans la pompe, le débit massique est défini par :

$$D_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{M \times \Delta n}{\Delta t} = \frac{M \times 1}{\Delta t}$$

où  $\Delta n$  représente une mole de gaz admise à chaque cycle qui dure  $\Delta t$ . Aussi, la puissance du moteur suit la définition :

$$\mathcal{P}_m = \frac{W_m}{\Delta t} \Rightarrow \mathcal{P}_m = \frac{D_m}{M} \times W_m$$

Application numérique :

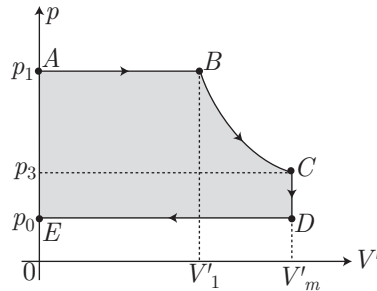
$$\mathcal{P}_m = \frac{0,013}{29 \cdot 10^{-3}} \times 5,04 \Rightarrow \mathcal{P}_m = 2,26 \text{ kW}$$

## II- Moteur à air comprimé

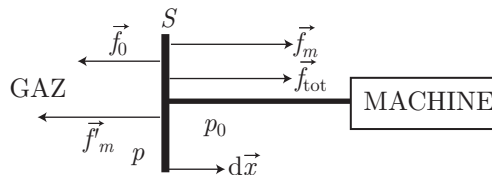
1. La phase d'admission  $AB$  permet de faire pénétrer le gaz dans le piston, à pression constante  $p_1$ , jusqu'au volume  $V'_1 = 0,4 V'_m$ .



La détente  $BC$  qui suit fait passer le gaz à une température  $T_3$ , sous une pression  $p_3$  lorsque le volume atteint la valeur  $V'_m$ . Dès lors, la pression passe brusquement de la valeur  $p_3$  à la valeur  $p_0$ , suite à l'ouverture de la soupape  $\Sigma_4$ ; le volume du gaz demeure  $V'_m$ . Enfin, l'échappement  $DE$  est caractérisé par une diminution de  $V'$  jusqu'à 0, à la pression  $p_0$  constante.



Le gaz exerce sur le piston une force totale  $\vec{f}_{\text{tot}}$  qui doit compenser la force de pression  $p_0$  extérieure ( $\vec{f}_0$ ) et la force  $\vec{f}'_m$  que la machine exerce sur le piston.



$$\vec{f}_{\text{tot}} + \vec{f}_0 + \vec{f}'_m = \vec{0} \Rightarrow \vec{f}_{\text{tot}} = -\vec{f}_0 - \vec{f}'_m$$

En outre, la force que le piston exerce sur la machine vérifie le principe des actions réciproques :

$$\vec{f}'_m = -\vec{f}_m \Rightarrow \vec{f}_{\text{tot}} = \vec{f}_m - \vec{f}_0$$

Au cours d'un déplacement élémentaire  $d\vec{x}$  du piston, pendant lequel le volume du cylindre s'accroît de  $S dx$ , ces forces exercent des travaux tels que :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{\text{tot}} \cdot d\vec{x} &= \vec{f}_m \cdot d\vec{x} - \underbrace{\vec{f}_0 \cdot d\vec{x}}_{-f_0 dx} \Rightarrow p S dx = \delta W_m + p_0 dV \\ &\Rightarrow \delta W_m = p dV - p_0 dV \end{aligned}$$

Aussi, le travail reçu par la machine vaut :

$$W_m = \int_0^{V'_m} p dV - \int_0^{V'_m} p_0 dV$$

ce qui représente la surface comprise à l'intérieur du cycle (partie grisée sur la figure précédente).

2. (a) Au cours de la détente :  $B (V'_1 = 0,4 V'_m, p_1, T_2) \rightarrow C (V'_m, p_3, T_3)$ , la transformation adiabatique et réversible du gaz parfait suit la loi de Laplace :

$$pV^\gamma = \text{cte} \Rightarrow p_1 (V'_1)^\gamma = p_3 (V'_m)^\gamma \Rightarrow p_3 = p_1 \times \left(\frac{V'_1}{V'_m}\right)^\gamma \Rightarrow p_3 = p_1 \times (0,4)^\gamma$$

tandis que l'équation d'état du gaz parfait impose :

$$\begin{cases} p_3 V'_m = nRT_3 \\ p_1 V'_1 = nRT_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_1} \times \frac{V'_m}{V'_1} = (0,4)^\gamma \times \frac{1}{0,4} \Rightarrow T_3 = T_2 \times (0,4)^{\gamma-1}$$

Application numérique :

$$p_3 = 6 \times (0,4)^{1,4} \Rightarrow p_3 = 1,66 \text{ bar} \text{ et } T_3 = 320 \times (0,4)^{0,4} \Rightarrow T_3 = 222 \text{ K}$$

- (b) Le cycle dure  $\Delta t = \frac{1}{5}$  s, période pendant laquelle un volume  $V'_1 = 0,4 V'_m$  de gaz parfait pénètre dans le cylindre, sous la pression  $p_1$  et à la température  $T_2$ . Il rentre donc une masse  $m$  telle que :

$$p_1 V'_1 = \frac{m}{M} RT_2 \Rightarrow m = M \times \frac{p_1 V'_1}{RT_2} = M \times \frac{0,4 p_1 V'_m}{RT_2}$$

auquel cas le débit massique moyen est défini par :

$$D_m = \frac{m}{\Delta t} = 5 \times m = M \times \frac{2 p_1 V'_m}{RT_2}$$

Application numérique :

$$D_m = 2 \times \frac{29 \cdot 10^{-3} \times 6 \cdot 10^5 \times 10^{-3}}{8,31 \times 320} \Rightarrow D_m = 1,3 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$$

- (c) Pendant  $\Delta t = \frac{1}{5} = 0,2$  s, la machine reçoit le travail :

$$W_m = \int_0^{V'_m} p dV - \int_0^{V'_m} p_0 dV = \int_0^{V'_1} p dV + \int_{V'_1}^{V'_m} p dV - p_0 \int_0^{V'_m} dV$$

où  $p = p_1$  pour  $V \in [0, V'_1]$  tandis que, pour  $V \in [V'_1, V'_m]$  :

$$pV^\gamma = \text{cte} = \alpha \Rightarrow p = \alpha V^{-\gamma}$$

la constante  $\alpha$  prend indifféremment la valeur  $p_1 (V'_1)^\gamma$  ou  $p_2 (V'_m)^\gamma$ . C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} W_m &= p_1 \int_0^{V'_1} dV - p_0 \int_0^{V'_m} dV + \alpha \int_{V'_1}^{V'_m} V^{-\gamma} dV \\ &= p_1 V'_1 - p_0 V'_m + \frac{\alpha}{1-\gamma} [(V'_m)^{1-\gamma} - (V'_1)^{1-\gamma}] \\ &= p_1 V'_1 - p_0 V'_m + \frac{1}{1-\gamma} [(p_3 V'_m)^\gamma (V'_m)^{1-\gamma} - (p_1 V'_1)^\gamma (V'_1)^{1-\gamma}] \\ &= p_1 V'_1 - p_0 V'_m + \frac{1}{1-\gamma} (p_3 V'_m - p_1 V'_1) \\ &\Rightarrow W_m = V'_m \times \left( \frac{p_3}{1-\gamma} - p_0 \right) + \frac{\gamma}{\gamma-1} p_1 V'_1 \end{aligned}$$

Application numérique :

$$W_m = 10^{-3} \times \left( \frac{1,66 \cdot 10^5}{1-1,4} - 10^5 \right) + \frac{1,4}{0,4} \times 6 \cdot 10^5 \times 0,4 \cdot 10^{-3} = 325 \text{ J}$$

La puissance reçue par la machine est alors définie par :

$$\mathcal{P}' = \frac{W_m}{\Delta t} = \frac{325}{0,2} \Rightarrow \mathcal{P}' = 1,62 \text{ kW}$$

## Chapitre 7

# Thermodynamique des systèmes chimiques

### 7.1 Enthalpie libre et potentiel chimique

#### 7.1.1 Grandeurs molaires et molaires partielles

##### 7.1.1.1 Grandeurs molaires

**Définition 1** Soit  $F$  une grandeur extensive associée à  $n$  moles d'un corps pur. On appelle grandeur molaire le rapport :

$$F_m^* = \frac{F}{n} \Rightarrow F = n \times F_m^*$$

Dans la suite de ce cours, l'astérisque accompagnant une grandeur rappellera que cette grandeur est relative à un corps pur.



À 20°C, la masse volumique de l'eau vaut  $\rho = 0,9982 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Sachant que la masse molaire de l'eau vaut  $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , calculer son volume molaire.

**RÉPONSE** Une masse  $m$  d'eau contient  $n = \frac{m}{M}$  moles de molécules  $\text{H}_2\text{O}$  et occupe un volume  $V = \frac{m}{\rho}$ . Par conséquent, son volume molaire vaut :

$$V_m^* = \frac{V}{n} = \frac{m}{\rho} \times \frac{M}{m} = \frac{M}{\rho} = \frac{18}{0,9982} = 18,03 \text{ cm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$

**⚠** Le volume molaire, toujours signalé par un astérisque dans ce cours, ne peut être évalué que pour un corps pur.

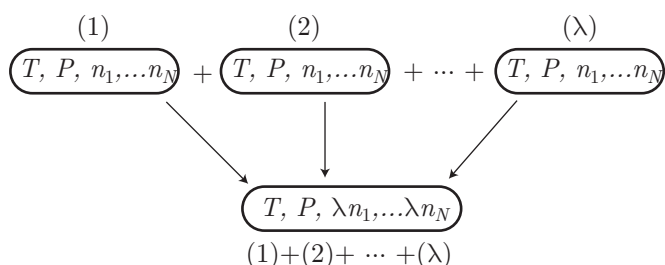
## 7.1.1.2 Grandeurs molaires partielles

**Définition 2** Soit  $\psi$  une grandeur extensive associée à un mélange contenant  $n_1$  moles de corps  $X_1$ ,  $n_2$  moles de corps  $X_2, \dots$ . On appelle grandeur molaire partielle du corps  $X_i$  la dérivée partielle :

$$\psi_{mi} = \frac{\partial \psi}{\partial n_i} = \psi_{mi}(T, P, n_1, \dots, n_N)$$

Dans cette dérivée, tous les paramètres dont dépend  $\psi$  sont maintenus constants, à l'exception de  $n_i$ .

Soit  $\psi(T, P, \dots, n_1, n_2, \dots, n_N)$  une grandeur extensive qui caractérise un système décrit par des paramètres d'état intensifs  $(T, P, \dots)$  et des paramètres d'état extensifs :  $n_1, n_2, \dots, n_N$  (il peut s'agir de tout paramètre extensif).



Intéressons-nous à  $\lambda$  systèmes identiques (c'est-à-dire dont tous les paramètres d'état  $T, P, n_1, \dots, n_N$  sont égaux). Chacun de ces systèmes est alors caractérisé par une fonction d'état  $\psi(T, P, n_1, \dots, n_N)$  extensive. La réunion de ces systèmes constitue alors un nouveau système, dont les paramètres d'état sont  $T, P, \lambda n_1, \dots, \lambda n_N$ , et qui est donc caractérisée par la fonction d'état  $\psi(T, P, \lambda n_1, \dots, \lambda n_N)$ . Or, puisque la fonction d'état  $\psi$  est extensive, il s'ensuit que :

$$\psi(T, P, \lambda n_1, \dots, \lambda n_N) = \lambda \times \psi(T, P, n_1, \dots, n_N)$$

La différentielle de cette équation, consécutive à la variation  $d\lambda$  de  $\lambda$ , s'écrit :

$$\left( \frac{\partial \psi}{\partial n_1} \right)_{T, P, n_{j \neq 1}} \times n_1 d\lambda + \dots + \left( \frac{\partial \psi}{\partial n_N} \right)_{T, P, n_{j \neq N}} \times n_N d\lambda = d\lambda \times \psi$$

c'est-à-dire :

$$\psi = \sum_{i=1}^N n_i \left( \frac{\partial \psi}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_{j \neq i}} \Rightarrow \psi(T, P, n_1, \dots, n_N) = \sum_{i=1}^N n_i \times \psi_{mi} \quad (1)$$

Cette loi peut s'appliquer au volume d'un mélange de  $N$  liquides :

$$V = \sum_{i=1}^N n_i \times V_{mi}$$

 On dispose de deux solutions aqueuses, à 20°C :

- l'une contenant 1 kg d'eau liquide et 10,1 g de propan-2-ol ( $\text{CH}_3\text{CHOHCH}_3$ ), de volume  $V_1 = 1,016$  L ;
- l'autre contenant 1 kg d'eau liquide et 20,4 g de propan-2-ol, de volume  $V_2 = 1,028$  L.

1. Déterminer le volume molaire partiel  $V_m(\text{ROH})$  de l'alcool, dans ces conditions.
2. Calculer le volume molaire  $V_m^*(\text{ROH})$  du propan-2-ol à 20°C. Comparer avec  $V_m(\text{ROH})$ .

Données numériques :

- masse molaire de  $\text{CH}_3\text{CHOHCH}_3$  :  $M_{\text{ROH}} = 60,10 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- densité du propan-2-ol, à 20°C :  $d = 0,785$  ;
- masse volumique de l'eau, à 20°C :  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 998 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$ .

#### RÉPONSE

1. Un mélange contenant  $n_{\text{ROH}}$  moles de propan-2-ol et  $n_{\text{H}_2\text{O}}$  moles d'eau présente un volume :

$$V = n_{\text{ROH}} V_m(\text{ROH}) + n_{\text{H}_2\text{O}} V_m(\text{H}_2\text{O})$$

où  $V_m(\text{ROH})$  et  $V_m(\text{H}_2\text{O})$  désignent respectivement les volumes molaires partiels du propan-2-ol et de l'eau. Ce faisant, une augmentation infinitésimale  $dn_{\text{ROH}}$  de  $n_{\text{ROH}}$  s'accompagne d'une variation infinitésimale de volume du mélange :

$$dV = dn_{\text{ROH}} \times V_m(\text{ROH}) \Rightarrow V_m(\text{ROH}) = \frac{dV}{dn_{\text{ROH}}} = \left( \frac{\partial V}{\partial n_{\text{ROH}}} \right)_{n_{\text{H}_2\text{O}}}$$

Expérimentalement,  $dV = V_2 - V_1 = 0,012$  L lorsque :

$$dn_{\text{ROH}} = \frac{20,4 - 10,1}{60,1} = 0,171 \text{ mole de } \text{CH}_3\text{CHOHCH}_3$$

C'est pourquoi :

$$V_m(\text{ROH}) = \frac{0,012}{0,171} = 0,070 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2. Un volume  $V(\text{ROH})$  d'alcool pur, de masse  $m$ , contient un nombre de moles  $n_{\text{ROH}}$  de propan-2-ol tel que :

$$n_{\text{ROH}} = \frac{m}{M_{\text{ROH}}} \Rightarrow m = n_{\text{ROH}} \times M_{\text{ROH}}$$

La masse volumique de l'alcool pur est alors définie par le rapport :

$$\rho_{\text{ROH}} = \frac{m}{V_{\text{ROH}}} = \frac{n_{\text{ROH}} \times M_{\text{ROH}}}{V_{\text{ROH}}}$$

d'où se déduit sa densité  $d$  :

$$d = \frac{\rho_{\text{ROH}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{n_{\text{ROH}} \times M_{\text{ROH}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} \times V_{\text{ROH}}} \Rightarrow \frac{V_{\text{ROH}}}{n_{\text{ROH}}} = \frac{M_{\text{ROH}}}{d \times \rho_{\text{ROH}}}$$

Par conséquent, le volume molaire du propan-2-ol vaut :

$$V_m^*(\text{ROH}) = \frac{V_{\text{ROH}}}{n_{\text{ROH}}} = \frac{M_{\text{ROH}}}{d \times \rho_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{60,1}{0,785 \times 998} \Rightarrow V_m^*(\text{ROH}) = 7,67 \cdot 10^{-2} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$$

on s'assurera rapidement que  $V_m^*(\text{ROH}) \neq V_m(\text{ROH})$ .

### 7.1.2 Enthalpie libre

Pour la suite du cours, on distinguera la pression  $P$  et la température  $T$  d'un système ( $S$ ) de celles,  $P_{\text{ext}}$  et  $T_{\text{ext}}$  du milieu extérieur à ce système.

$$\begin{array}{|c|} \hline (S) \\ \hline T, P \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} T_{\text{ext}} \\ P_{\text{ext}} \end{array}$$

**Définition 3** *Lorsqu'un système ( $S$ ) reçoit une chaleur  $Q$ , un travail  $W_p$  des forces de pression et un travail  $W'$  des forces autres que celles de pression (p. ex. travail du poids, d'une turbine, travail électrique, ...), son énergie interne  $U$  varie de la quantité :*

$$\Delta U = Q + W_p + W'$$

Cette loi constitue la forme mathématique du premier principe de la thermodynamique.

Remarque – *Pour une transformation isochore, au cours de laquelle seules les forces de pression sont susceptibles de travailler :*

$$\Delta U = Q_V$$

Si le volume  $V$  de ( $S$ ) varie de  $\Delta V$  au cours d'une transformation pendant laquelle  $P_{\text{ext}}$  demeure constant :

$$W_p = -P_{\text{ext}} \Delta V \Rightarrow \Delta U = Q - P_{\text{ext}} \Delta V + W'$$

**Définition 4** *L'enthalpie  $H$  d'un système ( $S$ ) de volume  $V$  et à l'intérieur duquel règne une pression  $P$  est définie par :*

$$H = U + PV$$

**Définition 5** *Si, au cours d'une transformation réversible, le système ( $S$ ) reçoit une chaleur élémentaire  $\delta Q_{\text{rév}}$ , son entropie  $S$  varie de la quantité :*

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T} \Rightarrow \Delta S = \int_{(i)}^{(f)} \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T} = S_f - S_i$$

si ( $i$ ) et ( $f$ ) représentent l'état initial et l'état final de ( $S$ ).

Le second principe de la thermodynamique stipule que, lorsque ( $S$ ) reçoit la chaleur  $Q$  d'un thermostat à la température  $T_{\text{ext}}$ , au cours d'une transformation (réversible ou non), son entropie varie de la quantité :

$$\Delta S = \frac{Q}{T_{\text{ext}}} + S_c \quad (2)$$

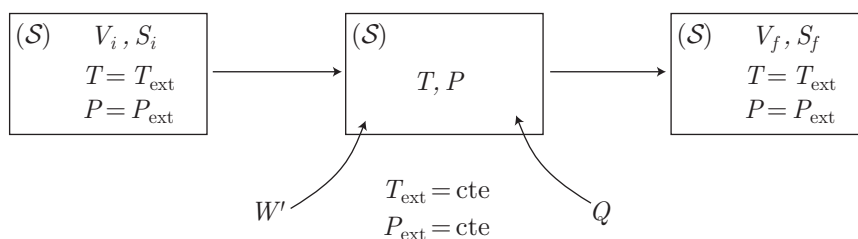
où  $S_c \geq 0$  est l'entropie créée à l'intérieur de ( $S$ ).

Remarque – *Lors d'une transformation réversible, qui implique nécessairement  $T = T_{\text{ext}}$  (c'est-à-dire l'équilibre thermique du système),  $S_c = 0$ . En revanche,  $S_c > 0$  à l'issue d'une transformation irréversible.*

**Définition 6** L'enthalpie libre (ou fonction de Gibbs) d'un système d'enthalpie  $H$ , de température  $T$  et d'entropie  $S$ , est une fonction d'état définie par :

$$G = H - T \times S$$

Considérons maintenant que  $(S)$  subisse une transformation monotherme et monobare : sa pression  $P$  et sa température  $T$  prennent les valeurs  $P_{\text{ext}}$  et  $T_{\text{ext}}$  du milieu extérieur, en début et en fin de transformation ( $T$  et  $P$  peuvent cependant adopter des valeurs différentes au cours de la transformation).



Au cours de cette transformation, l'enthalpie de  $(S)$  varie de :

$$\Delta H = \Delta U + \Delta(PV)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta U &= Q - P_{\text{ext}} \Delta V + W' \text{ et } \Delta(PV) = P_{\text{ext}} V_f - P_{\text{ext}} V_i = P_{\text{ext}} \Delta V \\ \Rightarrow \Delta H &= Q + W' \end{aligned}$$

Ainsi, son enthalpie libre varie de :

$$\begin{aligned} \Delta G &= \Delta H - \Delta(TS) = Q + W' - (T_{\text{ext}} S_f - T_{\text{ext}} S_i) \\ \Rightarrow \Delta G &= Q + W' - T_{\text{ext}} \Delta S \end{aligned}$$

Or, conformément à la relation (2) :

$$\begin{aligned} T_{\text{ext}} \Delta S &= Q + T_{\text{ext}} S_c \Rightarrow Q = T_{\text{ext}} \Delta S - T_{\text{ext}} S_c \\ \Rightarrow \Delta G &= W' - T_{\text{ext}} S_c \text{ avec } S_c \geq 0 \end{aligned}$$

De cette identité découlent deux conséquences :

$-\Delta G$  représente le travail *maximum* que peut fournir un système, autre que le travail des forces de pression.

En effet, si  $W'_{\text{fourni}}$  désigne le travail fourni par le système :

$$W'_{\text{fourni}} = -W' = -\Delta G - T_{\text{ext}} S_c \Rightarrow W'_{\text{fourni}} \leq -\Delta G$$

D'autre part :

Au cours d'une transformation monobare et monotherme, l'enthalpie libre d'un système qui ne fournit pas de travail avec l'extérieur, autre que celui des forces de pression, ne peut que décroître :

$$W' = 0 \Rightarrow \Delta G = -T_{\text{ext}} S_c \leq 0$$

Cette conclusion demeure valable pour une transformation isobare et isotherme.

L'équilibre d'un système correspond donc à un *minimum* de son enthalpie libre  $G$ , qui est de ce fait un *potentiel thermodynamique*.

### 7.1.3 Potentiel chimique d'un corps pur

#### 7.1.3.1 Définition

Considérons un système fermé ( $\mathcal{S}$ ) composé de  $n$  moles d'un corps pur ( $n$  ne varie pas), à la température  $T$  et sous la pression  $P$ . Son volume  $V^*$ , son énergie interne  $U^*$ , son enthalpie  $H^*$ , son entropie  $S^*$  et son énergie libre  $G^*$  s'expriment en fonction des grandeurs molaires associées :

$$V^* = n V_m^* \quad U^* = n U_m^* \quad H^* = n H_m^* \quad S^* = n S_m^* \quad G^* = n G_m^*$$

Au cours d'une transformation élémentaire réversible, où seules les forces de pression exercent un travail, le premier principe de la thermodynamique impose :

$$\begin{aligned} dU^* &= \delta Q_{\text{rev}} - P dV^* \text{ avec } dS^* = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \\ &= T dS^* - P dV^* \end{aligned}$$

Par suite :

$$H^* = U^* + PV^* \Rightarrow dH^* = T dS^* + V^* dP$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} G^* = H^* - TS^* &\Rightarrow dG^* = -S^* dT + V^* dP \\ &\Rightarrow n dG_m^* = n \times (-S_m^* dT + V_m^* dT) \end{aligned}$$

**Définition 7** On appelle *potentiel chimique d'un corps pur*, son enthalpie libre molaire :

$$\mu^* = G_m^* \Rightarrow d\mu^* = -S_m^* dT + V_m^* dP \quad (3)$$

Cette relation montre d'une part que  $\mu^*$  dépend des paramètres  $T$  et  $P$  :

$$\mu^* = \mu^*(T, P)$$

et d'autre part que :

$$\left( \frac{\partial \mu^*}{\partial T} \right)_P = -S_m^* \text{ et } \left( \frac{\partial \mu^*}{\partial P} \right)_T = V_m^* \quad (4)$$



### 7.1.3.2 Potentiel chimique d'un gaz parfait pur

L'équation d'état du gaz parfait pur impose :

$$PV^* = nRT \Rightarrow V^* = n \frac{RT}{P} = n V_m^* \Rightarrow V_m^* = \frac{RT}{P}$$

Il s'ensuit que :

$$\left( \frac{\partial \mu^*}{\partial P} \right)_T = \frac{RT}{P} = \left[ \frac{\partial (RT \ln P)}{\partial P} \right]_T$$

Il existe donc une fonction  $f(T)$  telle que :

$$\mu^*(T, P) = f(T) + RT \ln P \quad (5)$$

**Définition 8** On appelle *potentiel chimique standard*  $\mu^0(T)$  d'un gaz parfait la valeur de son potentiel chimique lorsqu'il est pur et sous la pression standard  $P_0 = 1 \text{ bar}$  :

$$\mu^0(T) = \mu^*(T, P_0)$$

De cette définition, il découle que :

$$\mu^0(T) = f(T) + RT \ln P_0 \Rightarrow f(T) = \mu^0(T) - RT \ln P_0$$

Par conséquent, l'identité (5) devient :

$$\mu^*(T, P) = \mu^0(T) + RT \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) \quad (6)$$

### 7.1.3.3 Potentiel chimique d'une phase condensée pure

Considérons une phase condensée pure (liquide ou solide), qui subit une compression isotherme (à la température  $T$ ) qui fait passer sa pression de  $P_0$  à  $P$ . La variation de son potentiel chimique est alors donnée par l'identité (3) :

$$\begin{aligned} d\mu^* &= -S_m^* dT + V_m^* dP = V_m^* dP \\ \Rightarrow \mu^*(T, P) &= \mu^*(T, P_0) + \int_{P_0}^P V_m^* dP \end{aligned}$$

En définissant le potentiel chimique *standard*  $\mu^0(T)$  d'une phase condensée pure, de la même manière que pour un gaz parfait, on obtient ainsi :

$$\mu^*(T, P_0) = \mu^0(T) \Rightarrow \mu^*(T, P) = \mu^0(T) + \int_{P_0}^P V_m^* dP$$

Si l'on admet, de surcroît, la faible compressibilité des phases condensées, l'indépendance de  $V_m^*$  à l'égard de  $P$  conduit à :

$$\mu^*(T, P) \simeq \mu^0(T) + V_m^* \times (P - P_0) \quad (7)$$

Enfin, les ordres de grandeur de  $\mu^0(T)$  et de  $V_m^* \times (P - P_0)$  permettent souvent de simplifier cette expression :

$$\mu^*(T, P) \simeq \mu^0(T) \text{ car } \mu^0(T) \gg V_m^* \times (P - P_0)$$

Par exemple, le potentiel chimique *standard* de l'eau liquide vaut :

$$\mu^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) = -237,1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ à } T = 298 \text{ K}$$

tandis que son volume molaire vaut  $V_m^* = 1,809 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ . Ce faisant, tant que  $\Delta P \ll 1,31 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$ , l'approximation précédente prévaudra.

## 7.1.4 Potentiel chimique dans un mélange

### 7.1.4.1 Définition

Soit ( $S$ ) un système constitué de  $n_1$  moles de  $X_1$ ,  $n_2$  moles de  $X_2$ , ...  $n_N$  moles de  $X_N$ . Lorsque la composition de ce système demeure constante ( $n_i = \text{cte}$ ), la variation d'enthalpie libre  $G$  de ( $S$ ), consécutive à des variations  $dT$  et  $dP$  de sa température et de sa pression, vaut :

$$dG = -S dT + V dP$$

En admettant alors que  $G$  est *a priori* fonction de  $T$ ,  $P$ ,  $n_1$ , ...  $n_N$ , il apparaît que :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P, n_i} = -S \text{ et } \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T, n_i} = V \quad (8)$$

Ce faisant, si la composition de ( $S$ ) varie également, son enthalpie libre  $G(T, P, n_1, \dots, n_N)$  s'accroît de :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P, n_i} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T, n_i} dP + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T, P, n_{j \neq i}} dn_i$$

**Définition 9** On appelle potentiel chimique  $\mu_i$  de l'espèce  $X_i$  dans ( $S$ ) son enthalpie libre molaire partielle :

$$\mu_i = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T, P, n_{j \neq i}}$$

En tenant compte des identités (8), on obtient ainsi :

$$dG = -S dT + V dP + \sum_{i=1}^N \mu_i dn_i \quad (9)$$

Étant donné que les seuls paramètres extensifs dont dépend  $G$  sont les  $n_i$ , la loi (1) de la page 1044 montre que :

$$G = \sum_{i=1}^N \mu_i n_i$$

Par suite, la différentielle de  $G$  s'écrit :

$$dG = \sum_{i=1}^N n_i d\mu_i + \sum_{i=1}^N \mu_i dn_i$$

L'identification avec la loi (9) conduit à la relation de Gibbs-Duhem :

$$\sum_{i=1}^N n_i d\mu_i = -S dT + V dP$$

#### 7.1.4.2 Mélange de gaz parfaits

Soit un système ( $\mathcal{S}$ ), en phase gazeuse homogène, composé de  $n_1$  moles de  $X_1$ ,  $n_2$  moles de  $X_2$ , ...  $n_N$  moles de  $X_N$ . La relation de Gibbs-Duhem révèle qu'au cours d'une transformation isotherme :

$$\sum_{i=1}^N n_i d\mu_i = V dP$$

Or, la pression partielle de chaque espèce  $X_i$  est définie comme la pression  $P_i$  qu'aurait ce gaz s'il occupait seul le volume  $V$  de ( $\mathcal{S}$ ), à la température  $T$  :

$$\begin{aligned} P_i = \frac{n_i RT}{V} &\Rightarrow \sum_{i=1}^N P_i = \frac{RT}{V} \sum_{i=1}^N n_i = P \\ &\Rightarrow dP = \sum_{i=1}^N dP_i \text{ avec } V = \frac{n_i RT}{P_i} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N n_i d\mu_i &= V \sum_{i=1}^N dP_i = \sum_{i=1}^N V dP_i = \sum_{i=1}^N n_i RT \frac{dP_i}{P_i} \\ &\Rightarrow d\mu_i = RT \frac{dP_i}{P_i} \end{aligned}$$

Notamment, lorsque la pression partielle varie de  $P_0 = 1$  bar à  $P_i$ , de manière isotherme, cette relation conduit à :

$$\int_{\mu_i(T, P_0)}^{\mu_i(T, P_i)} d\mu_i = RT \int_{P_0}^{P_i} \frac{dP_i}{P_i} \Rightarrow \mu_i(T, P_i) = \mu_i(T, P_0) = RT \ln \left( \frac{P_i}{P_0} \right)$$

En outre,  $P_i$  peut être exprimé en fonction de la fraction molaire  $x_i$  de  $X_i$  :

$$P_i = x_i \times P \text{ où } x_i = \frac{n_i}{n} \text{ et } n = \sum_{i=1}^N n_i$$

auquel cas :

$$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_i(T, P_0) + RT \ln \left( \frac{x_i P}{P_0} \right) \quad (10)$$

Rappelons que, lorsque  $x_i = 1$ , le gaz parfait  $X_i$  est pur, en conséquence de quoi son potentiel chimique est aussi donné par l'expression (6) :

$$\mu_i(T, P, x_i = 1) = \mu_i^*(T, P) = \mu_i^0(T) + RT \ln \left( \frac{P}{P_0} \right)$$

tandis que l'identité (10) devient :

$$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_i(T, P_0) + RT \ln \left( \frac{P}{P_0} \right)$$

de sorte que  $\mu_i(T, P_0) = \mu_i^0(T)$  conduit à poser :

$$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_i^0(T) + RT \ln \left( \frac{x_i P}{P_0} \right)$$

ou encore :

$$\mu_i(T, P_i) = \mu_i^0(T) + RT \ln \left( \frac{P_i}{P_0} \right)$$

#### 7.1.4.3 Mélange idéal de phases condensées

Un système est dit idéal lorsque les particules qui le composent n'interagissent pas entre-elles<sup>1</sup>. Par définition, le gaz parfait est idéal, avec :

$$\begin{aligned} \mu_i(T, P, x_i) &= \mu_i^0(T) + RT \ln \left( x_i \times \frac{P}{P_0} \right) \\ &= \mu_i^0(T) + RT \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) + RT \ln x_i \\ &= \mu_i(T, P, x_i = 1) + RT \ln x_i \end{aligned}$$

**Définition 10** Par analogie avec le gaz parfait, le potentiel chimique d'un constituant  $X_i$  d'un mélange idéal vérifie :

$$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_i(T, P, x_i = 1) + RT \ln x_i$$

Remarque – On admettra, dans la suite de ce cours de deuxième année, que tous les mélanges sont idéaux.

Par définition, le potentiel chimique de l'espèce  $X_i$  pure s'écrit :

$$\mu_i^*(T, P) = \mu_i(T, P, x_i = 1) \Rightarrow \mu_i(T, P, x_i) = \mu_i^*(T, P) + RT \ln x_i$$

<sup>1</sup>L'absence d'interaction entre les particules se traduit par la conservation, lors d'un mélange, de certaines fonctions extensives, telles que l'enthalpie, l'énergie interne, le volume et la capacité thermique : les grandeurs molaires s'identifient alors aux grandeurs molaires partielles :

$$H_{mi}^* = H_{mi} \quad U_{mi}^* = U_{mi} \quad V_{mi}^* = V_{mi} \quad C_{pmi}^* = C_{pmi}$$

Attention cependant, d'autres grandeurs varient lors des opérations de mélange ; il s'agit, notamment, de l'entropie et par conséquent aussi de l'enthalpie libre :

$$G_{mi}^* \neq G_{mi} \quad S_{mi}^* \neq S_{mi}$$

où la relation (7) permet de poser, pour une phase condensée :

$$\begin{aligned}\mu_i^*(T, P) &= \mu_i^0(T) + V_{mi}^* \times (P - P_0) \\ \Rightarrow \mu_i(T, P, x_i) &= \mu_i^0(T) + V_{mi}^* \times (P - P_0) + RT \ln x_i\end{aligned}$$

Ce faisant, en négligeant le terme  $V_{mi}^* \times (P - P_0)$  devant  $\mu_i^0(T)$  pour une phase condensée, on obtient simplement :

$$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_i^0(T) + RT \ln x_i$$

#### 7.1.4.4 Solvant et soluté

**Définition 11** On appelle solvant  $X_s$  d'un mélange homogène de  $n_1$  moles de  $X_1$ , ...  $n_N$  moles de  $X_N$ , l'espèce dont la quantité  $n_s$  excède de beaucoup celle des autres constituants du mélange :

$$n_1 + n_2 + \dots + n_s + \dots + n_N \simeq n_s$$

Les constituants  $X_{i \neq s}$  sont alors appelés solutés.

La fraction molaire d'un unique solvant est définie par :

$$x_s = \frac{n_s}{n_1 + \dots + n_s + \dots + n_N} \simeq \frac{n_s}{n_s} = 1$$

en conséquence de quoi :

$$\mu_i(T, P) = \mu_i^0(T) \text{ pour un unique solvant.}$$

**Δ** Dans le cas où le système comporte plusieurs solvants  $X_{s1}, X_{s2}, \dots$  :

$$x_{si} = \frac{n_{si}}{n_1 + \dots + n_{s1} + n_{s2} + \dots + n_N} \simeq \frac{n_{si}}{n_{s1} + n_{s2} + \dots} \neq 1$$

En revanche, pour un soluté :

$$x_{i \neq s} = \frac{n_i}{n_1 + \dots + n_s + \dots + n_N} \simeq \frac{n_i}{n_s}$$

On définit alors la concentration molaire volumique  $c_i$  (en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ) de  $X_i$  dans le volume  $V$  du mélange par le rapport :

$$c_i = \frac{n_i}{V} \Rightarrow x_i \simeq c_i \times \frac{V}{n_s} = \frac{c_i}{c_0} \times \frac{c_0 V}{n_s}$$

où  $c_0$  est choisi arbitrairement égal à  $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Il s'ensuit que le potentiel chimique du soluté  $X_i$  vaut :

$$\begin{aligned}\mu_i(T, P, x_i) &= \mu_i(T, P, x_i = 1) + RT \ln x_i \\ &= \mu_i(T, P, x_i = 1) + RT \ln \left( \frac{c_0 V}{n_s} \right) + RT \ln \left( \frac{c_i}{c_0} \right)\end{aligned}$$

expression que l'on peut également présenter sous la forme :

$$\mu_i(T, P, c_i) = \mu_i(T, P, c_i = c_0) + RT \ln \left( \frac{c_i}{c_0} \right)$$

Enfin, de la définition de  $\mu_i$  :

$$dG = -S dT + V dP + \sum_{i=1}^N \mu_i dn_i$$

il découle que :

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial P}\right)_{T, n_j} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T, P, n_{j \neq i}} = V_{mi}$$

où  $V_{mi}$  désigne le volume molaire de  $X_i$  dans le mélange. Ce terme étant négligeable pour une phase condensée,  $\mu_i$  apparaît comme une fonction très peu dépendante de  $P$ , auquel cas on pourra poser :

$$\mu_i(T, P, c_i = c_0) \simeq \mu_i(T, P_0, c_i = c_0)$$

On notera désormais :

$$\mu_i^0(T) = \mu_i(T, P = P_0, c_i = c_0)$$

de manière à présenter le potentiel chimique du soluté sous la forme suivante :

$$\mu_i(T, P, c_i) = \mu_i^0(T) + RT \ln \left(\frac{c_i}{c_0}\right)$$

#### 7.1.4.5 Conclusion : activité d'une espèce

L'étude précédente a montré que l'expression retenue pour le potentiel chimique d'une espèce  $X_i$  dépend de la nature de  $X_i$  :

- si  $X_i$  est gazeux :  $\mu_i(T, P) = \mu_i^0(T) + RT \ln \left(\frac{P_i}{P_0}\right)$  ;
- si  $X_i$  se présente sous forme d'une phase liquide, mélangée de manière homogène à d'autres constituants liquides :

$$\mu_i(T, P, x_i) = \mu_i^0(T) + RT \ln x_i$$

- si  $X_i$  est un solvant unique ou se trouve dans une phase condensée pure (liquide non miscible, solide, précipité, ...) :  $\mu_i(T, P) = \mu_i^0(T)$  ;
- si  $X_i$  est un soluté :  $\mu_i(T, P, c_i) = \mu_i^0(T) + RT \ln \left(\frac{c_i}{c_0}\right)$ .

Afin d'adopter une forme unitaire pour l'expression du potentiel chimique d'une espèce  $X_i$ , on définit l'affinité  $a_{X_i}$  de  $X_i$  par :

- le rapport :  $a_{X_i} = \frac{P_i}{P_0}$  si  $X_i$  est un gaz ; la pression *standard*  $P_0$  vaut arbitrairement  $P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$  et c'est pourquoi  $P_i$  sera fréquemment exprimé en bar de sorte que  $x_i$  prend la valeur numérique de  $P_i$ , et est dépourvu d'unité.
- la fraction molaire :  $a_{X_i} = x_i$  si  $X_i$  est dans une phase liquide, miscible à d'autres phases liquides ;

- au rapport  $a_{X_i} = \frac{c_i}{c_0}$  où  $c_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  si  $X_i$  est un soluté. On remarque à nouveau qu'en exprimant  $c_i$  en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , l'activité  $a_{X_i}$  devient une grandeur adimensionnée.

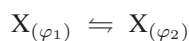
En conclusion, le potentiel chimique adopte la forme générale :

$$\mu_i(T, P, a_i) = \mu_i^0(T) + RT \ln a_{X_i}$$

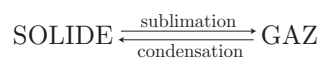
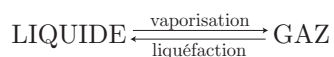
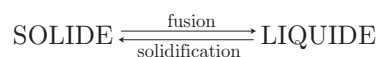
## 7.1.5 Corps pur sous deux phases

### 7.1.5.1 Définitions

On considère un corps pur X sous deux phases  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . L'équilibre de changement d'état :



s'effectue à une température  $T$  et à une pression  $P$  constantes et égales à celles du milieu extérieur ; il s'agit d'une transformation isotherme et isobare. On rappelle ci-dessous le nom des changements d'état que l'on pourra rencontrer :



**Définition 12** Lorsqu'une masse  $\delta m$  d'un corps effectue la transition de phase  $X_{\varphi_1} \rightarrow X_{\varphi_2}$ , l'enthalpie massique de ce corps varie de la quantité :

$$dh = \ell_{12} \times \delta m$$

$\ell_{12}$  représente alors la chaleur latente massique de la transition de phase.

Nous rencontrerons ainsi, dans ce cours, les chaleurs latentes massiques de fusion ( $\ell_{\text{fus}}$ ), de vaporisation ( $\ell_{\text{vap}}$ ) et de sublimation ( $\ell_{\text{sub}}$ ).

**Remarque** – Lorsque le changement d'état est effectué, de manière réversible, à la température et sous la pression de l'équilibre  $X_{\varphi_1} \rightleftharpoons X_{\varphi_2}$ , la quantité de chaleur  $\delta Q_{P,T}$  s'identifie à la variation d'enthalpie du système :

$$\delta Q_{P,T} = dH_{1 \rightarrow 2} \Rightarrow Q_{T,P} = \Delta H = m \times \ell_{12}$$

**Définition 13** Lorsqu'une masse  $\delta m$  d'un corps pur effectue la transition de phase  $X_{\varphi_1} \rightarrow X_{\varphi_2}$ , l'entropie du système varie d'une quantité :

$$dS = \delta m \times (s_2 - s_1)$$

où  $s_i$  désigne l'entropie massique de  $X_{(\varphi_i)}$ .

Si la transition de phase est effectuée de manière réversible, à la température  $T$  :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow s_2 - s_1 = \frac{\ell_{12}}{T} \quad (11)$$

### 7.1.5.2 Condition d'équilibre

**Définition 14** On appelle phase un système physique dans lequel les paramètres intensifs sont continus à notre échelle.

Soient  $n$  moles d'un corps présent dans deux phases, contenant respectivement  $n_1$  et  $n_2$  moles de ce corps et de potentiels chimiques  $\mu_1(T, P)$  et  $\mu_2(T, P)$  à la température  $T$  et sous la pression  $P$ . Lors d'un changement de composition de ces phases, à  $T$  et  $P$  constants, l'enthalpie libre du système diphasé varie conformément à la loi (9) établie à la page 1050 :

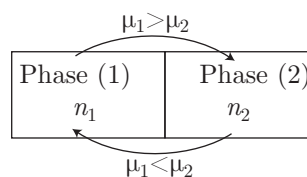
$$dG = V dP - S dT + \sum_{i=1}^2 \mu_i dn_i = \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2$$

où la conservation de la matière impose :

$$\begin{aligned} n = n_1 + n_2 \Rightarrow dn = dn_1 + dn_2 = 0 &\Rightarrow dn_2 = -dn_1 \\ &\Rightarrow dG = dn_1 (\mu_1 - \mu_2) \end{aligned}$$

L'enthalpie libre du système ne pouvant que décroître, plusieurs situations peuvent se présenter :

- si  $\mu_1 > \mu_2$ ,  $dG < 0$  n'est vérifié que si  $dn_1 < 0$ , ce qui signifie que la phase (1) se vide au profit de la phase (2) ;
- si  $\mu_2 > \mu_1$ , l'inégalité :  $dG < 0$  impose que  $dn_1 > 0$  ; la phase (1) s'accroît aux dépens de la phase (2).



Par conséquent, l'équilibre entre les deux phases est établi lorsque :

$$\mu_1(T, P) = \mu_2(T, P) \quad (12)$$



Sous quelle pression doit-on se placer pour faire bouillir de l'eau à 25°C ? On donne les potentiels chimiques *standard* de l'eau à l'état de vapeur et à l'état liquide, à la température  $T = 298,15$  K :

$$\mu_{\text{liq}}^0 = -237,14 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ et } \mu_{\text{vap}}^0 = -228,85 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La constante molaire des gaz parfait a pour valeur :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

**RÉPONSE** Le potentiel chimique d'une espèce ( $X_i$ ) s'écrit, d'une manière générale :

$$\mu_i(T, P) = \mu_i^0(T) + RT \ln a_i$$

où  $a_i$  désigne l'activité chimique de  $X_i$  :

- la phase liquide a pour activité chimique :  $a_{\text{liq}} = 1$ , auquel cas :

$$\mu_{\text{liq}}(T, P) = \mu_{\text{liq}}^0(T)$$



- la vapeur d'eau a, quant à elle, une activité :  $a_{\text{vap}} = \frac{P}{P_0}$  où  $P_0 = 1$  bar désigne la pression *standard* et  $P$  la pression d'ébullition. C'est pourquoi :

$$\mu_{\text{vap}}(T, P) = \mu_{\text{vap}}^0(T) + RT \ln \left( \frac{P}{P_0} \right)$$

La coexistence de l'eau sous les phases liquides et gazeuse impose alors l'identité des potentiels chimiques :

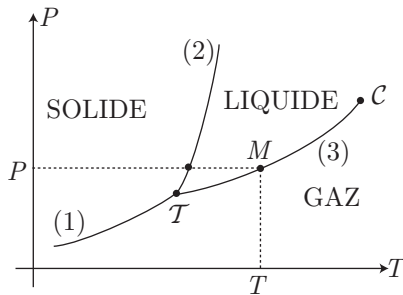
$$\begin{aligned} \mu_{\text{vap}}(T, P) = \mu_{\text{liq}}(T, P) &\Rightarrow \mu_{\text{vap}}^0(T) + RT \ln \left( \frac{P}{P_0} \right) = \mu_{\text{liq}}^0(T) \\ &\Rightarrow P = P_0 \times \exp \left[ \frac{\mu_{\text{liq}}^0(T) - \mu_{\text{vap}}^0(T)}{RT} \right] \\ &\Rightarrow P = \exp \left[ \frac{-237\,140 + 228\,850}{8,314 \times 298,15} \right] \end{aligned}$$

soit encore :

$$P = 3,528 \cdot 10^{-2} \text{ bar} = 3\,528 \text{ Pa}$$

### 7.1.5.3 Relation de Clapeyron

Un diagramme  $(P, T)$  fait apparaître les différentes phases sous lesquelles peut se présenter un corps pur (par exemple : liquide, solide ou gazeuse) :



- (1) : courbe de sublimation
- (2) : courbe de fusion
- (3) : courbe de vaporisation

Les régions du diagramme qui correspondent aux diverses phases sont séparées par des courbes d'équilibre (ou de transition de phase) : la courbe de sublimation, celle de fusion et celle de vaporisation. Un point  $M(T, P)$  de ces courbes désigne l'état  $(T, P)$  du corps pur présent simultanément dans plusieurs phases (il s'agit d'un état d'équilibre). Au point triple  $(T)$ , le corps pur se trouve simultanément sous trois phases.

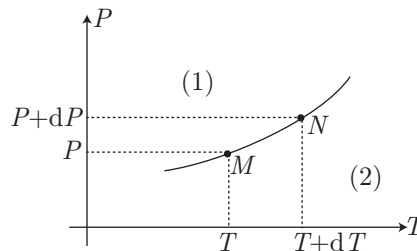
Considérons alors deux points  $M(T, P)$  et  $N(T + dT, P + dP)$  d'une courbe d'équilibre entre deux phases (1) et (2).

Le corps pur présente, au point  $M$ , des potentiels chimiques  $\mu_1(T, P)$  et  $\mu_2(T, P)$  sous les phases respectives (1) et (2), qui doivent respecter la condition d'équilibre (12) :

$$\mu_1(T, P) = \mu_2(T, P)$$

De même, l'équilibre entre les phases (1) et (2) au point  $N$  est assujéti à l'égalité :

$$\mu_1(T + dT, P + dP) = \mu_2(T + dT, P + dP)$$



c'est-à-dire, au premier ordre en  $dT$  et en  $dP$  :

$$\mu_1(T, P) + \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial P}\right)_T dP = \mu_2(T, P) + \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial \mu_2}{\partial P}\right)_T dP \quad (13)$$

Or, l'identité (9) de la page 1050 s'écrit, dans le cas où les phases (1) et (2) contiennent respectivement  $n_1$  et  $n_2$  moles de corps pur :

$$dG = V dP - S dT + \mu_1 dn_1 + \mu_2 dn_2$$

de sorte que :

$$\left(\frac{\partial \mu_i}{\partial P}\right)_{T, n_j \neq i} = \left(\frac{\partial V}{\partial n_i}\right)_{T, P, n_j \neq i} = V_{im} \text{ et } \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial T}\right)_{P, n_j \neq i} = -\left(\frac{\partial S}{\partial n_i}\right)_{T, P, n_j \neq i} = -S_{im}$$

C'est pourquoi l'équation (13) se simplifie :

$$\begin{aligned} -S_{1m} dT + V_{1m} dP &= -S_{2m} dT + V_{2m} dP \\ \Rightarrow (S_{2m} - S_{1m}) dT &= (V_{2m} - V_{1m}) dP \\ \Rightarrow S_{2m} - S_{1m} &= (V_{2m} - V_{1m}) \times \frac{dP}{dT} \end{aligned}$$

Enfin, la relation (11) de la page 1056 fournit :

$$S_{2m} - S_{1m} = \frac{L_{12,m}}{T}$$

où  $L_{12,m}$  désigne la chaleur latente molaire du changement d'état (1)  $\rightarrow$  (2). Par conséquent, cette chaleur latente est donnée par la relation de Clapeyron :

$$L_{12,m} = T \times (V_{2m} - V_{1m}) \times \frac{dP}{dT}$$

que l'on peut aussi écrire à l'aide de grandeurs massiques :

$$\ell_{12} = T \times (v_2 - v_1) \times \frac{dP}{dT}$$

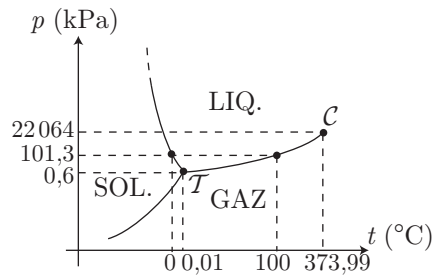
Remarque – Dans le cas de l'eau, la masse volumique  $\mu_s$  de la glace (phase solide) est plus petite que celle,  $\mu_\ell$ , du liquide. C'est pourquoi :

$$\mu_s < \mu_\ell \Rightarrow v_s = \frac{1}{\mu_s} > v_\ell = \frac{1}{\mu_\ell} \Rightarrow v_\ell - v_s < 0$$

Ainsi, la relation de Clapeyron, relative à la fusion de la glace :

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{fusion}} = \frac{\ell_{\text{fus.}}}{T \times (v_\ell - v_s)} < 0$$

montre que la courbe de fusion  $P(T)$  est décroissante :



Lors de la vaporisation d'un corps pur, de masse molaire \$M\$, on admet que la vapeur se comporte comme un gaz parfait et que la chaleur latente massique de vaporisation, \$\ell\_{\text{vap}}\$, est indépendante de la température.

1. Comparer les volumes massiques \$v\_\ell\$ et \$v\_g\$ des phases liquide et gazeuse respectivement. En déduire une simplification de la relation de Clapeyron.
2. Montrer qu'il existe une constante positive \$\alpha\$ telle que la courbe de vaporisation soit décrite par l'équation :

$$P(T) = \alpha \exp\left(-\frac{M \ell_{\text{vap}}}{RT}\right)$$

où \$R\$ désigne la constante molaire des gaz parfaits.

**RÉPONSE**

1. Soit une masse \$m\$ de corps pur, qui occupe un volume \$V\_\ell\$ lorsqu'il est liquide ou un volume \$V\_g\$ lorsqu'il est gazeux. Le gaz étant moins dense que le liquide, il s'ensuit que :

$$V_g \gg V_\ell \Rightarrow \frac{V_g}{m} \gg \frac{V_\ell}{m} \Rightarrow v_g \gg v_\ell \Rightarrow v_g - v_\ell \simeq v_g$$

Ainsi, la relation de Clapeyron, relative à la vaporisation, devient :

$$\ell_{\text{vap}} = T \times (v_g - v_\ell) \times \frac{dP}{dT} \simeq T \times v_g \times \frac{dP}{dT}$$

2. La vapeur se comporte comme un gaz parfait de masse molaire \$M\$, dont le volume \$V\_g\$ contient un nombre de moles \$n\$ de gaz et présente une masse \$m = n \times M\$ :

$$PV_g = nRT = m \times \frac{RT}{M} \Rightarrow v_g = \frac{V_g}{m} = \frac{RT}{PM}$$

La relation de Clapeyron simplifiée s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \ell_{\text{vap}} = T \times \frac{RT}{PM} \times \frac{dP}{dT} &\Rightarrow \frac{dP}{P} = \frac{M \ell_{\text{vap}}}{R} \times \frac{dT}{T^2} \\ &\Rightarrow d(\ln P) = d\left(-\frac{M \ell_{\text{vap}}}{RT}\right) \end{aligned}$$

Il existe donc une constante positive \$\alpha\$ telle que :

$$\ln P = \ln \alpha - \frac{M \ell_{\text{vap}}}{RT} \Rightarrow P(T) = \alpha \times \exp\left(-\frac{M \ell_{\text{vap}}}{RT}\right)$$

## 7.2 Grandeurs standard relatives à un constituant

### 7.2.1 Définitions

**Définition 15** On appelle état standard d'un corps l'état de ce corps pur à la pression  $P_0 = 1 \text{ bar}$  et à la température  $T$ .

Ainsi, l'état *standard* d'un gaz est un gaz parfait pur, de même formule chimique, à la température  $T$  et sous la pression  $P_0$ . Quant à l'état *standard* d'un corps condensé, il correspond à un corps pur, de même composition chimique, à la température  $T$  et sous la pression  $P_0$ .

Remarque – Un état standard peut ne pas exister dans la nature ; par exemple, la glace à la température  $T = 298 \text{ K}$  ( $25^\circ\text{C}$ ), sous la pression  $P_0 = 1 \text{ bar}$ .

**Définition 16** L'état standard d'un corps  $X_i$  dans un mélange est l'état de ce même corps, pur, à la température  $T$  et sous la pression  $P_0$ .

Cette définition revient à ignorer les interactions entre les divers corps, dans leur état *standard*, qui composent le mélange.

**Définition 17** On appelle grandeur standard associée à un constituant  $X_i$  la grandeur relative à  $X_i$ , pris dans son état standard.

**Définition 18** La grandeur molaire standard d'un corps est la grandeur standard associée à une mole de ce corps.

Remarque – Étant donné que l'état standard de  $X_i$  est défini à la pression  $P_0$  et que les interactions moléculaires sont négligées, une grandeur molaire standard ne dépend que de la température  $T$  et surtout pas de la composition du milieu.

La grandeur molaire *standard*  $\psi$  associée à un corps  $X_i$  sera désormais notée :

$$\psi_i^0(T) = \psi_i^*(T, P_0)$$

La grandeur molaire *standard*  $\psi^0(T, n_1, \dots, n_N)$  associée à un mélange de  $n_1$  moles de  $X_1$ ,  $n_2$  moles de  $X_2$ , ...,  $n_N$  moles de  $X_N$  est alors définie par :

$$\psi^0(T, n_1, \dots, n_N) = \sum_{i=1}^N \psi_i^0(T) \times n_i \quad (14)$$

### 7.2.2 Présentation de quelques grandeurs standard

Soient  $n$  moles d'un corps pur, à la température  $T$  et sous la pression  $P$ . L'enthalpie, l'entropie et la capacité thermique isobare d'un tel corps s'expriment par :

$$H^*(T, P) = n \times H_m^*(T, P) \quad S^*(T, P) = n \times S_m^*(T, P) \quad C_p^* = n \times C_{pm}^*(T, P)$$

où les grandeurs  $Y_m^*(T, P)$  sont les grandeurs molaires associées à  $Y^*(T, P)$ . Les grandeurs molaires *standard* sont alors, par définition, les grandeurs  $Y_m^*$  prises à la pression  $P_0$ . On les note :

$$Y_m^0(T) = Y_m^*(T, P_0)$$

C'est pourquoi l'enthalpie *standard*, l'entropie *standard* et la capacité thermique isobare *standard* valent :

$$H^0(T) = n \times H_m^0(T) \quad S^0(T) = n \times S_m^0(T) \quad C_p^0(T) = n \times C_{pm}^0(T)$$

Lorsque le système est fermé<sup>2</sup> :

$$dH^* = C_p^*(T, P) \times dT \Rightarrow n \times dH_m^* = n \times C_{pm}^*(T, P) dT \quad (15)$$

$$\Rightarrow C_{pm}^*(T, P) = \frac{dH_m^*}{dT} \Rightarrow C_{pm}^0(T) = \frac{dH_m^0}{dT} \quad (16)$$

De même, l'enthalpie libre d'un tel système est définie par :

$$\begin{aligned} G(T, P) &= H(T, P) - T \times S(T, P) \\ &= n \times [H_m^*(T, P) - T \times S_m^*(T, P)] \end{aligned}$$

d'où découle la définition du potentiel chimique  $\mu^*(T, P)$  :

$$G(T, P) = n \times \mu^*(T, P) \text{ avec } \mu^*(T, P) = H_m^*(T, P) - T \times S_m^*(T, P)$$

Notamment, le corps pur étant pris dans son état *standard* :

$$G^0(T) = n \times \mu^0(T) \text{ où } G^0(T) = G^*(T, P_0) \text{ et } \mu^0(T) = \mu^*(T, P_0)$$

avec :

$$\mu^0(T) = H^0(T) - T \times S^0(T)$$

La grandeur  $G^0(T)$  est alors l'enthalpie libre *standard* du système et  $\mu^0(T)$  son potentiel chimique *standard*.

Dans le cas d'un mélange de  $N$  substances, les grandeurs définies précédemment deviennent :

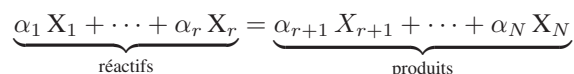
$$H^0(T) = \sum_{i=1}^N n_i H_i^0(T) \quad S^0(T) = \sum_{i=1}^N n_i S_i^0(T) \quad (17)$$

$$C_p^0(T) = \sum_{i=1}^N n_i C_{pi}^0(T) \quad G^0(T) = \sum_{i=1}^N n_i \mu_i^0(T) \quad (18)$$

## 7.2.3 Grandeurs standard de réaction

### 7.2.3.1 Réaction chimique

Une réaction chimique est décrite par une équation-bilan dans laquelle figurent les symboles chimiques ( $X_i$ ) des espèces et leurs coefficients stœchiométriques ( $\alpha_i$ ) :



<sup>2</sup>Pour les gaz parfaits, la première loi de Joule précise que  $H^*$  ne dépend que de la température  $T$ . Quant aux phases condensées, leur faible compressibilité permet également de postuler pour une dépendance de  $H^*$  exclusivement en  $T$ .

Pour  $1 \leq i \leq r$  (à gauche du signe  $=$ ) se trouvent les *réactifs*, tandis que les *produits* sont caractérisés par  $r + 1 \leq i \leq N$ .

Si  $n_{i0}$  désigne la quantité initiale du constituant  $X_i$ , cette quantité de matière devient, lors de l'évolution de la réaction :

$$n_i = n_{i0} - \alpha_i \xi \text{ pour les réactifs et } n_i = n_{i0} + \alpha_i \xi \text{ pour les produits.}$$

où  $\xi$  représente l'avancement de la réaction, supposé nul en début de réaction. Afin d'uniformiser ces notations, on définit un coefficient stœchiométrique algébrique par :

$$\begin{cases} \nu_i = -\alpha_i \text{ pour } 1 \leq i \leq r \\ \nu_i = \alpha_i \text{ pour } r + 1 \leq i \leq N \end{cases} \Rightarrow n_i = n_{i0} + \nu_i \times \xi$$

### 7.2.3.2 Opérateur de Lewis

Soit  $Y(T, P, n_1, \dots, n_N)$  une grandeur physique associée à un système composé de  $n_1$  moles de  $X_1$ , ...,  $n_N$  moles de  $X_N$ , à la température  $T$  et sous la pression  $P$ . Compte tenu de la dépendance des  $n_i$  en fonction de  $\xi$ , on peut poser :

$$Y(T, P, n_1, \dots, n_N) = \psi(T, P, \xi) \text{ car } n_i = n_{i0} + \nu_i \xi$$

C'est pourquoi des variations de  $T$ ,  $P$ ,  $n_i$  et  $\xi$  se traduisent par les variations :

$$\begin{aligned} dY &= \left( \frac{\partial Y}{\partial T} \right)_{P, n_i} dT + \left( \frac{\partial Y}{\partial P} \right)_{T, n_i} dP + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial Y}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_{j \neq i}} dn_i \\ &= \left( \frac{\partial Y}{\partial T} \right)_{P, n_i} dT + \left( \frac{\partial Y}{\partial P} \right)_{T, n_i} dP + \sum_{i=1}^N Y_{im} dn_i \end{aligned}$$

et :

$$d\psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{P, \xi} dT + \left( \frac{\partial \psi}{\partial P} \right)_{T, \xi} dP + \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{T, P} d\xi$$

avec :

$$\begin{aligned} dY = d\psi \Rightarrow \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{T, P} d\xi &= \sum_{i=1}^N Y_{im} dn_i \text{ où } n_i = n_{i0} + \nu_i \xi \\ &= \sum_{i=1}^N \nu_i Y_{im} \times d\xi \\ &\Rightarrow \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{T, P} = \sum_{i=1}^N \nu_i Y_{im} \end{aligned}$$

**Définition 19** L'opérateur de Lewis  $\Delta_r$  associé à  $\psi(T, P, \xi) = Y(T, P, n_i)$  est défini par :

$$\Delta_r Y = \sum_{i=1}^N \nu_i Y_{im} = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)_{T, P} \quad (19)$$

Dans le cas d'une grandeur *standard*, la définition (14) de la page 1060 :

$$Y^0(T, n_1, \dots, n_N) = \sum_{i=1}^N Y_i^0(T) \times n_i$$

fournit directement :

$$\begin{aligned} dY^0 &= \left( \sum_{i=1}^N \frac{dY_i^0(T)}{dT} n_i \right) dT + \sum_{i=1}^N Y_i^0(T) dn_i \text{ où } n_i = n_{i0} + \nu_i \xi \\ &= \left( \frac{\partial Y^0}{\partial T} \right)_{n_i} dT + \left[ \sum_{i=1}^N Y_i^0(T) \nu_i \right] d\xi \end{aligned}$$

soit encore :

$$dY^0 = \left( \frac{\partial Y^0}{\partial T} \right)_{n_i} dT + \left[ \sum_{i=1}^N \nu_i Y_i^0(T) \right] d\xi \quad (20)$$

**Définition 20** On appelle grandeur standard de réaction :

$$\Delta_r Y^0(T) = \sum_{i=1}^N \nu_i \times Y_i^0(T) \quad (21)$$

Au cours d'une transformation isotherme, la variation  $\Delta Y^0$  de la grandeur  $Y^0$  provient de la variation  $\Delta \xi = \xi_f - \xi_i$  de l'avancement :

$$dY^0 = \Delta_r Y^0(T) d\xi \Rightarrow \Delta Y^0(T) = \int_{\xi_i}^{\xi_f} \Delta_r Y^0(T) d\xi$$

où  $\Delta_r Y^0(T)$  est indépendant de  $\xi$  (c'est-à-dire de la composition du mélange de constituants pris dans leur état *standard*). C'est pourquoi :

$$\Delta Y^0(T) = Y^0(T, \xi_f) - Y^0(T, \xi_i) = \Delta_r Y^0(T) \times (\xi_f - \xi_i)$$

Remarque – Étant donné que :

$$Y^0(T, n_i) = \sum_{i=1}^N Y_i^0(T) \times n_i = \sum_{i=1}^N Y_i^0(T) \times (n_{i0} + \nu_i \xi)$$

il apparaît que  $Y^0$  est une fonction qui dépend directement de  $\xi$ . C'est pourquoi la loi (20) sera souvent substituée par :

$$dY^0 = \left( \frac{\partial Y^0}{\partial T} \right)_{\xi} dT + \Delta_r Y^0(T) d\xi \text{ où } \Delta_r Y^0(T) = \left( \frac{\partial Y^0}{\partial \xi} \right)_T \quad (22)$$

La définition de la capacité thermique *standard*, à pression constante :

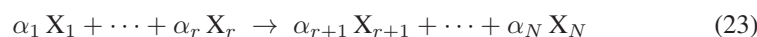
$$C_p^0(T) = \sum_{i=1}^N n_i C_{pi}^0(T)$$

conduit à poser :  $\Delta_r C_p^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i C_{pi}^0(T)$  de sorte que :

$$dC_p^0(T) = \left( \frac{\partial C_p^0}{\partial T} \right)_{\xi} dT + \Delta_r C_p^0 d\xi$$

### 7.2.3.3 Enthalpie standard de réaction

Considérons une réaction d'équation-bilan :



Compte tenu de la loi (1) de la page 1044, l'enthalpie  $H(T, P, n_i)$  de ce système s'exprime en fonction des quantités  $n_i$  de chaque constituant  $X_i$  :

$$H(T, P, n_i) = \sum_{i=1}^N n_i \times H_{mi}(T, P, n_i)$$

où  $H_{mi}(T, P, n_i) = \left( \frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_j \neq i}$  désigne l'enthalpie molaire partielle de  $X_i$ . Or, le mélange étant supposé idéal, chaque enthalpie molaire partielle  $H_{mi}(T, P, n_i)$  s'identifie à l'enthalpie molaire  $H_{mi}^*(T, P)$  de  $X_i$  :

$$H_{mi}(T, P, n_i) = H_{mi}^*(T, P) \Rightarrow H(T, P, n_i) = \sum_{i=1}^N n_i \times H_{mi}^*(T, P)$$

Enfin, conformément à la seconde loi de Joule,  $H_{mi}^*$  est indépendant de la pression  $P$  si  $X_i$  est un gaz parfait. Par extension,  $H_{mi}^*$  est aussi indépendant de  $P$  si  $X_i$  se présente sous une phase condensée. C'est pourquoi, en notant  $P_0 = 1$  bar la pression *standard* :

$$H_{mi}^*(T, P) = H_{mi}^*(T, P_0) = H_{mi}^0(T)$$

où  $H_{mi}^0(T)$  est l'enthalpie molaire *standard* de  $X_i$ , en fonction de laquelle on peut poser :

$$H(T, P, n_i) = \sum_{i=1}^N n_i \times H_{mi}^0(T)$$

En rappelant que l'avancement  $\xi$  de la réaction est lié à  $n_i$  et au coefficient algébrique  $\nu_i$  de  $X_i$  :

$$\left( \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \right)_{T, P} = \nu_i$$



on définit l'enthalpie de réaction à partir de l'opérateur de Laplace :

$$\Delta_r H = \left( \frac{\partial H}{\partial \xi} \right)_{T, P} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \right)_{T, P} \times H_{mi}^0(T) \Rightarrow \Delta_r H = \sum_{i=1}^N \nu_i \times H_{mi}^0(T)$$

Remarque – Cette relation révèle que  $\Delta_r H$  ne dépend pas de la pression  $P$ , en raison de quoi lorsque  $P = P_0$ , l'enthalpie standard de la réaction (23) est définie par :

$$\Delta_r H^0(T) = \Delta_r H(T, P_0) \Rightarrow \Delta_r H^0(T) = \sum_{i=1}^N \nu_i \times H_{mi}^0(T)$$

### 7.2.3.4 Transfert thermique

Soit ( $\mathcal{S}$ ) un système constitué des réactifs et produits qui apparaissent dans l'équation-bilan (23). Lors d'une transformation au cours de laquelle la température, la pression et l'avancement varient de  $dT$ ,  $dP$  et  $d\xi$ , l'enthalpie de ( $\mathcal{S}$ ) varie de la quantité  $dH$  telle que :

$$H(T, P, n_i) = \sum_{i=1}^N n_i H_{mi}^0(T) \Rightarrow dH = \sum_{i=1}^N dn_i \times H_{mi}^0(T) + \sum_{i=1}^N n_i \times dH_{mi}^0(T)$$

où :  $dn_i = \nu_i d\xi$  tandis que la capacité thermique molaire isobare  $C_{pm}^0(X_i)$  de  $X_i$  a été définie par la relation (16) de la page (1061) :

$$C_{pm}^0(X_i) = \frac{dH_{mi}^0}{dT} \Rightarrow dH_{mi}^0 = C_{pm}^0(X_i) dT$$

Il s'ensuit que :

$$dH = \left[ \sum_{i=1}^N n_i C_{pm}^0(X_i) \right] dT + \left[ \sum_{i=1}^N \nu_i H_{mi}^0(T) \right] d\xi$$

c'est-à-dire :

$$dH = C_p^0 dT + \Delta_r H^0(T) d\xi \quad (24)$$

où  $C_p^0 = \sum_{i=1}^N n_i C_{pm}^0(X_i)$  désigne la capacité thermique de ( $\mathcal{S}$ ) à pression constante.

Du reste, si la pression que l'extérieur exerce sur ( $\mathcal{S}$ ) est maintenue à la valeur constante  $P_{\text{ext}}$ , alors que son volume s'accroît de  $dV$ , le premier principe de la thermodynamique relie la variation  $dU$  de l'énergie interne de ( $\mathcal{S}$ ) à la quantité de chaleur  $\delta Q$  reçue par ( $\mathcal{S}$ ) :

$$dU = \delta Q - P_{\text{ext}} dV \Rightarrow \Delta U = Q - P_{\text{ext}} \Delta V$$

à condition qu'aucune force, autre que celle de pression, ne s'exerce sur ( $\mathcal{S}$ ). Par suite, l'enthalpie  $H$  de ( $\mathcal{S}$ ), définie à l'aide de la pression  $P$  qui règne dans ( $\mathcal{S}$ ), vaut :

$$H = U + PV \Rightarrow \Delta H = \Delta U + \Delta(PV) = Q - P_{\text{ext}} \Delta V + \Delta(PV)$$

Si la transformation est monobare, c'est-à-dire que la pression  $P$  prend initialement la même valeur  $P_{\text{ext}}$  qu'à la fin de la transformation :

$$\Delta(PV) = P_{\text{ext}} \Delta V \Rightarrow \Delta H = Q_P \text{ (transformation monobare).}$$

De même, si la transformation est isobare à  $P_{\text{ext}}$  : la pression  $P$  conserve, tout au long de la transformation, la valeur constante  $P_{\text{ext}}$  :

$$\Delta(PV) = \Delta(P_{\text{ext}} V) = P_{\text{ext}} \Delta V \Rightarrow \Delta H = Q_P \text{ (transformation isobare).}$$

Si, de surcroît, la transformation est isotherme ( $T = \text{cte}$ ), la relation (24) indique qu'un accroissement  $\Delta\xi$  de l'avancement s'accompagne d'une augmentation de l'enthalpie de ( $S$ ) :

$$dH = \Delta_r H^0(T) d\xi \Rightarrow \Delta H = \Delta_r H^0(T) \times \Delta\xi$$

En conclusion :

au cours d'une transformation isotherme et isobare (ou monobare), pendant laquelle l'avancement de la réaction progresse de  $\Delta\xi$ , le système ( $S$ ) reçoit la quantité de chaleur :

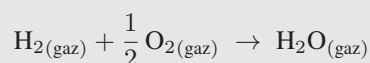
$$Q_{T,P} = \Delta_r H^0(T) \times \Delta\xi$$

Ce faisant, le signe de  $\Delta_r H^0(T)$  permet de prévoir le comportement thermique d'un système ( $S$ ), siège d'une réaction chimique :

- la réaction est *exothermique* ( $Q_{T,P} < 0$ ) si  $\Delta_r H^0(T) < 0$  ;
- la réaction est *endothermique* ( $Q_{T,P} > 0$ ) si  $\Delta_r H^0(T) > 0$  ;
- la réaction est *athermique* ( $Q_{T,P} = 0$ ) lorsque  $\Delta_r H^0(T) = 0$ .



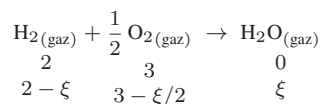
La synthèse de l'eau, selon l'équation bilan :



a pour enthalpie *standard* :  $\Delta_r H^0 = -241,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  à 298 K.

On réalise cette réaction avec  $n_1 = 2$  moles de  $\text{H}_2$  et  $n_2 = 3$  moles de  $\text{O}_2$ . Calculer la chaleur dégagée, en considérant la réaction comme totale.

**RÉPONSE** Soit  $\xi$  l'avancement de la réaction supposée totale, de bilan molaire :



La réaction cesse lorsque l'avancement prend la valeur  $\xi_f = 2$ , auquel cas le dihydrogène est complètement consommé. Ce faisant, l'avancement varie de  $\Delta\xi = \xi_f - \xi_i = 2$  (car  $\xi_i = 0$ ), de sorte que la réaction absorbe la chaleur :

$$Q_{\text{absorbée}} = \Delta_r H^0 \times \Delta\xi = -241,8 \times 2 = -483,6 \text{ kJ}$$

ce qui signifie qu'elle dégage la quantité de chaleur :

$$Q_{\text{dégagée}} = -Q_{\text{absorbée}} = 483,6 \text{ kJ}$$

### 7.2.3.5 Combinaison linéaire d'équations-bilan

Considérons deux équations-bilans :

$$\begin{cases} \text{équation (a)} : a_1 X_1 + \dots + a_r X_r = a_{r+1} X_{r+1} + \dots + a_N X_N \\ \text{équation (b)} : b_1 X_1 + \dots + b_r X_r = b_{r+1} X_{r+1} + \dots + b_N X_N \end{cases}$$

dont les enthalpies *standard* de réaction valent respectivement  $\Delta_r H_{(a)}^0$  et  $\Delta_r H_{(b)}^0$ . On dit qu'une réaction (c), d'équation-bilan :

$$c_1 X_1 + \dots + c_r X_r = c_{r+1} X_{r+1} + \dots + c_N X_N$$

est une combinaison linéaire des deux premières s'il existe des constantes réelles  $\alpha$  et  $\beta$  telles que :

$$c_i = \alpha a_i + \beta b_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Dans ce cas, les coefficients stœchiométriques algébriques vérifient également la relation :

$$\bar{c}_i = \alpha \bar{a}_i + \beta \bar{b}_i \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Or, l'enthalpie *standard* de la réaction (c) vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_{(c)}^0 &= \sum_{i=1}^N \bar{c}_i H_i^0 = \sum_{i=1}^N (\alpha \bar{a}_i + \beta \bar{b}_i) \times H_i^0 \\ &= \alpha \sum_{i=1}^N \bar{a}_i H_i^0 + \beta \sum_{i=1}^N \bar{b}_i H_i^0 \\ &\Rightarrow \Delta_r H_{(c)}^0 = \alpha \Delta_r H_{(a)}^0 + \beta \Delta_r H_{(b)}^0 \end{aligned}$$

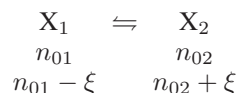
où  $\Delta_r H_{(a)}^0 = \sum_{i=1}^N \bar{a}_i H_i^0$  et  $\Delta_r H_{(b)}^0 = \sum_{i=1}^N \bar{b}_i H_i^0$  sont les enthalpies *standard* des réactions (a) et (b).

Remarque – Les calculs précédents se généralisent à toute grandeur *standard* de réaction :

$$\Delta_r Y_{(c)=\alpha(a)+\beta(b)}^0 = \alpha \Delta_r Y_{(a)}^0 + \beta \Delta_r Y_{(b)}^0 \quad (25)$$

### 7.2.3.6 Enthalpie de changement d'état

Soit le changement d'état, d'équation :



effectué à la température  $T$  et sous la pression  $P$  d'équilibre. Si  $H_{mi}^*(T, P)$  désigne l'enthalpie molaire du corps pur  $X_i$ , la variation d'enthalpie consécutive au changement d'état vaut :

$$\Delta H_{1 \rightarrow 2} = [H_{m2}^*(T, P) - H_{m1}^*(T, P)] \times \xi \quad (26)$$

c'est-à-dire :

$$\Delta H_{1 \rightarrow 2}^0 = \xi \times [H_2^0(T) - H_1^0(T)] \Rightarrow \Delta H_{1 \rightarrow 2}^0 = \xi \times \Delta_r H_{1 \rightarrow 2}^0(T) \quad (27)$$

où  $\Delta_r H_{1 \rightarrow 2}^0(T)$  désigne l'enthalpie *standard* du changement d'état ; on définira ainsi les enthalpies *standard* des changements d'état suivants :

fusion	$X_{(\text{sol})} \rightleftharpoons X_{(\text{liq})}$	$\Delta_r H_{\text{fus}}^0(T)$
vaporisation	$X_{(\text{liq})} \rightleftharpoons X_{(\text{gaz})}$	$\Delta_r H_{\text{vap}}^0(T)$
sublimation	$X_{(\text{sol})} \rightleftharpoons X_{(\text{gaz})}$	$\Delta_r H_{\text{sub}}^0(T)$

## 7.2.4 Grandeurs *standard* de formation

### 7.2.4.1 Réactions de formation

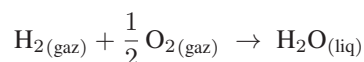
**Définition 21** L'état standard de référence d'un élément, à la température  $T$ , désigne le corps simple dans son état standard le plus stable thermodynamiquement à la température  $T$  et sous la pression  $P_0 = 1$  bar, qui contient cet élément.

Par exemple, à 25°C :

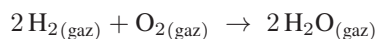
- $\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$  n'est pas un état *standard* de référence (E.S.R.) car il ne s'agit pas d'un corps simple (deux éléments différents – l'oxygène et l'hydrogène – composent la molécule  $\text{H}_2\text{O}$ ) ;
- le carbone diamant n'est pas un E.S.R. du carbone car, pour toute température  $T$ , sous  $P_0 = 1$  bar, le graphite est la forme allotropique du carbone la plus stable thermodynamiquement ;
- $\text{H}_2_{(\text{gaz})}$  pur, sous  $P_0 = 1$  bar et à 25°C est un E.S.R.

**Définition 22** La réaction (standard) de formation d'un corps  $X_i$  est la réaction théorique dont l'équation-bilan aboutit à la formation de  $X_i$  pur, à partir de ses éléments constitutifs pris dans leur état standard de référence. Le coefficient stœchiométrique associé à  $X_i$  doit valoir 1.

Par exemple :



est la réaction (*standard*) de formation de  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$ , tandis que :



n'est pas la réaction (*standard*) de formation de  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$  : le coefficient stœchiométrique associé à  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$  ne vaut pas 1.

**Définition 23** L'enthalpie standard de formation d'un corps  $X_i$  ( $\Delta_f H^0(X_i)$ ), est l'enthalpie standard  $\Delta_r H^0$  de la réaction de formation standard de  $X_i$ . Il en va de même de l'enthalpie libre standard  $\Delta_f G^0(X_i)$  de formation de  $X_i$ .

Par convention, on retiendra que :

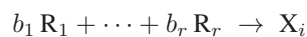
- l'enthalpie *standard*  $H^0(\text{R}_i)$  et l'enthalpie libre *standard*  $G^0(\text{R}_i)$  d'un élément  $\text{R}_i$  dans son E.S.R. sont nulles :

$$H^0(\text{R}_i) = 0 \text{ et } G^0(\text{R}_i) = 0$$

- l'enthalpie *standard*, l'enthalpie libre *standard*  $G^0$ , l'entropie *standard*  $S^0$  et la capacité thermique isobare  $C_p^0$  de l'ion  $\text{H}_{(\text{aq})}^+$  sont nulles à 25°C :

$$H^0(\text{H}_{(\text{aq})}^+) = 0 \quad G^0(\text{H}_{(\text{aq})}^+) = 0 \quad S^0(\text{H}_{(\text{aq})}^+) = 0 \quad C_p^0(\text{H}_{(\text{aq})}^+) = 0$$

Notons  $\text{R}_i$  les éléments, pris dans leur E.S.R., qui entrent dans la composition d'une espèce chimique  $\text{X}_i$ . La réaction de formation (*standard*) de  $\text{X}_i$  se présente alors sous la forme :



auquel cas l'enthalpie *standard* de formation de  $\text{X}_i$  vaut :

$$\Delta_f H^0(\text{X}_i) = H^0(\text{X}_i) - [b_1 H^0(\text{R}_1) + \dots + b_r H^0(\text{R}_r)]$$

où  $H^0(\text{R}_i) = 0$  dans le cadre de la convention adoptée. C'est pourquoi :

$$\Delta_f H^0(\text{X}_i) = H^0(\text{X}_i)$$

De la même manière :

$$\Delta_f G^0(\text{X}_i) = G^0(\text{X}_i)$$

La convention selon laquelle, pour un élément  $\text{R}_i^0$ , dans son E.S.R.,  $H^0(\text{R}_i) = 0$  et  $G^0(\text{R}_i) = 0$ , conduit à :

$$\Delta_f H^0(\text{R}_i^0) = 0 \text{ et } \Delta_f G^0(\text{R}_i) = 0$$

**⚠** Il ne faut pas déduire de ce qui précède que  $\Delta_f S^0(\text{X}_i) = S^0(\text{X}_i)$ , car la convention adoptée ne précise pas la valeur de  $S^0(\text{R}_i)$ , en générale non nulle.



On peut montrer que l'entropie d'un système ( $\mathcal{S}$ ) est une fonction d'autant plus grande que le nombre de degrés de liberté augmente dans ( $\mathcal{S}$ ) (ce qui fait dire que  $\mathcal{S}$  est une fonction caractéristique du désordre). C'est pourquoi :

d'une manière générale, l'entropie *standard* d'une réaction ne mettant en jeu que des gaz parfaits prend le même signe que  $\sum_{i=1}^N \nu_i$ .

Cette loi est rigoureusement respectée dans le cas où seules des molécules diatomiques sont impliquées dans l'équation-bilan.

### 7.2.4.2 Calcul des grandeurs *standard* de réaction

De la loi (25) découle la loi de Hess :

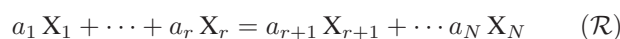
Si une réaction  $\mathcal{R}$  est une combinaison linéaire des réactions  $\mathcal{R}_i$  :

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathcal{R}_i$$

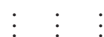
la grandeur *standard* de réaction  $\Delta_r Y_{\mathcal{R}}^0$  de  $\mathcal{R}$  est aussi une combinaison linéaire de celles des réactions  $\mathcal{R}_i$  :

$$\Delta_r Y_{\mathcal{R}}^0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Delta_r Y_{\mathcal{R}_i}^0 \quad (28)$$

Considérons une réaction ( $\mathcal{R}$ ), d'équation-bilan :



où chacune des espèces  $X_i$  admet pour réaction de formation :



La réaction ( $\mathcal{R}$ ) est alors la combinaison linéaire des réactions ( $\mathcal{R}_i$ ) :

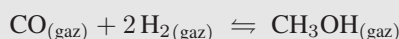
$$(\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N \nu_i \times (\mathcal{R}_i)$$

dont les coefficients  $\nu_i$  s'identifient aux coefficients stœchiométriques algébriques des espèces  $X_i$  qui interviennent dans ( $\mathcal{R}$ ). Ainsi, compte tenu de la loi de Hess, l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H^0$  et l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G^0$  de la réaction ( $\mathcal{R}$ ) s'obtiennent à l'aide des relations :

$$\Delta_r H^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i \times \Delta_f H^0(X_i) \quad \text{et} \quad \Delta_r G^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i \times \Delta_f G^0(X_i)$$



Calculer l'enthalpie *standard* de la réaction suivante, à 298 K :



connaissant les enthalpies *standard* de formation suivantes, à la même température :

$$\Delta_f H^0(\text{CH}_3\text{OH}) = -201,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Delta_f H^0(\text{CO}) = -110,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

**RÉPONSE** Compte tenu des lois précédentes, l'enthalpie *standard* de la réaction vaut :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0(\text{CH}_3\text{OH}_{(\text{gaz})}) - \Delta_f H^0(\text{CO}_{(\text{gaz})}) - 2 \Delta_f H^0(\text{H}_{2(\text{gaz})})$$

où  $\Delta_f H^0(\text{H}_2(\text{gaz})) = 0$  puisque, sous la pression *standard*  $P_0$  et à la température  $T = 298 \text{ K}$ ,  $\text{H}_2(\text{gaz})$  se trouve dans son E.S.R. C'est pourquoi :

$$\Delta_r H^0 = -201,2 + 110,5 = -90,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Remarque – Les calculs de l'entropie standard d'une réaction, ainsi que celui de  $\Delta_r C_p^0$  se mènent quant à eux directement à l'aide des relations :

$$\Delta_r S^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i \times S^0(\text{X}_i) \text{ et } \Delta_r C_p^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i \times C_p^0(\text{X}_i)$$

## 7.2.5 Relations entre les grandeurs *standard* de réaction

### 7.2.5.1 Loi de Kirchhoff pour $\Delta_r H^0$

Les expressions de  $\Delta_r H^0$  et de  $\Delta_r C_p^0$ , pour une réaction dont les constituants ont pour coefficients stœchiométriques algébriques  $\nu_i$ , s'écrivent :

$$\Delta_r H^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i H_i^0(T) \text{ et } \Delta_r C_p^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i C_{pi}^0$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{d(\Delta_r H^0)}{dT} = \sum_{i=1}^N \nu_i \frac{dH_i^0}{dT}$$

où la définition (16) de la page 1061 conduit à :

$$\frac{dH_i^0}{dT} = C_{pi}^0 \Rightarrow \frac{d(\Delta_r H^0)}{dT} = \sum_{i=1}^N \nu_i C_{pi}^0$$

Ce faisant, la variation de  $\Delta_r H^0$  avec  $T$  suit la *loi de Kirchhoff* :

$$\frac{d(\Delta_r H^0)}{dT} = \Delta_r C_p^0$$

Aussi, lorsque la température varie de  $dT$ , l'enthalpie *standard* subit une variation :

$$d(\Delta_r H^0) = \Delta_r C_p^0 dT$$

de sorte qu'entre deux températures  $T_1$  et  $T_2$  :

$$\Delta_r H^0(T_2) - \Delta_r H^0(T_1) = \int_{T_1}^{T_2} \Delta_r C_p^0 dT$$

Dans le cours de deuxième année, on limite cette étude au cas où  $\Delta_r C_p^0$  peut être considéré comme indépendant de la température, en conséquence de quoi :

$$\Delta_r H^0(T_2) = \Delta_r H^0(T_1) + \Delta_r C_p^0 \times (T_2 - T_1)$$

Remarque – Les tables de données numériques fournissent en général les enthalpie standard de formation des espèces chimiques, à la température  $T_0 = 298 \text{ K}$ , de manière à permettre aisément le calcul de  $\Delta_r H^0(T_0)$ . Aussi, l'enthalpie standard de réaction à toute autre température  $T$  est accessible à partir de la relation précédente.

### 7.2.5.2 Relations de Gibbs-Helmholtz

Conformément à l'identité (21) établie à page 1063, l'enthalpie libre de réaction s'écrit :

$$\Delta_r G^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i \times G_i^0(T) \Rightarrow \frac{d(\Delta_r G^0)}{dT} = \sum_{i=1}^N \nu_i \times \frac{dG_i^0}{dT}$$

Or, la loi (8) de la page 1050 donne :

$$\frac{dG_i^0}{dT} = -S_i^0 \Rightarrow \frac{d(\Delta_r G^0)}{dT} = -\sum_{i=1}^N \nu_i S_i^0$$

où, en remarquant que  $\Delta_r S^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i S_i^0$ , on aboutit à la première relation de Gibbs-Helmholtz :

$$\frac{d(\Delta_r G^0)}{dT} = -\Delta_r S^0$$

En outre, la définition de l'enthalpie libre :  $G = H - TS$  mène directement à :

$$G^0 = H^0 - TS^0 \Rightarrow \left( \frac{\partial G^0}{\partial \xi} \right)_T = \left( \frac{\partial H^0}{\partial \xi} \right)_T - T \left( \frac{\partial S^0}{\partial \xi} \right)_T$$

c'est-à-dire, en tenant compte du résultat (22), obtenu à la page 1063 :

$$\Delta_r Y^0(T) = \left( \frac{\partial Y^0}{\partial \xi} \right)_T \Rightarrow \Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0(T) - T \times \Delta_r S^0(T) \quad (29)$$

La première relation de Gibbs-Helmholtz conduit alors à :

$$\begin{aligned} \Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 + T \times \frac{d(\Delta_r G^0)}{dT} &\Rightarrow T \times \frac{d(\Delta_r G^0)}{dT} - \Delta_r G^0 = -\Delta_r H^0 \\ &\Rightarrow \frac{1}{T} \times \frac{d(\Delta_r G^0)}{dT} - \frac{1}{T^2} \Delta_r G^0 = -\frac{\Delta_r H^0}{T^2} \end{aligned}$$

d'où découle la seconde relation de Gibbs-Helmholtz :

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{\Delta_r G^0}{T} \right) = -\frac{\Delta_r H^0}{T^2} \quad (30)$$

### 7.2.5.3 Loi de Kirchhoff pour $\Delta_r S^0$

La dérivation de l'identité (29) par rapport à  $T$  produit l'équation :

$$\frac{d(\Delta_r G^0)}{dT} = \frac{d(\Delta_r H^0)}{dT} - \Delta_r S^0 - T \times \frac{d(\Delta_r S^0)}{dT}$$



où la loi de Kirchhoff d'une part :  $\frac{d(\Delta_r H^0)}{dT} = \Delta_r C_p^0$  et la première relation de Gibbs-Helmholtz d'autre part :  $\frac{d(\Delta_r G^0)}{dT} = -\Delta_r S^0$  mènent à :

$$-\Delta_r S^0 = \Delta_r C_p^0 - \Delta_r S^0 - T \times \frac{d(\Delta_r S^0)}{dT}$$

soit encore :

$$\frac{d(\Delta_r S^0)}{dT} = \frac{\Delta_r C_p^0}{T}$$

Cette loi de Kirchhoff permet de retrouver la valeur de l'entropie *standard* d'une réaction à toute température  $T$ , à partir des valeurs fournies de  $\Delta_r S^0(T_0)$  et de  $\Delta_r C_p^0$  à  $T_0 = 298 \text{ K}$  :

$$d(\Delta_r S^0) = \frac{\Delta_r C_p^0}{T} dT \Rightarrow \Delta_r S^0(T) = \Delta_r S^0(T_0) + \int_{T_0}^T \Delta_r C_p^0 \frac{dT}{T}$$

Ainsi, en considérant  $\Delta_r C_p^0$  comme indépendant de la température (conformément aux instructions du programme de deuxième année), on peut utiliser la relation :

$$\Delta_r S^0(T) = \Delta_r S^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

#### 7.2.5.4 Modèle d'Ellingham

L'ordre de grandeur de  $\Delta_r C_p^0$  (quelques dizaines de  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) permet de négliger les variations de  $\Delta_r H^0$  et de  $\Delta_r S^0$  avec la température, sur tout intervalle de température où aucun constituant de la réaction chimique étudiée ne change d'état physique. Cette approximation est connue sous le nom de *modèle d'Ellingham* :

$$\begin{cases} \frac{d(\Delta_r H^0)}{dT} = \Delta_r C_p^0 \simeq 0 \\ \frac{d(\Delta_r S^0)}{dT} = \frac{\Delta_r C_p^0}{T} \simeq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta_r H^0 = \text{cte} \text{ et } \Delta_r S^0 = \text{cte}$$

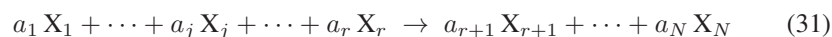
Ce faisant, l'identité (29) se simplifie :

$$\Delta_r G^0(T) \simeq \Delta_r H^0(T_0) - T \times \Delta_r S^0(T_0)$$

et montre qu'en l'absence de changement d'état dans l'équation-bilan, l'enthalpie libre *standard* de réaction varie linéairement avec la température.

#### 7.2.5.5 Cas d'un changement d'état physique

Considérons une réaction chimique, dont l'équation-bilan :



comporte une espèce ( $X_j$  par exemple) susceptible de changer d'état à la température  $T_{12}$  ;  $X_j$  peut passer de la phase (1) à la phase (2) conformément à l'équation :



Si ce changement d'état est effectué à la pression *standard*  $P_0 = 1$  bar, la chaleur reçue par  $X_j$  pur s'identifie à la variation d'enthalpie *standard* :

$$Q_{P_0} = \Delta H_{1 \rightarrow 2}^0 = \xi \times \left[ H_{X_j^{(2)}}^0 - H_{X_j^{(1)}}^0 \right]$$

Conformément à la loi (27) établie à la page 1068, on pourra alors poser :

$$\Delta H_{1 \rightarrow 2} = \xi \times \Delta_r H_{1 \rightarrow 2}^0(T_{12}) = \xi \times \ell_{1 \rightarrow 2}(T_{12})$$

où  $\ell_{1 \rightarrow 2}$  désigne la chaleur latente du changement d'état de  $X_j$  à la température  $T_{12}$ . Par suite, l'expression de l'enthalpie *standard* de la réaction (31) dépend de la valeur relative de la température  $T$  :

- Si  $T < T_{12}$ , l'espèce  $X_j$  se présente sous la forme  $X_j^{(1)}$  de la phase (1) et :

$$\Delta_r H^0(T < T_{12}) = \sum_{i=1}^N \nu_i H_{X_i}^0 = \sum_{i \neq j}^N \nu_i H_{X_i}^0 + \nu_j \times H_{X_j^{(1)}}^0$$

- Si  $T > T_{12}$ , l'espèce  $X_j$  se présente sous la forme  $X_j^{(2)}$ , auquel cas :

$$\Delta_r H^0(T > T_{12}) = \sum_{i=1}^N \nu_i H_{X_i}^0 = \sum_{i \neq j}^N \nu_i H_{X_i}^0 + \nu_j \times H_{X_j^{(2)}}^0$$

Il s'ensuit que :

$$\Delta_r H^0(T > T_{12}) - \Delta_r H^0(T < T_{12}) = \nu_j \times \left[ H_{X_j^{(2)}}^0 - H_{X_j^{(1)}}^0 \right]$$

ce qui montre que :

$\Delta_r H^0(T)$  admet une discontinuité à la température  $T_{12}$  de changement d'état d'une espèce  $X_j$  :

$$\lim_{T \rightarrow T_{12}^+} [\Delta_r H^0(T)] - \lim_{T \rightarrow T_{12}^-} [\Delta_r H^0(T)] = \nu_j \times \ell_{1 \rightarrow 2}(T_{12})$$

De même, la transformation décrite par l'équation (32) induit une variation d'entropie *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta S_{1 \rightarrow 2}^0 &= \frac{Q_{P_0}}{T_{12}} = \xi \times \Delta_r S_{1 \rightarrow 2}^0 \Rightarrow \frac{\xi \times \ell_{1 \rightarrow 2}(T_{12})}{T_{12}} = \xi \times \left[ S_{X_j^{(2)}}^0 - S_{X_j^{(1)}}^0 \right] \\ &\Rightarrow S_{X_j^{(2)}}^0 - S_{X_j^{(1)}}^0 = \frac{\ell_{1 \rightarrow 2}(T_{12})}{T_{12}} \end{aligned}$$

Ce faisant, l'entropie *standard* associée à la réaction d'équation-bilan (31) dépend de la valeur de la température  $T$  :

- Si  $T < T_{12}$ , l'entité  $X_j$  se présente la forme  $X_j^{(1)}$ , auquel cas :

$$\Delta_r S^0(T < T_{12}) = \sum_{i=1}^N \nu_i S_{X_i}^0 = \sum_{i \neq j} \nu_i S_{X_i}^0 + \nu_j \times S_{X_j^{(1)}}^0$$

- Si  $T > T_{12}$ ,  $X_j$  se présentant sous la phase (2), il s'ensuit que :

$$\Delta_r S^0(T > T_{12}) = \sum_{i=1}^N \nu_i S_{X_i}^0 = \sum_{i \neq j} \nu_i S_{X_i}^0 + \nu_j \times S_{X_j^{(2)}}^0$$

Par conséquent :

$$\Delta_r S^0(T > T_{12}) - \Delta_r S^0(T < T_{12}) = \nu_j \times \left[ S_{X_j^{(2)}}^0 - S_{X_j^{(1)}}^0 \right]$$

ce qui signifie encore que :

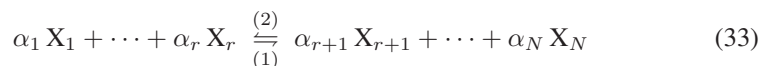
$\Delta_r S^0(T)$  subit une discontinuité à la température  $T_{12}$  de changement d'état d'une espèce  $X_j$  :

$$\lim_{T \rightarrow T_{12}^+} [\Delta_r S^0(T)] - \lim_{T \rightarrow T_{12}^-} [\Delta_r S^0(T)] = \nu_j \times \frac{\ell_{1 \rightarrow 2}(T_{12})}{T_{12}}$$

## 7.3 Affinité chimique – Équilibre chimique

### 7.3.1 Affinité chimique

On considère une réaction susceptible de se réaliser dans les sens (1) et (2) :



dont l'avancement conditionne la composition du milieu réactionnel :  $dn_i = \nu_i d\xi$ . Lorsque  $\xi$  augmente ( $d\xi > 0$ ), la réaction évolue dans le sens (1), tandis qu'une diminution de  $\xi$  ( $d\xi < 0$ ) traduit une évolution de la réaction dans le sens (2). Conformément à la relation (9) de la page 1050, l'enthalpie libre  $G(T, P, n_i)$  varie de :

$$dG = V dP - S dT + \sum_{i=1}^N \mu_i dn_i$$

lorsque la pression  $P$  du milieu, sa température  $T$  et les quantités de matière  $n_i$  varient de  $dP$ ,  $dT$  et  $dn_i$ . Or, puisque  $dn_i = \nu_i d\xi$ , il s'ensuit que :

$$dG = V dP - S dT + \Delta_r G d\xi \text{ où } \Delta_r G(T, P, \xi) = \sum_{i=1}^N \nu_i \mu_i(T, P, \xi)$$

Notamment, pour des transformations isobares et isothermes ( $T$  et  $P$  sont maintenus constants)<sup>3</sup>

$$dG = \Delta_r G \times d\xi \leq 0 \Rightarrow \Delta G = \Delta_r G \times \Delta\xi \leq 0 \quad (34)$$

<sup>3</sup>Au cours d'une transformation monobare et isotherme, la température et la pression en fin de transformation prennent les mêmes valeurs  $T$  et  $P$  qu'en début de transformation, auquel cas la variation d'enthalpie

car, au cours d'une évolution spontanée, l'enthalpie libre ne peut que décroître. Plusieurs cas peuvent alors se présenter :

- si  $\Delta_r G < 0$ ,  $d\xi > 0$  montre que la réaction évolue dans le sens (1) ;
- si  $\Delta_r G > 0$ ,  $d\xi < 0$  révèle une évolution de la réaction dans le sens (2) ;
- si  $\Delta_r G = 0$ , la réaction évolue ni dans un sens ni dans l'autre ; l'équilibre chimique est atteint.

**Définition 24** On appelle *affinité chimique d'une réaction* la grandeur :

$$\mathcal{A} = -\Delta_r G$$

L'*affinité chimique standard* vaut ainsi :

$$\mathcal{A}^0 = -\Delta_r G^0$$

Compte tenu de l'inégalité (34), l'évolution spontanée d'une réaction est caractérisée par l'inégalité :

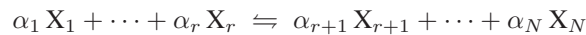
$$\mathcal{A} \times d\xi \geq 0$$

d'où il s'ensuit que :

- lorsque  $\mathcal{A} > 0$ , la réaction (33) évolue dans le sens (1) ;
- lorsque  $\mathcal{A} < 0$ , la réaction (33) évolue dans le sens (2) ;
- lorsque  $\mathcal{A} = 0$ , la réaction (33) atteint un état d'équilibre chimique.

*Remarque* – Il existe des situations où la réaction cesse par disparition d'un réactif, bien que  $\mathcal{A}$  ne soit pas nul. Le système se trouve alors dans un état d'équilibre physique et non chimique ; un ajout infinitésimal de réactif en défaut permettrait la poursuite de la réaction.

**Définition 25** Pour une réaction d'équation-bilan :



le *quotient de réaction* est défini par :

$$Q = \frac{\prod_{i=r+1}^N a_i^{\alpha_i}}{\prod_{i=1}^r a_i^{\alpha_i}} = \prod_{i=1}^N a_i^{\nu_i}$$

où  $a_i$  représente l'activité d'une espèce  $X_i$ , de coefficient stœchiométrique algébrique  $\nu_i$ .

l'enthalpie libre vaut :

$$\Delta G = G(T, P, \xi + \Delta\xi) - G(T, P, \xi)$$

c'est-à-dire :  $\Delta G = \Delta_r G \times \Delta\xi$  puisque  $G$  est une fonction d'état.

Étant donné que pour la réaction chimique citée :

$$\begin{aligned}\Delta_r G &= \sum_{i=1}^N \nu_i \mu_i \text{ où } \mu_i = \mu_i^0 + RT \ln a_i \\ &= \sum_{i=1}^N \nu_i \mu_i^0 + RT \sum_{i=1}^N \nu_i \ln a_i \\ &= \Delta_r G^0 + RT \ln \left( \prod_{i=1}^N a_i^{\nu_i} \right) = \Delta_r G^0 + RT \ln Q\end{aligned}$$

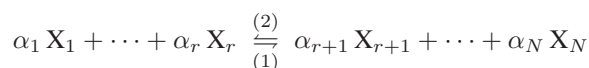
il s'ensuit que :

$$\mathcal{A}(T, P, \xi) = \mathcal{A}^0(T) - RT \ln Q(T, P, \xi)$$

### 7.3.2 L'équilibre chimique

#### 7.3.2.1 Relation de Gulberg et Waage

Soit une réaction, d'équation-bilan :



dont l'évolution est décrite par l'avancement  $\xi$ . Notamment, lorsque l'équilibre chimique est atteint,  $\xi$  prend une valeur  $\xi_e$  qui annule l'affinité chimique de la réaction :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(T, P, \xi_e) = 0 &\Rightarrow \mathcal{A}^0(T) = RT \ln Q(T, P, \xi_e) = -\Delta_r G^0(T) \\ &\Rightarrow Q(T, P, \xi_e) = \exp \left[ \frac{\mathcal{A}^0(T)}{RT} \right] = \exp \left[ -\frac{\Delta_r G^0(T)}{RT} \right]\end{aligned}$$

Il existe, par conséquent, une fonction  $K^0(T)$  de la seule température, telle que :

$$Q(T, P, \xi_e) = K^0(T) = \exp \left[ -\frac{\Delta_r G^0(T)}{RT} \right] \text{ à l'équilibre.}$$

Cette relation, appelée *relation de Gulberg et Waage*, constitue également la *loi d'action des masses* ; elle permet d'écrire l'expression générale de l'affinité chimique :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(T, P, \xi) &= \mathcal{A}^0(T) - RT \ln [Q(T, P, \xi)] = -\Delta_r G^0(T) - RT \ln [Q(T, P, \xi)] \\ &= RT \ln K^0(T) - RT [Q(T, P, \xi)]\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{A}(T, P, \xi) = RT \ln \left[ \frac{K^0(T)}{Q(T, P, \xi)} \right] \quad (35)$$

L'évolution d'une réaction chimique peut être prévue à la lumière de cette relation :

- Si  $Q(T, P, \xi) < K^0(T)$ ,  $\mathcal{A}(T, P, \xi)$  est positif, de sorte que la réaction évolue dans le sens (1), ce qui tend à augmenter la valeur de  $Q(T, P, \xi)$  ;
- lorsque  $Q(T, P, \xi) > K^0(T)$ , le signe négatif de  $\mathcal{A}(T, P, \xi)$  révèle l'évolution de la réaction dans le sens (2), induisant une diminution de  $\xi$  et donc une diminution consécutive de  $Q(T, P, \xi)$ .

On peut résumer ce comportement en énonçant simplement la règle donnant la relaxation d'une système :

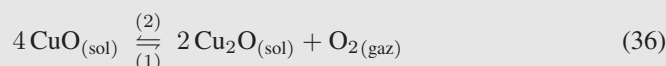
$$Q(T, P, \xi) \text{ évolue vers } K^0(T).$$

**Définition 26** On appelle température d'inversion la valeur  $T_{inv}$  de la température  $T$  pour laquelle l'enthalpie libre standard  $\Delta_r G^0(T)$  d'une réaction chimique change de signe. C'est pourquoi :

$$\Delta_r G^0(T_{inv}) = 0 \Rightarrow K^0(T_{inv}) = 1$$



L'oxyde de cuivre (II) peut se transformer en oxyde de cuivre (I) selon l'équation-bilan :



Dans un récipient de volume constant  $V = 10 \text{ L}$ , à la température  $T = 1273 \text{ K}$  constante, sont introduites : 0,1 mole de  $\text{CuO}_{(\text{sol})}$ , 0,01 mole de  $\text{Cu}_2\text{O}_{(\text{sol})}$  et 0,01 mole de  $\text{O}_{2(\text{gaz})}$ .

1. Calculer la valeur  $Q_0$  du quotient de réaction.
2. Que vaut la constante  $K^0(T)$  de cette réaction ?
3. Déduire du signe de son affinité chimique  $\mathcal{A}$  le sens d'évolution de cette réaction au moment du mélange.
4. Que vaut la pression partielle de  $\text{O}_2$  lorsque l'équilibre est atteint ?

Données numériques :

- enthalpie standard de la réaction (36) :  $\Delta_r H^0 = 248,75 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ , indépendamment de la valeur de  $T$  ;
- entropie standard de la réaction (36) :  $\Delta_r S^0 = 177,9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ , indépendamment de la valeur de  $T$  ;
- constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- pression standard :  $P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ .

#### RÉPONSE

1. Dans l'équation-bilan (36) seul le dioxygène présente une activité  $a_{\text{O}_2}$  différente de 1, auquel cas le quotient de réaction vaut :

$$Q_0 = \frac{a_{\text{Cu}_2\text{O}}^2 \times a_{\text{O}_2}}{a_{\text{CuO}}^4} = a_{\text{O}_2} = \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}$$

où  $P_{\text{O}_2}$  désigne la pression partielle de  $\text{O}_2$ , considéré comme un gaz parfait :

$$\begin{aligned} P_{\text{O}_2} V = n_{\text{O}_2} RT &\Rightarrow P_{\text{O}_2} = \frac{n_{\text{O}_2} RT}{V} = \frac{0,01 \times 8,314 \times 1273}{10 \cdot 10^{-3}} \\ &\Rightarrow P_{\text{O}_2} = 1,06 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,106 \text{ bar} \end{aligned}$$

Ce faisant, étant donné que  $P_0 = 1 \text{ bar}$  :  $Q_0 = 0,106$ .

2. La constante  $K^0(T)$  de cet équilibre est définie par :

$$K^0(T) = \exp \left[ -\frac{\Delta_r G^0(T)}{RT} \right]$$

où, dans l'approximation d'Ellingham,  $\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r S^0$  sont indépendants de la température :

$$\begin{aligned} \Delta_r G^0(T) &= \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0 = 248\,750 - 1\,273 \times 177,9 = 22,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Rightarrow K^0(T) &= \exp \left[ -\frac{22\,300}{8,314 \times 1\,273} \right] = 0,122 \end{aligned}$$

3. L'affinité chimique de la réaction vaut :

$$\mathcal{A} = \ln \left[ \frac{K^0(T)}{Q_0} \right] = \ln \left( \frac{0,122}{0,106} \right) = 0,14 > 0$$

Le signe positif de  $\mathcal{A}$  indique que la réaction (36) évolue dans le sens (1) de la production de  $\text{O}_2$ .

4. Lorsque l'équilibre est atteint, le quotient de réaction s'identifie à  $K^0(T)$  :

$$Q = K^0(T) \Rightarrow a_{\text{O}_2} = K^0(T) \Rightarrow \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} = K^0(T) = 0,122 \Rightarrow P_{\text{O}_2} = 0,122 \text{ bar}$$

### 7.3.3 Lois de déplacement des équilibres

#### 7.3.3.1 Loi de Van't Hoff

La constante  $K^0(T)$  d'un équilibre est liée à l'enthalpie libre *standard* de cet équilibre par la loi :

$$\Delta_r G^0(T) = -RT \ln [K^0(T)] \Rightarrow \frac{\Delta_r G^0}{T} = -R \ln [K^0(T)]$$

Aussi, la relation de Gibbs-Helmholtz (30), établie à la page 1072, devient :

$$\frac{d}{dT} \left( \frac{\Delta_r G^0}{T} \right) = -\frac{\Delta_r H^0}{T^2} \Rightarrow -R \frac{d(\ln K^0)}{dT} = -\frac{\Delta_r H^0}{T^2} \Rightarrow \frac{d(\ln K^0)}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}$$

Cette relation constitue la *loi de Van't Hoff*

Lorsque la température varie de  $dT$ , la constante  $K^0(T)$  subit aussi une variation telle que :

$$d(\ln K^0) = \frac{\Delta_r H^0}{R} \times \frac{dT}{T^2}$$

c'est-à-dire, entre deux températures  $T_1$  et  $T_2$ , si l'on s'en tient à l'approximation d'Ellingham selon laquelle  $\Delta_r H^0$  ne dépend pas de la température sur l'intervalle  $[T_1, T_2]$  :

$$\int_{\ln K^0(T_1)}^{\ln K^0(T_2)} d(\ln K^0) = \frac{\Delta_r H^0}{R} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T^2} = \frac{\Delta_r H^0}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

d'où l'on déduit que :

$$\ln \left[ \frac{K^0(T_2)}{K^0(T_1)} \right] = \frac{\Delta_r H^0}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \quad (37)$$

Cette relation révèle l'influence de la température sur la constante d'équilibre :

- si la réaction est endothermique ( $\Delta_r H^0 > 0$ ), une augmentation de température ( $T_2 > T_1$ ) se traduit par :

$$\frac{\Delta_r H^0}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) > 0 \Rightarrow K^0(T_2) > K^0(T_1)$$

Les réactions endothermiques sont par conséquent favorisées par les hautes températures.

- pour une réaction exothermique ( $\Delta_r H^0 < 0$ ), une augmentation de la température ( $T_2 > T_1$ ) a pour conséquence :

$$\frac{\Delta_r H^0}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) < 0 \Rightarrow K^0(T_2) < K^0(T_1)$$

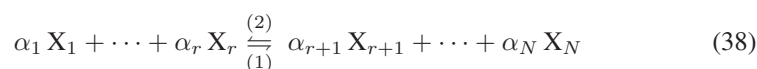
Les réactions exothermiques sont donc favorisées par les basses températures.

Ces deux cas peuvent alors être résumés de la manière suivante :

Une augmentation de la température provoque un déplacement de l'équilibre chimique dans le sens de la consommation de chaleur.

### 7.3.3.2 Influence de la température

Considérons une réaction d'équation-bilan :



dont l'état d'équilibre est atteint, pour un avancement  $\xi_e$ , à une température  $T_1$ . Le quotient de réaction vaut alors :

$$Q_1 = \prod_{i=1}^N a_i^{\nu_i}$$

où  $a_i$  désigne l'activité de l'espèce  $X_i$ . Aussi, conformément à la loi (35) de la page 1077, l'affinité chimique de ce système vaut :

$$\mathcal{A}_e = RT_1 \ln \left[ \frac{K^0(T_1)}{Q_1} \right]$$

Du reste, puisque l'équilibre chimique est atteint :

$$\mathcal{A}_e = 0 \Rightarrow K^0(T_1) = Q_1$$

Supposons que, dans cet état d'équilibre, la température passe subitement à la température  $T_2$ , tandis que la composition du système reste inchangée : le quotient de réaction demeure à la valeur  $Q_1 = K^0(T_1)$ . Ce faisant, l'affinité chimique prend la nouvelle valeur :

$$\mathcal{A}_2 = RT_2 \ln \left[ \frac{K^0(T_2)}{Q_1} \right] = RT_2 \ln \left[ \frac{K^0(T_2)}{K^0(T_1)} \right]$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la loi (37) :

$$\mathcal{A}_2 = RT_2 \times \frac{\Delta_r H^0}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \Rightarrow \mathcal{A}_2 = \Delta_r H^0 \times \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right)$$

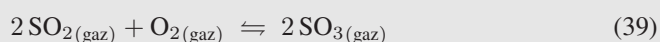


À nouveau, cette relation signifie que :

- si la réaction (38) est endothermique ( $\Delta_r H^0 > 0$ ), une augmentation de la température ( $T_2 > T_1$ ) se traduit par  $\mathcal{A}_2 > 0$  ; la réaction évoluera ultérieurement dans le sens (1).
- si la réaction est exothermique ( $\Delta_r H^0 < 0$ ), une augmentation de la température ( $T_2 > T_1$ ) se traduit par  $\mathcal{A}_2 < 0$ , de sorte que la réaction évoluera dans le sens (2).



Soit l'équilibre homogène gazeux :



1. Calculer son enthalpie *standard* et son entropie *standard* de réaction à 298 K.
2. Rappeler ce qu'est l'approximation d'Ellingham.
3. Dans le cadre de l'approximation d'Ellingham, en déduire l'enthalpie libre *standard* de la réaction pour toute température  $T$ .
4. Préciser l'expression numérique de  $\ln [K^0(T)]$  pour toute température,  $K^0(T)$  représentant la constante d'équilibre à la température  $T$ .
5. Quelle est l'influence de la température sur la réaction de synthèse de  $\text{SO}_3$  ?

*Données numériques :*

- Enthalpies *standard* de formation et entropies *standard* à 298 K :

	$\text{SO}_2(\text{gaz})$	$\text{O}_2(\text{gaz})$	$\text{SO}_3(\text{gaz})$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	-297	0	-396
$S^0$ (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	248	205	257

- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

#### RÉPONSE

1. L'enthalpie et l'entropie *standard* de la réaction s'obtiennent à partir des données numériques :

$$\Delta_r H^0 = 2 \Delta_f H^0 (\text{SO}_3) - 2 \Delta_f H^0 (\text{SO}_2) - \Delta_f H^0 (\text{O}_2) \Rightarrow \Delta_r H^0 = -198 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et :

$$\Delta_r S^0 = 2 S^0 (\text{SO}_3) - 2 S^0 (\text{SO}_2) - S^0 (\text{O}_2) = -187 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2. L'approximation d'Ellingham consiste négliger la valeur numérique de  $\Delta_r C_p^0$  de la réaction, c'est-à-dire à supposer que  $\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r S^0$  ne dépendent pas de la température.
3. Dans le cadre de cette approximation, l'enthalpie *standard* de la réaction vaut :

$$\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0 = -198\,000 + 187 \times T \text{ (en } \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}\text{)}$$

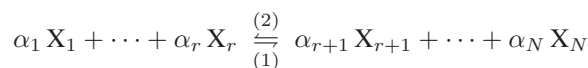
4. La constante  $K^0(T)$  de l'équilibre (39) est liée à  $\Delta_r G^0(T)$  par la loi :

$$\begin{aligned} K^0(T) = \exp \left[ -\frac{\Delta_r G^0(T)}{RT} \right] &\Rightarrow \ln [K^0(T)] = \frac{198\,000 - 187 \times T}{8,314 \times T} \\ &\Rightarrow \ln [K^0(T)] = \frac{23\,820}{T} - 22,5 \end{aligned}$$

5. L'expression obtenue précédemment pour  $\ln [K^0(T)]$  montre que la constante d'équilibre  $K^0(T)$  décroît avec la température : plus la température est élevée, moins la réaction est favorable à la formation de  $\text{SO}_3$ . Du reste, cette dernière étant exothermique, l'influence ainsi mise en évidence confirme une loi plus générale : la température est un facteur qui favorise le déroulement de la réaction dans le sens où elle absorbe de la chaleur, c'est-à-dire dans le sens où elle est endothermique.

### 7.3.3.3 Influence d'une modification de la pression

Considérons une réaction chimique, d'équation bilan :



Soient  $X_{i(\text{gaz})}$  les espèces gazeuses participant à cette réaction, dont les activités  $a_{i_g}$  dépendent des fractions molaires  $x_{i_g}$ , de la pression  $P$  du milieu réactionnel et de la pression *standard* ( $P_0 = 1 \text{ bar}$ ) :

$$a_{i_g} = x_{i_g} \times \frac{P}{P_0}$$

Les activités  $a_{i \neq i_g}$  des autres espèces, non gazeuses, ne dépendent pas de  $P$ . Considérons l'équilibre atteint pour une pression  $P_e$  telle que le quotient de réaction vaut :

$$Q_e = \prod_{i=1}^N a_i^{\nu_i} = \prod_{i_g} \left( \frac{x_{i_g}}{P_0} \right)^{\nu_{i_g}} \times P_e^{\nu_{i_g}} \times \prod_{i \neq i_g} a_i^{\nu_i}$$

L'affinité chimique vaut alors :

$$A_e = RT \ln \left[ \frac{K^0(T)}{Q_e} \right] = 0 \Rightarrow K^0(T) = Q_e$$

Modifions alors subitement la pression jusqu'à une valeur  $P$ , tandis que la composition du système demeure la même que celle à l'équilibre, ainsi que la température ; le quotient de réaction prend la valeur :

$$Q = \prod_{i_g} \left( \frac{x_{i_g}}{P_0} \right)^{\nu_{i_g}} \times P^{\nu_{i_g}} \times \prod_{i \neq i_g} a_i^{\nu_i}$$

de sorte que l'affinité chimique devient égale à :

$$\begin{aligned} A &= RT \ln \left[ \frac{K^0(T)}{Q} \right] = RT \ln \left[ \frac{Q_e}{Q} \right] \\ &= RT \ln \left[ \prod_{i_g} \left( \frac{P_e}{P} \right)^{\nu_{i_g}} \right] = RT \sum_{i_{\text{gaz}}} \left[ \nu_{i_{\text{gaz}}} \ln \left( \frac{P_e}{P} \right) \right] \\ \Rightarrow & \quad A = RT \ln \left( \frac{P_e}{P} \right) \times \sum_{i_{\text{gaz}}} \nu_{i_{\text{gaz}}} \end{aligned}$$

De cette relation, il découle que :

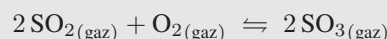
- si la somme  $\sum_{i_{\text{gaz}}} \nu_{i_{\text{gaz}}}$  est positive, une augmentation de la pression  $P$  ( $P > P_e$ ) se traduit par :  $A < 0$ , c'est-à-dire que l'équilibre est déplacé dans le sens (2) ;
- si cette somme est négative, une augmentation de la pression  $P$  provoquera un déplacement de l'équilibre dans le sens (1).

Ces conclusions sont résumées par la loi de Le Châtelier :

Une variation isotherme de pression provoque un déplacement de l'équilibre dans le sens qui s'oppose à cette variation (par production ou par consommation des gaz).



Soit l'équilibre homogène en phase gazeuse :



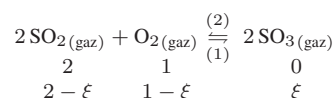
1. On part d'un mélange de  $\text{SO}_2$  et de  $\text{O}_2$  dans les conditions stœchiométriques : 1 mole de  $\text{O}_2$  et 2 moles de  $\text{SO}_2$ . À la température  $T = 1000 \text{ K}$ , la constante de l'équilibre vaut  $K_{1000}^0 = 3,74$ .

Calculer la variation  $\frac{d\xi}{dP}$  de l'avancement de la réaction lorsque la pression passe de  $P$  à  $P + dP$ , tandis que l'avancement à l'équilibre passe de  $\xi$  à  $\xi + d\xi$ .

2. Calculer la somme des coefficients stœchiométriques algébriques de l'équation-bilan et conclure.

#### RÉPONSE

1. Soit  $\xi$  l'avancement de la réaction :



à partir duquel s'obtiennent les pressions partielles :

$$P_{\text{SO}_2} = \frac{2 - \xi}{3 - \xi} P \quad P_{\text{O}_2} = \frac{1 - \xi}{3 - \xi} P \quad P_{\text{SO}_3} = \frac{\xi}{3 - \xi} P$$

et donc les activités :

$$a_{\text{SO}_2} = \frac{2 - \xi}{3 - \xi} \times \frac{P}{P_0} \quad a_{\text{O}_2} = \frac{1 - \xi}{3 - \xi} \times \frac{P}{P_0} \quad a_{\text{SO}_3} = \frac{\xi}{3 - \xi} \times \frac{P}{P_0}$$

Par suite, l'équilibre est atteint lorsque :

$$K_{1000}^0 = Q = \frac{a_{\text{SO}_3}^2}{a_{\text{SO}_2}^2 a_{\text{O}_2}} = \left( \frac{\xi}{2 - \xi} \right)^2 \times \frac{3 - \xi}{1 - \xi} \times \frac{P_0}{P}$$

$$\Rightarrow \ln K_{1000}^0 = 2 \ln \xi - 2 \ln(2 - \xi) + \ln(3 - \xi) - \ln(1 - \xi) + \ln P_0 - \ln P$$

Or, une variation  $dP$  de la pression s'accompagne d'une variation  $d\xi$  de l'avancement à l'équilibre, telle que  $K_{1000}^0$  demeure inchangé, ce qui impose :

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \frac{d\xi}{\xi} + \frac{2 d\xi}{2 - \xi} - \frac{d\xi}{3 - \xi} + \frac{d\xi}{1 - \xi} - \frac{dP}{P} \\ \Rightarrow \frac{dP}{P} &= d\xi \times \left[ \frac{4}{\xi(2 - \xi)} + \frac{2}{(3 - \xi)(1 - \xi)} \right] \\ \Rightarrow \frac{d\xi}{dP} &= P \times \frac{\xi(2 - \xi)(3 - \xi)(1 - \xi)}{4(3 - \xi)(1 - \xi) + 2\xi(2 - \xi)} \end{aligned}$$

Ce faisant, étant donné que les termes  $\xi$ ,  $2 - \xi$ ,  $3 - \xi$  et  $1 - \xi$  sont positifs, on remarque que  $\frac{d\xi}{dP} > 0$ , ce qui signifie également qu'une augmentation de pression se traduit par un déplacement de l'équilibre dans le sens (1).

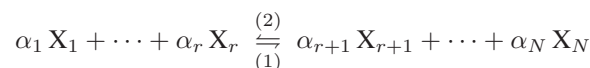
2. La somme des coefficients stœchiométriques vaut :

$$\sum_i \nu_i = 2 - 2 - 1 = -1 < 0$$

dont le signe négatif confirme la loi de Le Châtelier précédemment évoquée.

### 7.3.3.4 Influence de l'ajout d'un constituant

Considérons une réaction en phase gazeuse homogène, d'équation-bilan :



Lorsque l'équilibre est atteint, les fractions molaires des espèces chimiques valent :

$$x_i = \frac{n_{ie}}{n}$$

où  $n_{ie}$  désigne la quantité de matière de  $X_i$  à l'équilibre et  $n = \sum_{i=1}^N n_{ie}$  représente

la quantité totale de gaz. Aussi, les activités  $a_i = x_i \frac{P}{P_0}$  des gaz, sous la pression  $P$ , confèrent au quotient de réaction sa forme :

$$Q_e = \prod_{i=1}^N a_i^{\nu_i} = \prod_{i=1}^N \left( \frac{n_{ie}}{n} \times \frac{P}{P_0} \right)^{\nu_i}$$

Par suite, l'affinité chimique du système vaut, à l'équilibre :

$$\mathcal{A}_e = \mathcal{A}_0 - RT \ln Q_e = 0 \Rightarrow \mathcal{A}_0 = RT \ln Q_e$$

Lorsqu'on ajoute au système  $\varepsilon$  moles d'un gaz inerte à l'égard de la réaction chimique (il n'est pas impliqué par l'équation-bilan de la réaction), en maintenant la pression  $P$  constante, la quantité totale de gaz devient  $n' = n + \varepsilon$ , de sorte que le quotient de réaction adopte la forme :

$$Q = \prod_{i=1}^N \left( \frac{n_{ie}}{n'} \times \frac{P}{P_0} \right)^{\nu_i}$$

Ce faisant, l'affinité chimique du système devient égale à :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 - RT \ln Q = RT \ln Q_e - RT \ln Q = -RT \ln \left( \frac{Q}{Q_e} \right)$$

où :

$$\frac{Q}{Q_e} = \prod_{i=1}^N \left( \frac{n_{ie}}{n'} \times \frac{P}{P_0} \right)^{\nu_i} \times \prod_{i=1}^N \left( \frac{n}{n_{ie}} \times \frac{P_0}{P} \right)^{\nu_i} = \prod_{i=1}^N \left( \frac{n}{n'} \right)^{\nu_i}$$

$$\Rightarrow \ln \left( \frac{Q}{Q_e} \right) = \sum_{i=1}^N \ln \left( \frac{n}{n'} \right)^{\nu_i} = \ln \left( \frac{n}{n'} \right) \sum_{i=1}^N \nu_i$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = RT \ln \left( \frac{n + \varepsilon}{n} \right) \times \sum_{i=1}^N \nu_i$$

Il s'ensuit que :

- si la somme des coefficients stœchiométriques algébriques est positive,  $A > 0$  montre que l'équilibre est déplacé dans le sens (1) sous l'effet de l'ajout d'un gaz inerte ;

- dans le cas contraire :

$$\sum_{i=1}^N \nu_i < 0 \Rightarrow \mathcal{A} < 0$$

signifie que l'ajout d'un constituant inerte provoque un déplacement de l'équilibre dans le sens (2).

Dans le cas où la réaction se déroule en phase hétérogène, l'ajout de  $\varepsilon$  moles d'un constituant gazeux inerte confère à l'activité chimique la valeur :

$$\mathcal{A} = RT \ln \left( \frac{n + \varepsilon}{n} \right) \times \sum_{i_g} \nu_{i_{\text{gaz}}}$$

où  $\sum_{i_g} \nu_{i_{\text{gaz}}}$  représente la somme des coefficients stœchiométriques algébriques des espèces gazeuses ; les conclusions précédentes demeurent valables dans ce cas.

Enfin, d'une manière générale, un changement de composition d'un milieu réactionnel en équilibre provoquera un déplacement de cet équilibre dans un sens déterminé par le signe de l'affinité chimique :

$$\mathcal{A} = RT \ln \left( \frac{Q_e}{Q} \right)$$

L'étude de ce déplacement se ramène alors au calcul des quotients de réaction  $Q_e$  (à l'équilibre) et  $Q$ .

Remarque – En revanche, si l'ajout d'un gaz inerte est effectué à volume constant, les équations d'état :

$$PV = nRT \Rightarrow \frac{P}{n} = \frac{RT}{V} \text{ et } P'V' = n'RT \Rightarrow \frac{P'}{n'} = \frac{RT}{V}$$

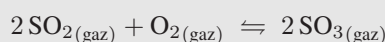
montrent que les quotients de réaction :

$$Q_e = \frac{n_{ie}}{n} \times \frac{P}{P_0} = \frac{n_{ie}RT}{P_0V} \text{ et } Q = \frac{n_{ie}}{n'} \times \frac{P'}{P_0} = \frac{n_{ie}RT}{P_0V}$$

sont identiques, auquel cas aucune modification n'est observée.



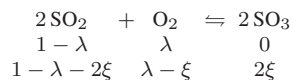
Soit l'équilibre homogène, en phase gazeuse :



1. Partons de  $\lambda$  moles de  $\text{O}_2$  pur et de  $1 - \lambda$  moles de  $\text{SO}_2$ . Dresser un bilan d'avancement de la réaction et donner la relation liant, à l'équilibre, le paramètre de composition  $\lambda$ , l'avancement  $\xi$ , la constante d'équilibre  $K^0(T)$  à la température  $T$  de la manipulation et la pression totale  $P$ .
2. À  $T$  et  $P$  fixés, pour quelle valeur de  $\lambda$  a-t-on un avancement  $\xi$  maximum ?
3. Si nous supposons que nous partons désormais des proportions stœchiométriques ( $2n_0$  moles de  $\text{SO}_2$  pour  $n_0$  moles de  $\text{O}_2$ ) et que l'équilibre soit atteint, quelle est l'influence d'un ajout de diazote, à  $T$  et  $P$  fixés, sur l'état d'équilibre ?
4. Conclure quant à la meilleure composition théorique du mélange initial.

## RÉPONSE

1. L'avancement  $\xi$  de la réaction décrit la composition du milieu réactionnel :



Le nombre total de moles de gaz vaut alors :

$$n = 1 - \lambda - 2\xi + \lambda - \xi + 2\xi = 1 - \xi$$

ce qui fournit les activités des différentes espèces gazeuses :

$$a_{\text{SO}_2} = \frac{1 - \lambda - 2\xi}{1 - \xi} \times \frac{P}{P_0} \quad a_{\text{O}_2} = \frac{\lambda - \xi}{1 - \xi} \times \frac{P}{P_0} \quad a_{\text{SO}_3} = \frac{2\xi}{1 - \xi} \times \frac{P}{P_0}$$

où  $P_0 = 1$  bar est la pression *standard*. Ainsi, le quotient de réaction vaut, à l'équilibre :

$$Q_e = \left( \frac{a_{\text{SO}_3}}{a_{\text{SO}_2}} \right)^2 \times \frac{1}{a_{\text{O}_2}} = \left( \frac{2\xi}{1 - \lambda - 2\xi} \right)^2 \times \frac{1 - \xi}{\lambda - \xi} \times \frac{P_0}{P}$$

Or, lorsque l'équilibre est atteint,  $Q_e$  s'identifie à la constante  $K^0(T)$  :

$$\begin{aligned} K^0(T) &= \left( \frac{2\xi}{1 - \lambda - 2\xi} \right)^2 \times \frac{1 - \xi}{\lambda - \xi} \times \frac{P_0}{P} \\ \Rightarrow \ln [K^0(T)] &= 2 \ln(2\xi) - 2 \ln(1 - \lambda - 2\xi) + \ln(1 - \xi) - \ln(\lambda - \xi) + \ln \left( \frac{P_0}{P} \right) \end{aligned}$$

2. Dérivons cette expression par rapport à  $\lambda$  :

$$\frac{2}{\xi} \frac{d\xi}{d\lambda} + \frac{2}{1 - \lambda - 2\xi} \left( 1 + 2 \frac{d\xi}{d\lambda} \right) - \frac{1}{1 - \xi} \frac{d\xi}{d\lambda} - \frac{1}{\lambda - \xi} \left( 1 - \frac{d\xi}{d\lambda} \right) = 0$$

de sorte que :

$$\frac{d\xi}{d\lambda} \times \left( \frac{2}{\xi} + \frac{4}{1 - \lambda - 2\xi} - \frac{1}{1 - \xi} + \frac{1}{\lambda - \xi} \right) = \frac{1}{\lambda - \xi} - \frac{2}{1 - \lambda - 2\xi}$$

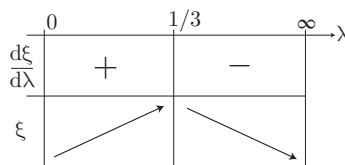
soit encore :

$$\frac{d\xi}{d\lambda} \times \left[ \frac{2(1 - \lambda)}{\xi(1 - \lambda - 2\xi)} + \frac{1 - \lambda}{(1 - \xi)(\lambda - \xi)} \right] = \frac{1 - 3\lambda}{(\lambda - \xi)(1 - \lambda - 2\xi)}$$

C'est pourquoi :

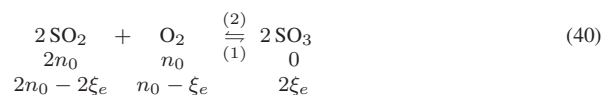
$$\frac{d\xi}{d\lambda} = (1 - 3\lambda) \times \frac{\xi(1 - \xi)}{(1 - \lambda)[2(1 - \xi)(\lambda - \xi) + \xi(1 - \lambda - 2\xi)]}$$

Aussi, le bilan molaire de la réaction montre que  $n = 1 - \xi$ ,  $1 - \lambda$ ,  $\lambda - \xi$  et  $1 - \lambda - 2\xi$  sont positifs, de telle manière que  $\frac{d\xi}{d\lambda}$  adopte les signes suivants :



Ce tableau de variations montre alors que  $\xi$  devient *maximum* pour  $\lambda = \frac{1}{3}$  ; dans ce cas, la composition initiale du milieu réactionnel respecte les proportions stoechiométriques.

3. Considérons désormais cette condition réalisée :



Lorsque l'équilibre est atteint, les activités des différents gaz valent :

$$a_{\text{SO}_2} = \frac{2(n_0 - \xi_e) P}{n_t P_0} \quad a_{\text{O}_2} = \frac{n_0 - \xi_e}{n_t} \frac{P}{P_0} \quad a_{\text{SO}_3} = \frac{2\xi_e}{n_t} \frac{P}{P_0}$$

où  $n_t = 3n_0 - \xi_e$  désigne le nombre total de moles de gaz. Ce faisant, le quotient de réaction vaut :

$$Q_e = \left( \frac{a_{\text{SO}_3}}{a_{\text{SO}_2}} \right)^2 \times \frac{1}{a_{\text{O}_2}} = \left( \frac{\xi_e}{n_0 - \xi_e} \right)^2 \times \frac{3n_0 - \xi_e}{n_0 - \xi_e} \times \frac{P_0}{P}$$

tandis que l'équilibre chimique n'est atteint que lorsque l'affinité chimique du système est nulle :

$$\mathcal{A}_e = RT \ln \left[ \frac{K^0(T)}{Q_e} \right] = 0 \Rightarrow K^0(T) = Q_e$$

L'ajout d'un nombre  $\varepsilon$  de moles de  $\text{N}_2$  modifie la quantité totale de gaz dans le milieu, qui passe de la valeur  $n_t$  à  $n'_t = 3n_0 - \xi_e + \varepsilon$ . Par suite, le quotient de réaction adopte la valeur :

$$Q = \left( \frac{\xi_e}{n_0 - \xi_e} \right)^2 \times \frac{3n_0 - \xi_e + \varepsilon}{n_0 - \xi_e} \times \frac{P_0}{P}$$

auquel cas l'affinité chimique du système devient égale à :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= RT \ln \left[ \frac{K^0(T)}{Q} \right] = RT \ln \left( \frac{Q_e}{Q} \right) = RT \ln \left( \frac{3n_0 - \xi_e}{3n_0 - \xi_e + \varepsilon} \right) \\ &\Rightarrow \mathcal{A} < 0 \text{ car } 3n_0 - \xi_e < 3n_0 - \xi_e + \varepsilon \text{ pour } \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

Le signe négatif de  $\mathcal{A}$  signifie que l'équilibre (40) est déplacé dans le sens (2) ; cet équilibre s'oppose à l'abaissement des pressions partielles consécutives à l'ajout de  $\text{N}_2$ .

4. Cette étude montre que c'est dans les proportions stœchiométriques que les réactifs doivent être introduits dans le réacteur vide pour que l'équilibre atteigne son rendement *maximum*.

## 7.4 Équilibres liquide-vapeur des mélanges binaires

### 7.4.1 Paramétrage du système

Considérons un système composé de deux corps  $A_1$  et  $A_2$ , totalement miscibles, sous les phases liquide et vapeur. On note :

- $n_1$  et  $n_2$  les nombres de moles de  $A_1$  et de  $A_2$  ;
- $n_{1v}$  et  $n_{2v}$  les quantités de  $A_1$  et de  $A_2$  dans la phase vapeur ;
- $n_{1\ell}$  et  $n_{2\ell}$  les quantités de  $A_1$  et de  $A_2$  dans la phase liquide ;

<b>VAPEUR</b> $n_v = n_{1v} + n_{2v}$
<b>LIQUIDE</b> $n_\ell = n_{1\ell} + n_{2\ell}$

- $n_v$  et  $n_\ell$  les quantités de matière présentes sous forme de vapeur ou de liquide :

$$\begin{cases} n_v = n_{1v} + n_{2v} \\ n_\ell = n_{1\ell} + n_{2\ell} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} n_1 = n_{1v} + n_{1\ell} \\ n_2 = n_{2v} + n_{2\ell} \end{cases}$$

Les fractions molaires globales de  $A_1$  et de  $A_2$  sont respectivement définies par :

$$x_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} = 1 - x_1$$

De même :

- dans la phase vapeur, ces fractions molaires ont pour expression :

$$x_{1v} = \frac{n_{1v}}{n_v} = \frac{n_{1v}}{n_{1v} + n_{2v}} \quad \text{et} \quad x_{2v} = \frac{n_{2v}}{n_v} = 1 - x_{1v}$$

- Ces expressions deviennent, dans la phase liquide :

$$x_{1\ell} = \frac{n_{1\ell}}{n_\ell} = \frac{n_{1\ell}}{n_{1\ell} + n_{2\ell}} \text{ et } x_{2\ell} = \frac{n_{2\ell}}{n_\ell} = 1 - x_{1\ell}$$

### 7.4.2 Loi de Raoult

La démonstration de la loi de Raoult n'est pas exigible des étudiants. Elle permet cependant d'expliquer la proportionnalité entre la pression partielle d'un composé en phase gazeuse et sa fraction molaire en phase liquide. Cette démonstration est conséquemment fournie, à titre indicatif, comme simple application des lois de la thermodynamique chimique.

Intéressons-nous à l'équilibre d'une espèce  $A_i$  d'un mélange binaire, dans les phases liquide et vapeur. Si  $\mu_{iv}^0$  et  $\mu_{i\ell}^0$  désignent respectivement les potentiels chimiques standard de  $A_i$  dans les phases vapeur et liquide, les potentiels chimiques de  $A_i$  dans ces mêmes phases valent :

$$\mu_{iv} = \mu_{iv}^0 + RT \ln \left( \frac{P_i}{P_0} \right) \text{ et } \mu_{i\ell} = \mu_{i\ell}^0 + RT \ln x_{i\ell}$$

où  $P_i$ ,  $P_0$  et  $x_{i\ell}$  désignent la pression partielle de  $A_i$  en phase vapeur, la pression standard  $P_0 = 1$  bar et la fraction molaire de  $A_i$  dans la phase liquide. Or, l'équilibre entre les deux phases impose l'identité des potentiels chimiques de  $A_i$  dans ces deux phases :

$$\begin{aligned} \mu_{iv} = \mu_{i\ell} &\Rightarrow \mu_{iv}^0 + RT \ln \left( \frac{P_i}{P_0} \right) = \mu_{i\ell}^0 + RT \ln x_{i\ell} \\ &\Rightarrow P_i = \alpha x_{i\ell} \text{ avec } \alpha = P_0 \exp \left( \frac{\mu_{i\ell}^0 - \mu_{iv}^0}{RT} \right) \end{aligned}$$

Cette loi devant être vérifiée pour toute valeur de  $x_i$ , elle l'est *a fortiori* lorsque  $A_i$  est l'unique constituant du système, auquel cas  $P_i = P_i^*$  lorsque  $x_{i\ell} = 1$  :

$$P_i^* = \alpha \Rightarrow P_i = x_{i\ell} \times P_i^*$$

Cette loi constitue la *loi de Raoult*.

### 7.4.3 Diagramme binaire isotherme

Maintenons constante la température  $T$  d'un système, à l'intérieur duquel la pression  $P$  est la somme des pressions partielles  $P_1$  et  $P_2$  de  $A_1$  et  $A_2$ , lesquelles vérifient la loi de Raoult :

$$P = P_1 + P_2 = x_{1\ell} P_1^* + x_{2\ell} P_2^* = x_{1\ell} P_1^* + (1 - x_{1\ell}) P_2^* \quad (41)$$

$$\Rightarrow P(x_{1\ell}) = P_2^* + (P_1^* - P_2^*) x_{1\ell} \quad (42)$$

La courbe représentative de la fonction  $P(x_{1\ell})$ , notée  $C_e$ , est par conséquent une droite (représentée ci-après). En outre, la pression partielle  $P_1$  est définie à l'aide de la fraction molaire de  $A_1$  dans la phase vapeur :

$$P_1 = x_{1v} P \Rightarrow x_{1\ell} P_1^* = x_{1v} P \Rightarrow x_{1\ell} = x_{1v} \times \frac{P}{P_1^*}$$



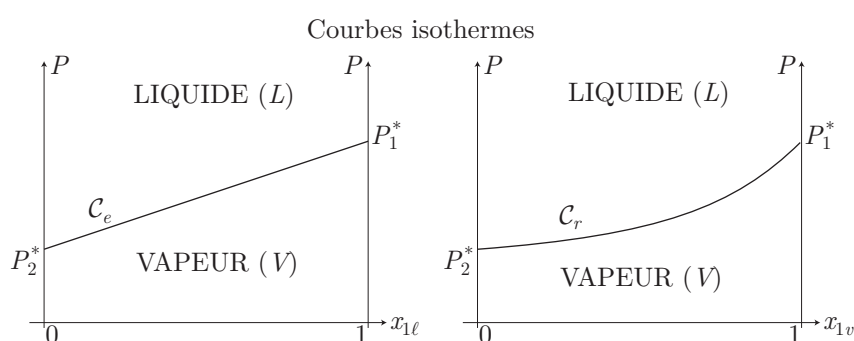
Ce faisant, la relation (42) devient :

$$P = P_2^* + (P_1^* - P_2^*) \times \frac{x_{1v} P}{P_1^*} \Rightarrow P P_1^* = P_1^* P_2^* + P \times x_{1v} (P_1^* - P_2^*)$$

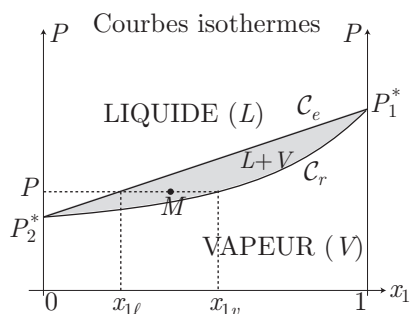
soit encore :

$$P(x_{1v}) = \frac{P_1^* P_2^*}{P_1^* + (P_2^* - P_1^*) x_{1v}}$$

La courbe représentative de la fonction  $P(x_{1v})$ , désignée par  $C_r$ , est donc une branche d'hyperbole :



La représentation de  $C_e$  et de  $C_r$  sur un même graphe permet de distinguer plusieurs zones, qui sont autant d'états pour le mélange binaire :



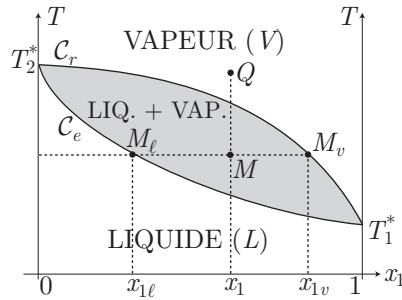
La courbe  $C_e$  représente la limite entre le système purement liquide et le système dans lequel coexistent les phases liquide et gazeuse ; elle est appelée *courbe d'ébullition* car les points de cette courbe figurent l'apparition de la première bulle de vapeur dans le système.

La courbe  $C_r$ , appelée *courbe de rosée*, est constituée de l'ensemble des points dont l'état présente l'apparition de la première goutte de liquide ; en dessous de cette courbe se trouvent les points dont l'état correspond au mélange binaire purement gazeux.

Pour une température  $T$  et une pression  $P$ , un point  $M$  situé entre  $C_e$  et  $C_r$  se rapporte au système en équilibre dans ses deux phases, dont la composition est directement déterminée par les abscisses  $x_{1v}$  et  $x_{1l}$  des points dont l'ordonnée vaut respectivement  $P = P(x_{1v})$  et  $P = P(x_{1l})$ .

### 7.4.4 Diagramme binaire isobare

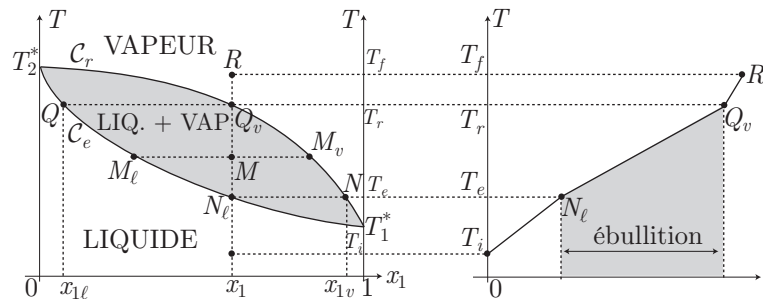
En maintenant constante la pression  $P$  du système, l'influence de la température  $T$  sur la composition d'un système binaire peut être suivie sur un diagramme isobare :



La signification de ce diagramme est analogue à celle du diagramme isotherme :

- la courbe de rosée ( $C_r$ ) contient les points  $M_v$  dont l'abscisse fournit la fraction molaire  $x_{1v}$  de  $A_1$  dans la phase vapeur ;
- la courbe d'ébullition ( $C_e$ ) figure les points  $M_\ell$  où la phase liquide ( $L$ ) est en équilibre avec la phase vapeur ( $V$ ) ; l'abscisse de ces points correspond à la fraction molaire  $x_{1\ell}$  de  $A_1$  dans la phase liquide.

Un tel diagramme permet une description rapide de l'influence de la température  $T$  sur un système binaire fermé ( $x_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$  est constant puisque les quantités  $n_1$  et  $n_2$  de  $A_1$  et  $A_2$  le sont aussi) :



Considérons ainsi un mélange de  $A_1$  et  $A_2$ , totalement miscibles, sous la phase homogène liquide à la température  $T_i$ . Lorsque ce mélange est chauffé régulièrement, de manière isobare :

- la température  $T$  du liquide augmente jusqu'à une valeur  $T_e$  où la première bulle de vapeur apparaît ; c'est le début de l'ébullition, figurée par le point  $N_\ell$ . À cet instant, la fraction molaire de  $A_1$  dans la phase liquide demeure très voisine de  $x_1$  car :

$$x_{1\ell} = \frac{n_{1\ell}}{n_{1\ell} + n_{2\ell}} \simeq \frac{n_1}{n_1 + n_2} = x_1$$

En revanche, la fraction molaire de  $A_1$  dans la première bulle de vapeur est donnée par l'abscisse  $x_{1v}$  du point  $N$  de la courbe de rosée.

- la température  $T$  continue à augmenter tandis que la vapeur et le liquide coexistent dans le milieu. La composition de ces deux phases est donnée par les intersections  $M_v$  et  $M_\ell$  du segment  $T = \text{cte}$  avec la courbe de rosée et celle d'ébullition : les fractions molaires de  $A_1$  dans la phase vapeur et dans la phase liquide sont données respectivement par les abscisses des points  $M_v$  et  $M_\ell$ .

Remarque – Contrairement au cas du corps pur, la température  $T$  peut varier de  $T_e$  à  $T_r$  malgré la présence simultanée des phases liquide et gazeuse.

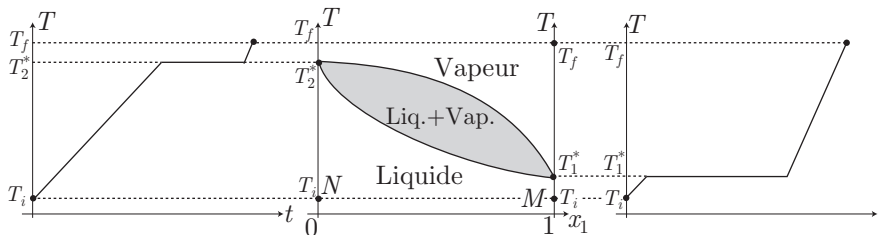
- lorsque la température atteint la valeur  $T_r$  du point  $Q_v(x_1, T_r)$  de la courbe  $C_r$ , la dernière goutte de liquide se vaporise. Dans la vapeur, la fraction molaire de  $A_1$  vaut :

$$\frac{n_{1v}}{n_{1v} + n_{2v}} \simeq \frac{n_1}{n_1 + n_2} = x_1$$

tandis que la dernière goutte de liquide contient une fraction molaire  $x_{1\ell}$  qui correspond à l'abscisse du point  $Q$  de la courbe  $C_e$ , dont l'ordonnée vaut  $T_r$ .

- si la température  $T$  excède  $T_r$ , le milieu devient exclusivement gazeux ; sa température augmente régulièrement comme celle d'un gaz parfait.

Lorsque  $x_1 = 1$  ( $A_1$  est le seul constituant du système) ou lorsque  $x_1 = 0$  (le système contient  $A_2$  pur), les changements d'état se produisent aux températures respectives  $T_1^*$  et  $T_2^*$  :



Ces deux températures sont celles de changement d'état de  $A_1$  et  $A_2$  purs. À ce titre, ces changements d'état présentent des paliers à  $T = T_1^*$  et  $T = T_2^*$ , lorsque la pression  $P$  est fixée.

### 7.4.5 Liquide saturé

**Définition 27** De deux corps  $A_1$  et  $A_2$ , l'un (par exemple  $A_1$ ) est dit plus volatil que l'autre si sa température de changement de phase à l'état pur ( $T_1^*$ ) est plus petite que celle de l'autre corps ( $T_2^*$ ), sous une même pression :

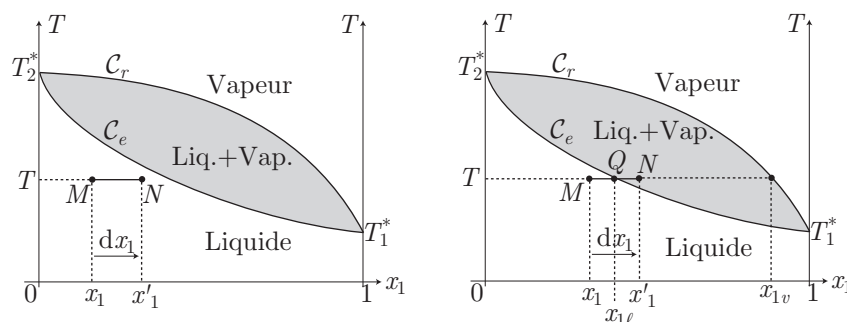
$$\begin{cases} T_1^* < T_2^* \Rightarrow A_1 \text{ est plus volatil que } A_2 \\ T_2^* < T_1^* \Rightarrow A_2 \text{ est plus volatil que } A_1 \end{cases}$$

Considérons un mélange de  $A_1$  et  $A_2$ , où  $A_1$  est plus volatil que  $A_2$ . Initialement, le milieu est exclusivement liquide et sa composition est décrite par la fraction molaire  $x_1 = \frac{n_1}{n_1 + n_2}$  en  $A_1$ . En ajoutant  $\delta n_1$  moles de  $A_1$  à ce système, à la température  $T$

constante, la fraction molaire de  $A_1$  prend la valeur  $x'_1 = \frac{n_1 + \delta n_1}{n_1 + \delta n_1 + n_2}$ , telle que :

$$dx_1 = x'_1 - x_1 = \frac{n_2 \delta n_1}{(n_1 + \delta n_1 + n_2)(n_1 + n_2)} > 0$$

Ce faisant, le point représentatif ( $M$ ) du système binaire se déplace vers la droite (point  $N$ ) du diagramme :



Deux situations peuvent dès lors se présenter :

- Si le point  $N$  appartient au domaine ( $L$ ) du diagramme : le système demeure liquide.
- Si le point  $N$  appartient au domaine ( $L + V$ ) du diagramme, un changement d'état se produit : de la vapeur apparaît, avec une fraction molaire  $x_{1v}$  en  $A_1$ .


**Définition 28** *Un mélange est dit saturé en corps volatile si le moindre ajout de ce corps provoque l'ébullition du mélange.*

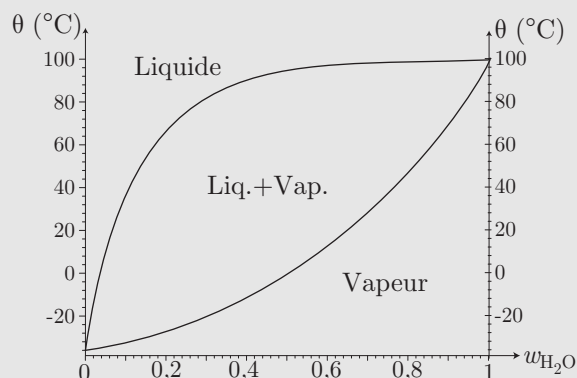
Cette définition suggère que le point  $N$  doit se trouver dans le domaine ( $L + V$ ) du diagramme, pour toute valeur  $\delta n_1$ , aussi petite soit-elle. Par conséquent, un milieu est saturé en  $A_1$  si le point représentatif ( $Q$ ) de ce corps appartient à la courbe d'ébullition.

Remarque – *Les diagrammes binaires (isothermes ou isobare) peuvent être représentés en portant en abscisse les fractions massiques :*

$$w_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \text{ ou } w_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = 1 - w_1$$

*L'interprétation du diagramme reste alors analogue dans les deux cas.*

 Le diagramme binaire isobare de l'eau et de l'ammoniac est donné sur le document ci-dessous ; la composition est exprimée en fraction massique  $w_{\text{H}_2\text{O}}$  d'eau.



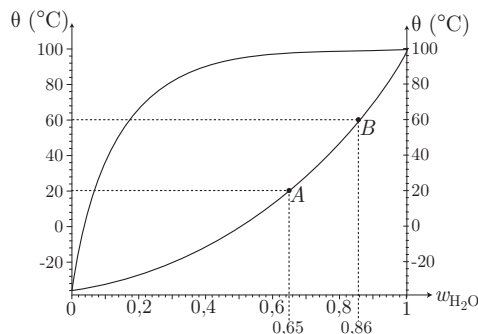
- Déterminer la composition en fraction massique et en fraction molaire d'une solution aqueuse saturante d'ammoniac en équilibre avec sa vapeur à 20°C puis à 60°C.
- En déduire la quantité maximale de gaz ammoniac que l'on peut dissoudre, à ces deux températures, dans un volume  $V = 1 \text{ L}$  d'eau.

Données :

- masse volumique de l'eau :  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ g} \cdot \text{dm}^{-3}$  ;
- masses molaires moléculaires :  $M_{\text{NH}_3} = 17 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

RÉPONSE

- Une solution aqueuse saturée d'ammoniac, en équilibre avec sa vapeur, est figurée par un point qui appartient à la courbe d'ébullition :



Une simple lecture sur le diagramme des abscisses des points A et B fournit :

$$w_{\text{H}_2\text{O}} = 0,65 \text{ à } 20^\circ\text{C} \text{ et } w_{\text{H}_2\text{O}} = 0,86 \text{ à } 60^\circ\text{C}$$

Si l'on note  $m_{\text{H}_2\text{O}}$  et  $m_{\text{NH}_3}$  les masses respectives d'eau et d'ammoniac, la fraction massique  $w_{\text{H}_2\text{O}}$  est définie par :

$$w_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{m_{\text{H}_2\text{O}}}{m_{\text{H}_2\text{O}} + m_{\text{NH}_3}} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}} M_{\text{H}_2\text{O}}}{n_{\text{H}_2\text{O}} M_{\text{H}_2\text{O}} + n_{\text{NH}_3} M_{\text{NH}_3}}$$

où  $n_{\text{H}_2\text{O}}$  et  $n_{\text{NH}_3}$  désignent respectivement les quantités d'eau et d'ammoniac. Ce faisant, les fractions molaires d'eau et d'ammoniac sont définies par :

$$x_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_{\text{H}_2\text{O}} + n_{\text{NH}_3}} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_{\text{tot}}} \Rightarrow n_{\text{H}_2\text{O}} = x_{\text{H}_2\text{O}} \times n_{\text{tot}}$$

et :

$$x_{\text{NH}_3} = \frac{n_{\text{NH}_3}}{n_{\text{tot}}} = 1 - x_{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow n_{\text{NH}_3} = (1 - x_{\text{H}_2\text{O}}) n_{\text{tot}}$$

C'est pourquoi :

$$w_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{x_{\text{H}_2\text{O}} M_{\text{H}_2\text{O}}}{x_{\text{H}_2\text{O}} M_{\text{H}_2\text{O}} + (1 - x_{\text{H}_2\text{O}}) M_{\text{NH}_3}} = \frac{x_{\text{H}_2\text{O}} M_{\text{H}_2\text{O}}}{x_{\text{H}_2\text{O}} (M_{\text{H}_2\text{O}} - M_{\text{NH}_3}) + M_{\text{NH}_3}}$$

$$\Rightarrow x_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{w_{\text{H}_2\text{O}} M_{\text{NH}_3}}{M_{\text{H}_2\text{O}} + w_{\text{H}_2\text{O}} (M_{\text{NH}_3} - M_{\text{H}_2\text{O}})}$$

Ce faisant, on trouve pour 20°C :

$$x_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{0,65 \times 17}{18 + 0,65 \times (17 - 18)} \Rightarrow x_{\text{H}_2\text{O}} = 0,64$$

et pour 60°C :

$$x_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{0,86 \times 17}{18 + 0,86 \times (17 - 18)} \Rightarrow x_{\text{H}_2\text{O}} = 0,85$$

2. Par définition :

$$w_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{m_{\text{H}_2\text{O}}}{m_{\text{H}_2\text{O}} + m_{\text{NH}_3}} \Rightarrow m_{\text{H}_2\text{O}} + m_{\text{NH}_3} = \frac{m_{\text{H}_2\text{O}}}{w_{\text{H}_2\text{O}}}$$

$$\Rightarrow m_{\text{NH}_3} = m_{\text{H}_2\text{O}} \times \frac{1 - w_{\text{H}_2\text{O}}}{w_{\text{H}_2\text{O}}}$$

où  $m_{\text{NH}_3} = n_{\text{NH}_3} \times M_{\text{NH}_3}$  et  $m_{\text{H}_2\text{O}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} \times V$ . C'est pourquoi :

$$n_{\text{NH}_3} = \frac{1}{M_{\text{NH}_3}} \times \rho_{\text{H}_2\text{O}} V \times \frac{1 - w_{\text{H}_2\text{O}}}{w_{\text{H}_2\text{O}}} \text{ où } \rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$$

Par conséquent, dans un litre d'eau, il est possible de dissoudre :

$$n_{\text{NH}_3} = \frac{1}{17} \times 1000 \times \frac{1 - 0,65}{0,65} = 31,7 \text{ mol à } 20^\circ\text{C}$$

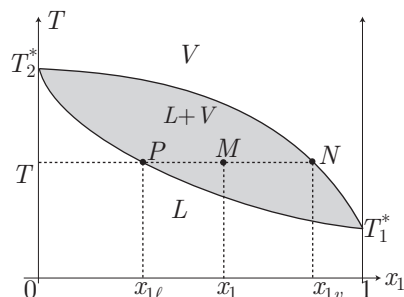
et :

$$n_{\text{NH}_3} = \frac{1}{17} \times 1000 \times \frac{1 - 0,86}{0,86} = 9,5 \text{ mol à } 60^\circ\text{C}$$

### 7.4.6 Règle des moments

Considérons un mélange binaire composé de  $n_1$  moles de  $A_1$  et  $n_2$  moles de  $A_2$ . Soit  $n = n_1 + n_2$  la quantité totale de matière contenue dans ce mélange, où :

- $x_1 = \frac{n_1}{n}$  désigne la fraction molaire de  $A_1$  dans le mélange ;
- $n_{1\ell} = x_{1\ell} n_\ell$  est la quantité de  $A_1$  présente dans la phase liquide, laquelle contient  $n_\ell = n_{1\ell} + n_{2\ell}$  moles de matière ;
- $n_{1v} = x_{1v} n_v$  représente la quantité de  $A_1$  présente dans la phase vapeur, cette dernière étant composée de  $n_v = n_{1v} + n_{2v}$  moles de matière.



Envisageons le cas où, à la température  $T$  et sous la pression  $P$  de travail le mélange binaire est constitué des phases liquide et vapeur en équilibre (point représentatif  $M$  du diagramme des phases). Le corps  $A_1$  se trouve simultanément dans ces deux phases, de sorte que :

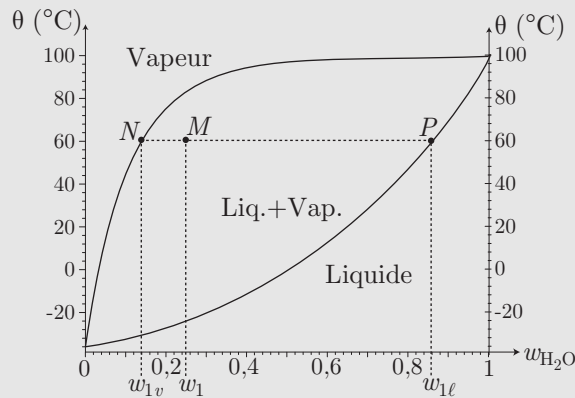
$$\begin{aligned} n_1 &= n_{1\ell} + n_{1v} = x_{1\ell} n_{\ell} + x_{1v} n_v \text{ avec } n_v = n - n_{\ell} \\ &= x_{1\ell} n_{\ell} + x_{1v} (n - n_{\ell}) \Rightarrow x_1 \times n = (x_{1\ell} - x_{1v}) n_{\ell} + x_{1v} n \\ \Rightarrow n_{\ell} &= n \times \frac{x_1 - x_{1v}}{x_{1\ell} - x_{1v}} \end{aligned}$$

On pourra retenir cette relation sous la formulation suivante :

$$n_{\ell} = n \times \frac{MN}{PN} \text{ et } n_v = n - n_{\ell} = n \times \frac{PM}{PN}$$



Un mélange contient, à l'état liquide,  $m_{H_2O} = 50$  g d'eau et  $m_{NH_3} = 150$  g d'ammoniac. Le diagramme binaire isobare eau-ammoniac est représenté ci-dessous, où la composition est exprimée en fraction massique d'eau.



1. Établir l'expression de la règle des moments permettant d'obtenir les masses  $m_{\ell}$  et  $m_v$  des phases liquide et vapeur, en fonction de  $MP$ ,  $MN$ ,  $NP$  et de la masse totale  $m$  du mélange.
2. Déterminer la composition (en masse d'eau et d'ammoniac) de chacune des phases en l'équilibre, à  $60^{\circ}\text{C}$ .

**RÉPONSE**

1. Soit  $m$  la masse totale d'un mélange contenant une masse  $m_1$  de  $A_1$  (et donc une masse  $m_2 = m - m_1$  de  $A_2$ ), dont  $m_{1\ell}$  en phase liquide et  $m_{1v}$  en phase vapeur. Les fractions massiques  $w_{1\ell} = \frac{m_{1\ell}}{m_{\ell}}$  et  $w_{1v} = \frac{m_{1v}}{m_v}$ , qui s'expriment en fonction des masses  $m_{\ell}$  et  $m_v$  des phases liquide et vapeur, conduisent à :

$$\begin{aligned} m_1 &= m_{1\ell} + m_{1v} = w_{1\ell} m_{\ell} + w_{1v} m_v = w_{1\ell} m_{\ell} + w_{1v} (m - m_{\ell}) \\ &= (w_{1\ell} - w_{1v}) \times m_{\ell} + w_{1v} \times m \end{aligned}$$

Or, puisque la fraction massique de  $A_1$  dans le mélange est définie par le rapport  $w_1 = \frac{m_1}{m}$ , il s'ensuit que :

$$m \times w_1 - m \times w_{1v} = (w_{1\ell} - w_{1v}) \times m_{\ell} \Rightarrow m_{\ell} = m \times \frac{w_1 - w_{1v}}{w_{1\ell} - w_{1v}}$$

c'est-à-dire, en remarquant que  $w_1 - w_{1v} = MN$  et que  $w_{1\ell} - w_{1v} = NP$  :

$$m_{\ell} = m \times \frac{MN}{NP} \text{ et } m_v = m - m_{\ell} = m \times \frac{MP}{NP}$$

2. Le milieu contient une masse totale :

$$m = m_{\text{NH}_3} + m_{\text{H}_2\text{O}} = 150 + 50 = 200 \text{ g}$$

Ainsi, la fraction massique de l'eau dans le mélange vaut :

$$w_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{m_{\text{H}_2\text{O}}}{m} = \frac{50}{200} = 0,25$$

Quant aux fractions massiques de l'eau dans les phases liquide et vapeur, elles se lisent directement sur le diagramme des phases (abscisses des points  $P$  et  $N$ ) :

$$w_{\text{H}_2\text{O}}^{(\ell)} = 0,86 \text{ et } w_{\text{H}_2\text{O}}^{(v)} = 0,14$$

Enfin, la règle des moments fournit les masses des phases liquide et vapeur :

$$m_{\ell} = m \times \frac{MN}{NP} = m \times \frac{w_{\text{H}_2\text{O}} - w_{\text{H}_2\text{O}}^{(v)}}{w_{\text{H}_2\text{O}}^{(\ell)} - w_{\text{H}_2\text{O}}^{(v)}} = 200 \times \frac{0,25 - 0,14}{0,86 - 0,14} = 30,6 \text{ g}$$

et :

$$m_v = m - m_{\ell} = 200 - 30,6 = 169,4 \text{ g}$$

Ce faisant, la phase liquide contient :

$$m_{\text{H}_2\text{O}}^{(\ell)} = w_{\text{H}_2\text{O}}^{(\ell)} \times m_{\ell} = 0,86 \times 30,6 = 26,3 \text{ g de H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$$

et :

$$m_{\text{NH}_3}^{(\ell)} = w_{\text{NH}_3}^{(\ell)} \times m_{\ell} = \left[1 - w_{\text{H}_2\text{O}}^{(\ell)}\right] \times m_{\ell} = 0,14 \times 30,6 = 4,3 \text{ g de NH}_3_{(\text{liq})}$$

tandis que la phase gazeuse contient :

$$m_{\text{H}_2\text{O}}^{(v)} = w_{\text{H}_2\text{O}}^{(v)} \times m_v = 0,14 \times 169,4 = 23,7 \text{ g de H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$$

et :

$$m_{\text{NH}_3}^{(v)} = w_{\text{NH}_3}^{(v)} \times m_v = \left[1 - w_{\text{H}_2\text{O}}^{(v)}\right] \times m_v = 145,7 \text{ g de NH}_3_{(\text{gaz})}$$

En conclusion, la composition du mélange est résumée dans le tableau ci-dessous :

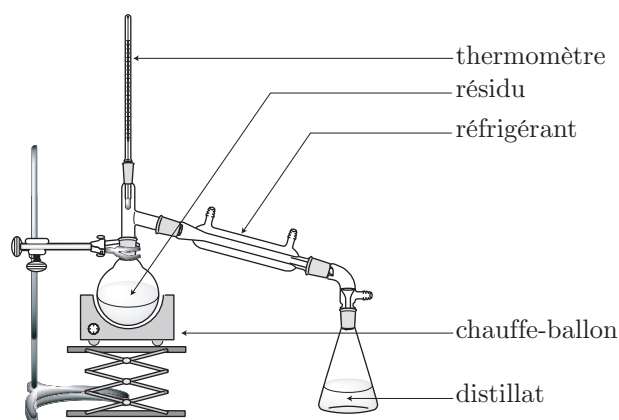
	H <sub>2</sub> O	NH <sub>3</sub>	total
liquide	26,3 g	4,3 g	30,6 g
vapeur	23,7 g	145,7 g	169,4 g
mélange	50 g	150 g	200 g

## 7.4.7 Application à la distillation

### 7.4.7.1 Distillation simple

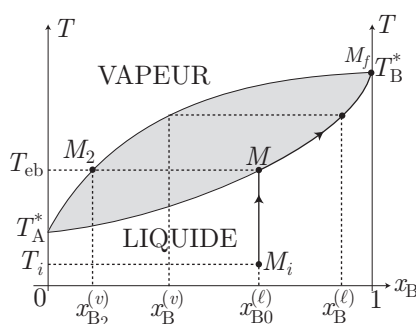
Dans le laboratoire, une distillation simple est réalisée en refroidissant les vapeurs directement issues d'un ballon qui contient un mélange liquide de deux corps (notés A et B) porté à ébullition.





**Définition 29** On appelle distillat le liquide récupéré après refroidissement des vapeurs dans un réfrigérant. Le liquide qui reste dans le ballon chauffé s'appelle le résidu.

Considérons le diagramme binaire du mélange A + B, dans lequel A est le corps le plus volatil (la température  $T_A^*$  d'ébullition de A pur est plus petite que celle,  $T_B^*$ , de B pur). Initialement, le ballon contient B et A liquides, de fractions molaires respectives  $x_{B0}^{(\ell)}$  et  $x_{A0}^\ell = 1 - x_{B0}^\ell$ , à la température  $T_i$  (point  $M_i$ ).



Le chauffage du ballon provoque un accroissement de la température jusqu'au début de l'ébullition, qui se produit à  $T_{eb}$ . Il convient ici de distinguer le sort du distillat de celui du résidu :

- À la température  $T_{eb}$ , la première bulle de vapeur entraîne avec elle une partie de B, de fraction molaire  $x_{B2}^{(v)}$  (point  $M_2$ ) plus petite que  $x_{B0}^{(\ell)}$ . Par suite, la vapeur s'enrichit en composé (A) le plus volatil. Dans le même temps, le liquide s'appauvrit en A (car la composition du liquide peut s'écarter de  $x_{B0}^{(\ell)}$  en milieu ouvert). Par suite, le résidu s'enrichit progressivement en B ; le point représentatif du résidu se déplace de  $M_1$  à  $M_f$  sur la courbe d'ébullition. Il s'ensuit que :

le résidu contient le corps (B) le moins volatil, presque pur, dès que  $T$  atteint la valeur  $T_B^*$ .

- La première bulle de vapeur contient, en revanche, un mélange de B et A de compositions respectives  $x_{B_2}^{(v)}$  et  $x_{A_2}^{(v)} = 1 - x_{B_2}^{(v)}$  (point  $M_2$ ). La poursuite de la distillation se traduit par un déplacement du point  $M$  vers  $M_f$ , ce qui procure des vapeurs dont la composition en B varie progressivement de  $x_{B_2}^{(v)}$  à 1. Le distillat contient donc B et A, la fraction molaire de ce dernier variant progressivement de  $x_{A_2}^{(v)}$  à 0. Par conséquent :

le distillat contient un mélange de A et B

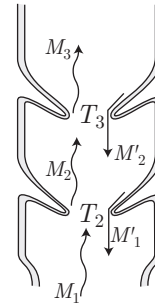
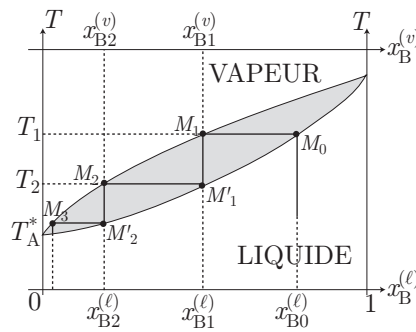
ce qui signifie également :

qu'il n'est pas possible, par distillation simple, d'isoler le corps (A) le plus volatil.

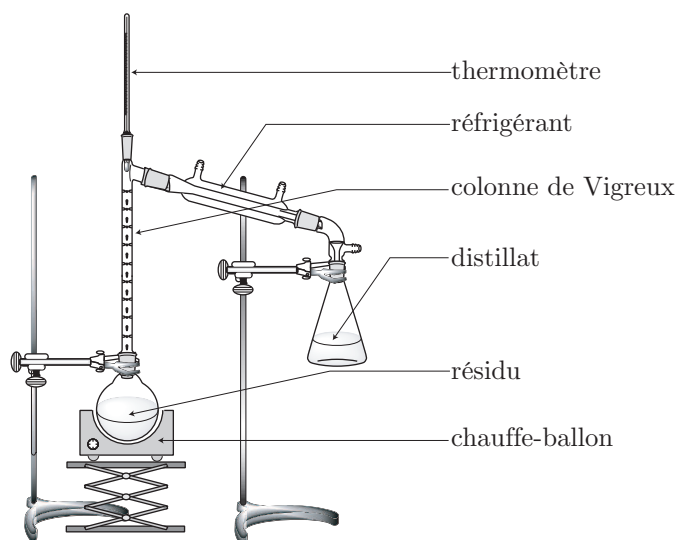
Remarque – Lorsque le réacteur est alimenté de manière continue, la composition du résidu ne varie pas, de sorte que le point représentatif du système demeure  $M$  lors de l'ébullition : les corps A et B ne peuvent être séparés.

#### 7.4.7.2 Distillation fractionnée

Ce type de distillation est réalisé par une colonne à plateaux (colonne de Vigreux au laboratoire) où se réalise la liquéfaction des vapeurs à différentes températures ( $T_0, T_1 < T_0, T_2 < T_1, \dots, T_{n+1} < T_n$ ).



La vapeur ( $M_1$ ), de composition  $x_{B_1}^{(v)}$  à la température  $T_1$ , arrive sur un plateau à la température  $T_2 < T_1$ , où elle se liquéfie partiellement. La phase liquide ainsi recueillie retombe vers le plateau inférieur, tandis que la vapeur ( $M_2$ ), de composition  $x_{B_2}^{(v)} < x_{B_1}^{(v)}$  se dirige vers le plateau supérieur, où la température  $T_3$  est inférieure à  $T_2$ . Le phénomène se produit à nouveau, jusqu'au dernier plateau, où  $x_B^{(l)}$  est suffisamment petit pour que la vapeur soit presque exclusivement composée de A ; les vapeurs ainsi parvenues en haut de colonne sont alors liquéfiées dans un réfrigérant, ce qui produit le distillat A.

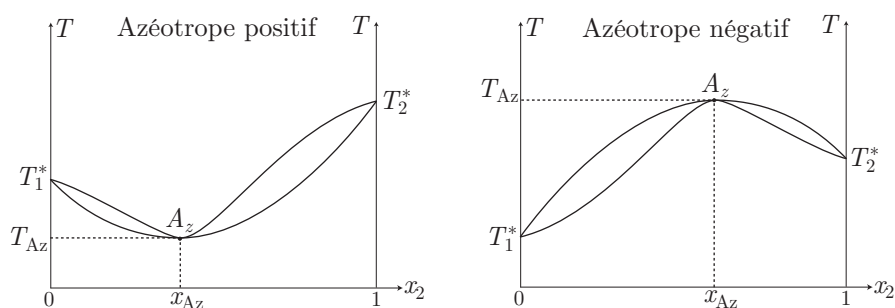


## 7.4.8 Azéotropisme

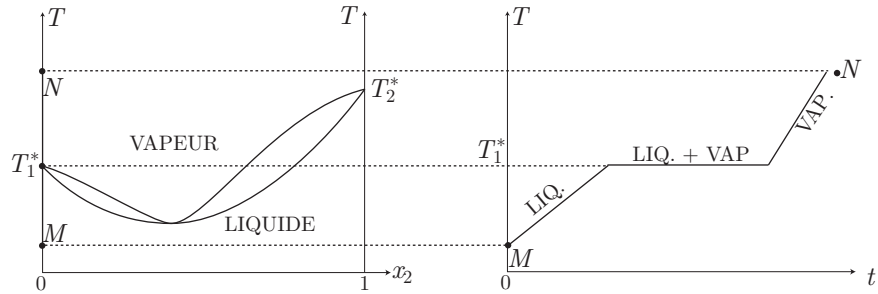
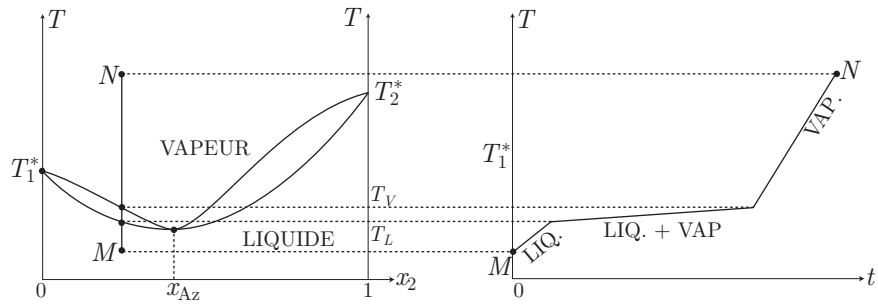
### 7.4.8.1 Diagrammes binaires

**Définition 30** L'azéotropisme se produit lorsque les courbes de rosée et d'ébullition admettent un extremum commun.

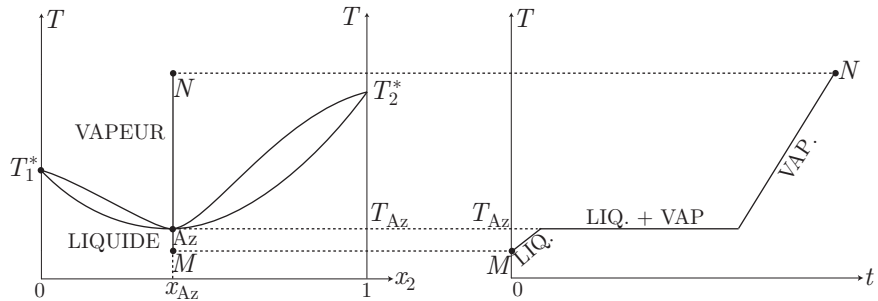
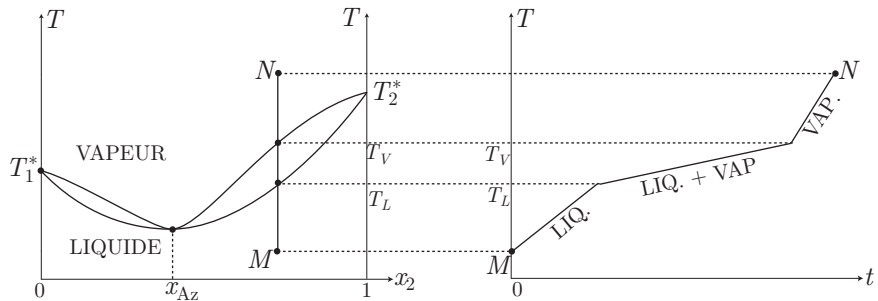
Comme l'illustre l'exercice de la page (1116), l'azéotropisme est une manifestation de l'écart à l'idéalité d'un mélange binaire. Considérons ainsi un mélange de deux espèces  $A_1$  et  $A_2$ , totalement miscibles. Le diagramme de phases (en fonction de la fraction molaire  $x_2$  en  $A_2$ ) présente un *extremum* commun pour les courbes de rosée et d'ébullition, à la température  $T_{Az}$  et pour une fraction molaire  $x_{Az}$  en  $A_2$ . Selon que  $T_{Az} < \inf \{T_1^*, T_2^*\}$  ou que  $T_{Az} > \sup \{T_1^*, T_2^*\}$ , on distingue les mélanges azéotropiques positifs (ou à *minimum*) des mélanges azéotropiques négatifs (ou à *maximum*) :

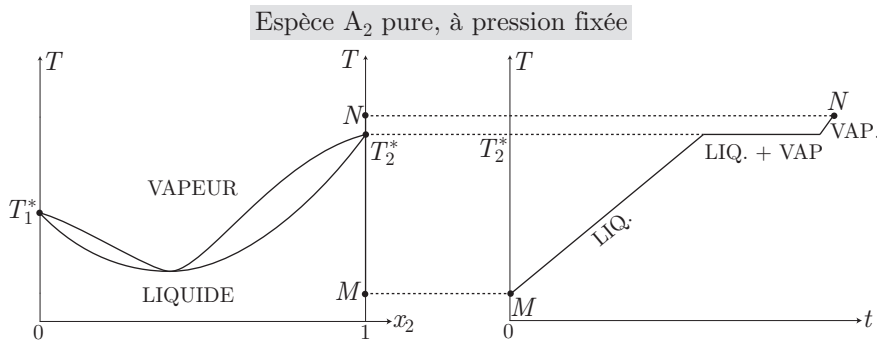


Au point  $A_z (x_{Az}, T_{Az})$ , le mélange est appelé *azéotrope* et il se comporte comme un corps pur, de température d'ébullition  $T_{Az}$  unique, à l'égard des changements d'état ; les schémas suivants illustrent ces changements d'état.

Espèce  $A_1$  pure, à pression fixéePour  $0 < x_2 < x_{Az}$ , à pression fixée

Azéotrope, à pression fixée

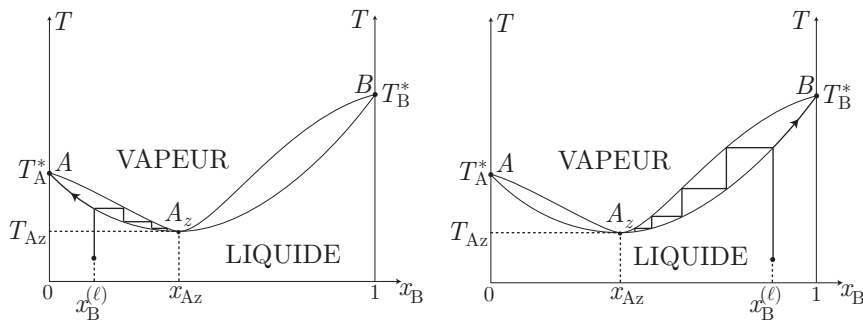
Pour  $x_{Az} < x_2 < 1$ , à pression fixée



### 7.4.8.2 Distillation fractionnée

#### Azéotrope positif

Considérons un mélange liquide constitué de deux espèces A et B, susceptibles de former un azéotrope à *minimum* lorsque la fraction molaire de B prend la valeur  $x_B = x_{Az}$ .



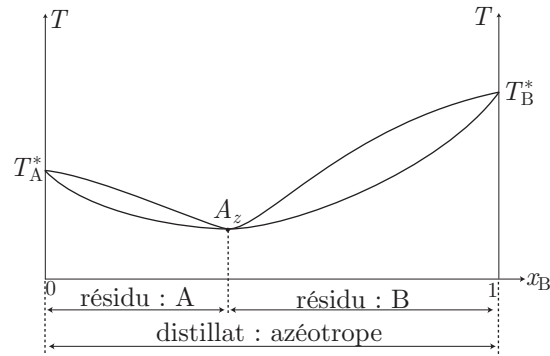
Selon la valeur  $x_B^\ell$  de la fraction molaire de B en phase liquide, il convient de distinguer deux cas :

- Si  $x_B^\ell < x_{Az}$ , la vapeur se liquéfie partiellement sur chaque plateau de la colonne à distiller ;  $x_B^\ell$  augmente ainsi jusqu'à atteindre la valeur  $x_{Az}$  de l'azéotrope, qui détermine la composition du distillat.

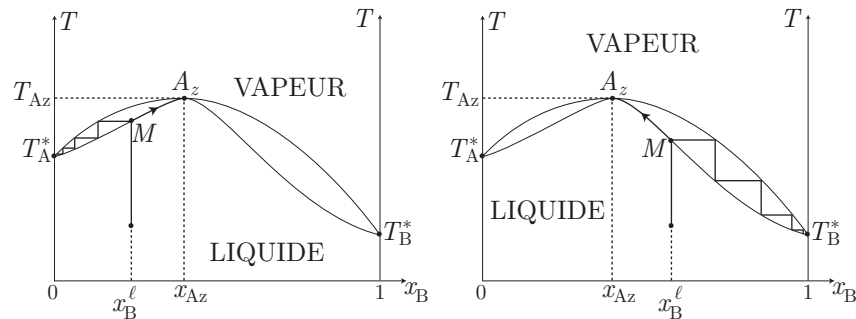
En revanche, le résidu s'appauvrit progressivement en espèce B (le milieu est ouvert) de sorte que sa température augmente jusqu'à  $T_A^*$ , valeur pour laquelle  $x_B = 0$  ; l'espèce A constitue, seule, le résidu.

- Si  $x_B^\ell > x_{Az}$ , sur chaque plateau de la colonne à distiller, la vapeur s'appauvrit en B :  $x_B^\ell$  diminue jusqu'à la valeur  $x_{Az}$ . C'est pourquoi le distillat présente la composition de l'azéotrope. Quant au résidu, il s'enrichit progressivement en B jusqu'à ce que  $T = T_B^*$  ; le résidu est composé presque exclusivement de B.

Ces commentaires sont résumés sur le diagramme ci-dessous :

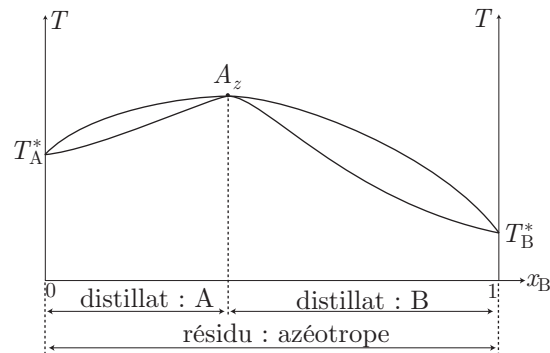


### Azéotrope positif



Il convient à nouveau de distinguer deux cas :

- Si  $x_B^l < x_{Az}$ , la vapeur s'appauvrit en B au fur et à mesure qu'elle monte dans la colonne à distiller, au sommet de laquelle la température vaut  $T_A^*$  ; la vapeur est composée de A presque pur. Concomitamment, le résidu liquide s'enrichit en B jusqu'à atteindre la fraction molaire  $x_{Az}$  ; le mélange azéotrope compose le résidu.
- Lorsque  $x_B^l > x_{Az}$ , la vapeur s'enrichit en corps B en progressant sur les plateaux vers le haut de la colonne à distiller, en conséquence de quoi le distillat est composé de B. L'appauvrissement consécutif de la phase liquide en B provoque la diminution de  $x_B$  jusqu'à la valeur  $x_{Az}$  : le résidu est constitué du mélange azéotrope.



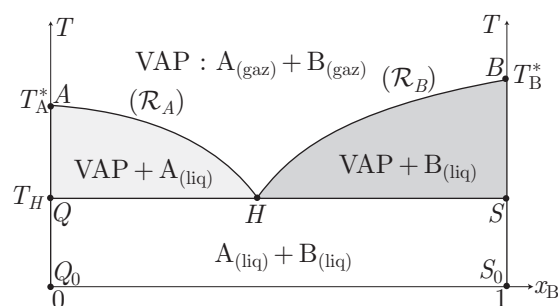
## 7.4.9 Cas des liquides non miscibles

### 7.4.9.1 Diagramme des phases

Considérons un mélange de deux corps A et B, non miscibles en phase liquide ; on notera  $A_{(liq)}$  et  $B_{(liq)}$  les liquides correspondants. Il conviendra ainsi d'envisager l'existence :

- d'une phase gazeuse (VAP) qui contient  $A_{(gaz)}$  et  $B_{(gaz)}$  ;
- d'un équilibre entre la vapeur et le liquide, composé exclusivement de  $A_{(liq)}$  ;
- d'un équilibre entre la vapeur et le liquide, composé uniquement de  $B_{(liq)}$  ;
- de deux phases liquides, non miscibles, en équilibre entre elles ;
- de deux phases liquides, non miscibles, en équilibre avec la vapeur.

C'est pourquoi le diagramme des phases du système présente l'allure suivante :

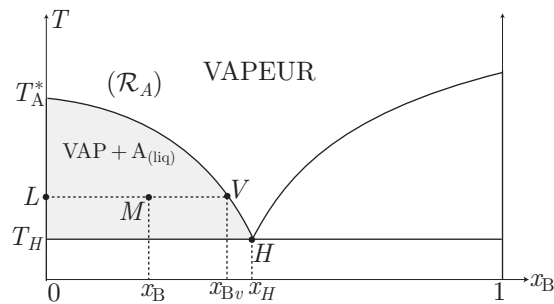


Dans ce diagramme :

- la courbe  $(\mathcal{R}_A)$  désigne une portion de la *courbe de rosée* : en chaque point de cette courbe, la vapeur est en équilibre avec le liquide  $A_{(liq)}$  ;
- la courbe  $(\mathcal{R}_B)$  désigne l'autre portion de la *courbe de rosée*, en chaque point de laquelle la vapeur est en équilibre avec le liquide  $B_{(liq)}$  ;
- le segment horizontal  $[QS]$  représente l'ensemble des points qui correspond à un équilibre entre trois phases (les deux liquides et la vapeur). Ce segment est aussi appelé *isotherme hétéroazéotropique* ;
- les *courbes* d'ébullition sont représentées par des segments verticaux :
  - sur  $[AQ]$ ,  $x_{A\ell} = 1$  (donc  $x_{B\ell} = 0$ ) car le liquide en équilibre avec la vapeur n'est composé que de  $A_{(liq)}$  ;
  - sur  $[BS]$ ,  $x_{B\ell} = 1$  (soit aussi :  $x_{A\ell} = 0$ ) assure l'existence exclusive de  $B_{(liq)}$  dans la phase liquide en équilibre avec la vapeur ;
  - les segments  $[Q_0Q]$  et  $[S_0S]$ , sur lesquels  $x_{B\ell}$  vaut respectivement 0 et 1, seules valeurs possibles lorsque les deux phases liquides ne sont pas miscibles.

### 7.4.9.2 Règle des moments

Intéressons-nous, dans un premier temps, à un mélange dans lequel le liquide  $A_{(liq)}$  est en équilibre avec la vapeur.



Nous adopterons les notations suivantes :

- $n_{A\ell}$ ,  $n_{B\ell}$ ,  $n_{Av}$  et  $n_{Bv}$  désignent les quantités de A et de B dans les phases liquides et vapeur ;
- $n_\ell$  et  $n_v$  sont les nombres de moles constituant respectivement les phases liquides et gazeuse. On remarque ici que :

$$n_\ell = n_{A\ell} + n_{B\ell} \text{ et } n_v = n_{Av} + n_{Bv}$$

- $n_A$  et  $n_B$  représentent les quantités totales de A et B dans le mélange, avec :

$$n_A = n_{A\ell} + n_{Av} \text{ et } n_B = n_{B\ell} + n_{Bv}$$

- $x_{Av} = \frac{n_{Av}}{n_v}$  et  $x_{Bv} = \frac{n_{Bv}}{n_v}$  sont les fractions molaires de  $A_{(gaz)}$  et de  $B_{(gaz)}$  dans la vapeur ; les fractions molaires dans les phases liquides ne sont pas mentionnées car elles prennent exclusivement les valeurs 0 ou 1.
- $x_B = \frac{n_B}{n}$  désigne enfin la fraction molaire de B dans le milieu.

Lorsque  $x_B < x_H$  l'espèce A compose seule la phase liquide, auquel cas :

$$n_A = n_{Av} + n_{A\ell} = n_{Av} + n_\ell \Rightarrow n_{Av} = n_A - n_\ell$$

où :

$$n_A = n - n_B = n - x_B n = (1 - x_B) n \Rightarrow n_{Av} = (1 - x_B) n - n_\ell$$

En outre,  $n_{Bv} = x_{Bv} n_v$ , de sorte que la vapeur contient la quantité de matière :

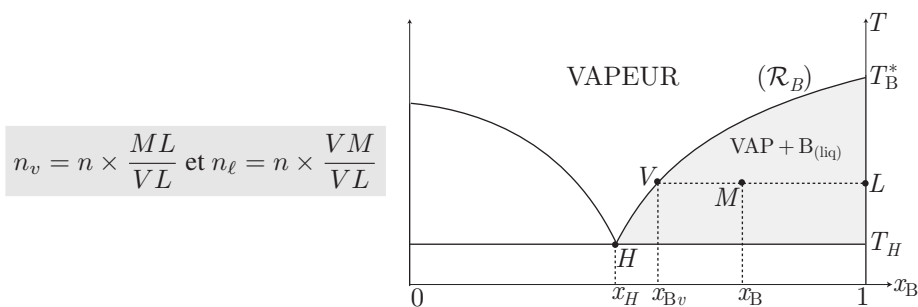
$$\begin{aligned} n_v &= n_{Av} + n_{Bv} = (1 - x_B) n - n_\ell + x_{Bv} n_v \\ &\Rightarrow \underbrace{n_v + n_\ell}_{=n} = (1 - x_B) n + x_{Bv} n_v \\ &\Rightarrow n x_B = x_{Bv} n_v \Rightarrow n_v = n \times \frac{x_B}{x_{Bv}} \end{aligned}$$

En remarquant que  $x_B = LM$  et que  $x_{Bv} = LV$ , cette relation devient également :

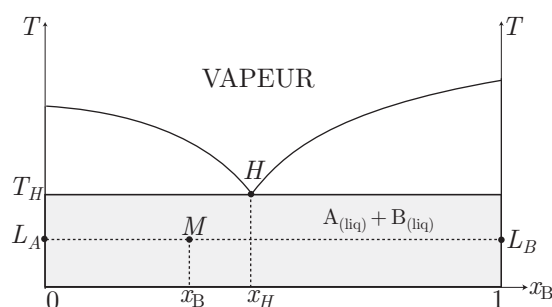
$$n_v = n \times \frac{LM}{LV} \Rightarrow n_\ell = n - n_v = n \times \frac{MV}{LV}$$

D'une manière analogue, lorsque  $x_B > x_H$ , nous trouvons :





Considérons maintenant l'équilibre entre les deux phases liquides seulement :



Par définition :

$$x_B = \frac{n_B}{n} = \frac{n_{B\ell}}{n} \text{ car } n_{Bv} = 0$$

tandis que :

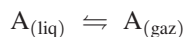
$$n_{A\ell} = n - n_{B\ell} = n \times (1 - x_B)$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{n_{B\ell}}{n_{A\ell}} = \frac{n \times x_B}{n \times (1 - x_B)} = \frac{x_B}{1 - x_B} \Rightarrow \frac{n_{B\ell}}{n_{A\ell}} = \frac{L_A M}{M L_B}$$

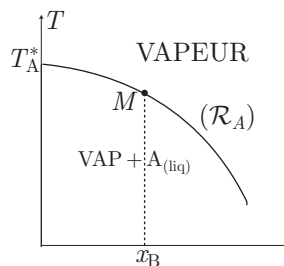
### 7.4.9.3 Équation des courbes de rosée

Considérons la courbe de rosée ( $\mathcal{R}_A$ ), sur laquelle les points représentent un équilibre entre la vapeur et le liquide, composé de A pur. En un point M de cette courbe, l'équilibre de A dans les phases liquide et gazeuse :



est caractérisé par la constante :

$$K_A^0 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G_A^0}{RT}\right) \text{ avec } \Delta_r G_A^0 = \Delta_r H_A^0 - T \times \Delta_r S_A^0$$



où l'on admettra que l'enthalpie *standard* et l'entropie *standard* de la réaction sont indépendantes de la température  $T$  (approximation d'Ellingham). Il s'ensuit que :

$$K_A^0 = \exp\left(-\frac{\Delta_r H_A^0}{RT} + \frac{\Delta_r S_A^0}{R}\right) = \alpha \exp\left(-\frac{\Delta_r H_A^0}{RT}\right)$$

où  $\alpha = \exp\left(\frac{\Delta_r S_A^0}{R}\right)$  est une constante indépendante de la température.

En outre, le quotient de réaction  $Q$  s'écrit en fonction des activités :

- l'activité  $a_{Av}$  de  $A_{(gaz)}$  est définie par le rapport de la pression partielle  $P_A$  de  $A_{(gaz)}$  par la pression *standard*  $P_0 = 1$  bar :

$$a_{Av} = \frac{P_A}{P_0} = x_{Av} \times \frac{P}{P_0} = (1 - x_{Bv}) \times \frac{P}{P_0}$$

- l'activité  $a_{Al}$  de  $A_{(liq)}$  vaut 1 dans la phase liquide pure.

Aussi, l'équilibre liquide-vapeur est établi lorsque  $Q$  s'identifie à  $K_A^0$  :

$$Q = \frac{a_{Av}}{a_{Al}} = K_A^0 \Rightarrow (1 - x_{Bv}) \frac{P}{P_0} = \alpha \exp\left(-\frac{\Delta_r H_A^0}{RT}\right)$$

Cette loi doit demeurer valable lorsque  $x_{Bv} = 0$ , c'est-à-dire pour la température  $T_A^*$  :

$$\begin{aligned} \frac{P}{P_0} &= \alpha \exp\left(-\frac{\Delta_r H_A^0}{RT_A^*}\right) \Rightarrow \alpha = \frac{P}{P_0} \exp\left(\frac{\Delta_r H_A^0}{RT_A^*}\right) \\ &\Rightarrow (1 - x_{Bv}) \frac{P}{P_0} = \frac{P}{P_0} \exp\left[\frac{\Delta_r H_A^0}{R} \left(\frac{1}{T_A^*} - \frac{1}{T}\right)\right] \\ &\Rightarrow \frac{\Delta_r H_A^0}{R} \left(\frac{1}{T_A^*} - \frac{1}{T}\right) = \ln(1 - x_{Bv}) \end{aligned}$$

Par conséquent, la courbe de rosée ( $\mathcal{R}_A$ ) est décrite par l'équation :

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_A^*} - \frac{R}{\Delta_r H_A^0} \ln(1 - x_{Bv})$$

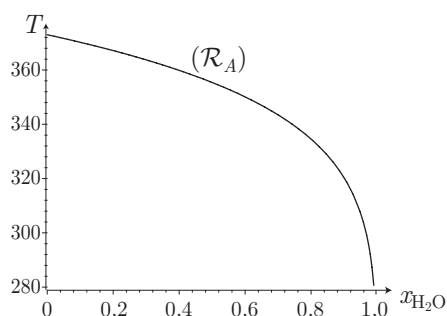
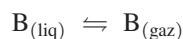


Diagramme avec l'eau :  $T_{H_2O}^* = 373$  K et  $\Delta_{vap}H^0 = 43,4$  kJ · mol<sup>-1</sup>

Intéressons-nous maintenant à la courbe de rosée ( $\mathcal{R}_B$ ), sur laquelle chaque point  $M$  figure un état d'équilibre diphasé :



À nouveau, la constante de cet équilibre dépend de la température  $T$  selon la loi :

$$K_B^0 = \beta \exp\left(-\frac{\Delta_r H_B^0}{RT}\right) \text{ avec } \beta = \exp\left(\frac{\Delta_r S_B^0}{R}\right)$$

tandis que le quotient de réaction est défini par :  $Q' = \frac{a_{Bv}}{a_{Bl}}$ , où les activités  $a_{Bv}$  et  $a_{Bl}$  de  $\text{B}_{(\text{gaz})}$  et de  $\text{B}_{(\text{liq})}$  valent :

$$a_{Bv} = \frac{P_B}{P_0} = x_{Bv} \times \frac{P}{P_0} \text{ et } a_{Bl} = 1 \text{ (B}_{(\text{liq})} \text{ est pur).}$$

C'est pourquoi la condition d'équilibre chimique :  $Q' = K_B^0$  se traduit par :

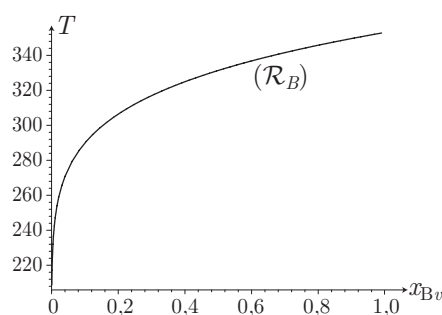
$$x_{Bv} \times \frac{P}{P_0} = \beta \exp\left(-\frac{\Delta_r H_B^0}{RT}\right)$$

laquelle équation devient, lorsque  $x_{Bv} = 1$  :

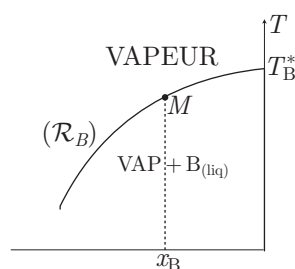
$$\begin{aligned} \frac{P}{P_0} &= \beta \exp\left(-\frac{\Delta_r H_B^0}{RT_B^*}\right) \Rightarrow \beta = \frac{P}{P_0} \exp\left(\frac{\Delta_r H_B^0}{RT_B^*}\right) \\ \Rightarrow x_{Bv} \times \frac{P}{P_0} &= \frac{P}{P_0} \exp\left[\frac{\Delta_r H_B^0}{R} \left(\frac{1}{T_B^*} - \frac{1}{T}\right)\right] \\ \Rightarrow \frac{\Delta_r H_B^0}{R} \left(\frac{1}{T_B^*} - \frac{1}{T}\right) &= \ln x_{Bv} \end{aligned}$$

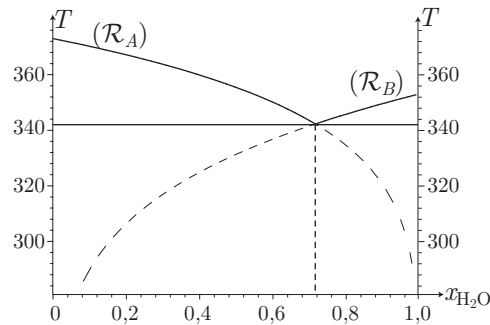
Il s'ensuit que la courbe ( $\mathcal{R}_B$ ) est décrite par l'équation :

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_B^*} - \frac{R}{\Delta_r H_B^0} \ln x_{Bv}$$



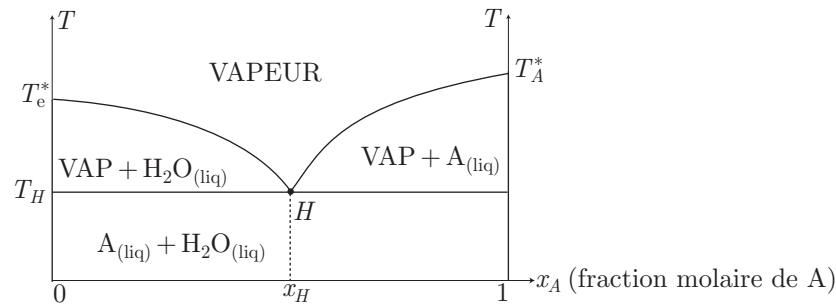
La composition du mélange hétéroazéotropique est alors donnée par l'intersection des courbes ( $\mathcal{R}_A$ ) et ( $\mathcal{R}_B$ ), représentées sur un même diagramme :





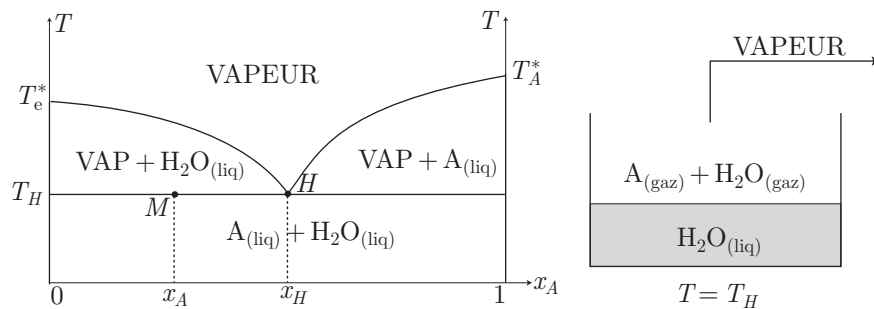
#### 7.4.9.4 Application à l'hydrodistillation

Considérons un mélange d'eau et de composé A non miscible à l'eau, dont le diagramme binaire présente l'allure ci-dessous :



Examinons les deux situations suivantes :

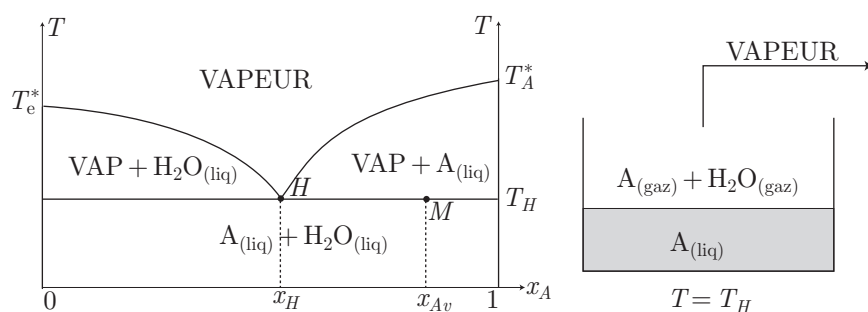
- si  $x_A < x_H$  (fraction molaire de l'hétéroazeotrope), lorsque la température atteint  $T_H$  (point M), la phase liquide ne contient que de l'eau tandis que A se trouve mélangé à de la vapeur d'eau (avec pour fraction molaire  $x_H$ ).



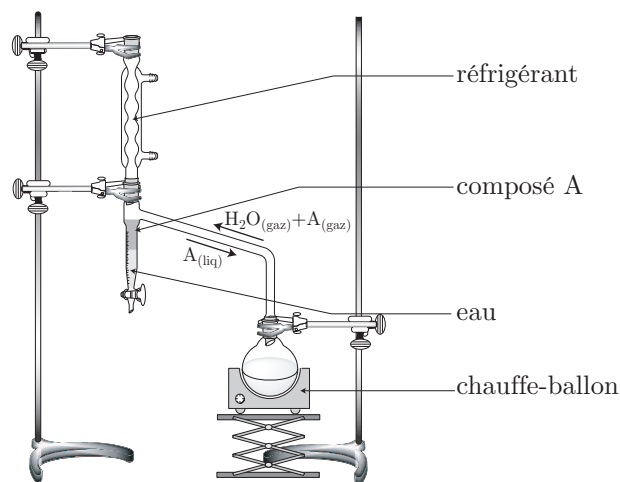
La vapeur ainsi récupérée, puis refroidie, permet l'obtention d'un liquide qui contient A et  $H_2O$ , que l'on peut séparer par décantation ; une telle distillation est surtout utile lorsqu'il s'agit d'isoler un solvant  $A_i$  parmi d'autres, également non miscibles à l'eau : le début d'ébullition du mélange, à la température  $T_{H_i}$  indique le départ de  $A_i$ . Pour information, le tableau ci-dessus fournit les coordonnées du point H ( $x_{Av}$  désigne la fraction molaire du composé A et  $x_{H_2O}$  celle de l'eau) dans un mélange de composé A et d'eau, sous la pression  $P_0 = 1$  bar :

Composé A	Formule de A	$T_H$	$x_{Av}$	$x_{H_2O}$
Éthanoate d'éthyle.....	$\text{CH}_3\text{COOC}_2\text{H}_5$	$70,4^\circ\text{C}$	0,688	0,312
Chlorobenzène.....	$\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$	$90,2^\circ\text{C}$	0,288	0,712
Benzène.....	$\text{C}_6\text{H}_6$	$69,3^\circ\text{C}$	0,705	0,295
Phenol.....	$\text{C}_6\text{H}_5\text{OH}$	$99,5^\circ\text{C}$	0,019	0,981
Cyclohexane.....	$\text{C}_6\text{H}_{12}$	$69,5^\circ\text{C}$	0,700	0,300
Toluène.....	$\text{C}_6\text{H}_5 - \text{CH}_3$	$84,1^\circ\text{C}$	0,556	0,444

- Si  $x_A > x_H$ , le mélange commence à bouillir à une température  $T_H$  à laquelle le liquide n'est composé que de  $\text{A}_{(\text{liq})}$  pur ; l'eau se trouve totalement vaporisée.



Le refroidissement de la vapeur permet ainsi l'élimination complète de l'eau du milieu réactionnel. Un *décanteur de Dean-Stark* (figure ci-dessous) est souvent employé afin de récupérer le composé A partiellement vaporisé :



C O U R S

## ● 191 ————— Concours Commun Polytechnique

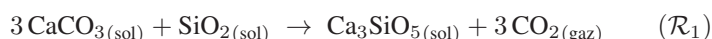
15 min.

Effets thermiques d'une réaction

MP-PC-PSI-PT

Le ciment de Portland (catégorie la plus utilisée) est élaborée par réaction, dans un four chauffé à 1 700 K, d'un mélange de calcaire ( $\text{CaCO}_3$ ) et d'argile (constituée de  $\text{SiO}_2$  et  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ).

Le constituant principal de ce ciment non hydraté est le silicate de calcium  $\text{Ca}_3\text{SiO}_5$ , formé selon la réaction totale ( $\mathcal{R}_1$ ) :



- (a) Calculer l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H_1^0$  de la réaction ( $\mathcal{R}_1$ ) à 298 K.  
(b) Quelle relation doivent vérifier les capacités thermiques molaires *standard* à pression constante  $C_p^0$  des réactifs et des produits de la réaction pour que  $\Delta_r H_1^0$  soit indépendant de la température ?

On considère, par la suite, que  $\Delta_r H_1^0$  peut être considéré comme indépendant de la température.

- On souhaite évaluer le transfert thermique (quantité de chaleur)  $Q_p$  à fournir pour transformer une tonne de  $\text{CaCO}_{3(\text{sol})}$  selon la réaction ( $\mathcal{R}_1$ ), effectuée à 1 700 K et sous la pression  $P_0 = 1$  bar.

- Écrire la relation entre  $Q_p$  et  $\Delta_r H_1^0$ .
- Calculer  $Q_p$ .

- L'énergie précédente peut être apportée par la réaction totale ( $\mathcal{R}_2$ ) de combustion du méthane :



L'enthalpie *standard* de cette réaction vaut  $\Delta_r H_2^0 = 830 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  à 298 K.

- On étudie la combustion, sous  $P_0 = 1$  bar, d'une mole de  $\text{CH}_{4(\text{gaz})}$  avec la quantité stœchiométrique d'air (2 moles de  $\text{O}_{2(\text{gaz})}$  et 8 moles de  $\text{N}_{2(\text{gaz})}$ ), initialement à 298 K. Quels sont les constituants présents en fin de réaction et leurs nombres de moles respectifs ?
- Effectuer une estimation de la température  $T_f$  atteinte par ces constituants en fin de réaction, en considérant les hypothèses suivantes :
  - la chaleur libérée par la réaction ( $\mathcal{R}_2$ ) n'a pas le temps de s'évacuer vers le milieu extérieur ;
  - les capacités thermiques molaires isobares *standard*  $C_p^0$  sont indépendantes de la température.
- On veut utiliser, pour effectuer la réaction ( $\mathcal{R}_1$ ), la quantité de chaleur fournie, à pression constante, par le retour à 1 700 K des constituants obtenus à l'issue de la réaction ( $\mathcal{R}_2$ ). Quelle masse de méthane  $\text{CH}_{4(\text{gaz})}$  faut-il brûler par la réaction ( $\mathcal{R}_2$ ) pour transformer une tonne de  $\text{CaCO}_{3(\text{sol})}$  selon la réaction ( $\mathcal{R}_1$ ) ?

Données numériques :

- Masses molaires atomiques :

$$M_{\text{H}} = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_{\text{C}} = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_{\text{O}} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_{\text{Ca}} = 40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- Enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$ ) à 298 K :

Corps	$\text{CaCO}_3(\text{sol})$	$\text{SiO}_2(\text{sol})$	$\text{Ca}_3\text{SiO}_5(\text{sol})$	$\text{CO}_2(\text{gaz})$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	-1 206	-910	-2 930	-393

- Capacités thermiques molaires *standard* à pression constante ( $C_p^0$ ) considérées indépendantes de la température :

Corps	$\text{CH}_4(\text{gaz})$	$\text{O}_2(\text{gaz})$	$\text{N}_2(\text{gaz})$	$\text{CO}_2(\text{gaz})$	$\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})$
$C_p^0$ (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	35,3	29,4	29,1	37,1	33,6

## ● 192 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

15 min.

Grandeurs thermodynamiques chimiques

MP-PC-PSI-PT

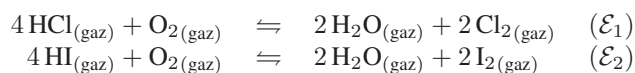
Tous les gaz intervenant dans cet exercice seront assimilés à des gaz parfaits.

Données numériques :

- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- Enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$  en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) à 298 K, entropies molaires *standard* ( $S_m^0$  en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) à 298 K et capacités thermiques molaires à pression constante ( $C_{pm}^0$  en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) :

corps	$\Delta_f H^0$	$S_m^0$	$C_{pm}^0$
$\text{O}_2(\text{gaz})$	0	205	30,0
$\text{Cl}_2(\text{gaz})$	0	223	36,9
$\text{I}_2(\text{gaz})$	62,43	261	37,4
$\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})$	-241,81	189	30,0
$\text{HCl}(\text{gaz})$	-92,31	187	26,5
$\text{HI}(\text{gaz})$	26,36	206	26,3

On considère les réactions suivantes :



1. À la température de 298 K, pourquoi a-t-on  $\Delta_f H^0 [\text{O}_2(\text{gaz})] = 0$ ,  $\Delta_f H^0 [\text{I}_2(\text{gaz})] > 0$  et  $\Delta_f H^0 [\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})] \neq 0$  ?
2. Calculer les grandeurs *standard* à 298 K de la réaction ( $\mathcal{E}_1$ ) :
  - (a) l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H_1^0$ . Conclusion ?
  - (b) l'entropie *standard*  $\Delta_r S_1^0$  et l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G_1^0$ .
3. Calculer les grandeurs *standard* à 298 K de la réaction ( $\mathcal{E}_2$ ) :
  - (a) l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H_2^0$ . Conclusion ?
  - (b) l'entropie *standard*  $\Delta_r S_2^0$  et l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G_2^0$ .
4. Calculer, littéralement puis numériquement,  $\Delta_r C_{pm1}^0$  et  $\Delta_r C_{pm2}^0$ , respectivement les variations des capacités thermiques molaires à pression constante des réactions ( $\mathcal{E}_1$ ) et ( $\mathcal{E}_2$ ).
5. En tenant compte de  $\Delta_r C_{pm1}^0$ , calculer  $\Delta_r G_1^0(774 \text{ K})$ .  
Calculer l'erreur commise sur cette valeur (en pourcentage) si l'on avait négligé les  $\Delta_r C_{pm}^0$  ici.  
Les calculs sont souvent faits sous une hypothèse simplificatrice ; comment se nomme-t-elle ?

### ● 193 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

*Effets thermiques des réactions*

MP-PC-PSI-PT

On veut déterminer, expérimentalement, l'enthalpie de combustion du méthane. Pour cela on introduit, à 298 K, dans une bombe calorimétrique de volume  $V = 500 \text{ cm}^3$ , du méthane sous une pression de 1 bar. On complète avec du dioxygène jusqu'à une pression totale de 20 bar. La quantité de chaleur dégagée par la réaction de combustion et ramenée à 298 K est de 17,83 kJ.

1. Écrire la réaction de combustion à 298 K.
2. Calculer l'énergie interne  $\Delta_r U$  de cette réaction à 298 K.
3. En déduire une valeur de l'enthalpie de réaction  $\Delta_r H$ .
4. Peut-on assimiler  $\Delta_r H$  à l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H^0$  de la réaction ? Justifier votre réponse.
5. Calculer  $\Delta_r H^0$  pour cette réaction à partir des données tabulées. Conclusion ?

*Données numériques :*

- 1 bar =  $10^5$  Pa ;
- constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- enthalpies *standard* de formation à 298 K :

$$\Delta_f H^0 \text{ (en kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\text{)} \quad \begin{array}{ccc} \text{CH}_4(\text{gaz}) & \text{H}_2\text{O}(\text{gaz}) & \text{CO}_2(\text{gaz}) \\ -74,85 & -241,83 & -393,51 \end{array}$$

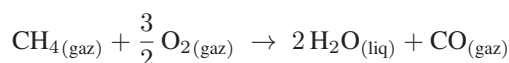
### ● 194 ————— Lycée Charlemagne, Paris

20 min.

*Effets thermiques des réactions*

MP-PC-PSI-PT

Le méthane réagit dans l'air avec la proportion théorique d'oxygène pour une explosion. La réaction chimique, qui a lieu à 298 K, a pour bilan :



En admettant que 10% de la chaleur dégagée par la réaction exothermique sont perdus et que le reste sert à élever la température des produits de la réaction et des gaz en excès, déterminer la température atteinte lorsqu'on fait réagir, à la pression  $P_0 = 1$  bar, du méthane avec le volume d'air exactement nécessaire à sa disparition complète (on négligera toute dissociation des produits).

*Données numériques*

- Enthalpies molaires *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$ ) à 298 K et capacités thermiques molaires sous pression constante ( $C_p^0$ ) en fonction de la température :

	$\Delta_f H^0$ (en kJ · mol <sup>-1</sup> )	$C_p^0$ (en J · K <sup>-1</sup> · mol <sup>-1</sup> )
CH <sub>4</sub> (gaz)	-74,8	23,65 + 47,88 · 10 <sup>-3</sup> T
O <sub>2</sub> (gaz)	-	29,97 + 4,18 · 10 <sup>-3</sup> T
N <sub>2</sub> (gaz)	-	27,88 + 4,27 · 10 <sup>-3</sup> T
CO(gaz)	-110,5	28,42 + 4,10 · 10 <sup>-3</sup> T
H <sub>2</sub> O(gaz)	-	30,01 + 10,71 · 10 <sup>-3</sup> T
H <sub>2</sub> O(liq)	-285,8	75,47



- Enthalpie molaire *standard* de vaporisation de l'eau à 373 K :

$$\Delta_{\text{vap}}H^0 = 40,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- On considère que :  $T(\text{K}) = 273 + t(^{\circ}\text{C})$  et que l'air est formé de 20% de dioxygène et de 80% de diazote (en volume).

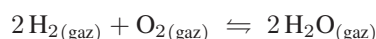
### ● 195 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

Température de flamme

MP-PC-PSI-PT

Soit la réaction d'équation-bilan :

L'enthalpie molaire *standard* de formation de l'eau vaut :

$$\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) = -241,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ à } 298 \text{ K}$$

La capacité thermique molaire de  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$ , à pression constante, varie en fonction de la température selon la relation :

$$C_p^0 = 31,3 + 0,0084 \times T \text{ (en } \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\text{)}$$

Déterminer la température maximale théorique que l'on peut atteindre lors de la combinaison stœchiométrique de deux moles d'hydrogène et d'une mole d'oxygène, prises initialement à 298 K, sous la pression atmosphérique.

Quelle remarque vous inspire le résultat obtenu ?

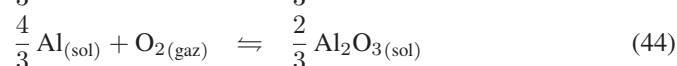
### ● 196 ————— Concours Commun Polytechnique

30 min.

Effets thermiques d'une réaction

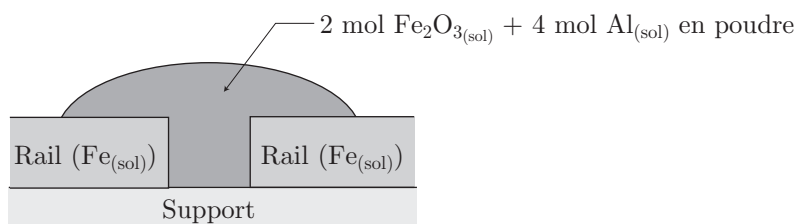
MP-PC-PSI-PT

On envisage les réactions d'oxydation suivantes :

On donne les enthalpies *standard* des réactions (43) et (44), en Joules par mole de  $\text{O}_2$  :

$$\begin{cases} \Delta_r G_1^0(T) = -540\,600 + 170,3 \times T \\ \Delta_r G_2^0(T) = -1\,131\,400 + 224,2 \times T \end{cases}$$

1. Montrer que l'aluminium solide réduit l'hématite  $\text{Fe}_2\text{O}_{3(\text{sol})}$ .
2. On mélange, à la température initiale  $T_i = 300 \text{ K}$ , 2 moles de  $\text{Fe}_2\text{O}_{3(\text{sol})}$  et 4 moles de  $\text{Al}_{(\text{sol})}$ . Les deux solides étant en poudre, on amorce la réaction en enflammant un fragment de magnésium mis en contact avec le mélange et elle se produit très rapidement.  
À quelle température les produits de la réaction sont-ils portés ?
3. On utilise cette réaction pour souder deux rails.



On amorce la réaction qui se produit encore rapidement. Cependant, à cause de la conductibilité thermique élevée du fer solide, on pourra considérer que 50% de l'énergie thermique fournie par la réaction est « perdue ».

Quelle masse de rail est alors devenue liquide ?

Données numériques :

- enthalpie *standard* de fusion du fer :  $\text{Fe}_{(\text{sol})} \rightleftharpoons \text{Fe}_{(\text{liq})}$  :

$$\Delta_{\text{fus}}H^0 = 9,1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ à } 1535^\circ\text{C}$$

- capacité thermique molaire isobare *standard* de  $\text{Fe}_{(\text{sol})}$  :  $C_p^0 \text{Fe}_{(\text{sol})} = 25,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- capacité thermique molaire isobare *standard* de  $\text{Fe}_{(\text{liq})}$  :  $C_p^0 \text{Fe}_{(\text{liq})} = 28,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- capacité thermique molaire isobare *standard* de  $\text{Al}_2\text{O}_3_{(\text{sol})}$  :  $C_p^0 \text{Al}_2\text{O}_3_{(\text{sol})} = 79,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- masse molaire atomique du fer :  $M = 56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- température de fusion du fer :  $T_{\text{fus}} = 1535^\circ\text{C}$ .

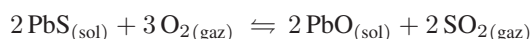
### ● 197 ————— Lycée du Parc, Lyon

10 min.

Affinité chimique

MP-PC-PSI-PT

La première étape du procédé industriel d'élaboration du plomb consiste en une étape de grillage de la galène selon une réaction, effectuée à  $700^\circ\text{C}$  :



- Calculer l'enthalpie *standard* de la réaction à la température considérée. La réaction est-elle endothermique ou exothermique ?
- Quelle est l'influence de la température sur la constante d'équilibre de cette réaction ?
- Donner l'expression de l'affinité chimique pour la réaction de grillage de la galène. En déduire l'influence, sur cet équilibre, de la pression totale imposée sur le mélange réactionnel. Pouvait-on prévoir qualitativement ce résultat ?

Dans les calculs, les gaz seront assimilés à des gaz parfaits et les phases solides seront considérées comme non miscibles.

Données numériques : enthalpies *standard* de formation, supposées indépendantes de la température :

$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	$\text{O}_2_{(\text{gaz})}$	$\text{SO}_2_{(\text{gaz})}$	$\text{PbS}_{(\text{sol})}$	$\text{PbO}_{(\text{sol})}$
	0	-296,8	-100,4	-217,4

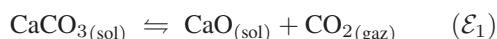
## ● 198 ————— Concours de l'ENS Cachan

20 min.

Enthalpie libre et équilibre chimique

MP-PC-PSI-PT

Dans un récipient vide de 10 L, maintenu à la température  $T = 1\,100\text{ K}$ , on introduit  $a = 0,2$  mole de  $\text{CaCO}_3$ . Il s'établit l'équilibre ( $\mathcal{E}_1$ ) :



de constante d'équilibre  $K_1^0 = 0,91$  à  $1\,100\text{ K}$ .

- Déterminer l'état final.
- Étudier la fonction enthalpie libre  $G(\xi)$  (ou  $\xi$  est l'avancement de la réaction) pour l'évolution isotherme et isochore du système précédent, pour  $\xi \in [0, a]$  et tracer  $G(\xi)$ . Calculer la valeur de  $\xi$  pour le *minimum* de  $G$  et comparer avec le résultat de la question 1. Expliquer cette différence.
- L'étude précédente conduit à envisager la fonction énergie interne  $F = U - TS$  (où  $U$  et  $S$  sont l'énergie interne et l'entropie du système).
  - Calculer  $F$  en fonction de  $\xi$ .
  - Reprendre l'étude de la question 2 avec  $F$ . Tracer et étudier la courbe  $F(\xi)$  en identifiant les points et pentes particuliers.
- Rappeler la condition d'équilibre chimique dans le cas le plus général et montrer que celle-ci se ramène à la recherche du *minimum* d'une fonction d'état. Quelle est cette fonction et comment la choisir ?

Données numériques :

- enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$ ) et entropies molaires *standard* ( $S_m^0$ ) supposées indépendantes de la température :

	$\text{CaCO}_{3(\text{sol})}$	$\text{CaO}_{(\text{sol})}$	$\text{CO}_{2(\text{gaz})}$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	-1 207	-635	-394
$S_m^0$ (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	93	40	214

- constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,314\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

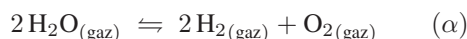
## ● 199 ————— Concours Commun Polytechnique

30 min.

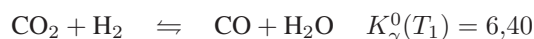
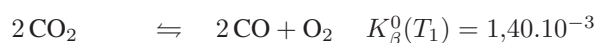
Constantes d'équilibre

MP-PC-PSI-PT

On étudie la dissociation de l'eau, représentée par l'équation ( $\alpha$ ) :



À la température  $T_1 = 2\,500\text{ K}$ , on connaît les constantes d'équilibre des deux réactions suivantes :



- Montrer que l'on peut calculer la constante d'équilibre  $K_\alpha^0(T_1)$  de la réaction ( $\alpha$ ) à partir des valeurs de  $K_\beta^0(T_1)$  et  $K_\gamma^0(T_1)$ , en justifiant la réponse. Quelle valeur trouve-t-on ?

2. Calculer, à la température  $T_1 = 2500$  K, la valeur de  $K_\alpha^0$  à partir des données suivantes, fournies à la température  $T_0 = 298$  K :
- enthalpie molaire *standard* de formation de  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$  :  $\Delta_f H_{298}^0 = -241,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
  - entropie molaire *standard* de  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$  :  $S_{298}^0(\text{H}_2\text{O}) = 188,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
  - entropie molaire *standard* de  $\text{O}_{2(\text{gaz})}$  :  $S_{298}^0(\text{O}_2) = 204,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
  - entropie molaire *standard* de  $\text{H}_{2(\text{gaz})}$  :  $S_{298}^0(\text{H}_2) = 130,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
  - capacités thermiques molaires des gaz, à pression constante, dans un domaine de température compris entre 298 K et 2500 K :
 
$$C_p^0(\text{H}_2) = 34,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$C_p^0(\text{O}_2) = 39,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$C_p^0(\text{H}_2\text{O}) = 45,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$
  - constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- (a) Effectuer le calcul en supposant que l'enthalpie et l'entropie sont indépendantes de la température.
- (b) Effectuer le calcul en supposant qu'elles dépendent de la température.

● **200** **Lycée du Parc, Lyon**

60 min.

*Affinité chimique*

MP-PC-PSI-PT

On considère, à une température  $T$ , un mélange homogène liquide  $\mathcal{N}$ , non idéal, formé de  $n_3$  moles de  $\text{A}_3$  et de  $n_4$  moles de  $\text{A}_4$ .

L'enthalpie libre  $G$  du mélange  $\mathcal{N}$  est donnée par l'expression ci-dessous :

$$G = n_3 \left[ \mu_3^{0\ell} + RT \ln \left( \frac{n_3}{n_3 + n_4} \right) \right] + n_4 \left[ \mu_4^{0\ell} + RT \ln \left( \frac{n_4}{n_3 + n_4} \right) \right] - 3 RT \frac{n_3 n_4}{n_3 + n_4}$$

où  $\mu_i^{0\ell}$  désigne le potentiel chimique *standard* de l'espèce ( $i$ ) dans l'état liquide.

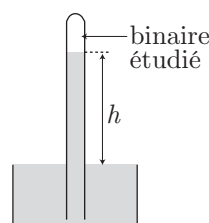
- Calculer le potentiel chimique  $\mu_3^\ell$  de  $\text{A}_3$  dans  $\mathcal{N}$ , en fonction de  $T$ ,  $\mu_3^{0\ell}$  et  $x_3$  (fraction molaire de  $\text{A}_3$ ).
- Le mélange  $\mathcal{N}$  est en équilibre, à une température  $T$  et à une pression  $P$ , avec le mélange des vapeurs de  $\text{A}_3$  et  $\text{A}_4$ .
  - Rappeler l'expression du potentiel chimique  $\mu_3^v$  de  $\text{A}_3$  dans la phase gazeuse, supposé parfaite, en fonction du potentiel chimique *standard*  $\mu_3^{0v}$  et de la pression partielle  $P_3$  de  $\text{A}_3$  dans la phase gazeuse.
  - Donner la relation entre  $\mu_3^{0\ell}$ ,  $\mu_3^{0v}$  et la pression  $P_3^*$  du point de rosée de  $\text{A}_3$ .
  - En déduire l'expression de la pression partielle  $P_3$  de  $\text{A}_3$  dans la phase gazeuse, en fonction de la fraction molaire  $x_3$  de  $\text{A}_3$  dans la phase liquide et de  $P_3^*$ .
  - Montrer que le constituant  $\text{A}_3$  suit la loi de Raoult lorsque  $x_3$  tend vers 1.
- (a) Soit  $P$  la pression totale de la phase gazeuse ; on pose :  $x_4 = x$  et  $y_4 = y$  les fractions molaires de  $\text{A}_4$  dans les phases liquide et gazeuse respectivement. Montrer que :

$$P = P_3^* \times (1 - x) \exp(-3x^2) + P_4^* \times x \exp[-3(1 - x)^2]$$

et donc que :

$$y = \frac{P_4^* \times x \times \exp[-3(1-x)^2]}{P_3^* \times (1-x) \exp(-3x^2) + P_4^* \times x \exp[-3(1-x)^2]}$$

- (b) Tracer, à l'aide d'une calculatrice, les courbes de rosée et d'ébullition de ce système binaire isotherme, sachant qu'à la température d'étude :  $P_3^* = 1$  bar et  $P_4^* = 2$  bar.
4. On prépare un liquide homogène  $\mathcal{N}_0$  en mélangeant  $n_3 = 4.10^{-3}$  mol du constituant  $A_3$  et  $n_4 = 6.10^{-3}$  mol du constituant  $A_4$ . Ce liquide  $\mathcal{N}_0$  est introduit dans un tube barométrique, rempli de mercure et retourné sur une cuve à mercure. Le niveau du mercure est alors le même dans la cuve et dans le tube ( $h = 0$ ). On soulève ensuite doucement le tube en repérant sa position par la dénivellation  $h$  représentée sur le dessin ci-contre et on étudie la vaporisation isotherme du mélange  $\mathcal{N}_0$  à l'aide du diagramme tracé précédemment.



- (a) Pour quelle dénivellation  $h_1$  y a-t-il apparition de la première bulle de vapeur ? Donner alors les fractions molaires  $x(1)$  et  $y(1)$  de  $A_4$  dans les deux phases en présence.
- (b) Pour quelle dénivellation  $h_2$  y a-t-il disparition de la dernière goutte de liquide ? Que valent alors  $x(2)$  et  $y(2)$  ?
- (c) Quelle est la composition du système binaire  $\{x(3), y(3)\}$  et la quantité de matière dans chacune des phases lorsque la dénivellation est  $h_3 = 15,2$  cm ?

Donnée numérique :

Pression atmosphérique :  $P_{\text{ext}} = 1$  bar  $\simeq 76$  cmHg.

## ● 201

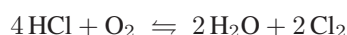
Lycée du Parc, Lyon

45 min.

Affinité chimique

MP-PC-PSI-PT

Le chlorure d'hydrogène et le dioxygène, en présence de catalyseur, donnent lieu à l'équilibre chimique en phase gazeuse :



La phase gazeuse est assimilée à un gaz parfait, de constante  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . La pression de référence de 1 bar est notée  $P_0$ .

L'affinité chimique standard  $\mathcal{A}^0$  de cette réaction (exprimée en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) est donnée par la relation suivante, dans laquelle  $T$  représente la température en Kelvin :

$$\mathcal{A}^0 = 115\,400 - 130,5 \times T + 0,5 \times T \ln T$$

1. Exprimer l'enthalpie standard  $\Delta_r H^0(T)$  et l'entropie standard  $\Delta_r S^0(T)$  de la réaction, en fonction de  $T$ . Que représente le coefficient 0,5 dans l'expression de  $\mathcal{A}^0$  ?
2. Calculer ces deux grandeurs à  $T = 800$  K.
3. Calculer la constante d'équilibre  $K^0(T)$  à cette même température  $T = 800$  K.

4. On mélange, dans un réacteur,  $n_0 = 3$  moles de constituants gazeux, réparties en  $n_1$  moles de HCl,  $n_2$  moles de O<sub>2</sub>,  $n_3$  moles de H<sub>2</sub>O,  $n_4$  moles de Cl<sub>2</sub>, sous une pression totale constante  $P_t = 1$  bar et à  $T = 800$  K.
- (a) Calculer l'affinité chimique initiale  $\mathcal{A}_i$  de ce mélange dans les deux cas suivants :
- cas 1 :  $n_1 = n_2 = 1$  mole et  $n_3 = n_4 = 0,5$  mole ;
  - cas 2 :  $n_1 = n_2 = 0,5$  mole et  $n_3 = n_4 = 1$  mole.
- (b) En déduire le sens d'évolution de chaque mélange.
- (c) Donner l'expression de la fraction molaire  $x_{\text{O}_2}$  du dioxygène en fonction de  $n_0$ ,  $n_2$  et de l'avancement  $\xi$  de la réaction.
- (d) Établir la relation donnant l'avancement  $\xi_e$  de la réaction en fonction de  $K^0(T)$ ,  $x_{\text{O}_2}$ ,  $P_0$ ,  $P_t$ ,  $n_1$  et  $n_3 = n_4$ , lorsque l'équilibre est atteint.
- (e) Calculer  $\xi_e$  et  $x_{\text{O}_2}$  à l'équilibre, dans les deux cas précédents.
5. L'équilibre réalisé, on veut comparer les déplacements d'équilibre résultant de l'introduction soit de dioxygène pur, soit d'air ( $\frac{1}{5}$  de O<sub>2</sub> et  $\frac{4}{5}$  de N<sub>2</sub>), à température et pression constantes.
- (a) On introduit une faible quantité de dioxygène ( $\delta\varepsilon$  mole) ; il s'ensuit une variation instantanée  $d\mathcal{A}$  de l'affinité chimique du mélange. Après avoir exprimée  $d\mathcal{A}$ , prévoir le sens d'évolution du système chimique.
- (b) On introduit une faible quantité d'air ( $\delta\varepsilon$  mole de O<sub>2</sub> et  $4\delta\varepsilon$  mole de N<sub>2</sub>) ; il s'ensuit une faible variation instantanée  $d\mathcal{A}$  de l'affinité chimique du mélange. Après avoir exprimé  $d\mathcal{A}$ , prévoir le sens d'évolution du système chimique en fonction de la fraction molaire  $x_{\text{O}_2}$  du dioxygène juste avant l'introduction de l'air.
- Conclure sur le sens d'évolution pour chacun des deux cas définis à la question 4.

## ● 202

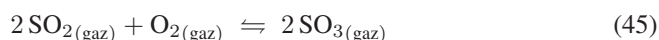
## Concours Vété

20 min.

MP-PC-PSI-PT

## Équilibres chimiques

Le dioxyde de soufre est converti en trioxyde de soufre sur un catalyseur au vanadium, selon la réaction suivante en phase gazeuse, à la température  $T$  :



1. Écrire la réaction de combustion du soufre solide en trioxyde de soufre (SO<sub>3</sub>) gazeux, dans le dioxygène. La combustion totale, à 25°C, de 160 g de soufre solide dégage, à pression constante, une chaleur de 1 980 kJ. En déduire l'enthalpie *standard* de formation de SO<sub>3(gaz)</sub> à 25°C.  
*Cette valeur sera considérée comme constante à toute température pour la suite de l'exercice.*
2. Calculer  $\Delta_r H_1^0$ , enthalpie *standard* de réaction pour la réaction (45) à la température  $T$ .
3. La réaction est-elle favorisée à haute ou à basse température ? Justifier.

4. Calculer l'entropie *standard* de la réaction (45). Le signe était-il prévisible ? Justifier.
5. Discuter de l'influence d'une augmentation de pression sur cet équilibre.
6. On se place à la température  $T$ , telle que la constante de l'équilibre (45) soit égale à  $K = 3\,240$ , sous une pression totale  $P = 1$  bar, en présence d'oxygène. On appelle taux de conversion  $\theta$  de  $\text{SO}_2(\text{gaz})$ , la quantité de matière de  $\text{SO}_2(\text{gaz})$  ayant disparu sur la quantité de matière initiale en  $\text{SO}_2(\text{gaz})$ .
  - (a) Exprimer  $\theta$  en fonction des pressions partielles en  $\text{SO}_2$  et  $\text{SO}_3$  gazeux, à l'équilibre.
  - (b) La pression d'équilibre en  $\text{O}_2$  est 0,025 bar. Calculer la valeur de  $\theta$ .
  - (c) Calculer les pressions partielles en  $\text{SO}_2$  et  $\text{SO}_3$  à l'équilibre.

Données numériques :

- Masse molaire du soufre :  $M = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- Enthalpie *standard* de formation de  $\text{SO}_2(\text{gaz})$  à 298 K :  $-296 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- Entropies *standard* de différents corps à 298 K :

$S^0$ (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	$\text{SO}_2(\text{gaz})$	$\text{O}_2(\text{gaz})$	$\text{SO}_3(\text{gaz})$
	248	205	256

## ● 203 ————— Concours Commun Polytechnique

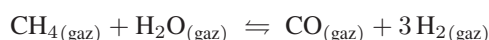
20 min.

Équilibres chimiques

MP-PC-PSI-PT

Le méthane peut être utilisé comme combustible primaire dans les piles à combustibles (P.A.C.). L'obtention d'un bon rendement nécessite au préalable la transformation du méthane en dihydrogène, combustible secondaire qui intervient dans la réaction d'oxydo-réduction. Cette transformation a lieu dans un réformeur, réacteur qui vient se mettre en amont de la P.A.C. (une telle installation est actuellement utilisée à New York en cas de demande accrue en électricité).

La production du dihydrogène a lieu par la réaction, dite de *réformage à la vapeur*, dont l'enthalpie *standard* vaut  $205,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  à 298 K :



Dans cet exercice, on supposera que l'enthalpie *standard* et l'entropie *standard* de la réaction sont indépendantes de la température.

1. (a) Calculer l'enthalpie *standard* de la réaction à 298 K ; que déduire de sa valeur ?  
 (b) Calculer l'entropie *standard* de la réaction à 298 K ; que déduire de son signe ?  
 (c) Calculer la constante d'équilibre de la réaction à 298 K. Conclure.
2. Quelle est l'influence d'une augmentation de température à pression constante sur la synthèse du dihydrogène ? Comment varie le rendement de la réaction ?
3. Quelle est l'influence d'une augmentation de pression, à température constante, sur la synthèse du dihydrogène ? Comment varie le rendement de la réaction ?
4. La réaction est réalisée sous 1 bar à  $T = 1\,073$  K en présence d'un catalyseur à base de nickel.
  - (a) Justifier ce choix de température et de pression.

- (b) La constante d'équilibre vaut alors  $K = 16$ . On part d'un mélange équimolaire en méthane et en eau.  
Exprimer les pressions partielles à l'équilibre  $P_{\text{H}_2}$ ,  $P_{\text{H}_2\text{O}}$ ,  $P_{\text{CH}_4}$  en fonction de  $P_{\text{CO}}$  et de la pression totale.
- (c) Calculer ces pressions partielles.
- (d) Donner une expression littérale du rendement en dihydrogène en fonction de  $P_{\text{H}_2}$  et de la pression totale. Calculer ce rendement.

Données numériques :

- Enthalpies libres *standard* de formation à 298K

$\Delta_f G^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	$\text{CO}_{(\text{gaz})}$	$\text{H}_2_{(\text{gaz})}$	$\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$	$\text{CH}_4_{(\text{gaz})}$
	-137,2	0	-228,6	-50,3

- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

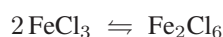
## ● 204 Concours Vété

20 min.

MP-PC-PSI-PT

Équilibres chimiques

On étudie, en phase gazeuse, l'équilibre de dimérisation de  $\text{FeCl}_3$ , de constante  $K^0$  à température donnée  $T$  :



On mesure, à deux températures :  $T_1 = 700 \text{ K}$  et  $T_2 = 800 \text{ K}$  et sous la pression *standard*  $P_0$ , la densité du mélange gazeux. On obtient respectivement  $d_1 = 10,5$  et  $d_2 = 9,6$ .

On appelle  $\alpha$  le taux de disparition de  $\text{FeCl}_3$  à l'équilibre. On rappelle que  $\alpha$  est le rapport de la quantité de  $\text{FeCl}_3$  qui a réagi, sur la quantité initiale de  $\text{FeCl}_3$ , seul dans le réacteur.

On rappelle que la densité d'un mélange gazeux est donnée par la formule :  $d = \frac{M}{29}$ , où

$M$  est la masse molaire du mélange gazeux (en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ), 29 étant approximativement la masse molaire de l'air en  $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

- Montrer que :  $d = \frac{5,6}{1 - \frac{\alpha}{2}}$ .
- Calculer  $\alpha_1$  à 700 K et  $\alpha_2$  à 800 K.
- Donner l'expression littérale de la constante  $K^0(T)$  en fonction des pressions partielles à l'équilibre en  $\text{FeCl}_3$  et  $\text{Fe}_2\text{Cl}_6$ , puis en fonction de  $\alpha$ .
- Calculer la constante  $K^0(T)$  aux deux températures.
- Calculer l'enthalpie *standard* de la réaction  $\Delta_r H^0$ , en la supposant indépendante de la température. La réaction est-elle endothermique ou exothermique ?
- On suppose, de même, que  $\Delta_r S^0$  est indépendant de la température. Calculer  $\Delta_r S^0$ . Pouvait-on prévoir le signe de  $\Delta_r S^0$  *a priori* ?
- Quelle est l'influence d'une augmentation de température, à pression constante, sur l'équilibre ? Justifier

Données :



- Masses molaires :  $M_{\text{Fe}} = 56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $M_{\text{Cl}} = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

## ● 205 ————— Concours de l'ENS Cachan

30 min.

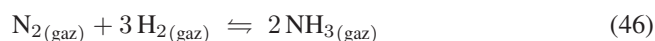
### Équilibres chimiques

MP-PC-PSI-PT

La synthèse de l'ammoniac est l'une des principales réactions de la chimie industrielle : l'ammoniac produit est principalement utilisé comme intermédiaire dans la synthèse de l'acide nitrique (destiné notamment à la production d'engrais) et de l'urée (production de matières plastiques). Dans cet exercice, on s'intéressera aux principales caractéristiques thermodynamiques de cette réaction.

Tous les gaz seront supposés parfaits. La pression standard  $P^0$  est prise égale à 1 bar. On note  $P_j$  la pression partielle du gaz  $j$ .

L'ammoniac est produit à l'état gazeux à partir de dihydrogène et de diazote selon la réaction représentée par l'équilibre suivant :



1. À partir de quelles matières premières sont obtenus les réactifs utilisés dans la synthèse de l'ammoniac ?
2. Calculer l'enthalpie *standard* de réaction  $\Delta_r H^0$  et l'entropie *standard* de réaction  $\Delta_r S^0$  pour l'équilibre (46), ainsi que sa constante d'équilibre  $K$ , à la température ambiante (25°C). Commenter les valeurs obtenues.
3. Dans le procédé industriel (procédé Haber), la réaction symbolisée par (46) a lieu à 400°C, sous une pression de 200 bar, en présence de catalyseur.
  - (a) Sans faire de calcul, justifier *a priori* les conditions de température et de pression utilisées dans ce procédé.
  - (b) Calculer l'enthalpie *standard* de réaction  $\Delta_r H^0$  pour (46) à 400°C.
  - (c) Calculer la constante d'équilibre  $K'$  de (46) à 400°C. Commenter la valeur obtenue.
  - (d) Soit  $x_i$  la fraction molaire de l'espèce  $i$  dans le mélange gazeux.

On note  $R_x$  le rapport :  $R_x = \frac{x_{\text{NH}_3}^2}{x_{\text{N}_2} \times x_{\text{H}_2}^3}$ .

Préciser comment  $R_x$  varie lorsqu'on augmente la pression de 1 à 200 bar à température constante.

- (e) On part d'un mélange initial contenant 1 mole de diazote et 3 moles de dihydrogène. Calculer la composition du mélange à l'équilibre, dans les conditions du procédé Haber (400°C, 200 bar).

Données numériques :

- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- Enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$ ), entropies molaires *standard* ( $S^0$ ) et capacités calorifiques molaires *standard* ( $C_p^0$ ) des corps purs suivants (à 25°C) :

	$\text{N}_{2(\text{gaz})}$	$\text{H}_{2(\text{gaz})}$	$\text{NH}_{3(\text{gaz})}$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	0	0	-46,1
$S^0$ (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	191,61	130,68	192,45
$C_p^0$ (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	29,12	28,82	35,06

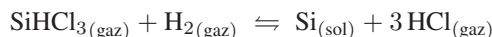
## ● 206 ————— Concours Commun Polytechnique

45 min.

Équilibres chimiques

MP-PC-PSI-PT

À 1 000°C, le trichlorosilane ultra-pur est réduit par l'hydrogène, suivant la réaction :



Le silicium ultra-pur, produit par cette réaction, est déposé sur un barreau de silicium.

1. Calculer l'enthalpie *standard* et l'entropie *standard* de la réaction à 298 K.
2. Calculer l'enthalpie *standard* et l'entropie *standard* de la réaction à 1 000°C.
3. En déduire les valeurs de l'enthalpie libre *standard* et de la constante d'équilibre de la réaction à 1 000°C.
4. Écrire l'expression du quotient de réaction  $Q$ , en fonction des pressions partielles des différents gaz présents. En calculant  $Q$  pour les conditions initiales, la réaction souhaitée a-t-elle lieu ?
5. Établir l'expression de la constante d'équilibre en fonction du coefficient de dissociation  $\alpha$  de  $\text{SiHCl}_3$ , de  $\beta$  (rapport du nombre initial de moles de  $\text{H}_2$  sur le nombre initial de moles de  $\text{SiHCl}_3$ , avec  $\beta \geq 1$ ) et de la pression totale  $P_t$ .
6. Pour une pression totale de 1 bar et pour  $\beta = 1$ , calculer la valeur du coefficient de dissociation et les pressions partielles à l'équilibre.
7. Qualitativement, que se passe-t-il à température et pression constantes lorsque l'hydrogène est introduit en excès dans le réacteur ? Calculer la valeur du coefficient de dissociation à l'équilibre pour  $\beta = 10$ .
8. Qualitativement, que se passe-t-il lorsque la réaction est effectuée sous pression réduite ? Calculer la valeur du coefficient de dissociation à l'équilibre pour  $\beta = 1$  et  $P_t = 0,1$  bar.

Données numériques :

- Enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$  en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ), entropies *standard* de formation ( $S^0$  en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) et capacités thermiques molaires *standard* à pression constante ( $C_p^0$  en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ , où  $T$  est exprimé en Kelvins), à 298 K :

Composé	$\Delta_f H^0$	$S^0$	$C_p^0$
$\text{HCl}_{(\text{gaz})}$	-92,0	186,6	$26,2 + 5,2 \cdot 10^{-3} \times T + 1,3 \cdot 10^5 / T^2$
$\text{H}_2_{(\text{gaz})}$	0	130,5	$27,3 + 3,3 \cdot 10^{-3} \times T + 0,5 \cdot 10^5 / T^2$
$\text{SiHCl}_3_{(\text{gaz})}$	-488,6	312,9	$95,3 + 6 \cdot 10^{-3} \times T - 19,9 \cdot 10^5 / T^2$
$\text{Si}_{(\text{gaz})}$	0	18,8	$24 + 2,6 \cdot 10^{-3} \times T - 4,2 \cdot 10^5 / T^2$

- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

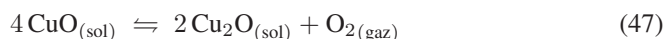
## ● 207 ————— Concours de la Banque Agro

30 min.

Équilibres chimiques

MP-PSI-PC-PT

On s'intéresse à la dissociation de l'oxyde de cuivre (II)  $\text{CuO}$  en oxyde de cuivre (I)  $\text{Cu}_2\text{O}$  et en dioxygène selon l'équation-bilan :



L'oxyde de cuivre (II) et l'oxyde de cuivre (I) sont deux solides non miscibles, de volumes molaires négligeables et le dioxygène est considéré comme un gaz parfait.

On rappelle que la constante molaire des gaz parfaits vaut :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ . On donne l'enthalpie et l'entropie *standard* de la réaction à  $T = 1\,300 \text{ K}$  :

$$\Delta_r H^0(1\,300 \text{ K}) = 279 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \Delta_r S^0(1\,300 \text{ K}) = 202 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

1. Dans un réacteur thermostaté à  $T = 1\,300 \text{ K}$ , initialement vide de tout gaz, on introduit une quantité suffisante d'oxyde de cuivre (II) pour atteindre l'équilibre chimique correspondant à l'équation-bilan (47). Quelle est alors la pression  $P$  dans le réacteur ? Calculer l'affinité chimique du système (que l'on notera  $\mathcal{A}_i$ ).
2. On impose alors brutalement une pression  $P'$  différente de  $P$ , à température  $T = 1\,300 \text{ K}$  constante. Exprimer littéralement l'affinité chimique (que l'on notera  $\mathcal{A}_2$ ) du système juste après cette variation de pression, avant que le système chimique n'ait eu le temps d'évoluer, en fonction des données utiles.
3. La pression  $P'$  est toujours imposée et on laisse le système évoluer. Quel est l'état final du système, en fonction de  $P'$  ?

On considère, dans cette question, un réacteur thermostaté à  $T = 1\,300 \text{ K}$ , de volume  $V$ , initialement vide de tout gaz, dans lequel on introduit une quantité  $n$  d'oxyde de cuivre (II)  $\text{CuO}_{(\text{sol})}$ .

4. On prend ici  $V = 10,0 \text{ dm}^3$ .
  - (a) En admettant que l'équilibre chimique correspondant à l'équilibre (47) soit atteint, quelle est la quantité de dioxygène formé ?
  - (b) En déduire la valeur  $n_{\min}$  de  $n$  pour atteindre l'équilibre chimique.
5. On prend ici  $V = 10,0 \text{ dm}^3$  et  $n = 5,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$ .
  - (a) L'équilibre chimique est-il atteint ? Décrire le système final (quantités de matière et pression).
  - (b) On ajoute au système précédent  $n' = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$  d'oxyde de cuivre (I). Déterminer le nouvel état du système.
  - (c) Même question en ajoutant au système de la question (a)  $n' = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$  de dioxygène.

### ● 208 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

30 min.

Changements d'état

MP-PC-PSI-PT

1. Soit un système thermodynamique de température  $T$  et de pression  $P$ . Rappeler la définition de son enthalpie libre  $G$  ainsi que l'expression des dérivées partielles  $\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_P$  et  $\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T$ .
2. Le système évolue de manière spontanée, sans échanger d'autre travail que celui des forces de pression. Sa température et sa pression restent égales à celles  $(T_0, P_0)$  du milieu extérieur. Montrer que  $G$  ne peut que diminuer.
3. On considère une masse  $m$  d'un corps pur en équilibre sous deux phases (1) et (2) (non miscibles) ayant respectivement les masses  $m_1$  et  $m_2$ , pour volumes massiques  $u_1, u_2$  et pour enthalpies libres massiques  $g_1(T, P)$  et  $g_2(T, P)$ .
  - (a) Exprimer son enthalpie libre  $G$  en fonction de  $m_1, m_2, g_1$  et  $g_2$ .

- (b) Montrer que pour  $T$  et  $P$  donnés, l'équilibre entre les deux phases est établi lorsque :

$$g_1(T, P) = g_2(T, P)$$

4. Rappeler la relation entre la chaleur latente massique  $\ell_{12}$  de la transformation (1)  $\rightarrow$  (2), la température d'équilibre  $T$  et les entropies massiques  $s_1$  et  $s_2$  de chaque phase.
5. En envisageant l'équilibre entre les deux phases à deux températures très proches, démontrer la relation de Clapeyron :

$$\ell_{12} = T \times (u_2 - u_1) \times \frac{dP}{dT}$$

où  $P$  et  $T$  désignent les pression et température assurant l'équilibre des deux phases.

6. On donne les coordonnées du point triple de l'eau :  $(T_t, P_t)$ , la chaleur latente de vaporisation de l'eau :  $\ell_v = a - bT$  ( $a$  et  $b$  sont deux constantes réelles), la chaleur latente de fusion :  $\ell_f = \text{cte}$ , la masse molaire de l'eau  $M$  et la constante molaire des gaz parfaits :  $R$ .
- (a) Au point triple, exprimer la chaleur latente de sublimation  $\ell_s$  en fonction de  $\ell_f$  et  $\ell_v$ .
- (b) En utilisant la relation de Clapeyron justifier qu'au voisinage du point triple, la pente de la courbe  $P(T)$  relative à la sublimation est supérieure à celle de vaporisation.
- (c) On assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait. Déterminer l'équation de la courbe du diagramme correspondant à la vaporisation, sous la forme  $P = f(T)$ .

● **209** ————— **Concours Commun Polytechnique**

10 min.

MP-PC

Mélanges binaires

On met, dans une enceinte initialement vide, à température  $T$  fixée et sous la pression  $P = 2,5$  bar, un mélange de deux corps miscibles A et B, tel qu'à l'équilibre on ait 10 moles de vapeur et 5 moles de liquide.

On donne les pressions de vapeurs saturantes à la température  $T$  :

$$P_A^* = 2 \text{ bar et } P_B^* = 3 \text{ bar}$$

- Donner la composition de la phase liquide et de la phase vapeur.
- On augmente peu à peu le volume en maintenant la température constante. À quelle pression la dernière goutte de liquide disparaît-elle ? Donner alors la composition de la phase liquide.

● **210** ————— **Concours Centrale**

15 min.

MP-PC

Diagrammes binaires

On suppose connues les grandeurs suivantes :

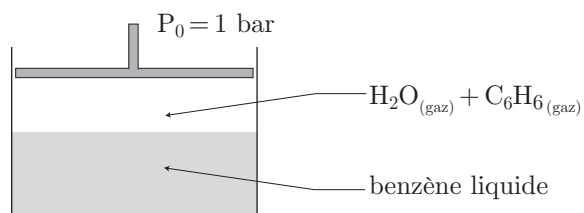
- la chaleur latente de vaporisation du benzène :  $L_{\text{vap}}^{(b)}$  ;

- la chaleur latente de vaporisation de l'eau :  $L_{\text{vap}}^{(e)}$  ;
- la température d'ébullition du benzène sous  $P_1 = 1 \text{ bar}$  :  $T_b^*$  ;
- la température d'ébullition de l'eau, sous  $P_0 = 1 \text{ bar}$  :  $T_e^*$  ;
- la constante molaire des gaz parfaits :  $R$ .

On travaillera dans le cadre des approximations d'Ellingham.

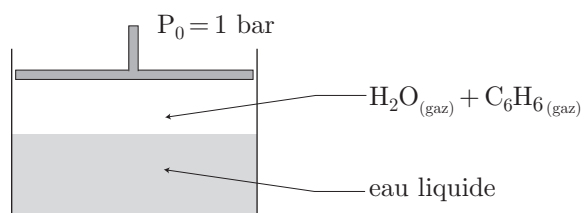
Donner l'expression de la température des systèmes suivants, en équilibre :

1. **Système 1**



La fraction molaire  $x_b$  du benzène, dans la phase gazeuse, est supposée connue.

2. **Système 2**



La fraction molaire  $x'_b$  du benzène, dans la phase gazeuse, est supposée connue.

On rappelle que l'eau et le benzène sont non miscibles.

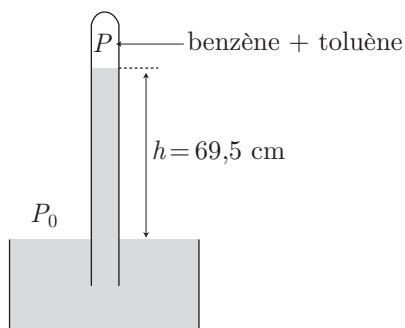
● **211** ————— **Concours Commun Polytechnique**

15 min.  
MP-PC

*Diagrammes binaires*

Le système benzène-toluène peut être considéré comme idéal à 20°C. Dans un laboratoire, où la température vaut 20°C et la pression  $P_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ , un tube contenant un mélange benzène-toluène de titre molaire 0,6 en benzène est renversé sur une cuve profonde.

À l'équilibre, la hauteur du mercure dans le tube vaut  $h = 69,5 \text{ cm}$ .



**ÉNONCÉS**

1. Dans quel état est le mélange benzène-toluène ?
2. Comment faut-il modifier le dispositif expérimental pour obtenir le début de l'ébullition ?
3. Quelle sera alors la composition de la première bulle de vapeur émise ?
4. Comment faut-il déplacer le tube pour que disparaisse la dernière goutte de liquide ?
5. Quelle sera alors la composition de cette dernière goutte de liquide ?

Données numériques :

- pression de vapeur saturante pour le benzène, à 20°C :  $P_A^* = 9\,930$  Pa ;
- pression de vapeur saturante pour le toluène, à 20°C :  $P_B^* = 2\,932$  Pa ;
- masse volumique du mercure :  $\mu = 13,6 \cdot 10^3$  kg · m<sup>-3</sup> ;
- intensité de la pesanteur :  $g = 9,81$  m · s<sup>-2</sup>.

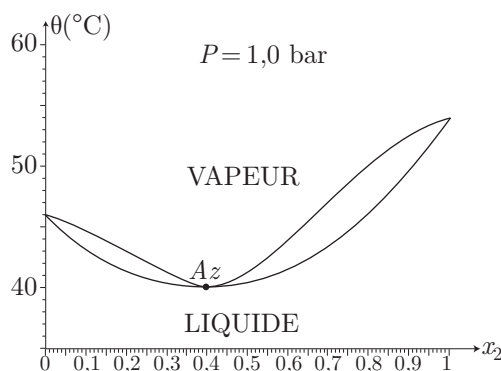
## ● 212 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

20 min.

MP-PC

Diagrammes binaires

Le diagramme isobare du mélange binaire formé par le sulfure de carbone (noté 1) et par le méthanoate d'éthyle (noté 2) est donné sur le document ci-dessous ; la composition est exprimée en fraction molaire de méthanoate d'éthyle.



1. Indiquer lequel de ces constituants a la pression de vapeur saturante la plus élevée.
2. Préciser les coordonnées du point Az et les propriétés que présente le mélange de composition  $x_{2\,Az}$ .
3. Tracer les courbes de refroidissement des mélange gazeux de composition :

$$x_2^{(v)} = 0 \quad x_2^{(v)} = 0,20 \quad x_2^{(v)} = x_{2\,Az} \quad x_2^{(v)} = 0,70 \quad x_2^{(v)} = 1,0$$

4. Indiquer les compositions du distillat et du résidu obtenus lors de la distillation fractionnée d'un mélange lorsque, initialement :

(a)  $x_2^{(\ell)} = 0,10$  ;

(b)  $x_2^{(\ell)} = 0,70$ .

## ● 213 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

MP-PC

### Diagrammes binaires

L'essence de térébenthine est constituée de pinène ( $C_{10}H_{16}$ ) et de produits lourds moins volatiles dont on négligera l'effet dans cet exercice.

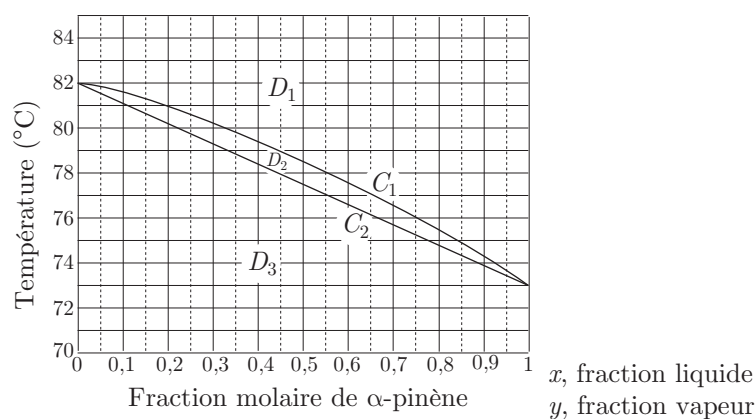
Le pinène, selon la température  $T$  (en Kelvins), présente une tension de vapeur saturante  $P$  (en hPa) donnée par la relation :

$$\ln P = 16,0481 - \frac{3\,326,67}{T - 64,97}$$

De même, la tension de vapeur de l'eau est donnée par la relation :

$$\ln P = 20,809 - \frac{5\,176,44}{T}$$

1. Est-il dangereux de travailler (peinture d'un tableau) dans un local où l'essence de térébenthine est à l'air libre, à la température  $T = 298$  K ? La limite à ne pas dépasser est de  $5 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$ . On assimile la vapeur saturante à un gaz parfait. Quelle solution envisagez-vous ?
2. Dans quel domaine de température doit-on travailler pour éviter tout danger ?
3. Le pinène obtenu après entraînement est composé d'un mélange de deux isomères : l' $\alpha$ -pinène et le  $\beta$ -pinène, de formule  $C_{10}H_{16}$ . Le diagramme ci-dessous, isobare, tracé à la pression de 73 hPa, présente l'évolution de la température en fonction de la composition molaire en  $\alpha$ -pinène pour un mélange des deux isomères.



- (a) Quelle est la température d'ébullition  $t_\alpha$  de l' $\alpha$ -pinène pur et celle,  $t_\beta$ , du  $\beta$ -pinène pur ?
- (b) On considère un mélange de 280 g d' $\alpha$ -pinène et 720 g de  $\beta$ -pinène. Sous quelle forme se trouve ce mélange si on le porte à des températures successives de  $t = 76^\circ\text{C}$ ,  $t = 80^\circ\text{C}$ , et  $t = 83^\circ\text{C}$  ? Préciser les domaines d'existence des différentes phases  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ . Quel est le nom des courbes  $C_1$  et  $C_2$  des courbes figurant sur le diagramme ci-dessus ?
- (c) Lors d'une distillation du mélange précédent, à quelle température  $t_{\text{eb}}$  observe-t-on l'apparition de la première bulle de vapeur ?

Les premières gouttes de liquide ainsi recueillies sont-elles plus riches en  $\alpha$ -pinène ou en  $\beta$ -pinène ? Quelle est leur composition en fraction molaire ?

Données numériques :

- masses molaires atomiques :  $M_H = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $M_C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

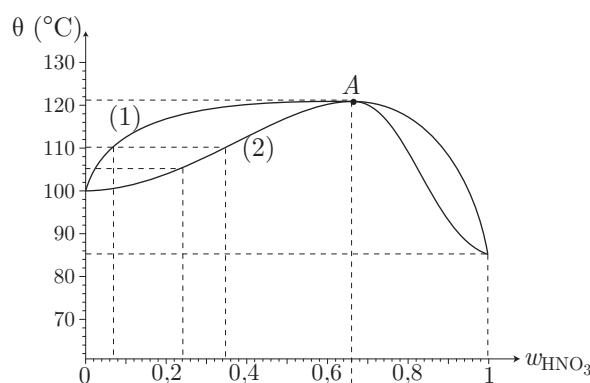
## ● 214 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

25 min.

MP-PC

Diagrammes binaires

Le diagramme binaire isobare de l'eau et de l'acide nitrique est donné par le document ci-dessous, la composition étant exprimée en fraction massique.



1. Préciser le nom donné au point A, à la courbe (1) et à la courbe (2).
2. Déterminer les coordonnées de A. Calculer la fraction molaire de l'acide nitrique en ce point.
3. L'analyse d'un échantillon du mélange obtenu lors de la préparation industrielle de l'acide nitrique donne :
  - quantité totale d'eau et d'acide nitrique :  $n = 4,00$  moles ;
  - quantité totale d'acide nitrique :  $n_{\text{HNO}_3} = 0,30$  mole.

Déterminer la température à laquelle ce mélange commence à bouillir.

4. On porte à  $\theta' = 110^\circ\text{C}$  l'échantillon analysé ci-dessus. Calculer la masse et la composition de chacune des phases alors en équilibre.

Donnée : masses molaires :  $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $M_{\text{HNO}_3} = 63 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

## ● 215 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

30 min.

MP-PC

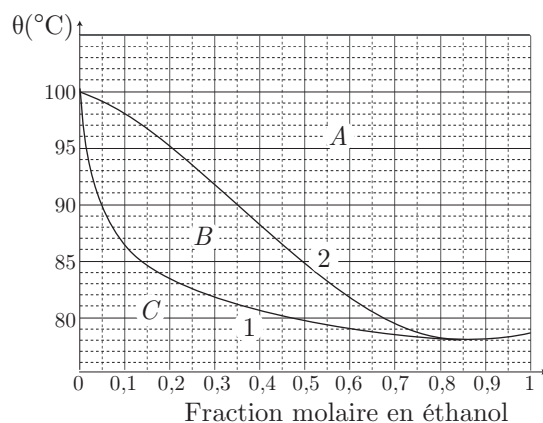
Diagrammes binaires

En première approximation, le vin peut être considéré comme un mélange binaire eau-éthanol. Nous étudions ici l'équilibre liquide-vapeur de ce système binaire. Les fractions molaires respectives de l'eau et de l'éthanol en phase liquide sont notées  $x_e$  et  $x_{ol}$ . En phase gazeuse, ces fractions molaires sont notées  $y_e$  et  $y_{ol}$ .



### I- Diagramme binaire eau-éthanol

La figure suivante montre le diagramme expérimental (à la pression  $P = 1$  bar) du système binaire eau-éthanol avec, en abscisse, la fraction molaire en éthanol et en ordonnée la température  $\theta$  en degrés Celsius.



- Préciser la signification des courbes (1) et (2) du diagramme, ainsi que celles des domaines A, B, C qu'elles délimitent
- On considère une mole d'un mélange de fraction molaire  $x_{ol} = 0,2$ , initialement à  $20^\circ\text{C}$ , que l'on chauffe sous une pression constante de 1 bar.
  - À quelle température  $\theta_{\text{éb}}$ , exprimée en degrés Celsius, l'ébullition commence-t-elle et quelle est la fraction molaire en alcool de la première bulle de vapeur ?
  - À quelle température  $\theta_{\text{év}}$  la dernière goutte de liquide s'évapore-t-elle et quelle est la fraction molaire en alcool dans cette dernière goutte ?
- On place, à  $90^\circ\text{C}$ , le même mélange que précédemment. Il y a  $n_0 = 1$  mole en tout. À l'aide du diagramme, déterminer numériquement :
  - les fractions molaires  $x_{ol}$ ,  $y_{ol}$ ,  $x_e$ ,  $y_e$  en éthanol et en eau dans les deux phases ;
  - les quantités (en moles) de liquide et de gaz en présence, en expliquant la méthode employée ;
  - les quantités (en moles) d'éthanol dans la phase gazeuse et dans la phase liquide (notées  $n_{ol,g}$  et  $n_{ol,\ell}$ , ainsi que les quantités d'eau dans la phase gazeuse et dans la phase liquide (notées  $n_{e,g}$  et  $n_{e,\ell}$ ).
  - le volume total de la phase gazeuse (considérée comme un gaz parfait).

### II- Comparaison avec un modèle idéal

On souhaite comparer le diagramme expérimental avec celui que l'on obtiendrait si le mélange éthanol-eau était idéal.

- À la température  $T$  et à la pression  $P$ , on note :
  - $\mu_{e,\ell}^*(T, P)$  et  $\mu_{ol,\ell}^*(T, P)$  les potentiels chimiques respectifs de l'eau et de l'éthanol liquides purs ;
  - $\mu_{e,g}^*(T, P)$  et  $\mu_{ol,g}^*(T, P)$  les potentiels chimiques de l'eau et de l'éthanol gazeux purs ;

- $T_e^*$  et  $T_{ol}^*$  les températures d'ébullition de l'eau et de l'alcool purs à la pression de travail ( $P = 1 \text{ bar}$ );
- $L_{v,e}^*$  et  $L_{v,ol}^*$  les enthalpies molaires (aussi appelées chaleurs latentes molaires) de vaporisation de l'eau et de l'alcool purs (supposés indépendants de la température).

- (a) Quelle relation existe-t-il entre  $\left(\frac{\partial \mu_{e,\ell}^*}{\partial T}\right)_P$  et l'entropie molaire de l'eau pure liquide,  $S_{m,e,\ell}^*$  ?
- (b) Que peut-on dire des potentiels chimiques  $\mu_{e,\ell}^*(T_e^*, P)$  et  $\mu_{e,g}^*(T_e^*, P)$  ?
- (c) On suppose que, dans les phases liquide et vapeur, l'entropie molaire de l'eau pure est indépendante de la température.

Montrer que l'on a alors, pour l'eau :

$$\mu_{e,\ell}^*(T, P) - \mu_{e,g}^*(T, P) = (S_{m,e,g}^* - S_{m,e,\ell}^*) \times (T - T_e^*)$$

où  $S_{m,e,g}^*$  est l'entropie molaire de l'eau pure gazeuse.

- (d) En déduire l'expression de  $\mu_{e,\ell}^*(T, P) - \mu_{e,g}^*(T, P)$  en fonction de  $L_{v,e}^*$ ,  $T$  et  $T_e^*$ .
- (e) Écrire une relation analogue pour l'éthanol (dans les mêmes hypothèses).

On suppose les mélanges idéaux, de telle sorte que dans les deux phases on peut écrire :

$$\begin{cases} \mu_{e,\ell}(T, P) = \mu_{e,\ell}^*(T, P) + RT \ln x_e \\ \mu_{e,g}(T, P) = \mu_{e,g}^*(T, P) + RT \ln y_e \end{cases}$$

ainsi que deux relations analogues pour l'éthanol.

- (f) Démontrer la relation :

$$RT \ln \left(\frac{x_e}{y_e}\right) = -\frac{L_{v,e}^*}{T_e^*} \times (T - T_e^*)$$

ainsi qu'une relation analogue pour l'éthanol.

2. On introduit les quantités :

$$A_{ol}(T) = \exp \left[ -\frac{L_{v,ol}^*}{RT_{ol}^*} \left( 1 - \frac{T_{ol}^*}{T} \right) \right] \text{ et } A_e(T) = \exp \left[ -\frac{L_{v,e}^*}{RT_e^*} \left( 1 - \frac{T_e^*}{T} \right) \right]$$

- (a) Exprimer  $x_{ol}$  et  $y_{ol}$  en fonction de  $A_{ol}(T)$  et  $A_e(T)$ .
- (b) Déterminer numériquement les valeurs de  $x_{ol}$  et  $y_{ol}$  à  $\theta = 90^\circ\text{C}$ . Comparer aux résultats expérimentaux déduits de la figure ci-dessus. Le mélange se comporte-t-il comme un mélange idéal ?

### III- Mélanges riches en alcool

1. Une analyse précise montre que les courbes (1) et (2) de la figure ci-dessus possèdent un *minimum* commun pour la fraction molaire  $x_{ol,a}$ , à la température  $\theta_a = 78,1^\circ\text{C}$ . Pour les fractions molaires en éthanol plus élevées, les deux courbes sont si proches qu'elles sont confondues expérimentalement.

- (a) Comment s'appelle le point *minimum* commun des deux courbes (1) et (2) ?

- (b) Quelles sont les conséquences pratiques de l'existence de ce *minimum* sur la distillation des mélanges eau-éthanol ?
2. On chauffe progressivement un mélange eau-éthanol de fraction molaire  $x_{ol}$ , initialement à la température de 20°C, en enregistrant la température.
- (a) Représenter qualitativement la courbe donnant l'évolution de la température en fonction du temps, en faisant apparaître clairement les domaines monophasés et biphasés, si  $x_{ol} = 0,6$ .
- (b) Faire de même si  $x_{ol} = 0,895$ .

Données numériques :

- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- Enthalpie molaire de vaporisation de l'eau pure :  $L_{v,e}^* = 45 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- Enthalpie molaire de vaporisation de l'éthanol pur :  $L_{v,ol}^* = 43 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- Température d'ébullition de l'eau pure sous 1 bar :  $T_e^* = 373 \text{ K}$  ;
- Température d'ébullition de l'éthanol pur sous 1 bar :  $T_{ol}^* = 353 \text{ K}$ .

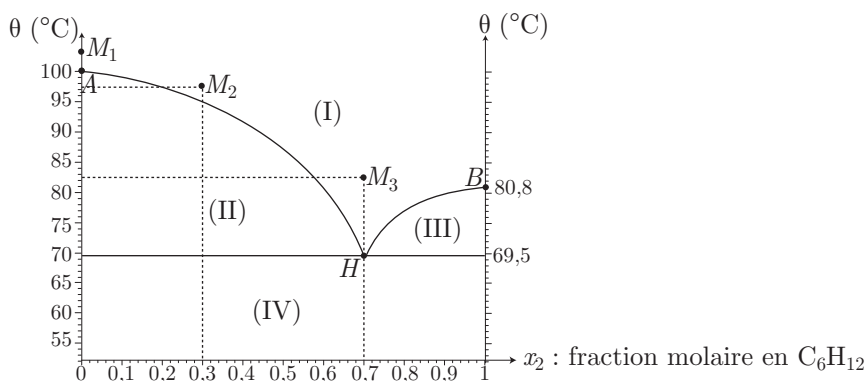
## ● 216 ————— Concours de l'Agrégation interne

30 min.

MP-PC

Diagrammes binaires

Le diagramme binaire isobare simplifié de l'équilibre liquide-vapeur, pour le système eau-cyclohexane, est donné sur le schéma suivant. On note  $B_1$  l'eau et  $B_2$  le cyclohexane.



1. (a) Quel est le nom de la courbe constituée des branches  $AH$  et  $HB$  ?
- (b) Comment appelle-t-on le point  $H$  sur le diagramme ?
- (c) Tracer l'allure des courbes d'analyse thermique par refroidissement, jusqu'à 60°C, des systèmes physicochimiques représentés par les points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .
- (d) Sous quel(s) état(s) physique(s) se trouve un mélange de fraction molaire globale en cyclohexane  $x_2 = 0,30$  à 80°C ? Quelle est la composition des phases en présence ?
2. On considère, à  $T$  et  $P$ , l'équilibre liquide-vapeur pour le constituant cyclohexane dans le domaine (III).

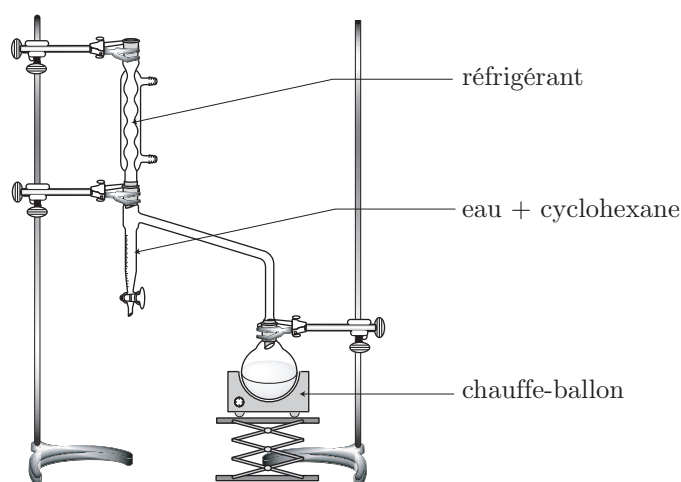
ÉNONCÉS

- (a) Définir le potentiel chimique  $\mu_i$  pour une espèce ( $i$ ) et établir une relation entre  $\mu_i$ , l'enthalpie molaire partielle  $h_i$  et l'entropie molaire partielle  $s_i$  du constituant ( $i$ ).
- (b) Exprimer le potentiel chimique du cyclohexane,  $\mu_{2v}(T, P)$  dans la phase vapeur, supposée parfaite, en fonction de  $\mu_{2v}^*(T, P)$ , potentiel chimique du cyclohexane gaz parfait sous la pression  $P$  et à la température  $T$  et de  $x_{2v}$ , fraction molaire du cyclohexane dans la vapeur.
- (c) Exprimer la condition d'équilibre entre les différentes phases pour le cyclohexane.
- (d) Retrouver, pour une température  $T$  comprise entre 342,5 K et 353,8 K, moyennant des approximations que l'on précisera, l'expression donnant l'évolution de la fraction molaire en cyclohexane dans la phase vapeur,  $x_{2v}$ , en fonction de la température :

$$\ln(x_{2v}) = \frac{\Delta_{\text{vap}}H_2^0}{R} \times \left( \frac{1}{T_2^*} - \frac{1}{T} \right)$$

avec  $T$  en Kelvin et où  $\Delta_{\text{vap}}H_2^0$  représente l'enthalpie *standard* de vaporisation du cyclohexane et  $T_2^*$  la température d'ébullition du cyclohexane pur, sous  $P_0 = 1$  bar.

- (e) Évaluer, à l'aide du diagramme fourni, l'enthalpie *standard* de vaporisation du cyclohexane.
3. On introduit, dans un réacteur, 0,40 mole d'acide éthanoïque, 0,40 mole de pentan-1-ol, en présence d'acide paratoluène sulfonique et un volume  $V$  de cyclohexane, sous  $P_0 = 1$  bar. Un entraînement à la vapeur du mélange réactionnel est réalisé. On supposera que l'acide éthanoïque, l'alcool et l'ester restent dans le ballon.
- (a) Proposer le schéma d'un montage utilisé pour l'entraînement à la vapeur.
- (b) Calculer le volume  $V$  minimal de cyclohexane à introduire pour éliminer toute l'eau susceptible de se former.
- (c) Préciser, à partir du diagramme, comment évolue la composition du ballon et celle du distillat lors de l'entraînement à la vapeur. Quels intérêts présente une telle expérience ?
- (d) Le montage schématisé ci-dessous, montage à reflux équipé d'un décanteur Dean-Stark, peut être proposé afin d'atteindre le même objectif que dans l'expérience précédente. Expliquer son fonctionnement.



Données :

- constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- masse volumique de l'eau :  $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  à 298 K ;
- densité du cyclohexane par rapport à l'eau :  $d = 0,779$  ;
- masse molaire du cyclohexane :  $M = 84,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

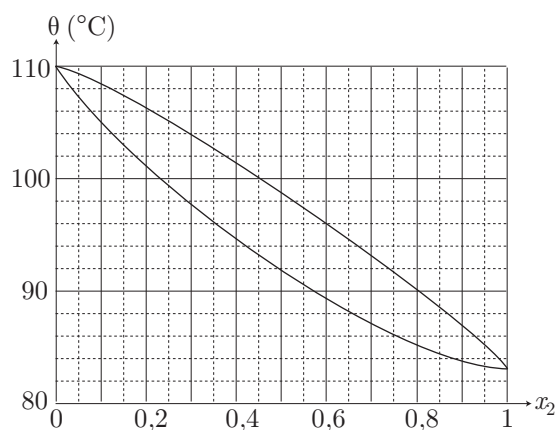
● **217** ————— **Lycée Pissarro, Pontoise**

30 min.

MP-PC

Diagrammes binaires

Le diagramme isobare (à la pression de 0,1 bar) du mélange binaire formé par le propan-2-ol ( $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$ , noté 1) et du 2-méthylpropan-1-ol ( $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$ , noté 2) est donné sur le graphe ci-dessous ; la composition est exprimée en fraction molaire.



1. Déterminer les températures d'ébullition de ces deux alcools ; identifier la courbe d'ébullition et la courbe de rosée.
2. On chauffe, sous 0,1 bar, un mélange (A) contenant 1,5 mole de propan-2-ol et 3,5 moles de 2-méthylpropan-1-ol. Déterminer :

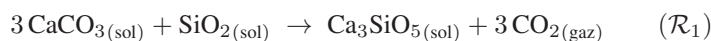
- (a) la température à laquelle commence l'ébullition et la composition de la première bulle de vapeur qui se forme ;
  - (b) la température à laquelle se termine l'ébullition et la composition de la dernière goutte de liquide qui disparaît ;
  - (c) les quantités de vapeur et de liquide à 100°C et la composition de chacune des phases.
  - (d) les quantités de vapeur et de liquide en équilibre à 90°C et la composition de chacune des phases.
3. Déterminer la température à laquelle commence l'ébullition et la composition de la première bulle de vapeur qui se forme lorsqu'un mélange de composition  $w_2 = 0,4$  (en fraction massique) est chauffé.
  4. On réalise la distillation fractionnée d'un mélange  $B$  équimassique de ces deux alcools. Déterminer la fraction molaire du propan-2-ol dans ce mélange et la température d'ébullition commençante.

Données : masses molaires atomiques :

$$M_{\text{H}} = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_{\text{C}} = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_{\text{O}} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

## ● 191 ————— Concours Commun Polytechnique

1. (a) L'enthalpie *standard*  $\Delta_r H_1^0$  de la réaction ( $\mathcal{R}_1$ ), à  $T_0 = 298 \text{ K}$  :



s'obtient à partir des enthalpies *standard* de formation de chacune des espèces qui interviennent dans cette équation :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^0(T_0) &= \Delta_f H^0(\text{Ca}_3\text{SiO}_5) + 3 \Delta_f H^0(\text{CO}_2) \\ &\quad - 3 \Delta_f H^0(\text{CaCO}_3) - \Delta_f H^0(\text{SiO}_2) \\ &= -2930 - 3 \times 393 + 3 \times 1206 + 910 \\ &\Rightarrow \Delta_r H_1^0(T_0) = 419 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

- (b) En vertu de la loi de Kirchhoff, la variation de  $\Delta_r H_1^0(T)$  avec la température  $T$  dépend de la grandeur :

$$\Delta_r C_p^0 = C_p^0(\text{Ca}_3\text{SiO}_5) + 3 C_p^0(\text{CO}_2) - 3 C_p^0(\text{CaCO}_3) - C_p^0(\text{SiO}_2)$$

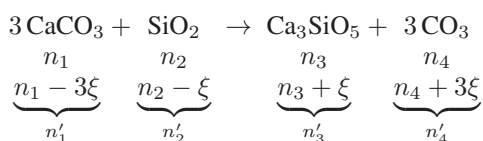
que l'on peut supposer indépendante de  $T$ , de sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_r H_1^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 &\Rightarrow \int_{\Delta_r H_1^0(T_0)}^{\Delta_r H_1^0(T)} d(\Delta_r H_1^0) = \Delta_r C_p^0 \int_{T_0}^T dT \\ &\Rightarrow \Delta_r H_1^0(T) = \Delta_r H_1^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times (T - T_0) \end{aligned}$$

Dans l'intervalle de température [ $T_0 = 298 \text{ K}$ ,  $T = 1700 \text{ K}$ ],  $\Delta_r H_1^0$  peut être considéré comme indépendant de la température si l'on peut poser :

$$\begin{aligned} |\Delta_r C_p^0| \times (T - T_0) \ll |\Delta_r H_1^0(T_0)| &\Rightarrow |\Delta_r C_p^0| \ll \frac{|\Delta_r H_1^0(T_0)|}{T - T_0} \\ &\Rightarrow |\Delta_r C_p^0| \ll \frac{419 \cdot 10^3}{1700 - 298} \\ &\Rightarrow |\Delta_r C_p^0| \ll 299 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

2. (a) Soient  $n_i$  les quantités de matière (nombre de moles) de chaque espèce et soit  $\xi$  l'avancement de la réaction ( $\mathcal{R}_1$ ) :



La masse molaire de  $\text{CaCO}_3$  valant :

$$M_1 = M_{\text{Ca}} + M_{\text{C}} + 3 M_{\text{O}} = 40 + 12 + 3 \times 16 = 100 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

une tonne ( $m_1 = 10^6 \text{ g}$ ) de  $\text{CaCO}_3$  représente une quantité de matière :

$$\Delta n_1 = \frac{m_1}{M_1} = \frac{10^6}{100} = 10^4 \text{ moles}$$

Ce faisant, lorsqu'une tonne de  $\text{CaCO}_3$  a réagi, il reste dans le milieu réactionnel :

$$\begin{aligned} n'_1 &= n_1 - \Delta n_1 = 10^4 \text{ moles de } \text{CaCO}_3 \\ \Rightarrow n_1 - 3\xi &= n_1 - 10^4 \Rightarrow \xi = \frac{10^4}{3} \text{ moles} \end{aligned}$$

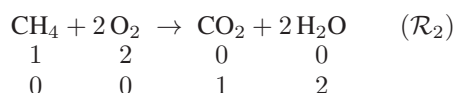
Aussi, en considérant que  $\Delta_r H_1^0$  ne dépend pas de la température, la chaleur à fournir pour transformer une tonne de  $\text{CaCO}_3$  vaut :

$$Q_p = \xi \times \Delta_r H_1^0 = \frac{10^4}{3} \times \Delta_r H_1^0$$

- (b) La valeur numérique de  $\Delta_r H_1^0$  pouvant s'identifier à celle,  $\Delta_r H^0(T_0)$ , trouvée à la question 1.(a), il s'ensuit que :

$$Q_p = \frac{10^4}{3} \times 419.10^3 = 1,4.10^9 \text{ J}$$

3. (a) La combustion d'une mole de  $\text{CH}_4$ , dans les conditions stœchiométriques, a pour bilan :



À l'issue de cette réaction (les 8 moles de  $\text{N}_{2(\text{gaz})}$  n'ayant pas réagi), il reste donc dans le milieu réactionnel :

1 mole de  $\text{CO}_{2(\text{gaz})}$

2 moles de  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$

8 moles de  $\text{N}_{2(\text{gaz})}$

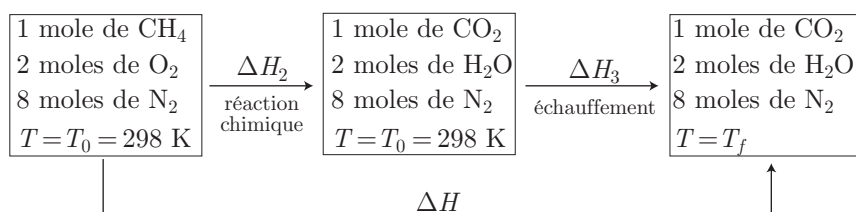
Ainsi, la capacité thermique du milieu réactionnel, en fin de réaction, a pour valeur :

$$\begin{aligned} C_p^0 &= C_p^0(\text{CO}_2) + 2 C_p^0(\text{H}_2\text{O}) + 8 C_p^0(\text{N}_2) \\ &= 37,1 + 2 \times 33,6 + 8 \times 29,1 = 337,1 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

- (b) Décomposons la combustion en deux étapes :

- Réaction chimique à la température  $T_0 = 298 \text{ K}$  constante, au cours de laquelle  $\xi_2 = 1$  mole de  $\text{CH}_4$  est consommée. L'enthalpie du milieu réactionnel varie de la quantité :  $\Delta H_2 = \xi_2 \times \Delta_r H_2^0$ .
- Variation de la température :  $\Delta T = T_f - T_0$  des produits et réactifs en excès de cette réaction. L'enthalpie du milieu varie alors de la quantité  $\Delta H_3 = C_p^0 \times \Delta T$ .





La transformation globale (réaction chimique et variation de température) du milieu s'accompagne donc d'une variation  $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$  de son enthalpie. Or, la transformation étant isobare,  $\Delta H$  s'identifie à la quantité de chaleur reçue par le système, laquelle quantité est d'ailleurs nulle compte tenu des hypothèses posées par l'énoncé. C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} \Delta H = 0 &\Rightarrow \Delta H_2 + \Delta H_3 = 0 \Rightarrow \xi_2 \times \Delta_r H_2^0 + C_p^0 \times (T_f - T_0) = 0 \\ &\Rightarrow T_f = T_0 - \frac{\xi_2 \times \Delta_r H_3^0}{C_p^0} = 298 + \frac{1 \times 830.10^3}{337,1} \\ &\Rightarrow T_f = 2760 \text{ K} \end{aligned}$$

- (c) La combustion de  $n_{\text{CH}_4}$  moles de méthane produit donc  $n_{\text{CH}_4}$  moles de CO<sub>2</sub>,  $2n_{\text{CH}_4}$  moles de H<sub>2</sub>O (auxquelles s'ajoutent  $8n_{\text{CH}_4}$  moles de N<sub>2</sub> provenant de l'air), c'est-à-dire un système de capacité thermique  $n_{\text{CH}_4} \times C_p^0$ . Lorsque la température du tel système passe de  $T_f = 2760 \text{ K}$  à  $T = 1700 \text{ K}$  de manière isobare, ce système reçoit la quantité de chaleur :

$$Q_{\text{reçue}} = n_{\text{CH}_4} C_p^0 \times (T - T_f)$$

et peut donc céder la quantité de chaleur :

$$Q_{\text{cédée}} = -n_{\text{CH}_4} C_p^0 \times (T - T_f) = n_{\text{CH}_4} C_p^0 \times (T_f - T)$$

Cette quantité de chaleur doit permettre le déroulement de la réaction ( $\mathcal{R}_1$ ), qui consomme la quantité de chaleur  $Q_p$ , ce qui signifie encore que :

$$Q_{\text{cédée}} = Q_p \Rightarrow n_{\text{CH}_4} C_p^0 \times (T_f - T) = Q_p \Rightarrow n_{\text{CH}_4} = \frac{Q_p}{C_p^0 \times (T_f - T)}$$

Or, la masse molaire du méthane valant :

$$M_{\text{CH}_4} = M_{\text{C}} + 4 M_{\text{H}} = 12 + 4 \times 1 = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 16.10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

il s'ensuit que  $n_{\text{CH}_4}$  moles de CH<sub>4</sub> présentent une masse :

$$m_{\text{CH}_4} = n_{\text{CH}_4} \times M_{\text{CH}_4} \Rightarrow m_{\text{CH}_4} = \frac{Q_p \times M_{\text{CH}_4}}{C_p^0 \times (T_f - T)}$$

c'est-à-dire :

$$m_{\text{CH}_4} = \frac{1,4.10^9 \times 16.10^{-3}}{337,1 \times (2760 - 1700)} \Rightarrow m_{\text{CH}_4} = 62,7 \text{ kg de CH}_4$$

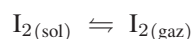
● 192 Lycée Saint-Louis, Paris

1. À la température  $T_0 = 298 \text{ K}$  :

- le dioxygène gazeux est dans son état de référence, en raison de quoi on pose, par convention :

$$\Delta_f H^0 [\text{O}_{2(\text{gaz})}] = 0$$

- La réaction de formation de  $\text{I}_{2(\text{gaz})}$  à partir de corps purs ( $\text{I}_2$ ) dans leur état de référence (à  $T_0$ , la forme stable de  $\text{I}_2$  est solide) s'écrit :



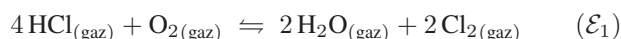
Cette réaction étant, par définition, celle de sublimation de  $\text{I}_2$ , dont l'enthalpie *standard*  $\Delta_{\text{sub}} H^0$  est positive, il s'ensuit que :

$$\Delta_f H^0 [\text{I}_{2(\text{gaz})}] = \Delta_{\text{fus}} H^0 (\text{I}_2) > 0$$

- $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$  n'est pas un corps simple (deux éléments – oxygène et hydrogène – composent la molécule), en conséquence de quoi :

$$\Delta_f H^0 [\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}] \neq 0$$

2. (a) L'enthalpie *standard*  $\Delta_r H_1^0(T_0)$  de la réaction d'équation :



se calcule à partir des enthalpies *standard* de formation des espèces impliquées dans cette équation, à la même température  $T_0 = 298 \text{ K}$  :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^0(T_0) &= 2 \Delta_f H^0 [\text{Cl}_{2(\text{gaz})}] + 2 \Delta_f H^0 [\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}] \\ &\quad - 4 \Delta_f H^0 [\text{HCl}_{(\text{gaz})}] - \Delta_f H^0 [\text{O}_{2(\text{gaz})}] \\ &= -2 \times 241,81 + 4 \times 92,31 \\ &\Rightarrow \Delta_r H_1^0(T_0) = -114,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Le signe négatif de  $\Delta_r H_1^0(T_0)$  révèle qu'à  $298 \text{ K}$  la réaction ( $\mathcal{E}_1$ ) est exothermique.

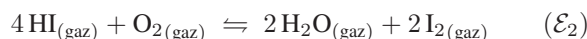
(b) Il en va de même de l'entropie libre *standard*, accessible à partir des entropies molaires *standard*  $S_m^0$  à  $T_0$  :

$$\begin{aligned} \Delta_r S_1^0(T_0) &= 2 S_m^0 [\text{Cl}_{2(\text{gaz})}] + 2 S_m^0 [\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}] - 4 S_m^0 [\text{HCl}_{(\text{gaz})}] - S_m^0 [\text{O}_{2(\text{gaz})}] \\ &= 2 \times 223 + 2 \times 189 - 4 \times 187 - 205 \\ &\Rightarrow \Delta_r S_1^0(T_0) = -129 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Par suite, l'enthalpie libre *standard* vaut, à cette température :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_1^0(T_0) &= \Delta_r H_1^0(T_0) - T_0 \times \Delta_r S_1^0(T_0) = -114,4 \cdot 10^3 + 298 \times 129 \\ &\Rightarrow \Delta_r G_1^0(T_0) = -75,96 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

3. (a) De même, l'enthalpie *standard* de la réaction d'équation :



a pour valeur, à  $T_0 = 298 \text{ K}$  :

$$\begin{aligned}\Delta_r H_2^0(T_0) &= 2 \Delta_f H^0 [\text{I}_2(\text{gaz})] + 2 \Delta_f H^0 [\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})] \\ &\quad - 4 \Delta_f H^0 [\text{HI}(\text{gaz})] - \Delta_f H^0 [\text{O}_2(\text{gaz})] \\ &= 2 \times 62,43 - 2 \times 241,81 - 4 \times 26,36 \\ &\Rightarrow \Delta_r H_2^0(T_0) = -464,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

À nouveau, la valeur négative de  $\Delta_r H_2^0(T_0)$  indique que la réaction ( $\mathcal{E}_2$ ) est exothermique.

(b) Quant à son entropie *standard* :

$$\begin{aligned}\Delta_r S_2^0(T_0) &= 2 S_m^0 [\text{I}_2(\text{gaz})] + 2 S_m^0 [\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})] - 4 S_m^0 [\text{HI}(\text{gaz})] - S_m^0 [\text{O}_2(\text{gaz})] \\ &= 2 \times 261 + 2 \times 189 - 4 \times 206 - 205 \\ &\Rightarrow \Delta_r S_2^0(T_0) = -129 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

elle conduit à la valeur de son enthalpie libre *standard*, à  $T_0 = 298 \text{ K}$  :

$$\begin{aligned}\Delta_r G_2^0(T_0) &= \Delta_r H_2^0(T_0) - T_0 \times \Delta_r S_2^0(T_0) = -464,2 \cdot 10^3 + 298 \times 129 \\ &\Rightarrow \Delta_r G_2^0(T_0) = -425,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

4. Les variations des capacités thermiques molaires, à pression constante, valent par définition :

$$\Delta_r C_{pm1}^0 = 2 C_{pm}^0 [\text{Cl}_2(\text{gaz})] + 2 C_{pm}^0 [\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})] - 4 C_{pm}^0 [\text{HCl}(\text{gaz})] - C_{pm}^0 [\text{O}_2(\text{gaz})]$$

et :

$$\Delta_r C_{pm2}^0 = 2 C_{pm}^0 [\text{I}_2(\text{gaz})] + 2 C_{pm}^0 [\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})] - 4 C_{pm}^0 [\text{HI}(\text{gaz})] - C_{pm}^0 [\text{O}_2(\text{gaz})]$$

c'est-à-dire :

$$\Delta_r C_{pm1}^0 = 2 \times 36,9 + 2 \times 30 - 4 \times 26,5 - 30 \Rightarrow \Delta_r C_{pm1}^0 = -2,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et :

$$\Delta_r C_{pm2}^0 = 2 \times 37,4 + 2 \times 30 - 4 \times 26,3 - 30 \Rightarrow \Delta_r C_{pm2}^0 = 0,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

5. La première loi de Kirchhoff indique comment  $\Delta_r H_1^0(T)$  dépend de la température :

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta_r H_1^0}{dT} = \Delta_r C_{pm1}^0 = -2,2 &\Rightarrow \int_{\Delta_r H_1^0(T_0)}^{\Delta_r H_1^0(T)} d(\Delta_r H_1^0) = -2,2 \int_{T_0}^T dT \\ &\Rightarrow \Delta_r H_1^0(T) = \Delta_r H_1^0(T_0) - 2,2 \times (T - T_0)\end{aligned}$$

soit encore :

$$\Delta_r H_1^0(T) = -114,4 \cdot 10^3 - 2,2 \times (T - 298) = -113,7 \cdot 10^3 - 2,2 \times T$$

tandis que la variation de  $\Delta_r G_1^0$  en fonction de  $T$  peut être décrite par l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \left( \frac{\Delta_r G_1^0}{T} \right) &= -\frac{\Delta_r H_1^0(T)}{T^2} = \frac{113,7 \cdot 10^3}{T^2} + \frac{2,2}{T} \\ \Rightarrow \int_{T_0}^{T_1} d \left( \frac{\Delta_r G_1^0}{T} \right) &= 113,7 \cdot 10^3 \times \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T^2} + 2,2 \times \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} \\ \Rightarrow \frac{\Delta_r G_1^0(T_1)}{T_1} - \frac{\Delta_r G_1^0(T_0)}{T_0} &= 113,7 \cdot 10^3 \times \left( \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1} \right) + 2,2 \times \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) \end{aligned}$$

Notamment, pour  $T_1 = 774 \text{ K}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_r G_1^0(T_1)}{774} &= -\frac{75,96 \cdot 10^3}{298} + 113,7 \cdot 10^3 \times \left( \frac{1}{298} - \frac{1}{774} \right) + 2,2 \times \ln \left( \frac{774}{298} \right) \\ &= -18,16 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Rightarrow \Delta_r G_1^0(T_1) &= -18,16 \times 774 = -14,05 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Si l'on avait négligé la valeur de  $\Delta_r C_{pm1}^0$ , l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H_1^0$  aurait été considérée comme indépendante de  $T$  :

$$\Delta_r H_1^0(T) = \Delta_r H_1^0(T_0) + \Delta_r C_{pm1}^0 \times (T - T_0) \simeq \Delta_r H_1^0(T_0)$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \left( \frac{\Delta_r G_1^0}{T} \right) &= -\frac{\Delta_r H_1^0(T_0)}{T^2} \Rightarrow \int_{T_0}^{T_1} d \left( \frac{\Delta_r G_1^0}{T} \right) = -\Delta_r H_1^0(T_0) \times \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T^2} \\ \Rightarrow \frac{\Delta_r G_1^0(T_1)}{T_1} &= \frac{\Delta_r G_1^0(T_0)}{T_0} + \Delta_r H_1^0(T_0) \times \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0} \right) \end{aligned}$$

soit encore :

$$\Delta_r G_1^0(T_1) = \frac{T_1}{T_0} \times [\Delta_r G_1^0(T_0) - \Delta_r H_1^0(T_0)] + \Delta_r H_1^0(T_0) \quad (48)$$

On aurait ainsi trouvé :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_1^0(T_1) &= \frac{774}{298} \times (-75,96 \cdot 10^3 + 114,4 \cdot 10^3) - 114,4 \cdot 10^3 \\ \Rightarrow \Delta_r G_1^0(T_1) &= -14,56 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Remarque – En rappelant que :

$$\Delta_r G_1^0(T) = \Delta_r H_1^0(T) - T \times \Delta_r S_1^0(T)$$

on pouvait directement calculer  $\Delta_r G_1^0(T)$  en considérant que  $\Delta_r H_1^0$  et  $\Delta_r S_1^0$  sont indépendants de  $T$  et conservent par conséquent les valeurs  $\Delta_r H_1^0(T_0)$  et  $\Delta_r S_1^0(T_0)$  :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_1^0(T_1) &= \Delta_r H_1^0(T_0) - T_1 \times \Delta_r S_1^0(T_0) \\ &= -114,4 \cdot 10^3 + 774 \times 129 = -14,55 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Ce résultat était, du reste, confirmé par la relation (48), dans laquelle :

$$\begin{aligned}\Delta_r G_1^0(T_0) &= \Delta_r H_1^0(T_0) - T_0 \times \Delta_r S_1^0(T_0) \\ \Rightarrow \Delta_r G_1^0(T_0) - \Delta_r H_1^0(T_0) &= -T_0 \times \Delta_r S_1^0(T_0)\end{aligned}$$

ce qui conduisait à :

$$\Delta_r G_1^0(T_1) = \frac{T_1}{T_0} \times [-T_0 \times \Delta_r S_1^0(T_0)] + \Delta_r H_1^0(T_0) = \Delta_r H_1^0(T_0) - T_1 \times \Delta_r S_1^0(T_0)$$

En conclusion, l'erreur relative  $\varepsilon$  commise sur l'évaluation de  $\Delta_r G_1^0(T_1)$  en omettant  $\Delta_r C_{pm1}^0$  :

$$\varepsilon = \frac{14,56 - 14,05}{14,05} = 3,6\%$$

justifie cette omission effectué dans de nombreux calculs, il s'agit de l'approximation d'Ellingham.

## ● 193 ————— Concours Commun Polytechnique

1. La réaction de combustion du méthane s'écrit :



Remarque – Nous supposons ici que l'eau formée se présente sous forme gazeuse. La température atteinte par le milieu réactionnel justifie ce choix, au demeurant suggéré par les valeurs numériques consignées dans l'énoncé, qui ne mentionnent que  $\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})$ .

2. Dans la suite des calculs, les espèces intervenant dans l'équation ( $\mathcal{E}$ ) seront notées  $X_i$  (avec  $i = 1, 2, 3$  ou  $4$ ), de coefficients stœchiométriques algébriques  $\nu_i$  et dont les quantités  $n_i$  varient de  $dn_i = \nu_i d\xi$  lorsque l'avancement  $\xi$  varie de  $d\xi$ .

Si le système de gaz parfaits est idéal, son énergie interne  $U$  dépend des énergies internes molaires  $U_{mi}(T)$  de chacune des espèces  $X_i$ , lesquelles énergies ne dépendent que de la température  $T$  (conformément à la première loi de Joule relative aux gaz parfaits) :

$$\begin{aligned}U = \sum_{i=1}^4 n_i U_{mi}(T) &\Rightarrow dU = \sum_{i=1}^4 dn_i U_{mi}(T) + \sum_{i=1}^4 n_i dU_{mi} \\ &\Rightarrow dU = \sum_{i=1}^4 \nu_i U_{mi}(T) \times d\xi + \sum_{i=1}^4 n_i \frac{dU_{mi}}{dT} \times dT \\ &\Rightarrow dU = \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{T, P} d\xi + \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_{P, \xi} dT\end{aligned}$$

Au cours d'une réaction chimique pendant laquelle  $T$  demeure constant, cette relation devient :

$$dU = \Delta_r U d\xi \text{ car, par définition : } \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{T, P} = \Delta_r U$$

En outre, la bombe calorimétrique confine le système dans un volume  $V = 5.10^{-4} \text{ m}^3$  constant, auquel cas la chaleur reçue par le milieu réactionnel participe intégralement à la variation de son énergie interne :

$$dU = \delta Q - P dV = \delta Q$$

Enfin, la quantité de chaleur  $Q_r$  libérée par la réaction vérifie :

$$\delta Q_r = -\delta Q = -dU \Rightarrow \delta Q_r = -\Delta_r U \times d\xi \Rightarrow Q_r = -\Delta_r U \times \Delta\xi$$

Il convient désormais de déterminer la variation  $\Delta\xi$  de l'avancement de la réaction, compte tenu de la composition initiale du milieu réactionnel :

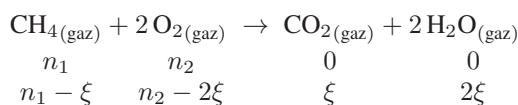
- Dans le volume  $V$  est introduite une quantité  $n_1$  de méthane  $\text{CH}_4(\text{gaz})$  jusqu'à une pression  $P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ , à la température  $T = 298 \text{ K}$ . L'équation d'état des gaz parfaits indique alors que :

$$P_0 V = n_1 R T \Rightarrow n_1 = \frac{P_0 V}{R T} = \frac{10^5 \times 5.10^{-4}}{8,314 \times 298} = 2,02.10^{-2} \text{ mole}$$

- Au système précédent est ensuite ajoutée une quantité  $n_2$  de dioxygène qui permet à la pression d'atteindre la valeur  $P = 20 P_0 = 20 \text{ bar}$ . Par conséquent :

$$\begin{aligned} 20 P_0 V &= (n_1 + n_2) R T = n_1 R T + n_2 R T = P_0 V + n_2 R T \\ \Rightarrow n_2 R T &= 19 P_0 V \\ \Rightarrow n_2 &= \frac{19 P_0 V}{R T} = \frac{19 \times 10^5 \times 5.10^{-4}}{8,314 \times 298} = 0,38 \text{ mole} \end{aligned}$$

Le bilan de la réaction chimique :



montre que la quantité de  $\text{CH}_4$  limite la réaction, qui cesse donc dès que  $\xi$  varie de la quantité :

$$\begin{aligned} \Delta\xi = n_1 &\Rightarrow Q_r = -\Delta_r U \times n_1 \Rightarrow \Delta_r U = -\frac{Q_r}{n_1} = -\frac{17,83.10^3}{2,02.10^{-2}} \\ &\Rightarrow \Delta_r U = -882,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

3. L'enthalpie  $H$  du système est liée à son énergie interne par la définition :

$$\begin{aligned}
 H &= U + PV = U + \sum_{i=1}^4 n_i RT \\
 \Rightarrow \left( \frac{\partial H}{\partial \xi} \right)_{T,P} &= \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{T,P} + \sum_{i=1}^4 \frac{dn_i}{d\xi} RT \\
 \Rightarrow \Delta_r H &= \Delta_r U + RT \times \sum_{i=1}^4 \nu_i \\
 \Rightarrow \Delta_r H &= -882,7 \cdot 10^3 + 8,314 \times 298 \times (2 + 1 - 2 - 1) \\
 \Rightarrow \Delta_r H &= -882,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}
 \end{aligned}$$

4. Si  $h_i(T)$  désigne l'enthalpie molaire de chaque gaz parfait du milieu réactionnel, considéré comme un mélange idéal, l'enthalpie totale :

$$H = \sum_{i=1}^4 n_i \times h_i(T)$$

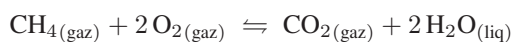
ne dépend pas de  $P$ , conformément à la deuxième loi de Joule, ce qui se traduit par :

$$H = (T, P) = H(T, P_0) \Rightarrow \Delta_r H = \Delta_r H^0 = -882,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

5. Les données tabulées fournissent :

$$\begin{aligned}
 \Delta_r H^0 &= 2 \Delta_f H^0 [\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}] + \Delta_f H^0 [\text{CO}_2_{(\text{gaz})}] \\
 &\quad - 2 \underbrace{\Delta_f H^0 [\text{O}_2_{(\text{gaz})}]}_{=0} - \Delta_f H^0 [\text{CH}_4_{(\text{gaz})}] \\
 &= -2 \times 241,83 - 393,51 + 74,85 \\
 \Rightarrow \Delta_r H^0 &= -802,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}
 \end{aligned}$$

La comparaison entre cette grandeur et celle calculée précédemment confirme l'ordre de grandeur trouvé. Cependant, l'écart de 9% entre ces deux valeurs ne doit pas être négligé. On peut envisager que, ramenée à 298 K, la réaction admette pour équation-bilan :



auquel cas la valeur obtenue pour  $\Delta_r H$  doit être de nouveau évaluée. La définition de l'enthalpie conduit à :

$$H = U + PV = U + P \times [V_{(\text{gaz})} + V_{(\text{liq})}]$$

où  $V_{(\text{gaz})}$  représente le volume occupé par les trois gaz et  $V_{(\text{liq})}$  celui occupé par

$\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$ . Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} H &= U + \sum_{i=1}^3 n_i RT + PV_{(\text{liq})} \\ \Rightarrow \left( \frac{\partial H}{\partial \xi} \right)_{T,P} &= \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)_{T,P} + RT \sum_{i=1}^3 \frac{dn_i}{d\xi} + P \times \left( \frac{\partial V_{(\text{liq})}}{\partial \xi} \right)_{T,P} \\ \Rightarrow \Delta_r H &= \Delta_r U + RT \sum_{i=1}^3 \nu_i + P \times \left( \frac{\partial V_{(\text{liq})}}{\partial \xi} \right)_{T,P} \end{aligned}$$

On peut alors admettre ici que le volume molaire  $\left( \frac{\partial V_{(\text{liq})}}{\partial \xi} \right)_{T,P}$  de l'eau liquide est négligeable par rapport à celui des gaz, de manière à poser :

$$\begin{aligned} \Delta_r H &= \Delta_r U + RT \sum_{i=1}^3 \nu_i = \Delta_r U - 2 RT \\ &= -882,7 \cdot 10^3 - 2 \times 8,314 \times 298 = 887,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Par ailleurs, une mole d'eau liquide présente une enthalpie (molaire)  $h_4(T, P)$  dont la variation s'écrit :

$$dh_4 = C_{V_m} dT + V_m dP = \left( \frac{\partial h_4}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial h_4}{\partial P} \right)_T dP$$

où  $V_m = \left( \frac{\partial h_4}{\partial P} \right)_T$  désigne le volume molaire de l'eau liquide. Négliger ce terme par rapport au volume molaire des gaz revient alors à admettre que :

$$\left( \frac{\partial h_4}{\partial P} \right)_T \simeq 0 \Rightarrow h_4(T, P) \simeq h_4(T, P_0)$$

de sorte que l'enthalpie du milieu :

$$H = \sum_{i=1}^4 n_i h_i = \sum_{i=1}^3 n_i h_i(T) + n_4 h_4(T, P)$$

s'identifie à son enthalpie *standard* :

$$H^0 = \sum_{i=1}^3 n_i h_i^0(T) + n_4 h_4(T, P_0)$$

car  $h_i(T) = h_i^0(T)$  pour les gaz parfait (il s'agit de la deuxième loi de Joule relative aux gaz parfaits). Ayant ainsi justifié l'identité entre  $\Delta_r H$  et  $\Delta_r H^0$ , on obtient :

$$\Delta_r H^0 = -887,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

D'autre part, la valeur numérique de l'enthalpie *standard* de formation de  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$  :



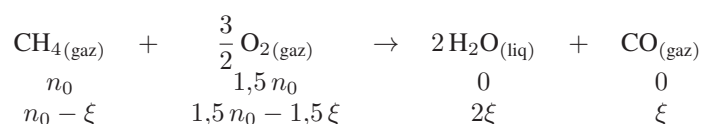
$\Delta_f H^0 [\text{H}_2\text{O}(\text{liq})] = -285,84 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  conduit à :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0 &= 2 \Delta_f H^0 [\text{H}_2\text{O}(\text{liq})] + \Delta_f H^0 [\text{CO}_2(\text{gaz})] \\ &\quad - 2 \Delta_f H^0 [\text{O}_2(\text{gaz})] - \Delta_f H^0 [\text{CH}_4(\text{gaz})] \\ &= -2 \times 285,84 - 393,51 + 74,85 \\ &\Rightarrow \Delta_r H^0 = -890,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Cette étude plus approfondie rend compatibles les valeurs obtenues pour  $\Delta_r H^0$ , et suggère de ce fait que  $\text{H}_2\text{O}(\text{liq})$  doit apparaître dans l'équation-bilan de la réaction.

### ● 194 ————— Lycée Charlemagne, Paris

Soit  $n_0$  la quantité initiale de méthane participant à la réaction de combustion avec la quantité stœchiométrique de dioxygène :



La réaction étant totale :  $n_0 - \xi = 0 \Rightarrow \xi = n_0$  permet de connaître la composition du milieu réactionnel à 298 K :

- avant la combustion :

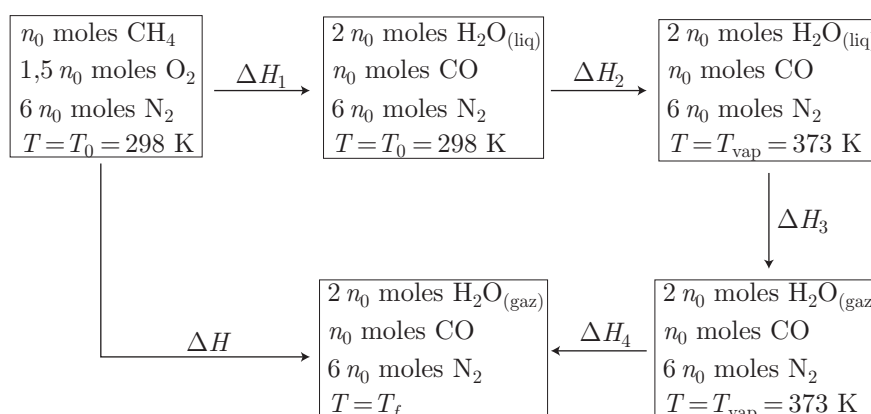
$$\left\{ \begin{array}{l} n_0 \text{ moles de } \text{CH}_4(\text{gaz}) \\ 1,5 n_0 \text{ moles de } \text{O}_2(\text{gaz}) \\ 6 n_0 \text{ moles de } \text{N}_2(\text{gaz}) \end{array} \right.$$

car, dans l'air, la quantité de diazote (80%) est quatre fois plus importante que celle de dioxygène (20%).

- après la combustion :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 n_0 \text{ moles de } \text{H}_2\text{O}(\text{liq}) \\ n_0 \text{ moles de } \text{CO}(\text{gaz}) \\ 6 n_0 \text{ moles de } \text{N}_2(\text{gaz}) \end{array} \right.$$

L'ensemble de la combustion peut être décomposé en quatre étapes, schématisées ci-dessous :



que l'on peut détailler :

- Réaction à  $T_0 = 298 \text{ K}$ , au cours de laquelle l'enthalpie varie de la quantité :

$$dH_1 = \Delta_r H^0 d\xi \Rightarrow \Delta H_1 = \Delta_r H^0 \int_0^{n_0} d\xi = n_0 \times \Delta_r H^0$$

où  $\Delta_r H^0$  est l'enthalpie *standard* de la réaction à  $298 \text{ K}$  :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0 &= 2 \Delta_f H^0 [\text{H}_2\text{O}(\text{liq})] + \Delta_f H^0 [\text{CO}(\text{gaz})] \\ &\quad - \Delta_f H^0 [\text{CH}_4(\text{gaz})] - \underbrace{\frac{3}{2} \Delta_f H^0 [\text{O}_2(\text{gaz})]}_{=0} \\ &= -2 \times 285,8 - 110,5 + 74,8 = -607,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ &\Rightarrow \Delta H_1 = -607,3 \cdot 10^3 \times n_0 \text{ (en Joules)} \end{aligned}$$

- L'augmentation de la température  $T$ , qui passe de  $T_0 = 298 \text{ K}$  à  $T_{\text{vap}} = 373 \text{ K}$ , au cours de laquelle l'enthalpie du système varie de  $dH_2 = C_{p2}^0 dT$  lorsque  $T$  varie de  $dT$  et où  $C_{p2}^0$  désigne la capacité thermique du système, à pression constante :

$$\begin{aligned} C_{p2}^0 &= 2 n_0 C_p^0 [\text{H}_2\text{O}(\text{liq})] + n_0 C_p^0 [\text{CO}(\text{gaz})] + 6 n_0 C_p^0 [\text{N}_2(\text{gaz})] \\ &= 2 n_0 \times 75,47 + n_0 \times (28,42 + 4,1 \cdot 10^{-3} T) + 6 n_0 \times (27,88 + 4,27 \cdot 10^{-3} T) \\ &= n_0 \times (346,6 + 29,72 \cdot 10^{-3} T) \end{aligned}$$

Par suite, au cours de cette transformation, l'enthalpie du système varie de la quantité :

$$\begin{aligned} \Delta H_2 &= \int_{298 \text{ K}}^{373 \text{ K}} C_{p2}^0 dT = 346,6 n_0 \int_{298}^{373} dT + 29,72 \cdot 10^{-3} n_0 \int_{298}^{373} T dT \\ &= n_0 \times \left[ 346,6 \times (373 - 298) + \frac{29,72 \cdot 10^{-3}}{2} \times (373^2 - 298^2) \right] \\ &\Rightarrow \Delta H_2 = n_0 \times 26,74 \cdot 10^3 \text{ (en Joules)} \end{aligned}$$

- La vaporisation de l'eau, à température constante  $T_{\text{vap}} = 373 \text{ K}$ , au cours de la-

quelle l'enthalpie du système varie de la quantité :

$$\begin{aligned}\Delta H_3 &= 2 n_0 \times \Delta_{\text{vap}} H^0 = n_0 \times 2 \times 40,7 \cdot 10^3 \\ \Rightarrow \Delta H_3 &= 81,4 \cdot 10^3 \times n_0 \text{ (en Joules)}\end{aligned}$$

- La variation de température du nouveau système, de  $T_{\text{vap}} = 373 \text{ K}$  à la température finale  $T_f$ , à l'issue de quoi l'enthalpie varie de la quantité :

$$dH_4 = C_{p4}^0 dT \Rightarrow \Delta H_4 = \int_{373}^{T_f} C_{p4}^0 dT$$

où la capacité thermique isobare de ce système vaut :

$$\begin{aligned}C_{p4}^0 &= 2 n_0 C_p^0 [\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}] + n_0 C_p^0 [\text{CO}_{(\text{gaz})}] + 6 n_0 C_p^0 [\text{N}_2_{(\text{gaz})}] \\ &= 2 n_0 \times (30,01 + 10,71 \cdot 10^{-3} T) + n_0 \times (28,42 + 4,1 \cdot 10^{-3} T) \\ &\quad + 6 n_0 \times (27,88 + 4,27 \cdot 10^{-3} T) \\ &= n_0 \times (255,7 + 51,14 \cdot 10^{-3} T)\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\Delta H_4 &= 255,7 n_0 \int_{373}^{T_f} dT + 51,14 \cdot 10^{-3} n_0 \int_{373}^{T_f} T dT \\ &= n_0 \times \left[ 255,7 \times (T_f - 373) + \frac{51,14 \cdot 10^{-3}}{2} \times (T_f^2 - 373^2) \right] \\ &= n_0 \times [25,57 \cdot 10^{-3} T_f^2 + 255,7 T_f - 98,93 \cdot 10^3] \text{ (en Joules)}\end{aligned}$$

Au cours de ces transformations, la réaction dégage une quantité de chaleur :  $Q_{\text{réac}} = -\Delta H_1$  car la réaction est effectuée à pression constante. En outre, l'énoncé précise que 10% de  $Q_{\text{réac}}$  sont perdus au cours de la combustion :

$$Q_{\text{perdue}} = 0,1 \times Q_{\text{réac}} = -0,1 \times \Delta H_1$$

ce qui signifie aussi que le système reçoit une quantité de chaleur :

$$Q_{\text{reçue}} = -Q_{\text{perdue}} = 0,1 \times \Delta H_1$$

Or, à pression constante, la chaleur reçue par ce système s'identifie à sa variation d'enthalpie :

$$\begin{aligned}Q_{\text{reçue}} = \Delta H &\Rightarrow 0,1 \times \Delta H_1 = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 \\ &\Rightarrow 0 = 0,9 \times \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4 \\ &\Rightarrow 0 = -0,9 \times 607 \cdot 10^3 n_0 + 26,74 \cdot 10^3 n_0 + 81,4 \cdot 10^3 n_0 \\ &\quad + n_0 \times (25,57 \cdot 10^{-3} T_f^2 + 255,7 T_f - 98,93 \cdot 10^3) \\ &\Rightarrow 0 = 25,57 \cdot 10^{-3} T_f^2 + 255,7 T_f - 537,1 \cdot 10^3\end{aligned}$$

La température  $T_f$  est donc solution de l'équation du second degré :

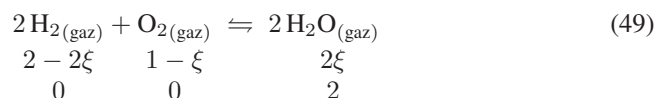
$$T_f^2 + 10^4 T_f - 21 \cdot 10^6 = 0$$

d'où l'on déduit que :

$$T_f = \frac{-10^4 + \sqrt{10^8 + 4 \times 21 \cdot 10^6}}{2} \Rightarrow T_f = 1782 \text{ K}$$

● 195 ————— Concours Commun Polytechnique

La réaction du dihydrogène avec le dioxygène :



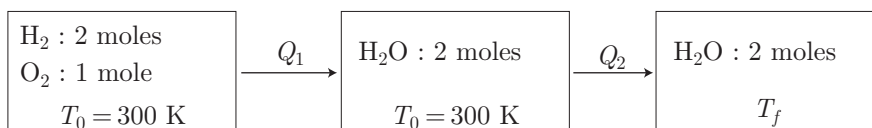
a pour enthalpie *standard* à 298 K :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_{298}^0 &= 2 \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) - 2 \underbrace{\Delta_f H^0(\text{H}_2)}_{=0} - \underbrace{\Delta_f H^0(\text{O}_2)}_{=0} \\ &= -2 \times 241,6 = -483,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Or, l'avancement de cette réaction variant de  $\Delta\xi = 1$  mole, il s'ensuit qu'elle absorbe une quantité de chaleur :

$$Q_1 = \Delta_r H_{298}^0 \times \Delta\xi = -483,2 \text{ kJ}$$

On peut dès lors imaginer le processus suivant, qui amène la température du milieu à une valeur finale  $T_f$  :



Au cours de la dernière transformation, lorsque la température varie de  $dT$ , le système reçoit une quantité de chaleur :

$$\begin{aligned} \delta Q_2 &= 2 C_p^0(\text{H}_2\text{O}) dT = 2 \times (31,3 + 0,0084 \times T) dT \\ &= 62,6 dT + 0,0084 \times 2 T dT \end{aligned}$$

Ce faisant, la variation de température de  $T_0$  à  $T_f$  est consécutive à un apport de chaleur :

$$\begin{aligned} Q_2 &= 62,6 \int_{T_0}^{T_f} dT + 0,0084 \times \int_{T_0}^{T_f} 2 T dT \\ &= 62,6 \times (T_f - T_0) + 0,0084 \times (T_f^2 - T_0^2) \\ &= 62,6 T_f + 0,0084 T_f^2 - [62,6 \times 298 + 0,0084 \times (298)^2] \\ &= 62,6 T_f + 0,0084 T_f^2 - 19,4 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Ainsi, au cours de la transformation totale, le système reçoit la chaleur :

$$Q = Q_1 + Q_2 = 0,0084 T_f^2 + 62,6 T_f - 502,6 \cdot 10^3 = 0$$

au demeurant nulle si aucune perte de chaleur n'est à déplorer. Dans ces conditions,  $T_f$  est la solution positive de l'équation du second degré :

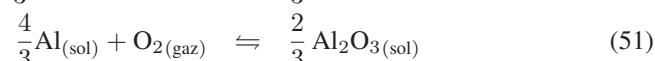
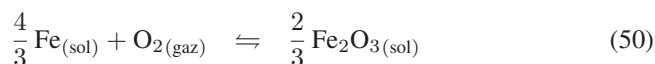
$$T_f = \frac{-62,6 + \sqrt{(62,6)^2 + 4 \times 0,0084 \times 502,6 \cdot 10^3}}{2 \times 0,0084} \Rightarrow T_f = 4860 \text{ K}$$

Cette température excessive montre qu'il faut, en fait, tenir compte :

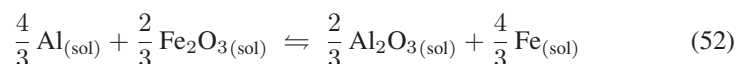
- de la dissociation de l'eau (la réaction (49) n'est pas totale) ;
- des pertes de chaleur.

## ● 196 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Des équations-bilan :



se déduit celle de la réduction de l'hématite par l'aluminium solide, à l'aide de la combinaison linéaire (51)–(50) :



dont l'enthalpie *standard* vaut par conséquent :

$$\Delta_r G^0 = \Delta_r G_2^0(T) - \Delta_r G_1^0(T) = -590\,800 + 53,9 \times T$$

Ainsi, cette réduction demeure possible tant que  $\Delta_r G^0(T) < 0$ , c'est-à-dire :

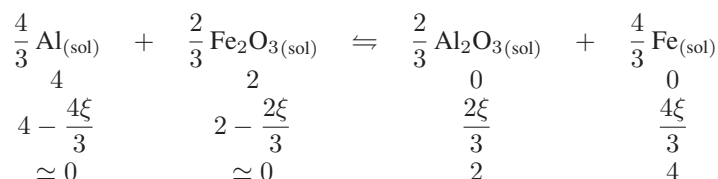
$$-590\,800 + 53,9 \times T < 0 \Rightarrow T < \frac{590\,800}{53,9} = 10\,950 \text{ K}$$

Cette condition étant toujours satisfaite, on peut en déduire que l'aluminium réduit l'hématite.

2. Déterminons, au préalable, l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H^0(T_i)$  de la réaction (52), compte tenu que :

$$\begin{aligned} -\frac{\Delta_r H^0}{T^2} &= \frac{d}{dT} \left( \frac{\Delta_r G^0}{T} \right) = \frac{d}{dT} \left( -\frac{590\,800}{T} + 53,9 \right) = \frac{590\,800}{T^2} \\ \Rightarrow \Delta_r H^0 &= -590\,800 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

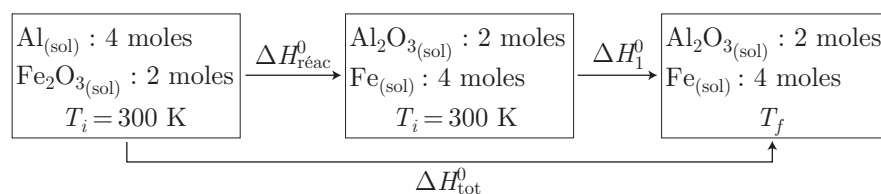
Ce faisant, la réaction :



produit 2 moles de  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et 4 moles de  $\text{Fe}_{(\text{sol})}$  alors que son avancement  $\xi$  varie de  $\Delta\xi = 3$  moles. C'est pourquoi cette réaction s'accompagne d'une variation d'enthalpie :

$$\Delta H_{\text{réac}}^0 = \Delta_r H^0 \times \Delta\xi = 3 \Delta_r H^0 = -1,772 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On peut, dans un premier temps, supposer que la réaction produise du fer à l'état solide, à une température finale  $T_f$  :



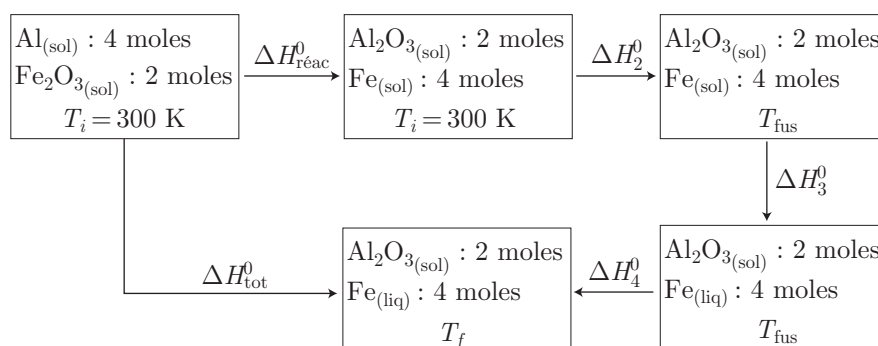
L'échauffement des produits de la réaction ( $\text{Fe}_{(\text{sol})} + \text{Al}_2\text{O}_{3(\text{sol})}$ ) de la température  $T_i$  à la température  $T_f$  s'accompagne d'un accroissement de l'enthalpie du système :

$$\begin{aligned}\Delta H_1^0 &= \left[ 4C_p^0 \text{Fe}_{(\text{sol})} + 2C_p^0 \text{Al}_2\text{O}_{3(\text{sol})} \right] \times (T_f - T_i) \\ &= [4 \times 25,1 + 2 \times 79,1] \times (T_f - 300) = 258,6 \times (T_f - 300)\end{aligned}$$

La réaction et l'échauffement se réalisant quasi instantanément, cette transformation peut être considérée comme globalement adiabatique, auquel cas :

$$\begin{aligned}\Delta H_{\text{tot}}^0 &= 0 \text{ avec } \Delta H_{\text{tot}}^0 = \Delta H_{\text{réac}}^0 + \Delta H_1^0 \\ &\Rightarrow -1,772 \cdot 10^6 + 258,6 \times (T_f - 300) = 0 \\ &\Rightarrow T_f = 300 + \frac{1,772 \cdot 10^6}{258,6} = 7152 \text{ K}\end{aligned}$$

Étant donné que la température de fusion du fer vaut  $T_{\text{fus}} = 1535^\circ\text{C} \simeq 1808 \text{ K}$ , il est nécessaire de tenir compte de la fusion du fer (supposée totale) à la température  $T_{\text{fus}}$  :



Au cours de chacune des étapes décrite dans ce schéma, l'enthalpie du système

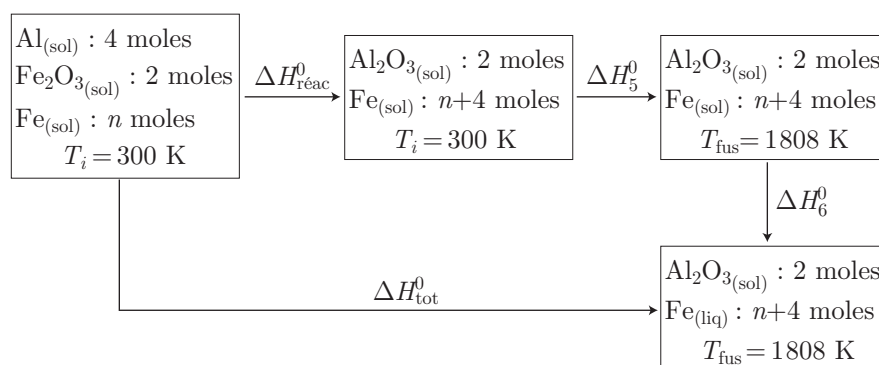
varie de :

$$\begin{aligned}\Delta H_{\text{réac}}^0 &= -1,772 \cdot 10^6 \text{ J} \\ \Delta H_2^0 &= \left[ 4 C_p^0 \text{Fe}_{(\text{sol})} + 2 C_p^0 \text{Al}_2\text{O}_3(\text{sol}) \right] \times (T_{\text{fus}} - T_i) \\ &= [4 \times 25,1 + 2 \times 79,1] \times (1808 - 300) = 3,9 \cdot 10^5 \text{ J} \\ \Delta H_3^0 &= 4 \times \Delta_{\text{fus}} H^0 = 4 \times 9,1 \cdot 10^3 = 3,64 \cdot 10^4 \text{ J} \\ \Delta H_4^0 &= \left[ 4 C_p^0 \text{Fe}_{(\text{liq})} + 2 C_p^0 \text{Al}_2\text{O}_3(\text{sol}) \right] \times (T_f - T_{\text{fus}}) \\ &= [4 \times 28,6 + 2 \times 79,1] \times (T_f - 1808) = 272,6 \times (T_f - 1808)\end{aligned}$$

Or, la réaction s'effectue assez rapidement pour que le système ne puisse pas échanger de chaleur avec l'extérieur, de sorte que  $\Delta H_{\text{tot}}^0 = 0$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\Delta H_{\text{tot}}^0 = 0 &\Rightarrow \Delta H_{\text{réac}}^0 + \Delta H_2^0 + \Delta H_3^0 + \Delta H_4^0 = 0 \\ &\Rightarrow -1,772 \cdot 10^6 + 3,9 \cdot 10^5 + 3,64 \cdot 10^4 + 272,6 \times (T_f - 1808) = 0 \\ &\Rightarrow -1,346 \cdot 10^6 + 272,6 \times (T_f - 1808) = 0 \\ &\Rightarrow T_f = 1808 + \frac{1,346 \cdot 10^6}{272,6} \Rightarrow T_f = 6744 \text{ K}\end{aligned}$$

3. Soit  $n$  le nombre de moles de  $\text{Fe}_{(\text{sol})}$  qui provient des rails et qui subit la fusion sous l'effet de la réaction de réduction de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ . À nouveau, l'ensemble des phénomènes qui se produisent peut être schématisé de la manière suivante, en considérant qu'il restera toujours du fer solide, dont l'équilibre avec le fer liquide produit imposera la valeur de la température à celle d'équilibre  $T_{\text{fus}}$  :



Au cours des différentes étapes décrites par ce schéma, le système (réactifs et produits auxquels on associe la quantité de fer, issue des rails, qui entre en fusion) voit

son enthalpie varier des quantités :

$$\begin{aligned}\Delta H_{\text{réac}}^0 &= -1,772 \cdot 10^6 \text{ J} \\ \Delta H_5^0 &= \left[ 2 C_{p \text{Al}_2\text{O}_3(\text{sol})}^0 + (n+4) C_{p \text{Fe}(\text{sol})}^0 \right] (T_{\text{fus}} - T_i) \\ &= [2 \times 79,1 + 25,1 \times n + 25,1 \times 4] \times (1808 - 300) \\ &= 3,9 \cdot 10^5 + 3,785 \cdot 10^4 \times n \text{ (en Joules)} \\ \Delta H_6^0 &= (n+4) \times \Delta_{\text{fus}} H^0 = (n+4) \times 9100 \\ &= 9100 \times n + 3,64 \cdot 10^4 \text{ (en Joules)}\end{aligned}$$

Or, l'énoncé précise que 50% de l'énergie thermique fournie par la réaction ( $\Delta H_{\text{réac}}^0$ ) est « perdue », de sorte qu'il n'est plus possible de considérer le phénomène comme adiabatique : la perte de la chaleur  $\frac{|\Delta H_{\text{réac}}^0|}{2}$  provoque une variation totale de l'enthalpie du système :

$$\Delta H_{\text{tot}}^0 = -\frac{|\Delta H_{\text{réac}}^0|}{2} = -\frac{1,772 \cdot 10^6}{2} = -8,86 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Par suite :

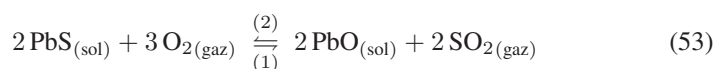
$$\begin{aligned}\Delta H_{\text{tot}}^0 &= \Delta H_{\text{réac}}^0 + \Delta H_5^0 + \Delta H_6^0 \\ \Rightarrow -8,86 \cdot 10^5 &= -1,772 \cdot 10^6 + 3,9 \cdot 10^5 + 3,785 \cdot 10^4 \times n + 9100 \times n + 3,64 \cdot 10^4 \\ \Rightarrow 4,695 \cdot 10^4 \times n &= 4,596 \cdot 10^5 \Rightarrow n = 9,8 \text{ moles}\end{aligned}$$

ce qui représente une masse de fer :

$$m_{\text{rail}} = n \times M = 9,8 \times 56 \Rightarrow r_{\text{rail}} = 549 \text{ g}$$

## ● 197 ————— Lycée du Parc, Lyon

1. L'enthalpie *standard* de la réaction d'équation :



a pour valeur :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^0 &= 2 \Delta_f H^0 [\text{PbO}_{(\text{sol})}] + 2 \Delta_f H^0 [\text{SO}_{2(\text{gaz})}] \\ &\quad - 2 \Delta_f H^0 [\text{PbS}_{(\text{sol})}] - 3 \Delta_f H^0 [\text{O}_{2(\text{gaz})}] \\ &= -2 \times 217,4 - 2 \times 296,8 + 2 \times 100,4 \\ \Rightarrow \Delta_r H^0 &= -827,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

La valeur négative de  $\Delta_r H^0$  montre que cette réaction est exothermique.

2. La constante d'équilibre  $K^0$  de cette réaction vérifie la relation :

$$\frac{d \ln K^0}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} < 0 \text{ car } \Delta_r H^0 < 0$$

ce qui signifie que  $K^0(T)$  décroît avec  $T$ . Il s'agit là d'un aspect de la loi de modération des équilibres : une augmentation de la température induit un déplacement



de l'équilibre dans le sens de la consommation de la chaleur, c'est-à-dire dans le sens (2) pour une réaction exothermique ; une élévation de température ne favorise pas le grillage de la blende.

3. Considérons le milieu réactionnel, soumis à une pression totale  $P_e$  pour laquelle l'équilibre (53) est établi. Les fractions molaires des gaz sont alors notées  $x_{\text{SO}_2}$  et  $x_{\text{O}_2}$ , de sorte que les activités de ces gaz valent :

$$a_{\text{SO}_2} = x_{\text{SO}_2} \times \frac{P_e}{P_0} \text{ et } a_{\text{O}_2} = x_{\text{O}_2} \times \frac{P_e}{P_0}$$

où  $P_0 = 1$  bar désigne la pression *standard*.

Dans cet état d'équilibre, l'affinité chimique du système vaut :

$$\mathcal{A}_e(T) = -\Delta_r G^0(T) - RT \ln Q_e$$

où  $\Delta_r G^0(T)$  est l'enthalpie libre *standard* de la réaction (53) et  $Q_e$  son quotient de réaction à l'équilibre, dans lequel les activités  $a_{\text{PbO}}$  et  $a_{\text{PbS}}$  des phases solides non miscibles valent 1 :

$$Q_e = \frac{a_{\text{PbO}}^2 \times a_{\text{SO}_2}^2}{a_{\text{PbS}}^2 \times a_{\text{O}_2}^3} = \frac{x_{\text{SO}_2}^2}{x_{\text{O}_2}^3} \times \frac{P_0}{P_e}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_e(T) = -\Delta_r G^0(T) - RT \ln \left( \frac{x_{\text{SO}_2}^2}{x_{\text{O}_2}^3} \right) - RT \ln \left( \frac{P_0}{P_e} \right)$$

Or, l'équilibre étant établi :

$$\mathcal{A}_e(T) = 0 \Rightarrow -\Delta_r G^0(T) - RT \ln \left( \frac{x_{\text{SO}_2}^2}{x_{\text{O}_2}^3} \right) = RT \ln \left( \frac{P_0}{P_e} \right) \quad (54)$$

Réalisons, à partir de cet état, une rupture d'équilibre : la composition du milieu réactionnel n'étant pas modifiée ( $x_{\text{SO}_2}$  et  $x_{\text{O}_2}$  conservent les valeurs précédentes), la pression totale est portée à une valeur  $P$  et la température est maintenue à la valeur  $T$ . Dans ce cas, le quotient de réaction devient :

$$Q = \frac{x_{\text{SO}_2}^2}{x_{\text{O}_2}^3} \times \frac{P_0}{P}$$

de sorte que l'affinité chimique du milieu devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(T) &= -\Delta_r G^0(T) - RT \ln Q \\ &= -\Delta_r G^0(T) - RT \ln \left( \frac{x_{\text{SO}_2}^2}{x_{\text{O}_2}^3} \right) - RT \ln \left( \frac{P_0}{P} \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu du résultat (54) :

$$\mathcal{A}(T) = RT \ln \left( \frac{P_0}{P_e} \right) - RT \ln \left( \frac{P_0}{P} \right) \Rightarrow \mathcal{A}(T) = RT \ln \left( \frac{P}{P_e} \right)$$

De fait, si la pression est augmentée par rapport à celle d'équilibre :

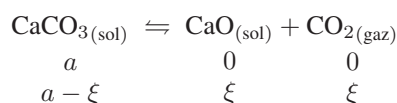
$$P > P_e \Rightarrow \mathcal{A}(T) > 0$$

l'équilibre est rompu : la réaction évolue dans le sens (1) de la formation de PbO.

Il s'agit, à nouveau, d'une manifestation de la loi de modération des équilibres : une augmentation de pression induit un déplacement de l'équilibre dans le sens d'une diminution de la quantité de gaz (c'est-à-dire vers la formation de SO<sub>2</sub>) afin que la pression du milieu soit diminuée.

## ● 198 ————— Concours de l'ENS Cachan

1. En admettant les solides CaCO<sub>3(sol)</sub> et CaO<sub>(sol)</sub> soient non miscibles, la réaction d'équation :



a pour quotient de réaction :

$$Q = \frac{a_{\text{CaO}} \times a_{\text{CO}_2}}{a_{\text{CaCO}_3}}$$

où  $a_{\text{CaO}} = a_{\text{CaCO}_3} = 1$  et  $a_{\text{CO}_2} = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_0}$ . Or, CO<sub>2</sub> étant le seul gaz du milieu réactionnel, sa pression partielle  $P_{\text{CO}_2}$  vérifie :

$$P_{\text{CO}_2} V = \xi RT \Rightarrow P_{\text{CO}_2} = \xi \frac{RT}{V} \text{ avec } \begin{cases} V = 10 \text{ L} = 10^{-2} \text{ m}^3 \\ P_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa} \end{cases} \quad (55)$$

$$\Rightarrow Q(\xi) = \xi \times \frac{RT}{VP_0} \quad (56)$$

Lorsque l'équilibre est atteint, l'avancement de la réaction adopte une valeur telle que :

$$Q(\xi_e) = K_1^0 \Rightarrow \xi_e \times \frac{RT}{VP_0} = K_1^0 \quad (57)$$

$$\Rightarrow \xi_e = \frac{K_1^0 VP_0}{RT} = \frac{0,91 \times 10^{-2} \times 10^5}{8,314 \times 1100} \quad (58)$$

$$\Rightarrow \xi_e = 9,95 \cdot 10^{-2} \text{ mole} \quad (59)$$

En rappelant que  $a = 0,2$  mole, l'état final du système est donc décrit par la composition suivante :

$$n_{\text{CaCO}_3} = a - \xi_e = 0,2 - 9,95 \cdot 10^{-2} \Rightarrow n_{\text{CaCO}_3} = 1,005 \cdot 10^{-1} \text{ mole}$$

et :

$$n_{\text{CaO}} = n_{\text{CO}_2} = \xi_e = 9,95 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$$

2. Soit  $\mu_{X_i}$  le potentiel chimique d'une espèce  $X_i$ , de coefficient stœchiométrique algébrique  $\nu_i$ , de potentiel chimique *standard*  $\mu_{X_i}^0$  et de quantité  $n_i$  ; le milieu ré-

actionnel a pour enthalpie libre :

$$\begin{aligned} G(\xi) &= \sum_{i=1}^3 n_i \mu_{X_i} = n_{\text{CO}_2} \mu_{\text{CO}_2} + n_{\text{CaO}} \mu_{\text{CaO}} + n_{\text{CaCO}_3} \mu_{\text{CaCO}_3} \\ &= \xi \mu_{\text{CO}_2} + \xi \mu_{\text{CaO}} + (a - \xi) \mu_{\text{CaCO}_3} \end{aligned}$$

où les potentiels chimiques  $\mu_{X_i}$  s'expriment en fonction de la température  $T$  du milieu réactionnel et des activités  $a_{X_i}$  :

$$\begin{aligned} \mu_{X_i} &= \mu_{X_i}^0 + RT \ln a_{X_i} \\ \Rightarrow G(\xi) &= \xi \times (\mu_{\text{CO}_2}^0 + RT \ln a_{\text{CO}_2}) + \xi \times (\mu_{\text{CaO}}^0 + RT \ln a_{\text{CaO}}) \\ &\quad + (a - \xi) \times (\mu_{\text{CaCO}_3}^0 + RT \ln a_{\text{CaCO}_3}) \\ \Rightarrow G(\xi) &= \xi \times (\mu_{\text{CO}_2}^0 + \mu_{\text{CaO}}^0 - \mu_{\text{CaCO}_3}^0) + a \times (\mu_{\text{CaCO}_3}^0 + RT \ln a_{\text{CaCO}_3}) \\ &\quad + \xi RT \ln \left( \frac{a_{\text{CO}_2} \times a_{\text{CaO}}}{a_{\text{CaCO}_3}} \right) \end{aligned}$$

où l'on remarque que :

$$\phi_0 = a \times (\mu_{\text{CaCO}_3}^0 + RT \ln a_{\text{CaCO}_3}) = a \mu_{\text{CaCO}_3}^0$$

est une grandeur indépendante de  $V$ , de la pression  $P$  et de la composition du milieu. En outre, l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G^0$  de la réaction a pour expression :

$$\begin{aligned} \Delta_r G^0 &= \sum_{i=1}^3 \nu_i \mu_{X_i}^0 = \mu_{\text{CaO}}^0 + \mu_{\text{CO}_2}^0 - \mu_{\text{CaCO}_3}^0 \\ \Rightarrow G(\xi) &= \xi \times \Delta_r G^0 + \phi_0 + \xi RT \ln Q \end{aligned}$$

dans laquelle le quotient de réaction a déjà été exprimé par la relation (56) :

$$G(\xi) = \xi \times \Delta_r G^0 + \phi_0 + \xi RT \ln \left( \frac{\xi RT}{P_0 V} \right)$$

Les données numériques fournies par l'énoncé permettent alors le calcul de l'enthalpie *standard* de la réaction :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0 &= \Delta_f H^0 [\text{CaO}] + \Delta_f H^0 [\text{CO}_2] - \Delta_f H^0 [\text{CaCO}_3] \\ &= -635 - 394 + 1207 = 178 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

et de son entropie *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_r S^0 &= S^0 [\text{CaO}] + S^0 [\text{CO}_2] - S^0 [\text{CaCO}_3] \\ &= 40 + 214 - 93 = 161 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Par conséquent, son enthalpie libre *standard* vaut, à 1 100 K :

$$\Delta_r G^0 = 178.10^3 - 161 \times 1100 = 900 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Remarque – On peut s'assurer, dès à présent, que :

$$\exp\left(-\frac{\Delta_r G^0}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{900}{8,314 \times 1\,100}\right) = 0,91 = K_1^0$$

$$\Rightarrow \Delta_r G^0 = -RT \ln K_1^0$$

Ce faisant, la fonction  $G(\xi)$  peut s'écrire :

$$G(\xi) = -\xi RT \ln K_1^0 + \phi_0 + \xi RT \ln \left(\frac{\xi RT}{P_0 V}\right)$$

$$= \phi_0 + \xi RT \ln \left(\frac{RT}{P_0 V K_1^0} \times \xi\right)$$

c'est-à-dire, en définissant la fonction :

$$\Gamma(\xi) = \xi \times 8,314 \times 1\,100 \times \ln \left(\frac{8,314 \times 1\,100}{10^5 \times 10^{-2} \times 0,91} \times \xi\right)$$

on obtient finalement :

$$G(\xi) = \phi_0 + \Gamma(\xi) \text{ avec } \Gamma(\xi) = 9\,145 \xi \times \ln(10,05 \times \xi) \quad (60)$$

Étant donné que  $\phi_0$  n'est pas connu, nous nous intéresserons à la fonction  $\Gamma(\xi)$  dont les variations sont les mêmes que celles de  $G(\xi)$ . Notamment :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \Gamma(\xi) = 0 \text{ et } \Gamma(\xi = a = 0,2) = 1\,277 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

tandis que :

$$\frac{dG}{d\xi} = 9\,145 \times [\ln(10,05 \xi) + 1]$$

s'annule pour une valeur  $\xi_1$  de  $\xi$  telle que :

$$1 = -\ln(10,05 \xi_1) \Rightarrow \xi_1 = \frac{\exp(-1)}{10,05} = 3,66 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$$

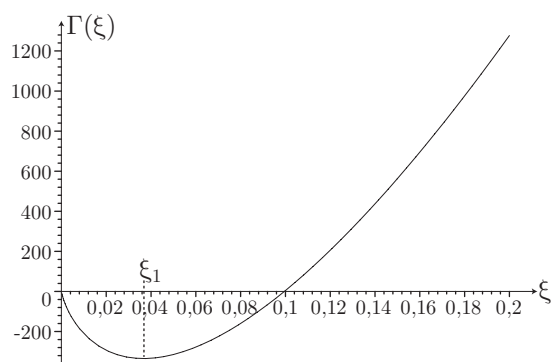
de sorte que :

$$\frac{dG}{d\xi} = 9\,145 \times [\ln 10,05 \xi - \ln(10,05 \xi_1)] = 9\,145 \times \ln \left(\frac{\xi}{\xi_1}\right)$$

Cette relation montre que :

$$\xi < \xi_1 \Rightarrow \frac{dG}{d\xi} < 0 \text{ et } \xi > \xi_1 \Rightarrow \frac{dG}{d\xi} > 0$$

c'est-à-dire que  $G(\xi_1)$  représente un *minimum* de  $G(\xi)$ , comme l'atteste la courbe ci-dessous :



On peut être surpris de trouver que le *minimum* de  $G(\xi)$  ne correspond pas à un état d'équilibre chimique ( $\xi_1 \neq \xi_e$ ). Pour expliquer cette différence, il convient de remarquer que la réaction est effectuée à volume  $V$  constant (celui du récipient). Pour la suite des calculs, on notera :

- $P = \frac{\xi RT}{V}$  la pression à l'intérieur du récipient ;
- $P_{\text{ext}}$  la pression (supposée constante) à l'extérieur du récipient ;
- $U, S, H$  : l'énergie interne, l'entropie et l'enthalpie du milieu réactionnel ;
- $\delta S_c \geq 0$  l'entropie créée au cours d'une transformation élémentaire, au sein du milieu réactionnel, qui reçoit une quantité de chaleur  $\delta Q$ .

La variation d'entropie  $S$  s'écrit :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \delta S_c \Rightarrow \delta Q = T dS - T \delta S_c$$

si bien que  $U$  varie de la quantité :

$$dU = \delta Q - P_{\text{ext}} dV = T dS - T \delta S_c \text{ car } dV = 0 \text{ (} V \text{ est constant)}$$

et  $H = U + PV$  de la quantité :

$$dH = dU + d(PV) = T dS - T \delta S_c + d(PV)$$

Ce faisant, la définition de l'enthalpie libre  $G = H - TS$  conduit à :

$$\begin{aligned} dG &= T dS - T \delta S_c + d(PV) - T dS - S dT \\ &= -S dT + d(PV) - T \delta S_c \\ &\Rightarrow T \delta S_c = -S dT + d(PV) - dG \end{aligned}$$

Notamment, lorsque  $T$  est maintenu constant :

$$T \delta S_c \geq 0 \Rightarrow d(PV) - dG \geq 0 \Rightarrow d(G - PV) \leq 0$$

Cette inégalité signifie qu'au cours d'une transformation chimique spontanée isochore, la fonction  $G - PV$  décroît jusqu'à atteindre un *minimum* qui définit l'état d'équilibre du milieu réactionnel. Or,  $PV = \xi RT$  n'étant pas une constante, le *minimum* de  $G - PV$  ne coïncide pas avec le *minimum* de  $G$ , ce qui explique pourquoi  $\xi_e \neq \xi_1$ . En outre, notons que  $\Delta_r G$  est défini par la dérivée

$\Delta_r G = \left( \frac{\partial G}{\partial \xi} \right)_{T,P}$  qui suppose que  $P$  peut être maintenu constant (ce qui n'est pas le cas dans le problème envisagé). C'est pourquoi la valeur  $\xi_1$  qui annule  $\frac{dG}{d\xi}$  n'est pas la même que celle,  $\xi_e$ , qui annule  $\Delta_r G$ .

3. L'étude précédente nous amène à étudier l'énergie libre :

$$F = G - PV = (U + PV - TS) - PV = U - TS$$

dont on a montré que le *minimum* devait correspondre à l'équilibre du système.

(a) En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits :  $PV = \xi RT$  et l'expression (60) de  $G(\xi)$ , on trouve :

$$\begin{aligned} F = G - PV &= \phi_0 + 9\,145 \xi \times \ln(10,05 \xi) - \xi \times RT \\ &= \phi_0 + 9\,145 \xi \times \ln(10,05 \xi) - \underbrace{8,314 \times 1\,100}_{9\,145} \times \xi \\ &= \phi_0 + 9\,145 \times [\xi \ln(10,05 \xi) - \xi] \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$F(\xi) = \phi_0 + \Phi(\xi) \text{ avec } \Phi(\xi) = 9\,145 \times [\xi \ln(10,05 \xi) - \xi]$$

(b) Les variations de la fonction  $F(\xi)$  sont données par celles de  $\Phi(\xi)$  :

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} [\Phi(\xi)] = 0$$

et :

$$\Phi(a = 0,2) = 9\,145 \times [0,2 \times \ln(10,05 \times 0,2) - 0,2] = -552 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

En outre, la dérivée :

$$\frac{dF}{d\xi} = \frac{d\Phi}{d\xi} = 9\,145 \times [\ln(10,05 \xi) + 1 - 1] = 9\,145 \times \ln(10,05 \xi)$$

montre que  $F$  devient *extremum* pour une valeur  $\xi_2$  telle que :

$$\ln(10,05 \times \xi_2) = 0 \Rightarrow \xi_2 = \frac{1}{10,05} = 9,95 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$$

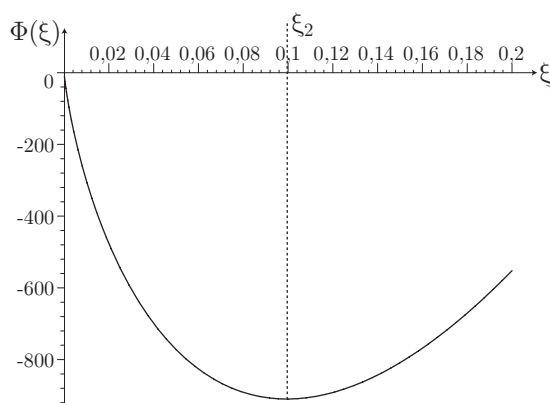
Cette relation permet également d'écrire que :

$$10,05 = \frac{1}{\xi_2} \Rightarrow \frac{dF}{d\xi} = 9\,145 \times \ln\left(\frac{\xi}{\xi_2}\right)$$

de sorte que :

$$\left. \frac{dF}{d\xi} \right|_{\xi < \xi_2} < 0 \text{ et } \left. \frac{dF}{d\xi} \right|_{\xi > \xi_2} > 0$$

ce qui montre, finalement, que  $F(\xi)$  devient *minimum* pour la valeur  $\xi = \xi_2$ . Ce comportement est d'ailleurs confirmé par la représentation graphique de la fonction  $\Phi(\xi)$  :



Remarque – La valeur numérique de  $\xi_2$ , identique à celle de  $\xi_e$ , confirme que le minimum de l'énergie libre  $F(\xi)$  correspond à l'équilibre du milieu réactionnel.

À cette étape, on pourrait s'étonner de l'emploi de  $\Delta_r G^0$  pour le calcul de  $\xi_e$ , via la constante  $K_1^0 = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0}{RT}\right)$ . On peut cependant justifier l'intervention de  $\Delta_r G^0$  en remarquant que la valeur numérique 10,05 provient du calcul de  $\frac{RT}{P_0 V K_1^0}$  dans l'expression (60). Ainsi, la dérivée de  $F$  :

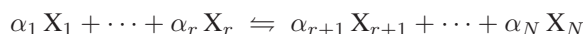
$$\frac{dF}{d\xi} = 9145 \times \ln\left(\frac{RT \xi}{P_0 V K_1^0}\right)$$

s'annule pour une valeur  $\xi_2$  de  $\xi$  telle que :

$$\frac{RT \xi_2}{P_0 V K_1^0} = 1 \Rightarrow \frac{RT \xi_2}{P_0 V} = K_1^0 = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_0} \text{ car } P_{\text{CO}_2} = \frac{RT \xi}{V}$$

Cette relation rend légitime l'identité (58) :  $Q(\xi_e) = K_1^0$ , relative à l'équilibre du système.

#### 4. Raisonnons sur une réaction d'équation-bilan :



où :

- les coefficients stœchiométriques  $\alpha_i$  sont liés aux coefficients algébriques :

$$\nu_i = -\alpha_i \text{ pour } 1 \leq i \leq r \text{ et } \nu_i = \alpha_i \text{ pour } r+1 \leq i \leq N$$

- le milieu réactionnel est caractérisé par son énergie interne  $U$ , son volume  $V$ , son enthalpie  $H = U + PV$ , sa pression  $P$ , sa température  $T$ , son entropie  $S$  et son enthalpie libre  $G = H - TS$ .
- les quantités  $n_i$  de chaque espèce  $X_i$  évoluent proportionnellement à la variation  $d\xi$  de l'avancement de la réaction :  $dn_i = \nu_i d\xi$ .
- le potentiel chimique  $\mu_i$  de chaque entité  $X_i$  dépend de son activité  $a_i$  et de son potentiel chimique standard  $\mu_i^0$  :

$$\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln a_i$$

- l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G^0(T)$  de la réaction est à l'origine de la constante d'équilibre  $K^0(T)$  :

$$K^0(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0(T)}{RT}\right) \text{ avec } \Delta_r G^0(T) = \sum_{i=1}^N \nu_i \mu_i^0$$

- le quotient de réaction est défini par :

$$Q = \prod_{i=1}^N a_i^{\nu_i} = \frac{a_{X_{r+1}}^{\alpha_{r+1}} \times \cdots \times a_{X_N}^{\alpha_N}}{a_{X_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times a_{X_r}^{\alpha_r}}$$

Conformément à ce qui a été fait à la question 1, la condition d'équilibre s'écrit, dans le cas le plus général :

$$Q = K^0(T) \text{ à l'équilibre.}$$

Cette condition signifie également que :

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^N a_i^{\nu_i} &= \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0(T)}{RT}\right) \Rightarrow \sum_{i=1}^N \nu_i \ln a_i = -\frac{\Delta_r G^0(T)}{RT} \\ \Rightarrow \Delta_r G^0(T) + RT \sum_{i=1}^N \nu_i \ln a_i &= 0 \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^N (\nu_i \mu_i^0 + \nu_i RT \ln a_i) &= 0 \end{aligned}$$

soit encore :

$$\sum_{i=1}^N \nu_i \mu_i = 0 \quad (61)$$

En outre, la différentielle de la fonction  $G(T, P, n_1, \dots, n_N) = G(T, P, n_i)$  s'écrit :

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P, n_i} dT + \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T, n_i} dP + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T, P, n_{j \neq i}} dn_i$$

où :

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_{P, n_i} = -S \quad \left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_{T, n_i} = V \quad \left(\frac{\partial G}{\partial n_i}\right)_{T, P, n_{j \neq i}} = \mu_i$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} dG &= -S dT + V dP + \sum_{i=1}^N \mu_i dn_i \text{ avec } dn_i = \nu_i d\xi \\ &= -S dT + V dP + \sum_{i=1}^N \mu_i \nu_i d\xi \end{aligned}$$



Ainsi, en opérant à température constante, cette relation devient :

$$\frac{dG - V dP}{d\xi} = \sum_{i=1}^N \nu_i \mu_i$$

c'est-à-dire, lorsque l'équilibre est atteint et impose l'identité (61) :

$$\frac{dG - V dP}{d\xi} = 0$$

Deux cas se présentent alors :

- Si la réaction est réalisée à pression constante :

$$dP = 0 \Rightarrow \frac{dG}{d\xi} = 0$$

- Si le volume  $V$  du milieu réactionnel demeure constant :

$$V dP = d(PV) \Rightarrow \frac{d(G - PV)}{d\xi} = 0$$

où :

$$G - PV = (U + PV - TS) - PV = U - TS$$

définit l'énergie libre  $F = U - TS$  telle que :

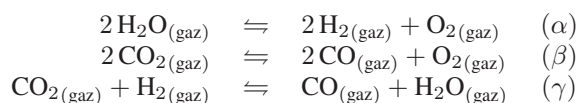
$$\frac{dF}{d\xi} = 0$$

Ce faisant, la condition générale de l'équilibre se ramène à la recherche :

- d'un *minimum* de l'enthalpie libre  $G = H - TS$  du milieu réactionnel, si la pression est maintenue constante ;
- d'un *minimum* de l'énergie libre  $F = U - TS$  du milieu réactionnel, si son volume est maintenu constant.

## ● 199 ————— Concours Commun Polytechnique

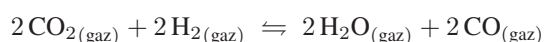
1. Les constantes des équilibres :



s'expriment en fonction des enthalpies libres *standard* correspondantes :

$$\begin{cases} K_\alpha^0 = e^{-\Delta_r G_\alpha^0 / RT} \\ K_\beta^0 = e^{-\Delta_r G_\beta^0 / RT} \\ K_\gamma^0 = e^{-\Delta_r G_\gamma^0 / RT} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_r G_\alpha^0 = -RT \ln K_\alpha^0 \\ \Delta_r G_\beta^0 = -RT \ln K_\beta^0 \\ \Delta_r G_\gamma^0 = -RT \ln K_\gamma^0 \end{cases} \quad (62)$$

En outre, différence des équations  $(\beta) - (\alpha)$  procure l'équation :



c'est-à-dire  $2(\gamma)$ . Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\Delta_r G_\beta^0 - \Delta_r G_\alpha^0 &= 2 \Delta_r G_\gamma^0 \Rightarrow -RT \ln \left( \frac{K_\beta^0}{K_\alpha^0} \right) = -2RT \ln K_\gamma^0 \Rightarrow \frac{K_\beta^0}{K_\alpha^0} = (K_\gamma^0)^2 \\ &\Rightarrow K_\alpha^0 = \frac{K_\beta^0}{(K_\gamma^0)^2}\end{aligned}$$

À la température  $T_1 = 2500$  K, on trouve ainsi :

$$K_\alpha^0(T_1) = \frac{1,4 \cdot 10^{-3}}{(6,4)^2} = 3,4 \cdot 10^{-5} \quad (63)$$

2. Pour la réaction d'équation :  $2\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})} \rightleftharpoons 2\text{H}_{2(\text{gaz})} + \text{O}_{2(\text{gaz})}$ , les données fournies par l'énoncé permettent le calcul des grandeurs suivantes, à  $T_0 = 298$  K :

$$\begin{aligned}\Delta_r H_{298}^0 &= 2 \underbrace{\Delta_f H_{298}^0(\text{H}_2)}_{=0} + \underbrace{\Delta_f H_{298}^0(\text{O}_2)}_{=0} - 2 \Delta_f H_{298}^0(\text{H}_2\text{O}) \\ &= 2 \times 241,6 = 483,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S_{298}^0 &= 2 S_{298}^0(\text{H}_2) + S_{298}^0(\text{O}_2) - 2 S_{298}^0(\text{H}_2\text{O}) \\ &= 2 \times 130,4 + 204,8 - 2 \times 188,5 = 88,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r C_p^0 &= 2 C_p^0(\text{H}_2) + C_p^0(\text{O}_2) - 2 C_p^0(\text{H}_2\text{O}) \\ &= 2 \times 34,7 + 35,9 - 2 \times 45,1 = 15,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

- (a) En admettant que  $\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r S^0$  sont indépendants de la température, l'enthalpie libre *standard* de la réaction :

$$\Delta_r G_\alpha^0(T) = \Delta_r H^0(T) - T \times \Delta_r S^0(T) \quad (64)$$

devient simplement :

$$\begin{aligned}\Delta_r G_\alpha^0(T_1) &= \Delta_r H_{298}^0 - T_1 \times \Delta_r S_{298}^0 = 483\,200 - 2\,500 \times 88,6 \\ &= 261,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

de sorte que la constante de la réaction vaut :

$$K_\alpha^0(T_1) = \exp \left[ -\frac{\Delta_r G_\alpha^0(T_1)}{RT_1} \right] = \exp \left( -\frac{261,7 \cdot 10^3}{8,3 \times 2\,500} \right) \quad (65)$$

$$\Rightarrow K_\alpha^0(T_1) = 3,3 \cdot 10^{-6} \quad (66)$$

- (b) Supposons maintenant que  $\Delta_r H_\alpha^0$  et  $\Delta_r S_\alpha^0$  dépendent de la température. Les lois de Kirchhoff :

$$\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 = 15,1 \text{ et } \frac{d(\Delta_r S^0)}{dT} = \frac{\Delta_r C_p^0}{T} = \frac{15,1}{T}$$

conduisent à :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^0(T_1) &= \Delta_r H_{298}^0 + \Delta_r C_p^0 \times (T_1 - T_0) \\ &= 483\,200 + 15,1 \times (2\,500 - 298) = 516,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\Delta_r S^0(T_1) &= \Delta_r S_{298}^0 + \Delta_r C_p^0 \ln\left(\frac{T_1}{T_0}\right) \\ &= 88,6 + 15,1 \times \ln\left(\frac{2\,500}{298}\right) = 120,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

Ce faisant, la relation (64) s'écrit :

$$\Delta_r G_\alpha^0(T_1) = \Delta_r H^0(T_1) - T_1 \times \Delta_r S^0(T_1) = 516\,500 - 2\,500 \times 120,7 = 214,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

d'où il s'ensuit que :

$$K_\alpha^0(T_1) = \exp\left[-\frac{\Delta_r G_\alpha^0(T_1)}{RT_1}\right] = \exp\left(-\frac{214,8 \cdot 10^3}{8,3 \times 2\,500}\right) \Rightarrow K_\alpha^0(T_1) = 3,2 \cdot 10^{-5}$$

**Remarque** – Cette valeur, compatible avec le résultat (63), mais pas avec le résultat (66), montre l'inadéquation de l'approximation d'Ellingham : on ne peut pas supposer, ici, que  $\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r S^0$  sont indépendants de la température, compte tenu de la grande variation de cette-ci :  $\Delta T = 2\,500 - 298 = 2\,202 \text{ K}$ .

## ● 200 ————— Lycée du Parc, Lyon

1. L'enthalpie libre du mélange s'écrit :

$$\begin{aligned}G &= n_3 [\mu_3^{0\ell} + RT \ln n_3 - RT \ln(n_3 + n_4)] \\ &\quad + n_4 [\mu_4^{0\ell} + RT \ln n_4 - RT \ln(n_3 + n_4)] - 3RT \frac{n_3 n_4}{n_3 + n_4}\end{aligned}$$

de sorte que le potentiel chimique de  $A_3$  dans  $\mathcal{N}$  suit la définition :

$$\begin{aligned}\mu_3^\ell &= \left(\frac{\partial G}{\partial n_3}\right)_{T,P,n_4} = \mu_3^{0\ell} + RT \ln\left(\frac{n_3}{n_3 + n_4}\right) \\ &\quad + \underbrace{n_3 RT \left[\frac{1}{n_3} - \frac{1}{n_3 + n_4}\right] + n_4 RT \left[-\frac{1}{n_3 + n_4}\right]}_{=0} \\ &\quad - 3RT \times \frac{n_4(n_3 + n_4) - n_3 n_4}{(n_3 + n_4)^2} \\ &= \mu_3^{0\ell} + RT \ln\left(\frac{n_3}{n_3 + n_4}\right) - 3RT \times \left(\frac{n_4}{n_3 + n_4}\right)^2\end{aligned}$$

En remarquant que la fraction molaire de  $A_3$  dans  $\mathcal{N}$  est définie par :

$$x_3 = \frac{n_3}{n_3 + n_4} \Rightarrow \frac{n_4}{n_3 + n_4} = 1 - x_3$$

on trouve finalement :

$$\mu_3^\ell = \mu_3^{0\ell} + RT \ln x_3 - 3RT \times (1 - x_3)^2 \quad (67)$$

2. (a) Le potentiel chimique du gaz  $A_3$ , supposé parfait, est donné par la loi :

$$\mu_3^v = \mu_3^{0v} + RT \ln \left( \frac{P_3}{P_0} \right) \quad (68)$$

où  $P_0 = 1$  bar désigne la pression *standard*.

- (b) Lorsque  $A_3$  est un corps pur en équilibre liquide-vapeur,  $x_3$  vaut 1 tandis que  $P_3$  vaut  $P_3^*$ . En outre, l'équilibre diphasé est conditionné par l'identité :

$$\mu_3^\ell = \mu_3^v \Rightarrow \mu_3^{0\ell} = \mu_3^{0v} + RT \ln \left( \frac{P_3^*}{P_0} \right) \quad (69)$$

- (c) Dans le mélange  $\mathcal{N}$ , l'équilibre de  $A_3$  entre les phases liquide et gazeuse est à nouveau conditionné par l'identité de ses potentiels chimiques, dont les expressions générales sont fournies par les résultats (67) et (68) :

$$\mu_3^v = \mu_3^\ell \Rightarrow \mu_3^{0v} + RT \ln \left( \frac{P_3}{P_0} \right) = \mu_3^{0\ell} + RT \ln x_3 - 3RT \times (1 - x_3)^2$$

où l'expression (69) de  $\mu_3^{0\ell}$  conduit à :

$$\begin{aligned} \mu_3^{0v} + RT \ln \left( \frac{P_3}{P_0} \right) &= \mu_3^{0v} + RT \ln \left( \frac{P_3^*}{P_0} \right) + RT \ln x_3 - 3RT \ln(1 - x_3)^2 \\ \Rightarrow RT \ln \left( \frac{P_3}{P_3^*} \right) &= RT \ln x_3 - 3RT \ln(1 - x_3)^2 \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$P_3 = P_3^* \times x_3 \exp[-3(1 - x_3)^2] \quad (70)$$

- (d) Lorsque  $x_3$  tend vers 1, la loi précédente devient, au premier ordre en  $x_3$  :

$$P_3 \simeq x_3 \times P_3^*$$

ce qui confirme la loi de Raoult.

3. (a) Les pressions partielles de  $A_3$  et  $A_4$  sont données par la loi (70) :

$$P_3 = P_3^* \times x_3 e^{-3(1-x_3)^2} \text{ et } P_4 = P_4^* \times x_4 e^{-3(1-x_4)^2}$$

où l'énoncé impose  $x_4 = x$ , tandis que  $x_3 = 1 - x_4 = 1 - x$ . Il s'ensuit que :

$$P_3 = P_3^* \times (1 - x) e^{3x^2} \text{ et } P_4 = P_4^* \times x e^{-3(1-x)^2}$$

en conséquence de quoi la pression totale de la phase gazeuse vaut :

$$P = P_3 + P_4 = P_3^* \times (1 - x) e^{3x^2} + P_4^* \times x e^{-3(1-x)^2} \quad (71)$$

En outre, la pression partielle  $P_4$  de  $A_4$  dans la phase gazeuse est proportionnelle à la fraction molaire  $y_4$  de  $A_4$  gazeux :

$$P_4 = y_4 \times P = y \times P \Rightarrow y = \frac{P_4}{P}$$

d'où il s'ensuit que :

$$y = \frac{P_4^* \times x e^{-3(1-x)^2}}{P_3^* \times (1-x) e^{-3x^2} + P_4^* \times x e^{-3(1-x)^2}} \quad (72)$$

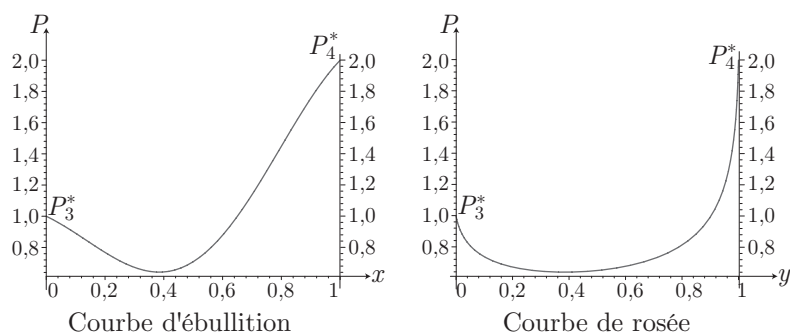
- (b) La courbe d'ébullition est la courbe  $P(x)$  issue de la relation (71), dans laquelle  $P_3^* = 1 \text{ bar}$  et  $P_4^* = 2 \text{ bar}$  :

$$P(x) = (1-x) e^{-3x^2} + 2x e^{-3(1-x)^2}$$

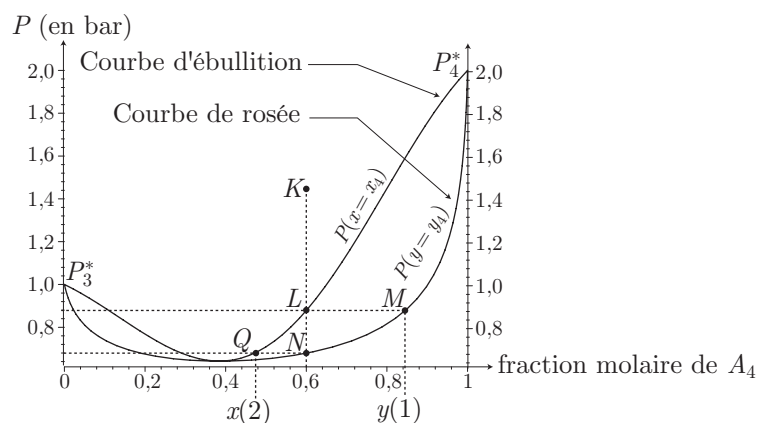
En revanche, la courbe de rosée est la courbe  $P(y)$  que l'on obtient en traçant la courbe paramétrée  $(y(x), P(x))$ , où  $y(x)$  est issu de l'expression (72), dans laquelle  $P_3^* = 1 \text{ bar}$  et  $P_4^* = 2 \text{ bar}$  :

$$y(x) = \frac{2x e^{-3(1-x)^2}}{(1-x) e^{-3x^2} + x e^{-3(1-x)^2}}$$

On obtient ainsi les deux courbes suivantes :



4. La réunion des deux diagrammes précédents conduit au diagramme des phases du mélange binaire :



- (a) Initialement, le liquide contient  $A_3$  et  $A_4$ , ce dernier ayant pour fraction molaire :

$$x_4 = \frac{n_4}{n_3 + n_4} = \frac{6 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}} = 0,6$$

**CORRIGÉS**

En soulevant le tube, on provoque un abaissement de la pression du mélange initialement décrit par le point  $K$  du diagramme des phases. Ainsi, la première bulle de vapeur est représentée par le point  $L$  de la courbe d'ébullition, abscisse :

$$x(1) = 0,6$$

et d'ordonnée  $P_1 = 0,84$  bar. Or, dans le mercure, de masse volumique  $\rho$  constante, la pression  $P$  varie avec l'altitude  $z$ , conformément à la loi :

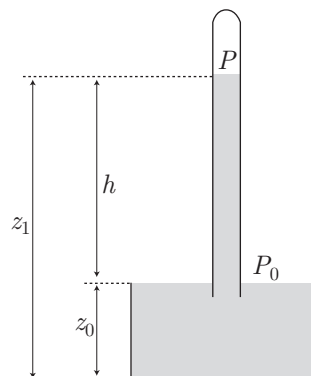
$$\frac{dP}{dz} = -\mu g \Rightarrow dP = -\mu g dz$$

Notamment, si  $P = P_0 = 1$  bar à la surface libre de la cuve à mercure ( $z = z_0$ ) :

$$\int_{P_0}^P dP = -\mu g \int_{z_0}^{z_1=z_0+h} dz = -\mu g h$$

$$\Rightarrow P - P_0 = -\mu g h$$

En outre, l'énoncé précise qu'une hauteur  $h_0 = 76$  cmHg correspond à une variation de pression  $P_0 - P = P_0 = 1$  bar. C'est pourquoi :



$$P_0 = \mu g h_0 \Rightarrow \mu g = \frac{P_0}{h_0} \Rightarrow P - P_0 = -\mu g h = -P_0 \frac{h}{h_0} \quad (73)$$

$$\Rightarrow h = h_0 \times \left(1 - \frac{P}{P_0}\right) \quad (74)$$

Ce faisant, la pression  $P_1 = 0,84$  bar est atteinte au sommet d'une colonne de mercure de hauteur :

$$h_1 = h_0 \times \left(1 - \frac{P_1}{P_0}\right) = 76 \times (1 - 0,84) \Rightarrow h_1 = 12,2 \text{ cm}$$

À cette pression, la phase vapeur contient le composé  $A_4$  dont la fraction molaire  $y(1)$  est donnée par l'abscisse du point  $M$  de la courbe de rosée :  $y(1) \simeq 0,84$ .

- (b) Le même diagramme révèle que la dernière goutte de liquide disparaît au point  $N$  de la courbe de rosée, d'ordonnée  $P_2 \simeq 0,74$  bar et d'abscisse  $y(2) = 0,6$ . Une telle pression est obtenue pour une hauteur de mercure :

$$h_2 = h_0 \times \left(1 - \frac{P_2}{P_0}\right) = 76 \times (1 - 0,74) \Rightarrow h_2 = 19,8 \text{ cm}$$

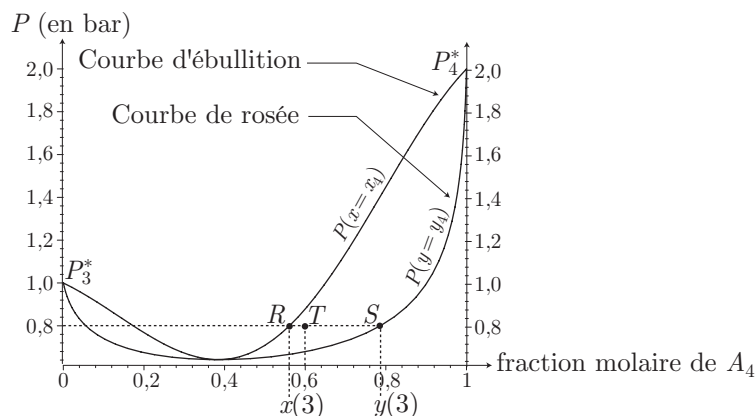
Cette dernière goutte de liquide contient alors  $A_4$  avec une fraction molaire  $x(2)$  donnée par l'abscisse du point  $Q$  de la courbe d'ébullition :  $x(2) \simeq 0,48$ .

- (c) Lorsque la dénivellation vaut  $h_3 = 15,2$  cm, la pression  $P_3$  du mélange binaire est donnée par la relation (73) :

$$P_3 = P_0 \times \left(1 - \frac{h_3}{h_0}\right) = 1 - \frac{15,2}{76} = 0,8 \text{ bar}$$

À une telle pression, la composition du mélange s'obtient à partir des abscisses des points  $R$  et  $S$  des courbes d'ébullition et de rosée respectivement :

$$x(3) = 0,56 \text{ et } y(3) = 0,79$$



En outre, la fraction molaire totale de  $A_4$  demeure égale à  $w_4 = \frac{n_4}{n_3 + n_4} = 0,6$  ; dans le diagramme des phases apparaît aussi le point  $T$  ( $w_4 = 0,6$  ;  $P = 0,8$  bar). La règle des moments révèle que la phase gazeuse contient :

$$\begin{aligned} n_g &= n \times \frac{RT}{RS} \text{ où } n = n_1 + n_2 = 0,01 \text{ mol} \\ &= 0,01 \times \frac{0,6 - 0,56}{0,79 - 0,56} = 1,74 \cdot 10^{-3} \text{ mole de gaz.} \end{aligned}$$

La phase gazeuse contient donc  $n_{4g}$  et  $n_{3g}$  moles de  $A_4$  et de  $A_3$  gazeux, tels que :

$$n_{4g} = y(3) \times n_g \Rightarrow n_{4g} = 1,37 \cdot 10^{-3} \text{ mole de } A_4 \text{ gazeux}$$

et :

$$n_{3g} = n_g - n_{4g} \Rightarrow n_{3g} = 0,37 \cdot 10^{-3} \text{ mole de } A_3 \text{ gazeux.}$$

Quant à la quantité de matière  $n_\ell$  présente dans la phase liquide, elle vérifie :

$$n_g + n_\ell = n \Rightarrow n_\ell = n - n_g = 0,01 - 1,74 \cdot 10^{-3} = 8,26 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

On y trouve alors les espèces  $A_3$  et  $A_4$ , avec les quantités respectives :

$$n_{4\ell} = x(3) \times n_g \Rightarrow n_{4\ell} = 4,63 \cdot 10^{-3} \text{ mole de } A_4 \text{ liquide}$$

et :

$$n_{3\ell} = n_\ell - n_{4\ell} \Rightarrow n_{3\ell} = 3,63 \cdot 10^{-3} \text{ mole de } A_3 \text{ liquide.}$$

● 201 Lycée du Parc, Lyon

1. La première relation de Gibbs-Helmholtz fournit directement :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_r H^0(T)}{T^2} &= -\frac{d}{dT} \left( \frac{\Delta_r G^0}{T} \right) = \frac{d}{dT} \left( \frac{\mathcal{A}^0}{T} \right) \text{ car } \mathcal{A}^0 = -\Delta_r G^0 \\ &= \frac{d}{dT} \left( \frac{115\,400}{T} - 130,5 + 0,5 \ln T \right) \\ &= -\frac{115\,400}{T^2} + \frac{0,5}{T} \Rightarrow \Delta_r H^0(T) = -115\,400 + 0,5 \times T \end{aligned}$$

Quant à l'entropie *standard* de la réaction, elle est directement accessible à partir de la loi :

$$\begin{aligned} \Delta_r S^0(T) &= -\frac{d\Delta_r G^0}{dT} = \frac{d\mathcal{A}^0}{dT} = \frac{d}{dT} (115\,400 - 130,5 \times T + 0,5 \times T \ln T) \\ &\Rightarrow \Delta_r S^0(T) = -130,5 + 0,5 \times (\ln T + 1) \\ &\Rightarrow \Delta_r S^0(T) = -130 + 0,5 \times \ln T \end{aligned}$$

Soit  $\Delta_r C_p^0$  la capacité thermique *standard* de la réaction. La loi :  $\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0$  suffit à montrer que :

$$\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = 0,5 = \Delta_r C_p^0$$

2. À la température  $T = 800$  K, on trouve :

$$\Delta_r H^0(T) = -115\,400 + 0,5 \times 800 \Rightarrow \Delta_r H^0(T) = -115 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et :

$$\Delta_r S^0(T) = -130 + 0,5 \times \ln(800) \Rightarrow \Delta_r S^0(T) = -126,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

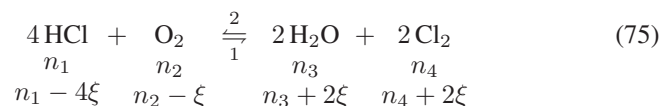
3. Sachant que :

$$\begin{aligned} \Delta_r G^0(T) &= -\mathcal{A}^0(T) \\ &= -115\,400 + 130,5 \times 800 - 0,5 \times 800 \times \ln(800) = -13,67 \end{aligned}$$

la réaction a pour constante :

$$K^0(T) = \exp \left( -\frac{\Delta_r G^0}{RT} \right) = \exp \left( \frac{13,67 \cdot 10^3}{8,314 \times 800} \right) \Rightarrow K^0(T) = 7,8$$

4. (a) Dans l'équilibre :



les différents gaz ont initialement pour activités :



$$a_{\text{HCl}} = \frac{n_1}{n_0} \times \frac{P_t}{P_0} \quad a_{\text{O}_2} = \frac{n_2}{n_0} \times \frac{P_t}{P_0}$$

$$a_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{n_3}{n_0} \times \frac{P_t}{P_0} \quad a_{\text{Cl}_2} = \frac{n_4}{n_0} \times \frac{P_t}{P_0}$$

auquel cas le quotient de réaction vaut initialement :

$$Q_i = \frac{a_{\text{H}_2\text{O}}^2 a_{\text{Cl}_2}^2}{a_{\text{HCl}}^4 a_{\text{O}_2}} = \frac{n_3^2 n_4^2 n_0}{n_1^4 n_2} \times \frac{P_0}{P_t} = \frac{n_3^2 n_4^2 n_0}{n_1^4 n_2} \text{ car } P_t = P_0$$

Par suite, l'affinité chimique initiale de ce mélange vaut :

$$\mathcal{A}_i(T) = \mathcal{A}^0(T) - RT \ln Q_i = -\Delta_r G^0(T) - RT \ln Q_i \quad (76)$$

• Premier cas :

$$\begin{cases} n_1 = n_2 = 1 \\ n_3 = n_4 = 0,5 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{A}_i(T) = 13,67 \cdot 10^3 - 8,314 \times 800 \times \ln [(0,5)^4 \times 3]$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_i = 24,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} > 0$$

• Deuxième cas :

$$\begin{cases} n_1 = n_2 = 0,5 \\ n_3 = n_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{A}_i(T) = 13,67 \cdot 10^3 - 8,314 \times 800 \times \ln \left[ \frac{3}{(0,5)^4} \right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_i(T) = -12,1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} < 0$$

- (b) Les signes trouvés précédemment révèlent que dans le premier cas, l'équilibre (75) est déplacé dans le sens (1) ; tandis qu'il est déplacé dans le sens (2) dans le deuxième cas.
- (c) Lorsque l'avancement de la réaction (75) est non nul, le nombre total de moles de gaz atteint la valeur :

$$n_t = (n_1 - 4\xi) + (n_2 - \xi) + (n_3 + 2\xi) + (n_4 + 2\xi)$$

$$= n_0 - \xi \text{ car } n_0 = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$$

Aussi, la fraction molaire de  $\text{O}_2$  vaut-elle :

$$x_{\text{O}_2} = \frac{n_{\text{O}_2}}{n_t} = \frac{n_2 - \xi}{n_0 - \xi}$$

- (d) Soient  $n_{\text{H}_2\text{O}} = n_3 + 2\xi$ ,  $n_{\text{Cl}_2} = n_4 + 2\xi$ ,  $n_{\text{HCl}} = n_1 - 4\xi$  les nombres de moles de  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Cl}_2$  et  $\text{HCl}$  respectivement, à partir desquels sont définies les activités :

$$a_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n_t} \times \frac{P_t}{P_0} \quad a_{\text{Cl}_2} = \frac{n_{\text{Cl}_2}}{n_t} \times \frac{P_t}{P_0}$$

$$a_{\text{HCl}} = \frac{n_{\text{HCl}}}{n_t} \times \frac{P_t}{P_0} \quad a_{\text{O}_2} = x_{\text{O}_2} \times \frac{P_t}{P_0}$$

Le quotient de réaction est alors défini par :

$$Q = \frac{a_{\text{H}_2\text{O}}^2 \times a_{\text{Cl}_2}^2}{a_{\text{HCl}}^4 \times a_{\text{O}_2}} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}^2 \times n_{\text{Cl}_2}^2}{n_{\text{HCl}}^4} \times \frac{1}{x_{\text{O}_2}} \times \frac{P_0}{P_t}$$

$$= \left( \frac{n_3 + 2\xi}{n_1 - 4\xi} \right)^4 \times \frac{1}{x_{\text{O}_2}} \times \frac{P_0}{P_t}$$

Or, à l'équilibre,  $Q$  s'identifie à  $K^0(T)$ , tandis que  $\xi$  prend la valeur  $\xi_e$  telle que :

$$K^0(T) = \left( \frac{n_3 + 2\xi_e}{n_1 - 4\xi_e} \right)^4 \times \frac{1}{x_{O_2}} \times \frac{P_0}{P_t}$$

$$\Rightarrow \frac{n_3 + 2\xi_e}{n_1 - 4\xi_e} = \sqrt[4]{\frac{K^0(T) x_{O_2} P_t}{P_0}}$$

c'est-à-dire, en posant  $\alpha = \sqrt[4]{\frac{K^0(T) x_{O_2} P_t}{P_0}}$  :

$$n_3 + 2\xi_e = \alpha n_1 - 4\alpha \xi_e$$

$$\Rightarrow \xi_e = \frac{\alpha n_1 - n_3}{2 + 4\alpha} \text{ avec } \alpha = \sqrt[4]{\frac{K^0(T) x_{O_2} P_t}{P_0}}$$

(e) Dans les deux cas présentés précédemment,  $\xi_e$  et  $x_{O_2}$  sont solutions des équations suivantes :

- Pour  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $n_3 = 0,5$  et  $P_t = P_0$  :

$$x_{O_2} = \frac{1 - \xi_e}{3 - \xi_e} \text{ et } \xi_e = \frac{\alpha - 0,5}{2 + 4\alpha} \text{ avec } \alpha = \sqrt[4]{7,8 \times x_{O_2}}$$

Une résolution numérique fournit :

$$x_{O_2} = 0,30 \text{ et } \xi_e = 0,11 \text{ mole}$$

ce qui confirme le résultat de la question 4.(b) : l'équilibre (75) évolue dans le sens (1).

- Pour  $n_1 = n_2 = 0,5$ ,  $n_3 = 1$  et  $P_t = P_0$  :

$$x_{O_2} = \frac{0,5 - \xi_e}{3 - \xi_e} \text{ et } \xi_e = \frac{0,5\alpha - 1}{2 + 4\alpha} \text{ avec } \alpha = \sqrt[4]{7,8 \times x_{O_2}}$$

Un nouvelle résolution numérique conduit à :

$$x_{O_2} = 0,18 \text{ et } \xi_e = -0,07 \text{ mole}$$

ce qui traduit le déplacement de l'équilibre (75) dans le sens (2), conformément aux conclusions de la question (4).b.

5. (a) Soient  $n_{1e}$ ,  $n_{2e}$ ,  $n_{3e}$  et  $n_{4e}$  les nombres de moles de HCl, O<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O et Cl<sub>2</sub> à l'équilibre, c'est-à-dire qui annulent l'affinité chimique :  $\mathcal{A}_e = 0$ . En ajoutant  $\delta\varepsilon$  mole de O<sub>2</sub>, son nombre de moles passe à  $n_{O_2} = n_{2e} + \delta\varepsilon$ , tandis que l'affinité chimique prend la valeur  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_e + d\mathcal{A} = d\mathcal{A}$ . Or, conformément à l'identité (76), l'affinité chimique vaut :

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 - RT \ln Q_i = \mathcal{A}^0 - RT \ln \left( \frac{n_{H_2O}^2 \times n_{Cl_2}^2}{n_{HCl}^4} \times \frac{P_0}{P_t} \times \frac{n_t}{n_{O_2}} \right)$$

où  $n_t = n_{\text{H}_2\text{O}} + n_{\text{Cl}_2} + n_{\text{HCl}} + n_{\text{O}_2}$  désigne le nombre total de moles de gaz. C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{A}^0 - RT \ln \left[ \frac{(n_{3e} n_{4e})^2}{n_{1e}^4} \times \frac{P_0}{P_t} \times \frac{n_t^e}{n_{2e}} \right] \\ \Rightarrow \mathcal{A}^0 &= RT \ln \left[ \frac{n_{3e}^2 n_{4e}^2}{n_{1e}^4} \times \frac{P_0}{P_t} \times \frac{n_t^e}{n_{2e}} \right] \end{aligned}$$

tandis que, après ajout de  $\delta\varepsilon$  mole de  $\text{O}_2$  :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \mathcal{A}^0 - RT \ln \left( \frac{n_{3e}^2 n_{4e}^2}{n_{1e}^4} \times \frac{P_0}{P_t} \times \frac{n_t}{n_{2e} + \delta\varepsilon} \right) \\ &= -RT \ln \left( \frac{n_t}{n_t^e} \right) + RT \ln \left( \frac{n_{2e} + \delta\varepsilon}{n_{2e}} \right) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{n_t}{n_t^e} &= \frac{n_{3e} + n_{4e} + n_{1e} + n_{2e} + \delta\varepsilon}{n_{3e} + n_{4e} + n_{1e} + n_{2e}} = 1 + \frac{\delta\varepsilon}{n_t^e} \\ \Rightarrow d\mathcal{A} &= -RT \ln \left( 1 + \frac{\delta\varepsilon}{n_t^e} \right) + RT \ln \left( 1 + \frac{\delta\varepsilon}{n_{2e}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, en choisissant  $\delta\varepsilon$  suffisamment petit, un développement limité fournit :

$$d\mathcal{A} = -RT \frac{\delta\varepsilon}{n_t^e} + RT \frac{\delta\varepsilon}{n_{2e}} = RT \delta\varepsilon \left( \frac{1}{n_{2e}} - \frac{1}{n_t^e} \right)$$

En remarquant que  $n_t^e > n_{2e}$ , on déduit alors que  $d\mathcal{A} > 0$ , ce qui signifie que l'équilibre (75) est déplacé dans le sens (1).

- (b) En introduisant une faible quantité d'air, on introduit  $\delta\varepsilon$  mole de  $\text{O}_2$  et  $4\delta\varepsilon$  mole de  $\text{N}_2$ , dont les quantités passent alors aux valeurs  $n_{\text{O}_2} = n_{2e} + \delta\varepsilon$  et  $n_{\text{N}_2} = 4\delta\varepsilon$ . Ce faisant, le nombre total de moles de gaz passe de  $n_t^e = n_{1e} + n_{2e} + n_{3e} + n_{4e}$  à  $n_t = n_t^e + 5\delta\varepsilon$ . C'est pourquoi l'affinité chimique prend la valeur :

$$d\mathcal{A} = \mathcal{A}^0 - RT \ln \left( \frac{n_{3e}^2 n_{4e}^2}{n_{1e}^4} \times \frac{P_0}{P_t} \times \frac{n_t}{n_{2e} + \delta\varepsilon} \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^0 &= RT \ln \left( \frac{n_{3e}^2 n_{4e}^2}{n_{1e}^4} \times \frac{P_0}{P_t} \times \frac{n_t^e}{n_{2e}} \right) \\ \Rightarrow d\mathcal{A} &= -RT \ln \left( \frac{n_t}{n_t^e} \right) + RT \ln \left( \frac{n_{2e} + \delta\varepsilon}{n_{2e}} \right) \\ \Rightarrow d\mathcal{A} &= -RT \ln \left( 1 + \frac{5\delta\varepsilon}{n_t^e} \right) + RT \ln \left( 1 + \frac{\delta\varepsilon}{n_{2e}} \right) \\ \Rightarrow d\mathcal{A} &\simeq -RT \frac{5\delta\varepsilon}{n_t^e} + RT \times \frac{\delta\varepsilon}{n_{2e}} \\ \Rightarrow d\mathcal{A} &\simeq RT \delta\varepsilon \times \left( \frac{1}{n_{2e}} - \frac{5}{n_t^e} \right) \end{aligned}$$

Or, juste avant introduction de l'air,  $n_{O_2} = n_{2e}$  permet de définir la fraction molaire de  $O_2$  :

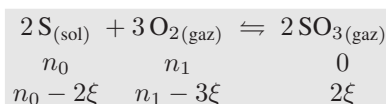
$$x_{O_2}^e = \frac{n_{2e}}{n_t^e} \Rightarrow n_{2e} = x_{O_2}^e \times n_t^e \Rightarrow dA = \frac{RT \delta \varepsilon}{n_t^e} \times \left( \frac{1}{x_{O_2}^e} - 5 \right)$$

Ainsi, si  $x_{O_2}^e > 0,2 = \frac{1}{5}$ ,  $dA < 0$  montre que la réaction évolue dans le sens (2) alors que son évolution s'effectue dans le sens (1) si  $x_{O_2}^e < 0,2$ . Par conséquent :

- si l'ajout d'air est réalisé dans le premier cas ( $x_{O_2}^e = 0,3 > 0,2$ ), la réaction évolue dans le sens (2) ;
- si l'ajout d'air est effectué dans le deuxième cas ( $x_{O_2}^e = 0,18 < 0,2$ ), la réaction évolue dans le sens (1).

## ● 202 ————— Concours Vété

1. La combustion du soufre solide dans le dioxygène admet pour bilan :



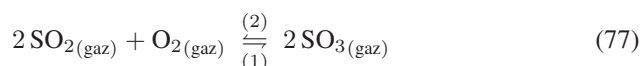
La combustion de 160 g, c'est-à-dire de  $n_0 = \frac{160}{32} = 5$  moles de soufre dégage une chaleur :

$$Q_p = -\xi \times \Delta_r H^0 = -\frac{n_0}{2} \times \Delta_r H^0 = 1980 \text{ kJ}$$

où  $\Delta_r H^0$  est l'enthalpie *standard* de la réaction ci-dessus, qui s'identifie à l'enthalpie *standard*  $\Delta_f H^0$  ( $SO_3$ ) de formation de  $SO_{3(gaz)}$ . Il s'ensuit que :

$$\Delta_f H^0 (SO_3) = -\frac{2 \times 1980}{5} = -792 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2. La réaction suivante :



a pour enthalpie *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^0 &= 2 \Delta_f H^0 (SO_{3(gaz)}) - \Delta_f H^0 (O_{2(gaz)}) - 2 \Delta_f H^0 (SO_{2(gaz)}) \\ &= -2 \times 792 + 2 \times 296 \text{ car } \Delta_f H^0 (O_{2(gaz)}) = 0 \\ \Rightarrow \Delta_r H_1^0 &= -992 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

3. La loi de Van t'Hoff :  $\frac{\partial \ln K}{\partial T} = \frac{\Delta_r H_1^0}{RT^2} < 0$  montre que la constante  $K$  de la réaction (77) décroît avec la température ; une augmentation de température déplace l'équilibre dans le sens (1), comme c'est toujours le cas pour une réaction exothermique ( $\Delta_r H_1^0 < 0$ ).

4. Quant à l'entropie *standard* de la réaction (77), elle vaut :

$$\begin{aligned}\Delta_r S_1^0 &= 2 S^0(\text{SO}_3) - S^0(\text{O}_2) - 2 S^0(\text{SO}_2) \\ &= 2 \times 256 - 205 - 2 \times 248 \Rightarrow \Delta_r S_1^0 = -189 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

En milieu gazeux,  $\Delta_r S^0$  présente le même signe que la somme des coefficients stœchiométriques algébriques :

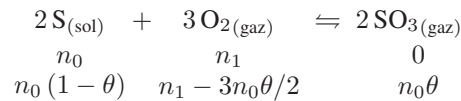
$$\sum_i \nu_i = 2 - 1 - 2 = -1 < 0$$

ce qui justifie le signe négatif de  $\Delta_r S_1^0$ .

5. La loi de modération des équilibres précise qu'une augmentation de la pression du système sera suivie d'un déplacement de l'équilibre dans le sens qui consomme des gaz (afin d'atténuer l'augmentation de pression). Par conséquent, une augmentation de pression déplace l'équilibre (77) dans le sens (1).
6. (a) Si  $n_0$  représente la quantité initiale de  $\text{SO}_2$  et  $n_{\text{SO}_2}$  sa quantité à l'équilibre, le taux de conversion  $\theta$  est défini par le rapport :

$$\theta = \frac{n_0 - n_{\text{SO}_2}}{n_0} = 1 - \frac{n_{\text{SO}_2}}{n_0} \Rightarrow n_{\text{SO}_2} = n_0 (1 - \theta)$$

Ce faisant, la réaction de synthèse de  $\text{SO}_3$  admet pour bilan :



Aussi, en notant  $n_t$  le nombre total de moles de gaz et  $P$  la pression du milieu réactionnel, les pressions partielles de  $\text{SO}_2$  et  $\text{SO}_3$  sont définies par :

$$\begin{cases} P_{\text{SO}_2} = \frac{n_0 (1 - \theta)}{n_t} P \\ P_{\text{SO}_3} = \frac{n_0 \theta}{n_t} P \end{cases} \Rightarrow \frac{P_{\text{SO}_2}}{P_{\text{SO}_3}} = \frac{1 - \theta}{\theta} \quad (78)$$

$$\Rightarrow \theta \times P_{\text{SO}_2} = P_{\text{SO}_3} - \theta \times P_{\text{SO}_3} \quad (79)$$

$$(80)$$

d'où il ressort que :

$$\theta = \frac{P_{\text{SO}_3}}{P_{\text{SO}_2} + P_{\text{SO}_3}} = \frac{\frac{P_{\text{SO}_3}}{P_{\text{SO}_2}}}{1 + \frac{P_{\text{SO}_3}}{P_{\text{SO}_2}}}$$

- (b) Les activités des gaz présents à l'équilibre (77) valent :

$$a_{\text{SO}_2} = \frac{P_{\text{SO}_2}}{P_0} \quad a_{\text{SO}_3} = \frac{P_{\text{SO}_3}}{P_0} \quad a_{\text{O}_2} = \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} \text{ où } P_0 = 1 \text{ bar}$$

Par conséquent, la loi d'action des masses s'écrit :

$$\begin{aligned} K &= \frac{a_{\text{SO}_3}^2}{a_{\text{SO}_2}^2} \times \frac{1}{a_{\text{O}_2}} = \left( \frac{P_{\text{SO}_3}}{P_{\text{SO}_2}} \right)^2 \times \frac{P_0}{P_{\text{O}_2}} \\ &\Rightarrow \left( \frac{P_{\text{SO}_3}}{P_{\text{SO}_2}} \right)^2 = \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} \times K = \frac{0,025}{1} \times 3\,240 = 81 \\ &\Rightarrow \frac{P_{\text{SO}_3}}{P_{\text{SO}_2}} = 9 \Rightarrow \theta = \frac{9}{10} = 0,9 \end{aligned}$$

(c) La pression totale  $P$  vaut la somme des pressions partielles :

$$P_{\text{SO}_2} + P_{\text{SO}_3} + P_{\text{O}_2} = P \Rightarrow P_{\text{SO}_2} + P_{\text{SO}_3} = P - P_{\text{O}_2}$$

où la relation (78) fournit :

$$\begin{aligned} P_{\text{SO}_2} + P_{\text{SO}_3} &= P_{\text{SO}_3} \times \left( \frac{1-\theta}{\theta} + 1 \right) = P_{\text{SO}_3} \times \frac{1}{\theta} = \frac{10}{9} P_{\text{SO}_3} \\ &\Rightarrow \frac{10}{9} P_{\text{SO}_3} = P - P_{\text{O}_2} = 1 - 0,025 = 0,975 \text{ bar} \\ &\Rightarrow P_{\text{SO}_3} = 0,877 \text{ bar} \end{aligned}$$

De même, l'identité (78) conduit à :

$$P_{\text{SO}_2} = \frac{1-\theta}{\theta} P_{\text{SO}_3} = \frac{0,1}{0,9} P_{\text{SO}_3} \Rightarrow P_{\text{SO}_2} = 0,097 \text{ bar}$$

## ● 203 ————— Concours Commun Polytechnique

1. (a) Compte tenu des coefficients stœchiométriques de l'équation-bilan :



la loi de Hess fournit, à la température  $T_0 = 298 \text{ K}$  :

$$\begin{aligned} \Delta_r G^0 &= 3 \Delta_f G^0(\text{H}_2) + \Delta_f G^0(\text{CO}) - \Delta_f G^0(\text{H}_2\text{O}) - \Delta_f G^0(\text{CH}_4) \\ &= -137,2 + 228,6 + 50,3 \\ &\Rightarrow \Delta_r G^0(T_0) = 141,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

La valeur élevée et positive de  $\Delta_r G^0(T_0)$  montre que la réaction est peu favorable à la formation de CO et de H<sub>2</sub>.

(b) Étant donné que  $\Delta_r G^0(T_0) = \Delta_r H^0(T_0) - T_0 \times \Delta_r S^0(T_0)$ , il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \Delta_r S^0(T_0) &= \frac{\Delta_r H^0(T_0) - \Delta_r G^0(T_0)}{T_0} = \frac{205,7 \cdot 10^3 - 141,7 \cdot 10^3}{298} \\ &\Rightarrow \Delta_r S^0(T_0) = 214,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

En phase gazeuse,  $\Delta_r S^0$  a le même signe que la somme des coefficients stœchiométriques de l'équation-bilan :

$$\sum_i \nu_i = 1 + 3 - (1 + 1) = 2 > 0 \Rightarrow \Delta_r S^0 > 0$$

Le signe trouvé pour  $\Delta_r S^0$  confirme alors cette loi.

(c) À la température  $T_0 = 298$  K, la constante d'équilibre vaut :

$$K^0(T_0) = \exp\left[-\frac{\Delta_r G^0(T_0)}{RT_0}\right] = \exp\left[-\frac{141,7 \cdot 10^3}{8,31 \times 298}\right]$$

$$\Rightarrow K^0(T_0) = 1,4 \cdot 10^{-25}$$

2. En vertu de la loi de Van t'Hoff :

$$\frac{dK^0}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} > 0 \text{ car } \Delta_r H^0 = 205,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

ce qui montre qu'une augmentation de température provoque une augmentation concomitante de  $K^0$  et donc du rendement de la réaction.

3. La loi de modération des équilibres stipule qu'une augmentation de la pression  $P$  du milieu réactionnel déplacerait l'équilibre dans le sens d'une diminution de la quantité totale de gaz (atténuant ainsi l'augmentation de  $P$ ). La réaction serait ainsi déplacée dans le sens de la consommation de  $H_2$  ; son rendement diminuerait.

4. (a) L'enthalpie libre *standard* de la réaction dépend de la température conformément à la loi :

$$\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0(T_0) - T \times \Delta_r S^0(T_0)$$

où  $\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r S^0$  sont supposés indépendants de la température. Ce faisant, l'équilibre (81) devient favorable à la formation de CO dès que  $\Delta_r G^0$  est négatif (dans ce cas  $K^0 = e^{-\Delta_r G^0/RT} > 1$ ) c'est-à-dire lorsque :

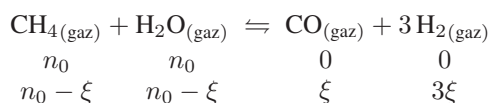
$$\Delta_r H^0(T_0) - T \times \Delta_r S^0(T_0) < 0 \Rightarrow T > \frac{\Delta_r H^0(T_0)}{\Delta_r S^0} = \frac{205,7 \cdot 10^3}{214,8}$$

$$\Rightarrow T > 958 \text{ K}$$

Ainsi, le choix de la température  $T = 1073$  K est justifié par :

- un déplacement de l'équilibre (81) vers la droite ;
- une augmentation de la vitesse de cette réaction.

(b) Le mélange étant gazeux :



le nombre total de moles de gaz vaut :  $n_t = 2n_0 + 2\xi$  où  $n_0$  désigne la quantité initiale de  $\text{CH}_4$  et de  $\text{H}_2\text{O}$  et où  $\xi$  représente l'avancement de la réaction. Par suite, si  $P$  est la pression totale du milieu réactionnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\text{CO}} = \frac{\xi}{n_t} \times P \\ P_{\text{H}_2} = 3 \frac{\xi}{n_t} \times P \end{array} \right. \Rightarrow P_{\text{H}_2} = 3 P_{\text{CO}}$$

et :

$$\begin{cases} P_{\text{CH}_4} = \frac{n_0 - \xi}{n_t} \times P \\ P_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{n_0 - \xi}{n_t} \times P \end{cases} \Rightarrow P_{\text{CH}_4} = P_{\text{H}_2\text{O}}$$

Enfin, l'identité :  $P_{\text{H}_2} + P_{\text{CO}} + P_{\text{CH}_4} + P_{\text{H}_2\text{O}} = P$ , associée aux résultats précédents, conduit à :

$$3 P_{\text{CO}} + P_{\text{CO}} + 2 P_{\text{H}_2\text{O}} = P \Rightarrow P_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{P - 4 P_{\text{CO}}}{2} = P_{\text{CH}_4}$$

- (c) Soit  $P = P_0 = 1$  bar la pression *standard* qui est aussi celle du réacteur. Les activités des différents gaz y valent :

$$a_{\text{CO}} = \frac{P_{\text{CO}}}{P_0} \quad a_{\text{H}_2} = \frac{P_{\text{H}_2}}{P_0} = 3 \frac{P_{\text{CO}}}{P_0} \quad a_{\text{H}_2\text{O}} = a_{\text{CH}_4} = \frac{P_0 - 4 P_{\text{CO}}}{2 P_0}$$

de sorte qu'à l'équilibre :

$$\begin{aligned} 16 = K &= \frac{a_{\text{CO}} \times a_{\text{H}_2}^3}{a_{\text{CH}_4} \times a_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{27 P_{\text{CO}}^4}{P_0^4} \times \frac{4 P_0^2}{(P_0 - 4 P_{\text{CO}})^2} = \frac{108}{P_0^2} \times \left( \frac{P_{\text{CO}}^2}{P_0 - 4 P_{\text{CO}}} \right)^2 \\ &\Rightarrow \frac{P_{\text{CO}}^2}{P_0 - 4 P_{\text{CO}}} = \sqrt{\frac{16}{108}} P_0 = 0,385 \times P_0 \\ &\Rightarrow P_{\text{CO}}^2 + 1,54 P_0 \times P_{\text{CO}} - 0,385 P_0^2 = 0 \end{aligned}$$

Cette équation du second degré, de discriminant :

$$\Delta = (1,54 P_0)^2 + 4 \times 0,385 P_0^2 = 3,91 P_0^2$$

admet pour seule solution positive :

$$P_{\text{CO}} = \frac{-1,54 P_0 + P_0 \sqrt{3,91}}{2} = P_{\text{CO}} = 0,219 \text{ bar}$$

Il s'ensuit que :

$$P_{\text{H}_2} = 3 P_{\text{CO}} = 0,657 \text{ bar}$$

et :

$$P_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{P_0 - 4 P_{\text{CO}}}{2} = \frac{1 - 4 \times 0,219}{2} \Rightarrow P_{\text{H}_2\text{O}} = P_{\text{CH}_4} = 6,2 \cdot 10^{-2} \text{ bar}$$

- (d) Si la réaction était totale, elle pourrait produire  $n_{\text{H}_2} = 3 n_0$  moles de dihydrogène. Cependant, elle n'en produit que  $n'_{\text{H}_2} = 3\xi$ . C'est pourquoi le rendement de la réaction peut être défini par :

$$\eta = \frac{n'_{\text{H}_2}}{n_{\text{H}_2}} = \frac{\xi}{n_0} \Rightarrow \xi = \eta \times n_0$$



Or, la pression partielle de  $H_2$  vaut :

$$\begin{aligned} P_{H_2} &= \frac{3\xi}{n_t} \times P_0 = \frac{3\xi}{2n_0 + 2\xi} P_0 = \frac{3\eta n_0}{n_0(2 + 2\eta)} P_0 = \frac{3\eta}{2 + 2\eta} P_0 \\ \Rightarrow 2 P_{H_2} + 2\eta P_{H_2} &= 3\eta P_0 \\ \Rightarrow \eta &= \frac{2 P_{H_2}}{3 P_0 - 2 P_{H_2}} \end{aligned}$$

Par conséquent, la réaction a pour rendement :

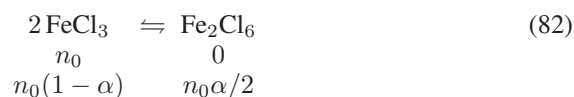
$$\eta = \frac{2 \times 0,657}{3 - 2 \times 0,657} \Rightarrow \eta = 78\%$$

## ● 204 ————— Concours Vété

1. Soit  $n_0$  le nombre initial de moles de  $FeCl_3$ , parmi lesquelles  $n_r$  ont réagi. Par définition :

$$\alpha = \frac{n_r}{n_0} \Rightarrow n_r = \alpha n_0$$

C'est pourquoi le bilan de la réaction s'écrit :



La masse molaire de  $FeCl_3$  valant  $M_{FeCl_3} = 162,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et celle de  $Fe_2Cl_6$  étant double, la masse totale du milieu réactionnel vaut :

$$m = n_0(1 - \alpha) M_{FeCl_3} + \frac{n_0\alpha}{2} \times 2 M_{FeCl_3} = n_0 \times M_{FeCl_3}$$

tandis que le mélange contient un nombre total de moles :

$$n_t = n_0(1 - \alpha) + \frac{n_0\alpha}{2} = n_0 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

Ce faisant, la masse molaire du mélange gazeux est définie par :

$$M = \frac{m}{n_t} = \frac{M_{FeCl_3}}{1 - \frac{\alpha}{2}}$$

ce qui lui confère la densité :

$$d = \frac{M}{29} = \frac{162,5}{29} \times \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow d = \frac{5,6}{1 - \frac{\alpha}{2}}$$

2. De cette relation, il ressort que :

$$d - \frac{\alpha d}{2} = 5,6 \Rightarrow \frac{\alpha d}{2} = d - 5,6 \Rightarrow \alpha = 2 \times \left(1 - \frac{5,6}{d}\right)$$

en raison de quoi :

$$d_1 = 10,5 \Rightarrow \alpha_1 = 0,93 \text{ à } T_1 = 700 \text{ K} \text{ et } d_2 = 9,6 \Rightarrow \alpha_2 = 0,83 \text{ à } T_2 = 800 \text{ K}$$

3. Soient  $P_{\text{FeCl}_3}$  et  $P_{\text{Fe}_2\text{Cl}_6}$  les pressions partielles de  $\text{FeCl}_3$  et de  $\text{Fe}_2\text{Cl}_6$  respectivement et soit  $P_0 = 1$  bar la pression *standard*. Les activités de ces deux gaz valent alors :

$$a_{\text{FeCl}_3} = \frac{P_{\text{FeCl}_3}}{P_0} \text{ et } a_{\text{Fe}_2\text{Cl}_6} = \frac{P_{\text{Fe}_2\text{Cl}_6}}{P_0}$$

auquel cas la loi d'action des masses stipule que :

$$K^0(T) = \frac{a_{\text{Fe}_2\text{Cl}_6}}{a_{\text{FeCl}_3}^2} = \frac{P_{\text{Fe}_2\text{Cl}_6} \times P_0}{P_{\text{FeCl}_3}^2} \quad (83)$$

Le milieu réactionnel étant maintenu à la pression  $P_0$ , il s'ensuit que :

$$P_{\text{Fe}_2\text{Cl}_6} = \frac{n_{\text{Fe}_2\text{Cl}_6}}{n_t} P_0 = \frac{\frac{n_0 \alpha}{2}}{n_0 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} P_0 = \frac{\alpha}{2 - \alpha} P_0$$

et :

$$P_{\text{FeCl}_3} = \frac{n_{\text{FeCl}_3}}{n_t} P_0 = \frac{n_0 (1 - \alpha)}{n_0 \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} P_0 = \frac{2(1 - \alpha)}{2 - \alpha} P_0$$

auquel cas la relation (83) devient :

$$K^0(T) = \left(\frac{\alpha}{2 - \alpha}\right) \times P_0^2 \times \frac{(2 - \alpha)^2}{4P_0^2 \times (1 - \alpha)^2} \Rightarrow K^0(T) = \frac{\alpha(2 - \alpha)}{4(1 - \alpha)^2}$$

4. Aux températures  $T_1 = 700$  K et  $T_2 = 800$  K, la constante  $K^0$  prend les valeurs respectives :

$$K^0(T_1) = \frac{\alpha_1(2 - \alpha_1)}{4(1 - \alpha_1)^2} = \frac{0,93 \times 1,07}{4 \times (0,07)^2} \Rightarrow K^0(T_1) = 50,8$$

et :

$$K^0(T_2) = \frac{\alpha_2(2 - \alpha_2)}{4(1 - \alpha_2)^2} = \frac{0,83 \times 1,17}{4 \times (0,17)^2} \Rightarrow K^0(T_2) = 8,4$$

5. En notant  $K^0(T_1) = K_1^0$  et  $K^0(T_2) = K_2^0$ , la loi de Van t'Hoff précise que :

$$\begin{aligned} \frac{d \ln K^0}{dT} &= \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} \Rightarrow \int_{\ln K_1^0}^{\ln K_2^0} d(\ln K^0) = \frac{\Delta_r H^0}{R} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T^2} \\ &\Rightarrow \ln \left( \frac{K_2^0}{K_1^0} \right) = \frac{\Delta_r H^0}{R} \times \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \\ &\Rightarrow \Delta_r H^0 = \frac{RT_1 T_2}{T_2 - T_1} \times \ln \left( \frac{K_2^0}{K_1^0} \right) \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\Delta_r H^0 = \frac{8,314 \times 700 \times 800}{800 - 700} \times \ln\left(\frac{8,4}{50,8}\right) \Rightarrow \Delta_r H^0 = -84 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Le signe négatif trouvé pour  $\Delta_r H^0$  montre que la réaction est exothermique.

6. À une température  $T$  donnée, l'enthalpie libre *standard* vaut :

$$\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0(T) - T \times \Delta_r S^0(T) \Rightarrow \Delta_r S^0(T) = \frac{\Delta_r H^0(T) - \Delta_r G^0(T)}{T}$$

Notamment, pour  $T = T_1 = 700 \text{ K}$ ,  $\Delta_r G^0(T_1)$  est lié à la constante  $K_1^0$  par la loi :

$$\begin{aligned} \Delta_r G^0(T_1) = -RT_1 \ln K_1^0 &\Rightarrow \Delta_r S^0(T_1) = \frac{\Delta_r H^0(T_1)}{T_1} + R \ln K_1^0 \\ &\Rightarrow \Delta_r S^0(T_1) = -\frac{84.10^3}{700} + 8,314 \times \ln(50,8) \\ &\Rightarrow \Delta_r S^0(T_1) = -87 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

La somme des coefficients stœchiométriques algébriques de l'équilibre (82) :  $\sum_i \nu_i = 1 - 2 = -1$  présente heureusement le même signe que  $\Delta_r S^0(T_1)$ , la réaction étant effectuée en phase gazeuse.

7. La loi de Van t'Hoff :

$$\frac{d \ln K^0}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} < 0 \text{ car } \Delta_r H^0 = \text{cte} < 0$$

montre qu'une augmentation de température provoque une diminution consécutive de  $K^0(T)$  ; la température n'est pas un facteur favorable à la dimérisation du chlorure de fer (III).

## ● 205 ————— Concours de l'ENS Cachan

1. L'hydrogène nécessaire à la synthèse de  $\text{NH}_3$  provient en grande partie du reformage du méthane et de la conversion du monoxyde de carbone :



Quant à  $\text{N}_2$ , il provient directement de l'air atmosphérique.

2. Conformément à la loi de Hess, l'enthalpie *standard* (à  $T_0 = 298 \text{ K}$ ) de l'équilibre :



s'obtient à partir des enthalpies *standard* de formation :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0(T_0) &= 2 \Delta_f H^0(\text{NH}_3) - 3 \Delta_f H^0(\text{H}_2) - \Delta_f H^0(\text{N}_2) \\ &= -2 \times 46,1 \Rightarrow \Delta_r H^0(T_0) = -92,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

De même, l'entropie *standard* de la réaction vaut, à  $T_0 = 298 \text{ K}$  :

$$\begin{aligned} \Delta_r S^0(T_0) &= 2 S^0(\text{NH}_3) - S^0(\text{N}_2) - 3 S^0(\text{H}_2) \\ &= 2 \times 192,45 - 191,61 - 3 \times 130,68 \\ &\Rightarrow \Delta_r S^0(T_0) = -198,75 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Ce faisant, l'enthalpie libre *standard* de la réaction, à  $T_0$ , vaut :

$$\begin{aligned}\Delta_r G^0 &= \Delta_r H^0 - T_0 \times \Delta_r S^0 = -92,2 \cdot 10^3 + 298 \times 198,75 \\ \Rightarrow \Delta_r G^0 &= -32,97 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

auquel cas l'équilibre (84) a pour constante :

$$K^0(T_0) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0}{RT_0}\right) = \exp\left(\frac{32,97 \cdot 10^3}{8,31 \times 298}\right) \Rightarrow K^0(T_0) = 6 \cdot 10^5$$

La valeur obtenue pour  $K^0(T_0)$  montre que la réaction (84) conduit à la formation  $\text{NH}_3$  d'une manière quasi quantitative. En outre, le signe négatif de  $\Delta_r H^0$  révèle qu'une augmentation de température se traduit par un affaiblissement du rendement car :

$$\frac{d \ln K}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} < 0$$

Enfin, le signe négatif de  $\Delta_r S^0(T_0)$  est confirmé par la somme des coefficients stœchiométriques, en phase gazeuse :

$$\sum_i \nu_i = 2 - 3 - 1 = -2$$

3. (a) La température de  $400^\circ\text{C}$  à laquelle est réalisée la réaction (84) est un compromis entre la diminution du rendement thermodynamique précédemment évoqué et la vitesse de la réaction, accrue par une augmentation de la température. En outre, la loi de modération des équilibres stipule qu'une augmentation de la pression du milieu réactionnel s'accompagne d'un déplacement de l'équilibre (84) dans le sens qui provoque une diminution de pression, c'est-à-dire vers la formation de  $\text{NH}_3$ .
- (b) La variation de  $\Delta_r H^0$  avec la température  $T$  est donnée par la loi de Kirchhoff :

$$\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0$$

où :

$$\begin{aligned}\Delta_r C_p^0 &= 2 C_p^0(\text{NH}_3) - 3 C_p^0(\text{H}_2) - C_p^0(\text{N}_2) \\ &= 2 \times 35,06 - 3 \times 28,82 - 29,12 = -45,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

Aussi :

$$\begin{aligned}d\Delta_r H^0 &= \Delta_r C_p^0 dT \Rightarrow \int_{\Delta_r H^0(T)}^{\Delta_r H^0(T_0)} d\Delta_r H^0 = \Delta_r C_p^0 \int_T^{T_0} dT \\ \Rightarrow \Delta_r H^0(T) &= \Delta_r H^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times (T - T_0)\end{aligned}$$

*Application numérique :*

$$\begin{aligned}\Delta_r H^0(400^\circ\text{C}) &= -92,2 \cdot 10^3 - 45,5 \times (400 - 25) \\ \Rightarrow \Delta_r H^0(400^\circ\text{C}) &= -109,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

(c) La loi de Van t'Hoff conduit à :

$$\begin{aligned}\frac{d \ln K^0}{dT} &= \frac{\Delta_r H^0}{RT^2} = \frac{\Delta_r H^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times (T - T_0)}{RT^2} \\ &= -\frac{9,5 \cdot 10^3}{T^2} - \frac{5,47}{T}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\ln \left[ \frac{K^0}{K^0(T_0)} \right] &= -9,5 \cdot 10^3 \int_{T_0}^T \frac{dT}{T^2} - 5,47 \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} \\ &= 9,5 \cdot 10^3 \times \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) - 5,47 \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \\ &= 9,5 \cdot 10^3 \times \left( \frac{1}{673} - \frac{1}{298} \right) - 5,47 \times \ln \left( \frac{673}{298} \right) = -22,2\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$K^0 = K^0(T_0) \times e^{-22,2} = 6 \cdot 10^5 \times e^{-22,2} = 1,3 \cdot 10^{-4}$$

(d) Les activités des gaz qui interviennent dans l'équilibre (84) valent :

$$a_{\text{NH}_3} = x_{\text{NH}_3} \times \frac{P}{P_0} \quad a_{\text{H}_2} = x_{\text{H}_2} \times \frac{P}{P_0} \quad a_{\text{N}_2} \times \frac{P}{P_0} \quad \text{où } P_0 = 1 \text{ bar}$$

de sorte que la loi d'action des masses impose :

$$\begin{aligned}K^0(T) &= \frac{a_{\text{NH}_3}^2}{a_{\text{N}_2} \times a_{\text{H}_2}^3} = \frac{x_{\text{NH}_3}^2}{x_{\text{N}_2} \times x_{\text{H}_2}^3} \times \left( \frac{P_0}{P} \right)^2 = R_x \times \left( \frac{P_0}{P} \right)^2 \\ \Rightarrow R_x &= K^0(T) \times \left( \frac{P}{P_0} \right)^2\end{aligned}$$

Aussi, lorsque  $P$  passe de  $P_1 = P_0 = 1 \text{ bar}$  à  $P_2 = 200 P_0 = 200 \text{ bar}$ , le rapport  $R_x$  varie de  $R_x(P_1) = K^0(T) \times \left( \frac{P_1}{P_0} \right)^2 = K^0(T)$  à la valeur :

$$R_x(P_2) = K^0(T) \times \left( \frac{P_2}{P_0} \right)^2, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$R_x(P_2) = R_x(P_1) \times (200)^2 = 4 \cdot 10^4 \times R_x(P_1) \quad (85)$$

(e) À la température  $T = 673 \text{ K}$  ( $400^\circ\text{C}$ ) et à la pression  $P_1 = P_0$ , la loi d'action des masses s'écrit :

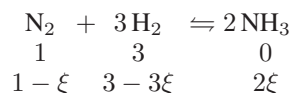
$$K^0 = R_x(P_1) \times \left( \frac{P_1}{P_0} \right)^2 = R_x(P_1)$$

de telle sorte que l'équation (85) fournit :

$$R_x(P_2) = 4 \cdot 10^4 \times K^0 = 4 \cdot 10^4 \times 1,3 \cdot 10^{-4} = 5,2 \quad (86)$$

$$\Rightarrow \frac{x_{\text{NH}_3}^2}{x_{\text{N}_2} \times x_{\text{H}_2}^2} = 5,2 \quad (87)$$

Or, en partant d'un mélange initial contenant 1 mole de  $N_2$  et 3 moles de  $H_2$ , le bilan de la réaction s'écrit :



Ce faisant, le nombre total de moles de gaz vaut :  $n = 4 - 2\xi$ , si bien que :

$$x_{NH_3} = \frac{2\xi}{4 - 2\xi} = \frac{\xi}{2 - \xi} \quad x_{N_2} = \frac{1 - \xi}{2(2 - \xi)} \quad x_{H_2} = 3x_{N_2}$$

Par conséquent, l'équation (87) devient :

$$\begin{aligned} 5,2 &= \frac{x_{NH_3}^2}{27 x_{H_2}^2} = \frac{16}{27} \times \left( \frac{\xi}{2 - \xi} \right)^2 \times \frac{(2 - \xi)^4}{(1 - \xi)^4} \\ \Rightarrow 8,75 &= \frac{\xi^2 (2 - \xi)^2}{1 - \xi)^4} = \left( \frac{2\xi - \xi^2}{1 - 2\xi + \xi^2} \right)^2 \\ \Rightarrow 2,96 &= \frac{2\xi - \xi^2}{1 - 2\xi + \xi^2} \Rightarrow 3,96\xi^2 - 7,92\xi + 2,96 = 0 \end{aligned}$$

Des solutions de cette équation du second degré :

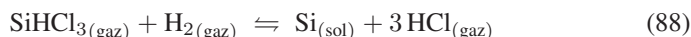
$$\xi_1 = \frac{7,92 + \sqrt{15,84}}{7,92} = 1,5 \text{ mol et } \xi_2 = \frac{7,92 - \sqrt{15,84}}{7,92} = 0,5 \text{ mol}$$

seule la seconde est physiquement acceptable étant donné que  $n_{N_2} = 1 - \xi$  doit rester positif. C'est, pourquoi, à l'équilibre, le milieu contient :

$$\begin{aligned} n_{N_2} &= 1 - \xi_2 = 0,5 \text{ mole de } N_2 \\ n_{H_2} &= 3 n_{N_2} = 1,5 \text{ mole de } H_2 \\ n_{NH_3} &= 2 \xi_2 = 1 \text{ mole de } NH_3 \end{aligned}$$

## ● 206 ————— Concours Commun Polytechnique

1. L'enthalpie *standard* de la réaction :



est accessible grâce à la loi de Hess, à  $T_0 = 298 \text{ K}$  :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0(T_0) &= 3 \Delta_f H^0(HCl) + \Delta_f H^0(Si) - \Delta_f H^0(H_2) - \Delta_f H^0(SiHCl_3) \\ &= -3 \times 92 + 488,6 \Rightarrow \Delta_r H^0(T_0) = 212,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

De même, l'entropie *standard* de cette réaction vaut, à  $T_0 = 298 \text{ K}$  :

$$\begin{aligned} \Delta_r S^0(T_0) &= 3 S^0(HCl) + S^0(Si) - S^0(H_2) - S^0(SiHCl_3) \\ &= 3 \times 186,6 + 18,8 - 130,5 - 312,9 \\ \Rightarrow \Delta_r S^0(T_0) &= 135,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

2. La variation de  $\Delta_r H^0$  en fonction de la température est donnée par la première loi de Kirchhoff :  $\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0$ , où :

$$\begin{aligned}\Delta_r C_p^0 &= 3 C_p^0(\text{HCl}) + C_p^0(\text{Si}) - C_p^0(\text{H}_2) - C_p^0(\text{SiHCl}_3) \\ &= (3 \times 26,2 + 24 - 27,3 - 95,3) + (3 \times 5,2 + 2,6 - 3,3 - 6) \times 10^{-3} T \\ &\quad + (3 \times 1,3 - 4,2 - 0,5 + 19,9) \times \frac{10^5}{T^2} \\ \Rightarrow \Delta_r C_p^0 &= -20 + 8,9 \cdot 10^{-3} \times T + 19,1 \cdot 10^5 \times \frac{1}{T^2}\end{aligned}$$

Aussi, une variation de  $\Delta_r H^0$ , à pression constante, vaut :

$$\begin{aligned}d(\Delta_r H^0) &= \frac{d\Delta_r H^0}{dT} dT = \Delta_r C_p^0 \times dT \\ &= -20 dT + 8,9 \cdot 10^{-3} \times T dT + 19,1 \cdot 10^5 \times \frac{dT}{T^2}\end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\Delta_r H^0(T_1) - \Delta_r H^0(T_0) = -20 \int_{T_0}^{T_1} dT + 8,9 \cdot 10^{-3} \int_{T_0}^{T_1} T dT + 19,1 \cdot 10^5 \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T^2}$$

c'est-à-dire, pour  $T_1 = 1273 \text{ K}$  ( $1000^\circ\text{C}$ ) :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^0(T_1) &= 212,6 \cdot 10^3 - 20 \times (1273 - 298) \\ &\quad + \frac{8,9 \cdot 10^{-3}}{2} \times [(1273)^2 - (298)^2] + 19,1 \cdot 10^5 \times \left( \frac{1}{298} - \frac{1}{1273} \right) \\ \Rightarrow \Delta_r H^0(T_1) &= 204,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

Quant à la deuxième loi de Kirchhoff, elle précise que :

$$\frac{d\Delta_r S^0}{dT} = \frac{\Delta_r C_p^0}{T}$$

de sorte qu'une variation  $dT$  de la température, à pression constante, s'accompagne de la variation d'enthalpie *standard* :

$$\begin{aligned}d(\Delta_r S^0) &= \frac{d\Delta_r S^0}{dT} dT = \frac{\Delta_r C_p^0}{T} dT \\ &= -20 \times \frac{dT}{T} + 8,9 \cdot 10^{-3} dT + 19,1 \cdot 10^5 \times \frac{dT}{T^3}\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\Delta_r S^0(T_1) &= \Delta_r S^0(T_0) - 20 \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T} + 8,9 \cdot 10^{-3} \int_{T_0}^{T_1} dT + 19,1 \cdot 10^5 \times \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{T^3} \\ &= \Delta_r S^0(T_0) - 20 \ln \left( \frac{T_1}{T_0} \right) + 8,9 \cdot 10^{-3} \times (T_1 - T_0) + \frac{19,1 \cdot 10^5}{2} \times \left( \frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T_1^2} \right)\end{aligned}$$

soit encore, pour  $T_0 = 1\,273\text{ K}$  et  $\Delta_r S^0(T_0) = 135,2\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  :

$$\begin{aligned}\Delta_r S^0(T_1) &= 135,2 - 20 \ln \left( \frac{1\,273}{298} \right) + 8,9 \cdot 10^{-3} \times (1\,273 - 298) \\ &\quad + \frac{19,1 \cdot 10^5}{2} \times \left[ \frac{1}{(298)^2} - \frac{1}{(1\,273)^2} \right] \\ \Rightarrow \Delta_r S^0(T_1) &= 125\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

3. L'enthalpie libre *standard* de la réaction vaut, à la température  $T_1 = 1\,273\text{ K}$  :

$$\begin{aligned}\Delta_r G^0(T_1) &= \Delta_r H^0(T_1) - T_1 \times \Delta_r S^0(T_1) = 204,8 \cdot 10^3 - 1\,273 \times 125 \\ \Rightarrow \Delta_r G^0(T_1) &= 45,67\text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

d'où l'on déduit sa constante d'équilibre :

$$\begin{aligned}K^0(T_1) &= \exp \left[ -\frac{\Delta_r G^0(T_1)}{RT_1} \right] = \exp \left( -\frac{45,67 \cdot 10^3}{8,314 \times 1\,273} \right) \\ \Rightarrow K^0(T_1) &= 1,34 \cdot 10^{-2}\end{aligned}$$

4. Soit  $P_i$  la pression partielle du gaz ( $i$ ) et soit  $p_0 = 1\text{ bar}$  la pression *standard*. Les activités des espèces qui interviennent dans l'équilibre (88) valent :

$$a_{\text{HCl}} = \frac{P_{\text{HCl}}}{P_0} \quad a_{\text{Si}} = 1 \quad a_{\text{H}_2} = \frac{P_{\text{H}_2}}{P_0} \quad a_{\text{SiHCl}_3} = \frac{P_{\text{SiHCl}_3}}{P_0}$$

de sorte que son quotient de réaction est donné par :

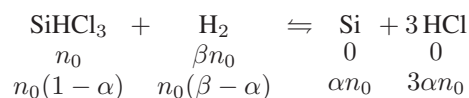
$$Q = \frac{a_{\text{HCl}}^3 \times a_{\text{Si}}}{a_{\text{SiHCl}_3} \times a_{\text{H}_2}} = \frac{P_{\text{HCl}}^3}{P_{\text{SiHCl}_3} \times P_{\text{H}_2} \times P_0} \quad (89)$$

Initialement, le trichlorosilane est pur, ce qui signifie que  $P_{\text{HCl}} = 0$ , auquel cas le quotient de réaction adopte une valeur nulle :

$$Q_0 = 0 < K^0(T)$$

Cette inégalité suffit à prouver que la réaction (88) produit initialement du silicium.

5. Soit  $n_0$  le nombre initial de moles de trichlorosilane introduit dans le réacteur ; le bilan :



montre que le nombre total de moles de gaz vaut :

$$n_t = n_0 \times (1 - \alpha + \beta - \alpha + 3\alpha) = n_0 \times (1 + \beta + \alpha)$$

ce qui permet d'exprimer les pressions partielles des gaz en fonction de la pression



totale  $P_t$  :

$$\begin{aligned} P_{\text{SiHCl}_3} &= \frac{n_{\text{SiHCl}_3}}{n_t} \times P_t = \frac{1 - \alpha}{1 + \beta + \alpha} \times P_t \\ P_{\text{H}_2} &= \frac{n_{\text{H}_2}}{n_t} \times P_t = \frac{\beta - \alpha}{1 + \beta + \alpha} \times P_t \\ P_{\text{HCl}} &= \frac{n_{\text{HCl}}}{n_t} \times P_t = \frac{3\alpha}{1 + \beta + \alpha} \times P_t \end{aligned}$$

auquel cas, le résultat (89) devient, à l'équilibre :

$$\begin{aligned} Q &= K^0(T_1) \\ \Rightarrow K^0(T_1) &= \left( \frac{3\alpha}{1 + \alpha + \beta} \right)^3 \times \frac{(1 + \alpha + \beta)^2}{(1 - \alpha)(\beta - \alpha)} \times \frac{P_t}{P_0} \\ \Rightarrow K^0(T_1) &= \frac{27\alpha^3}{(1 + \alpha + \beta)(1 - \alpha)(\beta - \alpha)} \times \frac{P_t}{P_0} \quad (90) \end{aligned}$$

6. En choisissant  $\beta = 1$  et  $P_t = P_0$ , l'équation précédente s'écrit :

$$K^0(T_1) = \frac{27\alpha^3}{(2 + \alpha)(1 - \alpha)^2} \Rightarrow 1,34 \cdot 10^{-2} = \frac{27\alpha^3}{2 - 3\alpha + \alpha^3}$$

En remarquant que  $K^0(T_1) \ll 1$ , on peut considérer que  $\alpha$  est assez petit pour que l'on puisse poser :

$$\begin{aligned} 2 - 3\alpha + \alpha^3 \simeq 2 \Rightarrow \frac{27\alpha^3}{2} = 1,34 \cdot 10^{-2} \Rightarrow \alpha \simeq \sqrt[3]{\frac{2 \times 1,34 \cdot 10^{-2}}{27}} \\ \Rightarrow \alpha \simeq 0,1 \end{aligned}$$

Une résolution numérique fournit, en fait :  $\alpha = 0,095$ .

7. La loi de Le Chatelier permet de prévoir que l'introduction d'hydrogène en excès provoque un déplacement de la réaction vers la droite (ce qui participe à la consommation de  $\text{H}_2$ ). D'ailleurs, en choisissant  $\beta = 10$ , à  $P_t = P_0$ , l'équation (90) :

$$1,34 \cdot 10^{-2} = \frac{27\alpha^3}{(11 + \alpha)(1 - \alpha)(10 - \alpha)}$$

admet pour solution (obtenue par une méthode numérique) :

$$\alpha = 0,33$$

8. Toujours en vertu de la loi de Le Chatelier, l'équilibre (88) s'oppose à une diminution de la pression totale  $P_t$  en évoluant vers la droite (sens dans lequel la réaction produit une plus grande quantité de gaz). Du reste, en choisissant  $\beta = 1$  et  $P_t = 0,1$  bar, l'équation (90) :

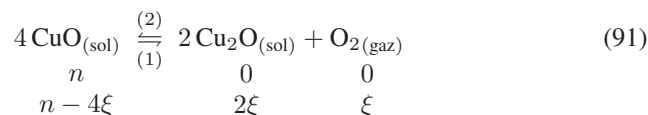
$$1,34 \cdot 10^{-2} = \frac{27\alpha^3}{(2 + \alpha)(1 - \alpha)^2} \times 0,1$$

admet pour solution (obtenue par voie numérique) :

$$\alpha = 0,19$$

## ● 207 ————— Concours de la Banque Agro

1. Au cours de la réaction :



le dioxygène est le seul gaz produit, auquel cas sa pression partielle  $P_{\text{O}_2}$  est également la pression  $P$  qui règne dans le réacteur. Ainsi, son activité vaut :

$$a_{\text{O}_2} = \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} = \frac{P}{P_0} \text{ où } P_0 = 1 \text{ bar}$$

Ce faisant, le quotient de réaction est défini par :

$$Q = \frac{a_{\text{O}_2} a_{\text{Cu}_2\text{O}}^2}{a_{\text{CuO}}^4} = \frac{P}{P_0} \text{ car } a_{\text{Cu}_2\text{O}} = a_{\text{CuO}} = 1$$

Or, lorsque l'équilibre est atteint :

$$Q = K^0(T) \Rightarrow P = P_0 \times K^0(T) \quad (92)$$

où  $K^0(T) = \exp\left(-\frac{\Delta_r G^0}{RT}\right)$  est la constante thermodynamique de la réaction (91), accessible à partir de la loi :

$$\begin{aligned}
 \Delta_r G^0(T) &= \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0 \\
 &= 279.10^3 - 1300 \times 202 = 16,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$K^0(T) = \exp\left(-\frac{16,4.10^3}{8,31 \times 1300}\right) = 0,22 \Rightarrow P = P_0 \times K^0(T) = 0,22 \text{ bar}$$

Par définition, l'affinité chimique du système vaut :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_i &= -\Delta_r G = -(\Delta_r G^0 + RT \ln Q) \\
 &= RT \ln K^0(T) - RT \ln Q = RT \ln \left[ \frac{K^0(T)}{Q} \right]
 \end{aligned}$$

Or, l'identité (92) révèle qu'à l'équilibre :

$$Q = K^0(T) \Rightarrow \mathcal{A}_i = 0$$

Remarque – Ce résultat confirme la signification physique de l'affinité chimique : lorsque  $\mathcal{A}_i > 0$ , la réaction produit  $\text{O}_2$ , lorsque  $\mathcal{A}_i < 0$ , elle produit  $\text{CuO}$  ; seule la valeur  $\mathcal{A}_i = 0$  assure l'équilibre chimique.

2. Lorsque la pression prend la valeur  $P'$ , c'est-à-dire lorsque  $P_{O_2} = P'$ , le quotient de réaction devient :  $Q' = \frac{P'}{P_0}$ , de sorte que l'affinité chimique du système vaut :

$$A_2 = RT \ln \left[ \frac{K^0(T)}{Q'} \right] = RT \ln \left[ K^0(T) \times \frac{P_0}{P'} \right]$$

où, conformément à l'identité (92) :

$$K^0(T) = \frac{P}{P_0} \Rightarrow A_2 = RT \ln \left( \frac{P}{P'} \right)$$

3. Si  $P' > P$ ,  $A_2 < 0$  montre que l'équilibre (91) évolue dans le sens (2), tandis que  $P' < P$  entraînerait que  $A_2 > 0$ , c'est-à-dire l'évolution de cet équilibre dans le sens (1). Ces propos traduisent la loi générale de modération de l'équilibre : toute variation de  $P$  produit une variation de la quantité de  $O_2$  qui s'oppose à la contrainte imposée au système.
4. (a) Lorsque l'équilibre (1) est atteint,  $P = 0,22$  bar et  $O_2$  est considéré comme un gaz parfait :

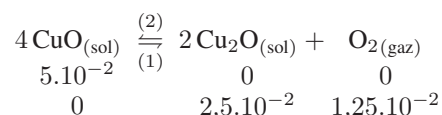
$$PV = \xi RT \Rightarrow \xi = \frac{PV}{RT} = \frac{0,22 \cdot 10^5 \times 10 \cdot 10^{-3}}{8,314 \times 1300}$$

$$\Rightarrow \xi = 0,02 \text{ mole de } O_2$$

- (b) Le bilan de la réaction montre qu'il reste une quantité d'oxyde de cuivre (II) :  $n_{CuO} = n - 4\xi$  nécessairement positive pour que l'équilibre soit établi :

$$n_{CuO} > 0 \Rightarrow n > 4\xi \Rightarrow n > n_{\min} = 4 \times 0,02 = 8 \cdot 10^{-2} \text{ mole de CuO}$$

5. (a) En choisissant  $n = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} < n_{\min}$ , on est assuré que le système n'atteindra pas l'équilibre : la réaction de décomposition de  $CuO$  est totale et admet pour bilan :



La composition du système est donc décrite par les quantités de matière suivantes :

$$n_{CuO} = 0 \text{ mol} \quad n_{Cu_2O} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \quad n_{O_2} = 1,25 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

auquel cas la pression du réacteur vérifie :

$$P' = \frac{n_{O_2} RT}{V} = \frac{1,25 \cdot 10^{-2} \times 8,314 \times 1300}{10^{-2}}$$

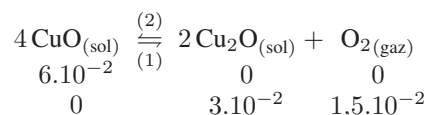
$$\Rightarrow P' = 1,3 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,13 \text{ bar}$$

Remarque – Conformément aux conclusions de la question 3, l'inégalité :

$$P' = 0,13 \text{ bar} < P = 0,22 \text{ bar}$$

suggère que la réaction évolue dans le sens (1), c'est-à-dire vers la formation de  $O_2$ , d'une manière quantitative.

- (b) En ajoutant  $n' = 0,01$  mole d'oxyde de cuivre, le milieu réactionnel se comporte comme si  $n + n' = 6 \cdot 10^{-2}$  mole d'oxyde de cuivre y avait été introduite. Or, cette quantité demeure inférieure à la quantité  $n_{\min} = 8 \cdot 10^{-2}$  mole qui assurerait l'équilibre ; la dissociation de l'oxyde de cuivre est totale, selon le bilan suivant :



Dans ces conditions, la pression du système vaut :

$$\begin{aligned}
 P' &= \frac{n_{O_2} RT}{V} = \frac{1,5 \cdot 10^{-2} \times 8,314 \times 1300}{10^{-2}} \\
 &= P' = 1,6 \cdot 10^4 \text{ Pa} = 0,16 \text{ bar} < 0,22 \text{ bar}
 \end{aligned}$$

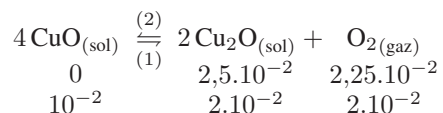
- (c) En revanche, si l'on ajoute  $n' = 10^{-2}$  mole de dioxygène à la quantité produite à la question (a), le nombre de moles de  $O_2$  passe à :

$$10^{-2} + 1,25 \cdot 10^{-2} = 2,25 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$$

Cette quantité excède celle qui assure l'équilibre ( $\xi = 0,02$  mol). Par conséquent, la réaction évolue dans le sens (2) de manière à ce que  $n_{O_2} = 0,02$  mol assure l'identité entre la pression du système et celle de l'équilibre :

$$P = 0,22 \text{ bar}$$

Ce faisant, le bilan de la réaction s'écrit :



## ● 208 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-jolie

1. Les variations  $dT$  de température et  $dP$  de pression d'un corps pur se traduisent par une variation de son enthalpie libre :

$$G = H - TS \Rightarrow dG = V dP - S dT$$

où  $V$  et  $S$  désignent respectivement le volume et l'entropie de ce système. L'identification avec l'expression différentielle de  $G$  :

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_T dP + \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_P dT$$

conduit à poser :

$$\left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_T = V \text{ et } \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_P = -S \quad (93)$$

2. Lorsque le système évolue spontanément, il reçoit un travail  $\delta W = -P_0 dV$  des forces de pression et la chaleur  $\delta Q$ , à l'origine de la variation de son énergie interne :

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta Q - P_0 dV$$

Or, si la température  $T$  du système demeure égale à la température  $T_0$  du milieu extérieur ; l'entropie du système varie de :

$$dS = \frac{\delta Q}{T_0} + \delta S_c \Rightarrow \delta Q = T_0 dS - T_0 \delta S_c$$

où  $\delta S_c \geq 0$  représente l'entropie créée dans le système. Par conséquent :

$$dU = T_0 dS - P_0 dV - T_0 \delta S_c$$

Ce faisant, l'enthalpie  $H = U + P_0 V$  du système varie de la quantité :

$$dH = (T_0 dS - P_0 dV - T_0 \delta S_c) + P_0 dV = T_0 dS - T_0 \delta S_c$$

et son enthalpie libre  $G = H - T_0 S$  de la quantité :

$$dG = (T_0 dS - T_0 \delta S_c) - T_0 dS \Rightarrow dG = -T_0 \delta S_c \leq 0 \quad (94)$$

Cette inégalité montre que l'enthalpie libre d'un tel système ne peut que décroître, jusqu'à atteindre un *minimum* à l'équilibre.

3. (a) L'enthalpie libre de chaque phase ( $i$ ) valant  $G_i = m_i \times g_i$  (car, dans chaque phase, le corps est pur), il s'ensuit que l'enthalpie libre du système vaut :

$$G = m_1 g_1 + m_2 g_2 \quad (95)$$

*Remarque* – Il est possible d'écrire l'enthalpie libre sous la forme d'une somme :  $m_1 g_1 + m_2 g_2$ , sans tenir compte d'éventuels termes de mélange, les phases n'étant pas miscibles.

- (b) À  $T$  et  $P$  fixés, la fonction  $G$  varie consécutivement aux variations de  $m_1$  et  $m_2$  :

$$dG = g_1 dm_1 + g_2 dm_2$$

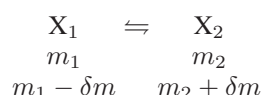
Or, la masse totale  $m = m_1 + m_2$  du système étant invariable, il s'ensuit que :

$$dm = 0 \Rightarrow dm_1 + dm_2 = 0 \Rightarrow dm_2 = -dm_1 \Rightarrow dG = dm_1 \times (g_1 - g_2)$$

Ainsi, l'inégalité (94) impose :  $dm_1 \times (g_1 - g_2) \leq 0$ , soit encore :

- $g_1 > g_2 \Rightarrow dm_1 < 0 \Rightarrow dm_2 > 0$  : accroissement de la masse  $m_2$  ;
- $g_1 < g_2 \Rightarrow dm_1 > 0$  : augmentation de la masse  $m_1$  ;
- $g_1(T, P) = g_2(T, P)$  : équilibre.

4. Supposons qu'une masse  $\delta m$  de  $X_1$  (dans la phase (1)) passe dans la phase (2) :



À la température  $T$  et à la pression  $P$  d'équilibre, le système reçoit alors la chaleur :

$$\delta Q = \delta m \times \ell_{12}$$

tandis que son entropie passe de  $S_i = m_1 s_1 + m_2 s_2$  à :

$$S_f = (m - 1 - \delta m) s_1 + (m_2 + \delta m) s_2$$

c'est-à-dire présente une variation :

$$dS = S_f - S_i = \delta m \times (s_2 - s_1)$$

Ce faisant :

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow s_2 - s_1 = \frac{\ell_{12}}{T} \quad (96)$$

5. Conformément au résultat de la question 3.(b), à une température  $T$  et à une pression  $P$ , l'équilibre entre les deux phases est assuré dès que :

$$g_1(T, P) = g_2(T, P)$$

Il en va de même lorsque la température vaut  $T + dT$  et la pression  $P + dP$  :

$$g_1(T + dT, P + dP) = g_2(T + dT, P + dP)$$

c'est-à-dire, au premier ordre en  $dT$  et en  $dP$  :

$$\begin{aligned} g_1(T, P) + \left( \frac{\partial g_1}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial g_1}{\partial P} \right)_T dP \\ = g_2(T, P) + \left( \frac{\partial g_2}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial g_2}{\partial P} \right)_T dP \end{aligned} \quad (97)$$

où  $g_1(T, P) = g_2(T, P)$ . En outre, les équations (93) deviennent, si  $n_i$  représente le nombre de moles du corps pur dans la phase ( $i$ ) :

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \left( \frac{\partial G}{\partial P} \right)_T = \left( \frac{\partial V}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_{j \neq i}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, n_{j \neq i}} = u_i \Rightarrow \left( \frac{\partial g_i}{\partial P} \right)_T = u_i$$

et :

$$\frac{\partial}{\partial n_i} \left( \frac{\partial G}{\partial T} \right)_P = - \left( \frac{\partial S}{\partial n_i} \right)_{T, P, n_{j \neq i}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{P, n_{j \neq i}} = -s_i \Rightarrow \left( \frac{\partial g_i}{\partial T} \right)_P = -s_i$$

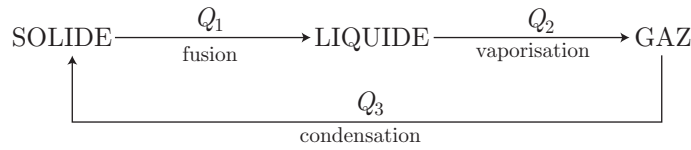
Par suite, l'équation (97) conduit à :

$$u_1 dP - s_1 dT = u_2 dP - s_2 dT \Rightarrow s_2 - s_1 = (u_2 - u_1) \frac{dP}{dT}$$

c'est-à-dire, en tenant compte du résultat (96) :

$$\frac{\ell_{12}}{T} = (u_2 - u_1) \times \frac{dP}{dT} \Rightarrow \ell_{12} = T \times (u_2 - u_1) \times \frac{dP}{dT} \quad (98)$$

6. (a) Envisageons, autour du point triple, le cycle suivant de transformations :



Une masse  $m$  subit :

- une fusion, au cours de laquelle le système reçoit une chaleur  $Q_1 = m \times \ell_f$ , qui s'identifie à la variation d'enthalpie  $\Delta H_1$  (car  $T = T_t$  et  $P = P_t$  sont maintenus constants) ;
- une vaporisation, au cours de laquelle le système reçoit une chaleur  $Q_2 = \Delta H_2 = m \ell_v$  ;
- une condensation, pendant laquelle le système reçoit la chaleur  $Q_3 = \Delta H_3$ . Or, la condensation étant la transformation inverse de la sublimation :

$$\Delta H_3 = -\Delta H_s = -m \ell_s$$

Enfin, l'enthalpie  $H$  étant une fonction d'état, elle ne varie pas à l'issue d'un cycle de transformations :

$$\oint dH = 0 \Rightarrow \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 = 0 \quad (99)$$

$$\Rightarrow m \times (\ell_f + \ell_v - \ell_s) = 0 \Rightarrow \ell_s = \ell_f + \ell_v \quad (100)$$

- (b) Soient  $u_{\text{gaz}}$ ,  $u_{\text{liq}}$  et  $u_{\text{sol}}$  les volumes massiques d'un corps pur sous les phases respectivement gazeuse, liquide et solide. Ces deux dernières phases étant beaucoup plus denses que le gaz, on peut écrire :

$$u_{\text{gaz}} \gg u_{\text{liq}} \Rightarrow u_{\text{gaz}} - u_{\text{liq}} \simeq u_{\text{gaz}} \text{ et } u_{\text{gaz}} \gg u_{\text{sol}} \Rightarrow u_{\text{gaz}} - u_{\text{sol}} \simeq u_{\text{gaz}}$$

C'est pourquoi, pour les transformations :



la relation de Clapeyron (98) conduit à :

$$\left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{vap}} = \frac{\ell_v}{T_t (u_{\text{gaz}} - u_{\text{liq}})} \simeq \frac{\ell_v}{T_t u_{\text{gaz}}} \text{ et } \left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{sub}} = \frac{\ell_s}{T_t (u_{\text{gaz}} - u_{\text{sol}})} \simeq \frac{\ell_s}{T_t u_{\text{gaz}}}$$

lorsque la vaporisation ou la sublimation sont effectuées à la température  $T_t$  du point triple, pour laquelle l'inégalité (100) impose :

$$\begin{aligned} \ell_s = \ell_f + \ell_v &\Rightarrow \ell_s > \ell_v \text{ car } \ell_f > 0 \\ &\Rightarrow \left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{sub}} > \left( \frac{dP}{dT} \right)_{\text{vap}} \end{aligned}$$

Cette relation signifie qu'au voisinage du point triple la courbe  $P(T)$  relative à la sublimation présente une pente supérieure à celle de relative à la vaporisation.

- (c) Il découle de la question précédente que la courbe  $P(T)$  relative à la vaporisation présente une pente :

$$\left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{vap}} = \frac{\ell_v}{T u_{\text{gaz}}}$$

Or, la vapeur d'eau étant assimilée à un gaz parfait, une masse  $m$  de vapeur (c'est-à-dire un nombre  $n = \frac{m}{M}$  de moles d'eau) occupe un volume  $V$  qui vérifie l'équation d'état :

$$\begin{aligned} PV = nRT = m \frac{RT}{M} &\Rightarrow u_{\text{gaz}} = \frac{V}{m} = \frac{RT}{PM} \\ &\Rightarrow \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{vap}} = \frac{M\ell_v}{RT^2} \times P \end{aligned}$$

où l'on suppose que  $\ell_v = a - bT$ , de sorte que :

$$\frac{1}{P} \left(\frac{dP}{dT}\right)_{\text{vap}} = \frac{M}{R} \left(\frac{a}{T^2} - \frac{b}{T}\right) \Rightarrow \frac{d \ln P}{dT} = -\frac{M}{R} \frac{d}{dT} \left(\frac{a}{T} + b \ln T\right)$$

Il existe par conséquent une constante  $P_0$  telle que :

$$\ln \left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{M}{R} \left(\frac{a}{T} + b \ln T\right) \Rightarrow P = P_0 \times T^{-Mb/R} \times e^{-Ma/RT}$$

## ● 209 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Soit  $x_A^\ell$  la fraction molaire de A dans la phase liquide et soit  $P_A$  la pression partielle du gaz A. La loi de Raoult stipule que  $P_A = x_A^\ell \times P_A^*$ , de sorte que la pression partielle du gaz B vaut, pour les mêmes raisons  $P_B = x_B^\ell \times P_B^*$ . Par suite, la pression totale de la phase gazeuse vaut :

$$\begin{aligned} P &= P_A + P_B = x_A^\ell P_A^* + (1 - x_A^\ell) P_B^* = P_B^* + x_A^\ell \times (P_A^* - P_B^*) \\ \Rightarrow x_A^\ell &= \frac{P - P_B^*}{P_A^* - P_B^*} = \frac{2,5 - 3}{2 - 3} = 0,5 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que la phase liquide contient  $n_\ell = 5$  moles de liquide, de composition :

$$n_A^\ell = x_A^\ell \times n_\ell = 0,5 \times 5 \Rightarrow n_A^\ell = 2,5 \text{ moles de A liquide}$$

et :

$$n_B^\ell = (1 - x_A^\ell) \times n_\ell = 0,5 \times 5 \Rightarrow n_B^\ell = 2,5 \text{ moles de B liquide}$$

Or, les définitions des fractions molaires :  $x_A^v = \frac{P_A}{P}$  et  $x_B^v = \frac{P_B}{P}$  de A et B, dans la phase gazeuse, mènent à :

$$x_A^v = \frac{P_A}{P} = x_A^\ell \times \frac{P_A^*}{P} = 0,5 \times \frac{2}{2,5} = 0,4 \Rightarrow x_B^v = 1 - x_A^v = 0,6$$

Aussi, la phase gazeuse, qui contient  $n_v = 10$  moles, est composée de :

$$n_A^v = x_A^v \times n_v = 0,4 \times 10 \Rightarrow n_A^v = 4 \text{ moles de gaz A}$$



et :

$$n_B^v = x_B^v \times n_v = 0,6 \times 10 \Rightarrow n_B^v = 6 \text{ moles de gaz B}$$

2. Les calculs précédents montrent que le système contient  $n_A = 6,5$  moles de A et  $n_B = 8,5$  moles de B, presque intégralement sous forme de vapeur, lors de la disparition de la dernière goutte de liquide. C'est pourquoi les fractions molaires de A et B en phase vapeur valent :

$$x_A^v = \frac{n_A}{n_A + n_B} = \frac{6,5}{15} = 0,433 \text{ et } x_B^v = \frac{n_B}{n_A + n_B} = \frac{8,5}{15} = 0,567$$

En outre, la loi de Raoult stipule que :

$$\begin{cases} P_A = x_A^\ell P_A^* = x_A^v P \\ P_B = x_B^\ell P_B^* = x_B^v P \end{cases} \Rightarrow \frac{x_A^\ell}{x_B^\ell} \times \frac{P_A^*}{P_B^*} = \frac{x_A^v}{x_B^v}$$

$$\Rightarrow x_A^\ell = x_B^\ell \times \frac{P_B^* \times x_A^v}{P_A^* \times x_B^v} = x_B^\ell \times \frac{3 \times 0,433}{2 \times 0,567}$$

$$\Rightarrow x_A^\ell = 1,146 \times x_B^\ell$$

Ainsi, l'identité :  $x_A^\ell + x_B^\ell = 1$  devient-elle :

$$x_B^\ell \times (1,146 + 1) = 1 \Rightarrow x_B^\ell = \frac{1}{2,146} = 0,466$$

et :

$$x_A^\ell = 1,146 \times x_B^\ell \Rightarrow x_A^\ell = 1,146 \times 0,466 = 0,534$$

Ce faisant, il découle de la loi de Raoult que :

$$P = \frac{x_A^\ell P_A^*}{x_A^v} = \frac{0,534}{0,433} \times 2 \Rightarrow P = 2,467 \text{ bar}$$

## ● 210 ————— Concours Centrale

Considérons une phase liquide composée d'un corps pur ( $i$ ), en équilibre avec une phase gazeuse dans laquelle la vapeur de ( $i$ ) présente une fraction molaire  $x_v$ . Soient :

- $\mu_{i\ell}$  le potentiel chimique de ( $i$ ) dans la phase liquide ;
- $\mu_{i\ell}^0$  le potentiel chimique *standard* de ( $i$ ) dans la phase liquide ;
- $\mu_{iv}$  le potentiel chimique de ( $i$ ) dans la phase gazeuse ;
- $\mu_{iv}^0$  le potentiel chimique *standard* de ( $i$ ) dans la phase gazeuse ;
- $a_{i\ell} = 1$  l'activité de ( $i$ ) dans la phase liquide pure ;
- $a_{iv} = x_{iv} \times \frac{P}{P_0}$  l'activité de ( $i$ ) dans la phase gazeuse, sous une pression  $P$ , où  $P_0 = 1$  bar désigne la pression *standard*.

Le potentiel chimique de ( $i$ ) s'écrit, dans la phase liquide :

$$\mu_{i\ell} = \mu_{i\ell}^0 + RT \ln a_{i\ell} = \mu_{i\ell}^0$$

et dans la phase gazeuse :

$$\mu_{iv} = \mu_{iv}^0 + RT \ln a_{iv} = \mu_{iv}^0 + RT \ln x_{iv}$$

car la pression de travail vaut  $P = P_0 = 1$  bar.

L'équilibre de (*i*) dans les deux phases se traduit par l'identité des potentiels chimiques :

$$\mu_{iv} = \mu_{i\ell} \Rightarrow \mu_{iv}^0 + RT \ln(x_{iv}) = \mu_{i\ell}^0 \Rightarrow R \ln(x_{iv}) = \frac{\mu_{i\ell}^0 - \mu_{iv}^0}{T}$$

Or, la définition de l'enthalpie libre :  $G = H - TS$  (où  $H$  et  $S$  représentent respectivement l'enthalpie et l'entropie du système) conduit à :

$$\mu_i^0 = \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P_0} = \left( \frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{T, P_0} - T \left( \frac{\partial S}{\partial n_i} \right)_{T, P_0} \Rightarrow \mu_i^0 = h_i^0 - T \times s_i^0$$

où  $h_i^0$  et  $s_i^0$  sont l'enthalpie et l'entropie molaire partielle *standard* de l'espèce (*i*). C'est pourquoi :

$$R \ln(x_{iv}) = \frac{h_{i\ell}^0 - h_{iv}^0}{T} - (s_{i\ell}^0 - s_{iv}^0) \quad (101)$$

Dans le cadre de l'approximation d'Ellingham,  $h_i^0$  et  $s_i^0$  sont supposés indépendants de la température, si bien que lorsque l'espèce (*i*) est pure dans la phase gazeuse ( $x_{iv} = 1$ ), la température  $T$  désigne sa température d'ébullition  $T_i^*$  ; la relation (101) devient alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{h_{i\ell}^0 - h_{iv}^0}{T_i^*} - (s_{i\ell}^0 - s_{iv}^0) \Rightarrow s_{i\ell}^0 - s_{iv}^0 = \frac{h_{i\ell}^0 - h_{iv}^0}{T_i^*} \\ \Rightarrow R \ln(x_{iv}) &= \frac{h_{i\ell}^0 - h_{iv}^0}{T} - \frac{h_{i\ell}^0 - h_{iv}^0}{T_i^*} = (h_{i\ell}^0 - h_{iv}^0) \times \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_i^*} \right) \end{aligned}$$

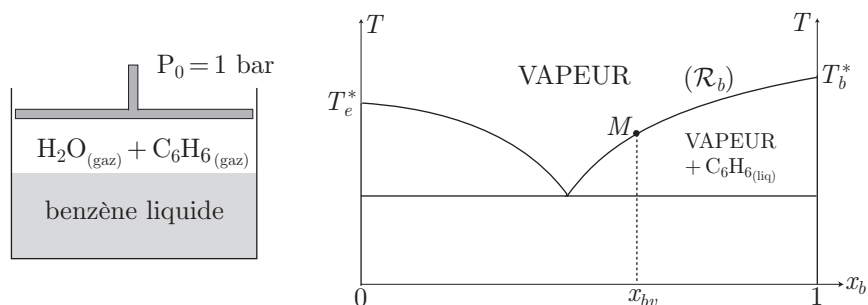
Enfin, l'équilibre de vaporisation de l'espèce (*i*) :  $(i)_{(\text{liq})} \rightleftharpoons (i)_{(\text{gaz})}$  a pour enthalpie *standard* :

$$\Delta_{\text{vap}} H_i^0 = h_{iv}^0 - h_{i\ell}^0 = L_{\text{vap}}^{(i)}$$

où  $L_{\text{vap}}^{(i)}$  est la chaleur latente de vaporisation de l'espèce (*i*). Finalement :

$$R \ln(x_{iv}) = L_{\text{vap}}^{(i)} \times \left( \frac{1}{T_i^*} - \frac{1}{T} \right) \quad (102)$$

1. Dans le premier système, la valeur de  $x_b$  est choisie de manière à ce que la phase liquide ne contienne que du benzène :

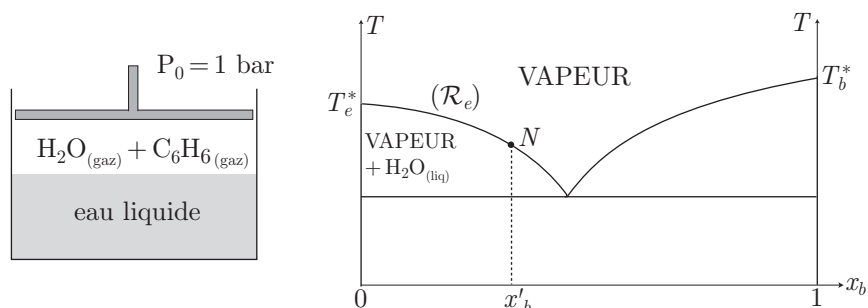


Ce faisant, le point  $M$  du diagramme binaire qui figure l'état du mélange appartient à la courbe de rosée ( $\mathcal{R}_b$ ), où est réalisé l'équilibre  $\text{C}_6\text{H}_6(\text{liq}) \rightleftharpoons \text{C}_6\text{H}_6(\text{gaz})$ . C'est pourquoi la relation (102) indique que :

$$R \ln(x_{bv}) = L_{\text{vap}}^{(b)} \times \left( \frac{1}{T_b^*} - \frac{1}{T} \right) \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{T_b^*} - \frac{R \ln(x_{bv})}{L_{\text{vap}}^{(b)}}$$

$$\Rightarrow T = T_b^* \times \frac{L_{\text{vap}}^{(b)}}{L_{\text{vap}}^{(b)} - RT_b^* \ln(x_{bv})}$$

2. Dans la deuxième expérience,  $x_b$  est choisi de manière à ce que la phase liquide ne soit constituée que d'eau :



L'équilibre  $\text{H}_2\text{O}(\text{liq}) \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O}(\text{gaz})$  est alors décrit, sur le diagramme binaire, par le point  $N$  de la courbe de rosée ( $\mathcal{R}_e$ ) de l'eau. Par conséquent, si  $x_{ev} = 1 - x'_b$  désigne la fraction molaire de la vapeur d'eau dans la phase gazeuse, le résultat (102) s'écrit, pour le point  $N$  :

$$R \ln(x_{ev}) = L_{\text{vap}}^{(e)} \times \left( \frac{1}{T_e^*} - \frac{1}{T} \right) \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{T_e^*} - \frac{R \ln(1 - x'_b)}{L_{\text{vap}}^{(e)}}$$

$$\Rightarrow T = T_e^* \times \frac{L_{\text{vap}}^{(e)}}{L_{\text{vap}}^{(e)} - RT_e^* \ln(1 - x'_b)}$$

## ● 211 ————— Concours Commun Polytechnique

1. La masse volumique du mercure valant  $\mu = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , le mélange benzène-toluène se trouve à la pression :

$$P = P_0 - \mu gh = 1,013 \cdot 10^5 - 13,6 \cdot 10^3 \times 9,81 \times 0,695 = 8\,576 \text{ Pa}$$

Soit  $x_A^\ell$  la fraction molaire du benzène liquide (noté A par la suite), dont la pression partielle dans la phase gazeuse vaut  $P_A = x_A^\ell P_A^*$ , conformément à la loi de Raoult. En outre, si  $x_A^v$  désigne la fraction molaire du benzène dans la phase gazeuse, la pression partielle du benzène est donnée par la définition :

$$P_A = x_A^v \times P = x_A^\ell \times P_A^* \quad (103)$$

De même la pression partielle du toluène (noté B) vaut :

$$P_B = x_B^v \times P = x_B^\ell \times P_B^* = (1 - x_A^\ell) \times P_B^* \text{ car } x_A^\ell + x_B^\ell = 1$$

Ce faisant, la pression qui règne dans la phase gazeuse vaut :

$$P = P_A + P_B = x_A^\ell P_A^* + (1 - x_A^\ell) P_B^* \quad (104)$$

$$\Rightarrow P(x_A^\ell) = P_B^* + x_A^\ell \times (P_A^* - P_B^*) \quad (105)$$

La courbe représentative de  $P(x_A^\ell)$  est donc une portion de droite.

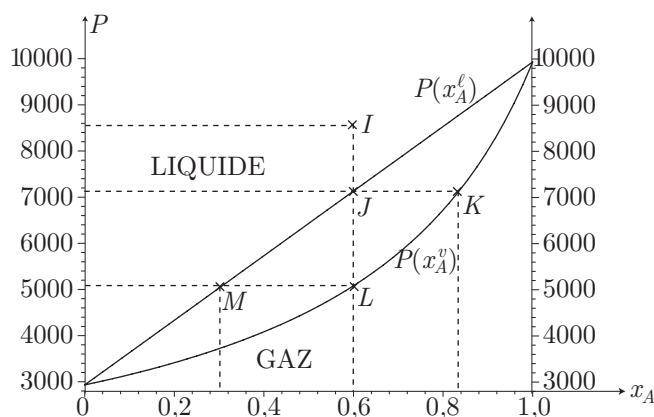
En revanche, l'identité (103) fournit :

$$x_A^\ell = x_A^v \times \frac{P}{P_A^*} \Rightarrow P = P_B^* + x_A^v \times \frac{P}{P_A^*} \times (P_A^* - P_B^*) \quad (106)$$

$$\Rightarrow P_A^* P + x_A^v P \times (P_B^* - P_A^*) = P_A^* P_B^* \quad (107)$$

$$\Rightarrow P(x_A^v) = \frac{P_A^* P_B^*}{P_A^* + x_A^v \times (P_B^* - P_A^*)} \quad (108)$$

La courbe représentative  $P(x_A^v)$  est par conséquent une portion d'hyperbole.



Le diagramme ci-dessus montre que le point représentatif du mélange benzène-toluène :  $I$  ( $x_A = 0,6$  ;  $P = 8\,576 \text{ Pa}$ ) se trouve dans une zone où le mélange est complètement liquide.

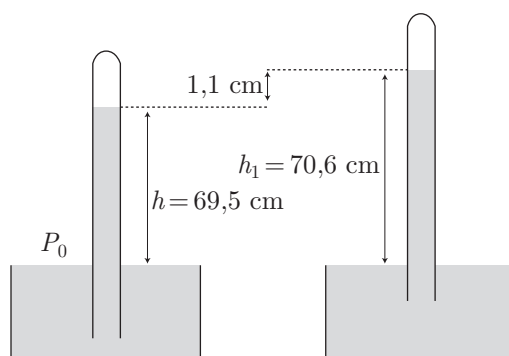
2. Le diagramme précédent révèle, en outre, que l'ébullition se produit à une pression  $P_e$ , ordonnée du point  $J$  de la droite  $P(x_A^\ell)$  pour  $x_A^\ell = 0,6$ ; le résultat (105) fournit alors :

$$P_e = 2932 + 0,6 \times (9930 - 2932) = 7131 \text{ Pa}$$

Cette pression est obtenue au sommet d'une colonne de mercure de hauteur telle que :

$$P_e = P_0 - \mu g h_1 \Rightarrow h_1 = \frac{P_0 - P_e}{\mu g} = \frac{1,013 \cdot 10^5 - 7131}{13,6 \cdot 10^3 \times 9,81}$$

$$\Rightarrow h_1 = 0,706 \text{ m} = 70,6 \text{ cm}$$



Par conséquent, le début d'ébullition du mélange benzène-toluène est obtenu en soulevant le tube de 1,1 cm.

3. La première bulle de vapeur contiendra une fraction molaire  $x_A^v$  correspondant à l'abscisse du point  $K$ , d'ordonnée  $P(x_A^v) = P_e$ . La relation (103) fournit alors directement :

$$x_A^v \times P_e = x_A^\ell \times P_A^* \Rightarrow x_A^v = x_A^\ell \times \frac{P_A^*}{P_e} = 0,6 \times \frac{9930}{7131} \Rightarrow x_A^v = 0,83$$

Remarque – On pourra s'assurer que cette valeur coïncide avec l'abscisse du point  $K$  représenté sur le diagramme ci-avant.

4. Le même diagramme montre que la phase liquide disparaît à la pression  $P_r$  du point  $L$ , c'est-à-dire :

$$P_r = P(x_A^v) \text{ pour } x_A^v = 0,6$$

soit encore, compte tenu de la relation (108) :

$$P_r = \frac{P_A^* \times P_B^*}{P_A^* + x_A^v \times (P_B^* - P_A^*)} = \frac{9930 \times 2932}{9930 + 0,6 \times (2932 - 9930)}$$

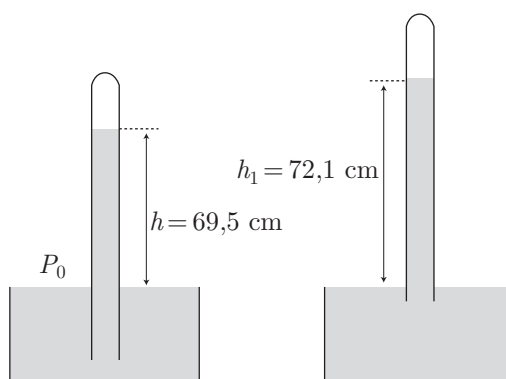
$$\Rightarrow P_r = 5080 \text{ Pa}$$

Cette pression est aussi celle obtenue au sommet d'une colonne de mercure de

hauteur  $h_2$  telle que :

$$P_r = P_0 - \mu g h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{P_0 - P_r}{\mu g} = \frac{1,013 \cdot 10^5 - 5\,080}{13,6 \cdot 10^3 \times 9,81}$$

$$\Rightarrow h_2 = 0,721 \text{ m} = 72,1 \text{ cm}$$



5. Conformément à la relation (105), lorsque  $P = P_r$ , la fraction molaire  $x_A^\ell$  du benzène dans la dernière goutte de liquide vérifie :

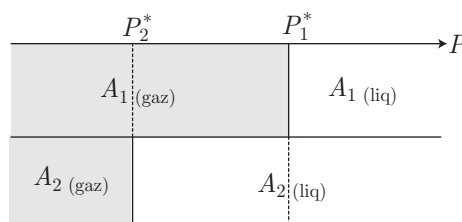
$$P_r = P_B^* + x_A^\ell \times (P_A^* - P_B^*) \Rightarrow x_A^\ell = \frac{P_r - P_B^*}{P_A^* - P_B^*} = \frac{5\,080 - 2\,932}{9\,930 - 2\,932}$$

$$\Rightarrow x_A^\ell = 0,31$$

Remarque – On s'assurera facilement de la compatibilité de ce résultat avec l'abscisse du point M repéré sur la courbe isotherme ci-avant.

## ● 212 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

1. Comme l'illustre le diagramme ci-dessous, une espèce chimique est d'autant plus volatile que sa pression de vapeur saturante est plus grande :



Or, le diagramme binaire montre que le sulfure de carbone (de température d'ébullition  $\theta_1^* = 46^\circ\text{C}$ ) est plus volatile que le méthanoate d'éthyle (de température d'ébullition  $\theta_2^* = 54^\circ\text{C} > \theta_1^*$ ). C'est pourquoi :

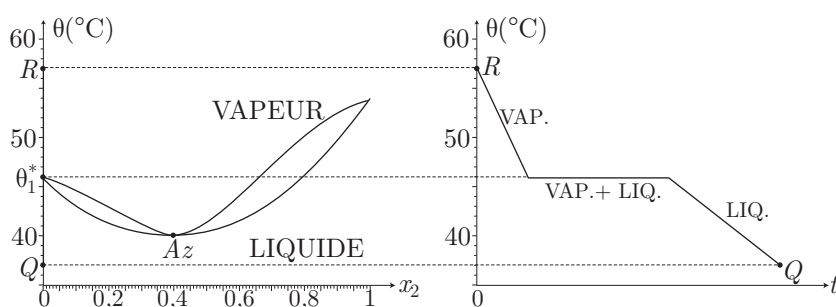
$$P_1^* > P_2^*$$

2. Le point  $Az$  correspond à un *minimum* commun des courbes de rosée et d'ébullition. En ce point, de coordonnées :  $x_{2Az} = 0,4$  et  $\theta_{Az} = 40^\circ\text{C}$ , le mélange binaire se comporte comme un corps pur à l'égard de la distillation ; c'est un azéotrope caractérisé par :

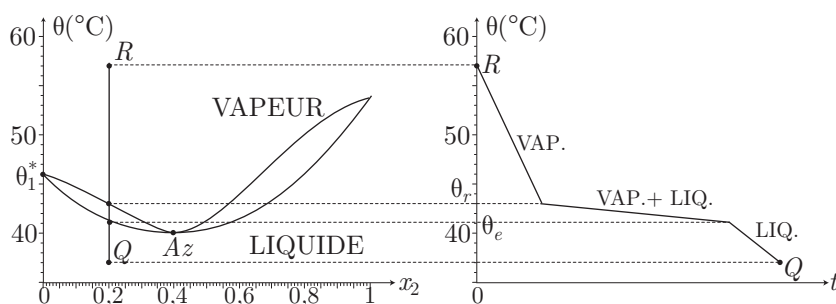
- l'impossibilité de séparer, par distillation, les deux composants du mélange binaire ;
- une température unique de changement d'état : liquide  $\rightleftharpoons$  gaz.

3. Compte tenu de ce qui précède, le mélange binaire présente un palier de changement d'état aux températures  $\theta_1^* = 46^\circ\text{C}$ ,  $\theta_{Az} = 40^\circ\text{C}$  et  $\theta_2^* = 54^\circ\text{C}$  lorsque  $x_2^{(v)}$  prend successivement les valeurs  $x_2^{(v)} = 0$  (sulfure de carbone pur),  $x_2^{(v)} = 0,4$  (azéotrope) et pour  $x_2^{(v)} = 1$  (méthanoate d'éthyle pur). C'est pourquoi la courbe de refroidissement du mélange binaire présente une allure qui dépend directement de la composition initiale de la phase vapeur.

- Pour  $x_2^{(v)} = 0$ , le changement d'état se produit à la température  $\theta_1^* = 46^\circ\text{C}$ , jusqu'à liquéfaction totale du sulfure de carbone pur.

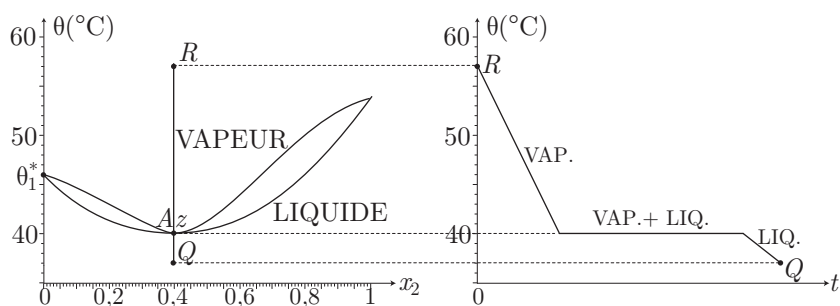


- Pour  $x_2^{(v)} = 0,2$ , la première goutte de liquide apparaît à la température  $\theta_r = 43^\circ\text{C}$  tandis que la dernière bulle de vapeur disparaît à la température  $\theta_e \simeq 41^\circ\text{C}$ .

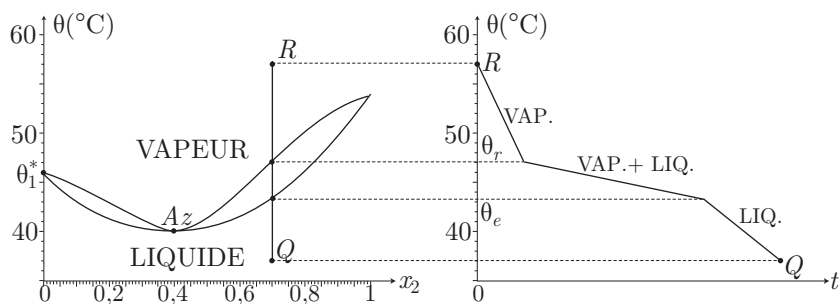


- Pour  $x_2^{(v)} = 0,4$ , l'azéotrope se comporte comme un corps pur : la liquéfaction du mélange se produit à l'unique température  $\theta_{Az} = 40^\circ\text{C}$ , jusqu'à disparition totale de la vapeur.

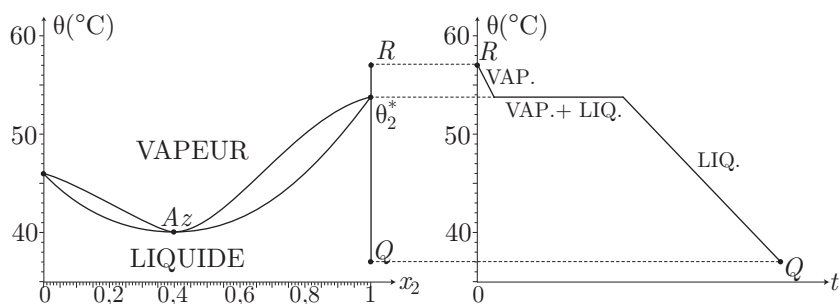
**CORRIGÉS**



- Pour  $x_2^{(v)} = 0,7$ , la première goutte de liquide apparaît à la température  $\theta_r = 47^\circ\text{C}$  et se poursuit jusqu'à la température  $\theta_e \simeq 43^\circ\text{C}$ , où la dernière bulle de vapeur disparaît.

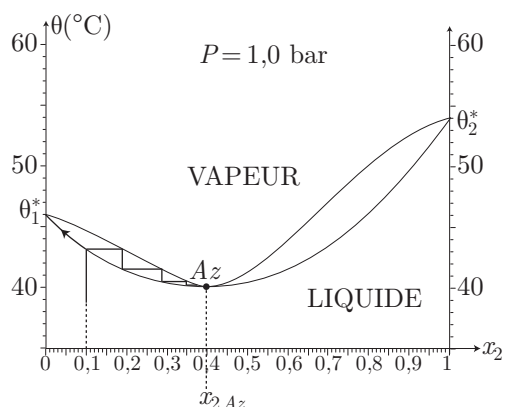


- Pour  $x_2^{(v)} = 1,0$ , le méthanoate d'éthyle est pur ; à ce titre, son changement d'état vapeur  $\rightarrow$  liquide se produit à l'unique température  $\theta_2^* = 54^\circ\text{C}$  :



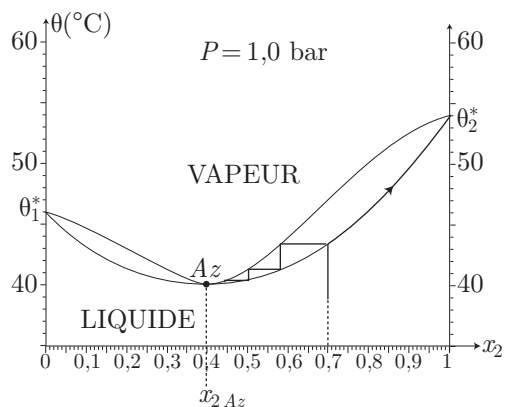
4. (a) Lorsque  $x_2^{(\ell)} = 0,10 < x_{2Az} = 0,4$ , la colonne à distiller enrichit la vapeur en méthanoate d'éthyle, jusqu'à ce que  $x_2^{(\ell)}$  prenne la valeur  $x_{2Az} = 0,4$ .





Le distillat présente donc la même composition  $x_{2\text{Az}}$  que le mélange azéotrope. Tandis que la vapeur s'enrichit en méthanoate d'éthyle, le résidu liquide s'appauvrit en ester, jusqu'à atteindre la température  $\theta_1^*$  d'ébullition du sulfure de carbone pur ; le résidu est composé de sulfure de carbone.

- (b) Si  $x_2^{(\ell)} = 0,7 > x_{2\text{Az}} = 0,4$ , la vapeur qui s'élève dans la colonne à distiller s'appauvrit en ester ( $x_2$  passe de la valeur 0,70 à  $x_{2\text{Az}} = 0,40$ ) jusqu'à présenter la composition du mélange azéotrope, qui constitue le distillat, après refroidissement des vapeurs. Concomitamment, le résidu s'enrichit en méthanoate d'éthyle, dont la fraction molaire passe de  $x_2^{(\ell)} = 0,70$  à  $x_2^{(\ell)} = 1$ . L'ester compose donc le résidu.



### ● 213 ————— Concours Commun Polytechnique

1. À la température  $T = 298$  K, la tension de vapeur saturante du pinène vaut :

$$P_p = \exp\left(16,0481 - \frac{3326,67}{298 - 64,97}\right) = 5,585 \text{ hPa} \quad (109)$$

La vapeur de pinène en équilibre dans l'air se comporte alors comme un gaz parfait, de pression partielle  $P_p$  : dans un volume  $V$  d'air se trouvent  $n_p$  moles de

vapeur de pinène, telles que :

$$P_p V = n_p RT \Rightarrow n_p = \frac{P_p V}{RT}$$

Aussi, en notant  $M_p = 136 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  la masse molaire du pinène, un volume  $V$  d'air contient la masse de pinène :

$$m_p = n_p M = \frac{MP_p}{RT} \times V \Rightarrow \frac{m_p}{V} = \frac{MP_p}{RT} = \frac{136 \times 558,5}{8,31 \times 298}$$

$$\Rightarrow \frac{m_p}{V} = 30,7 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$$

Cette valeur étant très supérieure à celle tolérée ( $5 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$ ), il est indispensable d'aérer une pièce dans laquelle de l'essence de térébenthine est laissée à l'air libre.

2. Pour éviter tout danger, on peut également travailler dans une gamme de températures  $T$  qui assurent l'inégalité :  $\frac{m_p}{V} \leq 5 \text{ g} \cdot \text{m}^{-3}$ , c'est-à-dire :

$$\frac{MP_p}{RT} \leq 5 \Rightarrow P_p \leq \frac{5 RT}{M} = 0,3055 \times T \text{ (en Pa)}$$

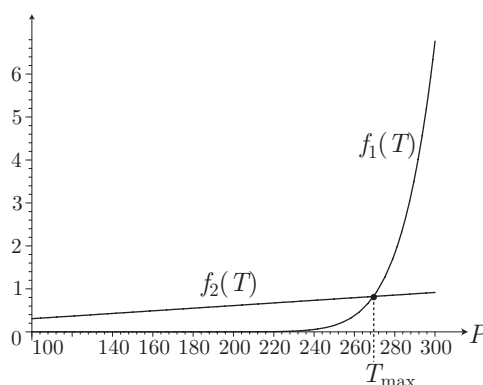
c'est-à-dire, compte tenu de la loi (109), dans laquelle  $P_p$  est exprimé en hPa :

$$100 \times \exp\left(16,0481 - \frac{3326,67}{T - 64,97}\right) \leq 0,3055 \times T$$

Définissons alors les fonctions :

$$f_1(T) = \exp\left(16,0481 - \frac{3326,67}{T - 64,97}\right) \text{ et } f_2(T) = 3,055 \cdot 10^{-3} \times T$$

dont les représentations graphiques :



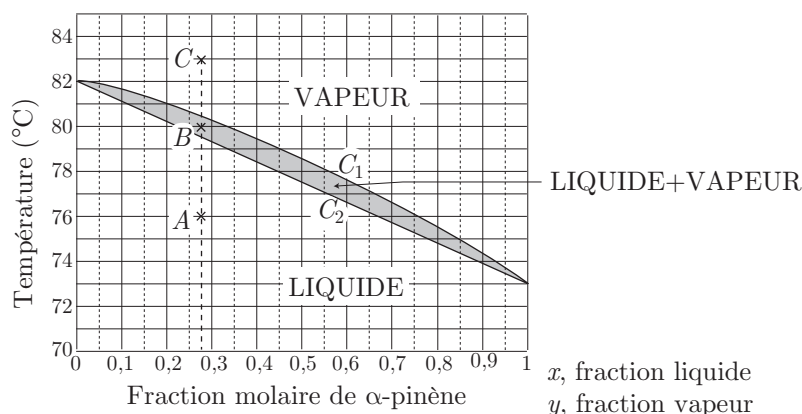
montrent que l'inégalité  $f_1(T) \leq f_2(T)$  est conditionnée par l'existence d'une température  $T_{\max}$  telle que  $T \leq T_{\max}$ . Numériquement, la valeur de  $T_{\max}$ , solution de l'équation :  $f_1(T_{\max}) = f_2(T_{\max})$  est telle que :

$$T \leq T_{\max} = 269,5 \text{ K}$$

3. (a) L' $\alpha$ -pinène pur présente une fraction molaire  $x_\alpha = 1$ , à laquelle correspond une température d'ébullition  $t_\alpha = 73^\circ\text{C}$ . Au contraire, le  $\beta$ -pinène pur est associé à une fraction molaire  $x_\alpha = 0$ , à laquelle correspond la température d'ébullition  $t_\beta = 82^\circ\text{C}$ .
- (b) Un mélange qui contient  $m_\alpha = 280$  g d' $\alpha$ -pinène et  $m_\beta = 720$  g de  $\beta$ -pinène contient en fait ces deux isomères aux quantités respectives :  $n_\alpha = \frac{m_\alpha}{M_p}$  et  $n_\beta = \frac{m_\beta}{M_p}$ . Ce faisant, ce mélange possède une quantité totale de pinène :  $n = n_\alpha + n_\beta$  qui permet de définir la fraction molaire d' $\alpha$ -pinène :

$$x_\alpha = \frac{n_\alpha}{n} = \frac{n_\alpha}{n_\alpha + n_\beta} = \frac{M_p n_\alpha}{M_p n_\alpha + M_p n_\beta} = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}$$

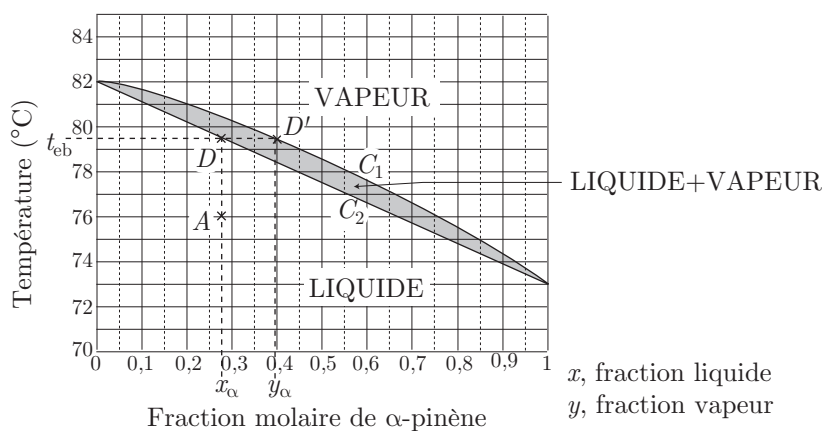
$$\Rightarrow x_\alpha = \frac{280}{1000} = 0,28$$



Les points représentatifs d'un tel mélange sont :

- le point  $A$  ( $x_\alpha = 0,28$  ;  $t = 76^\circ\text{C}$ ), qui se trouve dans la portion ( $D_3$ ) du diagramme qui correspond au mélange liquide des deux isomères ;
  - le point  $B$  ( $x_\alpha = 0,28$  ;  $t = 80^\circ\text{C}$ ), qui appartient à l'espace compris entre la courbe d'ébullition ( $C_2$ ) et celle de rosée ( $C_1$ ), et qui correspond au mélange binaire diphasé (liquide + vapeur) ;
  - le point  $C$  ( $x_\alpha = 0,28$  ;  $t = 83^\circ\text{C}$ ), dont la présence au dessus de la courbe de rosée ( $C_1$ ) révèle l'état gazeux du mélange des isomères.
- (c) Lorsque la température  $t$  du mélange augmente depuis le point  $A$  (phase liquide), à  $x_\alpha$  constant, l'ébullition commence à la température  $t_{\text{eb}}$  du point d'intersection  $D$  de la courbe ( $C_2$ ) avec la verticale passant par  $A$ . La lecture du diagramme donne :

$$t_{\text{eb}} \simeq 79,5^\circ\text{C}$$

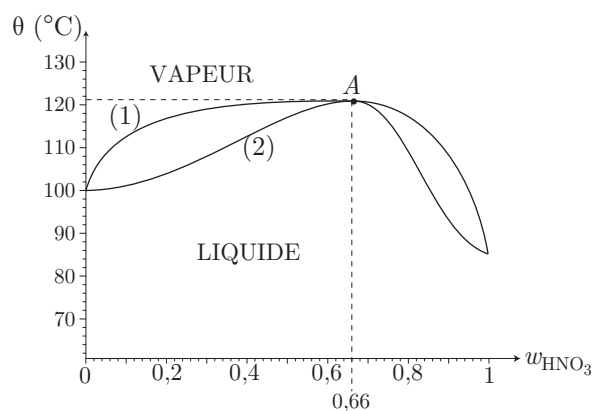


Les vapeurs ainsi produites par distillation ont une fraction molaire  $y_\alpha \simeq 0,4$  en  $\alpha$ -pinène. Par suite, les premières gouttes de distillat (qui sont en fait les premières bulles de gaz, liquéfiées par le réfrigérant) sont donc plus riches en  $\beta$ -pinène qu'en  $\alpha$ -pinène, dont les fractions molaires valent :

$$y_\alpha \simeq 0,4 \text{ en } \alpha\text{-pinène et } y_\beta \simeq 0,6 \text{ en } \beta\text{-pinène.}$$

## ● 214 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

1. Les courbes de rosée (1) et d'ébullition (2) admettent en A un *maximum* commun appelé azéotrope.



2. Ce diagramme montre que le point A a pour coordonnées :

$$w_{\text{HNO}_3}^A = 0,66 \text{ et } \theta_A = 121^\circ\text{C}$$

Soient  $m_{\text{HNO}_3}$  et  $m_{\text{H}_2\text{O}}$  les masses respectives d'acide nitrique et d'eau composant le mélange binaire. La fraction massique de  $\text{HNO}_3$  est définie par :

$$w_{\text{HNO}_3} = \frac{m_{\text{HNO}_3}}{m_{\text{HNO}_3} + m_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{n_{\text{HNO}_3} M_{\text{HNO}_3}}{n_{\text{HNO}_3} M_{\text{HNO}_3} + n_{\text{H}_2\text{O}} M_{\text{H}_2\text{O}}} \quad (110)$$

où  $n_{\text{HNO}_3}$  et  $n_{\text{H}_2\text{O}}$  désignent respectivement les quantités (en moles) d'acide nitrique et d'eau dans le mélange. Or, si  $n = n_{\text{HNO}_3} + n_{\text{H}_2\text{O}}$  représente la quantité

totale de matière dans le mélange, les fractions molaires de  $\text{HNO}_3$  et de  $\text{H}_2\text{O}$  sont définies par :

$$x_{\text{HNO}_3} = \frac{n_{\text{HNO}_3}}{n} \Rightarrow n_{\text{HNO}_3} = x_{\text{HNO}_3} \times n$$

et :

$$x_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{n} = 1 - x_{\text{HNO}_3} \Rightarrow n_{\text{H}_2\text{O}} = (1 - x_{\text{HNO}_3}) \times n$$

Ce faisant, l'équation (110) devient :

$$\begin{aligned} w_{\text{HNO}_3} &= \frac{x_{\text{HNO}_3} M_{\text{HNO}_3}}{x_{\text{HNO}_3} M_{\text{HNO}_3} + (1 - x_{\text{HNO}_3}) M_{\text{H}_2\text{O}}} \\ \Rightarrow x_{\text{HNO}_3} w_{\text{HNO}_3} \times (M_{\text{HNO}_3} - M_{\text{H}_2\text{O}}) + w_{\text{HNO}_3} M_{\text{H}_2\text{O}} &= x_{\text{HNO}_3} M_{\text{HNO}_3} \\ \Rightarrow x_{\text{HNO}_3} &= \frac{w_{\text{HNO}_3} M_{\text{H}_2\text{O}}}{M_{\text{HNO}_3} + w_{\text{HNO}_3} \times (M_{\text{H}_2\text{O}} - M_{\text{HNO}_3})} \\ \Rightarrow x_{\text{HNO}_3} &= \frac{0,66 \times 18}{63 + 0,66 \times (18 - 63)} \Rightarrow x_{\text{HNO}_3} = 0,36 \end{aligned}$$

3. L'énoncé donne la composition molaire du mélange :

$$n_{\text{HNO}_3} = 0,3 \text{ mole et } n_{\text{H}_2\text{O}} = n - n_{\text{HNO}_3} = 4 - 0,3 = 3,7 \text{ moles}$$

Par suite, ce mélange contient :

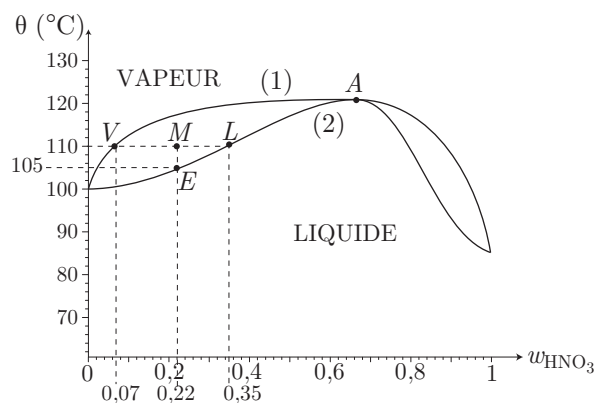
$$m_{\text{HNO}_3} = n_{\text{HNO}_3} \times M_{\text{HNO}_3} = 0,3 \times 63 = 18,90 \text{ g de HNO}_3$$

et :

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = n_{\text{H}_2\text{O}} \times M_{\text{H}_2\text{O}} = 3,7 \times 18 = 66,60 \text{ g de H}_2\text{O}$$

La fraction massique de l'acide nitrique vaut par conséquent :

$$w_{\text{HNO}_3} = \frac{m_{\text{HNO}_3}}{m_{\text{HNO}_3} + m_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{18,9}{18,9 + 66,6} \Rightarrow w_{\text{HNO}_3} = 0,221$$



Pour une telle valeur de la fraction massique  $w_{\text{HNO}_3}$ , le diagramme binaire montre que l'ébullition commence à la température du point  $E$  :

$$\theta_3 = 105^\circ\text{C}$$

4. À la température  $\theta' = 110^\circ\text{C}$ , le système est composé de  $\text{H}_2\text{O}$  et  $\text{HNO}_3$  simultanément présents dans la phase liquide et dans la phase gazeuse ; les fractions massiques respectives, en  $\text{HNO}_3$  liquide ou gazeux, correspondent aux abscisses des points  $L$  et  $V$  :

$$w_{\text{HNO}_3}^{(\ell)} = 0,35 \text{ et } w_{\text{HNO}_3}^{(v)} = 0,07$$

Soient :

- $m_{\text{H}_2\text{O}} = 66,60 \text{ g}$  et  $m_{\text{HNO}_3} = 18,90 \text{ g}$  les masses totales d'eau et d'acide nitrique composant le mélange ;
- $m = m_{\text{H}_2\text{O}} + m_{\text{HNO}_3} = 85,5 \text{ g}$  la masse totale du système binaire ;
- $m_{\text{HNO}_3}^{(\ell)}$ ,  $m_{\text{HNO}_3}^{(v)}$ ,  $m_{\text{H}_2\text{O}}^{(\ell)}$ ,  $m_{\text{H}_2\text{O}}^{(v)}$  les masses de l'acide nitrique liquide, de la vapeur d'acide nitrique, de l'eau liquide et de la vapeur d'eau ;
- $m_\ell$  et  $m_v$  les masses de la phase liquide et de la vapeur respectivement.

La règle des moments conduit à :

$$m_\ell = m \times \frac{VM}{VL} = 85,5 \times \frac{0,221 - 0,07}{0,35 - 0,07} = 46,11 \text{ g}$$

et :

$$m_v = m \times \frac{ML}{VL} = 85,5 \times \frac{0,35 - 0,221}{0,35 - 0,77} = 39,39 \text{ g}$$

La définition des fractions massiques de  $\text{HNO}_3$  dans les phases liquide ou gazeuse conduit alors à :

$$\begin{aligned} w_{\text{HNO}_3}^{(\ell)} = \frac{m_{\text{HNO}_3}^{(\ell)}}{m_\ell} &\Rightarrow m_{\text{HNO}_3}^{(\ell)} = w_{\text{HNO}_3}^{(\ell)} \times m_\ell = 0,35 \times 46,11 = 16,14 \text{ g} \\ &\Rightarrow m_{\text{H}_2\text{O}}^{(\ell)} = m_\ell - m_{\text{HNO}_3}^{(\ell)} = 46,11 - 16,14 = 29,97 \text{ g} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} w_{\text{HNO}_3}^{(v)} = \frac{m_{\text{HNO}_3}^{(v)}}{m_v} &\Rightarrow m_{\text{HNO}_3}^{(v)} = w_{\text{HNO}_3}^{(v)} \times m_v = 0,07 \times 39,7 = 2,76 \text{ g} \\ &\Rightarrow m_{\text{H}_2\text{O}}^{(v)} = m_v - m_{\text{HNO}_3}^{(v)} = 39,39 - 2,76 = 36,63 \text{ g} \end{aligned}$$

Ces résultats sont consignés dans le tableau suivant :

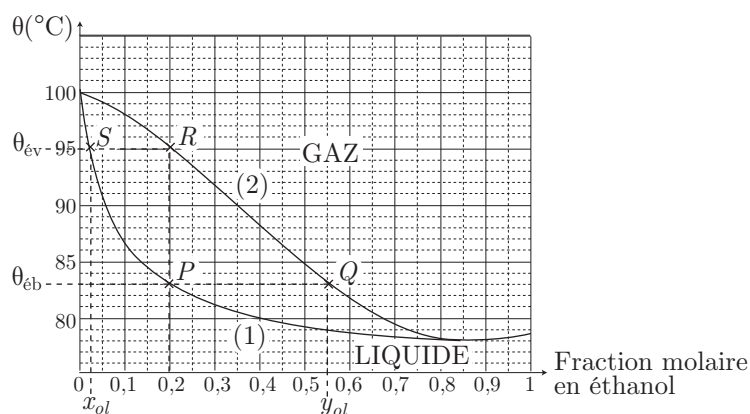
	$\text{HNO}_3$	$\text{H}_2\text{O}$	total
liquide	16,14 g	29,97 g	46,11 g
vapeur .....	2,76 g	36,63 g	39,39 g
total .....	18,90 g	66,60 g	85,50 g

## ● 215 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

1. Dans le diagramme binaire proposé :

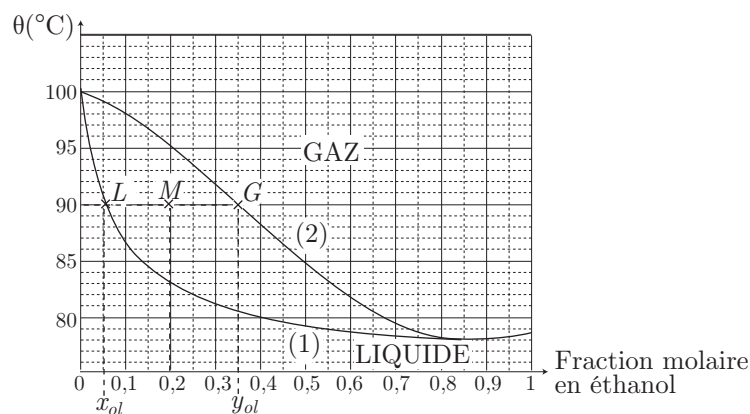
- la courbe (1) représente la courbe d'ébullition ;
- la courbe (2) est la courbe de rosée ;
- le domaine  $A$  est celui de la phase gazeuse ;

- le domaine  $B$ , compris entre les courbes (1) et (2), correspond à l'équilibre entre les phases liquide et gazeuse ;
  - le domaine  $C$  est celui de la phase gazeuse.
2. (a) Pour une fraction molaire  $x_{ol} = 0,2$  en alcool, le diagramme du mélange binaire montre que l'ébullition commence à la température  $\theta_{éb} = 83^\circ\text{C}$  du point représentatif  $P$  d'abscisse  $x_{ol} = 0,2$  :



Ce même diagramme fournit la fraction molaire  $y_{ol} = 0,55$  de la première bulle de vapeur (abscisse du point  $Q$ , de la courbe de rosée, d'ordonnée  $\theta_{éb}$ ).

- (b) Le même diagramme révèle la température  $\theta_{év} = 95^\circ\text{C}$  à laquelle s'évapore la dernière goutte de liquide (ordonnée du point  $R$  de la courbe de rosée). On y lit aussi la fraction molaire en alcool :  $x_{ol} = 0,025$  de cette dernière goutte (abscisse du point  $S$  de la courbe d'ébullition).
3. À  $90^\circ\text{C}$ , l'état du mélange binaire eau-alcool, de fraction molaire  $w_{ol}$  en alcool, est figuré par le point  $M$  ( $w_{ol} = 0,2$ ;  $\theta = 90^\circ\text{C}$ ) du domaine d'équilibre liquide-gaz.



- (a) Une lecture directe du diagramme des phases fournit les points représentatifs  $L$  et  $G$  des phases liquide et gazeuse, dont les abscisses sont :

$$x_{ol} = 0,05 \text{ et } y_{ol} = 0,35 \quad (111)$$

Ce faisant, les fractions molaires de l'eau dans ces mêmes phases valent :

**CORRIGÉS**

$$x_e = 1 - x_{ol} = 0,95 \text{ et } y_e = 1 - y_{ol} = 0,65$$

- (b) Le théorème des moments permet de retrouver les nombres de moles  $n_\ell$  et  $n_g$  des phases gazeuse et liquide :

$$n_\ell = \frac{MG}{LG} \times n_0 = n_0 \times \frac{y_{ol} - w_{ol}}{y_{ol} - x_{ol}}$$

où  $w_{ol} = \frac{n_{ol}}{n_{ol} + n_e}$  désigne la fraction molaire totale d'alcool contenu dans le mélange, qui contient également  $n_e$  moles d'eau. Ce faisant :

$$\begin{aligned} n_\ell &= 1 \times \frac{0,35 - 0,2}{0,35 - 0,05} \Rightarrow n_\ell = 0,5 \text{ mole de liquide} \\ &\Rightarrow n_g = n_0 - n_\ell = 0,5 \text{ mole de gaz} \end{aligned}$$

- (c) Ainsi, la phase liquide contient :

$$n_{ol,\ell} = x_{ol} \times n_\ell = 0,05 \times 0,5 \Rightarrow n_{ol,\ell} = 0,025 \text{ mole d'éthanol liquide}$$

et :

$$n_{e,\ell} = x_e \times n_\ell = 0,95 \times 0,5 \Rightarrow n_{e,\ell} = 0,475 \text{ mole d'eau liquide}$$

tandis que la phase gazeuse contient :

$$n_{ol,g} = y_{ol} \times n_g = 0,35 \times 0,5 \Rightarrow n_{ol,g} = 0,175 \text{ mole de vapeur d'alcool}$$

et :

$$n_{e,g} = y_e \times n_g = 0,65 \times 0,5 \Rightarrow n_{e,g} = 0,325 \text{ mole de vapeur d'eau}$$

Remarque – On s'assurera aisément de l'égalité :

$$n_0 = n_{ol,\ell} + n_{e,\ell} + n_{ol,g} + n_{e,g}$$

- (d) La phase gazeuse, qui contient  $n_g = 0,5$  mole de gaz parfait, occupe un volume  $V$  donné par l'équation d'état :

$$\begin{aligned} PV = n_g RT &\Rightarrow V = \frac{n_g RT}{P} = \frac{0,5 \times 8,31 \times (273 + 90)}{10^5} \\ &\Rightarrow V = 1,508 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 15,08 \text{ L} \end{aligned}$$

## II- Comparaison avec un modèle idéal

1. (a) L'enthalpie libre  $G^*(T, P, n)$  d'un corps pur varie de la quantité :

$$dG^* = -S^* dT + V^* dP + \mu^* dn$$

lorsque la température, la pression et le nombre de moles  $n$  du corps pur varient. Cette égalité conduit alors directement à :

$$\left( \frac{\partial \mu^*}{\partial T} \right)_P = - \left( \frac{\partial S^*}{\partial n} \right)_P = -S_m^*$$



où  $S_m^*$  est l'entropie molaire du corps pur. C'est pourquoi, dans le cas de l'eau en phase liquide, on obtient :

$$\left( \frac{\partial \mu_{e,l}^*}{\partial T} \right)_P = -S_{m,e,l}^* \quad (112)$$

- (b) Étant donné que  $T_e^*$  désigne la température d'équilibre entre l'eau liquide et sa vapeur, à la pression  $P$  :

$$\mu_{e,l}^*(T_e^*, P) = \mu_{e,g}^*(T_e^*, P) \quad (113)$$

- (c) En admettant que  $S_{m,e,l}^*$  soit indépendant de la température, une variation de  $T$  produit une variation de  $\mu_{e,l}^*$  donnée par l'identité (112) :

$$\begin{aligned} d\mu_{e,l}^* &= \left( \frac{\partial \mu_{e,l}^*}{\partial T} \right)_P dT = -S_{m,e,l}^* \times dT \\ \Rightarrow \mu_{e,l}^*(T, P) - \mu_{e,l}^*(T_e^*, P) &= -S_{m,e,l}^* \times (T - T_e^*) \end{aligned}$$

Une loi analogue fournit le potentiel chimique de l'eau dans la phase gazeuse :

$$\mu_{e,g}^*(T, P) - \mu_{e,g}^*(T_e^*, P) = -S_{m,e,g}^* \times (T - T_e^*)$$

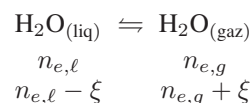
Ainsi :

$$\begin{aligned} [\mu_{e,l}^*(T, P) - \mu_{e,g}^*(T, P)] - [\mu_{e,l}^*(T_e^*, P) - \mu_{e,g}^*(T_e^*, P)] \\ = (-S_{m,e,l}^* + S_{m,e,g}^*) \times (T - T_e^*) \end{aligned}$$

où la relation (113) conduit à :

$$\mu_{e,l}^*(T, P) - \mu_{e,g}^*(T, P) = (S_{m,e,g}^* - S_{m,e,l}^*) \times (T - T_e^*) \quad (114)$$

- (d) Au cours de la transformation :



l'eau reçoit une quantité de chaleur  $Q_{\text{vap}}$ , à pression constant et à la température  $T_e^*$ , qui s'identifie à :

$$Q_{\text{vap}} = \xi \times L_{v,e}^*$$

Or, cette transformation étant effectuée de manière réversible, la variation d'entropie dont elle s'accompagne est définie par :

$$\Delta S_e = \frac{Q_{\text{vap}}}{T_e^*} = \xi \times \frac{L_{v,e}^*}{T_e^*}$$

avec :

$$\begin{aligned}\Delta S_e &= \underbrace{[(n_{e,g} + \xi) S_{m,e,g}^* + (n_{e,\ell} - \xi) S_{m,e,\ell}^*]}_{S_{e, \text{finale}}^*} \\ &\quad - \underbrace{[n_{e,g} S_{m,e,g}^* + n_{e,\ell} S_{m,e,\ell}^*]}_{S_{e, \text{initiale}}^*} \\ &= \xi \times (S_{m,e,g}^* - S_{m,e,\ell}^*) \\ &\Rightarrow S_{m,e,g}^* - S_{m,e,\ell}^* = \frac{L_{v,e}^*}{T_e^*}\end{aligned}$$

Par conséquent, l'identité (114) s'écrit aussi :

$$\mu_{e,\ell}^*(T, P) - \mu_{e,g}^*(T, P) = \frac{L_{v,e}^*}{T_e^*} \times (T - T_e^*) \quad (115)$$

(e) Pour l'éthanol, un calcul analogue conduit à :

$$\mu_{ol,\ell}^*(T, P) - \mu_{ol,g}^*(T, P) = \frac{L_{v,ol}^*}{T_{ol}^*} \times (T - T_{ol}^*) \quad (116)$$

(f) Dans les mélanges idéaux, les expressions des potentiels chimiques :

$$\begin{cases} \mu_{e,\ell}(T, P) = \mu_{e,\ell}^*(T, P) + RT \ln x_e \\ \mu_{e,g}(T, P) = \mu_{e,g}^*(T, P) + RT \ln y_e \end{cases}$$

mènent à :

$$RT \ln \left( \frac{x_e}{y_e} \right) = [\mu_{e,\ell}(T, P) - \mu_{e,g}(T, P)] - [\mu_{e,\ell}^*(T, P) - \mu_{e,g}^*(T, P)]$$

où  $\mu_{e,\ell}(T, P) = \mu_{e,g}(T, P)$  à la température  $T$  et sous la pression  $P$  d'équilibre entre les phases liquide et gazeuse. il s'ensuit que :

$$RT \ln \left( \frac{x_e}{y_e} \right) = - [\mu_{e,\ell}^*(T, P) - \mu_{e,g}^*(T, P)]$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'équation (115) :

$$RT \ln \left( \frac{x_e}{y_e} \right) = - \frac{L_{v,e}^*}{T_e^*} \times (T - T_e^*)$$

Pour l'éthanol, une relation analogue peut être obtenue de la même manière :

$$RT \ln \left( \frac{x_{ol}}{y_{ol}} \right) = - \frac{L_{v,ol}^*}{T_{ol}^*} \times (T - T_{ol}^*)$$

2. (a) Des relations précédentes, on déduit que :

$$\frac{x_{ol}}{y_{ol}} = \exp \left[ - \frac{L_{v,ol}^*}{RT_{ol}^*} \times \left( 1 - \frac{T_{ol}^*}{T} \right) \right] = A_{ol}(T) \Rightarrow x_{ol} = A_{ol}(T) \times y_{ol} \quad (117)$$

et que :

$$\frac{x_e}{y_e} = \exp \left[ -\frac{L_{v,e}^*}{RT_e^*} \times \left( 1 - \frac{T_e^*}{T} \right) \right] = A_e(T) \Rightarrow x_e = y_e \times A_e(T)$$

$$\Rightarrow 1 - x_{ol} = (1 - y_{ol}) \times A_e(T) \text{ car } x_e = 1 - x_{ol} \text{ et } y_e = 1 - y_{ol}$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'équation (117) :

$$1 - A_{ol}(T) \times y_{ol} = A_e(T) - A_e(T) \times y_{ol} \Rightarrow y_{ol} = \frac{1 - A_e(T)}{A_{ol}(T) - A_e(T)}$$

et :

$$1 - x_{ol} = (1 - y_{ol}) \times A_e(T) = \left[ 1 - \frac{1 - A_e(T)}{A_{ol}(T) - A_e(T)} \right] \times A_e(T)$$

$$= \frac{A_{ol}(T) - 1}{A_{ol}(T) - A_e(T)} \times A_e(T)$$

$$\Rightarrow x_{ol} = 1 - \frac{A_{ol}(T) - 1}{A_{ol}(T) - A_e(T)} \times A_e(T)$$

$$\Rightarrow x_{ol} = A_{ol}(T) \times \frac{1 - A_e(T)}{A_{ol}(T) - A_e(T)}$$

(b) Étant donné les valeurs numériques proposées, pour  $T = 363 \text{ K}$  :

$$A_{ol}(T) = \exp \left[ -\frac{43.10^3}{8,31 \times 353} \times \left( 1 - \frac{353}{363} \right) \right] = 0,668$$

et :

$$A_e(T) = \exp \left[ -\frac{45.10^3}{8,31 \times 373} \times \left( 1 - \frac{373}{363} \right) \right] = 1,492$$

de sorte que :

$$y_{ol} = \frac{1 - 1,492}{0,668 - 1,492} = 0,597$$

et :

$$x_{ol} = 0,668 \times \frac{1 - 1,492}{0,668 - 1,492} = 0,399$$

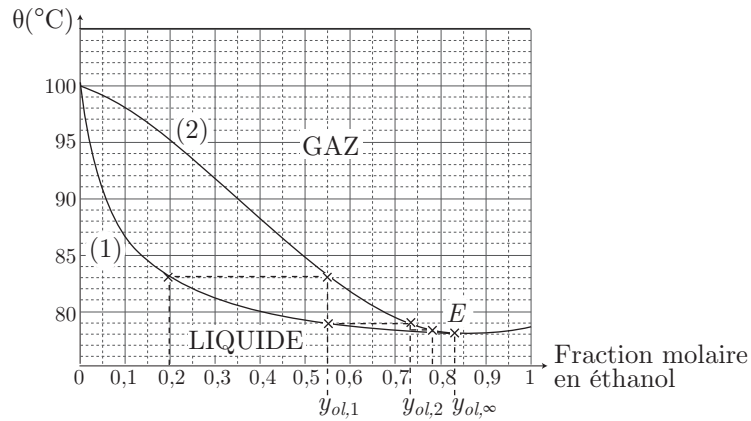
La comparaison de ces résultats avec ceux (111) issus de la courbe :

$$x_{ol} = 0,05 \text{ et } y_{ol} = 0,35$$

révèlent une grande incompatibilité imputable à l'hypothèse, surement fautive, d'un mélange eau-alcool idéal.

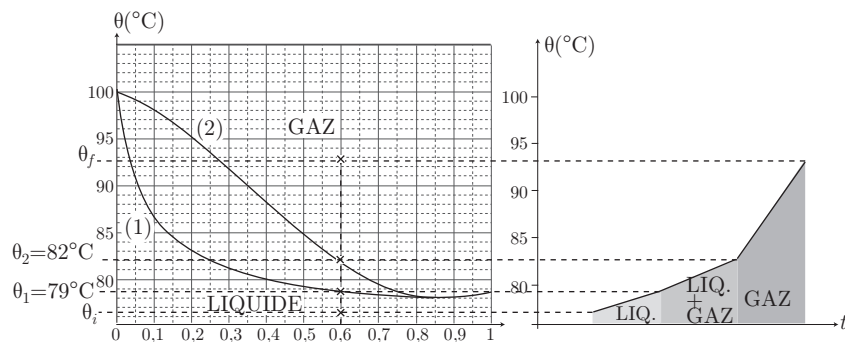
### III- Mélanges riches en alcool

1. (a) Le point d'intersection des courbes de rosée et d'ébullition est appelé *point d'eutectique*.
- (b) Le schéma ci-dessous montre comment, sur chaque plateau d'une distillation fractionnée, le distillat s'enrichit en alcool ( $y_{ol,1}, y_{ol,2}, \dots, y_{ol,\infty}$ ) :



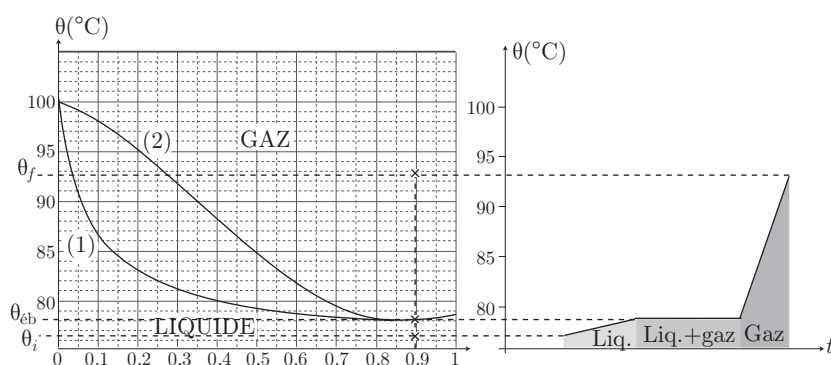
Cet enrichissement est cependant limité par le point d'eutectique  $E$ , où  $y_{ol}$  admet sa valeur limite  $y_{ol,\infty}$ . C'est pourquoi la présence d'un point d'eutectique interdit l'obtention d'un distillat pur en alcool.

2. (a) Le diagramme des phases montre que, pour un mélange eau-alcool, de fraction molaire  $x_{ol} = 0,6$ , l'ébullition commence à se produire à une température  $\theta_1 = 79^\circ\text{C}$  et cesse à une température  $\theta_2 = 82^\circ\text{C}$ . Pour une température comprise entre ces deux valeurs, l'ébullition se poursuit, en produisant un mélange binaire diphasé.



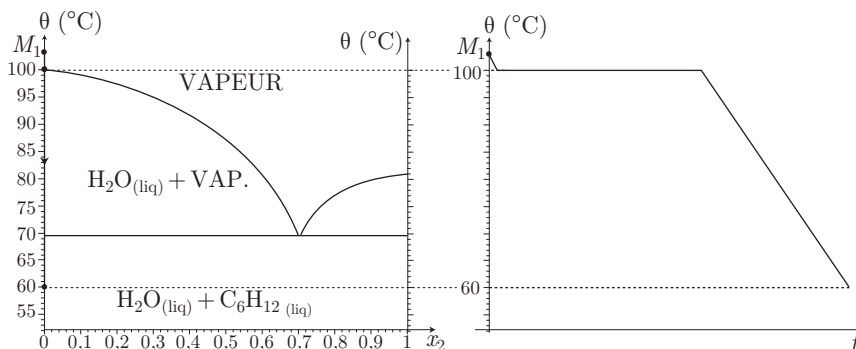
- (b) En revanche, pour  $x_{ol} = 0,895$ , l'équilibre entre les phases liquide et gazeuse ne peut se produire qu'à une température  $\theta_{\text{éb}}$ . Il existe donc une période pendant laquelle l'ébullition se poursuit à la température  $\theta_{\text{éb}}$  constante, jusqu'à disparition totale de la phase liquide ; le mélange binaire se comporte, au voisinage du point d'eutectique, comme un corps pur :

**CORRIGÉS**



● 216 ————— Concours de l'Agrégation interne

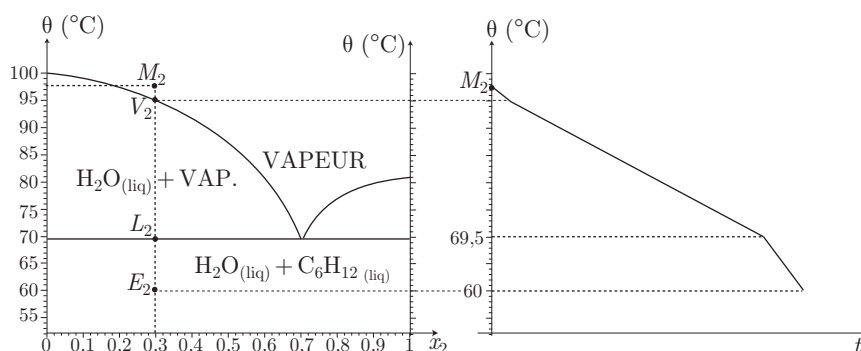
1. (a) La courbe constituée des branches  $AH$  et  $HB$  coïncide avec les équilibres eau liquide-vapeur d'une part et cyclohexane liquide-vapeur d'autre part ; elle s'appelle *courbe de rosée*.
- (b) Le point  $H$ , qui correspond au mélange de trois phases (eau liquide, cyclohexane liquide, vapeur) est le point *hétéroazéotropique*.
- (c) Lorsque l'eau est pure, son changement d'état s'effectue à la température  $\theta_1 = 100^\circ\text{C}$  constante (sous une pression  $P_0$  donnée) :



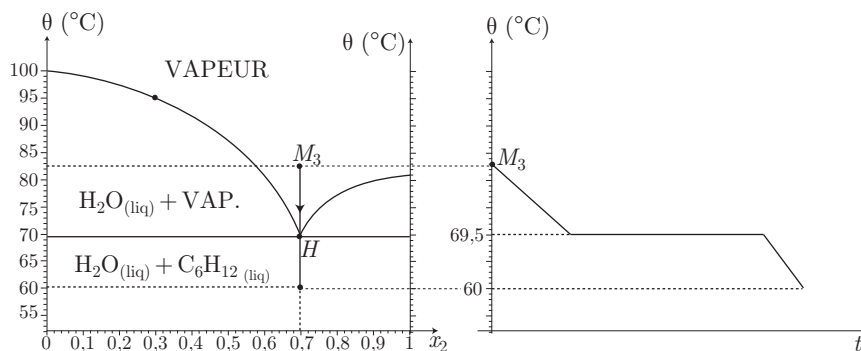
En revanche, le refroidissement du système, caractérisé par le point  $M_2$ , se traduit par :

- un refroidissement de la vapeur ( $M_2 \rightarrow V_2$ ) ;
- un refroidissement du mélange vapeur + eau liquide ( $V_2 \rightarrow L_2$ ), au cours duquel la quantité d'eau liquide augmente au détriment de la vapeur d'eau ;
- un refroidissement de l'eau liquide pure ( $L_2 \rightarrow E_2$ ) jusqu'à la température de  $60^\circ\text{C}$ .

**CORRIGÉS**

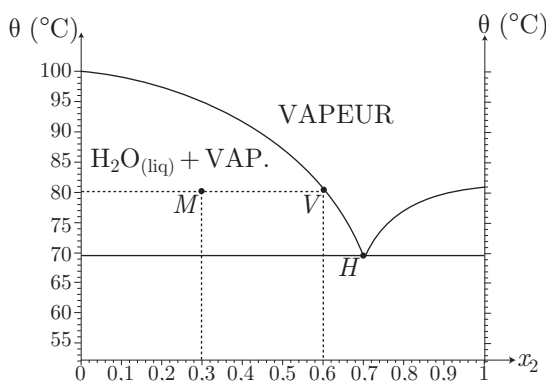


Enfin, le mélange hétéroazéotrope se comporte, à l'égard du changement d'état liquide-vapeur, comme un corps pur : le passage de la phase gazeuse ( $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})} + \text{C}_6\text{H}_{12(\text{gaz})}$ ) au mélange des phases liquides ( $\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$  et  $\text{C}_6\text{H}_{12(\text{liq})}$ ) s'observe à la température  $\theta_H = 69,5^\circ\text{C}$  constante :



- (d) Lorsque  $x_2 = 0,30$  à  $80^\circ\text{C}$ , l'état du système est figuré par un point  $M$  de la zone (II), auquel cas :

le système est composé d'eau liquide en équilibre avec de la vapeur constituée de  $\text{C}_6\text{H}_{12(\text{gaz})}$  et de  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$ .



De ce diagramme découle la composition du système :

- une phase liquide constituée d'eau pure ;
  - une phase gazeuse comprenant des vapeurs de cyclohexane, de fraction molaire  $x_{2v} = 0,6$  et de la vapeur d'eau, de fraction molaire  $x_{1v} = 1 - x_{2v} = 0,4$ .
2. (a) Par définition, le potentiel chimique  $\mu_i(T, P)$  d'une espèce ( $i$ ) désigne l'enthalpie libre molaire partielle de cette espèce :

$$\mu_i(T, P) = \left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P}$$

Ce potentiel chimique s'exprime en fonction de l'activité  $a_i$  de l'espèce ( $i$ ) :

$$\mu_i(T, P) = \mu_i^*(T, P) + RT \ln a_i$$

où  $\mu_i^*(T, P)$  désigne le potentiel chimique de l'espèce ( $i$ ) pure, sous la pression  $P$  et à la température  $T$ .

La définition de l'enthalpie libre :  $G = H - TS$  conduit, quant à elle à :

$$\left( \frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T, P} = \left( \frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{T, P} - T \times \left( \frac{\partial S}{\partial n_i} \right)_{T, P} \Rightarrow \mu_i = h_i - T \times s_i \quad (118)$$

- (b) Dans la phase gazeuse, supposée parfaite, l'activité  $a_{2v}$  du cyclohexane s'identifie au rapport de sa pression partielle  $P_{2v} = x_{2v} P$  par la pression standard  $P_0 = 1 \text{ bar}$  :

$$a_{2v} = \frac{P_{2v}}{P_0} = x_{2v} \times \frac{P}{P_0} \Rightarrow \mu_{2v}(T, P) = \mu_{2v}^*(T, P) + RT \ln \left( x_{2v} \times \frac{P}{P_0} \right)$$

- (c) Le potentiel chimique du cyclohexane liquide s'écrit, de même :

$$\mu_{2\ell}(T, P) = \mu_{2\ell}^*(T, P) + RT \ln(a_{2\ell})$$

où  $a_{2\ell} = 1$  dans la phase liquide du domaine (III), où le cyclohexane liquide est pur. C'est pourquoi :

$$\mu_{2\ell}(T, P) = \mu_{2\ell}^*(T, P)$$

Or, l'équilibre du cyclohexane dans les phases liquide et gazeuse implique l'égalité des potentiels chimiques :

$$\mu_{2v}(T, P) = \mu_{2\ell}(T, P) \Rightarrow RT \ln \left( x_{2v} \times \frac{P}{P_0} \right) = \mu_{2\ell}^*(T, P) - \mu_{2v}^*(T, P) \quad (119)$$

- (d) Or, la relation (118) fournit :

$$\begin{cases} \mu_{2\ell}^*(T, P) = h_{2\ell}^*(T, P) - T \times s_{2\ell}^*(T, P) \\ \mu_{2v}^*(T, P) = h_{2v}^*(T, P) - T \times s_{2v}^*(T, P) \end{cases} \\ \Rightarrow \mu_{2\ell}^*(T, P) - \mu_{2v}^*(T, P) = h_{2\ell}^*(T, P) - h_{2v}^*(T, P) - T \times [s_{2\ell}^*(T, P) - s_{2v}^*(T, P)]$$

Du reste, l'enthalpie molaire partielle  $h^*$  et l'entropie molaire partielle  $s^*$  peuvent être considérées comme indépendantes de la température ; il s'agit de l'approximation d'Ellingham, en vertu de laquelle on peut poser :

$$\mu_{2\ell}^*(T, P) - \mu_{2v}^*(T, P) = h_{2\ell}^*(P) - h_{2v}^*(P) - T \times [S_{2\ell}^*(P) - S_{2v}^*(P)]$$

Par suite, l'identité (119) conduit à :

$$\ln \left( x_{2v} \times \frac{P}{P_0} \right) = \frac{h_{2\ell}^*(P) - h_{2v}^*(P)}{RT} - \frac{1}{R} [s_{2\ell}^*(P) - s_{2v}^*(P)]$$

En outre, lorsque  $x_{2v} = 1$ , la température d'équilibre entre les phases liquide et gazeuse qui contiennent  $B_2$  pur vaut  $T_2^*$  :

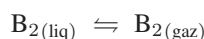
$$\ln \left( \frac{P}{P_0} \right) = \frac{h_{2\ell}^*(P) - h_{2v}^*(P)}{RT_2^*} - \frac{1}{R} [s_{2\ell}^*(P) - s_{2v}^*(P)]$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \ln(x_{2v}) &= \frac{h_{2\ell}^*(P) - h_{2v}^*(P)}{R} \times \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_2^*} \right) \\ &= \frac{h_{2\ell}^*(P_0) - h_{2v}^*(P_0)}{R} \times \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_2^*} \right) \end{aligned}$$

lorsque la pression  $P$  du changement d'état vaut  $P_0$ .

Enfin, l'équilibre du changement d'état (vaporisation de  $B_2$ ) :



a pour enthalpie *standard* :

$$\Delta_{\text{vap}} H_2^0 = h_{2v}^*(P_0) - h_{2\ell}^*(P_0)$$

ce qui conduit, finalement, à :

$$\ln(x_{2v}) = \frac{\Delta_{\text{vap}} H_2^0}{R} \times \left( \frac{1}{T_2^*} - \frac{1}{T} \right)$$

- (e) Le diagramme fourni par l'énoncé donne la courbe  $HB$  d'équilibre du cyclohexane dans les phases liquide et vapeur, qui passe par les points :

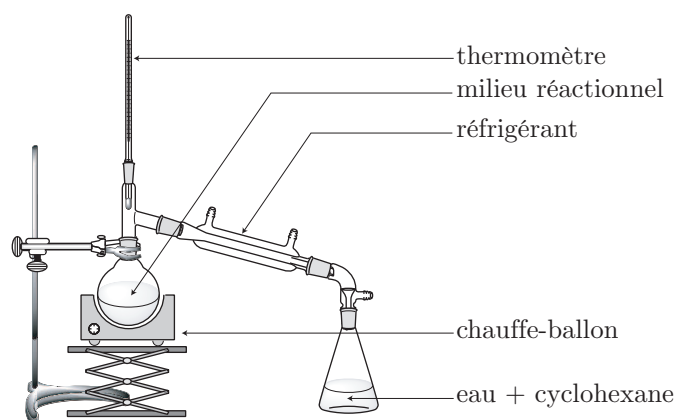
$$H \left( \begin{array}{l} x_{2v} = 0,7 \\ T = 342,5 \text{ K} \end{array} \right) \text{ et } B \left( \begin{array}{l} x_{2v} = 1 \\ T_2^* = 353,8 \text{ K} \end{array} \right)$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{vap}} H_2^0 &= \frac{RTT_2^*}{T - T_2^*} \times \ln(x_{2v}) = \frac{8,314 \times 342,5 \times 353,8}{342,5 - 353,8} \times \ln(0,7) \\ \Rightarrow \Delta_{\text{vap}} H_2^0 &= 31,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

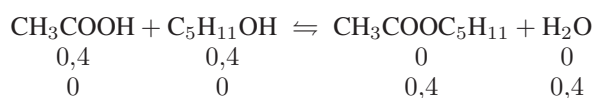
3. (a) L'entraînement à la vapeur consiste à extraire du milieu réactionnel la vapeur d'eau qui se forme avec le cyclohexane de l'hétéroazéotrope.





- (b) Lorsque le milieu réactionnel contient, à la température  $\theta > 69,5^\circ\text{C}$ , du cyclohexane de fraction molaire  $x_2 > 0,7$ , l'eau produite par la réaction d'estérification disparaît de la phase liquide (laquelle ne peut contenir  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$  dès que  $x_2 > 0,7$ ) sous forme d'un mélange  $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})} + \text{C}_6\text{H}_{12(\text{gaz})}$ .

Or, au cours de la réaction d'estérification :



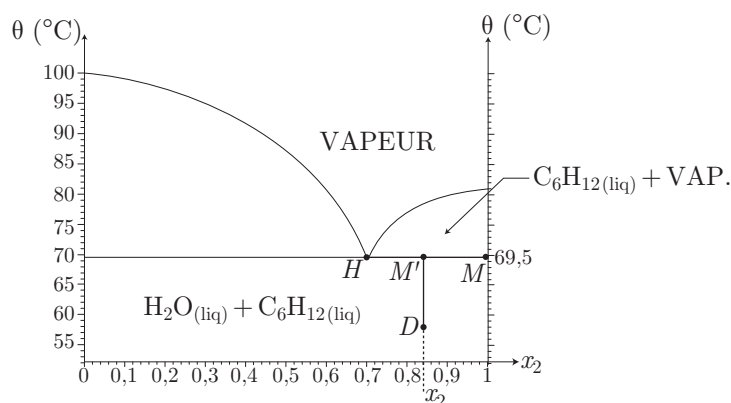
$n_1 = 0,4$  mole d'eau peut être produite dans le milieu réactionnel où ont été introduites  $n_2$  moles de  $\text{C}_6\text{H}_{12}$ , dont la fraction molaire est définie par :

$$\begin{aligned} x_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} > 0,7 &\Rightarrow n_2 > 0,7 n_1 + 0,7 n_2 \Rightarrow 0,3 n_2 > 0,7 n_1 \\ &\Rightarrow n_2 > \frac{7 n_1}{3} = \frac{7 \times 0,4}{3} \end{aligned}$$

Quant à la masse volumique du cyclohexane, définie à partir de celle de l'eau :  $\mu_2 = d \times \mu_{\text{H}_2\text{O}}$ , elle s'exprime en fonction de la masse  $m_2$  de  $\text{C}_6\text{H}_{12}$  introduite dans le milieu réactionnel :

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{m_2}{V} = \frac{n_2 M}{V} = d \times \mu_{\text{H}_2\text{O}} \Rightarrow n_2 = \frac{d \mu_{\text{H}_2\text{O}} V}{M} > \frac{2,8}{3} \\ &\Rightarrow V > \frac{2,8 M}{3 d \mu_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{2,8 \times 84}{3 \times 0,779} \Rightarrow V = 100,6 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

- (c) Le diagramme ci-dessous permet de décrire l'évolution de la composition du distillat et du milieu réactionnel :



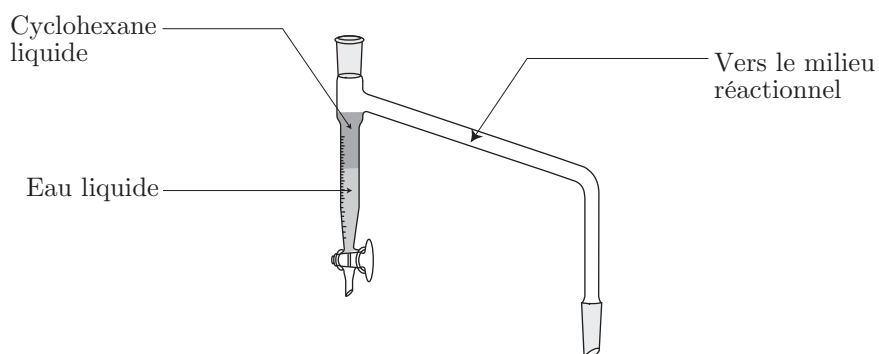
En début d'expérience, l'estérification produit de l'eau, qui abaisse la fraction molaire du cyclohexane à une valeur  $x_2$  (en l'absence d'eau, cette fraction molaire valait évidemment 1). Le chauffage du milieu réactionnel permet alors d'atteindre la température  $\theta = 69,5^\circ\text{C}$  pour laquelle l'eau ne peut plus exister dans le milieu réactionnel : elle disparaît sous forme de vapeur, mélangée à de la vapeur de cyclohexane, de fraction molaire  $x_{\text{C}_6\text{H}_{12} \text{ vap}} = 0,7$ . C'est pourquoi toute l'eau produite par estérification est extraite du milieu réactionnel. Par conséquent :

- le distillat contient de l'eau et du cyclohexane, dont la fraction molaire vaut au moins 0,7 (si  $\text{C}_6\text{H}_{12}$  a été introduit en excès) ;
- le milieu réactionnel est totalement débarrassé de son eau.

De cette manière, l'équilibre d'estérification est totalement déplacé vers la formation de  $\text{CH}_3\text{COOC}_5\text{H}_{10}$  ; l'estérification devient totale, et d'autant plus rapide que la température est élevée.

- (d) La vapeur, liquéfiée par le réfrigérant, est récupérée sous forme liquide dans le décanteur Dean Stark, qui contient donc deux phases non miscibles : l'eau liquide surmontée du cyclohexane (moins dense car  $d = 0,779 < 1$ ), dont une quantité peut être réintroduite, par écoulement, dans le milieu réactionnel. Ce faisant, le volume de cyclohexane nécessaire à l'extraction de toute l'eau peut être inférieur à  $100,6 \text{ cm}^3$ .

**CORRIGÉS**



● 217 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

1. La température d'ébullition de  $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$  pur est celle qui assure la transition liquide  $\rightarrow$  vapeur lorsque  $x_2 = 0$ , c'est-à-dire :  $T_1^* = 110^\circ\text{C}$ . De même, la température d'ébullition de  $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$  s'obtient pour  $x_2 = 1$  :  $T_2^* = 83^\circ\text{C}$ .

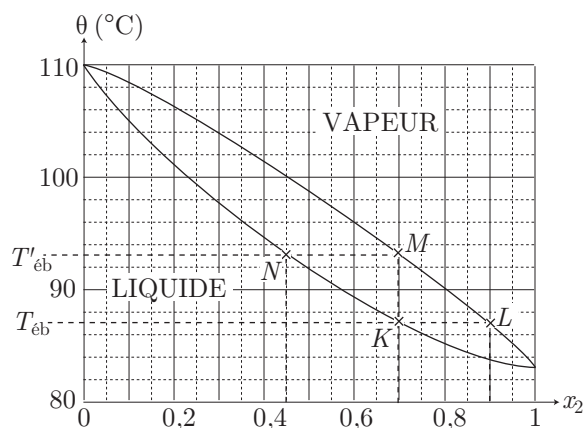
La courbe d'ébullition est la courbe la plus basse de celles proposées ; elle correspond à la formation des premières bulles de gaz (sous cette courbe, la température est telle que le milieu est exclusivement liquide).

2. Soient  $n_1 = 1,5$  mole et  $n_2 = 3,5$  moles les quantités respectives en propan-2-ol et en 2-méthylpropan-1-ol du mélange (A). La fraction molaire de  $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$  vaut, dans ces conditions :

$$x_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} = \frac{3,5}{5} = 0,7$$

- (a) L'ébullition commence à la température  $T_{\text{éb}}$  du point K de la courbe d'ébullition, d'abscisse  $x_2 = 0,7$ , c'est-à-dire :

$$T_{\text{éb}} = 87^\circ\text{C}$$



À cette température, l'état de la première bulle de vapeur est représenté par le point L, d'abscisse :

$$x_{2v} = 0,9$$

- (b) L'ébullition se termine à la température  $T'_{\text{éb}}$  du point M, d'abscisse  $x_{2v} = 0,7$  et d'ordonnée :

$$T'_{\text{éb}} = 93^\circ\text{C}$$

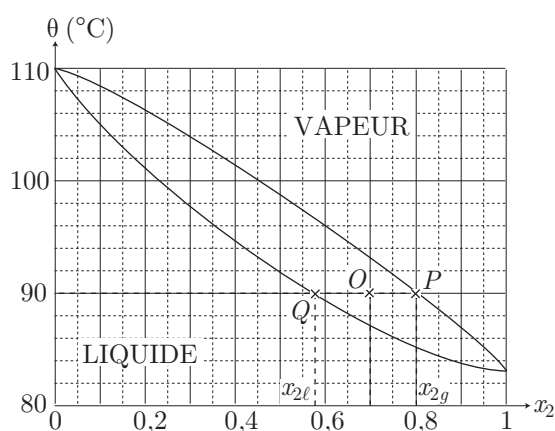
L'état de la dernière goutte de liquide est représenté par le point N, dont l'abscisse donne la fraction molaire en 2-méthylpropan-1-ol :

$$x_{2\ell} = 0,45$$

- (c) Au delà de la température  $T'_{\text{éb}}$ , le mélange est complètement gazeux. C'est ce qui se produit à  $100^\circ\text{C}$ , température pour laquelle le milieu est composé exclusivement de  $n_1 = 1,5$  mole de  $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$  et de  $n_2 = 3,5$  moles de  $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$ , à l'état de vapeur.

(d) À la température de  $90^\circ\text{C}$ , le milieu contient  $n_2 = 3,5$  moles de  $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$  et  $n_1 = 1,5$  mole de  $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$ , c'est-à-dire une fraction molaire  $x_2 = \frac{3,5}{5} = 0,7$  de 2-méthylpropan-1-ol. Ces alcools sont alors répartis en :

- $n_{2g}$  moles de vapeur de  $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$  ;
- $n_{2\ell}$  moles de  $\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}$  liquide ;
- $n_{1g}$  moles de vapeur de  $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$  ;
- $n_{1\ell}$  moles de  $\text{C}_3\text{H}_8\text{O}$  liquide ;
- $n_g = n_{1g} + n_{2g}$  moles de vapeur ;
- $n_\ell = n_{1\ell} + n_{2\ell}$  moles de liquide.



La fraction molaire du 2-méthylpropan-1-ol gazeux est alors donnée par l'abscisse  $x_{2g} = 0,8$  du point  $P$ , tandis que l'abscisse  $x_{2\ell} \simeq 0,57$  du point  $Q$  donne la fraction molaire du 2-méthylpropan-1-ol liquide. Le théorème des moments permet, par suite, de connaître la quantité totale de matière à l'état liquide et à l'état gazeux :

$$n_g = (n_1 + n_2) \times \frac{OQ}{PQ} = (n_1 + n_2) \times \frac{x_2 - x_{2\ell}}{x_{2g} - x_{2\ell}} = 5 \times \frac{0,7 - 0,57}{0,8 - 0,57}$$

$$\Rightarrow n_g = 2,826 \text{ moles de gaz}$$

$$\Rightarrow n_\ell = n_1 + n_2 - n_g = 2,174 \text{ moles de liquide}$$

Quant aux définitions des fractions molaires :

$$x_{2g} = \frac{n_{2g}}{n_g} \text{ et } x_{2\ell} = \frac{n_{2\ell}}{n_\ell}$$

elles conduisent à :

$$n_{2g} = x_{2g} \times n_g = 0,8 \times 2,826 \Rightarrow n_{2g} = 2,261 \text{ moles}$$

et :

$$n_{2\ell} = x_{2\ell} \times n_\ell = 0,57 \times 2,174 \Rightarrow n_{2\ell} = 1,239 \text{ moles}$$

Il s'ensuit que :

$$n_{1g} = n_g - n_{2g} = 2,826 - 2,261 \Rightarrow n_{1g} = 0,565 \text{ moles}$$

et :

$$n_{1\ell} = n_\ell - n_{2\ell} = 2,174 - 1,239 \Rightarrow n_{1\ell} = 0,935 \text{ moles}$$

3. Les masses molaires de  $C_3H_8O$  et  $C_4H_{10}O$  valent respectivement :

$$M_1 = 3 \times 12 + 8 + 16 = 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ et } M_2 = 4 \times 12 + 10 + 16 = 74 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

C'est pourquoi, un mélange qui contient  $n_1$  moles de  $C_3H_8O$  et  $n_2$  moles de  $C_4H_{10}O$  contient en fait :

$$m_1 = n_1 M_1 \text{ grammes de } C_3H_8O \text{ et } m_2 = n_2 M_2 \text{ grammes de } C_4H_{10}O$$

Aussi, la fraction massique  $w_2$  est-elle définie par :

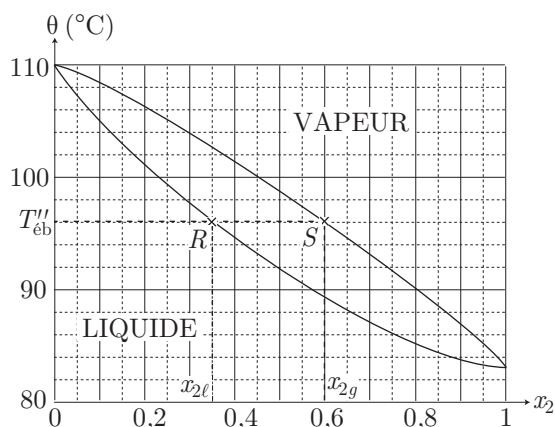
$$w_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{n_2 M_2}{n_1 M_1 + n_2 M_2} = \frac{\frac{n_2}{n_1 + n_2} M_2}{\frac{n_1}{n_1 + n_2} M_1 + \frac{n_2}{n_1 + n_2} M_2}$$

où l'on reconnaît la définition de la fraction molaire :

$$x_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \Rightarrow \frac{n_1}{n_1 + n_2} = 1 - x_2$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} w_2 &= \frac{x_2 M_2}{(1 - x_2) M_1 + x_2 M_2} = \frac{x_2 M_2}{M_1 + x_2 (M_2 - M_1)} \\ \Rightarrow w_2 M_1 + x_2 \times w_2 (M_2 - M_1) &= x_2 M_2 \\ \Rightarrow x_2 &= \frac{w_2 M_1}{M_2 + w_2 (M_1 - M_2)} = \frac{0,4 \times 60}{74 + 0,4 \times (60 - 74)} \\ \Rightarrow x_2 &= 0,35 \end{aligned}$$



**CORRIGÉS**

Pour une telle valeur de  $x_2$ , le diagramme binaire montre que la première bulle de gaz se forme à la température  $T''_{\text{éb}} = 96^\circ\text{C}$  du point représentatif  $R$ . En outre, l'état de la phase gazeuse est décrit par le point  $S$ , d'abscisse :

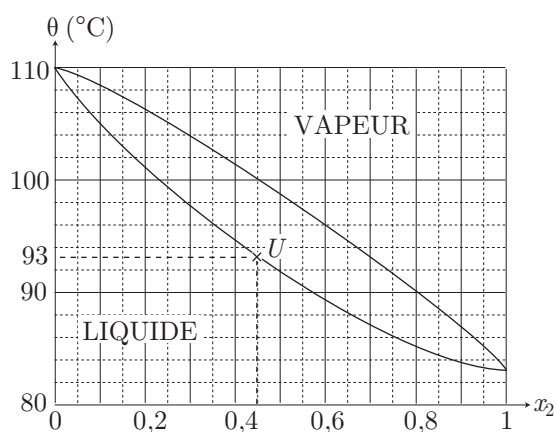
$$x_{2g} = 0,6$$

4. (a) Soit  $m = n_1 M_1 = n_2 M_2$  la masse commune en propan-2-ol et en 2-méthylpropan-1-ol composant le milieu. La fraction molaire du 2-méthylpropan-1-ol est défini par :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{n_2}{n_1 + n_2} \text{ où } n_1 = n_2 \frac{M_2}{M_1} \\ &= \frac{n_2}{n_2 \frac{M_2}{M_1} + n_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{60}{60 + 74} \\ &\Rightarrow x_2 = 0,448 \end{aligned}$$

d'où découle la fraction molaire du propan-2-ol :

$$x_1 = 1 - x_2 = 0,552$$



Le diagramme ci-dessus montre que l'ébullition de ce mélange commence à la température  $\theta \simeq 93^\circ\text{C}$ , ordonnée du point  $U$ .

## Chapitre 8

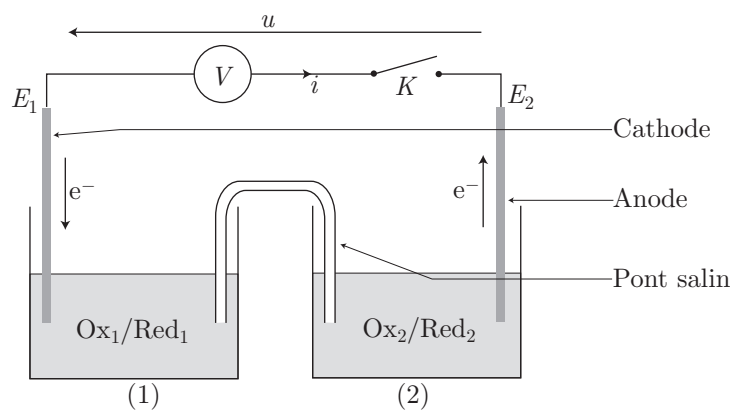
# Oxydo-réduction

### 8.1 Thermodynamique de l'oxydo-réduction

#### 8.1.1 Cellules galvaniques

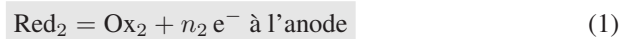
##### 8.1.1.1 Pile électrochimique

Une pile électrochimique est un dispositif qui transforme l'énergie chimique en énergie électrique.



Une pile comporte :

- une **anode**, qui est l'électrode d'arrivée du courant électrique, c'est-à-dire du départ des électrons vers le circuit électrique ; il s'y produit une oxydation :



- une **cathode**, d'où part le courant qui alimente le circuit électrique. L'arrivée concomitante des électrons y produit une réduction :



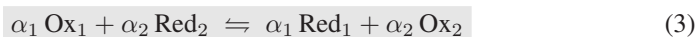
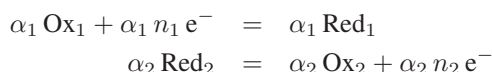
**Définition 1** La force électromotrice d'une pile désigne la différence des potentiels :

$$u = E_1 - E_2 > 0$$

entre les électrodes, lorsque  $i = 0$ .

Remarque – Sauf indication contraire, les électrodes sont supposées constituées d'un métal parfaitement conducteur qui mesure également le potentiel du milieu qui contient le couple  $Ox_i/Red_i$ .

Le fonctionnement global de la pile est décrit par une combinaison linéaire des demi-équations (1) et (2) :



où  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des entiers choisis de manière à assurer le transfert des électrons : la charge libérée par  $Red_2$  s'identifie à celle reçue par  $Ox_1$  ce qui impose :  $\alpha_1 n_1 = \alpha_2 n_2$  ; on notera désormais  $\nu$  cette valeur commune :

$$\nu = \alpha_1 n_1 = \alpha_2 n_2 = \text{PPCM} \{n_1, n_2\}$$

Si  $\xi$  désigne l'avancement de la réaction globale, la quantité d'électrons transférée entre  $Ox_1$  et  $Red_2$  vaut  $\delta n_e = \nu d\xi$ , lorsque l'avancement varie de  $d\xi$  pendant  $dt$ . Ce faisant, la charge transférée dans le circuit électrique vaut :

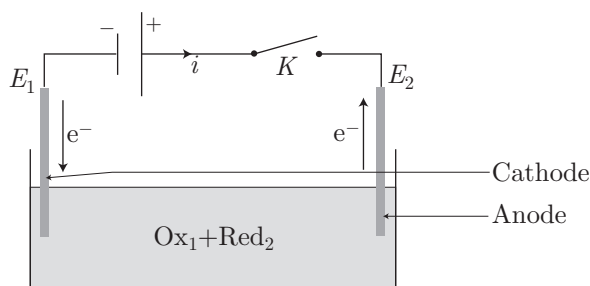
$$\delta q = \nu \mathcal{F} d\xi = \alpha_1 n_1 \mathcal{F} d\xi = \alpha_2 n_2 \mathcal{F} d\xi \quad (4)$$

où  $\mathcal{F} \simeq 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$  est le Faraday (quantité de charge portée, en valeur absolue, par une mole d'électrons).

Lorsque la pile est usagée, l'équilibre (3) est atteint, ce qui signifie que  $d\xi = 0$  ; la pile ne débite plus de courant électrique. Dans ce cas, sa force électromotrice devient nulle.

### 8.1.1.2 Cellule d'électrolyse

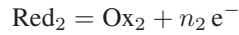
Dans une cellule d'électrolyse, les entités  $Ox_1$  et  $Red_2$  sont réunies dans le même électrolyte.



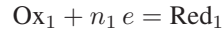
Lorsque la tension  $u$  entre les électrodes atteint un seuil, un courant électrique circule dans le circuit :



- à l'anode (électrode où arrive le courant électrique) est observée une oxydation :



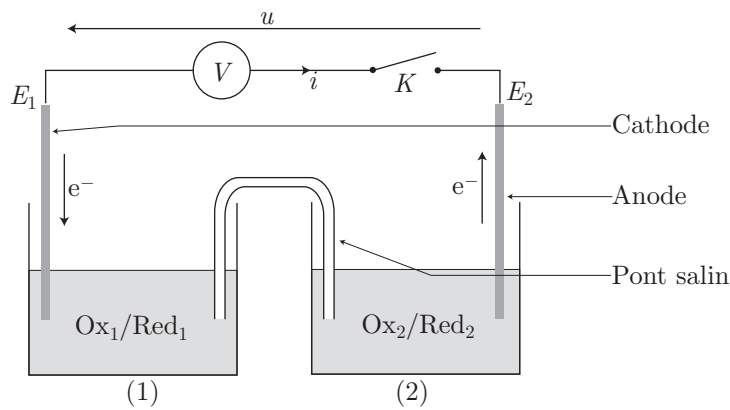
- à la cathode (électrode d'où part le courant électrique) se produit une réduction :



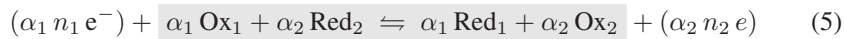
## 8.1.2 Potentiel *standard* d'un couple redox

### 8.1.2.1 Force électromotrice et affinité chimique

Considérons la pile, notée conventionnellement :



dont le fonctionnement est décrit par l'équation-bilan :



L'affinité chimique de cette réaction est définie à partir des potentiels chimiques  $\mu_{X_i}$  de chacune des espèces qui interviennent dans l'équation-bilan :

$$\mathcal{A} = -\Delta_r G = -\sum_i \nu_i \mu_{X_i} = \alpha_1 \mu_{\text{Ox}_1} + \alpha_2 \mu_{\text{Red}_2} - \alpha_1 \mu_{\text{Red}_1} - \alpha_2 \mu_{\text{Ox}_2} \quad (6)$$

Ce faisant, à température constante, une variation  $d\xi$  de l'avancement de la réaction s'accompagne d'une variation d'enthalpie libre du milieu :

$$dG = d\xi \times \Delta_r G = -d\xi \times \mathcal{A} \quad (7)$$

Or, lors d'une transformation réversible, l'énergie interne du milieu varie de :

$$dU = \delta Q_{\text{rév}} - P dV + \delta \mathcal{T}_r = T dS - P dV + \delta \mathcal{T}_r$$

où  $T$  et  $P$  désignent la température et la pression du milieu, d'entropie  $S$  et de volume  $V$ , tandis que  $\delta \mathcal{T}_r$  représente le travail reçu par le système (la pile) autre que celui des forces de pression – notamment, il peut s'agir d'un travail électrique. Ainsi, l'enthalpie  $H = U + PV$  de la pile varie :

$$dH = dU + d(PV) = T dS + V dP + \delta \mathcal{T}_r$$

ce qui entraîne une variation de son enthalpie libre  $G = H - TS$  :

$$dG = dH - d(TS) = V dP - S dT + \delta\mathcal{T}_r = \delta\mathcal{T}_r \text{ à } T \text{ et } P \text{ constants.}$$

De fait, la relation (7) devient :  $-A d\xi = \delta\mathcal{T}_r$ . De plus, la puissance électrique que la pile fournit au circuit vaut :

$$\mathcal{P}_f = u \times i = e \times \frac{\delta q}{dt}$$

lorsque  $u$  représente la force électromotrice et  $\delta q$  la charge transférée au circuit pendant  $dt$ . Par conséquent, la pile fournit au circuit un travail électrique  $\delta\mathcal{T}_f$  tel que :

$$\mathcal{P}_f = \frac{\delta\mathcal{T}_f}{dt} = u \times \frac{\delta q}{dt} \Rightarrow \delta\mathcal{T}_f = u \times \delta q$$

Enfin, la charge  $\delta q$  est donnée par la relation (4) :

$$\delta q = \nu \mathcal{F} d\xi \Rightarrow \delta\mathcal{T}_f = \nu \mathcal{F} u d\xi$$

En remarquant alors que  $\delta\mathcal{T}_f = -\delta\mathcal{T}_r$ , on obtient :

$$-A d\xi = \delta\mathcal{T}_r = -\delta\mathcal{T}_f = -\nu \mathcal{F} u d\xi$$

d'où découle l'expression de l'affinité chimique de la réaction (5) :

$$\mathcal{A} = \nu \mathcal{F} u \text{ où } \nu = \alpha_1 n_1 = \alpha_2 n_2 \quad (8)$$

Remarque – Les calculs précédents confirment que, lorsque l'équilibre chimique est atteint :

$$\mathcal{A} = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ V}$$

et d'autre part :

$$d\xi = 0 \Rightarrow i = \frac{\delta q}{dt} = \frac{\nu \mathcal{F} d\xi}{dt} = 0 \text{ A}$$

### 8.1.2.2 Loi de Nernst

La démonstration de la loi de Nernst n'est pas au programme des étudiants des filières MP et PT. En revanche, ceux de la filière PSI peuvent la connaître, bien qu'elle ne soit pas exigible.

La force électromotrice  $u$  de la pile s'identifie à la différence des potentiels  $E_1$  et  $E_2$  des électrodes :  $u = E_1 - E_2$ , de sorte que la loi (8) devient :

$$\mathcal{A} = \nu \mathcal{F} u = \nu \mathcal{F} (E_1 - E_2) = \alpha_1 n_1 \mathcal{F} E_1 - \alpha_2 n_2 \mathcal{F} E_2 \quad (9)$$

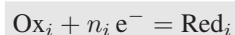
car  $\nu = \alpha_1 n_1 = \alpha_2 n_2$ . D'autre part, la relation (6) fournit :

$$\mathcal{A} = \alpha_1 (\mu_{\text{Ox}_1} - \mu_{\text{Red}_1}) - \alpha_2 (\mu_{\text{Ox}_2} - \mu_{\text{Red}_2})$$

Par identification avec l'expression de  $\mathcal{A}$ , on déduit que :

$$\begin{aligned} n_i \mathcal{F} E_i &= \mu_{\text{Ox}_i} - \mu_{\text{Red}_i} \text{ où } i = 1 \text{ ou } 2 \\ &= \mu_{\text{Ox}_i}^0 - \mu_{\text{Red}_i}^0 + RT \ln \left( \frac{a_{\text{Ox}_i}}{a_{\text{Red}_i}} \right) = -\Delta_r G_i^0 + RT \ln \left( \frac{a_{\text{Ox}_i}}{a_{\text{Red}_i}} \right) \end{aligned}$$

où  $\Delta_r G_i^0$  désigne l'enthalpie *standard* associée à la demi-équation :



dans laquelle le potentiel chimique des électrons est choisi nul. De fait :

$$E_i = -\frac{\Delta_r G_i^0}{n_i \mathcal{F}} + \frac{RT}{n_i \mathcal{F}} \ln \left( \frac{a_{\text{Ox}_i}}{a_{\text{Red}_i}} \right)$$

**Définition 2** On appelle *potentiel standard* du couple  $\text{Ox}_i/\text{Red}_i$  le potentiel  $E_i^0$  d'une électrode immergée dans un milieu où  $\text{Ox}_i$  et  $\text{Red}_i$  sont dans leur état standard.

Selon cette définition,  $E_i = E_i^0$  lorsque  $a_{\text{Ox}_i} = 1$  et  $a_{\text{Red}_i} = 1$  (dans son état *standard*, une espèce est pure), c'est-à-dire :

$$E_i^0 = -\frac{\Delta_r G_i^0}{n_i \mathcal{F}} \Rightarrow \Delta_r G_i^0 = -n_i \mathcal{F} E_i^0 \quad (10)$$

et :

$$\begin{aligned} E_i &= E_i^0 + \frac{RT}{n_i \mathcal{F}} \ln \left( \frac{a_{\text{Ox}_i}}{a_{\text{Red}_i}} \right) \text{ où } \ln x = \ln 10 \times \log x \\ \Rightarrow E_i &= E_i^0 + \frac{RT \ln 10}{n_i \mathcal{F}} \log \left( \frac{a_{\text{Ox}_i}}{a_{\text{Red}_i}} \right) \end{aligned}$$

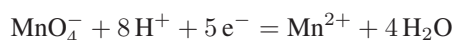
Cette loi constitue la **loi de Nernst** ; dans des conditions ordinaires de température ( $T = 298 \text{ K} = 25^\circ\text{C}$ ) :

$$\frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \simeq \frac{8,314 \times 298 \times \ln 10}{96\,500} \simeq 0,059 \simeq 0,06 \text{ V}$$

de sorte que la loi de Nernst est souvent utilisée sous la forme :

$$E_i = E_i^0 + \frac{0,06}{n_i} \log \left( \frac{a_{\text{Ox}_i}}{a_{\text{Red}_i}} \right)$$

Par exemple, pour la demi-équation :



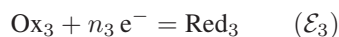
associée au couple redox  $\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$ , de potentiel *standard*  $E^0 = 1,51 \text{ V}$  à  $25^\circ\text{C}$ , la loi de Nernst s'écrit :

$$E = 1,51 + \frac{0,06}{5} \log \left( \frac{[\text{MnO}_4^-] [\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}] C_0^8} \right) \text{ où } C_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

**Remarque** – On omettra désormais, sauf indication contraire, de noter  $C_0$  dans les équations, à condition de garder à l'esprit que les concentrations en  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$  se comportent alors comme des grandeurs sans dimension.

### 8.1.2.3 Calcul d'un potentiel *standard*

Il arrive fréquemment que l'on cherche le potentiel *standard*  $E_3^0$  d'un couple redox dont la demi-équation :



est la combinaison linéaire de deux autres équations :

$$\begin{cases} \text{Ox}_1 + n_1 e^- = \text{Red}_1 & (\mathcal{E}_1) \\ \text{Ox}_2 + n_2 e^- = \text{Red}_2 & (\mathcal{E}_2) \end{cases}$$

Cette combinaison linéaire sera alors écrite à l'aide de deux nombres réels  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  :

$$(\mathcal{E}_3) = \alpha_1 (\mathcal{E}_1) + \alpha_2 (\mathcal{E}_2)$$

Si  $\Delta_r G_i^0$  désigne l'enthalpie libre *standard* de la réaction d'équation  $(\mathcal{E}_i)$ , la loi (28), établie à la page 1070 :

$$\Delta_r Y_{(\mathcal{R})}^0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Delta_r Y_{(\mathcal{R}_i)}^0 \text{ pour } (\mathcal{R}) = \sum_{i=1}^N \alpha_i (\mathcal{R}_i)$$

devient :

$$\Delta_r G_3^0 = \alpha_1 \Delta_r G_1^0 + \alpha_2 \Delta_r G_2^0$$

Ainsi, de l'identité (10), il découle que :

$$-n_3 \mathcal{F} E_3^0 = -\alpha_1 n_1 \mathcal{F} E_1^0 - \alpha_2 n_2 \mathcal{F} E_2^0 \Rightarrow n_3 E_3^0 = \alpha_1 n_1 E_1^0 + \alpha_2 n_2 E_2^0$$

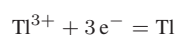


On donne les potentiels *standard* des couples suivants :

$$E^0 (\text{Tl}^+ / \text{Tl}) = E_1^0 = -0,33 \text{ V} \text{ et } E^0 (\text{Tl}^{3+} / \text{Tl}) = E_2^0 = 1,25 \text{ V}$$

En déduire celui du couple  $\text{Tl}^{3+} / \text{Tl}$ .

**RÉPONSE** Le couple  $\text{Tl}^{3+} / \text{Tl}$ , de potentiel *standard*  $E_3^0$ , est associé à la demi-équation :



tandis que les couples  $\text{Tl}^+ / \text{Tl}$  et  $\text{Tl}^{3+} / \text{Tl}^+$  sont associés aux demi-équations :

$$\begin{cases} \text{Tl}^+ + e^- = \text{Tl} & (\mathcal{E}_1) \\ \text{Tl}^{3+} + 2 e^- = \text{Tl}^+ & (\mathcal{E}_2) \end{cases}$$

La demi-équation  $(\mathcal{E}_3)$  apparaît immédiatement comme la combinaison linéaire de  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$  :

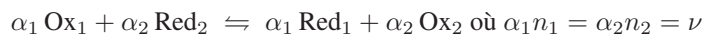
$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_3) = (\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_2) &\Rightarrow 3 E_3^0 = E_1^0 + 2 E_2^0 \Rightarrow E_3^0 = \frac{E_1^0 + 2 E_2^0}{3} \\ &\Rightarrow E_3^0 = \frac{-0,33 + 2 \times 1,25}{3} = 0,72 \text{ V} \end{aligned}$$

### 8.1.2.4 Calcul d'une constante d'équilibre

Soient  $E_1^0$  et  $E_2^0$  les potentiels *standard* des couples redox  $\text{Ox}_1/\text{Red}_1$  et  $\text{Ox}_2/\text{Red}_2$ , de demi-équations :

$$\begin{cases} \text{Ox}_1 + n_1 e^- = \text{Red}_1 & (\mathcal{E}_1) \\ \text{Ox}_2 + n_2 e^- = \text{Red}_2 & (\mathcal{E}_2) \end{cases}$$

L'équation-bilan ( $\mathcal{E}$ ) de l'équilibre d'oxydo-réduction :



est une combinaison linéaire des deux premières équations :

$$(\mathcal{E}) = \alpha_1 (\mathcal{E}_1) - \alpha_2 (\mathcal{E}_2)$$

À ce titre, son enthalpie libre *standard* vérifie :

$$\Delta_r G^0 = \alpha_1 \Delta_r G_1^0 - \alpha_2 \Delta_r G_2^0 = -\alpha_1 n_1 \mathcal{F} E_1^0 + \alpha_2 n_2 \mathcal{F} E_2^0$$

tandis que sa constante d'équilibre  $K^0$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta_r G^0 &= -RT \ln K^0 = -\alpha_1 n_1 \mathcal{F} E_1^0 + \alpha_2 n_2 \mathcal{F} E_2^0 \\ \Rightarrow \ln K^0 &= \frac{\nu \mathcal{F}}{RT} (E_1^0 - E_2^0) \\ \Rightarrow \log K^0 &= \frac{\ln K^0}{\ln 10} = \frac{\nu \mathcal{F}}{RT \ln 10} (E_1^0 - E_2^0) \simeq \frac{\nu}{0,06} (E_1^0 - E_2^0) \\ \Rightarrow K^0 &= 10^{\frac{\nu}{0,06} (E_1^0 - E_2^0)} \end{aligned}$$

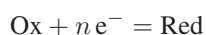
## 8.1.3 Diagrammes potentiel-pH

### 8.1.3.1 Principe de construction

Il s'agit de représenter les formes prédominantes d'un élément, en fonction du pH et du potentiel d'un milieu réactionnel. Pour y parvenir, il suffit :

- de savoir représenter graphiquement la frontière entre deux domaines de prédominance de cet élément ;
- de repérer, de part et d'autre d'une frontière, la forme prédominante de l'élément.

Pour des raisons de simplicité, commençons par ce dernier point, en considérant un élément intervenant dans un couple redox  $\text{Ox}/\text{Red}$ , de potentiel *standard*  $E^0$  :



La loi de Nernst prévoit que le milieu réactionnel adopte le potentiel :

$$E = E^0 + \frac{0,06}{n} \log \left( \frac{a_{\text{Ox}}}{a_{\text{Red}}} \right)$$

ce qui signifie que plus le potentiel  $E$  est élevé, plus l'espèce oxydante est prédominante. On retiendra ainsi que :

les espèces contenant un élément sont placées d'autant plus haut dans le diagramme potentiel-pH que le degré d'oxydation de cet élément est élevé.

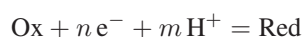
Cette remarque permet déjà un classement grossier des espèces intervenant dans un diagramme potentiel-pH, dont on obtient alors la structure.

Par exemple, un diagramme potentiel-pH concernant l'élément azote et impliquant les espèces  $N_2$ ,  $NH_3$ ,  $NO_2$ ,  $N_2O$ ,  $N_2O_5$ ,  $NH_4^+$  et  $NO_3^-$  ferait, au préalable, l'objet d'un classement par degrés d'oxydations ( $d_{ox}$ ) de l'élément azote :

$d_{ox}$		
+V	$N_2O_5$	$NO_3^-$
+IV	$NO_2$	
+I	$N_2O$	
0	$N_2$	
-III	$NH_4^+$	$NH_3$

En outre, plus une espèce est basique (éventuellement sous forme d'hydroxyde insoluble ou de complexe *hydroxo-*), plus elle est située vers la droite du diagramme potentiel-pH.

À l'issue de ce premier classement, apparaissent des frontières qui séparent l'élément à des degrés d'oxydation différents, liés par une équation :



dont la loi de Nernst prévoit que :

$$E = E^0 + \frac{0,06}{n} \log \left( \frac{a_{Ox}}{a_{Red}} \right) - 0,06 \times \frac{m}{n} \times pH$$

La détermination de la frontière séparant Ox de Red repose sur des conventions de calcul du rapport  $\frac{a_{Ox}}{a_{Red}}$ .

#### CONVENTION 1

Lorsque Ox et Red sont en solution aqueuse, la frontière peut être définie comme l'ensemble des points d'égale concentration *moléculaire* en Ox et Red.

Par exemple, pour le couple  $I_2/I^-$  :  $I_2 + 2 e^- = 2 I^-$ , l'identité de la concentration moléculaire  $C_m$  en  $I_2$  et en  $I^-$  se traduit par :

$$[I_2] = [I^-] = C_m$$

auquel cas la loi de Nernst fournit l'expression de la frontière entre  $I_2$  et  $I^-$  :

$$E = E^0 (I_2/I^-) + 0,03 \log \left( \frac{[I_2]}{[I^-]^2} \right) = E^0 (I_2/I^-) - 0,03 \log C_m \quad (11)$$

#### CONVENTION 2

Lorsque Ox et Red sont en solution aqueuse, la frontière peut également figurer l'ensemble des points d'égale concentrations *atomiques*. Dans ce cas, la convention doit préciser la valeur de la concentration atomique  $C_a$  totale en élément X étudié, que contient la solution.

⚠ L'usage de cette convention est réservé aux cas où la conservation de la matière est assurée en milieu aqueux ; elle proscrit ainsi les cas où apparaît un précipité.

Rappelons que la concentration atomique d'une espèce qui contient  $n$  fois l'élément X dans sa formule (par exemple  $X_n$ ) vaut  $n \times [X_n]$ . En effet, à chaque  $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de  $X_n$  correspondent  $n \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'atomes X.

Par exemple, pour le couple  $\text{I}_2/\text{I}^-$ , la concentration atomique totale de l'élément iode en solution s'écrit :

$$2 [\text{I}_2] + [\text{I}^-] = C_a$$

#### CONVENTION 3

Lorsqu'une espèce forme un précipité, la frontière (verticale) entre sa forme dissoute et le précipité est la valeur du pH à laquelle apparaît ce précipité ; l'espèce dissoute conserve sa concentration définie par l'une des deux conventions précédentes.

Par exemple, le produit de solubilité de AgOH vaut  $K_s = 10^{-7,7}$ . Aussi, dans un milieu qui contient initialement  $\text{Ag}^+$  à la concentration  $C = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , le précipité de AgOH apparaît lorsque :

$$\begin{aligned} K_s = [\text{Ag}^+] [\text{HO}^-] = C \times [\text{HO}^-] &\Rightarrow \frac{K_e}{[\text{H}^+]} = \frac{K_s}{C} \text{ où } K_e = [\text{H}^+] [\text{HO}^-] = 10^{-14} \\ &\Rightarrow -14 + \text{pH} = \log K_s - \log C \\ &\Rightarrow \text{pH} = 14 - 7,7 + 2 = 8,3 \end{aligned}$$

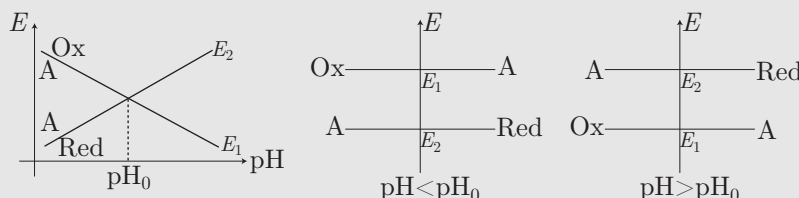
Aussi, le diagramme potentiel-pH de l'argent présente-t-il trois domaines de prédominance ou d'existence :

	$d_{\text{ox}}$		pH=8,3
+I		$\text{Ag}^+$	AgOH
0		Ag	

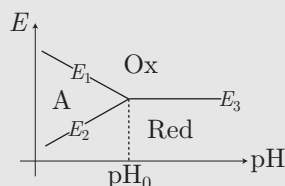
#### CONVENTION 4

Lorsqu'une espèce (Ox ou Red) est un gaz, on admet que sur la frontière, la pression partielle du gaz vaut  $P_0 = 1 \text{ bar}$ .

△ Soient deux courbes redox Ox/A et A/Red dont les frontières, notées  $E_1$  et  $E_2$ , se croisent pour  $\text{pH} = \text{pH}_0$ .



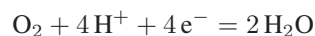
La « règle du gamma » montre que, dans une gamme de pH, l'espèce A n'est pas stable. La dismutation de A met alors en contact direct les domaines de stabilité de Ox et Red, dont il faudra alors chercher la frontière (notée  $E_3$  sur la figure ci-dessous) :



### 8.1.3.2 Diagramme de l'eau

L'eau se comporte comme un réducteur dans le couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  et comme un oxydant dans le couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$ .

- Au couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  est associée l'équation :



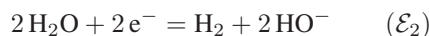
avec un potentiel *standard*  $E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$ . Aussi, la loi de Nernst prévoit que le potentiel de ce couple vaut :

$$E_1 = E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) + \frac{0,06}{4} \log(P_{\text{O}_2} [\text{H}^+]^4)$$

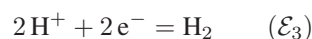
où  $P_{\text{O}_2}$  désigne la pression partielle de  $\text{O}_2$  (grandeur sans unité tant qu'elle est comparée à la pression *standard*), qui vaut 1 sur la frontière séparant les espèces  $\text{O}_2$  et  $\text{H}_2\text{O}$ . C'est pourquoi :

$$E_1 = 1,23 + 0,06 \log [\text{H}^+] \Rightarrow E_1 = 1,23 - 0,06 \times \text{pH} \text{ pour } \text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$$

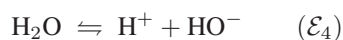
- Le couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  a pour équation :



Or, le potentiel *standard* du couple  $\text{H}^+/\text{H}_2$  :

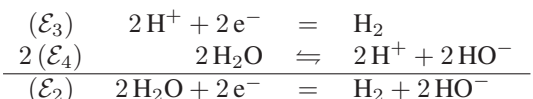


vaut, par convention :  $E_3^0 = 0,00 \text{ V}$ . Enfin, l'équilibre d'autoprotolyse de l'eau :





a pour constante :  $K_e = 10^{-14}$ . L'équation ( $\mathcal{E}_2$ ) se présente alors comme une combinaison linéaire des équations ( $\mathcal{E}_3$ ) et ( $\mathcal{E}_4$ ) :



c'est-à-dire : ( $\mathcal{E}_3$ ) + 2( $\mathcal{E}_4$ ) = ( $\mathcal{E}_2$ ). Aussi, en notant  $E_2^0$  le potentiel *standard* du couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  et en désignant par  $\Delta_r G_i^0$  l'enthalpie libre *standard* de la réaction d'équation ( $\mathcal{E}_i$ ), la combinaison linéaire des équations ( $\mathcal{E}_i$ ) préfigure celle des enthalpies libres *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_2^0 &= \Delta_r G_3^0 + 2 \Delta_r G_4^0 \Rightarrow -2\mathcal{F} E_2^0 = -2\mathcal{F} E_3^0 - 2RT \ln K_e \\ \Rightarrow E_2^0 &= E_3^0 + \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \log K_e = 0 + 0,06 \log K_e \\ \Rightarrow E_2^0 &= -0,84 \text{ V} \end{aligned}$$

Ce faisant, la loi de Nernst prévoit au couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  le potentiel :

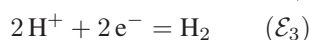
$$\begin{aligned} E_2 &= E_2^0 + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{1}{P_{\text{H}_2} [\text{HO}^-]^2} \right) = 0,06 \log K_e + 0,06 \log \left( \frac{1}{\sqrt{P_{\text{H}_2}} [\text{HO}^-]} \right) \\ &= 0,06 \log \left( \frac{K_e}{\sqrt{P_{\text{H}_2}} [\text{HO}^-]} \right) \text{ où } K_e = [\text{H}^+] [\text{HO}^-] \\ &= 0,06 + \log \left( \frac{[\text{H}^+]}{\sqrt{P_{\text{H}_2}}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, la frontière séparant les espèces  $\text{H}_2\text{O}$  et  $\text{H}_2$  étant caractérisée par  $P_{\text{H}_2} = 1$ , elle est alors décrite par l'équation :

$$E_2 = -0,06 \times \text{pH} \text{ pour } \text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$$



Le couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  désigne en fait l'hydrogène aux degrés d'oxydation :  $\text{H}(+I)/\text{H}(0)$ . Comme il en va de même du couple  $\text{H}^+/\text{H}_2$ , d'équation :



il s'ensuit que le potentiel  $E_2$  s'écrit aussi :

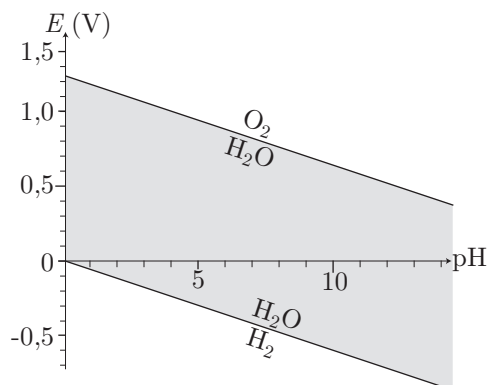
$$E_2 = E_3^0 + \frac{0,06}{2} \log \left( \frac{[\text{H}^+]^2}{P_{\text{H}_2}} \right) = 0 + 0,06 \log \left( \frac{[\text{H}^+]}{\sqrt{P_{\text{H}_2}}} \right)$$

où  $P_{\text{H}_2} = 1$  sur la frontière séparant les espèces  $\text{H}^+$  et  $\text{H}_2$ . Ainsi, dans un souci de simplification, cette frontière a pour équation :

$$E_2 = -0,06 \times \text{pH} \text{ pour } \text{H}^+/\text{H}_2$$

Dans la suite des développements, nous utiliserons cette méthode de détermination des frontières, ayant conscience que la frontière d'un couple Ox/Red d'un élément est aussi celle de n'importe quel autre couple de cet élément, aux mêmes degrés d'oxydation (le choix d'un couple repose sur la connaissance que l'on a de son potentiel *standard*).

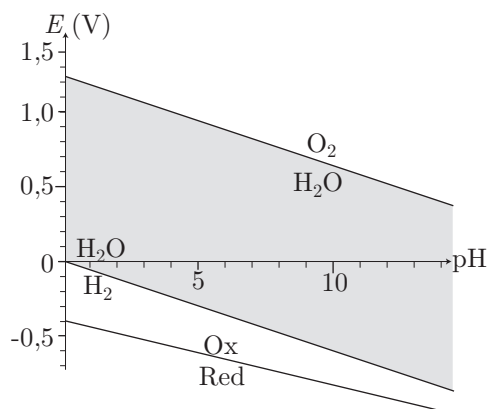
Finalement, le diagramme potentiel-pH de l'eau présente l'allure suivante :



Remarque – Ce diagramme potentiel-pH est un des rares cas où l'on représente deux éléments à différents degrés d'oxydation :  $O(0)/O(-II)$  dans  $O_2/H_2O$  et  $H(+I)/H(0)$  dans  $H_2O/H_2$ . En général, les diagrammes potentiels-pH figurent des domaines de stabilité d'un seul élément à divers degrés d'oxydation.

### 8.1.3.3 Application du diagramme de l'eau

Considérons un couple redox Ox/Red, dont le diagramme potentiel-pH montre que le domaine de stabilité de Red est entièrement situé en dessous de celui de l'eau :



Cette situation implique nécessairement que le potentiel  $E_{H_2O/H_2}$  du couple  $H_2O/H_2$  est supérieur à celui,  $E_{Ox/Red}$  du couple Ox/Red. Par suite, la présence simultanée des réactifs  $H_2O$  (oxydant) et Red (réducteur) conduit à une réaction dont l'affinité chimique est positive car proportionnelle à la différence de potentiel  $E_{H_2O/H_2} - E_{Ox/Red}$  (conformément à l'identité (9) établie à la page 1226 :  $\mathcal{A} = \nu \mathcal{F} (E_{H_2O/H_2} - E_{Ox/Red})$ ). Cette réaction conduit alors à la disparition de Red (si l'eau est le solvant, sa présence est excédentaire), à condition que le produit Ox de cette réaction ait une partie de son domaine de stabilité commun avec celui de  $H_2O$ . On pourra ainsi retenir que :

en présence d'eau, une espèce dont le domaine de stabilité est disjoint de celui de  $H_2O$  réagit pour former un produit dont une partie du domaine de stabilité est commune avec celui de  $H_2O$ .

### 8.1.3.4 Diagramme du fer

Pour tracer le diagramme potentiel-pH du fer, nous considérons l'élément fer aux degrés d'oxydation (0), (+I) et (+II). On donne les potentiels *standard* des couples suivants :

$$E^0 (Fe^{3+}/Fe^{2+}) = E_1^0 = 0,77 \text{ V} \quad E^0 (Fe^{2+}/Fe) = E_2^0 = -0,44 \text{ V}$$

ainsi que les produits de solubilité :

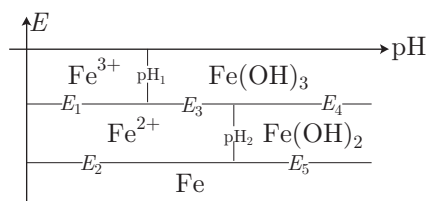
$$pK_s = 15,1 \text{ pour } Fe(OH)_{2(sol)} \text{ et } pK'_s = 38,0 \text{ pour } Fe(OH)_{3(sol)}$$

On supposera également connue la concentration totale du fer dissous :  $C_t = 10^{-2} \text{ mol} \cdot L^{-1}$ .

D'autre part, l'activité d'une espèce X en solution sera confondue avec sa concentration [X], considérée comme grandeur sans dimension si elle intervient dans un

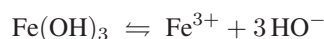
logarithme (en fait, l'activité s'identifie au rapport  $\frac{[X]}{C_0}$  où  $C_0 = 1 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ ).

L'opération à réaliser, comme préalable au tracé du diagramme potentiel-pH, consiste à classer les espèces contenant l'élément fer : Fe,  $Fe^{2+}$ ,  $Fe(OH)_{2(sol)}$ ,  $Fe^{3+}$ ,  $Fe(OH)_{3(sol)}$  dans un tableau qui préfigure la structure du diagramme :



Ce tableau montre l'existence de frontières verticales séparant les ions  $Fe^{2+}$  (*resp.*  $Fe^{3+}$ ) de leurs hydroxydes.

- **Frontière entre  $Fe^{2+}$  et  $Fe(OH)_3$**  : dans ce domaine, la seule espèce dissoute est  $Fe^{3+}$ , auquel cas lorsque le précipité  $Fe(OH)_3$  apparaît :  $Fe^{3+} = C_t = 10^{-2} \text{ mol} \cdot L^{-1}$ . Or, l'équation de la réaction :



montre que  $Fe(OH)_3$  apparaît dès que le pH prend la valeur  $pH_1$  telle que :

$$\begin{aligned} [Fe^{3+}] [HO^-]^3 = K'_s &\Rightarrow C_t \times \left( \frac{K_e}{[H^+]} \right)^3 = K'_s \text{ où } K_e = 10^{-14} \\ &\Rightarrow \frac{K_e}{[H^+]} = \sqrt[3]{\frac{K'_s}{C_t}} \\ &\Rightarrow -14 + pH_1 = \frac{1}{3} (\log K'_s - \log C_t) \end{aligned}$$

soit encore :

$$pH_1 = 14 - \frac{1}{3} (pK'_s + \log C_t) = 14 - \frac{1}{3} \times (38 - 2) \Rightarrow pH_1 = 2,00$$

- **Frontière entre  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}(\text{OH})_2$**  : dans le domaine de potentiel qui assure l'existence de  $\text{Fe}(\text{II})$ , le seul soluté est  $\text{Fe}^{2+}$  ce qui signifie que  $[\text{Fe}^{2+}] = C_t$ . En outre, de l'équation :



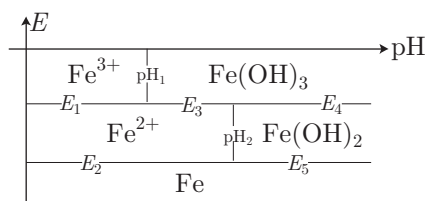
on déduit que le précipité  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$  apparaît pour une valeur  $\text{pH}_2$  du pH qui assure l'identité :

$$\begin{aligned} [\text{Fe}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = K_s &\Rightarrow C_t \times \left( \frac{K_e}{[\text{H}^+]} \right)^2 \times K_s \Rightarrow \frac{K_e}{[\text{H}^+]} = \sqrt{\frac{K_s}{C_t}} \\ &\Rightarrow -14 + \text{pH}_2 = \frac{1}{2} (\log K_s - \log C_t) \end{aligned}$$

Ce faisant :

$$\text{pH}_2 = 14 - \frac{1}{2} (\text{p}K_s + \log C_t) = 14 - \frac{1}{2} \times (15,1 - 2) \Rightarrow \text{pH}_2 = 7,45$$

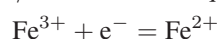
Cette première étude permet de soupçonner l'existence de cinq frontières séparant les espèces contenant l'élément fer aux divers degrés d'oxydation :



Si ce schéma ne constitue pas encore le diagramme potentiel-pH, il en montre au moins les frontières, notées  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$  et  $E_5$  dont il faudra déterminer les expressions.

- **Frontière  $E_1$**

Elle correspond au couple  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ , de demi-équation :



dont la loi de Nernst procure le potentiel :

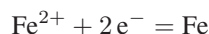
$$E_1 = E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$$

Sur cette frontière, les concentrations  $[\text{Fe}^{3+}]$  et  $[\text{Fe}^{2+}]$  en espèces dissoutes sont égales, de sorte que :

$$E_1 = E_1^0 = 0,77 \text{ V}$$

- **Frontière  $E_2$**

Cette frontière sépare les domaines de stabilité de  $\text{Fe}^{2+}$  et de  $\text{Fe}$ , de demi-équation :



pour laquelle la loi de Nernst prévoit que :

$$E_2 = E_2^0 + 0,03 \log [\text{Fe}^{2+}]$$

où  $\text{Fe}^{2+}$  est la seule espèce dissoute contenant l'élément fer, de sorte que :

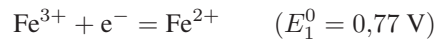
$$[\text{Fe}^{2+}] + \underbrace{[\text{Fe}^{3+}]}_{=0} = C_t = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Ce faisant :

$$E_2 = -0,44 + 0,03 \times \log(10^{-2}) \Rightarrow E_2 = -0,50 \text{ V}$$

• **Frontière  $E_3$**

La seule espèce dissoute qui contient l'élément fer est  $\text{Fe}^{2+}$ , de concentration  $C_t = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  (pour les mêmes raisons que précédemment). Le couple Fe(III)/Fe(II) est cependant caractérisé par la demi-équation :



pour laquelle la loi de Nernst précise que :

$$E_3 = E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$$

Or, lorsque  $\text{pH} > \text{pH}_1 = 2$ ,  $\text{Fe}^{3+}$  est presque absent de la solution car Fe(III) se présente sous forme d'hydroxyde  $\text{Fe}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$  insoluble. C'est pourquoi :

$$K'_s = [\text{Fe}^{3+}] [\text{HO}^-]^3 \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = \frac{K'_s}{[\text{HO}^-]^3}$$

avec :

$$K_e = [\text{H}^+] [\text{HO}^-] \Rightarrow [\text{HO}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}^+]} \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = \frac{K'_s [\text{H}^+]^3}{K_e^3}$$

de telle manière que :

$$\begin{aligned} E_3 &= E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{K'_s [\text{H}^+]^3}{K_e^3 C_t} \right) \\ &= E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{K'_s}{K_e^3} \right) - 0,18 \text{ pH} - 0,06 \log(C_t) \\ &= 0,77 + 0,06 \times [3 \times 14 - 38 - \log(10^{-2})] - 0,18 \text{ pH} \\ &\Rightarrow E_3 = 1,13 - 0,18 \times \text{pH} \end{aligned}$$



Les frontières séparant les domaines de stabilité d'un élément sous deux degrés d'oxydation sont toujours continues. On peut alors utiliser cette continuité afin de vérifier qu'aucune faute ne s'est glissée dans les calculs ; en  $\text{pH} = \text{pH}_1 = 2$  :

$$E_1(\text{pH}_1) = 0,77 \text{ V} \text{ et } E_3(\text{pH}_1) = 1,13 - 0,18 \times 2 = 0,77 \text{ V}$$



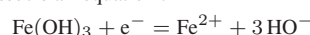
On rappelle les valeurs numériques :

- du potentiel *standard* du couple  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$  :  $E_1^0 = 0,77 \text{ V}$  ;
- du produit de solubilité de  $\text{Fe}(\text{OH})_3(\text{sol})$  :  $\text{p}K'_s = 38,0$ .

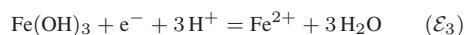
1. Déterminer la demi-équation du couple  $\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}$  pour  $\text{pH} \in [\text{pH}_1, \text{pH}_2]$ . Calculer également la valeur  $E_3$  de son potentiel *standard* à  $\text{pH} = 0$ .
2. En déduire l'expression du potentiel  $E_3$  du couple  $\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}$ , en choisissant  $[\text{Fe}^{2+}] = C_t = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

### RÉPONSE

1. Le couple  $\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}$  est associé à l'équation :



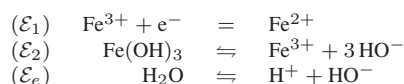
qui devient, à  $\text{pH} = 0$  :



Le potentiel *standard*  $E_3^0$  de ce couple est lié à l'enthalpie libre *standard* de l'équation ( $\mathcal{E}_3$ ) :

$$\Delta_r G_3^0 = -\mathcal{F} E_3^0$$

Considérons alors les équations :

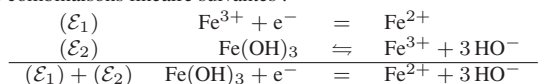


dont les enthalpies libres *standard* vérifient :

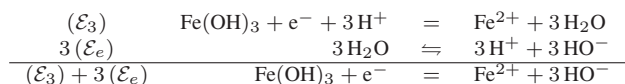
$$\Delta_r G_1^0 = -\mathcal{F} E_1^0 \quad \Delta_r G_2^0 = -RT \ln K'_s \quad \Delta_r G_e^0 = -RT \ln K_e$$

où  $K_e = 10^{-14}$  est le produit ionique de l'eau et où l'on prendra :  $\frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} = 0,06$ .

Effectuons alors les combinaisons linéaires suivantes :



et :



afin de remarquer que :

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_3) + 3(\mathcal{E}_e) &= (\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_2) \Rightarrow \Delta_r G_3^0 + 3 \Delta_r G_e^0 = \Delta_r G_1^0 + \Delta_r G_2^0 \\ \Rightarrow -\mathcal{F} E_3^0 &= -\mathcal{F} E_1^0 - RT \ln K'_s + 3RT \ln K_e \\ \Rightarrow E_3^0 &= E_1^0 + \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} (\log K'_s - 3 \log K_e) \end{aligned}$$

soit encore :

$$E_3^0 = E_1^0 + 0,06 \times (3 \times 14 - \text{p}K'_s) = 0,77 + 0,06 \times (3 \times 14 - 38) \Rightarrow E_3^0 = 1,01 \text{ V}$$

2. La frontière  $E_3$  désigne le potentiel du couple  $\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}^{2+}$  :



dont le potentiel *standard* vaut  $E_3^0 = 1,01 \text{ V}$  et dont la loi de Nernst fournit :

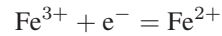
$$\begin{aligned} E_3 &= E_3^0 + 0,06 \log \left( \frac{[\text{H}^+]^3}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = E_3^0 + 0,06 \log \left( \frac{[\text{H}^+]^3}{C_t} \right) \\ &= E_3^0 - 0,06 \log C_t - 0,18 \times \text{pH} = 1,01 + 0,12 - 0,18 \times \text{pH} \end{aligned}$$

soit encore :

$$E_3 = 1,13 - 0,18 \times \text{pH}$$

• **Frontière  $E_4$**

La frontière  $E_4$  sépare les domaines d'existence de  $\text{Fe}(\text{OH})_3$  et de  $\text{Fe}(\text{OH})_2$ , c'est-à-dire caractérise couple  $\text{Fe}(\text{III})/\text{Fe}(\text{II})$  :



La loi de Nernst conduit ainsi à :

$$E_4 = E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$$

où, pour  $\text{pH} > \text{pH}_2$ , les hydroxydes  $\text{Fe}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$  et  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$  sont les seules espèces prédominantes, avec :

$$K_s = [\text{Fe}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_s}{[\text{HO}^-]^2}$$

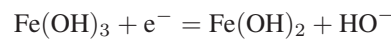
et :

$$K'_s = [\text{Fe}^{3+}] [\text{HO}^-]^3 \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = \frac{K'_s}{[\text{HO}^-]^3}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} = \frac{K'_s}{K_s [\text{HO}^-]} \Rightarrow E_4 = E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{K'_s}{K_s} \right) + 0,06 \log \left( \frac{1}{[\text{HO}^-]} \right) \quad (12)$$

Remarque – On vérifiera que  $E_4$  représente également le potentiel du couple  $\text{Fe}(\text{OH})_3/\text{Fe}(\text{OH})_2$  des espèces situées de part et d'autre de la frontière cherchée :



dont le potentiel standard vaut alors, par identification :

$$E_4^0 = E_1^0 + 0,06 (pK_s - pK'_s)$$

Enfin, le produit ionique de l'eau fournit :

$$\begin{aligned} K_e = [\text{H}^+] [\text{HO}^-] &\Rightarrow [\text{HO}^-] = \frac{K_e}{[\text{H}^+]} = \frac{10^{-14}}{[\text{H}^+]} \\ &\Rightarrow \log \left( \frac{1}{[\text{HO}^-]} \right) = \log \left( \frac{[\text{H}^+]}{10^{-14}} \right) = 14 - \text{pH} \end{aligned}$$

C'est pourquoi l'expression (12) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} E_4 &= E_1^0 + 0,06 \times (pK_s - pK'_s + 14) - 0,06 \times \text{pH} \\ &= 0,77 + 0,06 \times (15,1 - 38 + 14) - 0,06 \times \text{pH} \\ &\Rightarrow E_4 = 0,24 - 0,06 \times \text{pH} \end{aligned}$$



On s'assurera, à nouveau, de la continuité de la frontière séparant les domaines de stabilité de Fe(II) et de Fe(III), pour  $\text{pH}_2 = 7,45$ , en calculant :

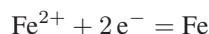
$$E_3(\text{pH}_2) = 1,13 - 0,18 \times \text{pH}_2 = 1,13 - 0,18 \times 7,45 = -0,21 \text{ V}$$

et :

$$E_4(\text{pH}_2) = 0,24 - 0,06 \times 7,45 = -0,21 \text{ V}$$

• **Frontière  $E_5$**

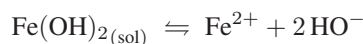
Cette frontière sépare le fer aux degrés d'oxydation (II) et (0), comme dans le couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$  :



pour lequel la loi de Nernst prévoit que :

$$E_5 = E_2^0 + 0,03 \log [\text{Fe}^{2+}]$$

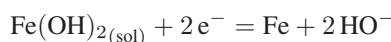
Or, dans ce domaine de pH, Fe(II) existe essentiellement sous forme d'hydroxyde insoluble :



dont la présence est caractérisée par le produit de solubilité :

$$\begin{aligned} K_s = [\text{Fe}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 &\Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_s}{[\text{HO}^-]^2} \Rightarrow E_5 = E_2^0 + 0,03 \log \left( \frac{K_s}{[\text{HO}^-]^2} \right) \\ &\Rightarrow E_5 = E_2^0 - 0,03 \text{p}K_s + 0,03 \log \left( \frac{1}{[\text{HO}^-]^2} \right) \end{aligned}$$

*Remarque* – On constate que  $E_5$  est également l'expression de la loi de Nernst appliquée au couple  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{sol})}/\text{Fe}$  :



à condition que le potentiel standard de ce couple soit pris égal à :

$$E_5^0 = E_2^0 - 0,03 \times \text{p}K_s = -0,89 \text{ V}$$

Enfin, le produit ionique de l'eau est défini par :

$$\begin{aligned} K_e = 10^{-14} = [\text{H}^+] [\text{HO}^-] &\Rightarrow \frac{1}{[\text{HO}^-]^2} = \frac{[\text{H}^+]^2}{10^{-28}} \\ &\Rightarrow E_5 = E_2^0 - 0,03 \text{p}K_s + 0,03 \log \left( \frac{[\text{H}^+]^2}{10^{-28}} \right) \\ &\Rightarrow E_5 = E_2^0 + 0,03 \times (28 - \text{p}K_s) - 0,06 \times \text{pH} \end{aligned}$$

soit encore :

$$E_5 = -0,05 - 0,06 \times \text{pH}$$



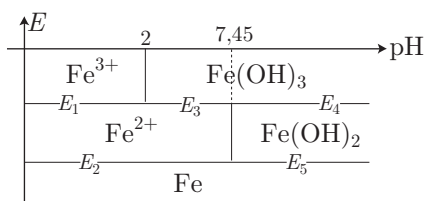


À nouveau, le contrôle des calculs repose ici sur la condition de continuité de la frontière entre les domaines de stabilité de Fe(II) et Fe(0), notamment en  $\text{pH}_2 = 7,45$  :

$$\begin{cases} E_5(\text{pH}_2) = -0,05 - 0,06 \times 7,45 = -0,5 \text{ V} \\ E_2(\text{pH}_2) = -0,5 \text{ V} \end{cases}$$

Avant de passer au tracé du diagramme potentiel-pH du fer, il convient de résumer (au moins sur un brouillon) l'ensemble des informations obtenues :

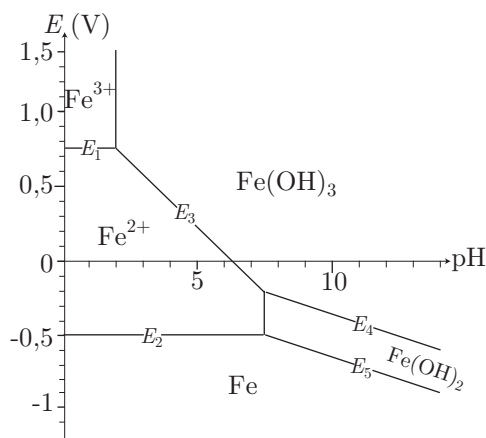
$$\begin{aligned} E_1 &= 0,77 \text{ V} \\ E_2 &= -0,50 \text{ V} \\ E_3 &= 1,13 - 0,18 \text{ pH} \\ E_4 &= 0,24 - 0,06 \text{ pH} \\ E_5 &= -0,05 - 0,06 \text{ pH} \end{aligned}$$



avec les conditions de continuité :

$$\begin{cases} E_1(\text{pH}_1) = E_3(\text{pH}_1) = 0,77 \text{ V pour } \text{pH}_1 = 2 \\ E_3(\text{pH}_2) = E_4(\text{pH}_2) = -0,21 \text{ V pour } \text{pH}_2 = 7,45 \\ E_5(\text{pH}_2) = E_2(\text{pH}_2) = -0,50 \text{ V} \end{cases}$$

d'où découle finalement le diagramme représenté ci-dessous :



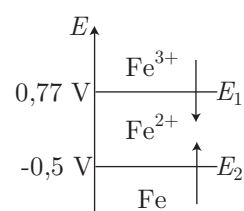
### 8.1.3.5 Application des diagrammes de l'eau et du fer

La représentation des diagrammes potentiel-pH offrent un moyen visuel rapide de prévoir la stabilité des espèces présentes dans un milieu réactionnel : deux espèces situées dans des domaines disjoints ne peuvent coexister en équilibre, car cela supposerait que, pour une valeur donnée du pH, le potentiel du milieu puisse prendre deux valeurs différentes qui assureraient l'existence simultanée des deux espèces.

Par exemple, pour  $\text{pH} < 2$ , le diagramme potentiel-pH du fer montre que les espèces  $\text{Fe}^{3+}$  et  $\text{Fe}$  occupent des domaines disjoints.

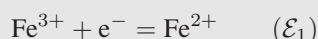
Ce faisant, l'existence de  $\text{Fe}^{3+}$  est conditionnée par l'inégalité :  $E > E_1$ , tandis que l'existence de  $\text{Fe}$  n'est assurée que lorsque  $E < E_2$ . Or,  $E_2 < E_1$  interdit à  $E$  de satisfaire simultanément ces deux conditions.

Il s'ensuit que la mise en contact de  $\text{Fe}^{3+}$  et de  $\text{Fe}$  conduit à la formation de  $\text{Fe}^{2+}$  jusqu'à disparition complète d'un des deux réactifs, selon l'équation-bilan :



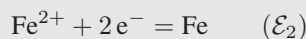
Considérons les couples  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$ , dont les frontières sont représentées respectivement par  $E_1$  et  $E_2$  sur le diagramme potentiel-pH. On note  $E_I$  le potentiel du couple  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$  et  $E_{II}$  celui du couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$ , de potentiels *standard* respectifs  $E_1^0$  et  $E_2^0$ .

1. Exprimer l'enthalpie libre  $\Delta_r G_1$  associée à la réaction :



en fonction de l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G_1^0$ , de la température  $T$  et des activités  $a_{\text{Fe}^{2+}}$  et  $a_{\text{Fe}^{3+}}$  des ions  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$ .

2. En déduire une relation entre  $\Delta_r G_1$ ,  $E_I$  et le Faraday  $\mathcal{F}$ .
3. Trouver, par une méthode analogue, l'expression de l'enthalpie libre  $\Delta_r G_2$  de la demi-réaction :



en fonction du potentiel *standard*  $E_{II}$  du couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$  et de  $\mathcal{F}$ .

4. Montrer que l'affinité chimique  $\mathcal{A}$  de la réaction d'équation-bilan :



vaut :

$$\mathcal{A} = 2\mathcal{F} \times (E_I - E_{II})$$

5. À l'aide du diagramme potentiel-pH du fer, conclure quant à la coexistence de  $\text{Fe}^{3+}$  et de  $\text{Fe}^{2+}$  au sein d'un même milieu.
6. Dans un litre d'une solution tamponnée à  $\text{pH} = 1$ , qui contient  $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'ions  $\text{Fe}^{3+}$ , on introduit, sous agitation régulière,  $1,12 \text{ g}$  de poudre de fer. Que vaut le potentiel de la solution à l'équilibre ?

*Donnée* : masse molaire du fer :  $M = 56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

#### RÉPONSE

1. L'enthalpie libre  $\Delta_r G$  d'une réaction s'exprime, d'une manière générale, en fonction des potentiels chimiques  $\mu_i = \mu_i^0 + RT \ln a_i$  des espèces participant à la réaction, d'activités  $a_i$  et de coefficients stoechiométriques algébriques  $\nu_i$  :

$$\Delta_r G = \sum_{i=1}^N \nu_i \mu_i = \sum_{i=1}^N \nu_i \mu_i^0 + RT \sum_{i=1}^N \nu_i \ln a_i = \Delta_r G^0 + RT \ln Q \text{ où } Q = \prod_{i=1}^N a_i^{\nu_i}$$

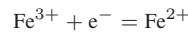
Appliquée à la demi-équation ( $\mathcal{E}_1$ ), cette relation devient :

$$\Delta_r G_1 = \Delta_r G_1^0 + RT \ln \left( \frac{a_{\text{Fe}^{2+}}}{a_{\text{Fe}^{3+}}} \right)$$

2. Étant donné que  $\Delta_r G_1^0 = -\mathcal{F} E_1^0$ , l'identité précédente s'écrit aussi :

$$\Delta_r G_1 = -\mathcal{F} E_1^0 + RT \ln 10 \times \log \left( \frac{a_{\text{Fe}^{2+}}}{a_{\text{Fe}^{3+}}} \right) - \mathcal{F} \times \left[ E_1^0 + \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \log \left( \frac{a_{\text{Fe}^{3+}}}{a_{\text{Fe}^{2+}}} \right) \right]$$

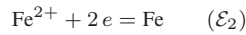
On reconnaît alors la loi de Nernst appliquée à la demi-équation :



dont le potentiel vaut :

$$E_I = E_1^0 + \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \log \left( \frac{a_{\text{Fe}^{3+}}}{a_{\text{Fe}^{2+}}} \right) \Rightarrow \Delta_r G_1 = -\mathcal{F} E_I$$

3. De même, à la demi-équation :



est associée une enthalpie libre :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_2 &= \Delta_r G_2^0 + RT \ln \left( \frac{a_{\text{Fe}}}{a_{\text{Fe}^{2+}}} \right) = \Delta_r G_2^0 - RT \ln 10 \times \log \left( \frac{a_{\text{Fe}^{2+}}}{a_{\text{Fe}}} \right) \\ &= -2\mathcal{F} E_2^0 - RT \ln 10 \times \log \left( \frac{a_{\text{Fe}^{2+}}}{a_{\text{Fe}}} \right) = -2\mathcal{F} E_{II} \end{aligned}$$

où  $E_{II} = E_2^0 + \frac{RT \ln 10}{2\mathcal{F}} \log \left( \frac{a_{\text{Fe}^{2+}}}{a_{\text{Fe}}} \right)$  est le potentiel du couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$ , prévu par la loi de Nernst.

4. La réaction d'équation-bilan :



a pour enthalpie libre :

$$\Delta_r G = \sum_{i=1}^N \nu_i \mu_i = 3\mu_{\text{Fe}^{2+}} - 2\mu_{\text{Fe}^{3+}} - \mu_{\text{Fe}}$$

tandis que  $\Delta_r G_1$  et  $\Delta_r G_2$  s'écrivent :

$$\Delta_r G_1 = \mu_{\text{Fe}^{2+}} - \mu_{\text{Fe}^{3+}} \text{ et } \Delta_r G_2 = \mu_{\text{Fe}} - \mu_{\text{Fe}^{2+}}$$

On remarque alors que :

$$2\Delta_r G_1 - \Delta_r G_2 = 3\mu_{\text{Fe}^{2+}} - \mu_{\text{Fe}} = \Delta_r G = -\mathcal{A}$$

où  $\mathcal{A}$  désigne l'affinité chimique de la réaction d'équation-bilan (13). Par suite :

$$-\mathcal{A} = -2\mathcal{F} E_I + 2\mathcal{F} E_{II} \Rightarrow \mathcal{A} = 2\mathcal{F} \times (E_I - E_{II})$$

5. Le diagramme potentiel-pH du fer montre que l'existence de  $\text{Fe}^{3+}$  est conditionnée par l'inégalité :  $E_I \geq E_1$ , tandis que celle de Fe suggère que  $E_{II} \leq E_2$ . Or, étant donné que  $E_1 > E_2$ , la coexistence de  $\text{Fe}^{3+}$  et de Fe dans un même milieu implique que :

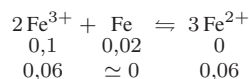
$$E_I > E_{II} \Rightarrow \mathcal{A} > 0$$

La réaction d'équation-bilan (13) est donc amenée à évoluer dans le sens de formation de  $\text{Fe}^{2+}$ , jusqu'à disparition quasi totale d'un des deux réactifs  $\text{Fe}^{3+}$  ou Fe. Cette étude montre que des espèces, dont les domaines de stabilité sont disjoints, ne peuvent coexister de manière stable dans un même milieu.

6. Un litre d'une solution à  $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'ions  $\text{Fe}^{3+}$  contient  $n_1 = 0,1$  mole d'ions  $\text{Fe}^{3+}$ . En revanche, une masse  $m = 1,12 \text{ g}$  de poudre de fer contient :

$$n_2 = \frac{m}{M} = \frac{1,12}{56} = 0,02 \text{ mole de Fe}$$

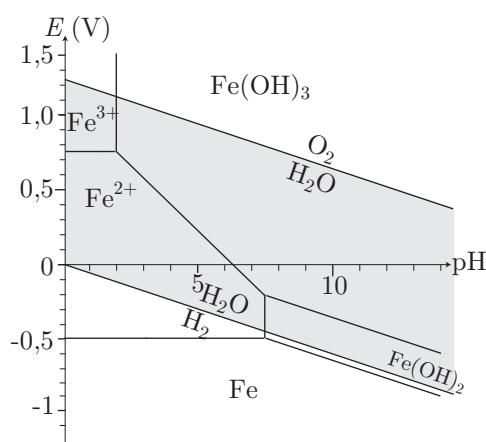
Compte tenu des conclusions de la question précédente, il va se produire la réaction :



Ainsi, le milieu réactionnel contient simultanément  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$ , ce qui n'est possible qu'au voisinage de la frontière  $E_1$ . Du reste, la loi de Nernst prévoit que le potentiel du couple  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$  (seul présent dans le milieu réactionnel) vaut :

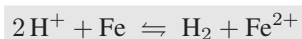
$$E_I = E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = E_1^0 \Rightarrow E_I = 0,77 \text{ V} = E_1$$

Superposons maintenant les diagrammes potentiel-pH de l'eau et du fer :

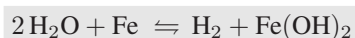


Conformément à la conclusion énoncé à la page (1234), la superposition de ces diagrammes nous amène à prévoir que :

- le fer n'est pas stable dans l'eau car, quel que soit le pH, son domaine de stabilité est disjoint de celui de l'eau. C'est pourquoi, en milieu acide il se produit la réaction d'équation :



alors qu'en milieu basique on peut observer la réaction d'équation-bilan :



La cinétique de cette réaction est cependant suffisamment faible pour que le fer métallique puisse être introduit momentanément dans l'eau sans être corrodé.

- les domaines de stabilité de Fe(II) sont disjoints de celui de  $\text{O}_2$ , gaz présent en grande quantité dans l'air et dans l'eau. Par conséquent, Fe(II) est instable lorsqu'il est abandonné à l'air libre ou en solution aqueuse ; il est oxydé en Fe(III) selon les réactions d'équation :

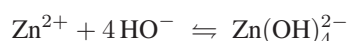


### 8.1.3.6 Diagramme du zinc

Les étudiants de la filière PSI doivent connaître le diagramme potentiel-pH du zinc. Quant aux étudiants des autres filières, ils pourront s'entraîner à construire ce diagramme, à titre d'exercice.

On connaît les valeurs numériques :

- du produit de solubilité  $pK_s = 17$  de l'hydroxyde de zinc  $Zn(OH)_{2(sol)}$ , insoluble dans l'eau ;
- de la constante de formation  $K_f = 10^{15,5}$  du complexe  $Zn(OH)_4^{2-}$ , soluble en solution aqueuse :



- du potentiel standard  $E^0 = -0,76$  V associé au couple  $Zn^{2+}/Zn$ , à pH = 0 ;
- du produit ionique de l'eau :  $K_e = 10^{-14}$  à 298 K.

On adoptera la convention selon laquelle la concentration totale de l'élément zinc dissous dans l'eau vaut  $C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Compte tenu des données numériques fournies ci-dessus, le diagramme du zinc portera sur Zn(II) :  $Zn^{2+}$ ,  $Zn(OH)_{2(sol)}$ ,  $Zn(OH)_4^{2-}$  et sur Zn(0) : Zn. C'est pourquoi le diagramme cherché présentera la structure esquissée ci-dessous :

$d_{ox}$		pH <sub>1</sub>	pH <sub>2</sub>
+II	Zn <sup>2+</sup> $E_1$	Zn(OH) <sub>2(Sol)</sub> $E_2$	Zn(OH) <sub>4</sub> <sup>2-</sup> $E_3$
0	Zn		

Apparaissent alors deux valeurs du pH qui délimitent trois domaines de stabilité de Zn(II) :

- Lorsque  $pH = pH_1$ , le précipité de  $Zn(OH)_{2(sol)}$  apparaît, en conséquence de quoi l'équilibre de précipitation impose :

$$K_s = [Zn^{2+}] [HO^-]^2$$

où la convention adoptée s'écrit :

$$[Zn^{2+}] + [Zn(OH)_4^{2-}] = C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad (14)$$

et se simplifie lorsque  $pH = pH_1$  :

$$\begin{aligned} [Zn^{2+}] = C_0 &\Rightarrow K_s = C_0 \times [HO^-]^2 = C_0 \times \left( \frac{10^{-14}}{[H^+]} \right)^2 \\ &\Rightarrow -pK_s = \log C_0 + 2 \times (pH_1 - 14) \\ &\Rightarrow pH_1 = 14 - \frac{1}{2} (pK_s + \log C_0) = 14 - \frac{1}{2} \times (17 - 2) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :  $pH_1 = 6,5$ .

- à  $pH = pH_2$ , l'existence du précipité impose encore :

$$K_s = [Zn^{2+}] [HO^-]^2 \quad (15)$$

mais la convention adoptée conduit à :

$$\underbrace{[\text{Zn}^{2+}] + [\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}]}_{\simeq 0} = C_0 \Rightarrow [\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}] \simeq C_0$$

Quant au complexe  $\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}$ , sa constante de formation est définie par :

$$K_f = \frac{[\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}]}{[\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^4} = \frac{C_0}{[\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^4} \Rightarrow [\text{Zn}^{2+}] = \frac{C_0}{K_f [\text{HO}^-]^4}$$

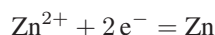
Ce faisant, l'équation (15) devient :

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{C_0}{K_f [\text{HO}^-]^2} = \frac{C_0}{K_f} \times \left( \frac{[\text{H}^+]}{10^{-14}} \right)^2 \\ &\Rightarrow -\text{p}K_s = \log C_0 - \log K_f + 2 \times (14 - \text{pH}_2) \\ &\Rightarrow \text{pH}_2 = 14 + \frac{1}{2} (\log C_0 - \log K_f + \text{p}K_s) = 14 + \frac{1}{2} \times (-2 - 15,5 + 17) \end{aligned}$$

soit encore :  $\text{pH}_2 = 13,75$ .

La connaissance de  $\text{pH}_1$  et  $\text{pH}_2$  permet désormais d'établir les expressions des frontières  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  qui séparent les domaines de stabilité de  $\text{Zn}(\text{II})$  et de  $\text{Zn}(0)$ .

- Lorsque  $\text{pH} \leq \text{pH}_1$ , le couple  $\text{Zn}(\text{II})/\text{Zn}(0)$  est décrit par la demi-équation :



dont la loi de Nernst prévoit le potentiel :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log [\text{Zn}^{2+}]$$

avec :

$$[\text{Zn}^{2+}] + \underbrace{[\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}]}_{\simeq 0} = C_0 \Rightarrow [\text{Zn}^{2+}] = C_0 \text{ pour } \text{pH} < \text{pH}_1$$

C'est pourquoi :

$$E_1 = E^0 + 0,03 \log C_0 = -0,76 - 0,06 \Rightarrow E_1 = -0,82 \text{ V}$$

- Lorsque  $\text{pH}_1 \leq \text{pH} \leq \text{pH}_2$ , le potentiel du couple  $\text{Zn}(\text{II})/\text{Zn}(0)$  est à nouveau fourni par la loi de Nernst :  $E_2 = E^0 + 0,03 \log [\text{Zn}^{2+}]$ , dans laquelle il n'est cependant plus possible de remplacer  $[\text{Zn}^{2+}]$  par  $C_0$ , en raison de la présence du précipité  $\text{Zn}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ . En revanche, cette présence se traduit par un équilibre entre  $\text{Zn}^{2+}$  et  $\text{Zn}(\text{OH})_2$ , décrit par le produit de solubilité :

$$\begin{aligned} K_s &= [\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = [\text{Zn}^{2+}] \times \left( \frac{10^{-14}}{[\text{H}^+]} \right)^2 \\ &\Rightarrow [\text{Zn}^{2+}] = K_s \times \left( \frac{[\text{H}^+]}{10^{-14}} \right)^2 \Rightarrow \log [\text{Zn}^{2+}] = -\text{p}K_s + 2 \times (14 - \text{pH}) \\ &\Rightarrow E_2 = E^0 + 0,03 \times (28 - \text{p}K_s) - 0,06 \times \text{pH} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, numériquement :

$$E_2 = -0,76 + 0,03 \times (28 - 17) - 0,06 \text{ pH} \Rightarrow E_2 = -0,43 - 0,06 \times \text{pH}$$

Remarque - *L'identité* :

$$E_2(\text{pH}_1) = -0,43 - 0,06 \times 6,5 = -0,82 \text{ V} \Rightarrow E_2(\text{pH}_1) = E_1$$

confirme la continuité de la frontière cherchée, en  $\text{pH} = \text{pH}_1$ .

- Pour  $\text{pH} \geq \text{pH}_2$ , l'espèce dissoute prédominante est le complexe  $\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}$ , auquel cas l'équation (14) devient :

$$\underbrace{[\text{Zn}^{2+}] + [\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}]}_{\simeq 0} = C_0 \Rightarrow [\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}] \simeq C_0$$

Or, dans l'expression du potentiel  $E_3$  associé au couple  $\text{Zn}(\text{II})/\text{Zn}(0)$  :

$$E_3 = E^0 + 0,03 \log [\text{Zn}^{2+}]$$

apparaît la concentration des ions  $\text{Zn}^{2+}$ , en équilibre avec les ions  $\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}$ . C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{[\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}]}{[\text{Zn}^{2+}] [\text{OH}^-]^4} = \frac{C_0}{[\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^4} \\ \Rightarrow [\text{Zn}^{2+}] &= \frac{C_0}{K_f} \times \left( \frac{[\text{H}^+]}{10^{-14}} \right)^4 \\ \Rightarrow \log [\text{Zn}^{2+}] &= \log C_0 - \log K_f + 4 \times (14 - \text{pH}) \\ \Rightarrow E_3 &= E^0 + 0,03 \times (\log C_0 - \log K_f + 4 \times 14) - 0,12 \times \text{pH} \end{aligned}$$

il s'ensuit que :

$$E_3 = -0,76 + 0,03 \times (-2 - 15,5 + 4 \times 14) - 0,12 \text{ pH} \Rightarrow E_3 = 0,395 - 0,12 \times \text{pH}$$

Remarque - *On pourra à nouveau s'assurer que* :

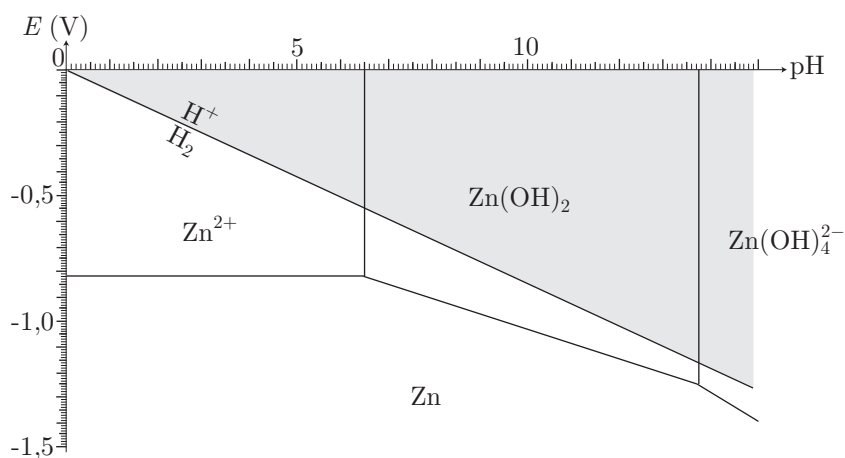
$$\begin{cases} E_2(\text{pH}_2) = -0,43 - 0,06 \times 13,75 = -1,255 \text{ V} \\ E_3(\text{pH}_2) = 0,395 - 0,12 \times 13,75 = -1,255 \text{ V} \end{cases}$$

assurent la continuité de la frontière cherchée, en  $\text{pH} = \text{pH}_2 = 13,75$ .

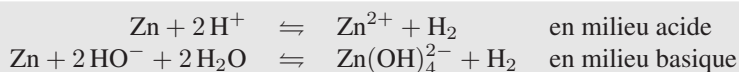
En conclusion, le diagramme potentiel-pH du zinc est caractérisé par les frontières suivantes :

$$\begin{aligned} \text{pH} \leq 6,5 &\Rightarrow E(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) = E_1 = -0,82 \text{ V} \\ 6,5 \leq \text{pH} \leq 13,75 &\Rightarrow E(\text{Zn}(\text{OH})_2/\text{Zn}) = E_2 = -0,43 - 0,06 \times \text{pH} \\ \text{pH} \geq 13,75 &\Rightarrow E(\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}/\text{Zn}) = E_3 = 0,395 - 0,12 \times \text{pH} \end{aligned}$$

à partir desquelles est obtenu le diagramme ci-dessous :



Sur ce diagramme, le domaine de stabilité de l'eau a aussi été tracé partiellement (pour le couple  $H^+/H_2$ ) de manière à montrer la dissociation de ce domaine avec celui de Zn. Par conséquent, quelle que soit la valeur du pH, le zinc est instable en milieu aqueux, ce que traduisent les deux équations-bilan :



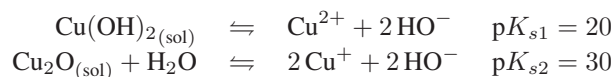
### 8.1.3.7 Diagramme du cuivre

On connaît :

- les potentiels *standard* des couples suivants :

$$E^0(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = E_1^0 = 0,16 \text{ V} \quad E^0(\text{Cu}^+/\text{Cu}) = E_2^0 = 0,52 \text{ V}$$

- les produits de solubilité de  $\text{Cu}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$  et de  $\text{Cu}_2\text{O}_{(\text{sol})}$  :



- $\frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \simeq 0,06 \text{ V}$ .

On impose également que la concentration totale du cuivre dissous vaut :

$$[\text{Cu}^{2+}] + [\text{Cu}^+] = C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad (16)$$

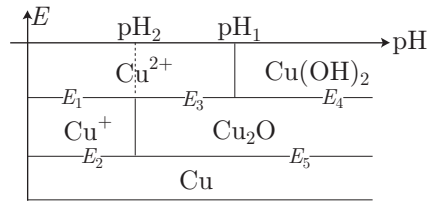
On conviendra également que sur la frontière du cuivre à deux degrés d'oxydation différents, les concentrations des espèces dissoutes sont égales.

Les données ainsi fournies font apparaître l'élément cuivre :

- au degré d'oxydation (+II) dans  $\text{Cu}^{2+}$  et  $\text{Cu}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$  ;
- au degré d'oxydation (+I) dans  $\text{Cu}^+$  et  $\text{Cu}_2\text{O}_{(\text{sol})}$  ;
- au degré d'oxydation (0) dans Cu.

On peut alors soupçonner le cuivre de présenter un diagramme potentiel-pH, dont la structure ressemble à :





où :

- $\text{pH}_1$  désigne la valeur du pH auquel apparaît le précipité  $\text{Cu}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ , c'est-à-dire :

$$[\text{Cu}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = K_{s1}$$

Or, dans le domaine de stabilité de Cu(II), la concentration  $[\text{Cu}^+]$  est négligeable ; l'identité (16) se simplifie :

$$\begin{aligned} [\text{Cu}^{2+}] \simeq C_0 &\Rightarrow C_0 \times \left( \frac{10^{-14}}{[\text{H}^+]} \right)^2 = K_{s1} \Rightarrow \log C_0 + 2 \times (\text{pH}_1 - 14) = -\text{p}K_{s1} \\ &\Rightarrow \text{pH}_1 = 14 - \frac{1}{2} (\text{p}K_{s1} + \log C_0) = 14 - \frac{1}{2} \times (20 - 2) \\ &\Rightarrow \text{pH}_1 = 5 \end{aligned}$$

- $\text{pH}_2$  est la valeur du pH à laquelle apparaît  $\text{Cu}_2\text{O}$ , en raison de quoi :

$$[\text{Cu}^+]^2 [\text{HO}^-]^2 = K_{s2}$$

Quant à la relation (16), elle se simplifie dans le domaine de stabilité de Cu(I) :

$$\begin{aligned} [\text{Cu}^{2+}] \simeq 0 \Rightarrow [\text{Cu}^+] \simeq C_0 &\Rightarrow C_0 \times \frac{10^{-14}}{[\text{H}^+]} = \sqrt{K_{s2}} \\ &\Rightarrow \log C_0 - 14 + \text{pH}_2 = -\frac{1}{2} \text{p}K_{s2} \\ &\Rightarrow \text{pH}_2 = 14 - \log C_0 - \frac{1}{2} \text{p}K_{s2} = 14 + 2 - \frac{1}{2} \times 30 \\ &\Rightarrow \text{pH}_2 = 1 \end{aligned}$$

Il convient maintenant de déterminer les expressions des frontières entre les espèces Cu(II), Cu(I) et Cu(0).

- La frontière  $E_1$  sépare les domaines de stabilité de  $\text{Cu}^{2+}$  et de  $\text{Cu}^+$  :

$$(\mathcal{E}_1) : \text{Cu}^{2+} + e^- = \text{Cu}^+ \Rightarrow E_1 = E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Cu}^+]} \right)$$

Or, cette frontière est définie par l'identité :  $[\text{Cu}^{2+}] = [\text{Cu}^+]$ , en conséquence de quoi :

$$E_1 = E_1^0 = 0,16 \text{ V}$$

- La frontière  $E_3$  sépare également les domaines de stabilité de Cu(II) et de Cu(I). C'est pourquoi :

$$E_3 = E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Cu}^+]}\right)$$

Or, la frontière  $E_3$  est caractérisée par l'absence de  $\text{Cu}^+$ , ce qui simplifie la relation (16) :

$$[\text{Cu}^{2+}] \simeq C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En outre, la présence de  $\text{Cu}_2\text{O}_{(\text{sol})}$  se traduit par :

$$[\text{Cu}^+]^2 [\text{HO}^-]^2 = K_{s2} \Rightarrow [\text{Cu}^+] = \frac{\sqrt{K_{s2}}}{[\text{HO}^-]} = \frac{\sqrt{K_{s2}}}{10^{-14}} \times [\text{H}^+] \quad (17)$$

Par suite :

$$\begin{aligned} E_3 &= E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{C_0 \times 10^{-14}}{\sqrt{K_{s2}} [\text{H}^+]} \right) \\ &= E_1^0 + 0,06 \times \left( \log C_0 - 14 + \frac{1}{2} \text{p}K_{s2} \right) + 0,06 \times \text{pH} \\ &= 0,16 + 0,06 \times \left( -2 - 14 + \frac{1}{2} \times 30 \right) + 0,06 \times \text{pH} \\ &\Rightarrow E_3 = 0,10 + 0,06 \times \text{pH} \end{aligned}$$

Remarque – L'identité :

$$E_3(\text{pH}_2) = 0,1 + 0,06 \times 1 = 0,16 \text{ V} = E_1$$

assure la continuité de la frontière Cu(II)/Cu(I) en  $\text{pH} = \text{pH}_2$ .

- La frontière  $E_4$  est donnée, pour les mêmes raisons, par :

$$E_4 = E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Cu}^+]}\right)$$

où, conformément au résultat (17) :

$$[\text{Cu}^+] = \frac{\sqrt{K_{s2}} [\text{H}^+]}{10^{-14}} \text{ pour } \text{pH} \geq 1$$

et, pour  $\text{pH} \geq \text{pH}_1 = 5$ , la présence de  $\text{Cu}(\text{OH})_2$  impose :

$$[\text{Cu}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = K_{s1} \Rightarrow [\text{Cu}^{2+}] = \frac{K_{s1}}{(10^{-14})^2} \times [\text{H}^+]^2$$

Ainsi :

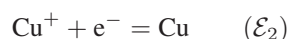
$$\begin{aligned}
 E_4 &= E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{K_{s1} [\text{H}^+]}{10^{-14} \sqrt{K_{s2}}} \right) \\
 &= E_1^0 + 0,06 \times \left( 14 + \frac{1}{2} \text{p}K_{s2} - \text{p}K_{s1} \right) - 0,06 \times \text{pH} \\
 &= 0,16 + 0,06 \times \left( 14 + \frac{1}{2} \times 30 - 20 \right) - 0,06 \times \text{pH} \\
 \Rightarrow E_4 &= 0,70 - 0,06 \times \text{pH}
 \end{aligned}$$

Remarque – On s'assurera à nouveau que :

$$E_4(\text{pH}_1) = 0,7 - 0,06 \times 5 = 0,4 \text{ V et } E_3(\text{pH}_1) = 0,1 + 0,06 \times 5 = 0,4 \text{ V}$$

confirme la continuité de la frontière Cu(II)/Cu(I) en  $\text{pH} = \text{pH}_1$ .

- La frontière  $E_2$ , qui sépare les domaines de stabilité de Cu(I) et Cu(0), est associée à l'équation :



La loi de Nernst fournit alors :

$$E_2 = E_2^0 + 0,06 \log [\text{Cu}^+]$$

Quant à la relation (16), elle se simplifie dans le cas où la seule espèce dissoute est  $\text{Cu}^+$  :

$$\begin{aligned}
 [\text{Cu}^+] = C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} &\Rightarrow E_2 = 0,52 + 0,06 \times \log (10^{-2}) \\
 &\Rightarrow E_2 = 0,40 \text{ V}
 \end{aligned}$$

- Pour les mêmes raisons, la loi de Nernst fournit l'équation de la frontière  $E_5$  :

$$E_5 = E_2^0 + 0,06 \log [\text{Cu}^+]$$

mais, pour  $\text{pH} > \text{pH}_2$ , la présence de  $\text{Cu}_2\text{O}$  se traduit par l'équation :

$$\begin{aligned}
 K_{s2} &= [\text{Cu}^+]^2 [\text{HO}^-]^2 \Rightarrow [\text{Cu}^+] = \frac{\sqrt{K_{s2}}}{[\text{HO}^-]} = \frac{\sqrt{K_{s2}}}{10^{-14}} \times [\text{H}^+] \\
 \Rightarrow E_5 &= E_2^0 + 0,06 \log \left( \frac{\sqrt{K_{s2}}}{10^{-14}} \times [\text{H}^+] \right) \\
 \Rightarrow E_5 &= E_2^0 + 0,06 \times \left( 14 - \frac{1}{2} \text{p}K_{s2} \right) - 0,06 \times \text{pH}
 \end{aligned}$$

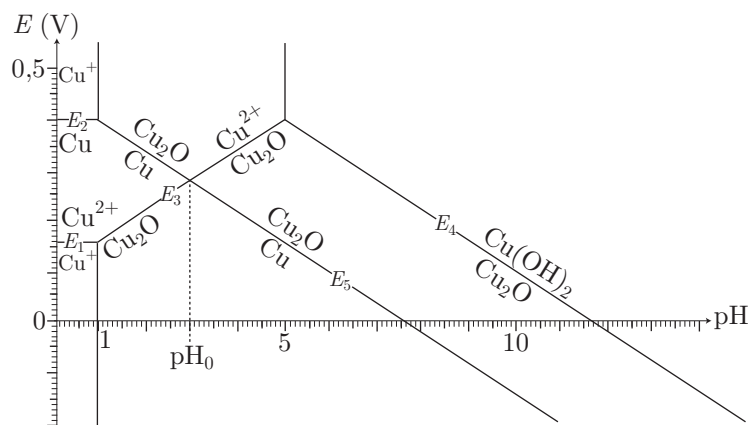
c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 E_5 &= 0,52 + 0,06 \times \left( 14 - \frac{1}{2} \times 30 \right) - 0,06 \times \text{pH} \\
 \Rightarrow E_5 &= 0,46 - 0,06 \times \text{pH}
 \end{aligned}$$

Remarque – La continuité de la frontière entre les domaines de stabilité de  $\text{Cu(I)}$  et  $\text{Cu(0)}$  est assurée par l'identité :

$$E_5(\text{pH}_2) = 0,46 - 0,06 \times 1 = 0,40 \text{ V} = E_2$$

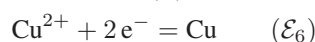
Compte tenu de ce qui précède, le diagramme potentiel-pH du cuivre devrait présenter l'allure suivante :



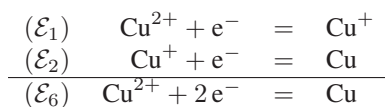
Cependant, ce diagramme montre que, pour  $\text{pH} < \text{pH}_0$  (intersection des courbes  $E_3$  et  $E_5$ ), le cuivre au degré d'oxydation (+I) :  $\text{Cu}^+$  ou  $\text{Cu}_2\text{O}$  n'est pas stable car son domaine de stabilité est en fait représenté par deux domaines disjoints. Évaluons, au préalable  $\text{pH}_0$  :

$$\begin{aligned} E_3(\text{pH}_0) = E_5(\text{pH}_0) &\Rightarrow 0,1 + 0,06 \times \text{pH}_0 = 0,46 - 0,06 \times \text{pH}_0 \\ &\Rightarrow \text{pH}_0 = \frac{0,46 - 0,1}{0,12} = 3 \end{aligned}$$

Ce faisant, pour  $\text{pH} < 3$ , l'absence de  $\text{Cu(I)}$  dans le milieu génère une nouvelle frontière entre les domaines de stabilité de  $\text{Cu(II)}$  et de  $\text{Cu}$  :



La somme des quations  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$  fournissant  $(\mathcal{E}_6)$  :



il en va de même des enthalpies libres *standard*  $\Delta_r G_i^0$  des équations  $(\mathcal{E}_i)$ , auxquelles sont associés les potentiels *standard*  $E_i^0$  :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_6^0 &= \Delta_r G_1^0 + \Delta_r G_2^0 \Rightarrow -2\mathcal{F} E_6^0 = -\mathcal{F} E_1^0 - \mathcal{F} E_2^0 \\ &\Rightarrow E_6^0 = \frac{E_1^0 + E_2^0}{2} = \frac{0,16 + 0,52}{2} \Rightarrow E_6^0 = 0,34 \text{ V} \end{aligned}$$

Par conséquent, la frontière caractéristique du couple  $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}$  a pour équation :

$$E_6 = E_6^0 + 0,03 \log [\text{Cu}^{2+}]$$

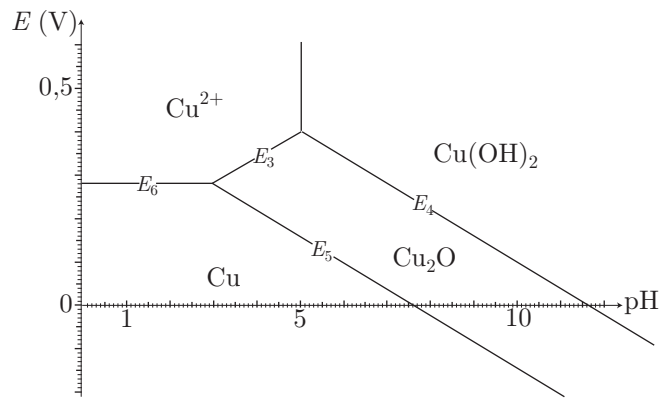
où  $[\text{Cu}^{2+}] = C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , conformément à l'identité (16) :

$$E_6 = 0,34 - 0,03 \times 2 = 0,28 \text{ V}$$

Remarque – On constate que les valeurs :

$$\begin{cases} E_3(\text{pH}_0) = 0,1 + 0,06 \times 3 = 0,28 \text{ V} \\ E_5(\text{pH}_0) = 0,46 - 0,06 \times 3 = 0,28 \text{ V} \\ E_6 = 0,28 \text{ V} \end{cases}$$

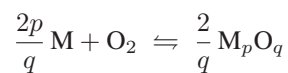
confirment l'existence d'un point commun aux frontières  $E_3$ ,  $E_5$  et  $E_6$  en  $\text{pH}_0 = 3$ .  
Finalement, le diagramme potentiel-pH du cuivre présente l'allure suivante :



## 8.1.4 Diagrammes d'Ellingham

### 8.1.4.1 Construction des diagrammes

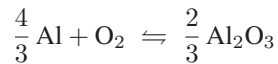
Soit M un métal et  $M_pO_q$  un de ses oxydes. On convient d'écrire l'équation-bilan de l'oxydation de M relativement à une mole de  $O_2$  (ce qui signifie que le coefficient stœchiométrique de  $O_2$  vaut 1) :



Pour simplifier les calculs qui suivent, cette équation sera simplement notée :



Par exemple, l'oxydation de l'aluminium sera notée :



L'enthalpie libre *standard* de l'équation (18) dépend de la température  $T$  conformément à la loi :

$$\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0(T) - T \times \Delta_r S^0(T)$$

**Définition 3** L'approximation d'Ellingham consiste à négliger les variations de l'enthalpie standard  $\Delta_r H^0$  et de l'entropie standard  $\Delta_r S^0$  en fonction de la température.

Dans le cadre de cette approximation,  $\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r S^0$  peuvent être calculés à la température  $T_0 = 298$  K pour laquelle les valeurs numériques des enthalpies *standard* de formation  $\Delta_f H^0$  et des entropies molaires *standard*  $S^0$  sont connues :

$$\Delta_r H^0 = \beta \Delta_f H^0 (M_p O_q) - \alpha \Delta_f H^0 (M) \text{ car } \Delta_f H^0 [O_{2(\text{gaz})}] = 0$$

et :

$$\Delta_r S^0 = \beta S^0 (M_p O_q) - \alpha S^0 (M) - S^0 (O_2)$$

On admettra, par la suite, que l'approximation d'Ellingham sera justifiée dans tout le domaine de température étudié. Il s'ensuit que :

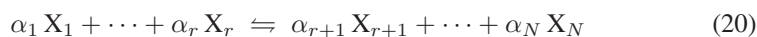
$$\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0 \quad (19)$$

Le diagramme d'Ellingham consiste à représenter, pour un ou plusieurs systèmes M/M<sub>p</sub>O<sub>q</sub>, la courbe  $\Delta_r G^0(T)$ .

Remarque – En l'absence de changement d'état, l'expression (19) montre que la courbe tracée dans le diagramme d'Ellingham est un segment de droite, que certains énoncés appellent « droite d'Ellingham ».

#### 8.1.4.2 Cas du changement d'état

Considérons une réaction chimique d'équation-bilan :



dont l'une des espèces ( $X_j$  par exemple) subit un changement d'état à la température  $T_{12}$  :



Ce changement d'état est caractérisé par sa chaleur latente molaire :

$$L_{12} = \Delta_{12} H^0 = \Delta_f H^0 [X_j^{(2)}] - \Delta_f H^0 [X_j^{(1)}]$$

Ce faisant :

- lorsque  $T < T_{12}$ ,  $X_j$  se présente dans la phase (1), auquel cas l'enthalpie libre *standard* associée à la réaction d'équation (20) vaut :

$$\Delta_r G_1^0(T) = \Delta_r G^0(T < T_{12}) = \Delta_r H_1^0 - T \times \Delta_r S_1^0$$

où :

$$\Delta_r H_1^0 = \sum_{i \neq j}^N \nu_i \Delta_f H^0 [X_i] + \nu_j \Delta_f H^0 [X_j^{(1)}]$$

et :

$$\Delta_r S_1^0 = \sum_{i \neq j}^N \nu_i S^0 [X_i] + \nu_j S^0 [X_j^{(1)}]$$

- lorsque  $T > T_{12}$ , l'espèce  $X_j$  étant sous la forme  $X_j^{(2)}$ , l'équation (20) a pour enthalpie *standard* :

$$\Delta_r G_2^0(T) = \Delta_r G^0(T > T_{12}) = \Delta_r H_2^0 - T \times \Delta_r S_2^0$$

avec :

$$\Delta_r H_2^0 = \sum_{i \neq j}^N \nu_i \Delta_f H^0 [X_i] + \nu_j \Delta_f H^0 [X_j^{(2)}]$$

et :

$$\Delta_r S_2^0 = \sum_{i \neq j}^N \nu_i S^0 [X_i] + \nu_j S^0 [X_j^{(2)}]$$

Les expressions de  $\Delta_r H_2^0$ ,  $\Delta_r H_1^0$  et  $L_{12}$  montrent que :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_2^0 - \Delta_r H_1^0 &= \nu_j \times \left\{ \Delta_f H^0 [X_j^{(2)}] - \Delta_f H^0 [X_j^{(1)}] \right\} = \nu_j \times L_{12} \\ &\Rightarrow \Delta_r H_2^0 = \Delta_r H_1^0 + \nu_j L_{12} \quad (22) \end{aligned}$$

tandis que l'entropie *standard* de la réaction (21) vaut

$$\Delta_{12} S^0 = \frac{L_{12}}{T_{12}} = S^0 [X_j^{(2)}] - S^0 [X_j^{(1)}]$$

Ainsi :

$$\Delta_r S_2^0 - \Delta_r S_1^0 = \nu_j \times \left\{ S^0 [X_j^{(2)}] - S^0 [X_j^{(1)}] \right\} = \nu_j \frac{L_{12}}{T_{12}} \quad (23)$$

$$\Rightarrow \Delta_r S_2^0 = \Delta_r S_1^0 + \nu_j \frac{L_{12}}{T_{12}} \quad (24)$$

Ce faisant, l'expression de  $\Delta_r G_2^0 = \Delta_r H_2^0 - T \times \Delta_r S_2^0$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_2^0(T) &= (\Delta_r H_1^0 + \nu_j L_{12}) - T \times \left( \Delta_r S_1^0 + \nu_j \frac{L_{12}}{T_{12}} \right) \\ &= \underbrace{\Delta_r H_1^0 - T \times \Delta_r S_1^0}_{\Delta_r G_1^0(T)} + \nu_j L_{12} \times \left( 1 - \frac{T}{T_{12}} \right) \end{aligned}$$

Cette identité révèle la continuité de la fonction  $\Delta_r G^0(T)$  :

$$\lim_{T \rightarrow T_{12}} [\Delta_r G_2^0(T)] = \lim_{T \rightarrow T_{12}} [\Delta_r G_1^0(T)]$$

de sorte qu'un changement d'état se traduit, dans le diagramme d'Ellingham, par un changement de pente ( $\Delta_r S_1^0 \neq \Delta_r S_2^0$ ), la courbe demeurant continue.



On donne, pour le zinc, les grandeurs thermodynamiques suivantes :

- enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$ ) et entropies molaires *standard* ( $S^0$ ) à 298 K :

	Zn <sub>(sol)</sub>	ZnO <sub>(sol)</sub>	O <sub>2(gaz)</sub>
$\Delta_f H^0$ (en kJ · mol <sup>-1</sup> )	0	-350,5	0
$S^0$ (en J · K <sup>-1</sup> · mol <sup>-1</sup> )	41,6	43,7	205,2

- Température et chaleur latente de fusion de Zn :

$$T_{\text{fus}} = 693 \text{ K et } L_{\text{fus}} = 6,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- Température et chaleur latente de vaporisation du zinc :

$$T_{\text{vap}} = 1180 \text{ K et } L_{\text{vap}} = 114,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- Déterminer les expressions de l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G^0(T)$  de la réaction d'oxydation du zinc, pour  $T$  allant de 100 K à 2000 K.

On écrira les équations-bilan des réactions correspondantes.

- Vérifier, à l'aide des expressions ainsi trouvées, la continuité de la fonction  $\Delta_r G^0(T)$  aux températures  $T_{\text{fus}}$  et  $T_{\text{vap}}$ .

- Représenter le diagramme d'Ellingham du système ZnO/Zn.

#### RÉPONSE

- Dans la gamme de température envisagée, le zinc peut changer d'état, auquel cas il convient de distinguer trois cas :

- Pour  $100 \text{ K} \leq T < 693 \text{ K}$ , le zinc et son oxyde sont solides et participent à la réaction d'équation :



Dans le but de représenter le diagramme d'Ellingham, et sauf mention contraire explicite, il est impératif d'affecter à O<sub>2</sub> le coefficient stœchiométrique 1.

Ce faisant, l'enthalpie et l'entropie *standard* valent :

$$\Delta_r H_\alpha^0 = 2 \Delta_f H^0 [\text{ZnO}_{(\text{sol})}] - \Delta_f H^0 [\text{O}_2] - 2 \Delta_f H^0 [\text{Zn}_{(\text{sol})}] = -701 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta_r S_\alpha^0 &= 2 S^0 [\text{ZnO}_{(\text{sol})}] - S^0 [\text{O}_2] - 2 S^0 [\text{Zn}_{(\text{sol})}] \\ &= 2 \times 43,7 - 205,2 - 2 \times 41,6 = -201 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

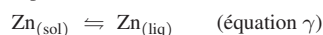
C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_\alpha^0(T) &= \Delta_r G^0(T < T_{\text{fus}}) = \Delta_r H_\alpha^0 - T \times \Delta_r S_\alpha^0 \\ &\Rightarrow \Delta_r G_\alpha^0(T) = -701.10^3 + 201 \times T \text{ (en J} \cdot \text{mol}^{-1}) \end{aligned}$$

- Pour  $693 \text{ K} < T < 1180 \text{ K}$  l'oxyde de zinc demeure solide, tandis que Zn se présente sous forme liquide ; la réaction d'oxydation du zinc a pour équation-bilan :



Soit ( $\gamma$ ) la réaction qui rend compte de la fusion du zinc à  $T_{\text{fus}}$  :

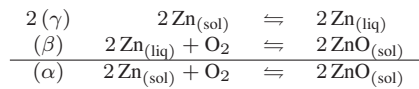


donc l'enthalpie *standard* s'identifie à  $L_{\text{fus}}$  et l'entropie *standard* vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_r S_\gamma^0 &= \frac{L_{\text{fus}}}{T_{\text{fus}}} = \frac{6,7.10^3}{693} = 9,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ &\Rightarrow \Delta_r G_\gamma^0(T) = 6,7.10^3 - 9,7 \times T \text{ (en J} \cdot \text{mol}^{-1}) \end{aligned}$$

Or, les équations ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ) sont linéairement dépendantes :





De ce fait :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_\alpha^0(T) &= 2 \Delta_r G_\gamma^0(T) + \Delta_r G_\beta^0(T) \Rightarrow \Delta_r G_\beta^0(T) = \Delta_r G_\alpha^0(T) - 2 \Delta_r G_\gamma^0(T) \\ &\Rightarrow \Delta_r G_\beta^0(T) = (-701.10^3 + 201 \times T) - 2 \times (6,7.10^3 - 9,7 \times T) \\ &\Rightarrow \Delta_r G_\beta^0(T) = -714,4.10^3 + 220,4 \times T \end{aligned}$$

Remarque – Il était possible d'accéder à ce résultat directement à l'aide des relations (22) et (24), dans lesquelles  $\nu_j = -2$  pour Zn :

$$\Delta_r H_\beta^0 = \Delta_r H_\alpha^0 - 2 L_{\text{fus}} = -701.10^3 - 2 \times 6,7.10^3 = -714,4.10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et :

$$\Delta_r S_\beta^0 = \Delta_r S_\alpha^0 - 2 \frac{L_{\text{fus}}}{T_{\text{fus}}} = -201 - 2 \times \frac{6,7.10^3}{693} = -220,3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

c'est-à-dire :

$$\Delta_r G_\beta^0(T) = \Delta_r H_\beta^0 - T \times \Delta_r S_\beta^0 = -714,4.10^3 + 220,3 \times T$$

- Pour  $1180 \text{ K} < T \leq 2000 \text{ K}$  le zinc, sous forme gazeuse, participe à l'équilibre :



Afin de déterminer les valeurs de l'enthalpie standard  $\Delta_r G_\delta^0$  et de l'entropie standard  $\Delta_r S_\delta^0$  de cet équilibre, il est possible d'utiliser directement les identités (22) et (24) :

$$\Delta_r H_\delta^0 = \Delta_r H_\beta^0 + \nu_i \times L_{\text{vap}} \text{ et } \Delta_r S_\delta^0 = \Delta_r S_\beta^0 + \nu_i \times \frac{L_{\text{vap}}}{T_{\text{vap}}}$$

où  $\nu_i = -2$  est le coefficient stœchiométrique de Zn dans les équations ( $\beta$ ) et ( $\delta$ ). Ce faisant :

$$\Delta_r H_\delta^0 = -714,4.10^3 - 2 \times 114,8.10^3 = -944.10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et :

$$\Delta_r S_\delta^0 = -220,3 - 2 \times \frac{114,8.10^3}{1180} = -414,9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\Delta_r G_\delta^0(T) = -944.10^3 + 414,9 \times T$$

- Le zinc subit des changements d'état à :

- $T_{\text{fus}} = 693 \text{ K}$ , avec :

$$\begin{cases} \Delta_r G_\alpha^0(T_{\text{fus}}) = -701.10^3 + 201 \times 693 = -561,7.10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r G_\beta^0(T_{\text{fus}}) = -714,4.10^3 + 220,3 \times 693 = -561,7.10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$$

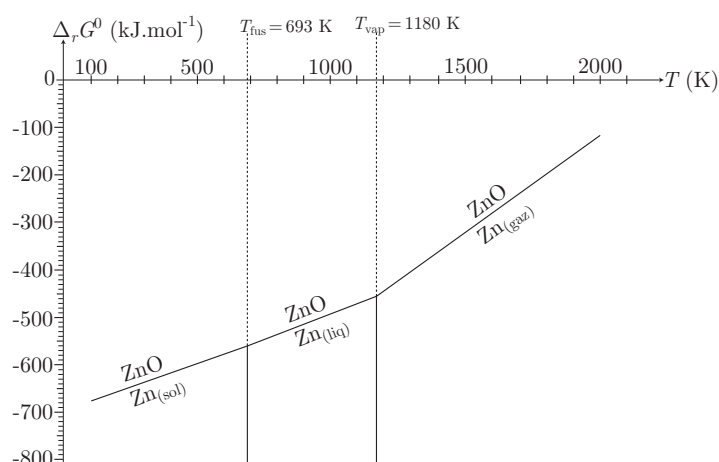
ce qui montre que la courbe  $\Delta_r G^0(T)$  est continue à la température  $T_{\text{fus}} = 693 \text{ K}$ .

- $T_{\text{vap}} = 1180 \text{ K}$ , avec :

$$\begin{cases} \Delta_r G_\beta^0(T_{\text{vap}}) = -714,4.10^3 + 220,3 \times 1180 = -454,4.10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r G_\delta^0(T_{\text{vap}}) = -944.10^3 + 414,9 \times 1180 = -454,4.10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$$

Ces résultats confirment bien la continuité de la fonction  $\Delta_r G^0(T)$  en  $T = T_{\text{vap}}$ .

- Les expressions obtenues pour  $\Delta_r G_\alpha^0(T)$ ,  $\Delta_r G_\beta^0(T)$  et  $\Delta_r G_\delta^0(T)$  conduisent au diagramme d'Ellingham suivant pour le zinc :



### 8.1.4.3 Interprétation du diagramme

Afin de simplifier les notations, nous conviendrons d'écrire  $M$  un métal et  $MO$  son oxyde, de sorte que l'équation-bilan (18) s'écrit :



Précisons également ce qui est représenté dans le diagramme d'Ellingham d'un système  $M/MO$ . Pour cela, notons  $Q$  le quotient de réaction associé à l'équation (25) et  $\mathcal{R}$  le rapport :  $\mathcal{R} = \frac{P_{O_2}}{P_0}$  de la pression partielle en dioxygène (en bar) par la pression standard  $P_0 = 1$  bar.

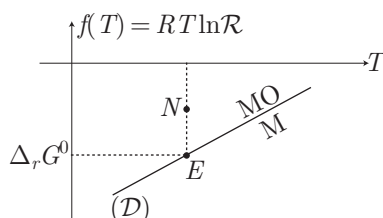
- Si  $M$  et  $MO$  sont des phases condensées (liquides ou solides) :

$$Q = \frac{P_0}{P_{O_2}} = \frac{1}{\mathcal{R}}$$

de sorte qu'à l'équilibre,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(E)$ , avec :

$$\Delta_r G^0(T) = -RT \ln Q = RT \ln [\mathcal{R}(E)]$$

Ce faisant, la courbe  $(D)$  qui représente  $\Delta_r G^0(T)$  est aussi la représentation graphique de la fonction  $RT \ln \mathcal{R}$  lorsque l'équilibre est atteint. C'est pourquoi on considérera désormais que le diagramme d'Ellingham d'un système  $M/MO$  est une représentation de  $f(T) = RT \ln \mathcal{R}$  en fonction de  $T$  :



Soit  $N$  un point extérieur à  $(D)$ , pour lequel le système chimique décrit par l'équation (25) a pour affinité chimique :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}^0 - RT \ln Q = -\Delta_r G^0(T) + RT \ln [\mathcal{R}(N)] \\ &= RT \ln [\mathcal{R}(N)] - RT \ln [\mathcal{R}(E)] \end{aligned}$$

où  $\mathcal{R}(N)$  désigne la valeur de  $\mathcal{R}$  en  $N$ . Plusieurs cas peuvent alors se présenter :

- si  $N$  se trouve au dessus de  $E$ ,  $\mathcal{A} > 0$  montre que la réaction (25) est totalement déplacée dans le sens (1) :

le domaine situé au dessus de  $(D)$  correspond au domaine d'existence exclusive de l'oxyde MO.

Remarque – Il ne s'agit pas d'un domaine de prédominance de MO car, tant que l'affinité chimique  $\mathcal{A}$  est positive, la réaction est déplacée dans le sens (1) jusqu'à la disparition de M.

- si  $N$  est situé en dessous de  $E$ ,  $\mathcal{A} < 0$  montre que l'équilibre est déplacé dans le sens (2) de formation de M, jusqu'à disparition complète de MO, ce qui signifie aussi que :

tous les points situés en dessous de  $(D)$  se trouvent dans un domaine d'existence exclusive de M.

- pour tout point  $E$  qui appartient à  $(D)$ ,  $\mathcal{A} = 0$  signifie que l'équilibre (25) est établi :

les points de la courbe  $\Delta_r G^0(T)$  décrivent un équilibre entre M et son oxyde MO.

• **Si M ou MO sont des gaz**

Ce cas se rencontre, notamment, pour le système C/CO :



En notant  $P_{CO}$  la pression partielle de CO et  $\Delta_r G^0(T)$  l'enthalpie libre standard de la réaction (26), l'affinité chimique du système C/CO vaut :

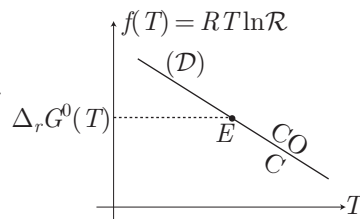
$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \mathcal{A}^0 - RT \ln Q = -\Delta_r G^0 - RT \ln Q \\ \text{où } Q &= \left( \frac{P_{CO}}{P_0} \right)^2 \times \left( \frac{P_0}{P_{O_2}} \right) = \frac{1}{\mathcal{R}} \times \left( \frac{P_{CO}}{P_0} \right)^2 \end{aligned}$$

soit encore :

$$\mathcal{A} = -\Delta_r G^0 + RT \ln \mathcal{R} - 2RT \ln \left( \frac{P_{CO}}{P_0} \right)$$

Pour qu'un point  $E$  du segment de droite  $(D)$ , d'équation  $\Delta_r G^0(T)$ , soit représentatif de l'équilibre, il faut s'assurer que  $\mathcal{A}$  s'anule lorsque :

$$\Delta_r G^0(T) = RT \ln \mathcal{R}(E)$$



Ainsi, pour conserver au diagramme d'Ellingham une signification sans équivoque, on admettra que  $P_{CO} = P_0 = 1$  bar :

Au dessus de  $(\mathcal{D})$  se trouve le domaine de prédominance de CO, tandis que celui de C est situé en dessous de  $(\mathcal{D})$ .

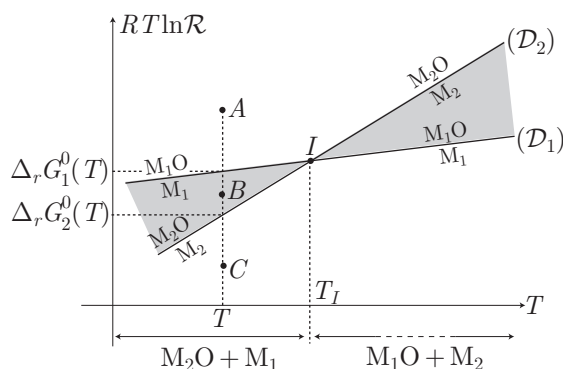
Remarque – Il s'agit ici de domaines de prédominance et non de domaines d'existence exclusive car, conformément à l'expression de  $\mathcal{A}$ , la pression partielle  $P_{\text{CO}}$  peut s'ajuster de manière à ce que  $\mathcal{A}$  soit nul ailleurs que sur  $(\mathcal{D})$ ; il n'y a pas disparition totale de C ou de CO.

#### 8.1.4.4 Application du diagramme

Considérons deux systèmes  $M_1/M_1\text{O}$  et  $M_2/M_2\text{O}$  :

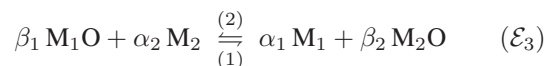


dont les enthalpies libres *standard*  $\Delta_r G_1^0(T)$  et  $\Delta_r G_2^0(T)$  sont représentées dans un même diagramme d'Ellingham :



Soit  $I$  le point d'intersection des courbes  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  (cf. diagramme ci-dessus) qui représentent des états équilibres chimiques. Plaçons-nous, dans un premier temps, à une température  $T < T_I$ , pour laquelle  $\mathcal{D}_1$  se trouve au dessus de  $\mathcal{D}_2$ . Nous pouvons ainsi distinguer trois domaines :

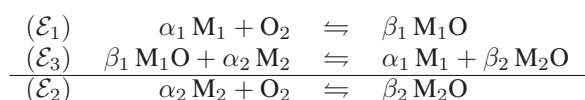
- au dessus de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  (point  $A$ ), seuls les oxydes  $M_1\text{O}$  et  $M_2\text{O}$  peuvent coexister ;
- en dessous de  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , les métaux  $M_1$  et  $M_2$  sont les seules espèces stables ;
- entre  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$  (point  $B$ ), ce diagramme montre que les espèces  $M_1$  et  $M_2\text{O}$  peuvent coexister de manière stable. Envisageons, par exemple, une réaction d'équation :



d'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G_3^0(T)$  et d'affinité chimique :

$$\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}^0(T) - RT \ln Q = -\Delta_r G_3^0(T) \text{ car } Q = 1$$

Or, les équations  $(\mathcal{E}_1)$ ,  $(\mathcal{E}_2)$  et  $(\mathcal{E}_3)$  sont linéairement dépendantes :



Aussi, de l'identité :  $(\mathcal{E}_2) = (\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_3)$  découle la relation :

$$\Delta_r G_2^0(T) = \Delta_r G_1^0(T) + \Delta_r G_3^0(T) \Rightarrow \mathcal{A}(T) = \Delta_r G_1^0(T) - \Delta_r G_2^0(T)$$

Le diagramme d'Ellingham révèle alors que :

$$\text{pour } T < T_I, \Delta_r G_1^0(T) > \Delta_r G_2^0(T) \Rightarrow \mathcal{A}(T) > 0$$

ce qui signifie aussi que la réaction  $(\mathcal{E}_3)$  est totalement déplacée dans le sens (1) de formation de  $M_1$  et de  $M_1O$ .

Évidemment, les conclusions s'inversent pour  $T > T_I$ , puisque  $\Delta_r G_1^0(T)$  devient inférieur à  $\Delta_r G_2^0(T)$  :  $\mathcal{A}(T) < 0$  montre que la réaction  $(\mathcal{E}_3)$  est déplacée dans le sens (2) de formation de  $M_1O$  et de  $M_2$ .

En conclusion :

- Pour que deux espèces coexistent de manière stable, il faut que leurs domaines d'existence (ou de prédominance) aient une intersection non vide.
- Deux espèces réagissent l'une avec l'autre si leurs domaines d'existence (ou de prédominance) sont disjoints.

Remarque – Conformément à la signification des courbes  $\mathcal{D}_1$  et  $\mathcal{D}_2$ , le point  $I$  correspond à un état d'équilibre dans lequel  $M_1$ ,  $M_1O$ ,  $M_2$  et  $M_2O$  coexistent de manière stable.



On donne, pour le carbone, ses oxydes et l'oxygène, l'enthalpie *standard* de formation  $\Delta_f H^0$  et l'entropie molaire *standard*  $S^0$  à 298 K :

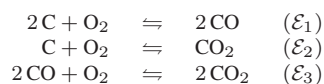
	$C_{(sol)}$	$O_{2(gaz)}$	$CO_{(gaz)}$	$CO_{2(gaz)}$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	0	0	-110,5	-393,5
$S^0$ (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	5,7	205	197,6	213,6

1. Écrire les équations d'oxydation du carbone en CO puis en  $CO_2$ , rapportées à une mole de dioxygène, ainsi que l'équation d'oxydation de CO en  $CO_2$  (avec la même contrainte).
2. Déterminer les expressions  $\Delta_r G_1^0(T)$ ,  $\Delta_r G_2^0(T)$  et  $\Delta_r G_3^0(T)$  des enthalpies libres *standard* des trois réactions précédentes.
3. Tracer ces trois courbes dans un diagramme d'Ellingham pour  $T \in [0 ; 2000 \text{ K}]$  et calculer la valeur  $T_i$  de la température  $T$  au point d'intersection  $I$  des trois courbes.
4. En utilisant ce diagramme, déterminer les domaines de prédominance de C, CO,  $CO_2$  en distinguant les cas  $T > T_i$  et  $T < T_i$ .  
Représenter alors le diagramme en y faisant figurer les domaines de prédominance de C, CO et  $CO_2$ .
5. Quel doit être le rapport des pressions partielles  $\frac{P_{O_2}}{P_{CO_2}}$  qui assure la stabilité du carbone C, à la température ordinaire  $T = 298 \text{ K}$  ?

On prendra  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  comme valeur numérique de la constante molaire des gaz parfaits.

## RÉPONSE

1. Les réactions d'oxydation mentionnées par l'énoncé sont décrites par les équations-bilan :



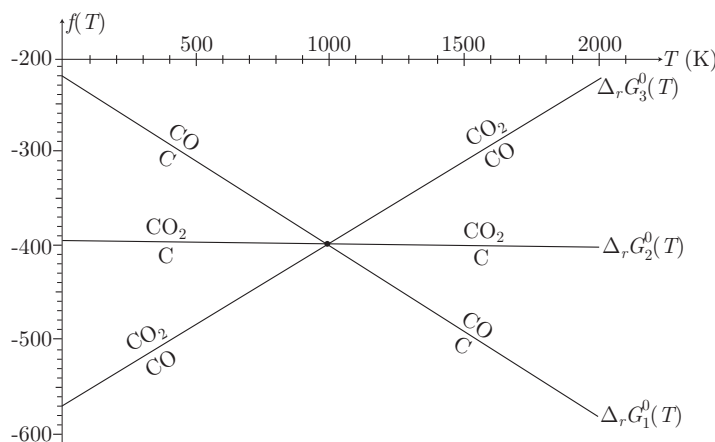
2. Les données numériques relatives à C, CO et CO<sub>2</sub> permettent le calcul de l'enthalpie *standard* et l'entropie *standard* de chacune des équations ( $\mathcal{E}_i$ ) :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^0 &= 2 \Delta_f H^0(\text{CO}) - 2 \Delta_f H^0(\text{C}) - \Delta_f H^0(\text{O}_2) = -2 \times 110,5 \cdot 10^3 = -221 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S_1^0 &= 2 S^0(\text{CO}) - 2 S^0(\text{C}) - S^0(\text{O}_2) = 2 \times 197,6 - 2 \times 5,7 - 205 = 178,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r H_2^0 &= \Delta_f H^0(\text{CO}_2) - \Delta_f H^0(\text{C}) - \Delta_f H^0(\text{O}_2) = -393,5 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S_2^0 &= S^0(\text{CO}_2) - S^0(\text{C}) - S^0(\text{O}_2) = 213,6 - 5,7 - 205 = 2,9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r H_3^0 &= 2 \Delta_f H^0(\text{CO}_2) - 2 \Delta_f H^0(\text{CO}) - \Delta_f H^0(\text{O}_2) \\ &= -2 \times 393,5 \cdot 10^3 + 2 \times 110,5 \cdot 10^3 = -566 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S_3^0 &= 2 S^0(\text{CO}_2) - 2 S^0(\text{CO}) - S^0(\text{O}_2) = 2 \times 213,6 - 2 \times 197,6 - 205 \\ &= -173 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} \Delta_r G_1^0(T) = -221 \cdot 10^3 - 178,8 \times T \\ \Delta_r G_2^0(T) = -393,5 \cdot 10^3 - 2,9 \times T \\ \Delta_r G_3^0(T) = -566 \cdot 10^3 + 173 \times T \end{cases}$$

3. Dans un diagramme d'Ellingham, où l'on porte  $RT \ln \left( \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} \right) = f(T)$  en ordonnées, les courbes  $\Delta_r G_1^0(T)$ ,  $\Delta_r G_2^0(T)$  et  $\Delta_r G_3^0(T)$  caractérisent les équilibres ( $\mathcal{E}_1$ ), ( $\mathcal{E}_2$ ) et ( $\mathcal{E}_3$ ) à condition que les pressions partielles  $P_{\text{CO}}$  et  $P_{\text{CO}_2}$  valent 1 bar.



Les segments de droite d'équation  $\Delta_r G_1^0(T)$  et  $\Delta_r G_2^0(T)$  se coupent en un point  $I$ , dont l'abscisse vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_1^0(T_i) = \Delta_r G_2^0(T_i) &\Rightarrow -221 \cdot 10^3 - 178,8 \times T_i = -393,5 \cdot 10^3 - 2,9 \times T_i \\ &\Rightarrow T_i = \frac{393,5 \cdot 10^3 - 221 \cdot 10^3}{178,8 - 2,9} = 980,7 \text{ K} \end{aligned}$$

En remarquant que :

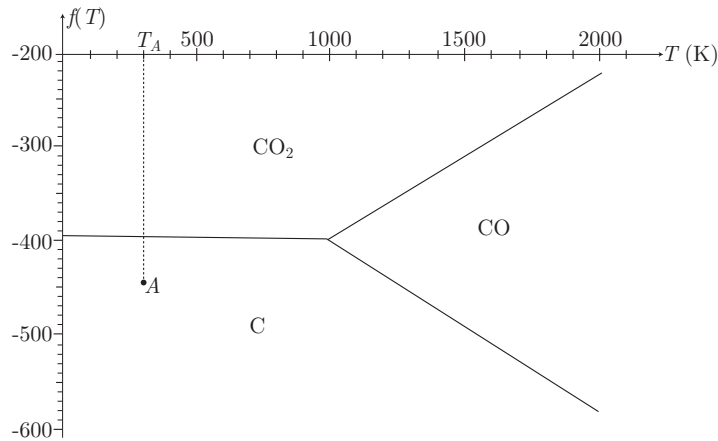
$$\Delta_r G_1^0(T_i) = \Delta_r G_2^0(T_i) = \Delta_r G_3^0(T_i) = -396,3 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

on prouve alors que  $I$  est le point d'intersection commun aux trois courbes  $\Delta_r G_1^0(T)$ ,  $\Delta_r G_2^0(T)$  et  $\Delta_r G_3^0(T)$ .

4. Le diagramme d'Ellingham précédent montre que :

- pour  $T < T_i$ , le monoxyde de carbone CO présente deux domaines de prédominance disjoints ; il n'est pas stable, si bien que seul l'équilibre entre C et CO<sub>2</sub>, décrit par  $\Delta_r G_2^0(T)$  peut être envisagé ;
- pour  $T > T_i$ , les courbes  $\Delta_r G_3^0(T)$  et  $\Delta_r G_1^0(T)$  délimitent les domaines de prédominance de C, CO et CO<sub>2</sub>, qui sont confirmés par la courbe  $\Delta_r G_2^0(T)$ .

Ce faisant, le diagramme d'Ellingham du carbone présente l'allure simplifiée suivante :



5. À la température  $T_A = 298$  K, l'ensemble des points A qui correspondent à la stabilité de C se trouvent en dessous de la courbe  $\Delta_r G_2^0(T)$  :

$$\begin{aligned} f(T_A) \leq \Delta_r G_2^0(T_A) &\Rightarrow RT_A \ln \left( \frac{P_{O_2}}{P_0} \right) \leq -393,5 \cdot 10^3 - 2,9 \times T_A \\ &\Rightarrow \ln \left( \frac{P_{O_2}}{P_0} \right) \leq \frac{-393,5 \cdot 10^3 - 2,9 \times 298}{8,314 \times 298} \\ &\Rightarrow P_{O_2} \leq P_0 \exp(-159,2) = 7 \cdot 10^{-70} \text{ Pa} \end{aligned}$$

Une telle valeur montre que à la température ordinaire de 298 K, le carbone n'est pas stable en présence de dioxygène (à condition toutefois de considérer que  $P_{CO_2} = 1$  bar) ; le carbone brûle dans l'air !

## 8.2 Cinétique de l'oxydo-réduction

### 8.2.1 Présentation des courbes intensité-potentiel

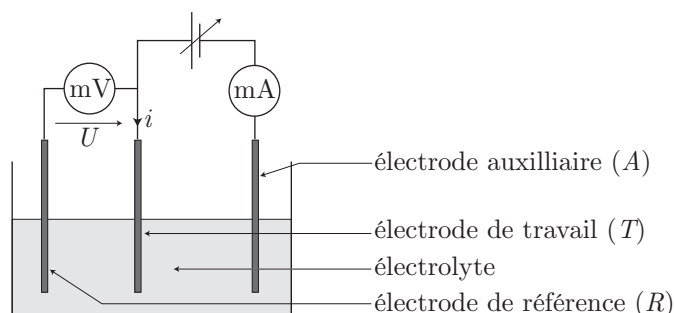
#### 8.2.1.1 Montage expérimental

Nous verrons, dans la prochaine section (page 1269) pourquoi l'intensité  $i$  du courant qui arrive à une électrode est proportionnelle à la vitesse de la réaction électrochimique impliquant le couple Ox/Red :



Afin d'étudier l'intensité  $i$  du courant<sup>1</sup> qui arrive à une électrode, on réalise le montage suivant à trois électrodes :

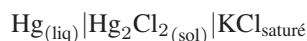
<sup>1</sup>Par convention,  $i$  sera compté positivement lorsque le courant électrique arrive à l'électrode de travail (qui est alors une anode) et négativement dans le cas contraire (l'électrode de travail est alors une cathode).



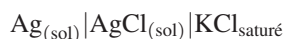
Ce montage comporte :

- une **électrode de référence**, dont le potentiel  $E_{\text{réf}}$  est fixé par sa constitution ; dans la pratique, il peut s'agir :

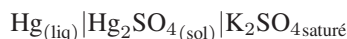
- d'une électrode au calomel, saturée (ECS), pour laquelle  $E_{\text{réf}} \simeq 0,24 \text{ V}$  :



- d'une électrode au chlorure d'argent, pour laquelle  $E_{\text{réf}} \simeq 0,20 \text{ V}$  :



- d'une électrode au sulfate mercurique ( $E_{\text{réf}} \simeq 0,64 \text{ V}$ ), au cas où l'électrolyte contiendrait des ions susceptibles de réagir avec les ions chlorure des deux électrodes précédentes :



- une **électrode de travail** dont le potentiel  $E$  se mesure à l'aide d'un millivoltmètre :

$$U = E - E_{\text{réf}} \Rightarrow E = U + E_{\text{réf}}$$

La valeur de  $E$  impose une valeur de  $i$ , dont on représente graphiquement la dépendance en fonction de  $E$ .

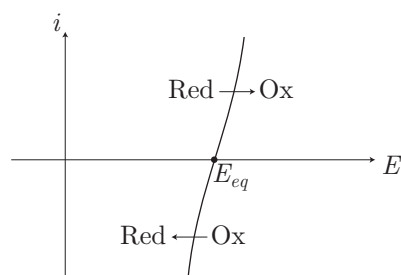
*Remarque – L'impédance du millivoltmètre est choisie assez grande de manière à négliger légitimement le courant qui le traverse ; cette contrainte assure d'une part que le milliampèremètre mesure une intensité très voisine de  $i$  et permet, d'autre part, de s'affanchir de toute d.d.p. ohmique consécutive à un passage de courant entre les électrodes (T) et (R) ; la tension ainsi mesurée représente la force contre-électromotrice de la cellule.*

- d'une source de tension, qui fixe la valeur de  $E$  ;
- d'une électrode auxiliaire (ou *contre-électrode*) qui assure le passage du courant dans l'électrolyte.

### 8.2.1.2 En l'absence de diffusion

La courbe intensité-potential ( $i - E$ ) présente l'allure suivante :





On montrera, dans la suite, que la valeur  $E = E_{eq}$  qui annule  $i$  est celle prévue par la loi de Nernst :

$$E_{eq} = E^0(\text{Ox/Red}) + \frac{RT \ln 10}{n\mathcal{F}} \log \left( \frac{[\text{Ox}]}{[\text{Red}]} \right)$$

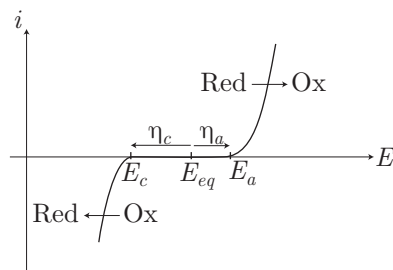
**Remarque** – Ox se trouve à droite de la courbe  $i-E$  car les valeurs de  $E$  supérieures à  $E_{eq}$  définissent le domaine de prédominance de Ox.

**Définition 4** On appelle surtension la différence :

$$\eta = E - E_{eq}$$

Dans le cas de systèmes rapides, on constate que  $i$  prend une valeur appréciable dès que  $E \neq E_{eq}$ . Or, puisque  $i$  est proportionnel à la vitesse  $v$  de la réaction (27), une telle observation révèle que cette réaction se produit rapidement dès que  $\eta \neq 0$ .

En revanche, la courbe intensité-potentiel d'un système lent présente un intervalle  $E \in [E_a, E_c]$  dans lequel l'intensité  $i$  du courant est négligeable :



De ce fait, il n'est pas possible de déterminer, expérimentalement, la valeur  $E_{eq}$  de  $E$  pour laquelle  $i = 0$ . Dans un tel diagramme apparaissent :

- une *surtension anodique* :

$$\eta_a = E_a - E_{eq} \Rightarrow E_a = E_{eq} + \eta_a \text{ avec } \eta_a > 0$$

au dessus de laquelle ( $E \geq E_a$ )  $i$  devient positif et mesurable ;

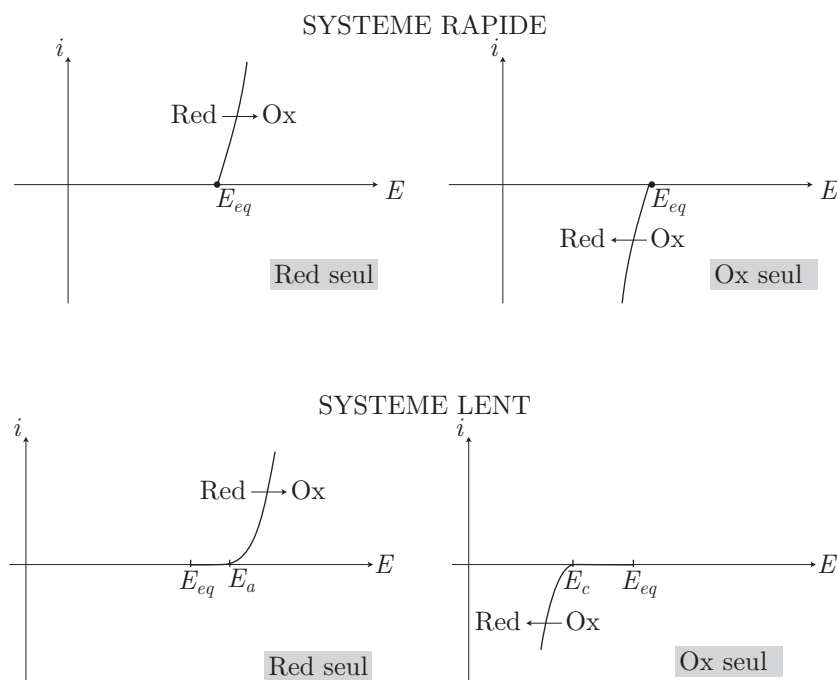
- une *surtension cathodique*  $\eta_c < 0$  :

$$\eta_c = E_c - E_{eq} \Rightarrow E_c = E_{eq} + \eta_c$$

en dessous de laquelle  $i$  devient négatif et mesurable.

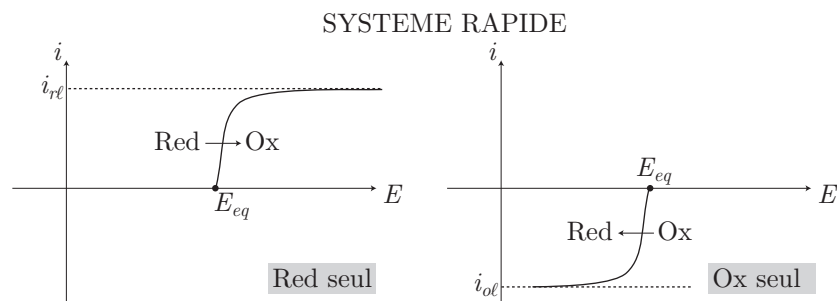
Remarque – Dans de nombreux exercices, on confondra  $E_{eq}$  avec le potentiel standard  $E^0$  du couple Ox/Red.

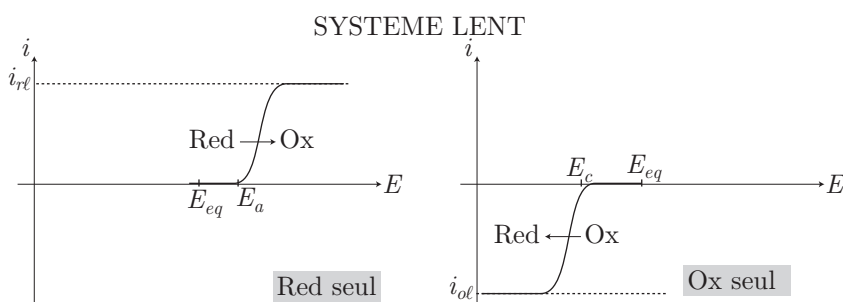
Parfois, le milieu réactionnel ne contient que l'une des espèces Ox ou Red (par exemple lorsque l'une des entités est gazeuse), auquel cas les courbes  $i - E$  prennent les allures suivantes :



### 8.2.1.3 Phénomènes de diffusion

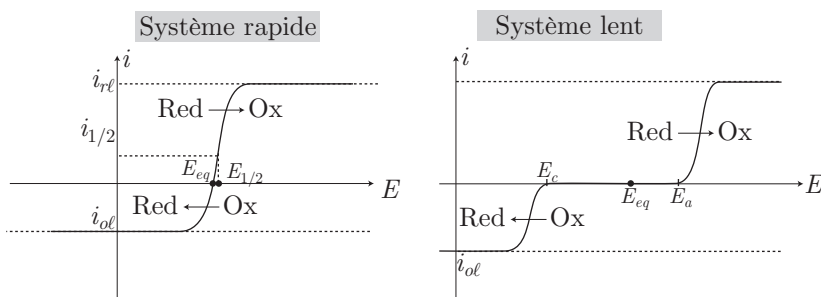
La vitesse d'une réaction qui se produit à une électrode est souvent limitée par la vitesse à laquelle les espèces dissoutes dans l'électrolyte peuvent atteindre l'électrode. Cette limitation se traduit alors par l'existence d'un palier pour le courant :





Les amplitudes de ces paliers :  $|i_{rl}| = i_{rl}$  et  $|i_{ol}| = -i_{ol}$  sont proportionnelles aux concentrations respectives de Red ou de Ox dans la solution.

Lorsque les espèces Ox et Red sont simultanément présentes en solution, les courbes intensité-potential présentent les allures suivante :



**Définition 5** On appelle potentiel de demi-vague le potentiel  $E_{1/2}$  pour lequel l'intensité du courant prend la valeur :

$$i_{1/2} = \frac{i_{rl} + i_{ol}}{2} = \frac{|i_{rl}| - |i_{ol}|}{2} \Rightarrow E = E_{1/2}$$

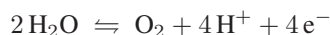
Lorsque les espèces Ox et Red diffusent, dans l'électrolyte, de manières comparables, on montre (voir page 1277) que :

$$E_{1/2} = E^0 (\text{Ox/Red})$$

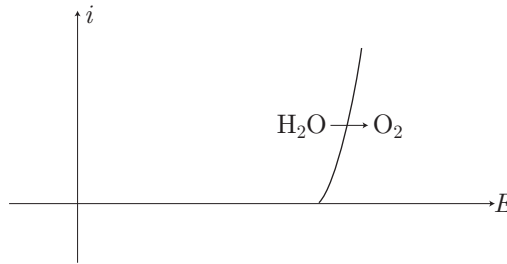
### 8.2.1.4 Cas du solvant ou de l'électrode

Les phénomènes de diffusion ne concernent évidemment pas les solvants ou les électrodes, dont les courbes intensité-potential ne sont alors pas limitées par un palier de courant. En deuxième année de classe préparatoire, seules les solutions aqueuses sont étudiées, c'est-à-dire l'eau qui, comme solvant, apparaît comme :

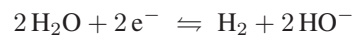
- le réducteur du couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  :



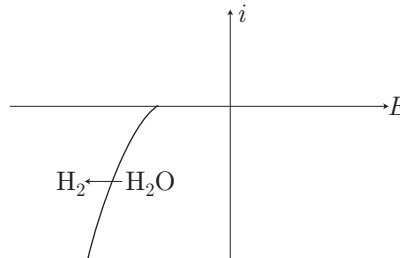
Aussi, sans préjuger de la rapidité du système dont le réducteur est l'eau, les diagrammes intensité-potential seront toujours limités, en milieu aqueux, par la courbe suivante :



- l'oxydant du couple  $\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2$  :



À nouveau, en l'absence d'information concernant la rapidité du système dont  $\text{H}_2\text{O}$  est l'oxydant, les diagrammes intensité-potentiel seront toujours limités, en milieu aqueux, par la courbe suivante :

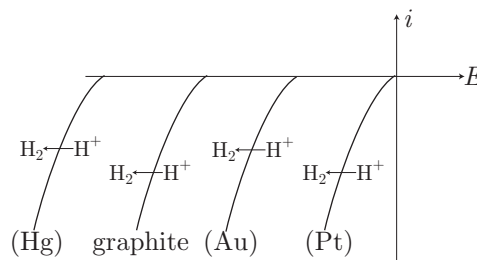


Remarque – Les courbes précédentes sont tracées en ne considérant que les branches anodique ou cathodique séparément ; l'état gazeux de  $\text{O}_2$  et de  $\text{H}_2$  justifie cette représentation.

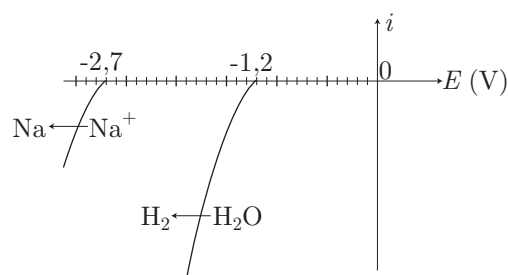
### 8.2.1.5 Facteurs influençant la cinétique électrochimique

La nature rapide ou lente d'un système redox dépend essentiellement :

- de l'électrode utilisée. Par exemple, la courbe intensité-potentiel du couple  $\text{H}^+/\text{H}_2$  présente une surtension cathodique  $\eta_c$  qui croît du platine ( $\eta_c \simeq 0$ ) au mercure ( $\eta_c \simeq -2 \text{ V}$ ) :



- du couple redox composant le système. Par exemple, sur une électrode de fer, les couples  $\text{H}_2/\text{H}_2\text{O}$  et  $\text{Na}^+/\text{Na}$  présentent des surtensions cathodiques respectives  $\eta_a = -1,2 \text{ V}$  et  $\eta'_c = -2,7 \text{ V}$  :

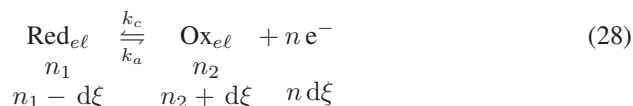


- de l'état de surface des électrodes, dont on cherche à éliminer les impuretés (par oxydation vigoureuse) ainsi que les substances éventuellement adsorbées (par polissage).

## 8.2.2 Intensité et vitesse de réaction

### 8.2.2.1 Réaction à l'électrode

Considérons une électrode, à laquelle arrive un courant d'intensité  $i$ , à laquelle correspond un nombre  $\delta n_e$  de moles d'électrons pendant  $dt$  :  $i = \mathcal{F} \frac{\delta n_e}{dt}$ , où le Faraday  $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$  représente la charge (en valeur absolue) portée par une mole d'électrons. En notant  $\text{Red}_{el}$  et  $\text{Ox}_{el}$  les espèces réductrice et oxydante d'un couple redox  $\text{Ox}/\text{Red}$ , qui atteignent l'électrode, le flux d'électrons observé provient de la réaction électrochimique d'équation-bilan :



La vitesse  $v$  de cette réaction sera supposée vérifier le critère de Van't Hoff :

$$v = k_a [\text{Red}]_{el} - k_c [\text{Ox}]_{el} \quad (29)$$

où  $[\text{Red}]_{el}$  et  $[\text{Ox}]_{el}$  sont les concentrations des espèces Red et Ox au voisinage de l'électrode.

**Définition 6** La réaction chimique, d'avancement  $\xi$ , qui se produit à une électrode de surface  $S$ , présente une vitesse :

$$v = \frac{1}{S} \frac{d\xi}{dt}$$

De fait, pendant la période  $dt$ , la réaction électrochimique libère un nombre  $\delta n_e = n d\xi$  de moles d'électrons, auquel cas la vitesse de cette réaction vérifie :

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{S} \frac{d\xi}{dt} \text{ avec } d\xi = \frac{1}{n} \delta n_e = \frac{1}{n\mathcal{F}} i dt \\ \Rightarrow v &= \frac{1}{n\mathcal{F}S} i \Rightarrow i = n\mathcal{F}S \times v \end{aligned}$$

Cette relation montre que l'intensité  $i$  du courant reçu par l'électrode est proportionnelle à la vitesse de la réaction (28).

En outre, la relation (29) révèle que :

$$i = n\mathcal{F}S \times (k_a [\text{Red}]_{el} - k_e [\text{Ox}]_{el}) \quad (30)$$

On rencontrera également, dans la littérature scientifique, cette expression sous la forme :

$$i = i_a - i_c \text{ avec } i_a = n\mathcal{F}S k_a [\text{Red}]_{el} \text{ et } i_c = n\mathcal{F}S k_c [\text{Ox}]_{el}$$

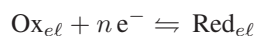
où  $i_a$  et  $i_c$  sont appelés *courant anodique* (qui arrive à l'électrode) et *courant cathodique* (celui qui en part).

Remarque – L'expression (30) définit aussi une densité de courant de charges  $j$ , telle que :

$$i = j \times S \text{ avec } j = n\mathcal{F} (k_a [\text{Red}]_{el} - k_c [\text{Ox}]_{el})$$

### 8.2.2.2 Relation de Butler-Volmer

Il a été établi, en thermodynamique de l'oxydo-réduction, que la réaction d'équation-bilan :



présentait une enthalpie libre  $\Delta_+G$  et une enthalpie libre *standard*  $\Delta_+G^0$ , liées au potentiel  $E$  de l'électrode et au potentiel *standard*  $E^0$  du couple Ox/Red :

$$\Delta_+G = -n\mathcal{F}E \text{ et } \Delta_+G^0 = -n\mathcal{F}E^0$$

Ce faisant, la réaction d'équation-bilan :



est aussi caractérisée par une enthalpie libre  $\Delta_rG$  et une enthalpie libre *standard*  $\Delta_rG^0$  telles que :

$$\Delta_rG = -\Delta_+G = n\mathcal{F}E \text{ et } \Delta_rG^0 = -\Delta_+G^0 = n\mathcal{F}E^0$$

Par suite, son quotient de réaction  $Q = \frac{a_{\text{Ox}}}{a_{\text{Red}}}$  vérifie :

$$\Delta_rG = \Delta_rG^0 + RT \ln Q \Rightarrow n\mathcal{F}E = n\mathcal{F}E^0 + RT \ln Q$$

Dans la suite, sauf mention contraire<sup>2</sup>, on supposera les espèces  $\text{Ox}_{el}$  et  $\text{Red}_{el}$  en solution aqueuse suffisamment diluée pour que l'on puisse poser :

$$Q = \frac{[\text{Ox}]_{el}}{[\text{Red}]_{el}} = \exp \left[ \frac{n\mathcal{F}}{RT} (E - E^0) \right] \quad (32)$$

En outre, les constantes cinétiques  $k_a$  et  $k_c$  sont supposées dépendre de  $E$ , de sorte que si  $E > E^0$ , la réaction (31) favorise l'apparition de  $\text{Ox}_{el}$ , tandis que si  $E < E^0$ , l'apparition de  $\text{Red}_{el}$  est favorisée :

$$k_a > k_c \text{ si } E > E^0 \text{ et } k_a < k_c \text{ si } E < E^0$$

<sup>2</sup>Les cas où l'oxydant ou le réducteur est le solvant ou l'électrode seront traités ultérieurement.

C'est pourquoi nous admettons qu'il existe des constantes positives  $k_0$ ,  $A$  et  $A'$  telles que :

$$k_a = k_0 \exp [A \times (E - E^0)] \text{ et } k_c = k_0 \exp [-A' \times (E - E^0)]$$

Or, lorsque l'équilibre (31) est atteint,  $[\text{Ox}]_{el}$ ,  $[\text{Red}]_{el}$  et  $E$  prennent des valeurs respectives  $[\text{Ox}]_{el}^{(eq)}$ ,  $[\text{Red}]_{el}^{(eq)}$  et  $E_{eq}$  telles que :

$$\begin{aligned} v = 0 &\Rightarrow k_a [\text{Red}]_{el}^{(eq)} - k_c [\text{Ox}]_{el}^{(eq)} = 0 \\ &\Rightarrow Q_{eq} = \frac{[\text{Ox}]_{el}^{(eq)}}{[\text{Red}]_{el}^{(eq)}} = \frac{k_a}{k_c} \\ &\Rightarrow Q_{eq} = \exp [(A + A') \times (E_{eq} - E^0)] \end{aligned}$$

Du reste, à l'équilibre, la relation (32) devient :

$$Q_{eq} = \exp \left[ \frac{n\mathcal{F}}{RT} \times (E_{eq} - E^0) \right] \Rightarrow A + A' = \frac{n\mathcal{F}}{RT}$$

Il existe donc un nombre  $\alpha$  positif (avec  $\alpha < 1$ ) permettant de poser :

$$A = \frac{\alpha n\mathcal{F}}{RT} \text{ et } A' = \frac{(1 - \alpha) n\mathcal{F}}{RT}$$

de manière à ce que :

$$k_a = k_0 \times \exp \left[ \frac{\alpha n\mathcal{F}}{RT} \times (E - E^0) \right] \text{ et } k_c = k_0 \times \exp \left[ \frac{(\alpha - 1) n\mathcal{F}}{RT} \times (E - E^0) \right]$$

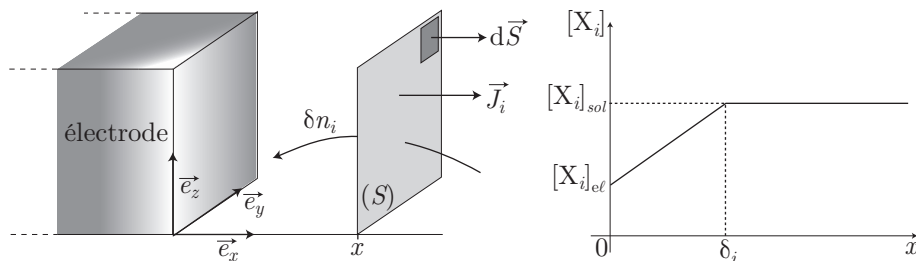
La relation de Butler-Volmer se déduit alors de la loi (30) :

$$i = n\mathcal{F}S k_0 \left\{ [\text{Red}]_{el} e^{\frac{\alpha n\mathcal{F}}{RT} (E - E^0)} - [\text{Ox}]_{el} e^{\frac{(\alpha - 1) n\mathcal{F}}{RT} (E - E^0)} \right\} \quad (33)$$

## 8.2.3 Phénomènes de diffusion

### 8.2.3.1 Densité de courant de matière

On supposera que les électrolytes  $X_i$  qui interviennent à l'électrode proviennent d'une solution dans laquelle leur concentration  $[X_i]_{sol}$  demeure constante. Cependant, leur concentration devient  $[X_i]_{el}$  au voisinage de l'électrode, supposée plane et de section  $S$ .



La migration de  $X_i$  dans la solution est alors décrite par un vecteur *densité de courant de particules*<sup>3</sup>  $\vec{J}_i = J_i(x) \vec{e}_x$ , lié au nombre  $\delta n_i$  de moles de particules qui traversent une surface  $S$  pendant  $dt$ , en se dirigeant vers l'électrode :

$$\frac{\delta n_i}{dt} = -J_i(x) \times S = - \iint_{(S)} \vec{J}_i \cdot d\vec{S}$$

En outre, la *loi de Fick* précise que :

$$J_i = -D_i \frac{\partial [X_i]}{\partial x} \quad (34)$$

où  $D_i$  est la diffusivité de  $X_i$  dans le milieu.

Quant à la conservation de l'espèce  $X_i$ , elle est décrite par l'équation :

$$\frac{\partial J_i}{\partial x} + \frac{\partial [X_i]}{\partial t} = 0 \Rightarrow -D_i \frac{\partial^2 [X_i]}{\partial x^2} + \frac{\partial [X_i]}{\partial t} = 0$$

Nous supposons enfin établi le régime stationnaire, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial [X_i]}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 [X_i]}{\partial x^2} = 0$$

en conséquence de quoi il existe des constantes  $\lambda$  et  $\mu$  telles que :

$$[X_i] = \lambda x + \mu$$

On admet classiquement que, pour  $x$  supérieur à une valeur  $\delta_i$ , la concentration de  $X_i$  prend la valeur  $[X_i]_{sol}$  (le domaine compris dans l'intervalle  $x_i \leq \delta_i$  est appelé *couche de diffusion*). Ces hypothèses fournissent des conditions aux limites :

$$x = 0 \Rightarrow [X_i] = [X_i]_{el} \Rightarrow \mu = [X_i]_{el} \Rightarrow [X_i] = \lambda x + [X_i]_{el}$$

et :

$$x = \delta_i \Rightarrow [X_i] = [X_i]_{sol} \Rightarrow [X_i]_{sol} = \lambda \delta_i + [X_i]_{el} \Rightarrow \lambda = \frac{[X_i]_{sol} - [X_i]_{el}}{\delta_i}$$

Il s'ensuit que :

$$[X_i] = \frac{[X_i]_{sol} - [X_i]_{el}}{\delta_i} \times x + [X_i]_{el}$$

L'expression (34) de la loi de Fick devient par conséquent :

$$J_i = D_i \frac{[X_i]_{el} - [X_i]_{sol}}{\delta_i} = \beta_i \times ([X_i]_{el} - [X_i]_{sol})$$

où  $\beta_i = \frac{D_i}{\delta_i}$  est une constante caractéristique de la diffusion de  $X_i$

<sup>3</sup>On veillera à ne pas confondre la densité de courant de particules  $J$  (en  $\text{mol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ) avec la densité de courant électrique  $j$  (en  $\text{C} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ).



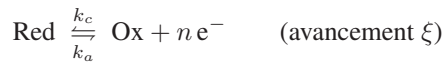
De cette étude, il découle que les espèces Ox et Red sont soumises, au voisinage de l'électrode, à des phénomènes de diffusion décrits par :

$$\begin{aligned} J_{\text{Ox}} &= -\frac{\delta n_{\text{Ox}}}{S dt} = \beta_{\text{Ox}} \times ([\text{Ox}]_{el} - [\text{Ox}]_{sol}) \\ J_{\text{Red}} &= -\frac{\delta n_{\text{Red}}}{S dt} = \beta_{\text{Red}} \times ([\text{Red}]_{el} - [\text{Red}]_{sol}) \end{aligned} \quad (35)$$

### 8.2.3.2 Étapes d'une réaction à une électrode

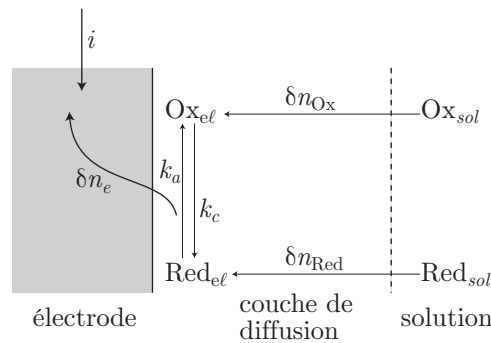
De ce qui précède, il ressort qu'au voisinage de l'électrode se produisent :

- la diffusion de Ox et Red, décrite par les relations (35) ;
- le transfert d'électrons, responsable du passage du courant électrique d'intensité  $i$  (compté positivement lorsque ce courant arrive à l'électrode). Ce phénomène est décrit par l'équation-bilan :



et fournit :

$$i = n\mathcal{F}S \times (k_a [\text{Red}]_{el} - k_c [\text{Ox}]_{el}) \quad \text{avec } i = n\mathcal{F} \frac{d\xi}{dt}$$



Ce faisant, les quantités  $n_{\text{Red}}$  et  $n_{\text{Ox}}$  de Red et de Ox à l'électrode varient, pendant  $dt$ , de :

$$dn_{\text{Red}} = \delta n_{\text{Red}} - d\xi \quad \text{et} \quad dn_{\text{Ox}} = \delta n_{\text{Ox}} + d\xi$$

Or, en régime stationnaire établi,  $dn_{\text{Red}}$  et  $dn_{\text{Ox}}$  sont nuls, de sorte que :

$$\frac{\delta n_{\text{Red}}}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \Rightarrow S \beta_{\text{Red}} ([\text{Red}]_{sol} - [\text{Red}]_{el}) = \frac{i}{n\mathcal{F}} \quad (36)$$

et :

$$\frac{\delta n_{\text{Ox}}}{dt} = -\frac{d\xi}{dt} \Rightarrow S \beta_{\text{Ox}} ([\text{Ox}]_{sol} - [\text{Ox}]_{el}) = -\frac{i}{n\mathcal{F}} \quad (37)$$

Un courant limite peut apparaître lorsque le soluté disparaît totalement à l'électrode, c'est-à-dire lorsque  $[\text{Red}]_{el} = 0$  ou  $[\text{Ox}]_{el} = 0$ . On notera ainsi  $i_{rl}$  et  $i_{ol}$  les valeurs limites correspondantes :

$$\frac{i_{rl}}{n\mathcal{F}} = S \beta_{\text{Red}} [\text{Red}]_{sol} \Rightarrow i_{rl} = n\mathcal{F}S \beta_{\text{Red}} [\text{Red}]_{sol} > 0 \quad (38)$$

tandis que :

$$-\frac{i_{ol}}{n\mathcal{F}} = S\beta_{\text{Ox}} [\text{Ox}]_{\text{sol}} \Rightarrow i_{ol} = -n\mathcal{F}S\beta_{\text{Ox}} [\text{Ox}]_{\text{sol}} < 0 \quad (39)$$

Compte tenu des signes de  $i_{rl}$  et  $i_{ol}$ , les équations (36) et (37), s'écrivent aussi :

$$\frac{i}{n\mathcal{F}} = \frac{|i_{rl}|}{n\mathcal{F}} - S\beta_{\text{Red}} [\text{Red}]_{el} \Rightarrow [\text{Red}]_{el} = \frac{|i_{rl}| - i}{n\mathcal{F}S\beta_{\text{Red}}}$$

et :

$$-\frac{i}{n\mathcal{F}} = \frac{|i_{ol}|}{n\mathcal{F}} - S\beta_{\text{Ox}} [\text{Ox}]_{el} \Rightarrow [\text{Ox}]_{el} = \frac{i + |i_{ol}|}{n\mathcal{F}S\beta_{\text{Ox}}}$$

Or, l'intensité  $i$  du courant qui arrive à l'électrode vérifie la loi (30), c'est-à-dire :

$$i = n\mathcal{F}S (k_a [\text{Red}]_{el} - k_c [\text{Ox}]_{el}) = \frac{k_a}{\beta_{\text{Red}}} (|i_{rl}| - i) - \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} (i + |i_{ol}|) \quad (40)$$

$$\Rightarrow i \times \left( 1 + \frac{k_a}{\beta_{\text{Red}}} + \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} \right) = \frac{k_a}{\beta_{\text{Red}}} |i_{rl}| - \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} |i_{ol}| \quad (41)$$

## 8.2.4 Courbes intensité-potentiel

La relation (41) montre que  $i$  dépend de  $E$  par l'intermédiaire des constantes cinétiques :

$$k_a = k_0 \times \exp \left[ \frac{\alpha n\mathcal{F}}{RT} (E - E^0) \right] \text{ et } k_c = k_0 \times \exp \left[ \frac{(\alpha - 1)n\mathcal{F}}{RT} (E - E^0) \right]$$

que l'on pourra simplement écrire :

$$\begin{cases} k_a = k_0 e^{\alpha\chi} \\ k_c = k_0 e^{(\alpha-1)\chi} \end{cases} \text{ avec } \chi = \frac{n\mathcal{F}}{RT} (E - E^0)$$

auquel cas, il apparaît que :

$$i = \frac{\frac{k_0}{\beta_{\text{Red}}} |i_{rl}| e^{\alpha\chi} - \frac{k_0}{\beta_{\text{Ox}}} |i_{ol}| e^{(\alpha-1)\chi}}{1 + \frac{k_0}{\beta_{\text{Red}}} e^{\alpha\chi} + \frac{k_0}{\beta_{\text{Ox}}} e^{(\alpha-1)\chi}} \quad (42)$$

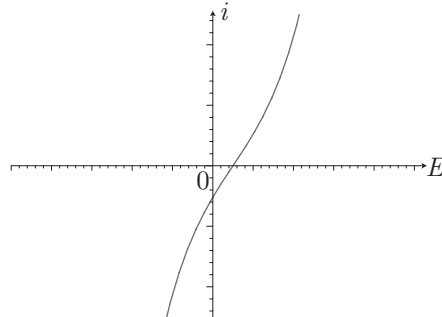
Nous examinerons, ci après, l'influence de la diffusion et de la vitesse de transfert de charge sur l'allure des courbes intensité-potentiel.

### 8.2.4.1 Limitation due au transfert de charge

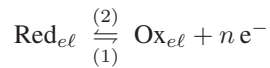
Supposons que la constante  $k_0$  soit très inférieure à  $\beta_{\text{Red}}$  et  $\beta_{\text{Ox}}$ , ce qui revient à négliger le phénomène de diffusion car, lorsque  $\beta_i = \frac{D_i}{\delta_i}$  devient très grand, cela signifie que la diffusion n'est pas un facteur limitant (soit parce que  $\delta_i$  est très petit : la couche de diffusion est négligeable, soit parce que la diffusivité  $D_i$  est très importante). Dans ces conditions, la relation (41) se simplifie :

$$1 + \frac{k_a}{\beta_{\text{Red}}} + \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} \simeq 1 \Rightarrow i \simeq \frac{k_a}{\beta_{\text{Red}}} |i_{rl}| - \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} |i_{ol}| \quad (43)$$

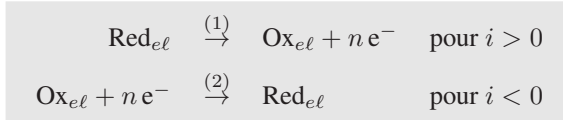
La représentation graphique de  $i(E)$ , obtenue en choisissant  $\alpha = 0,5$ ,  $E^0 = 1 \text{ V}$  et  $k_0 = 1 \text{ SI}$ , présente l'allure suivante :



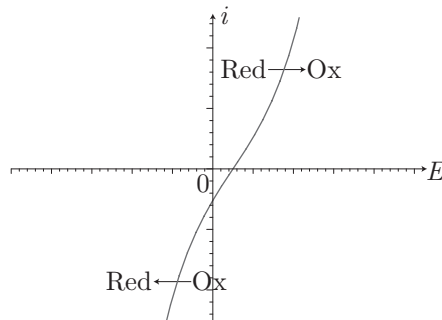
Rappelons que l'intensité  $i$  du courant d'électrode est lié à l'avancement de la réaction, d'équation :



par la loi :  $i = n\mathcal{F} \frac{d\xi}{dt}$ . Aussi, lorsque  $i$  est positif,  $\frac{d\xi}{dt} > 0$  montre que la réaction se déroule dans le sens (1) tandis que  $i < 0$  révèle que  $\frac{d\xi}{dt} < 0$ , ce qui signifie que la réaction se déroule dans le sens (2) :



ce dont on rend compte sur le diagramme intensité-potentiel :



En outre, la loi (43) :

$$i = \frac{k_a}{\beta_{\text{Red}}} |i_{rl}| - \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} |i_{ol}|$$

montre que  $i$  s'annule pour une valeur  $E_{eq}$  de  $E$  telle que :

$$\frac{k_a}{\beta_{\text{Red}}} |i_{rl}| = \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} |i_{ol}|$$

c'est-à-dire, en tenant compte des expressions (38) et (39) de  $|i_{r\ell}|$  et de  $|i_{o\ell}|$  :

$$\begin{cases} |i_{r\ell}| = n\mathcal{F}S\beta_{\text{Red}} [\text{Red}]_{\text{sol}} \\ |i_{o\ell}| = n\mathcal{F}S\beta_{\text{Ox}} [\text{Ox}]_{\text{sol}} \end{cases} \Rightarrow k_a [\text{Red}]_{\text{sol}} = k_c [\text{Ox}]_{\text{sol}}$$

$$\Rightarrow \frac{[\text{Ox}]_{\text{sol}}}{[\text{Red}]_{\text{sol}}} = \frac{k_a}{k_c} = \frac{k_0 e^{\frac{\alpha n\mathcal{F}}{RT} (E_{\text{eq}} - E^0)}}{k_0 e^{\frac{(\alpha-1)n\mathcal{F}}{RT} (E_{\text{eq}} - E^0)}}$$

$$\Rightarrow \frac{[\text{Ox}]_{\text{sol}}}{[\text{Red}]_{\text{sol}}} = \exp\left[\frac{n\mathcal{F}}{RT} (E_{\text{eq}} - E^0)\right]$$

$$\Rightarrow E_{\text{eq}} = E^0 + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln\left(\frac{[\text{Ox}]_{\text{sol}}}{[\text{Red}]_{\text{sol}}}\right)$$

On retiendra ainsi que :

le courant d'électrode s'annule lorsque le potentiel  $E$  y prend la valeur  $E_{\text{eq}}$  prévue par la loi de Nernst :

$$E_{\text{eq}} = E^0 + \frac{RT \ln 10}{n\mathcal{F}} \log\left(\frac{[\text{Ox}]_{\text{sol}}}{[\text{Red}]_{\text{sol}}}\right)$$

#### 8.2.4.2 Limitation due à la diffusion

Lorsque la diffusion est un facteur cinétiquement limitant, au moins un des coefficients

$\beta_i = \frac{D_i}{\delta_i}$  est très faible devant  $k_a$  et  $k_c$ . Par exemple, si  $k_a \gg \beta_{\text{Red}}$  et  $k_c \gg \beta_{\text{Ox}}$ , la relation (41) se simplifie :

$$i \times \left( \frac{k_a}{\beta_{\text{Red}}} + \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} \right) \simeq \frac{k_a}{\beta_{\text{Red}}} |i_{r\ell}| - \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} |i_{o\ell}|$$

$$\Rightarrow i \simeq \frac{|i_{r\ell}|}{1 + \frac{\beta_{\text{Red}}}{\beta_{\text{Ox}}} \times \frac{k_c}{k_a}} - \frac{|i_{o\ell}|}{\frac{\beta_{\text{Ox}}}{\beta_{\text{Red}}} \times \frac{k_a}{k_c} + 1}$$

c'est-à-dire, en posant :

$$\begin{cases} k_a = k_0 e^{\alpha\chi} \\ k_c = k_0 e^{(\alpha-1)\chi} \end{cases} \text{ et } \chi = \frac{n\mathcal{F}}{RT} (E - E^0)$$

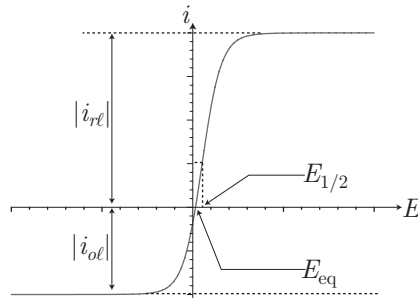
il s'ensuit que :

$$i = \frac{|i_{r\ell}|}{1 + \frac{\beta_{\text{Red}}}{\beta_{\text{Ox}}} e^{-\chi}} - \frac{|i_{o\ell}|}{\frac{\beta_{\text{Ox}}}{\beta_{\text{Red}}} e^{\chi} + 1} \quad (44)$$

Cette expression conduit à :

$$\lim_{E \gg E^0} i = \lim_{\chi \gg 0} i = |i_{r\ell}| \text{ et } \lim_{E \ll E^0} i = \lim_{\chi \ll 0} i = -|i_{o\ell}|$$

et révèle ainsi l'existence de paliers de diffusion dans les courbes intensité-potential :



À nouveau, le potentiel  $E_{eq}$  auquel  $i$  s'annule est celui de la loi de Nernst. En outre, on appelle *potentiel de demi-vague* la grandeur  $E_{1/2}$  pour laquelle  $i = i_{1/2} = \frac{|i_{rl}| - |i_{ol}|}{2}$ . La relation (44) indique que  $i = i_{1/2}$  lorsque :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{Ox}}{\beta_{Red}} e^{\chi} = 1 &\Rightarrow \chi = \frac{n\mathcal{F}}{RT} (E_{1/2} - E^0) = \ln \left( \frac{\beta_{Red}}{\beta_{Ox}} \right) \\ &\Rightarrow E_{1/2} = E^0 + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \left( \frac{\beta_{Red}}{\beta_{Ox}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, si les coefficients de diffusion  $\beta_{Red}$  et  $\beta_{Ox}$  sont du même ordre de grandeur ;

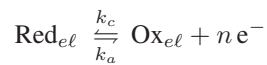
$$E_{1/2} \simeq E^0 \quad (45)$$

*Remarque – Si, de surcroît, les paliers de diffusion sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ( $|i_{rl}| = |i_{ol}|$ ), on observe que :*

$$E_{eq} = E_{1/2} \simeq 0$$

### 8.2.4.3 Cas du solvant ou du métal

Considérons maintenant le cas où l'une des espèces, par exemple Red, soit le solvant ou l'électrode métallique. Il paraît clair que cette espèce ne sera pas affectée par la diffusion. En outre, la vitesse de réaction à l'électrode :



suit la loi (29) dans laquelle la dégénérescence de l'ordre par rapport à  $\text{Red}_{el}$  conduit à :

$$v = k_a - k_c [\text{Ox}]_{el}$$

Par conséquent, l'électrode reçoit le courant d'intensité :

$$i = n\mathcal{F}S \times v = n\mathcal{F}S k_a - n\mathcal{F}S k_c [\text{Ox}]_{el} \quad (46)$$

En outre, le régime stationnaire est décrit par l'équation (37) :

$$i = n\mathcal{F}S \beta_{Ox} \times ([\text{Ox}]_{el} - [\text{Ox}]_{sol})$$

laquelle s'écrit :

$$i = n\mathcal{F}S\beta_{\text{Ox}} [\text{Ox}]_{el} - |i_{ol}| \text{ avec } |i_{ol}| = n\mathcal{F}S\beta_{\text{Ox}} [\text{Ox}]_{sol}$$

$$\Rightarrow [\text{Ox}]_{el} = \frac{i + |i_{ol}|}{n\mathcal{F}S\beta_{\text{Ox}}}$$

Ce faisant, l'équation (46) devient :

$$i = n\mathcal{F}S k_a - \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} (i + |i_{ol}|) \Rightarrow i \times \left(1 + \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}}\right) = n\mathcal{F}S k_a - \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} |i_{ol}| \quad (47)$$

Remarquons dès à présent que  $i$  est nul pour une valeur  $E_{eq}$  de  $E$  telle que :

$$\begin{aligned} n\mathcal{F}S k_a &= \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} |i_{ol}| = \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} \times n\mathcal{F}S\beta_{\text{Ox}} [\text{Ox}]_{sol} \\ &= k_c \times n\mathcal{F}S [\text{Ox}]_{sol} \\ \Rightarrow k_a &= k_c \times [\text{Ox}]_{sol} \\ \Rightarrow k_0 e^{\frac{\alpha n\mathcal{F}}{RT} (E_{eq} - E^0)} &= k_0 e^{\frac{(\alpha-1)n\mathcal{F}}{RT} (E_{eq} - E^0)} \times [\text{Ox}]_{sol} \\ \Rightarrow \exp\left[\frac{n\mathcal{F}}{RT} (E_{eq} - E^0)\right] &= [\text{Ox}]_{sol} \end{aligned}$$

c'est-à-dire pour la valeur du potentiel prévue par la loi de Nernst :

$$E_{eq} = E^0 + \frac{RT \ln 10}{n\mathcal{F}} \times \log [\text{Ox}]_{sol}$$

En outre, l'équation (47) conduit à une expression de  $i$  :

$$i = \frac{n\mathcal{F}S k_a}{1 + \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}}} - \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}} \times \frac{|i_{ol}|}{1 + \frac{k_c}{\beta_{\text{Ox}}}}$$

que l'on peut simplifier en posant :

$$k_a = k_0 e^{\alpha\chi} \text{ et } k_c = k_0 e^{(\alpha-1)\chi} \text{ où } \chi = \frac{n\mathcal{F}}{RT} (E - E^0)$$

Il apparaît ainsi que :

$$i = \frac{n\mathcal{F}S k_0 e^{\alpha\chi}}{1 + \frac{k_0}{\beta_{\text{Ox}}} e^{(\alpha-1)\chi}} - \frac{|i_{ol}|}{1 + \frac{\beta_{\text{Ox}}}{k_0} e^{(1-\alpha)\chi}} \text{ avec } 1 - \alpha > 0$$

Par conséquent :

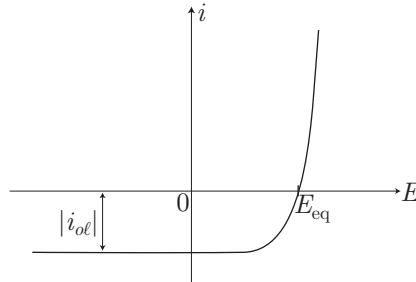
- lorsque  $E \gg E^0$  :

$$\begin{aligned} \chi \gg 0 \Rightarrow i &\simeq \frac{n\mathcal{F}S k_0 e^{\alpha\chi}}{1} - \frac{k_0}{\beta_{\text{Ox}}} |i_{ol}| e^{-(1-\alpha)\chi} \\ \Rightarrow i &\simeq n\mathcal{F}S k_0 e^{\alpha\chi} \text{ pour } E \gg E^0 \end{aligned}$$

- lorsque  $E \ll E^0$  :

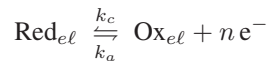
$$\chi \ll 0 \Rightarrow i \simeq n\mathcal{F}S \beta_{\text{Ox}} e^{\chi} - \frac{|i_{\text{ol}}|}{1} \Rightarrow i \simeq -|i_{\text{ol}}| \text{ pour } E \ll E^0$$

Ces informations conduisent au tracé du diagramme intensité-potentiel ci-dessous :



#### 8.2.4.4 Cas d'une espèce seule

Considérons un électrolyte dans lequel seul Red est l'espèce électroactive (tout se passe comme si Ox était absent du milieu). La réaction électrochimique :



produit alors un courant dont l'intensité se déduit de la loi (30) :

$$i = n\mathcal{F}S k_a [\text{Red}]_{el} \Rightarrow [\text{Red}]_{el} = \frac{i}{n\mathcal{F}S k_a} \quad (48)$$

tandis que le transport de matière, décrit par l'équation (36), ne concerne que l'espèce Red :

$$\begin{aligned} i &= n\mathcal{F}S \beta_{\text{Red}} ([\text{Red}]_{\text{sol}} - [\text{Red}]_{el}) \\ &= |i_{rl}| - n\mathcal{F}S \beta_{\text{Red}} [\text{Red}]_{el} \text{ où } |i_{rl}| = n\mathcal{F}S \beta_{\text{Red}} [\text{Red}]_{\text{sol}} \end{aligned}$$

De l'expression (48) de  $[\text{Red}]_{el}$  il ressort alors que :

$$i = |i_{rl}| - \frac{\beta_{\text{Red}}}{k_a} i \Rightarrow i = \frac{|i_{rl}|}{1 + \frac{\beta_{\text{Red}}}{k_a}}$$

soit encore :

$$i = \frac{|i_{rl}|}{1 + \frac{\beta_{\text{Red}}}{k_0} e^{-\alpha\chi}} \text{ où } \chi = \frac{n\mathcal{F}}{RT} \times (E - E^0)$$

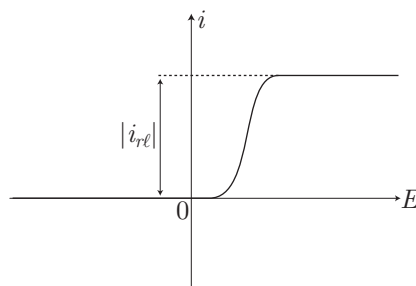
- Pour une valeur assez grande de  $E - E^0$  :

$$\lim_{\chi \gg 0} i = |i_{rl}|$$

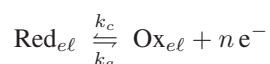
- Pour une valeur assez petite de  $E - E^0$  :

$$\lim_{\chi \ll 0} i = 0$$

d'où se déduit l'allure de la courbe intensité-potentiel :



Intéressons-nous, maintenant, à un milieu duquel l'espèce Red est absente. La réaction d'équation :



est à l'origine du courant qui parvient à l'électrode, dont l'intensité est donnée par la relation (30) :

$$i = -n\mathcal{F}S k_c [\text{Ox}]_{el} \Rightarrow [\text{Ox}]_{el} = -\frac{i}{n\mathcal{F}S k_c}$$

En outre, l'équation (37) rend compte de la diffusion de l'espèce Ox dans le milieu :

$$\begin{aligned} i &= n\mathcal{F}S \beta_{\text{Ox}} \times ([\text{Ox}]_{el} - [\text{Ox}]_{sol}) \\ &= n\mathcal{F}S \beta_{\text{Ox}} \times [\text{Ox}]_{el} - |i_{ol}| \text{ où } |i_{ol}| = n\mathcal{F}S \beta_{\text{Ox}} [\text{Ox}]_{sol} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} i &= -\frac{\beta_{\text{Ox}}}{k_c} i - |i_{ol}| \Rightarrow i = -\frac{|i_{ol}|}{1 + \frac{\beta_{\text{Ox}}}{k_c}} \\ \Rightarrow i &= -\frac{|i_{ol}|}{1 + \frac{\beta_{\text{Ox}}}{k_0} e^{(1-\alpha)\chi}} \text{ avec } \chi = \frac{n\mathcal{F}}{RT} (E - E^0) \text{ et } 1 - \alpha > 0 \end{aligned}$$

Ce résultat conduit à :

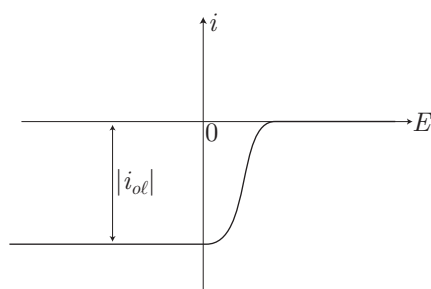
$$\lim_{\chi \gg 0} i = 0 \Rightarrow i \simeq 0 \text{ pour } E \gg E^0$$

et :

$$\lim_{\chi \ll 0} i = -|i_{ol}| \Rightarrow i \simeq -|i_{ol}| \text{ pour } E \ll E^0$$

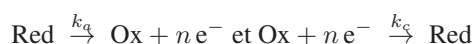
L'allure de la courbe intensité-potentiel se déduit de ces expressions asymptotiques :



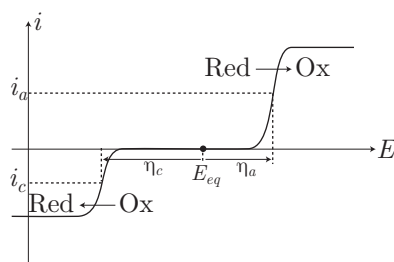


### 8.2.4.5 Système irréversible

Un système irréversible se comporte comme si les réactions :



se produisaient dans des gammes de potentiel  $E$  différentes ; le diagramme intensité-potentiel associé correspond à la superposition des deux diagrammes précédents :



Dans ce modèle, on admet qu'un courant nul apparaît pour une valeur  $E = E_{eq}$ . Le courant  $i$  prend alors des valeurs appréciables ( $i_a$  et  $i_c$ ) aux valeurs respectives  $E = E_{eq} + \eta_a$  ( $\eta_a > 0$ ) et  $E = E_{eq} + \eta_c$  ( $\eta_c < 0$ ), où  $\eta_a$  et  $\eta_c$  sont les surtensions anodique et cathodique.

## 8.3 Élaboration et protection des métaux

*Bien que cette section ne soit pas intégrée aux programmes des étudiants de MP, ceux-ci pourront aborder les sujets qui y sont développés comme des illustrations et applications directes des notions précédentes.*

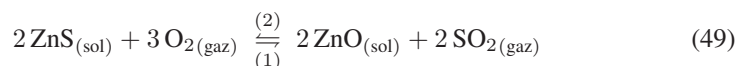
### 8.3.1 Pyrométallurgie du zinc

Dans la nature, le zinc se présente sous forme de minerai composé, pour moins de 20%, de blende (ZnS), d'autres sulfures métalliques (notamment le sulfure de plomb en quantité comparable à celle de ZnS) et d'une gangue (carbonates de calcium, de magnésium...). Industriellement, le traitement du minerai de zinc s'effectue en plusieurs étapes, décrites ci-après.

#### 8.3.1.1 Extraction et grillage de la blende

Après concassage et broyage, la blende est isolée de sa gangue et d'une grande partie des autres sulfures métalliques par une opération appelée *flottation*. Il s'agit d'une solution aqueuse, pourvue d'agents tension-actifs, dans laquelle barbotte de l'air. Le

minéral, finement divisé, y est introduit en suspension, ce qui permet de récupérer le *concentré* qui peut contenir de 60% à 90% de blende). Ce dernier subit alors, entre 800°C et 1 000°C, une étape de *grillage*, au cours de laquelle ZnS réagit avec le dioxygène :



Des enthalpies *standard* de formation  $\Delta_f H^0$  (en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) et des entropies molaires *standard*  $S^0$  (en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) des espèces suivantes :

	$\text{ZnS}_{(\text{sol})}$	$\text{O}_{2(\text{gaz})}$	$\text{ZnO}_{(\text{sol})}$	$\text{SO}_{2(\text{gaz})}$
$\Delta_f H^0$	-206,0	0	-350,5	-296,8
$S^0$	57,7	205,2	38,9	248,2

se déduisent les valeurs de l'enthalpie *standard* de la réaction (49) :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0 &= 2 \Delta_f H^0 (\text{SO}_2) + 2 \Delta_f H^0 (\text{ZnO}) - 2 \Delta_f H^0 (\text{ZnS}) - 3 \Delta_f H^0 (\text{O}_2) \\ &= -2 \times 296,8 - 2 \times 350,5 + 2 \times 206 = -882,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

et de son entropie *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_r S^0 &= 2 S^0 (\text{SO}_2) + 2 S^0 (\text{ZnO}) - 3 S^0 (\text{O}_2) - 2 S^0 (\text{ZnS}) \\ &= 2 \times 248,2 + 2 \times 38,9 - 3 \times 205,2 - 2 \times 57,7 = -156,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Par suite, l'enthalpie libre *standard* de la réaction (49) :

$$\Delta_r G^0 = -882,6 \cdot 10^3 + 156,8 \times T$$

est fortement négative pour des températures inférieures à 5 629 K, ce qui traduit une forte propension de cette réaction à évoluer dans le sens (1) de la production de l'oxyde de zinc ZnO.

En outre, la forte valeur négative de  $\Delta_r H^0$  révèle que cette réaction est exothermique : la chaleur qu'elle produit suffit à l'auto-entretenir.

Quant au dioxyde de soufre ( $\text{SO}_2$ ), produit au cours de cette étape, il est essentiellement destiné aux unités de synthèse de l'acide sulfurique ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ).

### 8.3.1.2 Réduction de l'oxyde de zinc

La réduction de ZnO, issu du grillage de la blende, s'opère dans un haut fourneau dont le principe est illustré par l'exercice suivant.



On fournit les valeurs numériques :

- des enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$ ) et des entropies molaires *standard* ( $S^0$ ) des espèces suivantes :

	Zn <sub>(sol)</sub>	ZnO <sub>(sol)</sub>	O <sub>2(gaz)</sub>
$\Delta_f H^0$ (en kJ · mol <sup>-1</sup> )	0	-350,5	0
$S^0$ (en J · K <sup>-1</sup> · mol <sup>-1</sup> )	41,6	43,7	205,2

- de la température de fusion du zinc ( $T_{\text{fus}}$ ) ainsi que sa chaleur latente molaire de fusion ( $L_{\text{fus}}$ ) :

$$T_{\text{fus}} = 693 \text{ K} \quad L_{\text{fus}} = 6,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- de la température de vaporisation du zinc ( $T_{\text{vap}}$ ) et de la chaleur latente molaire associée ( $L_{\text{vap}}$ ) :

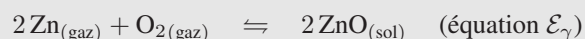
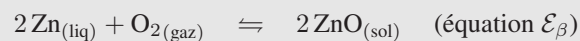
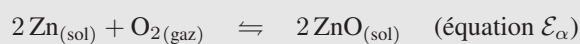
$$T_{\text{vap}} = 1180 \text{ K} \quad L_{\text{vap}} = 114,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On admettra que les enthalpies *standard* et les entropies *standard* des réactions sont indépendantes de la température (approximation d'Ellingham).

- Écrire les équations, que l'on notera respectivement ( $\mathcal{E}_{\text{fus}}$ ) et ( $\mathcal{E}_{\text{vap}}$ ), de fusion et de vaporisation du zinc.

Déterminer les expressions, en fonction de la température  $T$ , des enthalpies libres *standard*  $\Delta_{\text{fus}} G^0(T)$  et  $\Delta_{\text{vap}} G^0(T)$  des réactions d'équation ( $\mathcal{E}_{\text{fus}}$ ) et ( $\mathcal{E}_{\text{vap}}$ ).

- On s'intéresse aux réactions d'oxydation du zinc :



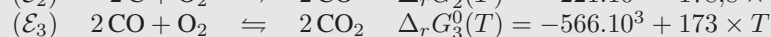
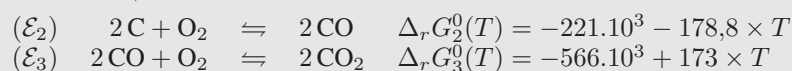
Déterminer les expressions des enthalpies libres *standard*  $\Delta_r G_{\alpha}^0(T)$ ,  $\Delta_r G_{\beta}^0(T)$ ,  $\Delta_r G_{\gamma}^0(T)$  des réactions ( $\mathcal{E}_{\alpha}$ ), ( $\mathcal{E}_{\beta}$ ) et ( $\mathcal{E}_{\gamma}$ ), en fonction de la température  $T$ .

- On rappelle (voir exercice de la page 1262) les expressions  $\Delta_r G_i^0(T)$  (en J · mol<sup>-1</sup>) qui conduisent au diagramme d'Ellingham du carbone :

- pour  $T \leq 980,7 \text{ K}$  :



- pour  $T \geq 980,7 \text{ K}$  :



Représenter, sur le même graphe, les diagrammes d'Ellingham du carbone et du couple Zn/ZnO, pour une température  $T$  variant de 0 à 2000 K.

4. À l'aide de ce diagramme, trouver les températures à partir desquelles peuvent se produire les réductions :

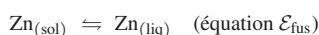


On précisera, dans chacun des cas, l'état physique du zinc.

5. Montrer que, pour  $T < 1550$  K, la présence de  $\text{CO}_2$  pourrait compromettre la réduction de  $\text{ZnO}$  par  $\text{C}$ . Pour éviter qu'un tel phénomène ne se produise, on introduit un excès de carbone.

#### RÉPONSE

1. La fusion du zinc est décrite par l'équation :



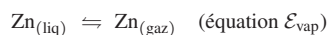
dont l'enthalpie *standard*  $\Delta_{\text{fus}}H^0$  s'identifie à  $L_{\text{fus}} = 6,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  et dont l'entropie *standard* vaut :

$$\Delta_{\text{fus}}S^0 = \frac{L_{\text{fus}}}{T_{\text{fus}}} = \frac{6,7 \cdot 10^3}{693} = 9,668 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Par conséquent, l'enthalpie libre *standard* de la réaction de fusion du zinc vaut (en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) :

$$\Delta_{\text{fus}}G^0(T) = \Delta_{\text{fus}}H^0 - T \times \Delta_{\text{fus}}S^0 = 6,7 \cdot 10^3 - 9,668 \times T$$

Quant à la vaporisation du zinc, elle correspond à la réaction :



d'enthalpie *standard*  $\Delta_{\text{vap}}H^0 = L_{\text{vap}} = 114,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  et d'entropie *standard* :

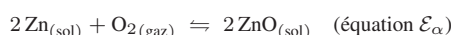
$$\Delta_{\text{vap}}S^0 = \frac{L_{\text{vap}}}{T_{\text{vap}}} = \frac{114,8 \cdot 10^3}{1180} = 97,29 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Par suite, la vaporisation du zinc a pour enthalpie libre *standard* (en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) :

$$\Delta_{\text{vap}}G^0(T) = \Delta_{\text{vap}}H^0 - T \times \Delta_{\text{vap}}S^0 = 114,8 \cdot 10^3 - 97,29 \times T$$

2. Selon la valeur de la température  $T$ , l'oxydation du zinc par  $\text{O}_2$  est donnée par l'une des équations suivantes :

- pour  $T \leq T_{\text{fus}} = 693$  K :



dont l'enthalpie *standard* vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_{\alpha}^0 &= 2 \Delta_f H^0 [\text{ZnO}_{(\text{sol})}] - 2 \Delta_f G^0 [\text{Zn}_{(\text{sol})}] - \Delta_f H^0 [\text{O}_{2(\text{gaz})}] \\ &= -2 \times 350,5 = -701 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

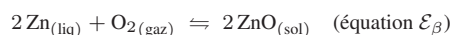
et dont l'entropie *standard* vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_r S_{\alpha}^0 &= 2 S^0 [\text{ZnO}_{(\text{sol})}] - 2 S^0 [\text{Zn}_{(\text{sol})}] - S^0 [\text{O}_{2(\text{gaz})}] \\ &= 2 \times 43,7 - 2 \times 41,6 - 205,2 = -201 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Par conséquent, la réaction d'équation ( $\mathcal{E}_{\alpha}$ ) a pour enthalpie libre *standard* (en  $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) :

$$\Delta_r G_{\alpha}^0(T) = \Delta_r H_{\alpha}^0 - T \times \Delta_r S_{\alpha}^0 = -701 \cdot 10^3 + 201 \times T$$

- pour  $T \in [T_{\text{fus}} = 693 \text{ K}, T_{\text{vap}} = 1180 \text{ K}]$  :



On remarque alors que les équations ( $\mathcal{E}_{\alpha}$ ), ( $\mathcal{E}_{\beta}$ ) et ( $\mathcal{E}_{\text{fus}}$ ) sont linéairement dépendantes :

$$\begin{array}{r} (\mathcal{E}_{\beta}) \quad 2 \text{Zn}_{(\text{liq})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons 2 \text{ZnO}_{(\text{sol})} \\ 2 (\mathcal{E}_{\text{fus}}) \quad \quad \quad 2 \text{Zn}_{(\text{sol})} \rightleftharpoons 2 \text{Zn}_{(\text{liq})} \\ \hline (\mathcal{E}_{\alpha}) \quad 2 \text{Zn}_{(\text{sol})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons 2 \text{ZnO}_{(\text{sol})} \end{array}$$

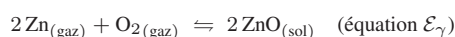
Ainsi, de la relation :  $(\mathcal{E}_\beta) + 2(\mathcal{E}_{\text{fus}}) = (\mathcal{E}_\alpha)$ , il ressort que :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_\beta^0(T) &= \Delta_r G_\alpha^0(T) - 2 \Delta_{\text{fus}} G^0(T) \\ &= (-701.10^3 + 201 \times T) - 2 \times (6,7.10^3 - 9,668 \times T) \\ \Rightarrow \Delta_r G_\beta^0(T) &= -714,4.10^3 + 220,3 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1}) \end{aligned}$$

Remarque - Pour  $T = T_{\text{fus}}$ , on s'assurera de la continuité de la courbe  $\Delta_r G^0(T)$  en calculant :

$$\begin{cases} \Delta_r G_\alpha^0(693 \text{ K}) = -701.10^3 + 201 \times 693 = -561,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r G_\beta^0(693 \text{ K}) = -714,4.10^3 + 220,3 \times 693 = -561,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$$

- pour  $T > 1180 \text{ K}$  :



À nouveau, l'équation  $(\mathcal{E}_\beta)$  apparaît comme une combinaison linéaire des équations  $(\mathcal{E}_\gamma)$  et  $(\mathcal{E}_{\text{vap}})$  :

$$\frac{\begin{matrix} (\mathcal{E}_\gamma) & 2 \text{Zn}_{(\text{gaz})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} & \rightleftharpoons & 2 \text{ZnO}_{(\text{sol})} \\ 2(\mathcal{E}_{\text{vap}}) & 2 \text{Zn}_{(\text{liq})} & \rightleftharpoons & 2 \text{Zn}_{(\text{gaz})} \\ \hline (\mathcal{E}_\beta) & 2 \text{Zn}_{(\text{liq})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} & \rightleftharpoons & 2 \text{ZnO}_{(\text{sol})} \end{matrix}}$$

en conséquence de quoi :

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_\beta) &= (\mathcal{E}_\gamma) + 2(\mathcal{E}_{\text{vap}}) \Rightarrow \Delta_r G_\beta^0(T) = \Delta_r G_\gamma^0(T) + 2 \Delta_{\text{vap}} G^0(T) \\ \Rightarrow \Delta_r G_\gamma^0(T) &= \Delta_r G_\beta^0(T) - 2 \Delta_{\text{vap}} G^0(T) \\ \Rightarrow \Delta_r G_\gamma^0(T) &= (-714,4.10^3 + 220,3 \times T) - 2 \times (114,8.10^3 - 97,29 \times T) \\ \Rightarrow \Delta_r G_\gamma^0(T) &= -944.10^3 + 414,9 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1}) \end{aligned}$$

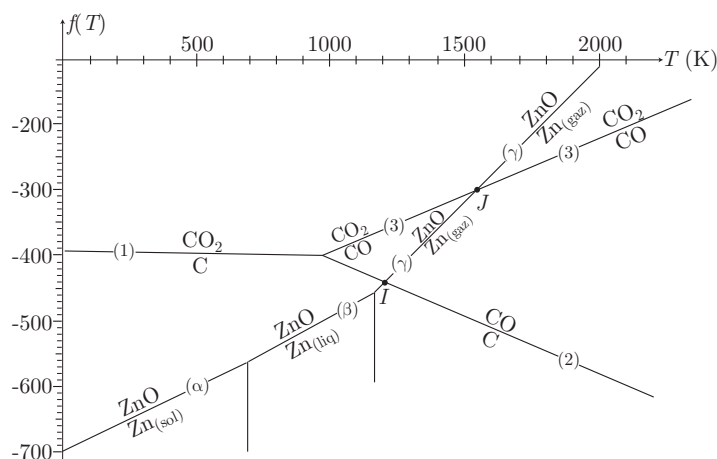
Remarque - Pour s'assurer de la continuité de la fonction  $\Delta_r G^0(T)$  en  $T = T_{\text{vap}} = 1180 \text{ K}$ , il suffit de comparer :

$$\Delta_r G_\beta^0(1180 \text{ K}) = -714,4.10^3 + 220,3 \times 1180 = -454,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et :

$$\Delta_r G_\gamma^0(1180 \text{ K}) = -944.10^3 + 414,9 \times 1180 = -454,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- Le diagramme d'Ellingham du carbone et du couple Zn/ZnO présente l'allure suivante, pour  $T$  allant de 0 à 2000 K :



4. Pour que la réaction de ZnO avec C puisse se produire, il suffit que les domaines de prédominance (ou d'existence) de ces espèces soient disjoints. Le diagramme ci-dessus révèle que cette configuration se produit à droite du point  $I$  (d'abscisse  $T_I$ ) d'intersection des segments correspondants aux réactions ( $\mathcal{E}_2$ ) et ( $\mathcal{E}_\gamma$ ), c'est-à-dire :

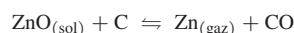
$$\begin{aligned}\Delta_r G_\gamma^0(T) > \Delta_r G_2^0(T) &\Rightarrow -944.10^3 + 414,9 \times T > -221.10^3 - 178,8 \times T \\ &\Rightarrow T > \frac{944.10^3 - 221.10^3}{414,9 + 178,8} = 1218 \text{ K}\end{aligned}$$

De même, la séparation des domaines de prédominance (ou d'existence) de ZnO et de CO garantit la réduction de ZnO par CO. Le diagramme ci-dessus montre qu'à droite du point  $J$ , cette séparation est assurée, à partir de quoi :

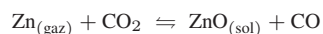
$$\begin{aligned}\Delta_r G_\gamma^0(T) > \Delta_r G_3^0(T) &\Rightarrow -944.10^3 + 414,9 \times T > -566.10^3 + 173 \times T \\ &\Rightarrow T > \frac{944.10^3 - 566.10^3}{414,9 - 173} = 1563 \text{ K}\end{aligned}$$

Dans ces deux cas, le zinc se présente sous forme gazeuse, car  $T > 1180 \text{ K}$ .

5. D'après ce qui précède, lorsque  $1218 \text{ K} < T < 1563 \text{ K}$ , la réduction de ZnO par le carbone, se déroule selon l'équation :



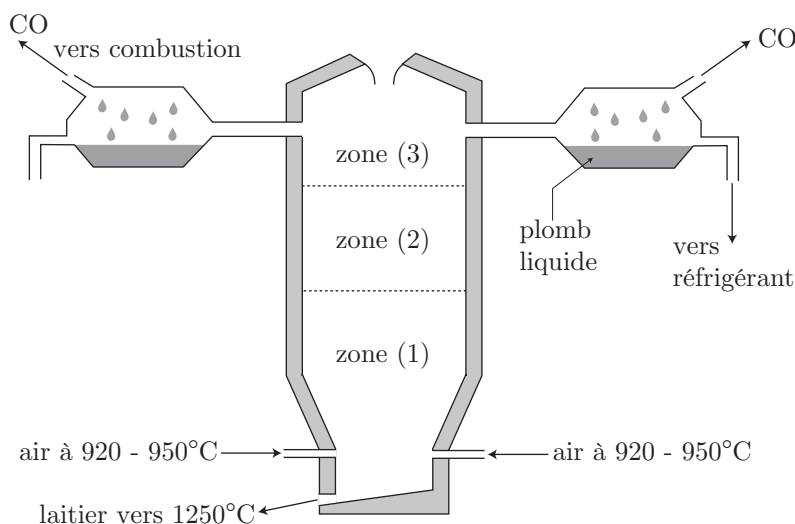
Or, le diagramme précédent montre également que, pour  $T < T_J = 1563 \text{ K}$ , les domaines d'existence (ou de prédominance) de  $\text{Zn}_{(\text{gaz})}$  et de  $\text{CO}_2$  sont disjoints, auquel cas le zinc, produit à l'issue de la réaction précédente, pourrait réagir avec  $\text{CO}_2$  :



Cette réaction doit par conséquent être inhibée, ce qui justifie l'emploi d'un excès de carbone, afin de favoriser l'équilibre de Boudouard :



*Bien que la technologie des hauts fourneaux ne soit pas exigible des étudiants, elle permet cependant de relier l'étude précédente à son application dans l'industrie :*



Le gueulard est alimenté en ZnO et en carbone (*coke* préchauffé), lequel réagit avec l'oxygène de l'air, dans la zone (1) :



Ces réactions, exothermiques, permettent à la température de monter aux environs de 1 000°C (1 270 K), température à laquelle la réduction de ZnO peut se produire dans la zone (2). À l'issue de cette réaction (zone 3), des gaz (8% de Zn<sub>(gaz)</sub>, 11% de CO<sub>2</sub>, 25% de CO, 1% de H<sub>2</sub>, 55% de N<sub>2</sub>) à 1 020°C sont récupérés, lesquels sont mis au contact d'une pluie de plomb liquide à 600°C. La solution (Zn + Pb) ainsi formée, appelée *plomb d'œuvre*, est ensuite envoyée dans un réfrigérant où la température est maintenue à une valeur voisine de 400°C, valeur à laquelle la solubilité du zinc dans le plomb décroît fortement (2% de Zn pour 98% de Pb). Le zinc ainsi séparé (*zinc d'œuvre*) est ensuite envoyé vers une unité où l'*affinage* est obtenu par distillation fractionnée.

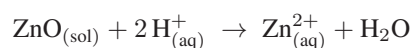
### 8.3.2 Hydrométallurgie

#### 8.3.2.1 Application des diagrammes potentiel-pH

On s'intéresse, dans ce qui suit, à la fabrication du zinc par voie hydrométallurgique. Dans ce procédé, l'oxyde ZnO (obtenu à l'issue du grillage de la blende) subit les traitements suivants :

- **La lixiviation acide**

La *lixiviation* consiste à solubiliser une espèce afin de la traiter, en solution aqueuse, à des fins industrielles. En ce qui concerne ZnO<sub>(sol)</sub>, cette lixiviation est réalisée par l'acidité d'une solution aqueuse, selon l'équation :



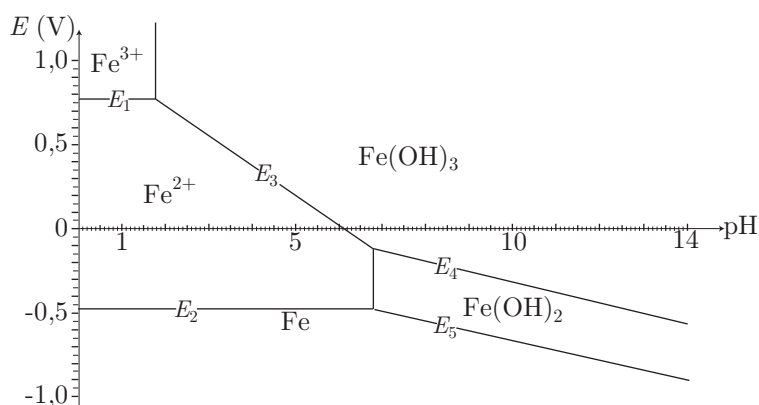
Cependant, au cours de cette opération, de nombreuses impuretés sont simultanément solubilisées (Fe<sup>2+</sup>, Fe<sup>3+</sup>, Cu<sup>2+</sup>, ...), qu'il convient d'éliminer au cours des étapes suivantes. Nous simplifierons l'étude au cas où Fe<sup>2+</sup>, Fe<sup>3+</sup>, Cu<sup>2+</sup> sont les seules impuretés à éliminer.

- **La lixiviation neutre**

Cette opération consiste à éliminer l'élément fer de la solution aqueuse. Pour l'interpréter, nous supposerons que le fer dissous se trouve à une concentration totale  $C_1 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , dix fois moindre que celle du zinc dissous ( $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ).

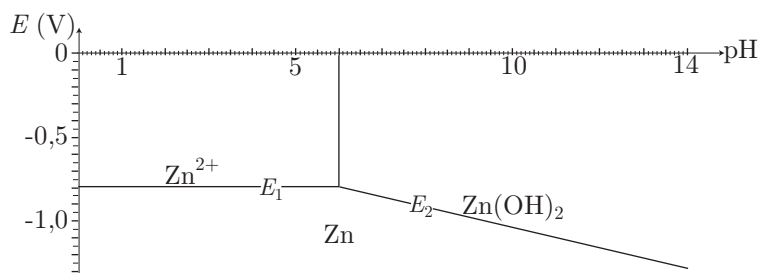
Le diagramme potentiel-pH du fer est établi dans l'exercice de la page 1304 :

$$\begin{aligned} E_1 &= 0,77 \text{ V} & E_4 &= 0,27 - 0,06 \text{ pH} \\ E_2 &= -0,47 \text{ V} & E_5 &= -0,06 - 0,06 \text{ pH} \\ E_3 &= 1,09 - 0,18 \text{ pH} \end{aligned}$$

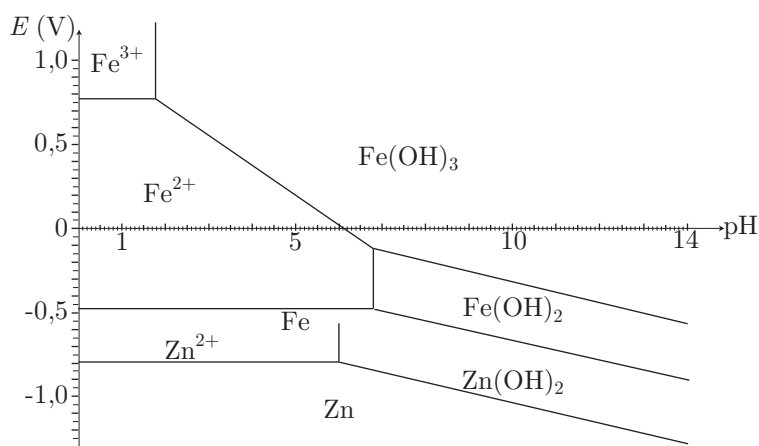


tandis que celui du zinc a été développé dans la section de la page 1245 :

$$E_1 = -0,79 \text{ V} \quad E_2 = -0,43 - 0,06 \text{ pH}$$



La superposition de ces deux diagrammes :

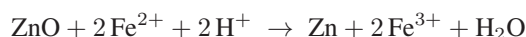


révèle que :

- les ions  $Fe^{3+}$  sont facilement transformés en précipité  $Fe(OH)_3$  dès que le pH devient voisin de 2 ;
- les ions  $Fe^{2+}$  et  $Zn^{2+}$  précipitent respectivement en  $Fe(OH)_2$  et  $Zn(OH)_2$  à des pH voisins. Aussi, pour éviter la précipitation de  $Zn(OH)_2$  (on cherche à



conserver  $\text{Zn}^{2+}$  en solution), il convient de transformer préalablement les ions  $\text{Fe}^{2+}$  en ions  $\text{Fe}^{3+}$ . Cette oxydation peut être réalisée par des oxydants (l'air,  $\text{MnO}_2$ , ...) ou directement à l'aide de  $\text{ZnO}$  :



À l'issue de ce traitement oxydant, le pH est amené à une valeur proche de 5, de sorte que le milieu contient  $\text{Zn}^{2+}$  en solution (également  $\text{Cu}^{2+}$ ) tandis que le fer, sous forme de  $\text{Fe}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$ , est éliminé par décantation.

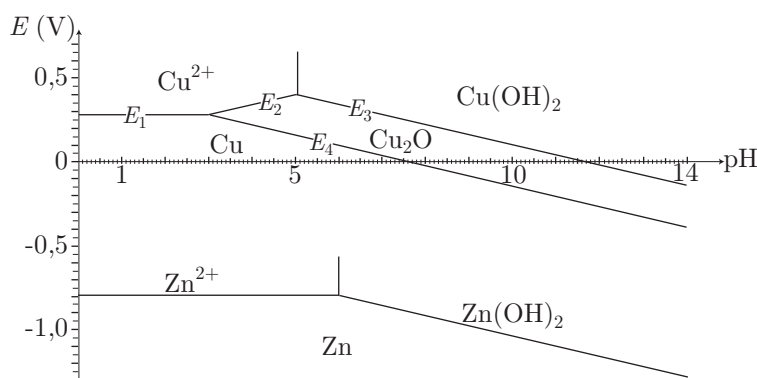
#### • La cémentation

Si l'on admet que le cuivre ne précipite pas pour  $\text{pH} \leq 5$ , il reste en solution avec  $\text{Zn}^{2+}$ , ce qui impose son élimination.

Son diagramme potentiel-pH, issu de l'étude réalisée à la page 1248 (où la concentration totale des espèces dissoutes est prise égale à  $C_t = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , c'est-à-dire dix fois moindre que celle du zinc) :

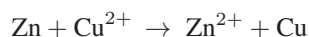
$$\begin{aligned} E_1 &= 0,28 \text{ V pour } \text{pH} \leq 3 \\ \begin{cases} E_2 = 0,10 + 0,06 \text{ pH} \\ E_4 = 0,46 - 0,06 \text{ pH} \end{cases} &\text{ pour } 3 \leq \text{pH} \leq 5 \\ E_3 &= 0,70 - 0,06 \text{ pH pour } \text{pH} \geq 5 \end{aligned}$$

peut être superposé à celui du zinc :



Le diagramme ainsi obtenu :

- confirme que, pour  $\text{pH} < 5$ , l'élément cuivre est totalement dissous sous forme d'ions  $\text{Cu}^{2+}$  ;
- le zinc métallique est un réducteur de  $\text{Cu}^{2+}$  (en milieu acide) :

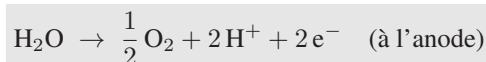


Cette dernière propriété est alors exploitée au cours de la cémentation : de la poudre de zinc est introduite dans le milieu issu de la deuxième lixiviation ; la poudre réagit avec les ions métalliques ( $\text{Cu}^{2+}$  ou autres impuretés solubles, telles que  $\text{Ni}^{2+}$ ,  $\text{Mn}^{2+}$ , ...) qui sont réduits en poudre métallique. La solution, ensuite filtrée, procure un filtrat constitué essentiellement de sulfate de zinc en solution aqueuse ( $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{H}^+$ ,  $\text{SO}_4^{2-}$  et  $\text{Zn}^{2+}$ ).

### 8.3.2.2 Application des courbes intensité-potentiel

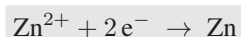
Le zinc métallique est extrait de la solution précédente par électrolyse. Cependant, le choix des électrodes est capital pour éviter que se produise l'électrolyse de l'eau.

- À l'anode (en plomb) ne peut se produire que l'oxydation de l'eau :



- À la cathode peuvent se produire *a priori* plusieurs réactions de réduction :

- la réduction de  $\text{Zn}^{2+}$  :

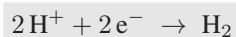


réalisée sur une cathode en aluminium, pour laquelle la surtension cathodique du couple  $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$  est nulle.

Les ions  $\text{Zn}^{2+}$  étant dilués dans une solution aqueuse, la courbe intensité-potentiel de  $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$  présente un palier de diffusion et possède un potentiel d'équilibre (lorsque  $i = 0$ ) proche du potentiel *standard* du couple  $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$  :  $E^0 = -0,76$  V.

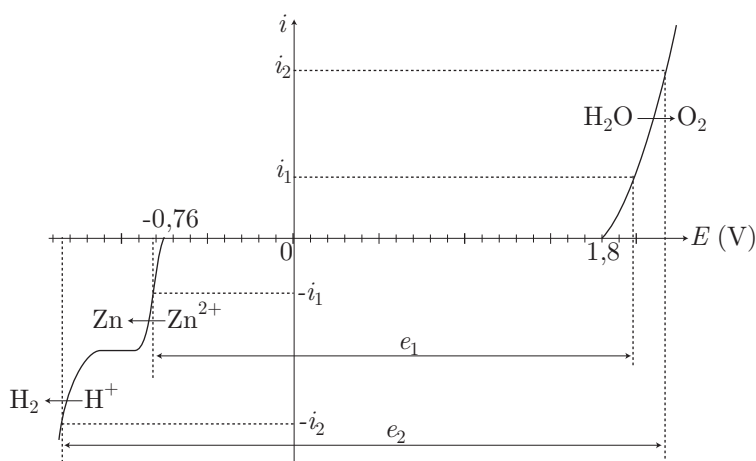
Bien que cette électrode se recouvre de zinc métallique, ses propriétés électrochimiques demeurent inchangées.

- la réduction des ions  $\text{H}^+$  :



qui peut être observée, avec une surtension cathodique  $\eta_c < -0,76$  V.

Les ions  $\text{SO}_4^{2-}$  ne participant à aucune réaction d'oxydo-réduction, la courbe intensité-potentiel de la solution présente l'allure suivante :



La tension  $u$  appliquée entre les électrodes :

$$u = e + r \times i$$

où  $e$  désigne la force contre-électromotrice de la cellule,  $r$  sa résistance interne et  $i$  l'intensité du courant qui y circule :

- doit être supérieure à  $1,8 - (-0,76) = 2,56$  V pour permettre la circulation d'un courant  $i_1$  non nul ;
- ne doit pas être trop importante, sans quoi l'électrolyse de l'eau serait observée (avec  $i = i_2$  et  $e = e_2$  sur le diagramme ci-dessus).

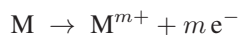
Enfin, le zinc métallique déposé sur la cathode est récupéré par pelage mécanique, puis est fondu en lingots de grande pureté (99,99% de zinc).

### 8.3.3 Phénomènes de corrosion

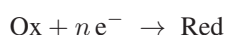
#### 8.3.3.1 Thermodynamique de la corrosion

**Définition 7** On appelle corrosion l'oxydation d'un métal qui se transforme en ions solubles, de concentration supérieure ou égale à  $10^{-6}$  mol · L<sup>-1</sup>.

Selon cette définition, un métal M subit une oxydation :



tandis qu'un agent oxydant (Ox) se réduit :



Selon que l'oxydant se présente en phase gazeuse (O<sub>2</sub>, Cl<sub>2</sub>, ...) ou en solution (H<sup>+</sup>, ...), on distingue la corrosion sèche de la corrosion humide.

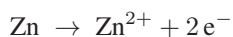
**Définition 8** La corrosion est différentielle lorsqu'elle provient d'une inhomogénéité du milieu :

- existence d'un gradient de température ;
- contact entre deux métaux ;
- teneur variable en agent oxydant (corrosion par aération différentielle dans le cas du dioxygène) ;
- contraintes mécaniques (zones d'écroutissage, ...)

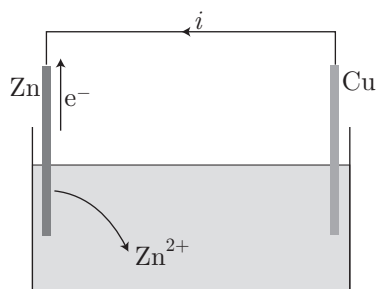
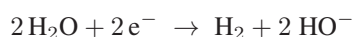
La corrosion est, en revanche, homogène lorsqu'elle se produit de manière homogène sur la surface du métal.

#### 1. Corrosion galvanique

Lorsque deux métaux, de potentiels *standard* différents, sont reliés électriquement, ils agissent comme les électrodes d'une pile, en présence d'eau. Par exemple, la réunion d'une électrode de zinc ( $E^0 = -0,76$  V pour  $Zn^{2+} + 2 e^{-} \rightarrow Zn$ ) et d'une électrode de cuivre ( $E^0 = 0,34$  V pour l'équation  $Cu^{2+} + 2 e^{-} \rightarrow Cu$ ) provoque une oxydation de l'anode de zinc, où se produit la réaction d'équation :



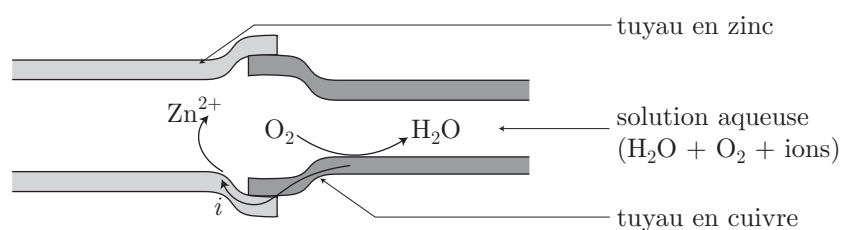
À l'électrode de cuivre est observée la réduction de l'eau :



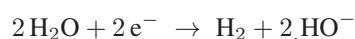
car les ions  $\text{Cu}^{2+}$  (qui pourraient être réduits en Cu) sont absents du milieu réactionnel. On peut ainsi conclure que :

au contact d'une solution aqueuse, un phénomène de corrosion peut se produire lorsque deux métaux sont électriquement liés : c'est le métal le plus réducteur (de potentiel *standard* le plus bas) qui se corrode.

Cette corrosion est observée, dans la pratique, aux jonctions de canalisations réalisées avec deux métaux différents (par exemple du zinc et du cuivre).

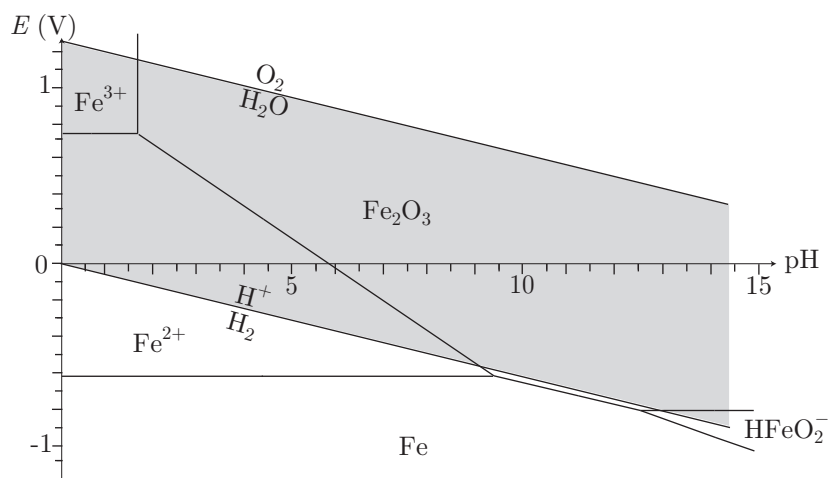


Le zinc passe en solution (se corrode) tandis que le cuivre joue le rôle de cathode :



## 2. Corrosion par aération différentielle

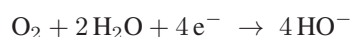
Le diagramme potentiel-pH du fer, établi à la page 1370, présente l'allure suivante :



En y figurant également celui de l'eau, on constate que le fer n'est pas stable dans l'eau :

- en milieu acide, le fer se transforme en ions  $\text{Fe}^{2+}$  ;
- en milieu neutre oxygéné, le fer peut se transformer en ions  $\text{Fe}^{2+}$  ou, éventuellement, en oxyde  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (rouille).

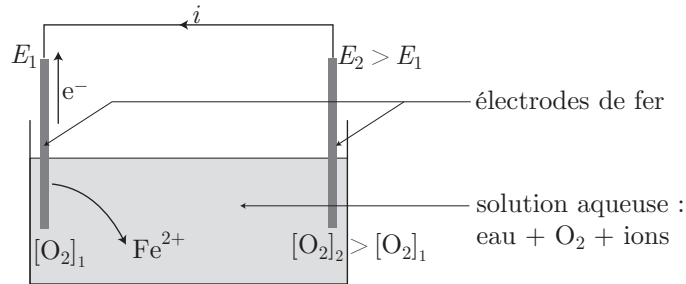
Dans ce dernier cas, l'agent oxydant ( $\text{O}_2$ ), est impliqué dans une réduction d'équation :



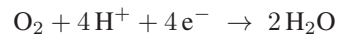
dont le potentiel suit la loi de Nernst :

$$E = E^0 + \frac{0,06}{4} \times \log \left( \frac{P_{O_2}}{[HO^-]^4} \right)$$

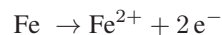
et où la pression partielle d'oxygène gazeux est proportionnelle à la concentration d'oxygène dissous :  $[O_{2(aq)}]$ . C'est pourquoi, lorsque cette concentration n'est pas homogène, une pile peut apparaître :



L'existence d'un gradient de concentration  $[O_2]$  se traduit par l'inhomogénéité du potentiel  $E$  de la solution aqueuse ; l'électrode de fer immergée dans la région de plus fort potentiel ( $E_2$ ) se comporte comme une cathode :



tandis que l'autre électrode, portée à un potentiel ( $E_1$ ) plus faible, devient une anode, où se produit la corrosion :

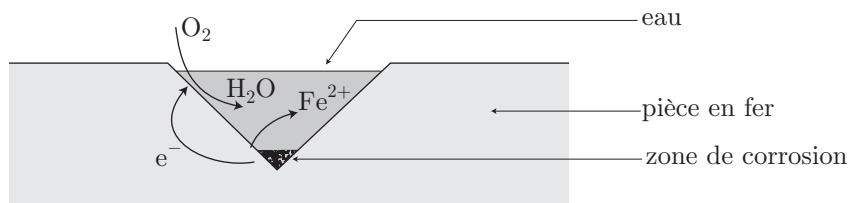


On retiendra ainsi que :

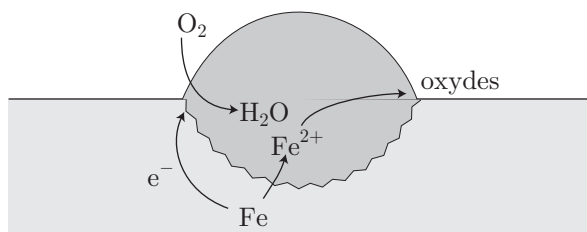
dans une solution aqueuse oxygénée de manière inhomogène, la corrosion du fer se produit dans la zone la moins oxygénée.

La corrosion différentielle est à l'origine de divers phénomènes observés dans la vie courante :

- La quille d'un bateau est immergée dans la zone la moins oxygénée de l'eau de mer ; c'est à ce niveau que la corrosion du fer y est la plus importante.
- Le fond d'une rayure pratiquée sur une pièce de fer, dans laquelle s'est déposée de l'eau, est la zone la moins aérée ; la corrosion y est d'autant plus sévère qu'elle aggrave le phénomène en creusant davantage cette zone, jusqu'à la rupture de la pièce.



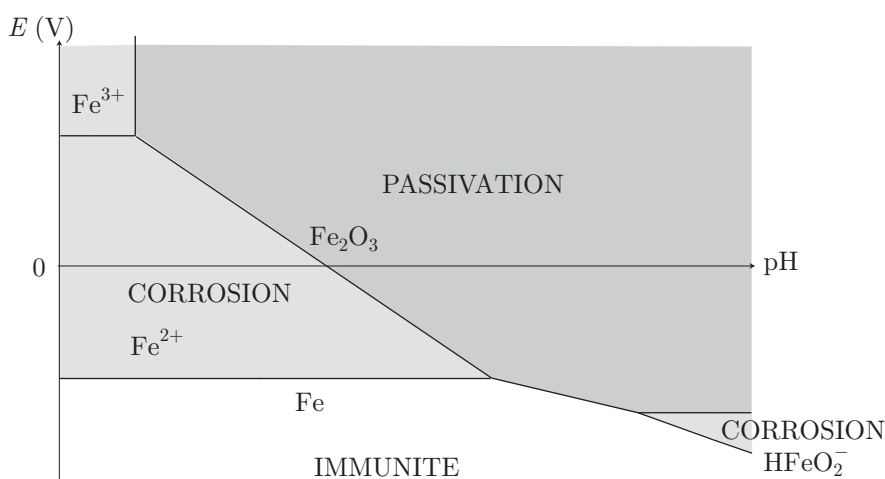
- Autour d'une goutte d'eau, la corrosion du fer se manifeste par une auréole de fer à la périphérie de la goutte :



La corrosion du fer, plus importante dans la zone la plus profonde, produit des ions  $\text{Fe}^{2+}$  qui, par migration, rejoignent la périphérie de la goutte, où ils s'oxydent à nouveau au contact de  $\text{O}_2$  (le diagramme potentiel-pH du fer prévoit la formation de l'oxyde  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , de couleur rouille).

### 8.3.3.2 Cinétique de la corrosion

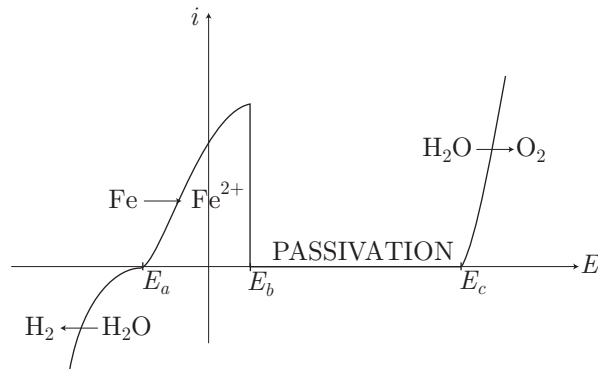
Le diagramme potentiel-pH du fer suggère les réactions qui peuvent être envisagées du seul point de vue thermodynamique.



On y distingue :

- une zone de *passivation* qui correspond à la formation, en surface, d'un oxyde ( $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ) dont l'imperméabilité à l'eau assure la protection du fer ; un clou en fer peut être *passivé* par immersion dans l'acide nitrique fumant ; il devient insensible aux agents oxydants.
- une zone d'*immunité*, dans laquelle le fer solide est stable. Pour opérer dans cette zone, un faible potentiel, assurant la stabilité du fer, doit être imposé par un générateur de tension.
- deux zones de corrosion, où le fer métallique peut être oxydé en ions solubles ; la corrosion du fer s'y produit.

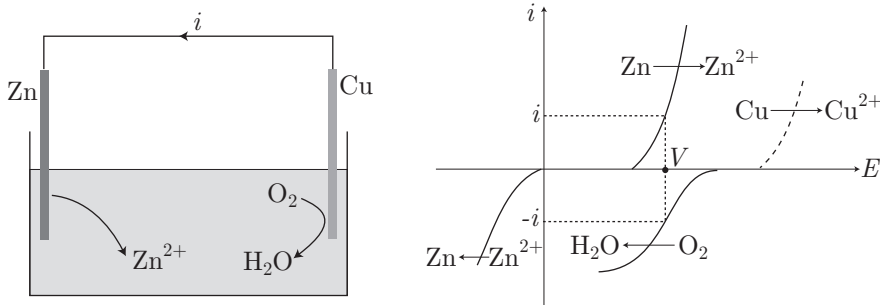
Cependant, des limites cinétiques peuvent contrarier certaines réactions, pourtant thermodynamiquement possibles. Ainsi, pour un pH voisin de 6, le diagramme intensité-potentiel du fer dans l'eau présente l'allure suivante :



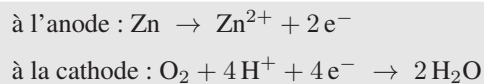
On peut remarquer, dans ce diagramme que :

- pour  $E_a < E < E_b$  (le potentiel  $E_a$ , pour lequel  $i = 0$ , est appelé *potentiel d'abandon*), la corrosion du fer provient de la réaction :  $\text{Fe} \rightarrow \text{Fe}^{2+} + 2e^-$  ;
- pour  $E_b < E < E_c$ , le courant  $i$  est nul : la couche d'oxyde  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  se comporte comme un isolant (c'est la passivation du fer) ;
- si le potentiel de l'anode est assez élevé ( $E > E_c$ ), on peut y observer un dégagement de dioxygène, traduisant l'oxydation de l'eau sur le fer ;
- pour  $E < E_a$ , la réduction de l'eau sur le fer produit du dihydrogène.

De même, le diagramme intensité-potential du système {Cu + Zn} en milieu aqueux permet d'interpréter la corrosion galvanique du zinc :



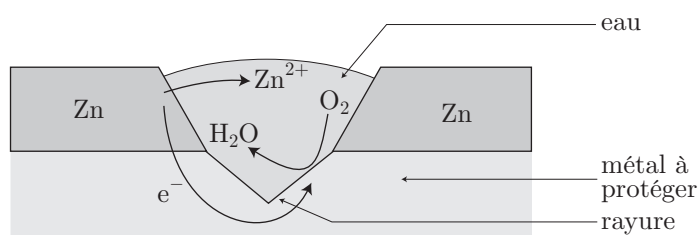
Les deux électrodes étant portées au même potentiel  $V$ , un courant d'intensité  $i$  arrive à l'anode, tandis qu'un courant d'intensité  $-i$  arrive à la cathode. C'est pourquoi on observe les réactions électrochimiques suivantes :



### 8.3.3.3 Protection contre la corrosion

L'étude précédente montre que l'on peut protéger un métal de la corrosion par diverses méthodes :

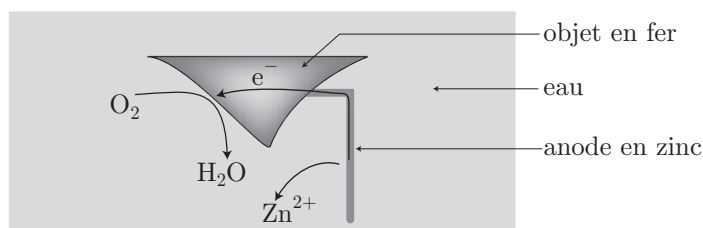
- en isolant, physiquement, le métal de l'eau, de l'oxygène ou de tout autre agent oxydant, par des vernis ou peintures (anti-rouille comme celles au minium  $Pb_3O_4$ ). Cette protection est généralement retenue pour les ouvrages métalliques tels que les ponts, pylônes ...
- en déposant une couche de métal plus électropositif (de potentiel *standard* plus faible), par exemple le zinc, qui protégera le métal par un phénomène de corrosion galvanique : en cas de rayure, l'eau atteindra le métal et restera au contact du zinc qui s'oxydera en ions  $Zn^{2+}$  :



Cette protection demeure efficace tant qu'il reste du zinc.

Quant à la couche de zinc, elle peut être déposée par *électrozinguage* (une électrolyse permet d'obtenir une couche de métal protecteur) ou par *galvanisation* (le métal à protéger est plongé dans le métal protecteur en fusion).

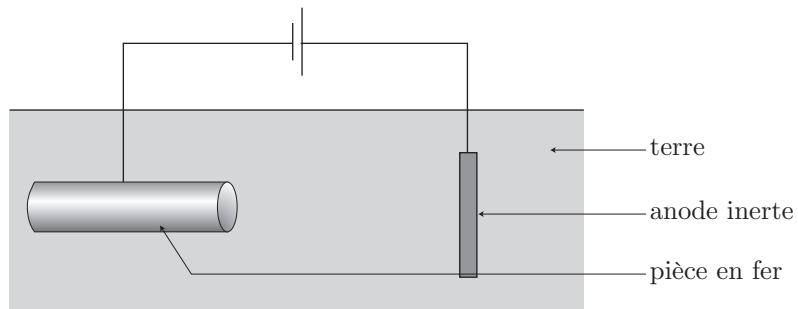
- Certains métaux sont protégés spontanément par passivation : l'oxyde issu de leur corrosion est assez imperméable pour les isoler de agents oxydants. Tel est le cas de l'aluminium (l'alumine :  $Al_2O_3$  constitue une couche protectrice transparente et imperméable), l'or (son oxyde est également transparent et imperméable), le cuivre (qui se recouvre d'hydrocarbonate de cuivre II, aussi appelé *vert de gris* ...)
- par dépôt d'une couche d'un métal moins électropositif. Par exemple, un alliage contenant moins de 1% de nickel et de chrome est à l'origine de l'acier inoxydable : le nickel s'oxyde en  $Cr_2O_7$  qui, par passivation, protège l'acier. Cependant, une telle protection reste vulnérable aux rayures.
- par l'ajout d'une *anode sacrificielle* : un métal plus réducteur que le fer (par exemple une électrode de zinc ou de magnésium) assure la protection galvanique du fer :



Ce mode de protection s'est généralisé sur les bateaux, *pipe-lines*, ... dont on remplace l'anode sacrificielle dès qu'elle s'est complètement oxydée.

- par *protection cathodique* : on amène, à l'aide d'un générateur de tension, le fer dans un domaine d'immunité (le diagramme potentiel-pH du fer révèle l'existence d'un tel domaine pour les faibles valeurs du potentiel) :





Cette méthode est privilégiée pour la protection des canalisations enterrées dans le sol, dont la composition et la nature ne peuvent être connues à chaque instant.

- par *protection anodique* : connectée à la borne positive d'un générateur, la pièce métallique est portée à un potentiel suffisamment élevé pour l'amener dans son domaine de passivation ; *l'aluminium anodisé* est ainsi protégé par la formation d'alumine à sa surface.

● **218** ————— **Lycée du Parc, Lyon**

5 min.

Potentiels standard

MP-PC-PSI-PT

On donne les potentiels *standard* des couples suivants, à pH = 0 :

$$E^0 (\text{IO}_3^- / \text{I}_{2(\text{aq})}) = E_1^0 = 1,19 \text{ V} \text{ et } E^0 (\text{I}_{2(\text{aq})} / \text{I}^-) = E_2^0 = 0,62 \text{ V}$$

En réalité, l'iode est complexé sous forme  $\text{I}_3^-$ , selon une réaction d'équation :



Sachant que  $E^0 (\text{I}_3^- / \text{I}^-) = E_3^0 = 0,54 \text{ V}$ , calculer la constante de l'équilibre de complexation.

● **219** ————— **Lycée Pissarro, Pontoise**

10 min.

Constante d'équilibre redox

MP-PC-PSI-PT

Lors du dosage du diiode en solution aqueuse, par une solution de thiosulfate de sodium, l'ion thiosulfate  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$  est oxydé en ion tétrathionate  $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$ .

1. Écrire l'équation de la réaction d'oxydo-réduction entre une mole de diiode et le thiosulfate de sodium.
2. Calculer la constante d'équilibre de la réaction en justifiant le résultat. Cette réaction peut-elle servir à une réaction de dosage ? Comment observer la fin d'un tel dosage ?
3. L'eau de Javel est une solution d'hypochlorite de sodium ( $\text{Na}^+ + \text{ClO}^-$ ) et de chlorure de sodium ( $\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$ ). Sur une bouteille d'eau de Javel commerciale est inscrite la recommandation suivante :

AU CONTACT D'UN ACIDE OU DE DÉTAR-  
TRANTS, DÉGAGE UN GAZ TOXIQUE.

- (a) Quel est le gaz formé en milieu acide ? écrire l'équation de la réaction.
- (b) En considérant que le potentiel redox du couple  $\text{ClO}^- / \text{Cl}^-$  est supérieur à celui du couple  $\text{O}_2 / \text{HO}^-$ , écrire l'équation de la réaction possible de transformation des ions hypochlorite sur l'eau en milieu basique.  
Pourquoi peut-on conserver l'eau de Javel ?

Données :

- $\frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} = 0,06 \text{ V}$  à 298 K ;

- Potentiels *standard* de certains couples :

$\text{HClO} / \text{Cl}_2$ .....	$E_1^0 = 1,53 \text{ V}$
$\text{Cl}_{2(\text{aq})} / \text{Cl}^-$ .....	$E_2^0 = 1,46 \text{ V}$
$\text{I}_{2(\text{aq})} / \text{I}^-$ .....	$E_3^0 = 0,62 \text{ V}$
$\text{S}_4\text{O}_6^{2-} / \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ .....	$E_4^0 = 0,08 \text{ V}$

● **220** ————— **Lycée du Parc, Lyon**

10 min.

Potentiels standard

MP-PC-PSI-PT

Calculer les potentiels *standard* des couples  $\text{CuCl}/\text{Cu}$  et  $\text{Cu}^{2+}/\text{CuCl}$ .

Données :

- potentiels *standard* à 298 K :

$$E^0(\text{Cu}^+/\text{Cu}) = E_1^0 = 0,52 \text{ V} \quad E^0(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+) = E_2^0 = 0,16 \text{ V}$$

- produit de solubilité de  $\text{CuCl}$  :  $\text{p}K_s = 6,7$  ;

- on prendra :  $\frac{RT \ln 10}{F} = 0,06 \text{ V}$ .

● **221** ————— **Lycée Henri Wallon, Valenciennes**

20 min.

Loi de Nernst

MP-PC-PSI-PT

On supposera les solutions suffisamment diluées pour confondre activité et concentration des solutés.

Toutes les grandeurs thermodynamiques sont données à 298 K, température supposée constante dans l'ensemble de l'exercice.

On prendra :  $2,3 \times \frac{RT}{F} = 0,06 \text{ V}$ .

On réalise une pile comprenant une électrode d'argent plongeant dans 100 mL d'une solution de nitrate d'argent ( $\text{Ag}^+ + \text{NO}_3^-$ ) à  $10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  (compartiment (1)) et une électrode de zinc plongeant dans 100 mL d'une solution de sulfate de zinc ( $\text{Zn}^{2+} + \text{SO}_4^{2-}$ ) à  $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  (compartiment (2)).

1. Faire le schéma de la pile.
2. Déterminer les polarités de la pile et calculer sa force électromotrice  $e$ .
3. Écrire l'équation de la réaction chimique qui se produit dans la pile lorsque celle-ci débite un courant électrique dans le circuit extérieur.  
Déterminer sa constante d'équilibre. Conclure.
4. Calculer les concentrations des ions  $\text{Ag}^+$  dans (1) et  $\text{Zn}^{2+}$  dans (2) lorsque  $e = 1,35 \text{ V}$ .

Données : potentiels *standard* des couples redox :

$$E^0(\text{Ag}^+/\text{Ag}) = E_1^0 = 0,80 \text{ V} \quad E^0(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) = E_2^0 = -0,76 \text{ V}$$

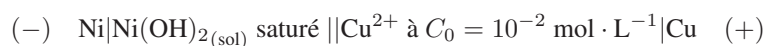
● **222** ————— **Lycée Hoche, Versailles**

20 min.

Piles électrochimiques

MP-PC-PSI-PT

1. On sature de l'eau pure en hydroxyde de nickel  $\text{Ni}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$  ; le pH vaut alors 8,4. Calculer le produit de solubilité  $\text{p}K_s$  de  $\text{Ni}(\text{OH})_2$ .
2. On construit maintenant la pile suivante :

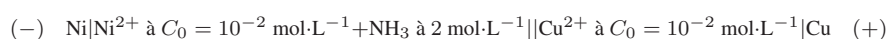
Sa force électromotrice vaut  $e = 0,68 \text{ V}$ .

Connaissant les potentiels *standard* :

$$E^0(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = E_1^0 = 0,34 \text{ V} \text{ et } E^0(\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}) = E_2^0 = -0,23 \text{ V}$$

calculer le produit de solubilité  $pK_s$  de  $\text{Ni}(\text{OH})_2$ .

3. On s'intéresse à une autre pile :



Sa force électromotrice vaut  $e' = 0,91 \text{ V}$ .

En considérant qu'il ne se forme que le complexe  $\text{Ni}(\text{NH}_3)_6^{2+}$ , donner la valeur de la constante  $pK_d$  de dissociation de ce complexe (il s'agit de la constante globale de dissociation en  $\text{Ni}^{2+}$  et  $\text{NH}_3$ ).

4. Calculer les concentrations des espèces en équilibre dans la solution obtenue en mettant, dans un litre d'eau pure, 0,01 mole de  $\text{Ni}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$  et 2 moles de  $\text{NH}_3$ .

On prendra :  $pK_d = 8,75$  et  $pK_s = 17$ .

On ne tiendra pas compte du caractère basique de  $\text{NH}_3$ .

## ● 223 ————— Concours Commun Polytechnique

30 min.

PSI

Potentiels d'électrodes

Les activités des solutés seront assimilées au rapport  $\frac{C_{\text{soluté}}}{C_0}$ , en prenant  $C_0 = 1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ .

1. Proposer un schéma réaliste d'une électrode de référence au calomel saturée en KCl, notée dans la suite ECS. Faire figurer, en particulier, les diverses espèces intervenant dans le couple redox mis en jeu. Le calomel est le chlorure de mercure (I) :  $\text{Hg}_2\text{Cl}_{2(\text{sol})}$ .
2. Cette électrode sert de référence. Quelle caractéristique doit posséder une telle électrode ?
3. Le potentiel électrochimique d'une espèce  $\text{A}^{z_i}$ , noté  $\tilde{\mu}_{\text{A}^{z_i}}$ , s'exprime par la relation :

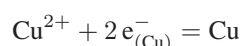
$$\tilde{\mu}_{\text{A}^{z_i}} = \mu_{\text{A}^{z_i}} + Z_i \mathcal{F} \phi_{\text{A}^{z_i}}$$

dans laquelle  $\mu_{\text{A}^{z_i}}$  est le potentiel chimique de l'espèce  $\text{A}^{z_i}$ ,  $Z_i$  le nombre algébrique de charges élémentaires (pour une espèce non chargée :  $Z_i = 0$ ),  $\phi_{\text{A}^{z_i}}$  le potentiel électrique, supposé uniforme, de la phase dans laquelle se trouve cette espèce et  $\mathcal{F}$  la constante de Faraday.

Le potentiel électrochimique de l'électron dans un métal M donné, noté  $\tilde{\mu}_e(\text{M})$  est posé égal à  $\tilde{\mu}_e(\text{M}) = -\mathcal{F} \phi_{\text{M}}$ . Dans cette expression,  $\mu_e(\text{M})$  est considéré constant quel que soit le métal M et  $\phi_{\text{M}}$  est le potentiel électrique du métal, supposé uniforme, dans lequel se trouve l'électron.

Pour un système mettant en jeu des espèces, électron compris, intervenant dans un équilibre électrochimique, la relation  $\sum_i \nu_i \tilde{\mu}_i = 0$  est vérifiée,  $\nu_i$  étant le coefficient stœchiométrique de l'espèce ( $i$ ).

Soit l'équilibre électrochimique qui a lieu à une électrode métallique de cuivre :

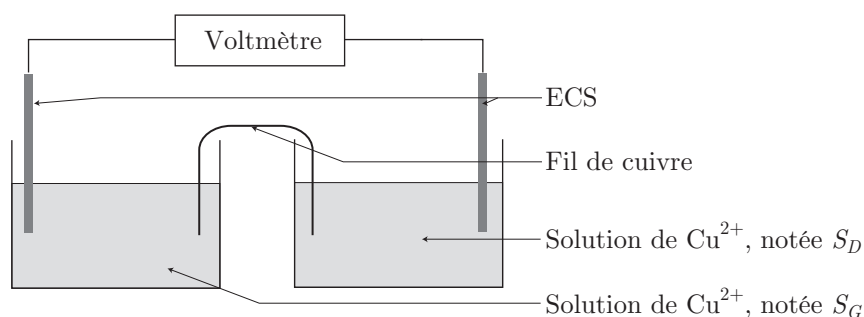


dans laquelle  $e_{(\text{Cu})}^-$  représente un électron du métal Cu.

Le métal est au potentiel  $\phi_{\text{Cu}}$  et la solution au potentiel  $\phi_S$ .

Établir l'expression donnant  $\phi_{\text{Cu}} - \phi_S$  en fonction des potentiels chimiques *standard*, du potentiel de l'électron dans Cu et de l'activité de  $\text{Cu}^{2+}$ .

4. L'électrode de référence au calomel saturée peut être étudiée de la même façon.
  - (a) En considérant l'équilibre électrochimique faisant intervenir les espèces majoritaires, établir la relation donnant  $\phi_{\text{Hg}} - \phi_S(\text{ECS})$  en fonction des potentiels chimiques *standard*, du potentiel chimique de l'électron et de l'activité des ions chlorure ;  $\phi_S(\text{ECS})$  est le potentiel électrique de la solution contenue à l'intérieur de l'électrode.
  - (b) Montrer que, dans le cas d'une solution saturée en KCl, cette différence de potentiel est constante.
5. Soit le montage suivant :



Un voltmètre permet de mesurer la différence de potentiel entre le mercure de l'ECS de droite et le mercure de l'ECS de gauche :  $\phi_{\text{Hg}_D} - \phi_{\text{Hg}_G}$ .

Cette différence de potentiel peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \mu = & \phi_{\text{Hg}_D} - \phi_S(\text{ECS})_D + \phi_S(\text{ECS})_D - \phi_{S_D} + \phi_{S_D} - \phi_{\text{Cu}} + \phi_{\text{Cu}} - \phi_{S_G} \\ & + \phi_{S_G} - \phi_S(\text{ECS})_G + \phi_S(\text{ECS})_G - \phi_{\text{Hg}_G} \end{aligned}$$

Exprimer cette différence en fonction des concentrations des ions  $\text{Cu}^{2+}$  dans les compartiments de gauche et de droite. Les potentiels de jonction liquide  $\phi_S(\text{ECS}) - \phi_S$ , où  $\phi_S(\text{ECS})$  est le potentiel électrique de la solution interne à l'ECS et  $\phi_S$  le potentiel électrique de la solution dans laquelle elle plonge, seront négligés.

6. Le compartiment de droite contient 20 mL d'une solution de  $\text{Cu}^{2+}$  à  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et 20 mL d'ammoniac à  $4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  ; le compartiment de gauche contient 20 mL d'une solution de  $\text{Cu}^{2+}$  à  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et 20 mL d'une solution d'ammoniac à  $2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . La différence de potentiel, mesurée à  $18^\circ\text{C}$ , vaut alors  $3,61 \cdot 10^{-2} \text{ V}$ .  
Cette différence de potentiel est interprétée par la formation d'un complexe très stable, de formule  $\text{Cu}(\text{NH}_3)_x^{2+}$ . En justifiant les approximations effectuées, en déduire la valeur de  $x$ .
7. Le même montage est repris, le compartiment de droite contient 20 mL d'une solution de  $\text{Cu}^{2+}$  à  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et 20 mL d'une solution d'ammoniac à

$2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  ; le compartiment de gauche contient 20 mL d'une solution de  $\text{Cu}^{2+}$  à  $1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et 20 mL d'eau. La valeur de la différence de potentiel est alors de  $3,59 \cdot 10^{-1} \text{ V}$ . En déduire la valeur de la constante de formation du complexe.

Dans les calculs, on prendra  $\frac{RT \ln 10}{F} \simeq 0,06 \text{ V}$  à  $18^\circ\text{C}$ .

## ● 224 ————— Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

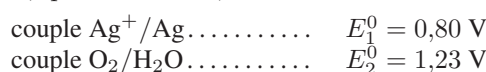
30 min.

Piles électrochimiques

MP-PC-PSI-PT

Données :

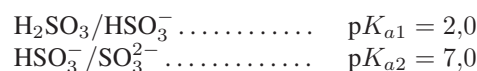
- Potentiels *standard* (à pH = 0 et  $25^\circ\text{C}$ ) :



- Produit de solubilité :



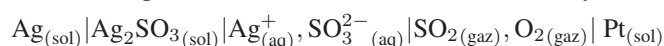
- Constantes d'acidité :



- Équilibre de dissolution :



À l'échelle du laboratoire, il existe des cellules potentiométriques permettant l'analyse de compositions gazeuses. La mesure de la teneur en dioxyde et trioxyde de soufre dans les gaz est intéressante puisqu'elle peut permettre l'étude des phénomènes de pollution. Les piles permettant ces mesures font intervenir des métaux de transition et sont, en général, à électrolyte solide (domaine étendu à des températures expérimentales). L'étude se fera, afin de simplifier, par analogie avec une pile classique (les solides sont purs et, pour les solutés, on confondra activité et rapport  $\frac{c_i}{c_0}$ ,  $c_i$  étant la concentration de l'espèce ( $i$ ) et  $c_0$  la concentration de référence égale à  $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ), fonctionnant à température ambiante et permettant la mesure de la teneur en dioxyde de soufre :



À gauche : couple  $\text{Ag}^+/\text{Ag}$  de potentiel *standard*  $E_1^0$

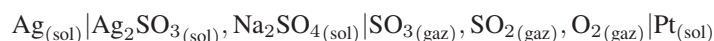
À droite : couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  de potentiel *standard*  $E_2^0$

1. Déterminer la solubilité de  $\text{Ag}_2\text{SO}_3$  en négligeant les propriétés basiques de l'ion sulfite  $\text{SO}_3^{2-}$ .
2. Déterminer la solubilité de  $\text{Ag}_2\text{SO}_3$  dans un milieu tamponné à pH = 4,0 en prenant en compte les propriétés basiques de l'ion sulfite. Pouvait-on prévoir qualitativement ce résultat ?
3. Écrire les demi-équations d'oxydo-réduction et l'équation-bilan de la réaction globale du fonctionnement de la pile en considérant la polarité selon les conventions habituelles et en justifiant le choix des espèces majoritaires (on pourra considérer que  $P_{\text{SO}_2} = 1 \text{ bar}$ ).

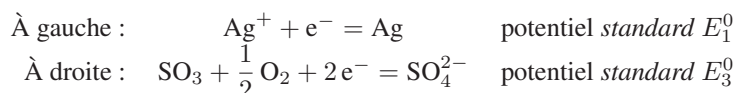
4. Exprimer la force électromotrice de la pile en fonction de  $E_1^0$ ,  $E_2^0$ ,  $P_{O_2}$ ,  $P_{SO_2}$ ,  $P_0$  (pression *standard* égale à 1 bar),  $pK$ ,  $pK_s$ ,  $pK_{a1}$  et  $pK_{a2}$ .

On utilisera la donnée :  $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln y \simeq 0,06 \times \log y$ .

5. Calculer la force électromotrice en considérant que  $P_{O_2} = P_{SO_2} = 1,0$  bar.
6. En réalité, la cellule galvanique utilisée comprend un électrolyte solide et fonctionne entre 700 et 800 K afin de permettre l'analyse d'un mélange gazeux des composés  $O_2$ ,  $SO_2$  et  $SO_3$  :



On considère les demi-équations d'oxydo-réduction de chaque demi-pile, sans tenir compte de la polarité :



Quel est le couple redox de la demi-pile de droite ?

7. On considère également l'équilibre (50), de constante thermodynamique  $K_2$ , en phase gazeuse :



Exprimer la force électromotrice de la pile en fonction de  $E_1^0$ ,  $E_3^0$ ,  $P_{SO_2}$ ,  $P_{O_2}$ ,  $P_0$ ,  $a_{Ag^+}$ ,  $a_{SO_4^{2-}}$  et  $K_2$  (la variable  $a_X$  représente l'activité de l'espèce X).

## ● 225 ————— Lycée Charlemagne, Paris

10 min.

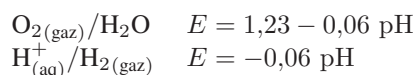
Diagrammes potentiel-pH

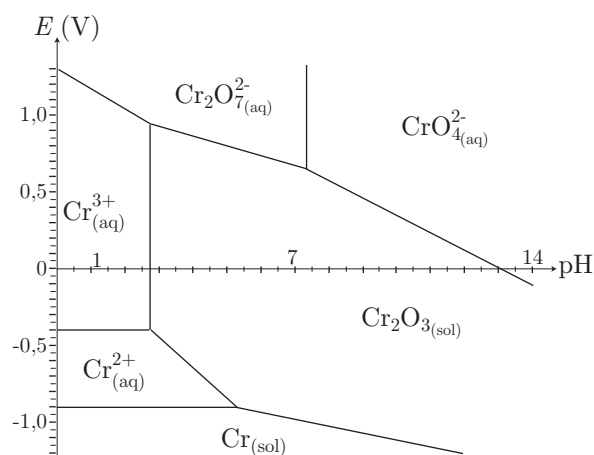
MP-PC-PSI-PT

On donne, ci-après, le diagramme potentiel-pH du chrome à 25°C, la concentration des espèces dissoutes étant de  $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

On prend ici :  $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,06 \text{ V}$  à 298 K.

On rappelle que, pour les couples d'oxydo-réduction de l'eau, le potentiel (exprimé en volts) varie en fonction du pH selon les lois :





1. Parmi les six espèces figurant sur le diagramme ci-dessus, quelles sont celles qui sont thermodynamiquement stables dans l'eau, à tout pH ? Quelles sont celles qui sont thermodynamiquement instables, à tout pH ?
2. On constate, expérimentalement, que le chrome métallique n'est apparemment pas attaqué par l'eau dans un vaste domaine de pH (entre pH = 3 et pH = 14). Quel nom porte ce phénomène ? Quelle en est la cause probable ?
3. Calculer la pente du segment séparant les domaines de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  et  $\text{CrO}_4^{2-}$ .

## ● 226 ————— Concours Polytechnique

15 min.

Diagrammes potentiel-pH

MP-PC-PSI-PT

On donne, à 298 K, les enthalpies libres molaires *standard* de formation suivantes :

$$\Delta_f G^0 (\text{Fe}^{2+}) = -78,9 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ et } \Delta_f G^0 (\text{Fe}^{3+}) = 4,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On donne :

- $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$  pour le Faraday ;
- $\frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \simeq 0,059 \text{ V}$  ;
- les produits de solubilité

$$K_{s1} = 2,6 \cdot 10^{-39} \text{ pour } \text{Fe}(\text{OH})_3 \text{ et } K_{s2} = 4,8 \cdot 10^{-17} \text{ pour } \text{Fe}(\text{OH})_2$$

- $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  pour la constante molaire des gaz parfaits.

1. Trouver les valeurs des potentiels *standard* des couples  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ .
2. Établir le diagramme potentiel-pH du fer, pour une concentration totale de fer dissous égale à  $C_t = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

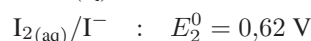
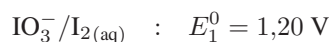


● **227** \_\_\_\_\_ **Lycée Hoche, Versailles**

20 min.

Diagrammes potentiel-pH

MP-PC-PSI-PT

On donne les potentiels *standard* des couples de l'iode suivants :

Établir le diagramme potentiel-pH du système de l'iode pour une concentration totale d'iode atomique dissous :  $[\text{I}]_{\text{total}} = C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

● **228** \_\_\_\_\_ **Concours Centrale**

30 min.

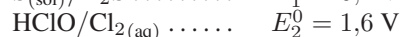
Diagrammes potentiel-pH

MP-PC-PSI-PT

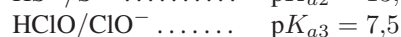
1. Tracer le diagramme potentiel-pH du couple S(0)/S(-II).
2. Tracer également le diagramme potentiel-pH des couples du chlore. Pour ce tracé, on conviendra que les concentrations des espèces dissoutes sont égales à  $C_1 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  à la frontière séparant les domaines d'existence de ces espèces.
3. Superposer les deux diagrammes précédents.
4. On fait barboter du dichlore  $\text{Cl}_2$  dans une solution de  $\text{H}_2\text{S}$  à  $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Que se passe-t-il ?

Données numériques :

- Potentiels *standard* à  $\text{pH} = 0$  et à 298 K :



- Constantes d'acidité à 298 K :



● **229** \_\_\_\_\_ **Lycée du Parc, Lyon**

40 min.

Diagrammes potentiel-pH

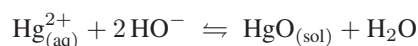
MP-PC-PSI-PT

Le mercure existe sous trois degrés d'oxydation : 0, +I, +II. L'ion mercure (I) est un ion diatomique et l'on a deux systèmes redox :



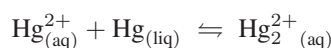
Dans le problème, la température est fixée à  $T = 298 \text{ K}$  et l'on prendra  $\frac{2,3 RT}{\mathcal{F}} = 0,06 \text{ V}$ .

En faisant varier le pH d'une solution acide ( $\text{pH} = 0$ ) renfermant des ions mercure (II)  $\text{Hg}_{(\text{aq})}^{2+}$ , on observe la formation d'un précipité blanc qui est de l'oxyde de mercure (II)  $\text{HgO}$ , suivant la réaction d'équation :



À la température considérée, le produit de solubilité de HgO est  $K_s = 4.10^{-26}$  et le produit ionique de l'eau est  $K_e = 10^{-14}$ .

- À quel pH (noté  $\text{pH}_1$ ) l'oxyde de mercure (II) commence-t-il à précipiter lorsque l'on fait croître le pH d'une solution initialement à  $\text{pH} = 0$  et renfermant  $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'ions mercure (II) ?
- Calculer la valeur du potentiel d'électrode  $E_1$  délimitant les domaines de prédominance des espèces chimiques telles que  $\text{Hg}_{2(\text{aq})}^{2+}$  et  $\text{Hg}_{(\text{liq})}$ , la concentration en  $\text{Hg}_{2(\text{aq})}^{2+}$  étant constante et égale à  $C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .
- (a) Exprimer la variation du potentiel du couple associant les degrés d'oxydation (+II) et (+I) du mercure en fonction du pH, lorsque initialement à  $\text{pH} = 0$ , les concentrations des espèces dissoutes sont égales à  $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  :
  - dans le cas où  $\text{pH} < \text{pH}_1$  (noté  $E_2$ ) ;
  - dans le cas où  $\text{pH} > \text{pH}_1$  (noté  $E_3$ ), préciser la valeur de  $E_3^0$ .
- (b) Calculer le pH (noté  $\text{pH}_2$ ) pour lequel le potentiel du couple  $\text{Hg}(+\text{II})/\text{Hg}(+\text{I})$  est égal à  $E_1$ .
- (c) Tracer l'allure du diagramme potentiel-pH dans la région :  $0 < \text{pH} < \text{pH}_2$ .
- À  $T = 298 \text{ K}$ , on met en présence, dans l'eau, de l'oxyde de mercure (II)  $\text{HgO}_{(\text{sol})}$  et du mercure  $\text{Hg}_{(\text{liq})}$ .
  - En s'aidant du diagramme potentiel-pH précédent, préciser quelles sont les espèces et les couples susceptibles d'exister.
  - Écrire l'équation de la réaction globale d'oxydo-réduction susceptible de se produire entre les différentes espèces.
  - Exprimer le potentiel (noté  $E_4$ ) pour  $\text{pH} > \text{pH}_2$ .
  - Représenter le diagramme potentiel-pH du mercure pour  $\text{pH} \in [0, 7]$ .
- (a) Calculer le potentiel *standard* du couple  $\text{Hg}_{(\text{aq})}^{2+}/\text{Hg}_{(\text{liq})}$ , noté  $E_5^0$ .
- En déduire la valeur de la constante d'équilibre, à  $T = 298 \text{ K}$ , de la réaction d'équation :



### ● 230 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

40 min.

Diagramme potentiel-pH

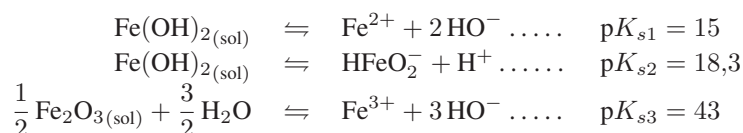
MP-PC-PSI-PT

On donne les valeurs numériques suivantes, à  $25^\circ\text{C}$  :

- Potentiels *standard* :

$$E^0(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = E_1^0 = -0,44 \text{ V} \quad E^0(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = E_2^0 = 0,77 \text{ V}$$

- Produits de solubilité :



- Produit ionique de l'eau :  $K_e = 10^{-14}$  ;

- On prendra :  $\frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \simeq 0,06 \text{ V}$ .

1. Déterminer le potentiel *standard* du couple  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}$  à  $25^\circ\text{C}$ .
2. Représenter le diagramme potentiel-pH d'un système faisant intervenir les espèces :  $\text{Fe}$ ,  $\text{Fe}^{2+}$ ,  $\text{Fe}^{3+}$ ,  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ ,  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  et  $\text{HFeO}_2^-$  (ion ferrite).  
On admettra que la concentration totale de l'élément fer dissous vaut  $C_t = 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .  
On expliquera, avec soin, les phénomènes qui se produisent pour  $9,39 < \text{pH} < 12,56$ .

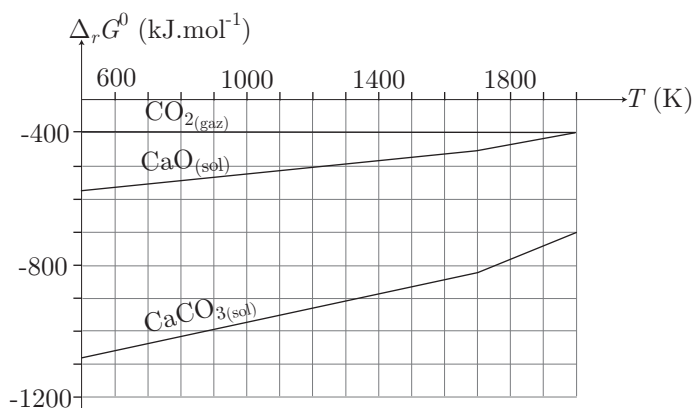
### ● 231 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

Diagrammes d'Ellingham

MP-PC-PSI-PT

La chaux est préparée à partir de calcaire, considéré ici comme du carbonate de calcium pur, par décomposition thermique de  $\text{CaCO}_3$  libérant du dioxyde de carbone gazeux. Cette réaction se pratique dans un *four à chaux*. Elle peut être discutée à l'aide du diagramme de variation d'enthalpie libre *standard* de formation présenté ci-dessous :



Évolution, en fonction de la température, de l'enthalpie libre *standard* de formation de la chaux et du carbonate de calcium solides ainsi que du dioxyde de carbone gazeux.

1. Pourquoi la courbe de ce diagramme relative à  $\text{CO}_2(\text{gaz})$  a-t-elle une pente nulle alors que celles relatives à  $\text{CaO}(\text{sol})$  et  $\text{CaCO}_3(\text{sol})$  ont une pente positive ?
2. Préciser le phénomène qui produit la rupture de pente vers 1750 K sur les courbes relatives à  $\text{CaO}(\text{sol})$  et  $\text{CaCO}_3(\text{sol})$ , en expliquant pourquoi la pente est supérieure aux températures les plus élevées.
3. Extraire du diagramme la température où deux solides peuvent coexister à la pression partielle de  $\text{CO}_2$  égale à  $P_0 = 1 \text{ bar}$ .
4. Les fours à chaux sont des réacteurs ouverts, fonctionnant à la pression atmosphérique. Pourquoi leur température de travail est-elle de 1500 K ?

### ● 232 ————— Lycée Charlemagne, Paris

20 min.

Diagrammes d'Ellingham

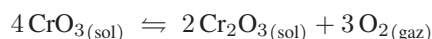
MP-PC-PSI-PT

1. Le trioxyde de chrome (VI)

ÉNONCÉS

Ce composé est utilisé dans la synthèse des rubis artificiels, solutions solides d'alumine et d'oxyde de chrome (III). On étudie sa stabilité à l'air libre.

On considère la réaction suivante :

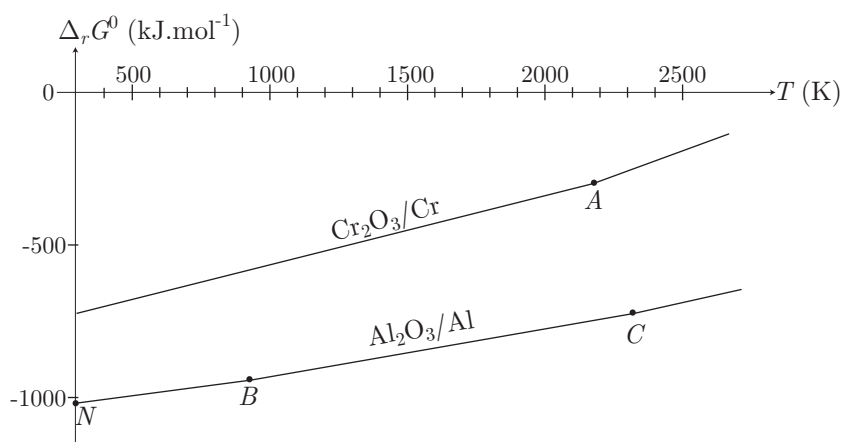


- Calculer l'enthalpie *standard* et l'entropie *standard* de cette réaction, puis son enthalpie libre *standard* à 300 K.
- Montrer que le trioxyde de chrome est instable à 300 K en présence d'air (on prendra  $P_{\text{O}_2} = 0,2$  bar dans l'air). Que doit-il advenir, théoriquement, d'un cristal de trioxyde de chrome laissé à l'air ambiant ?  
On donne :  $RT \ln 0,2 \simeq -4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  à 300 K.
- Montrer, sans calcul supplémentaire, que cette instabilité demeure si  $T > 300$  K.

## 2. Étude de la réduction de $\text{Cr}_2\text{O}_3$ par Al

Cette réduction constitue l'étape-clé de la métallurgie du chrome. Si Moissan, en 1893, mit au point la réduction de l'oxyde de chrome par le carbone, c'est Goldschmidt qui découvrit l'aluminothermie qui, seule, permettait de préparer de grandes quantités de chrome pur. Étudions, avec les moyens actuels, les aspects thermodynamiques de cette réaction.

- Le diagramme d'Ellingham des systèmes  $\text{Cr}_2\text{O}_3/\text{Cr}$  et  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}$  est fourni, entre 300 K et 2 500 K :



Ce diagramme présente l'enthalpie libre *standard* de formation des oxydes (de chrome ou d'aluminium) pour une mole de dioxygène, en fonction de la température.

Écrire les équations-bilan donnant la réaction de formation de chaque oxyde avec la convention adoptée.

- Aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , on observe un faible changement de pente. À quel phénomène physique correspond chacun de ces points ? Donner le sens de variation de la pente, lorsque  $T$  augmente, pour le point  $B$ , grâce à un raisonnement qualitatif que l'on exposera clairement.

(c) Calculer la pente du segment  $NB$ , puis celle du segment  $BC$ .

*Étude de la réaction de réduction*

On précise qu'à l'état solide ou liquide, les espèces  $Al$ ,  $Al_2O_3$ ,  $Cr$ ,  $Cr_2O_3$  sont totalement non miscibles.

(d) Écrire l'équation-bilan de la réduction d'une mole de  $Cr_2O_3$ , oxyde de chrome (III) par l'aluminium, à 300 K.

(e) L'enthalpie *standard* de cette réaction vaut :  $-560 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Utiliser le diagramme pour déterminer le signe de l'affinité chimique de cette réaction, à toute température. Conclure sur la possibilité thermodynamique de la réduction de l'oxyde de chrome (III) par l'aluminium et sur l'évolution du système lorsqu'on part des espèces  $Cr_2O_3$  et  $Al$ .

*Données numériques :*

- constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- pression de référence :  $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$  ;
- température de fusion ( $T_{\text{fus}}$  en  $^\circ\text{C}$ ) et de vaporisation ( $T_{\text{vap}}$  en  $^\circ\text{C}$ ) de quelques corps purs :

Nom	Formule	$T_{\text{fus}}$	$T_{\text{vap}}$
Aluminium.....	Al	660	2 520
Alumine.....	$Al_2O_3$	2 050	2 980
Chrome.....	Cr	1 910	2 670
Oxyde de chrome (III)	$Cr_2O_3$	2 440	4 000

- enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$  en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ), entropies molaires *standard* ( $S^0$  en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ), enthalpies *standard* de fusion ( $\Delta_{\text{fus}} H^0$  en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) et enthalpies *standard* de vaporisation ( $\Delta_{\text{vap}} H^0$  en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ). Ces grandeurs thermodynamiques sont supposées indépendantes de la température :

Formule	$\Delta_f H^0$	$S^0$	$\Delta_{\text{fus}} H^0$	$\Delta_{\text{vap}} H^0$
$Al_{(\text{sol})}$	0	27	10	290
$Al_2O_{3(\text{sol})}$	-1 700	51	110	-
$Cr_{(\text{sol})}$	0	24	20	350
$CrO_{3(\text{sol})}$	-590	73	-	-
$Cr_2O_{3(\text{sol})}$	-1 140	81	-	-
$O_{2(\text{gaz})}$	0	205	-	-

## ● 233 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

*Diagrammes d'Ellingham*

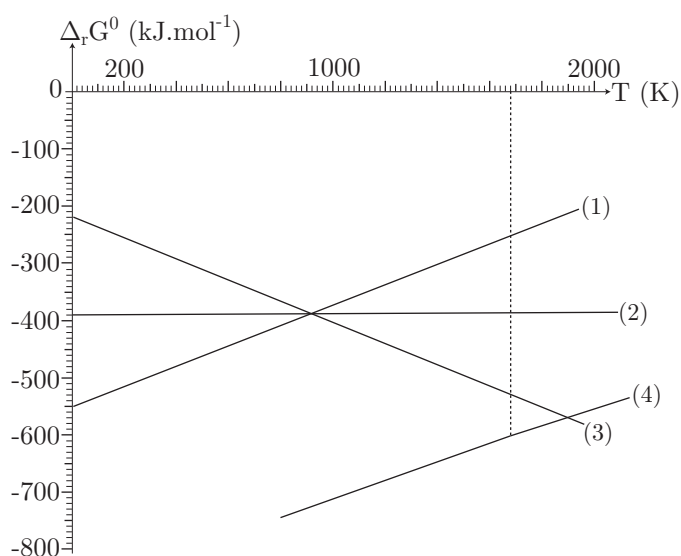
MP-PC-PSI-PT

Le silicium peut être obtenu par réduction de la silice solide,  $SiO_2$ . Cette réduction est étudiée à l'aide des diagrammes d'Ellingham.

1. En quoi consiste l'approximation d'Ellingham ?
2. Les droites d'Ellingham ont été tracées (ci-dessous) pour le carbone et ses oxydes (droites 1, 2 et 3). Attribuer chacune des droites à un couple en fonction du signe de la pente.

En déduire les domaines d'existence ou de prédominance des différentes espèces, ainsi que le diagramme d'Ellingham des différents couples.

3. Donner les équations des droites (ou segments) d'Ellingham pour le silicium dans le domaine de température [0 K ; 2 000 K]. Ces segments sont représentés sur la figure suivante (droite 4).
4. Pour quelle température et avec quel réducteur peut-on obtenir du silicium ? sous quelle forme physique ce dernier est-il récupéré ?



Données numériques :

- Enthalpies *standard* de formation et entropies molaires *standard* à 298 K :

Composé	$\Delta_f H^0$ en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$	$S^0$ en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
$\text{Si}_{(\text{sol})}$	–	19
$\text{SiO}_{2(\text{sol})}$	–910	40
$\text{C}_{(\text{sol})}$	–	6
$\text{O}_{2(\text{gaz})}$	–	205
$\text{CO}_{(\text{gaz})}$	–110	200
$\text{CO}_{2(\text{gaz})}$	–390	210

- Température de fusion du silicium :  $T_{\text{fus}} = 1\,683\text{ K}$  ;
- Enthalpie *standard* de fusion du silicium :  $\Delta_{\text{fus}} H^0 = 46\text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  à  $1\,683\text{ K}$ .

## ● 234 ————— Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

20 min.

Diagrammes d'Ellingham

MP-PC-PSI-PT

Données numériques :

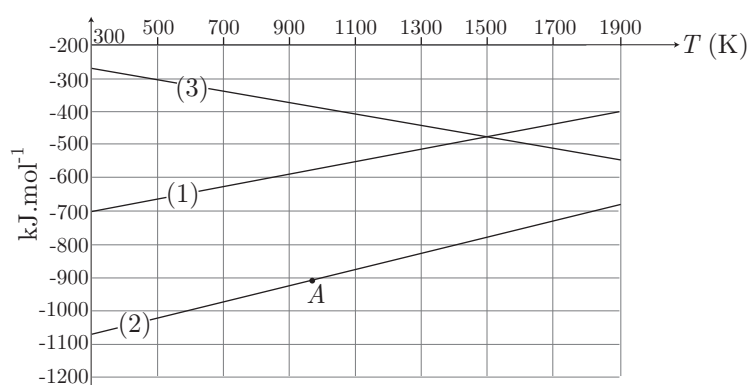
- constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31\text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- pression *standard* :  $P_0 = 1\text{ bar}$  ;
- enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$ ) et entropies molaires *standard* ( $S^0$ ) :

	$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	$S^0$ (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )
$\text{Nb}_{(\text{sol})}$ . . . . .	0	36,5
$\text{Nb}_2\text{O}_5_{(\text{sol})}$ . . . . .	-1 900	137
$\text{O}_2_{(\text{gaz})}$ . . . . .	0	205
$\text{Al}_{(\text{sol})}$ . . . . .	0	28,3
$\text{Al}_{(\text{liq})}$ . . . . .	10,6	39,6
$\text{Al}_2\text{O}_3_{(\text{sol})}$ . . . . .	-1 680	50,9

### 1. Diagramme d'Ellingham

- (a) Qu'est-ce que d'un diagramme d'Ellingham ? Qu'appelle-t-on approximation d'Ellingham ? Comment cette approximation se traduit-elle géométriquement sur un diagramme d'Ellingham ?

Le diagramme d'Ellingham des couples  $\text{Nb}_2\text{O}_5/\text{Nb}$  (courbe 1),  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}$  (courbe 2) et  $\text{CO}/\text{C}$  (courbe 3) est donné ci-dessous :



- (b) Le point  $A$  de la courbe (2) est un point anguleux (ce qui se voit mal, compte tenu des échelles du diagramme).  
Proposer une interprétation et calculer numériquement sa température,  $T_A$ , en utilisant les données thermodynamiques.
- (c) Dans tout le domaine de température considéré,  $\text{CO}$  est gazeux et  $\text{C}$  est solide. Interpréter le signe de la pente de la courbe (3).

### 2. Exploitation du diagramme

- (a) Réduction de l'oxyde par le carbone

- Dans quel domaine de température peut-on obtenir du niobium en réduisant  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  par le carbone ?
- Écrire l'équation-bilan traduisant cette réaction (avec un coefficient stœchiométrique de 1 pour  $\text{Nb}_2\text{O}_5$ ).
- S'agit-il d'une réaction endo- ou exothermique ?
- Quelles conclusions pratiques peut-on tirer de ces résultats ?

- (b) Justifier, à l'aide du diagramme que, dans tout le domaine de température, on peut également obtenir  $\text{Nb}_{(\text{sol})}$  par l'aluminium et écrire l'équation-bilan correspondante (avec un coefficient stœchiométrique de 1 pour  $\text{Nb}_2\text{O}_5_{(\text{sol})}$ ).

## ● 235 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

Diagrammes d'Ellingham

MP-PC-PSI-PT

L'oxyde de thallium est utilisé dans la fabrication de verre à indice de réfraction élevé.

- Vérifier que l'entropie *standard* de fusion du thallium à 304°C est de l'ordre de  $7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ , valeur que l'on utilisera par la suite.
- Écrire l'équation-bilan de la réaction ( $\mathcal{E}_1$ ) de formation de l'oxyde de thallium  $\text{Tl}_2\text{O}$  solide à partir du thallium (solide ou liquide) et du dioxygène gazeux. Le coefficient stœchiométrique du dioxygène sera pris égal à 1.
- Rappeler en quoi consiste l'approximation d'Ellingham.
- Donner l'expression de l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G_1^0$  associée à la réaction ( $\mathcal{E}_1$ ) entre 300 K et 1 500 K, en se plaçant dans l'approximation d'Ellingham.
- Calculer, à 300 K et à 1 500 K, la valeur de la pression de dioxygène à l'équilibre. Comment appelle-t-on cette pression ? En déduire la forme stable du thallium à 300 K et à 1 500 K, sous une pression de dioxygène de 21 300 Pa.  
On pourra prendre  $R = 8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  (constante molaire des gaz parfaits) et  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ .
- Tracer le graphe décrivant l'évolution de  $\Delta_r G_1^0$  en fonction de  $T$  sur l'intervalle de température 300 K–1 500 K. Superposer la droite correspondant à l'oxydation ( $\mathcal{E}_2$ ) du cuivre (Cu) solide en oxyde (CuO) solide, entre 300 K et 1 350 K, toujours pour une mole de dioxygène gazeux :

$$\Delta_r G_2^0(T) = -312 + 0,192 \times T \quad (\text{en kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$$

- Dans quel domaine de température le cuivre métal peut-il réduire l'oxyde de thallium  $\text{Tl}_2\text{O}$  ? Écrire l'équation-bilan de la réaction correspondante.

Données numériques :

- Enthalpie molaire *standard* de fusion du thallium :

$$\Delta_{\text{fus}} H^0 = 4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ à } 304^\circ\text{C}$$

- Température de fusion du thallium sous  $P_0 = 1 \text{ bar}$  :  $T_{\text{fus}} = 304^\circ\text{C}$ .
- Enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$ ) et entropies molaires *standard* ( $S^0$ ) à 300 K :

	$\text{Tl}_2\text{O}_{(\text{sol})}$	$\text{Tl}_{(\text{sol})}$	$\text{O}_{2(\text{gaz})}$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	-180	0	0
$S^0$ (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ )	125	65	206

## ● 236 ————— Lycée Kléber, Strasbourg

10 min.

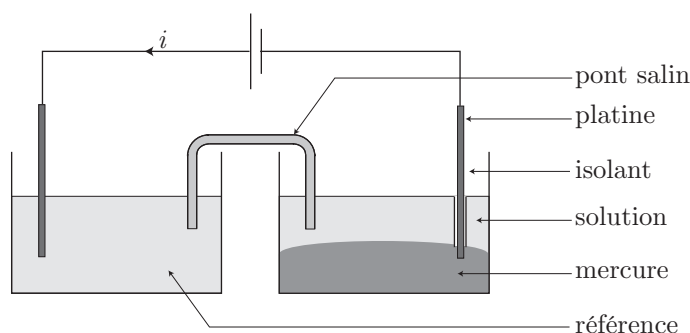
Courbes intensité-potentiel

MP-PC-PSI

À l'aide du montage schématisé ci-dessous, on réduit totalement, sur une cathode de mercure, une solution acide contenant du chlorure de zinc ( $\text{Zn}^{2+} + 2 \text{Cl}^-$ ), du chlorure de nickel ( $\text{Ni}^{2+} + 2 \text{Cl}^-$ ) et du chlorure de cuivre ( $\text{Cu}^{2+} + 2 \text{Cl}^-$ ). Lorsque l'électrolyse des ions métalliques est finie, on coupe le courant et on constate les phénomènes suivants :



- même si la solution ne contient pas d'oxygène dissous, le zinc (amalgamé au mercure de la cathode) repasse en solution ;
- le cuivre amalgamé n'est pas redissous en l'absence d'oxygène dissous, mais il repasse en solution si l'on introduit de l'oxygène dans la solution ;
- le nickel (amalgamé lui aussi) n'est jamais redissous spontanément.



Prévoir la position des courbes intensité-potentiel de ces systèmes sur mercure et expliquer les phénomènes observés.

● **237**

**Concours du CAPES**

15 min.

MP-PC-PSI

*Courbes intensité-potentiel*

Le zinc est préparé industriellement par dépôt électrolytique du métal sur une électrode en aluminium, à partir d'une solution aqueuse de sulfate de zinc (II) et d'acide sulfurique. L'anode est une électrode de plomb recouverte d'oxyde de plomb  $\text{PbO}_2(\text{sol})$ . L'ion sulfate n'intervient pas dans les conditions de l'électrolyse.

1. Quelles réactions électrochimiques peut-on attendre lors de cette électrolyse, à chaque électrode ?  
Sachant que, sur l'aluminium, la surtension de réduction de  $\text{H}^+$  est de l'ordre de  $-1 \text{ V}$  et que la surtension de réduction de l'ion  $\text{Zn}^{2+}$  est très faible, justifier l'emploi du métal aluminium pour former la cathode.
2. (a) Quelle caractéristique d'une réaction d'oxydo-réduction peut être étudiée par les courbes intensité-potentiel ?  
Pourquoi indique-t-on l'intensité ou la densité de courant sur l'un des axes ?  
(b) Dessiner l'allure des courbes intensité-potentiel correspondant aux différentes réactions envisagées.  
Conclure sur les réactions mises en jeu aux deux électrodes.  
(c) Le courant anodique peut-il présenter un palier de diffusion ? Le courant cathodique peut-il présenter un palier de diffusion ? Justifier l'existence éventuelle d'un tel palier.  
(d) Justifier que la tension appliquée ne doit pas être très importante. Que se passerait-il si l'on appliquait une tension de l'ordre de  $5 \text{ V}$  ?
3. Dans les conditions industrielles, la surface totale de la cathode d'aluminium est  $S = 3,2 \text{ m}^2$ . Un courant d'intensité  $I = 115\,000 \text{ A}$  parcourt le bain pendant

$\Delta t = 24$  h. Déterminer la masse de zinc déposée et l'épaisseur de la couche de zinc obtenue.

Données :

- Potentiel *standard* à  $\text{pH} = 0$  et à  $298$  K :

$$\begin{aligned} E^0 \left( \text{H}_{(\text{aq})}^+ / \text{H}_{2(\text{gaz})} \right) &= 0,00 \text{ V} \\ E^0 \left( \text{O}_{2(\text{gaz})} / \text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})} \right) &= 1,23 \text{ V} \\ E^0 \left( \text{Zn}_{(\text{aq})}^{2+} / \text{Zn} \right) &= -0,76 \text{ V} \end{aligned}$$

- Faraday :  $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- Masse molaire atomique du zinc :  $M = 65,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- Masse volumique du zinc :  $\rho = 7,14 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

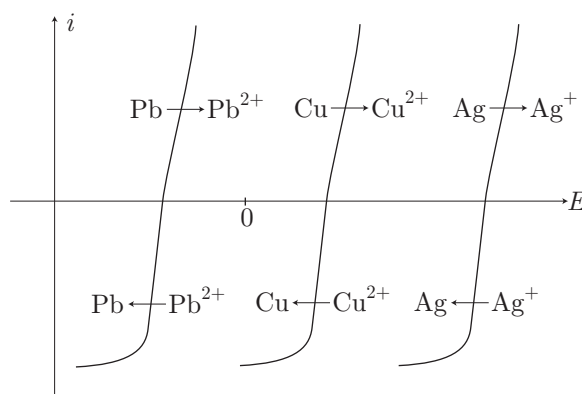
### ● 238 ————— Concours Commun Polytechnique

30 min.

Courbes intensité-potentiel

MP-PC-PSI

On met du cuivre impur (contenant également du plomb et de l'argent) à l'anode d'une cellule d'électrolyse, dont la cathode est composée d'acier inoxydable. On représente le diagramme intensité-potentiel ci-dessous :



1. Écrire la(les) réaction(s) observée(s) à l'anode.
2. Même question à la cathode.

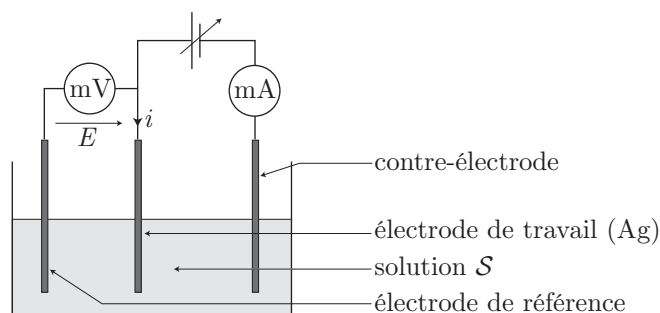
### ● 239 ————— Concours Centrale

15 min.

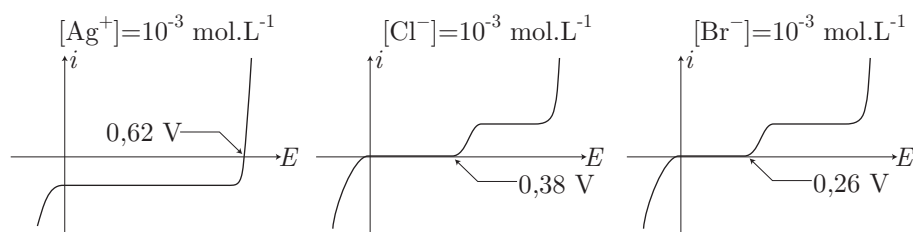
Diagrammes intensité-potentiel

MP-PC-PSI

On réalise le montage schématisé ci-dessous :



En fonction de l'électrolyte contenu dans la solution  $S$ , on enregistre les courbes de polarisation (intensité-potentiel) suivantes :



Aucun dégagement gazeux n'est observé à l'anode.

1. Commenter les courbes et attribuer une réaction électrochimique aux diverses parties de ces courbes.
2. Évaluer :
  - (a) le potentiel *standard* du couple  $\text{Ag}^+/\text{Ag}$  ;
  - (b) le produit de solubilité de  $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$  ;
  - (c) le produit de solubilité de  $\text{AgBr}_{(\text{sol})}$ .

## ● 240 ————— Concours Commun Polytechnique

20 min.

Courbes intensité-potentiel

MP-PC-PSI

Le dichlore est obtenu par électrolyse d'une solution aqueuse concentrée de chlorure de sodium (la saumure). Celle-ci doit être traitée préalablement à l'aide de carbonate ou de chlorure de baryum afin d'éliminer les ions sulfate, puis à l'aide de soude et de carbonate de sodium pour éliminer les ions calcium, magnésium et autres ions métalliques gênants.

Il existe différents procédés :

- cellules à diaphragme, non étudiées dans ce problème ;
- cellules à membranes ;
- cellules à cathode de mercure.

Données : potentiels *standard*, à  $25^\circ\text{C}$  et à  $\text{pH} = 0$  :

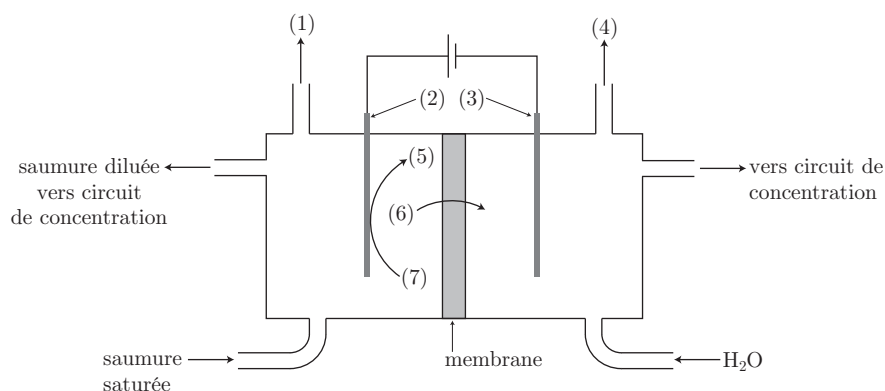
$$\begin{aligned} E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) &= 1,23 \text{ V} & E^0(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) &= 1,39 \text{ V} \\ E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) &= 0,00 \text{ V} & E^0(\text{Na}^+/\text{Na}) &= -2,71 \text{ V} \end{aligned}$$

### I- Étude préliminaire

1. D'après les valeurs des potentiels *standard*, quelles sont les demi-équations d'oxydo-réduction possibles à l'anode ? à la cathode ?
2. À quelle réaction d'oxydo-réduction pourrait-on s'attendre au cours de l'électrolyse en l'absence de surtension au niveau des électrodes ?

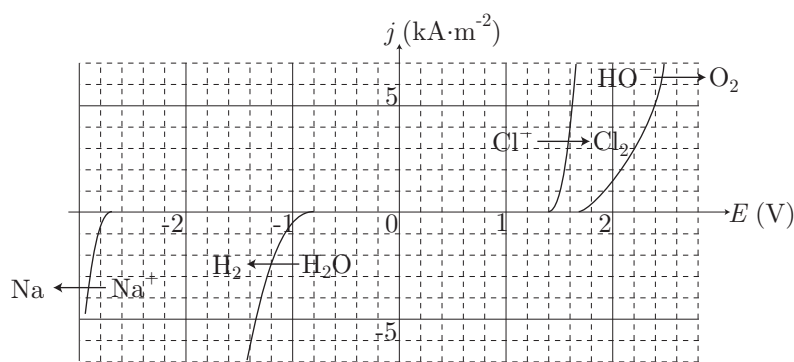
### II- Procédé à cellules à membranes

Un schéma de principe d'une cellule à membrane, à compléter, est représenté ci-après :



Les anodes sont de type DSA (*Dimensionally Stable Anodes*) en titane recouvert d'oxydes de titane et de ruthénium, les cathodes sont en nickel. La séparation entre les compartiments cathodique et anodique est constituée de membranes cationiques (perméables aux cations) très peu conductrices. Ces membranes sont des polymères perfluorosulfoniques ou perfluorocarboxyliques.

On obtient les courbes densité de courant-potentiel suivantes :



1. Quelle est la réaction qui a effectivement lieu dans ce procédé pour une valeur de densité de courant n'excédant pas les limites du tracé des courbes ?
2. À l'aide des courbes densité de courant-potentiel, donner un nom à chacun des numéros (1) à (8) du schéma de principe.

La densité de courant  $j$  utilisée dans ce procédé est égale à  $4 \text{ kA} \cdot \text{m}^{-2}$ .

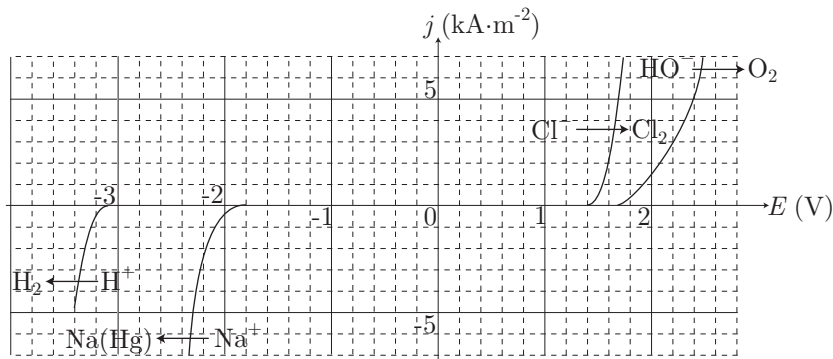
3. Quelle est la valeur de la tension appliquée aux bornes de l'électrolyseur pour ce procédé.

Le dichlore produit sort des cellules à 90°C. Il est saturé en vapeur d'eau. Il est donc refroidi (condensation de la majeure partie de la vapeur d'eau) puis séché avec de l'acide sulfurique concentré dans des tours à garnissage. Le dichlore est transporté liquéfié, comprimé à 3,5 bar.

### III- Procédé à cellules à cathodes de mercure

Chaque cellule fait 25 à 30 m<sup>2</sup> de surface sur 30 cm de hauteur. Elle contient environ 250 anodes DSA. Leur durée de vie est de 5 à 8 ans. La cathode est constituée d'un lit de mercure (3 à 4 tonnes par cellule) situé sur un plan incliné au fond de la cellule. Les anodes sont disposées parallèlement à la surface du mercure, à une distance de l'ordre de 1 cm. La vitesse d'écoulement du mercure est d'environ 1 m · s<sup>-1</sup> et la consommation du mercure est de l'ordre de 10 g par tonne de dichlore. Une unité de production moyenne de 250 000 t de dichlore par an nécessite l'utilisation d'une centaine de cellules.

Du fait de la présence de la cathode au mercure et des anodes DSA, on obtient les courbes densité de courant-potentiel suivantes :



- Quelle est la réaction qui a lieu réellement dans la cellule à électrolyse pour une valeur de densité de courant n'excédant pas les limites du tracé des courbes ?
- Sachant que la tension appliquée est de 4 V, quelle est la densité de courant qui circule dans le circuit ?

L'amalgame Na(Hg) qui s'écoule par gravité (du fait du plan incliné) est envoyé dans un décompresseur (cylindre en acier, garni à l'intérieur de morceaux de graphite) où, par réaction avec de l'eau adoucie, on régénère le mercure et on obtient de la soude et du dihydrogène.

- Écrire l'équation-bilan de cette réaction.

Le mercure est recyclé ; la lessive de soude formée (NaOH de concentration égale à 740 g · L<sup>-1</sup>) est évacuée par le trop plein.

- Comparer les avantages et les inconvénients des deux procédés étudiés dans cet exercice.

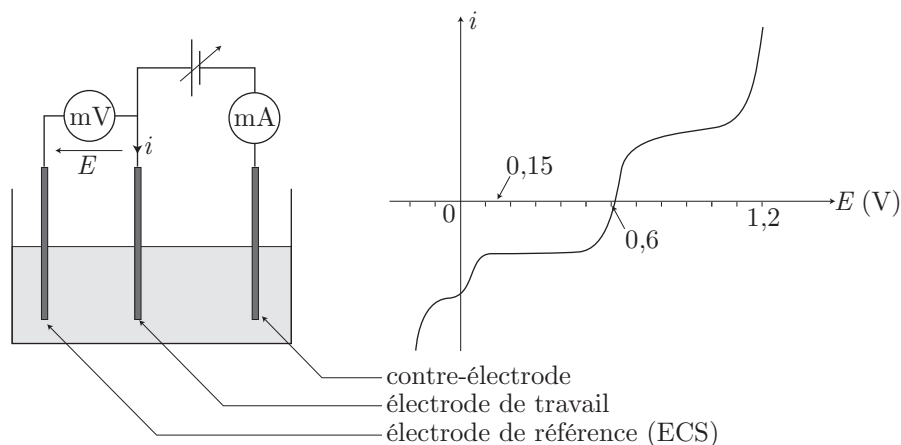
## ● 241 ————— Concours Centrale-Supélec

30 min.

Courbes intensité-potentiel

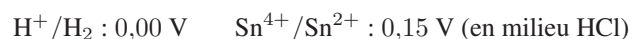
MP-PC-PSI

Le montage ci-dessous permet le relevé de courbes intensité-potentiel de systèmes électrochimiques ; l'électrode de travail est une électrode de platine. Par convention, un courant anodique est positif et un courant cathodique est négatif.



Indications :

- potentiels redox *standard* à 25°C :



- pour l'iode au degré d'oxydation zéro, on ne tiendra compte que de l'espèce  $\text{I}_2$  et pas du tout de l'espèce  $\text{I}_3^-$  ;
- les couples  $\text{H}^+/\text{H}_2$  et  $\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}^-$  sont des systèmes électrochimiques rapides sur électrode de platine ;
- les couples  $\text{Sn}^{4+}/\text{Sn}^{2+}$  et  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  sont des systèmes électrochimiques lents sur électrode de platine (on donne l'ordre de grandeur des surtensions en valeur absolue : 0,1 V).

### 1. Étude des courbes intensité-potentiel

- Qu'appelle-t-on système électrochimique rapide ? système électrochimique lent ? Donner l'allure des courbes  $i - E$  correspondantes.
- Lorsque la solution aqueuse (acidifiée à  $\text{pH} = 0$ ) contient, comme espèces électrochimiques :  $\text{H}^+$ ,  $\text{I}^-$ ,  $\text{I}_2$  et  $\text{Sn}^{4+}$  (en concentrations comparables), l'allure de la courbe  $i - E$  est celle donnée ci-dessus.  
Interpréter l'allure de cette courbe. On identifiera les réactions électrochimiques mises en jeu.
- Donner l'allure de la courbe  $i - E$  lorsque la solution aqueuse (à  $\text{pH} = 0$ ) contient, comme espèces électroactives :  $\text{H}^+$ ,  $\text{Sn}^{2+}$ ,  $\text{Sn}^{4+}$  et  $\text{I}^-$  (les concentrations des espèces  $\text{Sn}^{2+}$ ,  $\text{Sn}^{4+}$  et  $\text{I}^-$  sont comparables).

- (d) Même question si la solution (à  $\text{pH} = 0$ ) contient  $\text{H}^+$ ,  $\text{Sn}^{4+}$  et  $\text{I}^-$  (les concentrations des espèces  $\text{Sn}^{4+}$  et  $\text{I}^-$  sont comparables).

### 2. Titration suivie par potentiométrie à courant nul

On veut titrer une solution contenant des ions  $\text{Sn}^{2+}$  par une solution de diiode. On utilise la méthode classique de potentiométrie à intensité nulle. L'électrode de mesure est en platine et le  $\text{pH}$  de la solution est maintenu à 0.

On note  $c_0$  la concentration en  $\text{Sn}^{2+}$ ,  $V_0$  le volume de cette solution,  $c$  la concentration de la solution de  $\text{I}_2$ ,  $V$  le volume versé,  $V_{\text{eq}}$  le volume versé à l'équivalence.

On pose :  $x = \frac{V}{V_{\text{eq}}}$ .

- (a) Donner l'allure de la variation du potentiel  $E$  de l'électrode de platine au cours du titrage, en fonction de  $x$ . Calculer la valeur de  $E$  pour  $x = 0,5$ .
- (b) Lorsqu'on effectue ce titrage expérimentalement, on observe que le potentiel n'est pas stable avant l'équivalence ; le relevé de mesures n'est possible qu'après l'équivalence. Expliquer pourquoi en vous servant des courbes  $i - E$  de la question 1.

### 3. Titration suivie par potentiométrie à courant imposé

Pour améliorer le titrage, on fait passer un courant (très faible et constant), l'électrode de platine jouant le rôle d'anode ; les variations de concentration des différentes espèces tiennent essentiellement à la réaction de titrage, la microélectrolyse réalisée ne formant et ne consommant aucune espèce, car l'intensité choisie est très faible. Expliquer l'intérêt de cette méthode.

## ● 242

## Concours E3A

30 min.

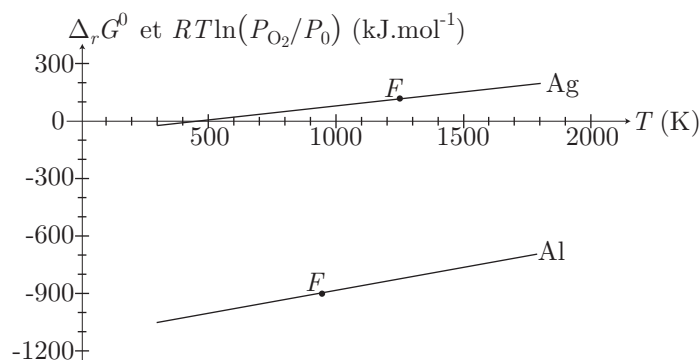
Corrosion et protection des métaux

MP-PC-PSI

L'objet de cet exercice est d'étudier sous quelles conditions de température et de pression un métal  $M$  peut être oxydé suivant la réaction :



Le tracé du diagramme d'Ellingham de l'argent et de l'aluminium (pour une mole de dioxygène) est reproduit sur la figure ci-dessous.



- Rappeler les conditions de l'approximation d'Ellingham.  
Que représentent, sur le diagramme, l'ordonnée à l'origine et la pente d'une droite ?  
Comment explique-t-on le changement d'une pente sur une courbe d'Ellingham ?
- Dans l'intervalle de température [298 K, 2200K], exprimer l'enthalpie libre *standard* de la réaction d'oxydation du nickel en fonction de la température, pour une mole de dioxygène, en se plaçant dans l'approximation d'Ellingham.  
Tracer, sur le diagramme précédent (que l'on reproduira) celui correspondant au nickel sur cet intervalle de températures.
- Quelles sont les conséquences d'une augmentation de température à pression constante, puis d'une augmentation de pression à température constante, sur cet équilibre (justifier qualitativement la réponse) ?
- Sur le même graphique, tracer le graphe de  $RT \ln \left( \frac{P_{O_2}}{P_0} \right)$  en fonction de la température, pour les deux pressions partielles suivantes :

$$P_{O_2} = 0,2 \text{ bar et } P_{O_2} = 10^{-10} \text{ bar avec } P_0 = 1 \text{ bar}$$

- En utilisant l'affinité chimique, retrouver les domaines d'existence du métal et de l'oxyde sur le diagramme d'Ellingham, pour une pression partielle de dioxygène de  $10^{-10}$  bar.
- Évaluer, en utilisant la figure ci-dessus et en reportant les éventuels tracés :
  - pour l'argent, la température d'équilibre d'oxydation dans l'air ;
  - pour le nickel et l'aluminium, la pression de dioxygène à l'équilibre, appelée *pression de corrosion*, à 1600 K.  
*Il est rappelé que l'air, sous une pression de 1 bar et à la température de 298 K, renferme 20% de dioxygène.*
- Expliquer pourquoi la plupart des métaux subissent dans l'air une oxydation à la température ambiante.
- Ces métaux subissant l'oxydation dans l'air doivent être protégés. Citer deux méthodes usuelles pour éviter ce phénomène.

*Données numériques :*

- constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
- enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$  en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) à 298 K, entropies molaires *standard* ( $S^0$  en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) à 298 K, températures de fusion ( $T_f$  en K) et enthalpies *standard* de fusion ( $\Delta_{\text{fus}} H^0$  en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) à  $T_{\text{fus}}$  :

	$\Delta_f H^0$	$S^0$	$T_{\text{fus}}$	$\Delta_{\text{fus}} H^0$
$\text{Ag}_{(\text{sol})}$	0	42,5	1 235	11,3
$\text{Ag}_2\text{O}_{(\text{sol})}$	-31,0	121,3	-	-
$\text{Ni}_{(\text{sol})}$	0	29,9	1 725	17,6
$\text{NiO}_{(\text{sol})}$	-244,6	38,0	2 263	-
$\text{Al}_{(\text{sol})}$	0	28,3	933	10,9
$\text{Al}_2\text{O}_3_{(\text{sol})}$	-1 676,0	50,9	2 320	-
$\text{O}_2_{(\text{gaz})}$	0	205,2	-	-



## ● 243 ————— Concours ESTP - ENSAM

60 min.

### Pyroméallurgie du plomb

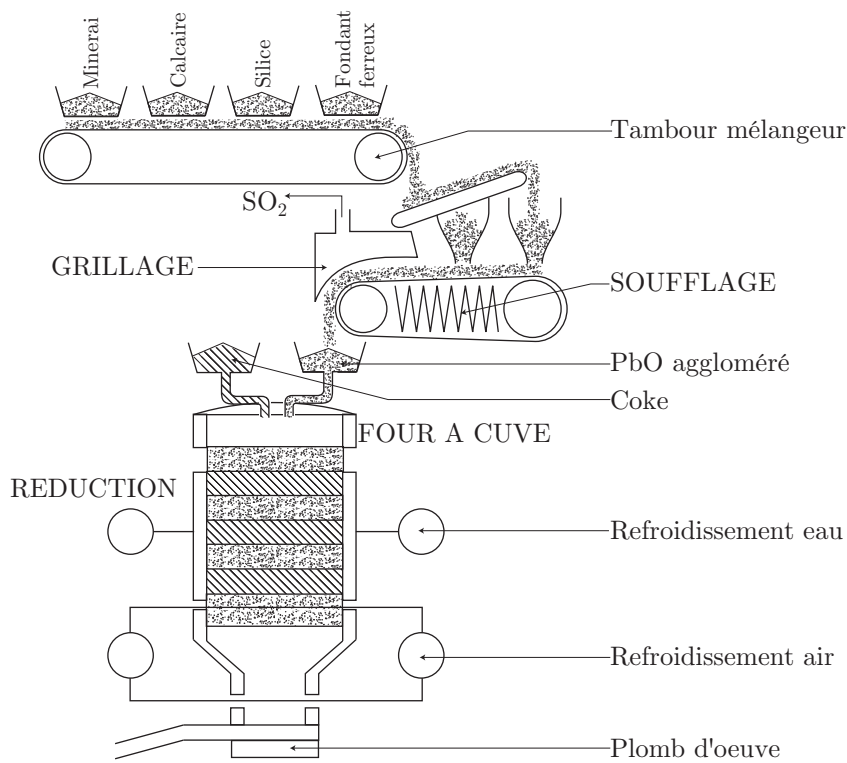
MP-PC-PSI-PT

La fusion et la réduction des agglomérés de l'opération de grillage sont assurés dans un four à cuve, dont les parois sont constituées de caissons refroidis à l'eau.

L'aggloméré de PbO et le coke sont chargés alternativement (à une température de 423 K) dans la zone supérieure du four ; rencontrant les gaz chauds venant de la base du four, ils se réchauffent jusqu'à environ 773 K au détriment des gaz qui sortent du gueulard à 650 K. À partir de 773 K débute la réduction de PbO par le monoxyde de carbone pour se terminer vers 1273 K ; au delà, près des tuyères, prédomine la réduction directe de PbO par le carbone.

L'analyse des gaz ( $\text{CO}$ ,  $\text{CO}_2$ ), à la partie supérieure du four, permet de contrôler la bonne marche de la réduction ; on relève ainsi (composition molaire) : pour  $\text{CO}$ , des valeurs comprises entre 7% et 14% et, en parallèle, pour  $\text{CO}_2$ , entre 21,9% et 14,5%.

Après la fusion de la charge et réduction de PbO, on obtient du plomb (liquide) brut, dit *plomb d'œuvre* qui, après séparation des scories par décantation, s'écoule vers l'atelier d'affinage.

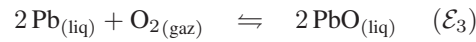
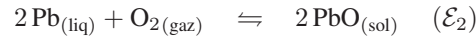
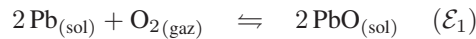


**ÉNONCÉS**

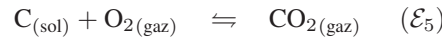
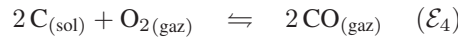
### 1. Étude préliminaire

(a) Expliquer le rôle joué par le coke dans cette opération.

Étudions au préalable les réactions suivantes :



puis les réactions :



(b) Déterminer les enthalpies libres *standard*  $\Delta_r G_i^0(T)$ , en fonction de la température, pour le couple Pb/PbO (on envisagera les divers états physiques possibles du plomb et de son oxyde), puis celles relatives à l'oxydation du carbone, dans l'approximation d'Ellingham. On considérera l'intervalle de température 300 – 1 500 K.

(c) Représenter  $\Delta_r G_i^0(T) = f(T)$  pour les réactions ( $\mathcal{E}_1$ ) à ( $\mathcal{E}_5$ ) sur un diagramme.

Placer les points caractéristiques du plomb et de son oxyde et vérifier la continuité des tracés en ces points.

## 2. Réduction directe par le carbone

(a) À partir de quelle température la réduction directe par le carbone :



est-elle possible dans les conditions *standard* (on posera, pour simplifier, que l'activité de C, Pb et PbO est voisine de l'unité) ?

(b) Vérifier l'exactitude de vos résultats sur le diagramme d'Ellingham que vous avez construit.

(c) Quelle inégalité doit alors vérifier la pression partielle de monoxyde de carbone, par rapport à la température ?

(d) En vous plaçant dans les conditions de marche du four, vers 1 323 K et compte tenu de la composition des gaz au gueulard, pouvez-vous affirmer que les conditions réductrices sont remplies ou non ?

## 3. Réduction par le monoxyde de carbone

La partie essentielle de l'opération est une réduction de PbO par CO, selon la réaction :



(a) En vous aidant du diagramme d'Ellingham, ou à partir de l'évaluation de l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G_7^0(T)$ , discuter la possibilité de réaliser la réduction ( $\mathcal{E}_7$ ).

(b) Écrire la condition générale d'existence de cette réaction ; on désignera respectivement par  $P_{\text{CO}}$  et  $P_{\text{CO}_2}$  les pressions partielles des fractions gazeuses et par  $a_{\text{Pb}}$  et  $a_{\text{PbO}}$  l'activité du plomb et de son oxyde.

On désire vérifier qu'aux températures régnant dans le four, le pouvoir réducteur reste suffisant pour que la réduction de PbO démarre vers 773 K (l'activité de Pb et PbO peut être assimilée à l'unité).

(c) Déterminer si la condition de réduction est satisfaite.

Considérons maintenant la fin du cycle de réduction : la température atteint 1 273 K ; le plomb d'œuvre renferme 95% de plomb et les scories (5% de plomb non réduit). Dans ces conditions, on prendra  $a_{\text{Pb}} = 0,95$  et  $a_{\text{PbO}} = 0,054$ .

(d) La réaction de réduction continue-t-elle à se développer ?

Données numériques :

- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- Enthalpies *standard* de formation ( $\Delta_f H^0$  en  $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) et entropies molaires *standard* ( $S^0$  en  $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ ), à 298 K :

Espèce	$\Delta_f H^0$	$S^0$
$\text{O}_2(\text{gaz}) \dots\dots$	0	205,0
$\text{CO}(\text{gaz}) \dots\dots$	-110,5	197,9
$\text{CO}_2(\text{gaz}) \dots\dots$	-393,6	213,8
$\text{C}(\text{sol}) \dots\dots$	0	5,7
$\text{Pb}(\text{sol}) \dots\dots$	0	64,9
$\text{PbO}(\text{sol}) \dots\dots$	-217,9	69,4

- Changements d'état du plomb :
  - point de fusion (1 bar) :  $T_{\text{fus}}(\text{Pb}) = 600 \text{ K}$  ;
  - point de vaporisation (1 bar) :  $T_{\text{vap}}(\text{Pb}) = 2013 \text{ K}$  ;
  - enthalpie molaire de fusion à 600 K (1 bar) :  $\Delta_{\text{fus}} H^0(\text{Pb}) = 4,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
  - enthalpie molaire de vaporisation à 2 013 K (1 bar) :  $\Delta_{\text{vap}} H^0(\text{Pb}) = 178 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .
- Changements d'état de PbO :
  - point de fusion (1 bar) :  $T_{\text{fus}}(\text{PbO}) = 1159 \text{ K}$  ;
  - point de vaporisation (1 bar) :  $T_{\text{vap}}(\text{PbO}) = 1745 \text{ K}$  ;
  - enthalpie molaire de fusion à 1 159 K (1 bar) :  $\Delta_{\text{fus}} H^0(\text{PbO}) = 11,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;
  - enthalpie molaire de vaporisation à 1 745 K (1 bar) :  $\Delta_{\text{vap}} H^0(\text{PbO}) = 213,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

## ● 244 ————— Concours de l'agrégation

90 min.

Métallurgie du fer

MP-PC-PSI

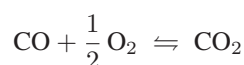
### I- Étude thermodynamique des oxydes de fer

1. Écrire, en les rapportant à la consommation d'une mole de dioxygène, les réactions d'oxydation :
  - de Fe en FeO (réaction  $\alpha$ ) ;
  - de FeO en  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  (réaction  $\beta$ ) ;
  - de  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  en  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  (réaction  $\gamma$ ).
2. Pour chacune des réactions, établir la relation  $\Delta_r G^0(T)$  donnant les variations de l'enthalpie libre *standard* en fonction de la température.
3. Sur un diagramme, tracer les droites représentant les variations de  $\Delta_r G^0_\alpha$ ,  $\Delta_r G^0_\beta$  et  $\Delta_r G^0_\gamma$  en fonction de la température.

4. Dédurre de la lecture du diagramme que FeO est instable en dessous d'une température  $T_1$  que l'on calculera. Quel est l'équilibre existant à la température  $T_1$  ? Compléter le diagramme en traçant la droite correspondant à la réaction de l'oxygène sur le fer pour des températures inférieures à  $T_1$ .
5. Préciser les réactions successives qui interviennent lors de la réduction de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  :
  - (a) pour  $T < T_1$  ;
  - (b) pour  $T > T_1$ .

## II- Réduction des oxydes de fer par le monoxyde de carbone

On s'intéresse à la réduction des oxydes de fer par le monoxyde de carbone, réducteur industriel susceptible de s'oxyder selon :



$$\Delta_r G^0(T) = -282,8 \cdot 10^3 + 86,8 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

### 1. Réduction de l'oxyde ferrique par CO

La première étape de la préparation du fer est la réduction de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  en  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ .

À l'aide des données thermodynamiques, montrer qu'à  $400^\circ\text{C}$ , une faible pression partielle en CO suffit pour que cette réaction soit totale.

### 2. Réduction de l'oxyde magnétique

(a) Compte tenu de l'étude précédente, expliquer dans quelles conditions de température la réduction de  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  par CO est susceptible de conduire :

- directement au fer ;
- à l'oxyde ferreux (réaction  $\lambda$ ), lui-même réductible en fer (réaction  $\mu$ ).

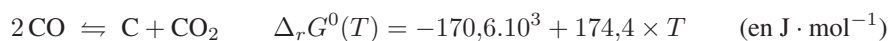
(b) On ne s'intéresse qu'aux réactions ( $\lambda$ ) et ( $\mu$ ), à la température de  $650^\circ\text{C}$ .

- Pour chacune des deux réactions, calculer la constante d'équilibre.
- Quel est le pourcentage en monoxyde de carbone dans la phase gazeuse en équilibre :
  - avec  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  et FeO ?
  - avec FeO et Fe ?

*Pour simplifier les calculs, on arrondira les constantes d'équilibre aux valeurs entières les plus proches.*

### 3. Intervention de l'équilibre de Boudouard

Aux températures envisagées, il est nécessaire de tenir compte de l'équilibre de dismutation du monoxyde de carbone :



- (a) Calculer la constante d'action de masse de cet équilibre à  $650^\circ\text{C}$ . En déduire la composition du mélange gazeux, en équilibre avec du carbone, sous une pression totale de 1 bar.
- (b) En supposant que les états d'équilibre s'établissent suffisamment vite, indiquer les réactions qui se produisent vers  $650^\circ\text{C}$ , lorsque  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  est soumis à l'action de CO.

#### 4. Influence de la température

Des calculs analogues permettent de déterminer la composition du mélange CO/CO<sub>2</sub> ( $x_{\text{CO}}$  représente le pourcentage en CO) en équilibre avec les solides, sous la pression atmosphérique normale, à d'autres températures :

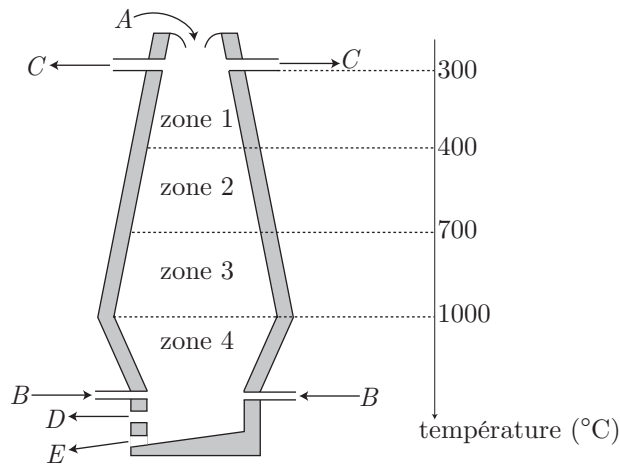
Phases solides	$x_{\text{CO}}$ à 700°C	$x_{\text{CO}}$ à 750°C
C . . . . .	58,8%	76,8%
Fe <sub>3</sub> O <sub>4</sub> + FeO	29,0%	25,5%
FeO + Fe . . . .	52,2%	55,8%

- Pour chacun des équilibres, justifier la variation de la composition de la phase gazeuse lorsque la température augmente.
- Pour simplifier, on suppose que, pour chaque équilibre, le pourcentage en CO varie linéairement avec la température.

En s'aidant d'un diagramme faisant intervenir la température et le rapport  $\frac{x_{\text{CO}_2}}{x_{\text{CO}}}$  (des fractions molaires en CO<sub>2</sub> et en CO), préciser les phénomènes qui se produisent lorsque l'oxyde Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub> est soumis à l'action d'un mélange CO/CO<sub>2</sub> (en équilibre avec du carbone), pour des températures comprises entre 650°C et 750°C.

### III- Préparation des fontes et des aciers

La figure ci-dessous donne le schéma d'un haut fourneau et précise la température régnant dans les différentes zones.



- Indiquer brièvement le fonctionnement du haut fourneau. On précisera, en particulier :
  - ce qui est introduit en A et B ;
  - ce qui est recueilli en C, D et E.
- Compte tenu de l'étude thermodynamique, indiquer la nature de la réaction prépondérante de réduction des oxydes de fer dans les zones 1, 2 et 3.

Données numériques :

- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;

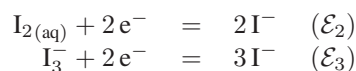
- Grandeurs thermodynamiques *standard*, supposées indépendantes de la température :

Corps	Fe <sub>(sol)</sub>	FeO <sub>(sol)</sub>	Fe <sub>3</sub> O <sub>4(sol)</sub>	Fe <sub>2</sub> O <sub>3(sol)</sub>	O <sub>2(gaz)</sub>
$\Delta_f H^0$ (en kJ · mol <sup>-1</sup> )	0	-259,6	-1 091,2	-810,9	0
$S^0$ (en J · K <sup>-1</sup> · mol <sup>-1</sup> )	27,2	67,1	178,8	106,5	205,0

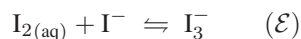
**ÉNONCÉS**

● **218** Lycée du Parc, Lyon

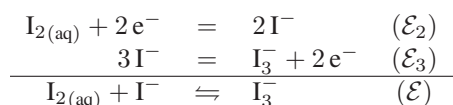
Les couples  $\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}^-$  et  $\text{I}_3^-/\text{I}^-$  ont pour équations :



La réaction de complexation, d'équation :



apparaît alors comme une combinaison linéaire des deux premières :



C'est pourquoi l'enthalpie libre *standard*,  $\Delta_r G^0$ , de cette réaction s'exprime aisément en fonction des enthalpies libres *standard*  $\Delta_r G_2^0$  et  $\Delta_r G_3^0$  de  $(\mathcal{E}_2)$  et  $(\mathcal{E}_3)$  :

$$\Delta_r G^0 = \Delta_r G_2^0 - \Delta_r G_3^0 \quad \text{où} \quad \begin{cases} \Delta_r G_2^0 = -2\mathcal{F}E_2^0 \\ \Delta_r G_3^0 = -2\mathcal{F}E_3^0 \end{cases}$$

Du reste, la constante  $K^0$  de formation du complexe  $\text{I}_3^-$  vérifie :

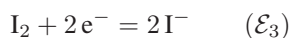
$$\begin{aligned} \Delta_r G^0 = -RT \ln K^0 &\Rightarrow -RT \ln K^0 = -2\mathcal{F}E_2^0 + 2\mathcal{F}E_3^0 \\ &\Rightarrow \ln K^0 = \frac{2\mathcal{F}}{RT} (E_2^0 - E_3^0) \\ &\Rightarrow \log K^0 = \frac{2\mathcal{F}}{RT \ln 10} (E_2^0 - E_3^0) \simeq \frac{2}{0,06} (E_2^0 - E_3^0) \end{aligned}$$

Par conséquent :

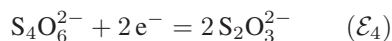
$$K^0 = 10^{\frac{1}{0,03} (E_2^0 - E_3^0)} = 10^{(0,62 - 0,54)/0,03} \Rightarrow K^0 = 464$$

● **219** Lycée Pissarro, Pontoise

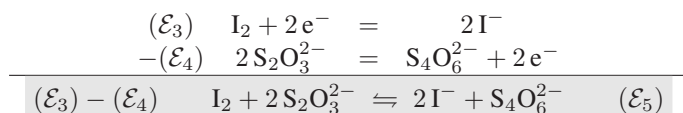
1. La demi-équation associée au couple  $\text{I}_2/\text{I}^-$  s'écrit :



tandis que celle associée au couple  $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$  s'écrit :



La combinaison linéaire de ces équations conduit à l'équation-bilan de la réaction qui se produit entre  $\text{I}_2$  et  $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$  :



2. Étant donné que  $(\mathcal{E}_5) = (\mathcal{E}_3) - (\mathcal{E}_4)$ , il en va de même des enthalpies libres *standard* :

$$\Delta_r G_5^0 = \Delta_r G_3^0 - \Delta_r G_4^0$$

c'est-à-dire, en notant  $K_5^0$  la constante de l'équilibre  $(\mathcal{E}_5)$  :

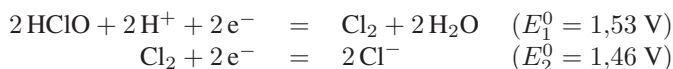
$$\begin{aligned} -RT \ln K_5^0 &= -2\mathcal{F} E_3^0 + 2\mathcal{F} E_4^0 \Rightarrow \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \log K_5^0 = 2 (E_3^0 - E_4^0) \\ \Rightarrow K_5^0 &= 10^{2 \times (E_3^0 - E_4^0) / 0,06} \end{aligned}$$

*Application numérique :*

$$K_5^0 = 10^{(0,62 - 0,08) / 0,03} \Rightarrow K_5^0 = 10^{18}$$

La valeur numérique de  $K_5^0$  est suffisamment grande pour que la réaction d'équation  $(\mathcal{E}_5)$  soit considérée comme totale et soit par conséquent utilisable en vue d'un dosage. Dans ce cas, l'utilisation de l'empois d'amidon est préconisée pour révéler la fin du dosage : il forme avec  $I_{2(aq)}$  un complexe bleu très foncé, qui disparaît avec  $I_{2(aq)}$  lorsque le dosage est achevé.

3. (a) En milieu acide, l'ion  $ClO^-$  se transforme en  $HClO$ , qui est l'oxydant du couple  $HClO/Cl_2$ . Par suite, on peut craindre un dégagement de dichlore (gaz toxique) si l'eau de Javel est employée en milieu acide. Les couples  $HClO/Cl_2$  et  $Cl_2/Cl^-$  étant associés aux demi-équations :



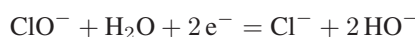
L'équation-bilan de l'action d'un acide sur l'eau de Javel s'écrit :



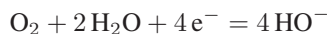
avec, pour constante d'équilibre :

$$K^0 = 10^{(E_1^0 - E_2^0) / 0,03} = 215$$

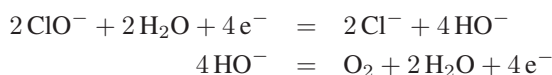
- (b) Le couple  $ClO^-/Cl_2$  est associé, en milieu basique, à la demi-équation :



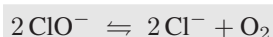
tandis que le couple  $O_2/HO^-$  est associé à la demi-équation :



Aussi, en considérant que le potentiel du couple  $ClO^-/Cl^-$  est supérieur à celui du couple  $O_2/HO^-$ , il se produit une réaction dont l'équation-bilan découle d'une combinaison linéaire des deux demi-équations :



c'est-à-dire :

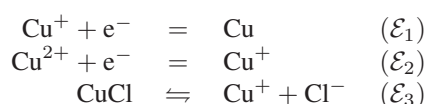




Bien que cette réaction soit thermodynamiquement possible, sa faible vitesse rend la décomposition de  $\text{ClO}^-$  imperceptible. C'est donc une limitation cinétique qui permet la conservation de l'eau de Javel (conservation néanmoins limitée dans le temps).

## ● 220 ————— Lycée du Parc, Lyon

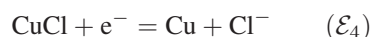
Les réactions d'équation :



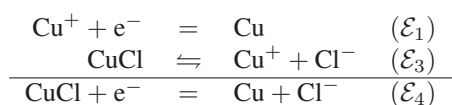
ont pour enthalpies libres *standard* respectives :

$$\Delta_r G_1^0 = -\mathcal{F} E_1^0 \quad \Delta_r G_2^0 = -\mathcal{F} E_2^0 \quad \Delta_r G_3^0 = -RT \ln K_s$$

Considérons le couple  $\text{CuCl}/\text{Cu}$ , décrit par l'équation :



de potentiel *standard*  $E_4^0$  et donc d'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G_4^0 = -\mathcal{F} E_4^0$ . La somme des équations  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_3)$  :



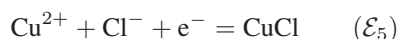
permet de remarquer que :

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_4) = (\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_3) &\Rightarrow \Delta_r G_4^0 = \Delta_r G_1^0 + \Delta_r G_3^0 \\ &\Rightarrow -\mathcal{F} E_4^0 = -\mathcal{F} E_1^0 - RT \ln K_s \\ &\Rightarrow E_4^0 = E_1^0 + \frac{RT}{\mathcal{F}} \ln K_s = E_1^0 + \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \log K_s \\ &\Rightarrow E_4^0 = E_1^0 - 0,06 \text{ p}K_s \end{aligned}$$

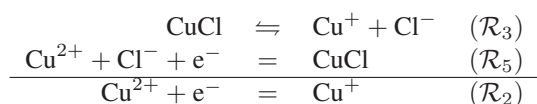
Application numérique :

$$E_4^0 = 0,52 - 0,06 \times 6,7 \Rightarrow E_4^0 = 0,12 \text{ V}$$

Soit, maintenant, le couple  $\text{Cu}^{2+}/\text{CuCl}$  d'équation :



de potentiel *standard*  $E_5^0$  et d'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G_5^0 = -\mathcal{F} E_5^0$ . En remarquant que la somme des équations  $(\mathcal{R}_3)$  et  $(\mathcal{R}_5)$  conduit à l'équation  $(\mathcal{R}_2)$  :



on obtient :

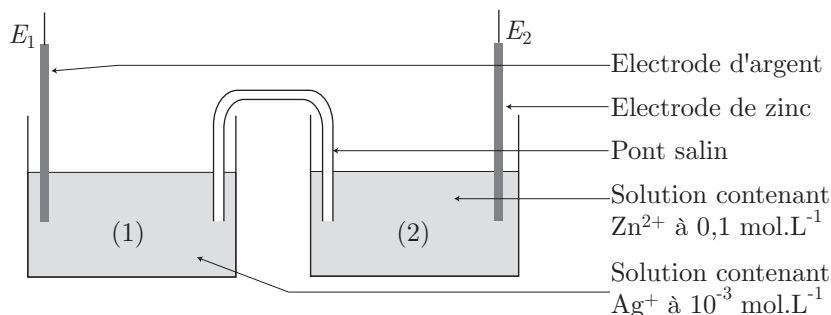
$$\begin{aligned}
 (\mathcal{R}_3) + (\mathcal{R}_5) = (\mathcal{R}_2) &\Rightarrow \Delta_r G_3^0 + \Delta_r G_5^0 = \Delta_r G_2^0 \Rightarrow -RT \ln K_s - \mathcal{F} E_5^0 = -\mathcal{F} E_2^0 \\
 &\Rightarrow E_5^0 = E_2^0 - \frac{RT}{\mathcal{F}} \ln K_s = E_2^0 - \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \times \log K_s \\
 &\Rightarrow E_5^0 = E_2^0 + 0,06 \text{ p}K_s
 \end{aligned}$$

Application numérique : :

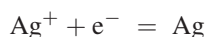
$$E_5^0 = 0,16 + 0,06 \times 6,7 \Rightarrow E_5^0 = 0,56 \text{ V}$$

## ● 221 ————— Lycée Henri Wallon, Valenciennes

1. Outre les demi-piles dans lesquelles les électrodes d'argent et de zinc adoptent les potentiels  $E_1$  et  $E_2$ , la pile possède également un pont salin qui assure l'électroneutralité des solutions contenues dans les compartiments (1) et (2).



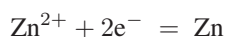
2. Dans la pile, il faut distinguer les couples redox mis en jeu dans chaque demi-pile :
- Dans le compartiment (1),  $\text{Ag}^+$  et  $\text{Ag}$  sont mis en présence, en conséquence de quoi l'équation :



fournit le potentiel :

$$\begin{aligned}
 E_1 &= E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{a_{\text{Ag}^+}}{a_{\text{Ag}}} \right) = E_1^0 + 0,06 \log [\text{Ag}^+] \\
 &= 0,8 + 0,06 \log (10^{-3}) \Rightarrow E_1 = 0,62 \text{ V}
 \end{aligned}$$

- Dans le compartiment (2),  $\text{Zn}^{2+}$  et  $\text{Zn}$  sont réunis :



de manière à ce que :

$$\begin{aligned}
 E_2 &= E_2^0 + 0,03 \log \left( \frac{a_{\text{Zn}^{2+}}}{a_{\text{Zn}}} \right) = E_2^0 + 0,03 \log [\text{Zn}^{2+}] \\
 &= -0,76 + 0,03 \times \log(0,1) \Rightarrow E_2 = -0,79 \text{ V}
 \end{aligned}$$

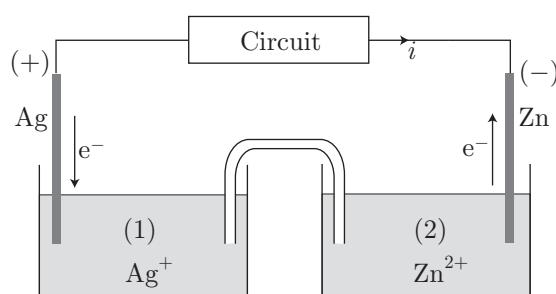
Ce calcul montre que  $E_1 > E_2$ , d'où l'on déduit que :

l'argent constitue la borne positive de la pile, dont la borne négative est en zinc.

Ce faisant, la f.é.m. de cette pile est définie par :

$$e = |E_1 - E_2| = |0,62 + 0,79| \Rightarrow e = 1,41 \text{ V}$$

3. De ce qui précède, on déduit que lorsque la pile est reliée à un circuit électrique, un courant  $i$  circule, de la borne positive à la borne négative, dans ce circuit :

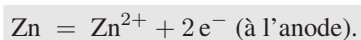


C'est pourquoi :

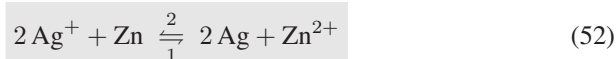
- à la cathode d'argent se produit une réduction :



- à l'anode se produit une oxydation du zinc :



Par suite, lorsque cette pile débite, la réaction d'équation :

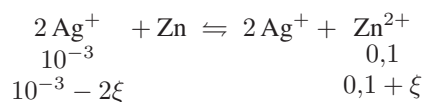


se produit dans le sens (1). Tant que l'équilibre n'est pas atteint, chaque mole de Zn consommée s'accompagne d'un transfert de  $\nu = 2$  moles d'électrons dans le circuit électrique. Par conséquent, cette réaction a pour constante d'équilibre :

$$K^0 = 10^{\frac{\nu}{0,06} \times (E_1^0 - E_2^0)} = 10^{(0,8+0,76)/0,03} \Rightarrow K^0 = 10^{52}$$

Une telle constante suffit à montrer que la réaction (52) est presque totale.

4. L'équation-bilan de la réaction globale :



montre que :

$$[\text{Ag}^+] = 10^{-3} - 2\xi \text{ et } [\text{Zn}^{2+}] = 0,1 + \xi$$

auquel cas les potentiels  $E_1$  et  $E_2$  vérifient la loi de Nernst :

$$E_1 = E_1^0 + 0,06 \log [\text{Ag}^+] = 0,8 + 0,06 \log (10^{-3} - 2\xi)$$

et :

$$E_2 = E_2^0 + 0,03 \log [\text{Zn}^{2+}] = -0,76 + 0,03 \log (0,1 + \xi)$$

Ce faisant, la force électromotrice de la pile est définie par :

$$e = |E_1 - E_2| \Rightarrow E_1 - E_2 = \pm e$$

soit encore :

$$1,56 + 0,03 \log \left[ \frac{(10^{-3} - 2\xi)^2}{0,1 + \xi} \right] = \pm 1,35$$

c'est-à-dire :

$$\frac{(10^{-3} - 2\xi)^2}{0,1 + \xi} = 10^{-7} \text{ ou } \frac{(10^{-3} - 2\xi)^2}{0,1 + \xi} = 10^{-97} \quad (53)$$

Dans le premier cas, l'équation s'écrit aussi :

$$10^{-6} - 4 \cdot 10^{-3} \xi + 4 \xi^2 = 10^{-8} + 10^{-7} \xi \Rightarrow 4 \xi^2 - 4 \cdot 10^{-3} \xi + 9,9 \cdot 10^{-7} = 0$$

si l'on néglige  $10^{-7}$  devant  $10^{-3}$ . Par suite, le discriminant réduit de cette équation du second degré :

$$\Delta' = 4 \cdot 10^{-6} - 4 \times 9,9 \cdot 10^{-7} = 4 \cdot 10^{-8}$$

conduit aux solutions :

$$\xi_1 = \frac{2 \cdot 10^{-3} + \sqrt{4 \cdot 10^{-8}}}{4} = 5,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et :

$$\xi_2 = \frac{2 \cdot 10^{-3} - \sqrt{4 \cdot 10^{-8}}}{4} = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Cependant, l'équation-bilan de la réaction révèle que  $[\text{Ag}^+] = 10^{-3} - 2\xi$  doit demeurer positif, c'est-à-dire que  $\xi < 5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . C'est pourquoi on ne retiendra que la solution :

$$\xi_2 = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

auquel cas :

$$[\text{Ag}^+] = 10^{-3} - 2\xi_2 = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ et } [\text{Zn}^{2+}] = 0,1 + \xi_2 \simeq 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Quant à la seconde des équations (53), elle conduit à :

$$\frac{(10^{-3} - 2\xi)^2}{0,1 + \xi} = 10^{-97} \simeq 0 \Rightarrow \xi \simeq 5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

d'où il découle que :

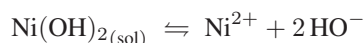
$$[\text{Zn}^{2+}] = 0,1 + \xi \simeq 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

tandis que la constante  $K^0$  de la réaction fournit :

$$K^0 = \frac{[\text{Zn}^{2+}]}{[\text{Ag}^+]^2} \Rightarrow [\text{Ag}^+] = \sqrt{\frac{[\text{Zn}^{2+}]}{K^0}} = \sqrt{\frac{0,1}{10^{52}}} \Rightarrow [\text{Ag}^+] = 3 \cdot 10^{-27} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

● 222 Lycée Hoche, Versailles

1. La saturation de la solution est décrite par l'équilibre :



en vertu duquel, si l'autoprotolyse de l'eau est négligeable :

$$[\text{Ni}^{2+}] = \frac{1}{2} [\text{HO}^-]$$

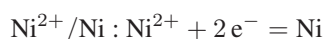
Ce faisant, l'équilibre impose :

$$K_s = [\text{Ni}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = \frac{1}{2} [\text{HO}^-]^3 \Rightarrow \text{p}K_s = -\log K_s = \log 2 - 3 \log [\text{HO}^-]$$

où :

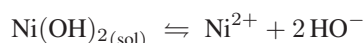
$$\begin{aligned} \text{pH} = 8,4 &\Rightarrow [\text{HO}^-] = 10^{-14+8,4} = 10^{-5,6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ &\Rightarrow \text{p}K_s = \log 2 + 3 \times 5,6 = 17,1 \end{aligned}$$

2. L'anode de la pile se trouve au potentiel au couple :



soit :  $E_2 = E_2^0 + 0,03 \log [\text{Ni}^{2+}]$ .

Or, les ions  $\text{Ni}^{2+}$  sont obtenus par saturation de la solution :



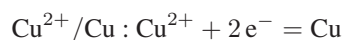
C'est pourquoi, en négligeant l'autoprotolyse de l'eau :

$$[\text{HO}^-] = 2 [\text{Ni}^{2+}]$$

de sorte qu'à l'équilibre :

$$\begin{aligned} K_s &= [\text{Ni}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = 4 [\text{Ni}^{2+}]^3 \Rightarrow [\text{Ni}^{2+}] = \left(\frac{K_s}{4}\right)^{1/3} \\ \Rightarrow E_2 &= E_2^0 + 0,03 \log \left(\frac{K_s}{4}\right)^{1/3} = E_2^0 - 0,01 \text{p}K_s - 0,01 \log 4 \end{aligned}$$

En outre, la cathode de cuivre plonge dans un milieu qui contient  $\text{Cu}^{2+}$  ; le couple :



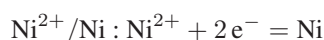
impose alors le potentiel :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log [\text{Cu}^{2+}] = E_1^0 - 0,06 \text{ car } [\text{Cu}^{2+}] = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Il apparaît ainsi, aux bornes de la pile, la force électromotrice :

$$\begin{aligned} e &= E_1 - E_2 = E_1^0 - 0,06 - E_2^0 + 0,01 \text{p}K_s + 0,01 \log 4 \\ \Rightarrow \text{p}K_s &= \frac{e + E_2^0 - E_1^0 + 0,06}{0,01} - \log 4 = \frac{0,68 - 0,23 - 0,34 + 0,06}{0,01} - \log 4 \\ \Rightarrow \text{p}K_s &= 16,4 \end{aligned}$$

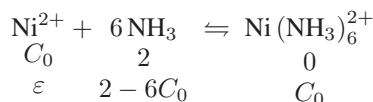
3. À l'anode de la pile proposée, le potentiel est imposé par le couple :



auquel cas l'anode adopte le potentiel fourni par la loi de Nernst :

$$E_2 = E_2^0 + 0,03 \log [\text{Ni}^{2+}]$$

Or, les ions  $\text{Ni}^{2+}$  réagissent avec l'ammoniac de manière à former un complexe :



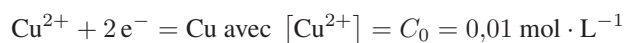
À l'issue de cette réaction :

$$[\text{Ni}(\text{NH}_3)_6^{2+}] = C_0 = 0,01 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \text{ et } [\text{NH}_3] = 2 - 0,06 = 1,94 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} = C_1$$

Ainsi, la constante  $K_d$  de dissociation du complexe fournit-elle :

$$\begin{aligned} K_d &= \frac{[\text{Ni}^{2+}][\text{NH}_3]^6}{[\text{Ni}(\text{NH}_3)_6^{2+}]} = [\text{Ni}^{2+}] \times \frac{C_1^6}{C_0} \Rightarrow [\text{Ni}^{2+}] = \frac{K_d C_0}{C_1^6} \\ \Rightarrow E_2 &= E_2^0 + 0,03 \log \left( \frac{K_d C_0}{C_1^6} \right) = E_2^0 + 0,03 \times (\log C_0 - 6 \log C_1 - \text{p}K_d) \end{aligned}$$

En outre, le potentiel de la cathode, où se produit la demi-réaction :



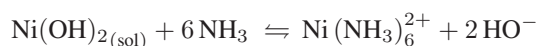
est aussi donné par la loi de Nernst :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log C_0$$

Par conséquent, la force électromotrice de cette pile vaut :

$$\begin{aligned} e' &= E_1 - E_2 = E_1^0 - E_2^0 + 0,03 \times (6 \log C_1 + \text{p}K_d) \\ \Rightarrow \text{p}K_d &= \frac{e' + E_2^0 - E_1^0}{0,03} - 6 \log C_1 = \frac{0,91 - 0,23 - 0,34}{0,03} - 6 \log(1,94) \\ \Rightarrow \text{p}K_d &= 9,6 \end{aligned}$$

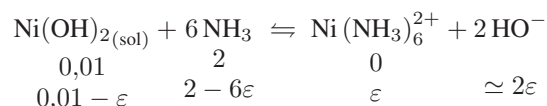
4.  $\text{Ni}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$  peut réagir avec  $\text{NH}_3$  selon l'équation-bilan :



dont la constante d'équilibre vaut :

$$\begin{aligned} K &= \frac{[\text{Ni}(\text{NH}_3)_6^{2+}][\text{HO}^-]^2}{[\text{NH}_3]^6} = \frac{[\text{Ni}(\text{NH}_3)_6^{2+}]}{[\text{NH}_3]^6 [\text{Ni}^{2+}]} \times [\text{Ni}^{2+}][\text{HO}^-]^2 \\ &= \frac{K_s}{K_d} = 10^{-17+8,75} = 5,62 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

Une telle constante permet de prévoir que l'avancement de la réaction est très faible :



où  $[\text{HO}^-] \simeq 2 [\text{Ni(NH}_3)_6^{2+}]$  si l'on néglige l'autoprotolyse de l'eau. C'est pourquoi, dans la suite des calculs, nous supposons que :

- $[\text{HO}^-] \gg 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  (l'autoprotolyse de l'eau est négligée) ;
- $[\text{NH}_3] \simeq 2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  si  $\varepsilon \ll 0,33 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et en ignorant le caractère basique de  $\text{NH}_3$ .

Ce faisant, la constante de cet équilibre vaut :

$$\begin{aligned} K &= \frac{[\text{Ni(NH}_3)_6^{2+}] [\text{HO}^-]^2}{[\text{NH}_3]^6} = \frac{4 [\text{Ni(NH}_3)_6^{2+}]^3}{[\text{NH}_3]^6} \\ \Rightarrow [\text{Ni(NH}_3)_6^{2+}] &= \sqrt[3]{\frac{K [\text{NH}_3]^6}{4}} = \sqrt[3]{\frac{5,62 \cdot 10^{-9} \times 64}{4}} \\ \Rightarrow [\text{Ni(NH}_3)_6^{2+}] &= 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ \Rightarrow [\text{HO}^-] &= 2 [\text{Ni(NH}_3)_6^{2+}] = 9 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ \Rightarrow [\text{H}^+] &= \frac{10^{-14}}{[\text{HO}^-]} = \frac{10^{-14}}{9 \cdot 10^{-3}} = 1,1 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

Quant au produit de solubilité de  $\text{Ni(OH)}_{2(\text{sol})}$ , il s'écrit :

$$\begin{aligned} K_s &= [\text{Ni}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 \Rightarrow [\text{Ni}^{2+}] = \frac{K_s}{[\text{HO}^-]^2} = \frac{10^{-17}}{(9 \cdot 10^{-3})^2} \\ \Rightarrow [\text{Ni}^{2+}] &= 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

On s'assurera aisément de la légitimité des hypothèses émises :

$$[\text{HO}^-] = 9 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \gg 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et :

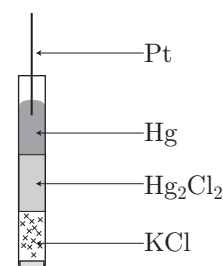
$$\varepsilon = [\text{Ni(NH}_3)_6^{2+}] = 4,5 \cdot 10^{-3} \Rightarrow [\text{NH}_3] = 2 - 6\varepsilon = 1,973 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \simeq 2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

## ● 223 ————— Concours Commun Polytechnique

1. La partie active d'une électrode de référence au calomel saturée en KCl comporte :

- une électrode de platine, qui plonge dans du mercure liquide ;
- du calomel ( $\text{Hg}_2\text{Cl}_2$ ), au contact du mercure ;
- une solution saturée de chlorure de potassium.

Ainsi, cette électrode met en jeu le couple  $\text{Hg}_2\text{Cl}_2/\text{Hg}$ , d'équation :



2. Pour servir comme référence, il est nécessaire que l'électrode de platine adopte un potentiel dont la valeur ne dépend pas de la solution dans laquelle est immergée l'ECS.
3. L'équilibre électrochimique :  $\text{Cu}^{2+} + 2e^-_{(\text{Cu})} = \text{Cu}$  est atteint lorsque :

$$\begin{aligned} \sum_i \nu_i \tilde{\mu}_i = 0 &\Rightarrow \tilde{\mu}_{\text{Cu}} - \tilde{\mu}_{\text{Cu}^{2+}} - 2\tilde{\mu}_e(\text{Cu}) = 0 \\ &\Rightarrow \mu_{\text{Cu}} - (\mu_{\text{Cu}^{2+}} + 2\mathcal{F}\phi_S) - 2[\mu_e(\text{Cu}) - \mathcal{F}\phi_{\text{Cu}}] = 0 \end{aligned}$$

où  $\phi_S$  désigne le potentiel de la solution qui contient les ions  $\text{Cu}^{2+}$ . Par suite :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{F}(\phi_{\text{Cu}} - \phi_S) &= \mu_{\text{Cu}^{2+}} + 2\mu_e(\text{Cu}) - \mu_{\text{Cu}} \\ &= \mu_{\text{Cu}^{2+}}^0 + RT \ln a_{\text{Cu}^{2+}} + 2\mu_e(\text{Cu}) - (\mu_{\text{Cu}}^0 + RT \ln a_{\text{Cu}}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\phi_{\text{Cu}} - \phi_S = \frac{\mu_{\text{Cu}^{2+}}^0 - \mu_{\text{Cu}}^0}{2\mathcal{F}} + 2 \frac{\mu_e(\text{Cu})}{\mathcal{F}} + \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln \left( \frac{a_{\text{Cu}^{2+}}}{a_{\text{Cu}}} \right) \quad (55)$$

où  $a_X$  représente l'activité de l'espèce X.

4. (a) De la même manière, l'établissement de l'équilibre (54) est soumis à la loi :

$$\begin{aligned} \sum_i \nu_i \tilde{\mu}_i = 0 &\Rightarrow 2\tilde{\mu}_{\text{Hg}} + 2\tilde{\mu}_{\text{Cl}^-} - \tilde{\mu}_{\text{Hg}_2\text{Cl}_2} - 2\tilde{\mu}_e(\text{Hg}) = 0 \\ &\Rightarrow 2\mu_{\text{Hg}} + 2(\mu_{\text{Cl}^-} - \mathcal{F}\phi_S(\text{ECS})) - \mu_{\text{Hg}_2\text{Cl}_2} - 2[\mu_e(\text{Hg}) - \mathcal{F}\phi_{\text{Hg}}] = 0 \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\mu_{\text{Hg}} = \mu_{\text{Hg}}^0 + RT \ln a_{\text{Hg}} = \mu_{\text{Hg}}^0 \text{ car } a_{\text{Hg}} = 1$$

$$\mu_{\text{Cl}^-} = \mu_{\text{Cl}^-}^0 + RT \ln a_{\text{Cl}^-}$$

$$\mu_{\text{Hg}_2\text{Cl}_2} = \mu_{\text{Hg}_2\text{Cl}_2}^0 + RT \ln a_{\text{Hg}_2\text{Cl}_2} = \mu_{\text{Hg}_2\text{Cl}_2}^0 \text{ car } a_{\text{Hg}_2\text{Cl}_2} = 1$$

il vient alors :

$$2\mathcal{F}(\phi_{\text{Hg}} - \phi_S(\text{ESC})) + 2\mu_{\text{Hg}}^0 - \mu_{\text{Hg}_2\text{Cl}_2}^0 + 2\mu_{\text{Cl}^-}^0 - 2\mu_e(\text{Hg}) + 2RT \ln a_{\text{Cl}^-} = 0$$

soit encore :

$$\phi_{\text{Hg}} - \phi_S(\text{ESC}) = \frac{\mu_{\text{Hg}_2\text{Cl}_2}^0 - 2\mu_{\text{Hg}}^0 - 2\mu_{\text{Cl}^-}^0}{2\mathcal{F}} + \frac{\mu_e(\text{Hg})}{\mathcal{F}} - \frac{RT}{\mathcal{F}} \ln a_{\text{Cl}^-} \quad (56)$$



(b) Une solution saturée en KCl est obtenue par mise en solution du sel :



de sorte que les activités de  $\text{K}^+$  et de  $\text{Cl}^-$  vérifient :

$$a_{\text{K}^+} = a_{\text{Cl}^-} \text{ car } [\text{K}^+] = [\text{Cl}^-]$$

Or, la saturation suppose atteint l'équilibre chimique entre KCl,  $\text{K}^+$  et  $\text{Cl}^-$  ; la constante  $K_s$  (produit de solubilité) s'identifie au quotient de réaction :

$$\begin{aligned} K_s &= \frac{a_{\text{K}^+} \times a_{\text{Cl}^-}}{a_{\text{KCl}}} = (a_{\text{Cl}^-})^2 \text{ car } a_{\text{KCl}} = 1 \\ \Rightarrow a_{\text{Cl}^-} &= \sqrt{K_s} \end{aligned}$$

Dans ces conditions,  $\phi_{\text{Hg}} - \phi_S$  (ESC) demeure constant.

5. Notons :

- $\Delta\phi_1 = \phi_{\text{Hg}_D} - \phi_{S(\text{ESC})_D}$ , dont l'expression est donnée par le résultat (56) ;
- $\Delta\phi_2 = \phi_{S_D} - \phi_{\text{Cu}}$ , dont l'identité (55) révèle que :

$$\Delta\phi_2 = -\frac{\Delta_r G^0}{2\mathcal{F}} - \frac{1}{2\mathcal{F}} \times \left[ \mu_e(\text{Cu}) + RT \ln \left( \frac{a_{\text{Cu}^{2+}}}{a_{\text{Cu}}} \right) \right] \text{ avec } a_{\text{Cu}^{2+}} = \frac{[\text{Cu}^{2+}]_D}{C_0}$$

où  $\Delta_r G^0 = \mu_{\text{Cu}^{2+}}^0 - \mu_{\text{Cu}}^0$  est l'enthalpie *standard* de la demi-équation :  
 $\text{Cu} = \text{Cu}^{2+} + 2e^-$  ;

- $\Delta\phi_3 = \phi_{\text{Cu}} - \phi_{S_G}$  qui s'écrit, compte tenu de la relation (55) :

$$\Delta\phi_3 = \frac{\Delta_r G^0}{2\mathcal{F}} + \frac{1}{2\mathcal{F}} \left[ \mu_e(\text{Cu}) + RT \ln \left( \frac{[\text{Cu}^{2+}]_G}{C_0 a_{\text{Cu}}} \right) \right]$$

- $\Delta\phi_4 = \phi_{S(\text{ESC})_G} - \phi_{\text{Hg}_G}$  que l'on peut également exprimer à l'aide du résultat (56), auquel cas on constate que :

$$\Delta\phi_4 = -\Delta\phi_1$$

si la solution est saturée en KCl.

C'est pourquoi, en négligeant les potentiels de jonction  $\phi_{S(\text{ECS})} - \phi_S$  :

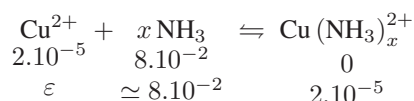
$$\begin{aligned} U &= \Delta\phi_1 + [\phi_{S(\text{ECS})_D} - \phi_{S_D}] + \Delta\phi_2 + \Delta\phi_3 + [\phi_{S_G} - \phi_{S(\text{ECS})_G}] + \Delta\phi_4 \\ &= \Delta\phi_1 + \Delta\phi_2 + \Delta\phi_3 + \Delta\phi_4 \text{ où } \Delta\phi_4 = -\Delta\phi_1 \\ &= \Delta\phi_2 + \Delta\phi_3 = \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln \left( \frac{[\text{Cu}^{2+}]_G}{C_0 a_{\text{Cu}}} \right) - \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln \left( \frac{[\text{Cu}^{2+}]_D}{C_0 a_{\text{Cu}}} \right) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$U = \phi_{\text{Hg}_D} - \phi_{\text{Hg}_G} = \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln \left( \frac{[\text{Cu}^{2+}]_G}{[\text{Cu}^{2+}]_D} \right) \quad (57)$$

6. Initialement :

- le compartiment de droite contient  $20 \cdot 10^{-3} \times 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-5}$  mole d'ions  $\text{Cu}^{2+}$  et  $20 \cdot 10^{-3} \times 4 = 8 \cdot 10^{-2}$  mole d'ammoniac, qui réagissent de manière quasi quantitative :



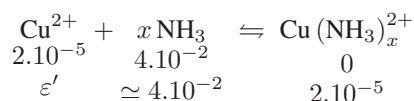
Le volume total de cette solution étant de  $40 \text{ mL} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ L}$ , il s'ensuit qu'à l'équilibre :

$$[\text{NH}_3]_D \simeq \frac{8 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2}} = 2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ et } [\text{Cu}(\text{NH}_3)_x^{2+}]_D = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-2}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Or, l'établissement de cet équilibre impose l'identité du quotient de réaction et de la constante  $K_f$  de formation du complexe :

$$\frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_x^{2+}]_D}{[\text{Cu}^{2+}]_D [\text{NH}_3]_D^x} = K_f \Rightarrow [\text{Cu}^{2+}]_D = \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_x^{2+}]_D}{K_f [\text{NH}_3]_D^x}$$

- le compartiment de gauche contient, quant à lui :  $20 \cdot 10^{-3} \times 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-5}$  mole de  $\text{Cu}^{2+}$  et  $20 \cdot 10^{-3} \times 2 = 4 \cdot 10^{-2}$  mole de  $\text{NH}_3$  ; il s'y produit la réaction de complexation :



Dans le volume  $V = 40 \text{ mL} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ L}$ , les concentrations à l'équilibre valent par conséquent :

$$[\text{NH}_3]_G = \frac{4 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-2}} = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ et } [\text{Cu}(\text{NH}_3)_x^{2+}]_G = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^{-2}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et vérifient :

$$\frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_x^{2+}]_G}{[\text{Cu}^{2+}]_G [\text{NH}_3]_G^x} = K_f \Rightarrow [\text{Cu}^{2+}]_G = \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_x^{2+}]_G}{K_f [\text{NH}_3]_G^x}$$

En remarquant que  $[\text{Cu}(\text{NH}_3)_x^{2+}]_G = [\text{Cu}(\text{NH}_3)_x^{2+}]_D$ , on obtient alors :

$$\frac{[\text{Cu}^{2+}]_G}{[\text{Cu}^{2+}]_D} = \left( \frac{[\text{NH}_3]_D}{[\text{NH}_3]_G} \right)^x = 2^x$$

Par suite, la relation (57) conduit à :

$$U = \frac{RT}{2F} \ln(2^x) = x \times \frac{RT \ln 2}{2F}$$

où l'énoncé fournit :

$$\begin{aligned} \frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 = 0,06 \text{ V} &\Rightarrow \frac{RT}{\mathcal{F}} = \frac{0,06}{\ln 10} \Rightarrow U = x \times \frac{0,06 \times \ln 2}{2 \ln 10} \\ &\Rightarrow x = U \times \frac{\ln 10}{0,03 \times \ln 2} = 3,61 \cdot 10^{-2} \times \frac{\ln 10}{0,03 \times \ln 2} \\ &\Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

7. Le compartiment de droite a maintenant la composition initiale du compartiment de gauche précédente. C'est pourquoi, à l'équilibre, les ions  $\text{Cu}^{2+}$  y ont pour concentration :

$$[\text{Cu}^{2+}]_D = \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_x^{2+}]}{K_f [\text{NH}_3]^x} \text{ avec } \begin{cases} [\text{Cu}(\text{NH}_3)_x^{2+}] = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{NH}_3] = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{cases}$$

En revanche, dans le compartiment de gauche, les ions  $\text{Cu}^{2+}$  subissent une simple dilution à l'issue de laquelle leur concentration passe à la valeur :

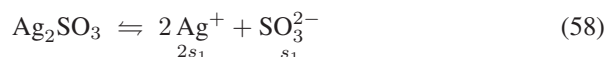
$$[\text{Cu}^{2+}]_G = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Aussi, le résultat (57) devient :

$$\begin{aligned} U &= \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln \left( \frac{[\text{Cu}^{2+}]_G}{[\text{Cu}^{2+}]_D} \right) = \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln \left( \frac{5 \cdot 10^{-4}}{5 \cdot 10^{-4}} \times K_f \right) = \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln K_f \\ &= \frac{0,06}{2 \ln 10} \ln K_f = 0,03 \log K_f \\ &\Rightarrow K_f = 10^{\frac{U}{0,03}} = 10^{0,359/0,03} \Rightarrow K_f = 10^{11,97} \end{aligned}$$

## ● 224 ————— Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

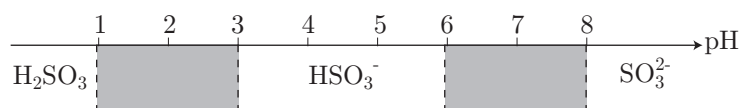
1. La mise en solution du sulfite d'argent est décrite par l'équilibre :



où  $s_1$  désigne la solubilité de  $\text{Ag}_2\text{SO}_3$ , lorsqu'on néglige les propriétés basiques de  $\text{SO}_3^{2-}$ . Or, la saturation de la solution impose l'identité :

$$\begin{aligned} [\text{Ag}^+]^2 [\text{SO}_3^{2-}] &= K_s \Rightarrow 4 s_1^3 = K_s \Rightarrow s_1 = \sqrt[3]{\frac{K_s}{4}} \\ &\Rightarrow s_1 = \sqrt[3]{\frac{10^{-13,5}}{4}} \Rightarrow s_1 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

2. Les valeurs des constantes d'acidité  $\text{p}K_{a1} = 2$  et  $\text{p}K_{a2} = 7$  permettent le tracé du diagramme de prédominance des espèces  $\text{H}_2\text{SO}_3$ ,  $\text{HSO}_3^-$  et  $\text{SO}_3^{2-}$  :



qui montre qu'en milieu tamponné à pH = 4,  $\text{HSO}_3^-$  est l'espèce soufrée prédominante. Ce faisant, l'équation (58) montre que la solubilité  $s_2$  de  $\text{Ag}_2\text{SO}_3$  vérifie :

$$[\text{Ag}^+] = 2s_2 \text{ et } s_2 = [\text{H}_2\text{SO}_3] + [\text{HSO}_3^-] + [\text{SO}_3^{2-}] \simeq [\text{HSO}_3^-]$$

Or, par définition, la constante  $K_{a2}$  vaut :

$$K_{a2} = \frac{[\text{SO}_3^{2-}][\text{H}^+]}{[\text{HSO}_3^-]} \Rightarrow [\text{SO}_3^{2-}] = \frac{K_{a2} \times [\text{HSO}_3^-]}{[\text{H}^+]} = \frac{K_{a2}}{[\text{H}^+]} \times s_2$$

Par suite, le produit de solubilité de  $\text{Ag}_2\text{SO}_3$  est défini par :

$$K_s = [\text{Ag}^+]^2 [\text{SO}_3^{2-}] = 4s_2^4 \times \frac{K_{a2}}{[\text{H}^+]} s_2 \Rightarrow s_2 = \sqrt[3]{\frac{K_s [\text{H}^+]}{4 K_{a2}}}$$

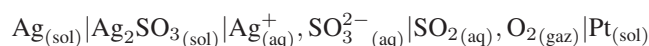
Application numérique :

$$s_2 = \sqrt[3]{\frac{3,2 \cdot 10^{-14} \times 10^{-4}}{4 \times 10^{-7}}} \Rightarrow s_2 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

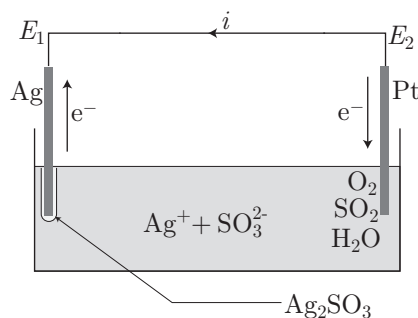
L'inégalité :  $s_2 \gg s_1$  confirme qu'à pH = 4, les ions  $\text{SO}_3^{2-}$  sont transformés en ions  $\text{HSO}_3^-$ , de sorte qu'à ce pH, la concentration  $[\text{SO}_3^{2-}]_2$  est plus faible que celle,  $[\text{SO}_3^{2-}]_1$ , calculée en l'absence de propriétés basiques. C'est pourquoi :

$[\text{Ag}^+] = s = \frac{K_s}{[\text{SO}_3^{2-}]}$  est d'autant plus grand que le milieu est acide (tout se passe comme si les ions  $\text{SO}_3^{2-}$  disparaissaient sous forme  $\text{HSO}_3^-$  et  $\text{H}_2\text{SO}_3$ , en retardant par cet effet la saturation du milieu).

3. Compte tenu de la notation de la pile :

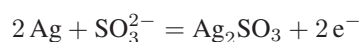


cette dernière peut être représentée de la manière suivante :



Dans ces conditions :

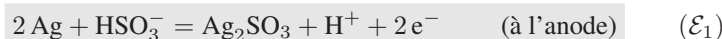
- l'anode est matérialisée par l'électrode d'argent (en notation conventionnelle, l'écriture d'une pile commence par l'anode) en contact avec le sulfite d'argent  $\text{Ag}_2\text{SO}_3$  solide. La demi-équation correspondante s'écrit :



Cependant, le diagramme de prédominance des espèces sulfurées montre que la présence simultanée de l'acide  $\text{SO}_2$  et de la base  $\text{SO}_3^{2-}$  dans le milieu conduit à une réaction d'équation-bilan :



auquel cas  $\text{HSO}_3^-$  est l'espèce sulfurée présente majoritairement en solution. C'est pourquoi la demi-équation de la réaction qui se produit à l'anode s'écrit plutôt :

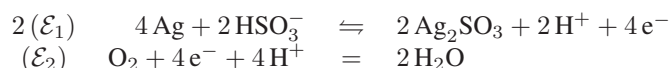


- la cathode de platine plonge dans une solution aqueuse chargée en dioxygène ; la demi-équation de la réaction qui s'y produit s'écrit :



Remarque – Conformément à la question 2, les espèces  $\text{HSO}_3^-$ ,  $\text{Ag}_2\text{SO}_3$  et  $\text{H}^+$  peuvent coexister dans une solution acide.

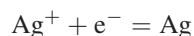
La combinaison linéaire des équations  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$  :



fournit l'équation-bilan de la réaction globale de fonctionnement de la pile :



4. Le potentiel  $E_1$  de l'anode est celui du couple  $\text{Ag(I)}/\text{Ag(0)}$ , dont on connaît le potentiel standard  $E_1^0$  associé à la demi-équation :



Par conséquent, en notant  $a_X$  l'activité d'une espèce X, la loi de Nernst impose :

$$E_1 = E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{a_{\text{Ag}^+}}{a_{\text{Ag}}} \right) = E_1^0 + 0,03 \log \left( \frac{a_{\text{Ag}^+}^2}{a_{\text{Ag}}^2} \right) \quad (59)$$

Or, les constantes  $K_s$  et  $K_{a2}$  sont définies par :

$$K_s = \frac{a_{\text{Ag}^+}^2 a_{\text{SO}_3^{2-}}}{a_{\text{Ag}_2\text{SO}_3}} \Rightarrow a_{\text{Ag}^+}^2 = K_s \times \frac{a_{\text{Ag}_2\text{SO}_3}}{a_{\text{SO}_3^{2-}}}$$

et :

$$\begin{aligned} K_{a2} &= \frac{a_{\text{H}^+} a_{\text{SO}_3^{2-}}}{a_{\text{HSO}_3^-}} \Rightarrow a_{\text{SO}_3^{2-}} = K_{a2} \times \frac{a_{\text{HSO}_3^-}}{a_{\text{H}^+}} \\ &\Rightarrow a_{\text{Ag}^+}^2 = \frac{K_s}{K_{a2}} \times \frac{a_{\text{H}^+}}{a_{\text{HSO}_3^-}} \times a_{\text{Ag}_2\text{SO}_3} \end{aligned}$$

Ainsi, en tenant compte des valeurs des activités des espèces solides ( $a_{\text{Ag}} = 1$  et  $a_{\text{Ag}_2\text{SO}_3} = 1$ ), la relation (59) fournit :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log \left( \frac{K_s}{K_{a2}} \times \frac{a_{H^+}}{a_{\text{HSO}_3^-}} \right)$$

dont on s'assurera de la compatibilité avec la demi-équation ( $\mathcal{E}_1$ ), pour laquelle le potentiel *standard* du couple Ag/Ag<sub>2</sub>SO<sub>3</sub> vaut :

$$E^0 (\text{Ag}/\text{Ag}_2\text{SO}_3) = E_1^0 + 0,03 \log \left( \frac{K_s}{K_{a2}} \right)$$

Quant à la cathode, sa demi-équation ( $\mathcal{E}_2$ ) montre qu'elle adopte le potentiel :

$$E_2 = E_2^0 + \frac{0,06}{4} \log (a_{\text{O}_2} a_{\text{H}^+}^4) = E_2^0 + 0,03 \log (\sqrt{a_{\text{O}_2}} \times a_{\text{H}^+}^2)$$

Ainsi, la force électromotrice de la pile vaut :

$$e = E_2 - E_1 = E_2^0 - E_1^0 + 0,03 \log \left( \sqrt{a_{\text{O}_2}} a_{\text{H}^+} a_{\text{HSO}_3^-} \times \frac{K_{a2}}{K_s} \right)$$

Enfin, la constante d'acidité :

$$K_{a1} = \frac{a_{\text{HSO}_3^-} a_{\text{H}^+}}{a_{\text{H}_2\text{SO}_3}} \Rightarrow a_{\text{H}^+} a_{\text{HSO}_3^-} = K_{a1} \times a_{\text{H}_2\text{SO}_3}$$

associée à la constante de l'équilibre de dissolution :

$$\begin{aligned} K &= \frac{a_{\text{H}_2\text{SO}_3}}{a_{\text{SO}_2}} \Rightarrow a_{\text{H}_2\text{SO}_3} = K \times a_{\text{SO}_2} \\ &\Rightarrow a_{\text{H}^+} a_{\text{HSO}_3^-} = K_{a1} K \times a_{\text{SO}_2} \end{aligned}$$

conduisent à :

$$e = E_2^0 - E_1^0 + 0,03 \log \left( \sqrt{a_{\text{O}_2}} \times \frac{K_{a1} K_{a2} K}{K_s} \times a_{\text{SO}_2} \right)$$

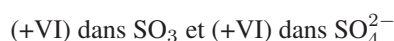
c'est-à-dire, compte tenu des définitions des activités des espèces gazeuses :

$$e = E_2^0 - E_1^0 + 0,03 (\text{p}K_s - \text{p}K_{a1} - \text{p}K_{a2} - \text{p}K) + 0,03 \log \left( \sqrt{\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}} \times \frac{P_{\text{SO}_2}}{P_0} \right)$$

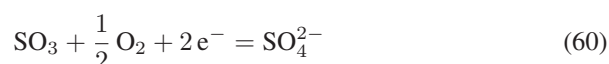
5. En considérant que  $P_{\text{O}_2} = P_{\text{SO}_2} = P_0 = 1$  bar, cette relation devient :

$$\begin{aligned} e &= E_2^0 - E_1^0 + 0,03 (\text{p}K_s - \text{p}K_{a1} - \text{p}K_{a2} - \text{p}K) \\ &= 1,23 - 0,8 + 0,03 \times (13,5 - 2 - 7 + 0,2) \Rightarrow e = 0,57 \text{ V} \end{aligned}$$

6. Dans la demi-pile de droite, le soufre présente les degrés d'oxydation :



ce qui signifie que, dans la demi-équation :

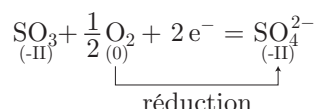


l'élément soufre conserve son degré d'oxydation et subit donc ni oxydation ni réduction.

En revanche, l'élément oxygène a pour degrés d'oxydation :

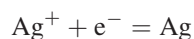


ce qui suffit à montrer que la demi-équation (60) correspond à la réduction de l'élément oxygène :



En conclusion, cette demi-équation est caractéristique du couple :  $\text{O}_2/\text{SO}_4^{2-}$ .

7. L'anode de la demi-pile de gauche réunit le couple  $\text{Ag}(+I)/\text{Ag}(0)$  :



auquel cas son potentiel vaut :

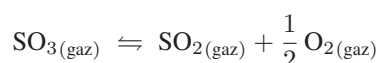
$$E_1 = E_1^0 + 0,06 \log \left( \frac{a_{\text{Ag}^+}}{a_{\text{Ag}}} \right) \text{ où } a_{\text{Ag}} = 1$$

$$\Rightarrow E_1 = E_1^0 + 0,03 \log \left( a_{\text{Ag}^+}^2 \right)$$

De même, la loi de Nernst prévoit que l'expression du potentiel de la cathode, siége de la demi-équation (60), vaut :

$$E_3 = E_3^0 + 0,03 \log \left( \frac{P_{\text{SO}_3}}{P_0} \times \sqrt{\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}} \times \frac{1}{a_{\text{SO}_4^{2-}}} \right)$$

Or, l'équilibre (50) :



a pour constante :

$$K_2 = \frac{P_{\text{SO}_2}}{P_{\text{SO}_3}} \times \sqrt{\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}} \Rightarrow P_{\text{SO}_3} = \frac{P_{\text{SO}_2}}{K_2} \sqrt{\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}}$$

$$\Rightarrow E_3 = E_3^0 + 0,03 \log \left( \frac{P_{\text{SO}_2}}{K_2 P_0} \times \frac{1}{a_{\text{SO}_4^{2-}}} \times \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} \right)$$

Ce faisant, la force électromotrice de la pile a pour expression :

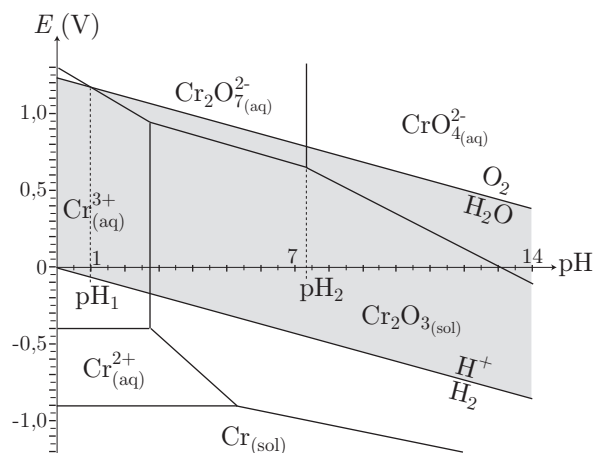
$$e = E_1 - E_3 = E_1^0 - E_3^0 + 0,03 \log \left( a_{\text{Ag}^+}^2 \times a_{\text{SO}_4^{2-}} \times \frac{K_2 P_0^2}{P_{\text{SO}_2} P_{\text{O}_2}} \right)$$

## ● 225 ————— Lycée Charlemagne, Paris

1. Afin de déterminer la stabilité, dans l'eau, des diverses espèces contenant du chrome, il convient de représenter le domaine de stabilité de l'eau, lequel est

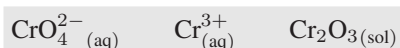
compris entre les courbes d'équations :

$$E(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 - 0,06 \text{ pH} \text{ et } E(\text{H}^+/\text{H}_2) = -0,06 \text{ pH}$$

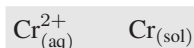


Ce faisant :

- les espèces stables à tout pH sont celles dont une partie du domaine de prédominance est inclus dans le domaine de stabilité de l'eau (grisé sur le diagramme), pour tout pH délimitant leur domaine de prédominance ; il s'agit de :



- les espèces instables, à tout pH, sont celles dont le domaine de prédominance est disjoint du domaine de stabilité de l'eau, à tout pH, c'est-à-dire :

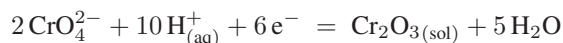


- une espèce stable dans l'eau, dans un domaine de pH limité, présente une partie de son domaine de prédominance en dehors du domaine de stabilité de l'eau :

$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}(\text{aq})$  est instable dans l'eau pour  $\text{pH} < \text{pH}_1$  (cf. diagramme ci-dessus) mais y demeure stable lorsque  $\text{pH}_1 < \text{pH} < \text{pH}_2$ .

2. D'après le diagramme précédent, le chrome métallique ne devrait pas être stable dans l'eau. Son inertie apparente provient néanmoins de la *passivation*, phénomène par lequel Cr est oxydé en  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , lequel oxyde se dépose à la surface du métal en une couche solide imperméable à l'eau. Le métal, ainsi isolé de son agent oxydant ( $\text{H}^+$ ), est protégé de la corrosion.

3. Le couple  $\text{CrO}_4^{2-}/\text{Cr}_2\text{O}_3$  est lié par la demi-équation :



dont la loi de Nernst donne le potentiel  $E$  en fonction du potentiel standard  $E^0$  de ce couple :

$$E = E^0 + \frac{0,06}{6} \log \left( [\text{CrO}_4^{2-}]^2 \times [\text{H}^+]^{10} \right)$$

$$\Rightarrow E = E^0 + 0,02 \log C_0 - 0,1 \times \text{pH} = E^0 - 0,1 \times \text{pH}$$



car, sur la frontière séparant les espèces  $\text{CrO}_4^{2-}$  et  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , seul  $\text{CrO}_4^{2-}$  est dissous et est donc présent en solution à la concentration  $C_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

Du reste, l'expression  $E(\text{pH})$  montre que le segment de droite figurant cette frontière a pour pente :

$$\frac{dE}{d\text{pH}} = -0,1 \text{ V}$$

## ● 226 ————— Concours Polytechnique

1. L'enthalpie libre *standard* associée la demi-équation :



vaut :

$$\Delta_r G_1^0 = \Delta_f G^0(\text{Fe}^{2+}) - \Delta_f G^0(\text{Fe}^{3+}) = -74,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

auquel cas le potentiel *standard*  $E_1^0$  du couple  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$  vérifie :

$$\Delta_r G_1^0 = -\mathcal{F} E_1^0 \Rightarrow E_1^0 = \frac{74\,300}{96\,500} \Rightarrow E_1^0 = 0,770 \text{ V pour } \text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$$

De même, la réaction d'équation :  $\text{Fe}^{2+} + 2e^- = \text{Fe}$  a pour enthalpie libre *standard* :

$$\Delta_r G_2^0 = \underbrace{\Delta_f G^0(\text{Fe})}_{=0} - \Delta_f G^0(\text{Fe}^{2+}) = 78,9 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

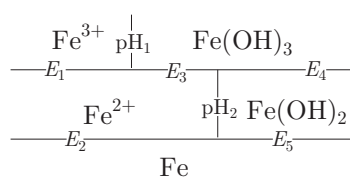
car  $\text{Fe}_{(\text{sol})}$  est dans son état de référence *standard*, dont l'enthalpie libre et l'enthalpie *standard* de formation sont nulles. C'est pourquoi le potentiel *standard*  $E_2^0$  du couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$  vérifie :

$$\Delta_r G_2^0 = -2\mathcal{F} E_2^0 \Rightarrow E_2^0 = -\frac{78\,900}{2 \times 96\,500} \Rightarrow E_2^0 = -0,409 \text{ V pour } \text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$$

2. Le recensement des espèces mentionnées par l'énoncé, qui contiennent l'élément fer, fait apparaître celui-ci :

- au degré d'oxydation (III) dans  $\text{Fe}^{3+}$  et  $\text{Fe}(\text{OH})_3$  ;
- au degré d'oxydation (II) dans  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  ;
- au degré d'oxydation (0) dans  $\text{Fe}$ .

Par conséquent, le diagramme potentiel-pH doit présenter la structure schématisée ci-dessous :



- La frontière qui sépare les domaines de stabilité de  $\text{Fe}^{3+}$  et  $\text{Fe}(\text{OH})_3$  est donnée par la valeur  $\text{pH}_1$  du pH à laquelle apparaît le précipité  $\text{Fe}(\text{OH})_3$ , auquel cas :



Or, la convention selon laquelle la concentration totale de fer dissous vaut  $C_t = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  :

$$[\text{Fe}^{3+}] + [\text{Fe}^{2+}] = C_t \quad (62)$$

se simplifie dans le domaine de stabilité de Fe(III) :

$$\begin{aligned} [\text{Fe}^{3+}] \simeq C_t &\Rightarrow K_{s1} = C_t \times [\text{HO}^-]^3 = C_t \times \left( \frac{10^{-14}}{[\text{H}^+]} \right)^3 \\ &\Rightarrow \text{pH}_1 = 14 + \frac{1}{3} \times (\log K_{s1} - \log C_t) \\ &\Rightarrow \text{pH}_1 = 14 + \frac{1}{3} \times [\log (2,5 \cdot 10^{-39}) - \log(0,1)] \\ &\Rightarrow \text{pH}_1 = 1,47 \end{aligned}$$

- Dans le domaine de stabilité de Fe(II), il existe une valeur  $\text{pH}_2$  du pH à partir de laquelle apparaît le précipité  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  :



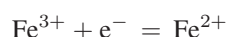
En outre, dans ce domaine, les ions  $\text{Fe}^{3+}$  sont quasi inexistantes, ce qui simplifie l'équation (62) :

$$\begin{aligned} [\text{Fe}^{2+}] \simeq C_t &\Rightarrow K_{s2} = C_t \times \left( \frac{10^{-14}}{[\text{H}^+]} \right)^2 \\ &\Rightarrow \log K_{s2} = \log C_t + 2 \times (\text{pH}_2 - 14) \\ &\Rightarrow \text{pH}_2 = 14 + \frac{1}{2} (\log K_{s2} - \log C_t) \\ &\Rightarrow \text{pH}_2 = 14 + \frac{1}{2} \times [\log (4,8 \cdot 10^{-17}) + 1] \\ &\Rightarrow \text{pH}_2 = 6,34 \end{aligned}$$

Enfin, le diagramme potentiel-pH du fer sera accessible dès que seront connues les expressions des frontières qui délimitent les domaines de stabilité de Fe(III), de Fe(II) et de Fe(0).

- **Frontière  $E_1$**

Pour  $\text{pH} < \text{pH}_1$ , le couple Fe(III)/Fe(II) est représenté par la demi-équation :



dont le potentiel est donné par la loi de Nernst :

$$E_1 = E_1^0 + 0,059 \times \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) \text{ où } E_1^0 = 0,770 \text{ V}$$

Or, sur une frontière, les concentrations des espèces dissoutes sont égales :

$$[\text{Fe}^{3+}] + [\text{Fe}^{2+}] = \frac{C_t}{2} \Rightarrow E_1 = E_1^0 = 0,770 \text{ V}$$

• **Frontière  $E_3$**

Le couple Fe(III)/Fe(II) est encore caractérisé par le potentiel :

$$E_3 = E_1^0 + 0,059 \times \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$$

sur une frontière qui correspond à une solution contenant seulement des ions  $\text{Fe}^{2+}$  (le fer III est présent sous forme d'hydroxyde insoluble), d'où l'on déduit que :

$$[\text{Fe}^{2+}] + \underbrace{[\text{Fe}^{3+}]}_{=0} = C_t \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] \simeq C_t = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En outre, l'existence de  $\text{Fe}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$  impose :

$$K_{s1} = [\text{Fe}^{3+}] [\text{HO}^-]^3 \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = \frac{K_{s1}}{[\text{HO}^-]^3} = K_{s1} \times \left( \frac{[\text{H}^+]}{10^{-14}} \right)^3 \quad (63)$$

Par suite :

$$\begin{aligned} E_3 &= E_1^0 + 0,059 \times \log \left[ \frac{K_{s1}}{C_t} \times \left( \frac{[\text{H}^+]}{10^{-14}} \right)^3 \right] \\ &= E_1^0 + 0,059 \times (\log K_{s1} - \log C_t) + 3 \times 0,059 \times (14 - \text{pH}) \\ &= 0,770 + 0,059 \times [\log (2,6 \cdot 10^{-39}) + 1 + 3 \times 14] - 3 \times 0,059 \times \text{pH} \\ &\Rightarrow E_3 = 1,030 - 0,177 \times \text{pH} \end{aligned}$$

Remarque – La comparaison de  $E_1 = 0,770 \text{ V}$  avec :

$$E_3(\text{pH}_1) = 1,030 - 0,177 \times 1,47 = 0,770 \text{ V}$$

suffit à confirmer la continuité de la frontière Fe(III)/Fe(II) en  $\text{pH} = \text{pH}_1$ .

• **Frontière  $E_4$**

Pour  $\text{pH} \geq \text{pH}_2 = 6,34$  Fe(III) et Fe(II) se présentent sous formes d'hydroxydes insolubles  $\text{Fe}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$  et  $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ . C'est pourquoi  $[\text{Fe}^{3+}]$  est donné par la relation (63) :

$$[\text{Fe}^{3+}] = K_{s1} \times \left( \frac{[\text{H}^+]}{10^{-14}} \right)^3$$

tandis que :

$$K_{s2} = [\text{Fe}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s2}}{[\text{HO}^-]^2} = K_{s2} \times \left( \frac{[\text{H}^+]}{10^{-14}} \right)^2 \quad (64)$$

Ainsi, la loi de Nernst, appliquée au couple Fe(III)/Fe(II), devient-elle :

$$\begin{aligned} E_4 &= E_1^0 + 0,059 \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = E_1^0 + 0,059 \log \left( \frac{K_{s1}}{K_{s2}} \times \frac{[\text{H}^+]}{10^{-14}} \right) \\ &= E_1^0 + 0,059 \times (14 + \log K_{s1} - \log K_{s2}) - 0,059 \times \text{pH} \\ &= 0,77 + 0,059 \times [14 + \log (2,6 \cdot 10^{-39}) - \log (4,8 \cdot 10^{-17})] - 0,059 \times \text{pH} \end{aligned}$$

ce qui conduit finalement à :

$$E_4 = 0,282 - 0,059 \times \text{pH}$$

Remarque - On s'assure de la continuité de la frontière Fe(III)/Fe(II) en  $\text{pH} = \text{pH}_2$  en comparant :

$$E_3(\text{pH}_2) = 1,030 - 0,177 \times 6,34 = -0,092 \text{ V}$$

et :

$$E_4(\text{pH}_2) = 0,282 - 0,059 \times 6,34 = -0,092 \text{ V}$$

• **Frontière  $E_2$**

Le couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}$ , de demi-équation :  $\text{Fe}^{2+} + 2\text{e}^- = \text{Fe}$ , présente le potentiel :

$$E_2 = E_2^0 + \frac{0,059}{2} \log [\text{Fe}^{2+}]$$

Or, dans le domaine de stabilité de  $\text{Fe}^{2+}$ , l'identité (62) devient :

$$\underbrace{[\text{Fe}^{3+}]}_{\simeq 0} + [\text{Fe}^{2+}] = C_t \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] \simeq C_t = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Par conséquent :

$$E_2 = -0,409 + \frac{0,059}{2} \log(0,1) \Rightarrow E_2 = -0,438 \text{ V}$$

• **Frontière  $E_5$**

Le potentiel du couple Fe(II)/Fe(0) est à nouveau donné par la loi de Nernst :

$$E_5 = E_2^0 + \frac{0,059}{2} \log [\text{Fe}^{2+}]$$

où, lorsque  $\text{pH} \geq \text{pH}_2$ , la concentration  $[\text{Fe}^{2+}]$  est exprimée par la relation (64) :

$$\begin{aligned} [\text{Fe}^{2+}] &= K_{s2} \times \left( \frac{[\text{H}^+]}{10^{-14}} \right)^2 \Rightarrow E_5 = E_2^0 + \frac{0,059}{2} \log \left( \frac{K_{s2} \times [\text{H}^+]^2}{10^{-28}} \right) \\ &\Rightarrow E_5 = -0,409 + \frac{0,059}{2} \times (28 + \log K_{s2}) - 0,059 \times \text{pH} \end{aligned}$$

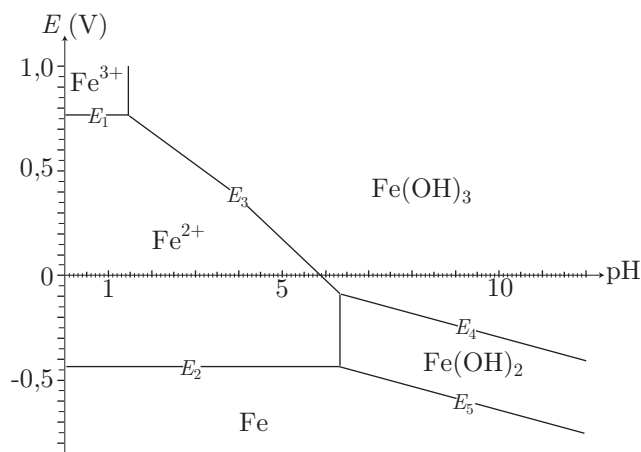
d'où il découle que :

$$E_5 = -0,064 - 0,059 \times \text{pH}$$

Remarque – La détermination de :

$$E_5(\text{pH}_2) = -0,064 - 0,059 \times 6,34 = -0,438 \text{ V} = E_2$$

confirme la continuité de la frontière Fe(III)/Fe(0) en  $\text{pH} = \text{pH}_2$ .

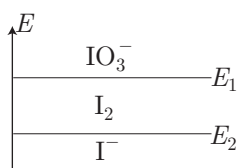


## ● 227 ————— Lycée Hoche, Versailles

Dans l'ion  $\text{IO}_3^-$ , le degré d'oxydation  $x$  de l'élément I vérifie :

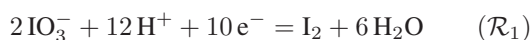
$$x - 6 = -1 \Rightarrow x = +5$$

tandis que dans les espèces  $\text{I}_2$  et  $\text{I}^-$ , l'iode a pour degrés d'oxydation respectifs 0 et -1. C'est pourquoi les espèces  $\text{IO}_3^-$ ,  $\text{I}_2$  et  $\text{I}^-$  seront présentées dans l'ordre suivant :



à condition toutefois que les courbes frontières  $E_1(\text{pH})$  et  $E_2(\text{pH})$  soient telles que  $E_1(\text{pH}) > E_2(\text{pH})$ . Il s'agit désormais d'établir les expressions analytiques de ces courbes :

- Pour le couple  $\text{IO}_3^-/\text{I}_2$ , la demi-équation :



est associée au potentiel donné par la loi de Nernst :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1^0 + \frac{0,06}{10} \log \left( \frac{[\text{IO}_3^-]^2 [\text{H}^+]^{12}}{[\text{I}_2]} \right) \\ &= E_1^0 + \frac{0,06}{10} \log \left( \frac{[\text{IO}_3^-]^2}{[\text{I}_2]} \right) + \frac{0,06}{10} \times 12 \log [\text{H}^+] \\ &= E_1^0 + \frac{0,06}{10} \log \left( \frac{[\text{IO}_3^-]^2}{[\text{I}_2]} \right) - 0,072 \times \text{pH} \end{aligned}$$

Or, la concentration totale de l'iode atomique dissous est définie par :

$$[\text{I}^-] + 2 [\text{I}_2] + [\text{IO}_3^-] = C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad (65)$$

car à chaque mol · L<sup>-1</sup> de I<sub>2</sub> correspondent 2 mol · L<sup>-1</sup> d'iode atomique. Quant à la frontière séparant les espèces IO<sub>3</sub><sup>-</sup> et I<sub>2</sub>, elle est caractérisée par :

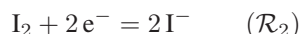
- l'absence de I<sup>-</sup> : 2 [I<sub>2</sub>] + [IO<sub>3</sub><sup>-</sup>] = 0,1 mol · L<sup>-1</sup> ;
- l'égalité des concentrations atomiques :

$$\begin{aligned} 2 [\text{I}_2] = [\text{IO}_3^-] &\Rightarrow 2 [\text{IO}_3^-] = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow [\text{IO}_3^-] = 0,05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ &\Rightarrow 4 [\text{I}_2] = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow [\text{I}_2] = 0,025 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} E_1 &= 1,2 + \frac{0,06}{10} \log \left[ \frac{(0,05)^2}{0,025} \right] - 0,072 \times \text{pH} \\ &\Rightarrow E_1 = 1,194 - 0,072 \times \text{pH} \end{aligned}$$

- Quant au couple I<sub>2</sub>/I<sup>-</sup>, de demi-équation :



son potentiel vaut :

$$E_2 = E_2^0 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2} \right)$$

De plus, la relation (65) devient :

$$[\text{I}^-] + 2 [\text{I}_2] = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

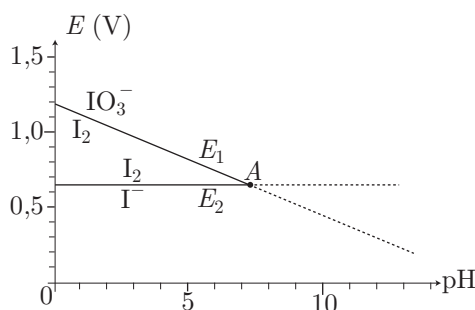
car, à la frontière entre les espèces I<sup>-</sup> et I<sub>2</sub>, la concentration en ions iodate IO<sub>3</sub><sup>-</sup> peut être négligée. Enfin, cette frontière est définie par l'égalité des concentrations atomiques de l'élément iode, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} [\text{I}^-] = 2 [\text{I}_2] &\Rightarrow 2 [\text{I}^-] = 0,1 \Rightarrow [\text{I}^-] = 0,05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ &\Rightarrow 4 [\text{I}_2] = 0,1 \Rightarrow [\text{I}_2] = 0,025 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$E_2 = E_2^0 + 0,03 \log \left[ \frac{0,025}{(0,05)^2} \right] \Rightarrow E_2 = 0,65 \text{ V}$$

Les expressions de  $E_1$  et de  $E_2$  conduisent à une première ébauche du diagramme potentiel-pH cherché :



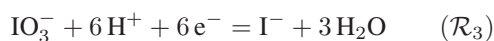
Cependant, ce diagramme révèle que les courbes  $E_1$  et  $E_2$  se coupent au point  $A$ , dont le  $\text{pH}_A$  vérifie :

$$E_1 = E_2 \Rightarrow 1,194 - 0,072 \times \text{pH}_A = 0,65 \Rightarrow \text{pH}_A = \frac{1,194 - 0,65}{0,072} = 7,25$$

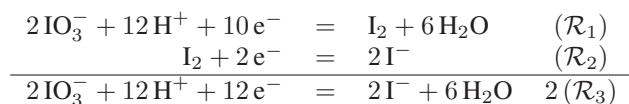
Pour  $\text{pH} > \text{pH}_A$ , la « règle du gamma » montre que  $\text{I}_2$  n'est plus une espèce stable dès que  $E_2$  devient supérieur à  $E_1$  :  $\text{I}_2$  subit une dismutation, d'équation-bilan :



Par suite, lorsque  $\text{pH} > \text{pH}_A$ , seules les espèces  $\text{IO}_3^-$  et  $\text{I}^-$  sont stables en milieu aqueux, avec pour équation :



Or, une combinaison linéaire des équations  $(\mathcal{R}_1)$  et  $(\mathcal{R}_2)$  :



permet d'écrire :  $2(\mathcal{R}_3) = (\mathcal{R}_1) + (\mathcal{R}_2)$ . Il en va de même des enthalpies libres *standard* associées à ces équations :

$$2 \Delta_r G_3^0 = \Delta_r G_1^0 + \Delta_r G_2^0$$

où :

$$\begin{cases} \Delta_r G_3^0 = -6 \mathcal{F} E_3^0 \\ \Delta_r G_2^0 = -2 \mathcal{F} E_2^0 \\ \Delta_r G_1^0 = -10 \mathcal{F} E_1^0 \end{cases} \Rightarrow 12 E_3^0 = 10 E_1^0 + 2 E_2^0$$

$$\Rightarrow E_3^0 = \frac{5 E_1^0 + E_2^0}{6} = \frac{5 \times 1,2 + 0,62}{6} = 1,10 \text{ V}$$

Ainsi, la loi de Nernst appliquée à l'équation ( $\mathcal{R}_3$ ) conduit à :

$$E_3 = E_3^0 + 0,01 \log \left( \frac{[\text{IO}_3^-] [\text{H}^+]^6}{[\text{I}^-]} \right) = 1,1 + 0,01 \log \left( \frac{[\text{IO}_3^-]}{[\text{I}^-]} \right) - 0,06 \times \text{pH}$$

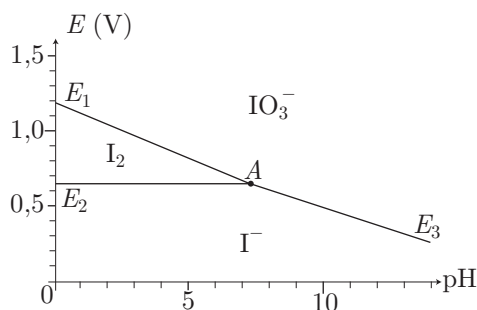
Enfin, en négligeant  $[\text{I}_2]$  (pour  $\text{pH} > \text{pH}_A$ ), la loi de conservation exprimée par l'équation (65) devient :

$$[\text{I}^-] + [\text{IO}_3^-] = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow [\text{I}^-] = [\text{IO}_3^-] = 0,05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Finalement :

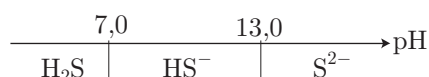
$$E_3 = 1,1 - 0,06 \times \text{pH} \text{ pour } \text{pH} \geq 7,25$$

décrit la frontière entre les domaines de prédominance de  $\text{IO}_3^-$  et de  $\text{I}_2$  :

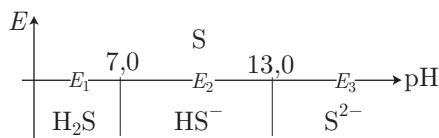


## ● 228 ————— Concours Centrale

1. Les valeurs  $\text{p}K_{a1}$  et  $\text{p}K_{a2}$  des constantes d'acidité des couples acido-basiques  $\text{H}_2\text{S}/\text{HS}^-$  et  $\text{HS}^-/\text{S}^{2-}$  conduisent au diagramme de prédominance suivant :



En outre, dans ces molécules, le soufre se trouve au même degré d'oxydation (-II), tandis que seul  $\text{S}_{(\text{sol})}$  présente un degré d'oxydation nul, dans la liste des données numériques fournies par l'énoncé. Par suite, on peut d'ores et déjà esquisser l'allure du diagramme potentiel-pH des couples  $\text{S}(0)/\text{S}(-\text{II})$  :



Ce diagramme révèle alors trois frontières qu'il faut désormais décrire analytiquement.

- La frontière  $E_1$  sépare les domaines d'existence de  $\text{H}_2\text{S}$  et  $\text{S}$ , impliqués dans la demi-équation :





et pour laquelle la loi de Nernst prévoit que :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{H}^+]^2}{[\text{H}_2\text{S}]} \right) = E_1^0 - 0,03 \log [\text{H}_2\text{S}] - 0,06 \times \text{pH}$$

L'énoncé n'indique pas la convention choisie pour définir les frontières du diagramme ; le candidat est libre de définir la convention qu'il adopte (mais il doit le faire avec soin). Or, la dernière question montre que l'on s'intéressera, ultérieurement, à une solution contenant initialement  $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  de  $\text{H}_2\text{S}$ . C'est pourquoi on conviendra que la concentration totale de l'élément soufre en solution vaut  $C_0$  :

$$[\text{H}_2\text{S}] + [\text{HS}^-] + [\text{S}^{2-}] = C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad (67)$$

Notamment, pour  $\text{pH} < 7$ , l'identité précédente mène à :

$$\begin{aligned} [\text{H}_2\text{S}] \simeq C_0 &\Rightarrow E_1 = E_1^0 - 0,03 \log C_0 - 0,06 \text{ pH} = 0,1 + 0,03 - 0,06 \text{ pH} \\ &\Rightarrow E_1 = 0,13 - 0,06 \times \text{pH} \end{aligned}$$

- La frontière  $E_2$  est également fournie par la loi de Nernst, appliquée à l'équation (66) :

$$E_2 = E_1^0 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{H}^+]^2}{[\text{H}_2\text{S}]} \right)$$

Cependant, pour  $7 < \text{pH} < 13$ , l'espèce  $\text{HS}^-$  est majoritaire, ce qui se traduit pour l'équation (67) par :

$$[\text{HS}^-] \simeq C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

La définition de la constante d'acidité  $K_{a1}$  conduit alors à :

$$\begin{aligned} K_{a1} &= 10^{-7} = \frac{[\text{HS}^-][\text{H}^+]}{[\text{H}_2\text{S}]} = \frac{C_0[\text{H}^+]}{[\text{H}_2\text{S}]} \Rightarrow [\text{H}_2\text{S}] = \frac{C_0}{K_{a1}} [\text{H}^+] \\ &\Rightarrow E_2 = E_1^0 + 0,03 \log \left( \frac{K_{a1}}{C_0} [\text{H}^+] \right) \\ &\Rightarrow E_2 = E_1^0 - 0,03 \times (\text{p}K_{a1} + \log C_0) - 0,03 \text{ pH} \\ &\Rightarrow E_2 = 0,1 - 0,03 \times (7 - 1) - 0,03 \times \text{pH} \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$E_2 = -0,08 - 0,03 \text{ pH}$$

- L'équation (66) fournit également  $E_3 = E_1^0 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{H}^+]^2}{[\text{H}_2\text{S}]} \right)$ , où  $\text{H}_2\text{S}$  n'est pas connu *a priori*. C'est pourquoi on simplifie l'équation (67) pour  $\text{pH} > 13$  :  $[\text{S}^{2-}] \simeq C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , tandis que les constantes d'acidité

$K_{a1}$  et  $K_{a2}$  conduisent à :

$$K_{a1} \times K_{a2} = \frac{[\text{HS}^-][\text{H}^+]}{[\text{H}_2\text{S}]} \times \frac{[\text{S}^{2-}][\text{H}^+]}{[\text{HS}^-]} = \frac{C_0}{[\text{H}_2\text{S}]} \times [\text{H}^+]^2$$

$$\Rightarrow [\text{H}_2\text{S}] = \frac{C_0}{K_{a1} K_{a2}} \times [\text{H}^+]^2$$

$$\Rightarrow E_3 = E_1^0 + 0,03 \log \left( \frac{K_{a1} K_{a2}}{C_0} \right) = 0,1 + 0,03 \log \left( \frac{10^{-20}}{0,1} \right)$$

$$\Rightarrow E_3 = -0,47 \text{ V}$$



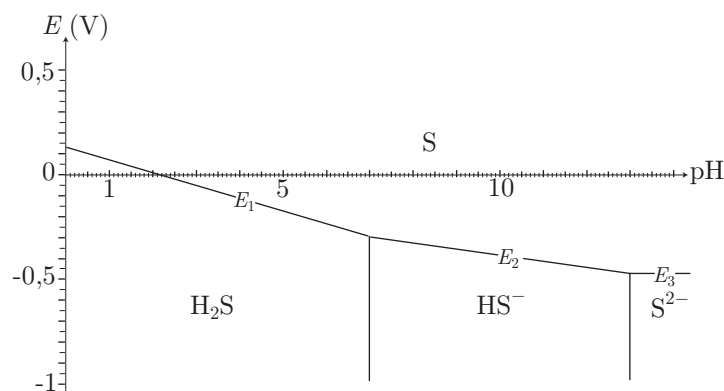
Il est préférable de vérifier les calculs à l'aide de la continuité de la frontière entre S(0) et S(-II). Cette continuité doit s'observer d'une part en  $\text{pH} = \text{pH}_1 = 7$  :

$$E_1(\text{pH}_1) = 0,13 - 0,06 \times 7 = -0,29 \text{ V} \text{ et } E_2(\text{pH}_1) = -0,08 - 0,03 \times 7 = -0,29 \text{ V}$$

et d'autre part en  $\text{pH} = \text{pH}_2 = 13$  :

$$E_2(\text{pH}_2) = -0,08 - 0,03 \times 13 = -0,47 \text{ V} \text{ et } E_3(\text{pH}_2) = E_2 = -0,47 \text{ V}$$

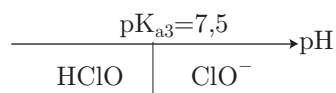
Il est dès lors possible de tracer le diagramme potentiel-pH du soufre :



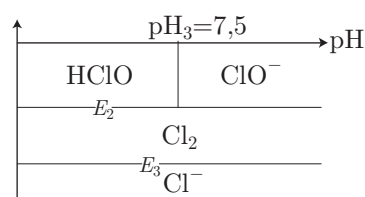
2. L'énoncé mentionne des espèces contenant l'élément chlore :

- au degré d'oxydation (+I) :  $\text{HClO}$ ,  $\text{ClO}^-$  ;
- au degré d'oxydation (0) :  $\text{Cl}_2$  ;
- au degré d'oxydation (-I) :  $\text{Cl}^-$

où  $\text{HClO}/\text{ClO}^-$  est un couple acido-basique dont le diagramme de prédominance présente l'allure suivante :

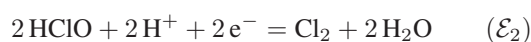


On peut donc représenter d'ores et déjà la structure du diagramme potentiel-pH du chlore :



Il convient alors de déterminer les expressions des frontières qui séparent les domaines d'existence de ces différentes espèces :

- Pour  $\text{pH} \leq \text{pH}_3 = 7,5$ , la demi-équation associée au couple  $\text{HClO}/\text{Cl}_2$  :



fournit le potentiel  $E_2$  du couple  $\text{Cl(I)}/\text{Cl(0)}$ , conformément à la loi de Nernst :

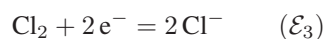
$$E_2 = E_2^0 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{HClO}]^2 [\text{H}^+]^2}{[\text{Cl}_2]} \right)$$

Or, l'énoncé préconise de définir cette frontière en choisissant :

$$[\text{HClO}] = [\text{Cl}_2] = C_1 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

auquel cas il reste :  $E_2 = E_2^0 - 0,06 \text{ pH} = 1,6 - 0,06 \times \text{pH}$

- Quelle que soit la valeur du  $\text{pH}$ , le couple  $\text{Cl(0)}/\text{Cl(-I)}$  est représenté par la demi-équation :



pour laquelle la loi de Nernst prévoit que :

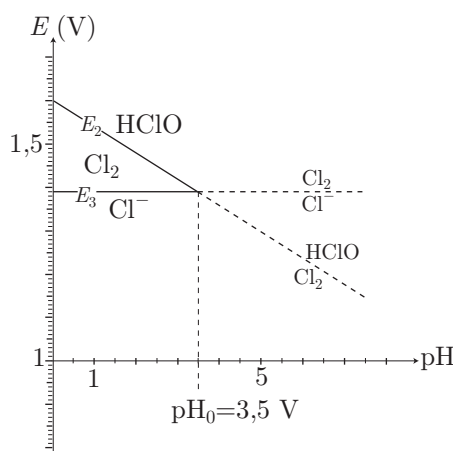
$$E_3 = E_3^0 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{Cl}_2]}{[\text{Cl}^-]^2} \right) = E_3^0$$

car l'énoncé recommande de définir la frontière  $E_3$  en posant :

$$[\text{Cl}_2] = [\text{Cl}^-] = C_1 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Par conséquent :  $E_3 = E_3^0 = 1,39 \text{ V}$ .

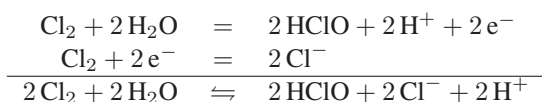
On peut tracer dès à présent ces deux frontières pour  $\text{pH} \leq 7,5$  :



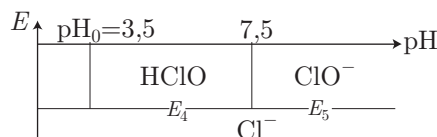
On constate alors que les frontières  $E_2$  et  $E_3$  se coupent pour une valeur  $\text{pH}_0$  de  $\text{pH}$  qui vérifie :

$$E_2 = E_3 \Rightarrow 1,6 - 0,06 \text{ pH}_0 = 1,39 \Rightarrow \text{pH}_0 = \frac{1,6 - 1,39}{0,06} = 3,5$$

Lorsque  $\text{pH} > \text{pH}_0$ , les domaines d'existence du dichlore sont disjoints, ce qui traduit son instabilité : comme oxydant du couple  $\text{Cl}_2/\text{Cl}^-$  et comme réducteur du couple  $\text{HClO}/\text{Cl}_2$ , le dichlore subit une dismutation :

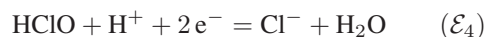


Il convient alors, à partir de  $\text{pH} = \text{pH}_0$ , de tenir compte de l'absence de  $\text{Cl}_2$  dans le diagramme potentiel-pH, qui adopte de fait la structure suivante :

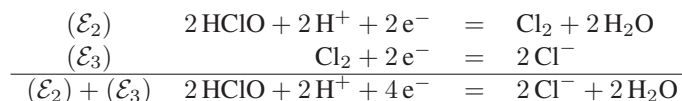


De nouvelles frontières apparaissent ainsi :

- Pour  $3,5 \leq \text{pH} \leq 7,5$ , le couple  $\text{Cl(I)}/\text{Cl(-I)}$  est représenté par la demi-équation :



dont le potentiel *standard* sera noté  $E_4^0 = E^0(\text{HClO}/\text{Cl}^-)$ . Or, l'équation  $(\mathcal{E}_4)$  est une combinaison linéaire des équations  $(\mathcal{E}_2)$  et  $(\mathcal{E}_3)$  :



En remarquant que  $2 \times (\mathcal{E}_4) = (\mathcal{E}_2) + (\mathcal{E}_3)$ , on déduit que les enthalpies libres

standard  $\Delta_r G_i^0$  est équations ( $\mathcal{E}_i$ ) vérifient :

$$2 \Delta_r G_4^0 = \Delta_r G_2^0 + \Delta_r G_3^0 \text{ avec } \begin{cases} \Delta_r G_4^0 = -2\mathcal{F} E_4^0 \\ \Delta_r G_2^0 = -2\mathcal{F} E_2^0 \\ \Delta_r G_3^0 = -2\mathcal{F} E_3^0 \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$E_4^0 = \frac{E_2^0 + E_3^0}{2} = \frac{1,6 + 1,39}{2} = 1,495 \text{ V}$$

de sorte que la loi de Nernst, appliquée à l'équation ( $\mathcal{E}_4$ ), fournit :

$$E_4 = E_4^0 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{HClO}] [\text{H}^+]}{[\text{Cl}^-]} \right) = E_4^0 - 0,03 \text{ pH}$$

car, sur la frontière  $E_4$  :  $[\text{HClO}] = [\text{Cl}^-] = C_1$ . Finalement :

$$E_4 = 1,495 - 0,03 \times \text{pH}$$

Remarque – *Les identités :*

$$\begin{cases} E_2(\text{pH}_0) = 1,6 - 0,06 \times 3,5 = 1,39 \text{ V} \\ E_3(\text{pH}_0) = 1,39 \text{ V} \\ E_4(\text{pH}_0) = 1,495 - 0,03 \times 3,5 = 1,39 \text{ V} \end{cases}$$

confirment que les trois frontières sont concourantes au point d'abscisse  $\text{pH}_0 = 3,5$ .

- Pour  $\text{pH} \geq 7,5$ , le couple  $\text{Cl(I)}/\text{Cl(-I)}$  est encore représenté par la demi-équation ( $\mathcal{E}_4$ ), auquel cas la loi de Nernst impose :

$$E_5 = E_4^0 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{HClO}] [\text{H}^+]}{[\text{Cl}^-]} \right)$$

Il n'est cependant plus possible de poser, dans ce cas,  $[\text{HClO}] = C_0$  car, lorsque  $\text{pH} > 7,5 = \text{p}K_{a3}$ , le dichlore au degré d'oxydation (+I) existe essentiellement sous forme d'ions  $\text{ClO}^-$ . C'est pourquoi la convention imposée par l'énoncé se traduit par :  $[\text{ClO}^-] = [\text{Cl}^-] = C_1 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Du reste, la constante d'acidité  $K_{a3}$  est définie par :

$$\begin{aligned} K_{a3} &= \frac{[\text{ClO}^-] [\text{H}^+]}{[\text{HClO}]} = C_1 \times \frac{[\text{H}^+]}{[\text{HClO}]} \Rightarrow [\text{HClO}] = C_1 \times \frac{[\text{H}^+]}{K_{a3}} \\ \Rightarrow E_5 &= E_4^0 + 0,03 \log \left( \frac{C_1 \times [\text{H}^+]^2}{C_1 \times K_{a3}} \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E_5 &= E_4^0 + 0,03 \text{p}K_{a3} - 0,06 \text{ pH} = 1,495 + 0,03 \times 7,5 - 0,06 \times \text{pH} \\ \Rightarrow E_5 &= 1,72 - 0,06 \times \text{pH} \end{aligned}$$

Remarque – *Les identités :*

$$E_5(\text{pH}_3) = 1,72 - 0,06 \times 7,5 = 1,27 \text{ V et } E_4(\text{pH}_3) = 1,495 - 0,03 \times 7,5 = 1,27 \text{ V}$$

confirment la continuité de la frontière  $\text{Cl}(+I)/\text{Cl}(-I)$ .

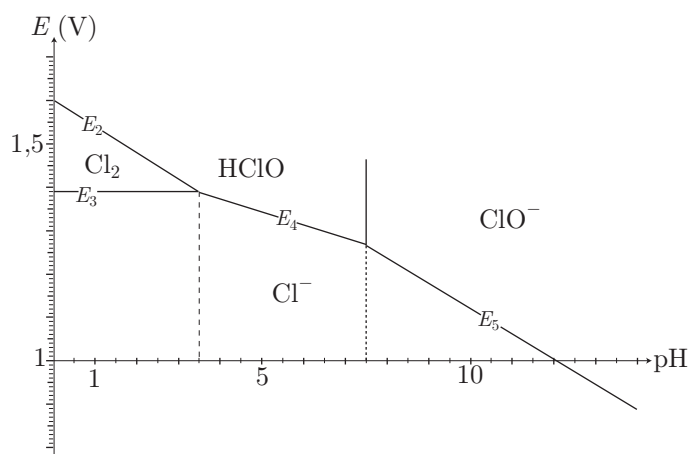
En résumé, le diagramme potentiel-pH du chlore est décrit par les frontières suivantes :

$$\begin{cases} E_2 = E(\text{HClO}/\text{Cl}_2) = 1,6 - 0,06 \times \text{pH} \\ E_3 = E(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) = 1,39 \text{ V} \end{cases} \quad \text{pour } \text{pH} \leq 3,5$$

$$E_4 = E(\text{HClO}/\text{Cl}^-) = 1,495 - 0,03 \times \text{pH} \quad \text{pour } 3,5 \leq \text{pH} \leq 7,5$$

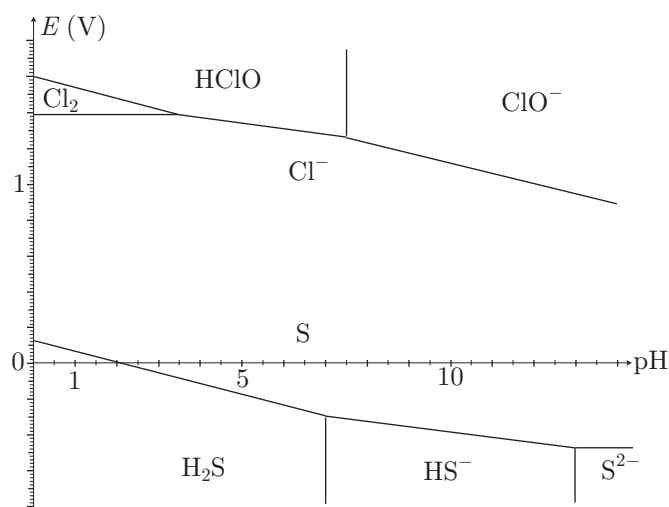
$$E_5 = E(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = 1,72 - 0,06 \times \text{pH} \quad \text{pour } \text{pH} \geq 7,5$$

et présente donc l'allure suivante :



3. La superposition de ces diagrammes fournit :

**CORRIGÉS**



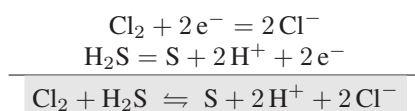
4. Une solution de H<sub>2</sub>S, à la concentration  $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , présente un pH voisin de :

$$\text{pH} = \frac{1}{2} (\text{p}K_{a1} - \log C_0) = 4$$

auquel cas le diagramme précédent montre que Cl<sub>2</sub> se dismute selon l'équation-bilan :



Outre la production de HClO et de Cl<sup>-</sup>, cette dismutation est responsable de la production des ions H<sup>+</sup> qui rendent rapidement le pH de la solution suffisamment acide pour que le dichlore introduit par barbotage ne subisse plus cette dismutation. Dès lors, Cl<sub>2</sub> et H<sub>2</sub>S sont mis en contact alors que leurs domaines d'existence sont disjoints. Ils réagissent alors conformément aux équations :



Si le barbotage de Cl<sub>2</sub> est prolongé, H<sub>2</sub>S peut se transformer complètement en soufre, tandis que les ions H<sup>+</sup> adoptent une concentration  $[\text{H}^+] = 0,2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ , ce qui confère au milieu un pH de valeur :

$$\text{pH} = -\log(2C_0) = 0,7$$

## ● 229 ————— Lycée du Parc, Lyon

1. Le produit de solubilité de HgO<sub>(sol)</sub> est défini comme la constante  $K_s$  de l'équilibre :



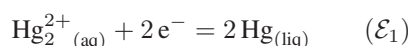
auquel cas :  $K_s = [\text{Hg}^{2+}] [\text{HO}^-]^2$ . Notamment, dans une solution qui contient initialement  $C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  d'ions Hg<sup>2+</sup>, la précipitation de HgO<sub>(sol)</sub> com-

mence dès que :

$$K_s = C_0 \times \left( \frac{K_e}{[\text{H}^+]} \right)^2 \Rightarrow \frac{K_e}{[\text{H}^+]} = \left( \frac{K_s}{C_0} \right)^{1/2} \Rightarrow \underbrace{\log K_e}_{-14} + \text{pH}_1 = \frac{1}{2} \log \left( \frac{K_s}{C_0} \right)$$

$$\Rightarrow \text{pH}_1 = 14 + \frac{1}{2} \log \left( \frac{4 \cdot 10^{-26}}{10^{-2}} \right) \Rightarrow \text{pH}_1 = 2,3$$

2. Les espèces  $\text{Hg}_2^{2+}(\text{aq})/\text{Hg}(\text{liq})$  :



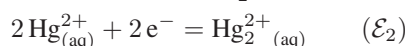
imposent un potentiel donné par la loi de Nernst :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log [\text{Hg}_2^{2+}]$$

Or, l'énoncé précise que la frontière entre les domaines d'existence de ces espèces est caractérisée par une concentration  $[\text{Hg}_2^{2+}] = C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  constante, auquel cas :

$$E_1 = 0,79 + 0,03 \log (10^{-2}) \Rightarrow E_1 = 0,73 \text{ V}$$

3. (a) Dans le cas où  $\text{pH} < \text{pH}_1$ , les espèces  $\text{Hg}_2^{2+}$  et  $\text{Hg}^{2+}$  sont dissoutes :



et le potentiel du couple  $\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}_2^{2+}$  vérifie la loi de Nernst :

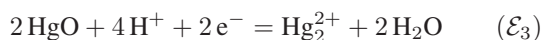
$$E_2 = E_2^0 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{Hg}^{2+}]^2}{[\text{Hg}_2^{2+}]} \right)$$

Les domaines de prédominance de ces espèces sont séparés par une frontière caractérisée par :  $[\text{Hg}^{2+}] = C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et  $[\text{Hg}_2^{2+}] = C_0$ , de sorte que :

$$E_2 = E_2^0 + 0,03 \log C_0 = 0,91 + 0,03 \log (10^{-2})$$

$$\Rightarrow E_2 = 0,85 \text{ V pour } \text{pH} < \text{pH}_1$$

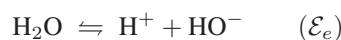
En revanche, dès que  $\text{pH} > \text{pH}_1$ , le mercure au degré d'oxydation II précipite sous forme  $\text{HgO}$ , espèce alors en contact avec les ions  $\text{Hg}_2^{2+}$  demeurés en solution. L'équation :



donne à loi de Nernst la forme :

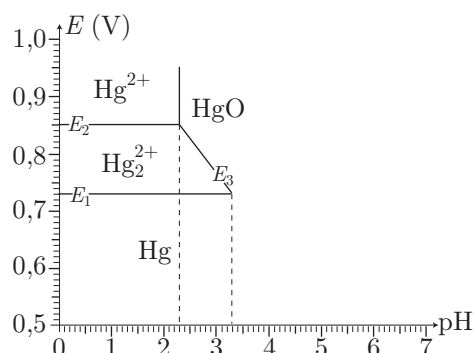
$$E_3 = E_3^0 + 0,03 \log \left[ \frac{[\text{H}^+]^4}{C_0} \right] = E_3^0 - 0,03 \log C_0 - 0,12 \text{ pH} \quad (68)$$

où le potentiel *standard*  $E_3^0$  du couple  $\text{HgO}/\text{Hg}_2^{2+}$  reste à calculer. Or, en notant ( $\mathcal{E}_e$ ) l'équation chimique traduisant l'autoprotolyse de l'eau :

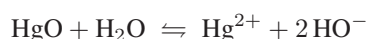






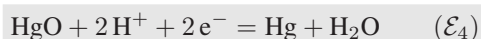


4. (a) Mis dans l'eau, HgO présente des propriétés basiques décrites par l'équation :



Aussi, cette solution aqueuse présente nécessairement un pH supérieur à 7. Or, le diagramme précédent révèle que, pour  $\text{pH} > 3,3$  seules les espèces HgO et Hg sont prédominantes.

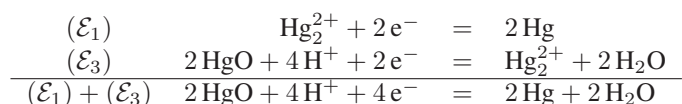
- (b) Le couple HgO/Hg est associé à l'équation :



- (c) Si  $E_4^0$  désigne le potentiel *standard* de ce couple, l'enthalpie *standard* de la réaction d'équation ( $\mathcal{E}_4$ ) vérifie :

$$\Delta_r G_4^0 = -2\mathcal{F} E_4^0$$

Or, l'équation ( $\mathcal{E}_4$ ) peut être obtenue par combinaison linéaire des équations ( $\mathcal{E}_1$ ) et ( $\mathcal{E}_3$ ) :



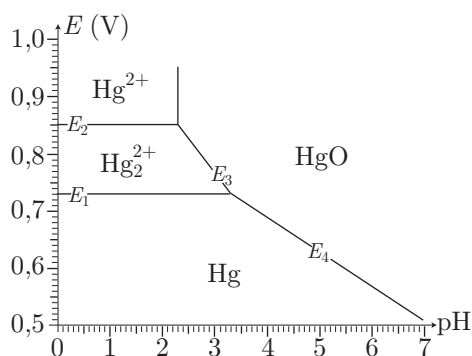
En remarquant ainsi que :  $2(\mathcal{E}_4) = (\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_3)$ , on est amené à poser :

$$\begin{aligned} 2\Delta_r G_4^0 = \Delta_r G_1^0 + \Delta_r G_3^0 &\Rightarrow -4\mathcal{F} E_4^0 = -2\mathcal{F} E_1^0 - 2\mathcal{F} E_3^0 \\ \Rightarrow E_4^0 = \frac{E_1^0 + E_3^0}{2} &= \frac{0,79 + 1,07}{2} = 0,93 \text{ V} \end{aligned}$$

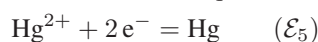
Ce faisant, la loi de Nernst permet d'exprimer le potentiel du couple HgO/Hg :

$$E_4 = E_4^0 + 0,03 \log [\text{H}^+]^2 \Rightarrow E_4 = 0,93 - 0,06 \times \text{pH}$$

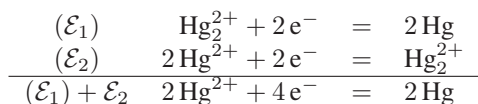
- (d) La courbe  $E_4(\text{pH})$  représente la frontière séparant les domaines d'existence de HgO et de Hg et complète ainsi le diagramme potentiel-pH du mercure pour  $\text{pH} > \text{pH}_2 = 3,3$  :



5. (a) Le couple  $\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}$  est associé à la demi-équation :



dont l'enthalpie libre *standard* vaut  $\Delta_r G_5^0 = -2\mathcal{F}E_5^0$ . Or, les équations  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_2)$  :



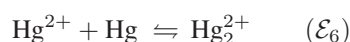
permettent de retrouver l'équation  $(\mathcal{E}_5)$  par combinaison linéaire :

$$2(\mathcal{E}_5) = (\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_2)$$

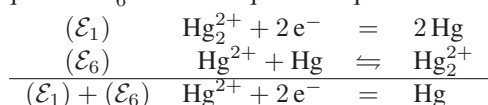
Il en va de même des enthalpies libres *standard* de ces réactions :

$$\begin{aligned} 2\Delta_r G_5^0 &= \Delta_r G_1^0 + \Delta_r G_2^0 \Rightarrow -4\mathcal{F}E_5^0 = -2\mathcal{F}E_1^0 - 2\mathcal{F}E_2^0 \\ \Rightarrow E_5^0 &= \frac{E_1^0 + E_2^0}{2} = \frac{0,79 + 0,91}{2} \Rightarrow E_5^0 = 0,85 \text{ V} \end{aligned}$$

(b) Notons  $(\mathcal{E}_6)$  l'équation-bilan :



de constante d'équilibre  $K_6^0$ . On remarque alors que :



c'est-à-dire que :  $(\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_6) = (\mathcal{E}_5)$ . Par conséquent :

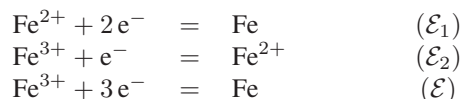
$$\begin{aligned} \Delta_r G_1^0 + \Delta_r G_6^0 &= \Delta_r G_5^0 \Rightarrow -2\mathcal{F}E_1^0 - RT \ln K_6^0 = -2\mathcal{F}E_5^0 \\ \Rightarrow E_1^0 + \frac{RT \ln 10}{2\mathcal{F}} \times \log K_6^0 &= E_5^0 \\ \Rightarrow \log K_6^0 &= \frac{2}{0,06} (E_5^0 - E_1^0) \text{ car } \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \simeq 0,06 \text{ V} \\ \Rightarrow K_6^0 &= 10^{(E_5^0 - E_1^0)/0,03} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$K_6^0 = 10^{(0,85 - 0,79)/0,03} \Rightarrow K_6^0 = 100$$

● 230 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Soient les demi-équations :



La somme  $(\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_2)$  permet de retrouver l'équation  $(\mathcal{E})$ , auquel cas il en va de même des enthalpies libres *standard* :

$$(\mathcal{E}) = (\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_2) \Rightarrow \Delta_r G^0 = \Delta_r G_1^0 + \Delta_r G_2^0$$

c'est-à-dire, en notant  $E^0$  le potentiel *standard* du couple  $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}$  et  $\mathcal{F}$  le Faraday :

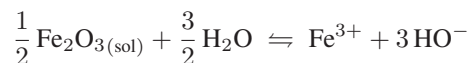
$$-3\mathcal{F} E^0 = -2\mathcal{F} E_1^0 - \mathcal{F} E_2^0 \Rightarrow E^0 = \frac{2E_1^0 + E_2^0}{3} = \frac{-0,88 + 0,77}{3}$$

soit encore :

$$E^0 (\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}) = E^0 = -0,04 \text{ V}$$

2. Classons, dans un premier temps, les espèces contenant l'élément fer aux divers degrés d'oxydation :

- Dans  $\text{Fe}^{3+}$  et  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , le fer apparaît au degré d'oxydation III, tandis que l'équation :



met en évidence les propriétés basiques de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , avec :

$$K_{s3} = [\text{Fe}^{3+}] [\text{HO}^-]^3 = [\text{Fe}^{3+}] \times \frac{K_e^3}{[\text{H}^+]^3} \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = \frac{K_{s3}}{K_e^3} \times [\text{H}^+]^3 \quad (69)$$

- Les espèces  $\text{Fe}^{2+}$ ,  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  et  $\text{HFeO}_2^-$  contiennent l'élément fer au degré d'oxydation II. Quant aux équations :



elles montrent que  $\text{Fe}(\text{OH})_2$  présente des propriétés acides dans le couple  $\text{Fe}(\text{OH})_2/\text{HFeO}_2^-$  et des propriétés basiques dans le couple  $\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}(\text{OH})_2$ . En outre, les produits de solubilité respectifs  $K_{s2}$  et  $K_{s1}$ , associés à ces équations, sont définis par :

$$K_{s2} = [\text{HFeO}_2^-] [\text{H}^+] \quad (70)$$

et :

$$K_{s1} = [\text{Fe}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 = [\text{Fe}^{2+}] \times \frac{K_e^2}{[\text{H}^+]^2} \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s1}}{K_e^2} \times [\text{H}^+]^2 \quad (71)$$

En conclusion, les espèces mentionnées par l'énoncé se classent de la manière suivante :

degré d'oxydation	+III	Fe <sup>3+</sup>		Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub>
	+II	Fe <sup>2+</sup>	Fe(OH) <sub>2</sub>	HFeO <sub>2</sub> <sup>-</sup>
0	Fe			

→ basicité croissante

Sachant que la concentration totale du fer dissous vaut  $C_t = 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  :

$$[\text{Fe}^{3+}] + [\text{Fe}^{2+}] + [\text{HFeO}_2^-] = C_t \quad (72)$$

il convient de déterminer les valeurs du pH permettant les apparitions (ou disparitions) des solides Fe<sub>2</sub>O<sub>3(sol)</sub> et Fe(OH)<sub>2(sol)</sub>.

- Dans le domaine de prédominance de Fe(III), l'équation (72) se simplifie :

$$[\text{Fe}^{3+}] + \underbrace{[\text{Fe}^{2+}] + [\text{HFeO}_2^-]}_{\simeq 0} = C_t \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] \simeq C_t$$

de sorte que Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> apparaît à une valeur pH<sub>1</sub> du pH telle que l'équation (69) s'écrit :

$$\begin{aligned} C_t &= \frac{K_{s3}}{K_e^3} \times [\text{H}^+]^3 \Rightarrow \log C_t = -\text{p}K_{s3} + 3 \times 14 - 3 \text{pH}_1 \\ &\Rightarrow \text{pH}_1 = 14 - \frac{1}{3} (\text{p}K_{s3} + \log C_t) = 14 - \frac{1}{3} \times (43 - 6) \\ &\Rightarrow \text{pH}_1 = 1,67 \end{aligned}$$

- Lorsque Fe<sup>2+</sup> est l'espèce prédominante, l'équation (72) devient :

$$\underbrace{[\text{Fe}^{3+}]}_{\simeq 0} + [\text{Fe}^{2+}] + \underbrace{[\text{HFeO}_2^-]}_{\simeq 0} = C_t \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] \simeq C_t$$

tandis que la relation (71) montre que Fe(OH)<sub>2</sub> apparaît dès que le pH prend une valeur pH<sub>2</sub> telle que :

$$\begin{aligned} C_t &= \frac{K_{s1}}{K_e^2} \times [\text{H}^+]^2 \Rightarrow \log C_t = -\text{p}K_{s1} + 2 \times 14 - 2 \times \text{pH}_2 \\ &\Rightarrow \text{pH}_2 = 14 - \frac{1}{2} (\text{p}K_{s1} + \log C_t) = 14 - \frac{1}{2} \times (15 - 6) \\ &\Rightarrow \text{pH}_2 = 9,5 \end{aligned}$$

- Dans le domaine de prédominance de HFeO<sub>2</sub><sup>-</sup>, c'est-à-dire lorsque :

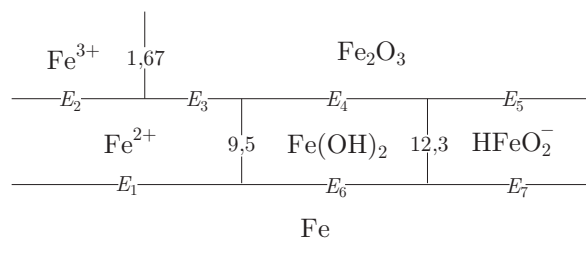
$$\underbrace{[\text{Fe}^{3+}] + [\text{Fe}^{2+}]}_{\simeq 0} + [\text{HFeO}_2^-] = C_t \Rightarrow [\text{HFeO}_2^-] \simeq C_t$$

le solide Fe(OH)<sub>2(sol)</sub> apparaît lorsque le pH prend une valeur pH<sub>3</sub> qui permet

d'écrire l'équation (70) sous la forme :

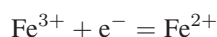
$$\begin{aligned} K_{s2} = C_t \times [\text{H}^+] &\Rightarrow -\text{p}K_{s2} = \log C_t - \text{pH}_3 \\ &\Rightarrow \text{pH}_3 = \log C_t + \text{p}K_{s2} = -6 + 18,3 \\ &\Rightarrow \text{pH}_3 = 12,3 \end{aligned}$$

En conclusion, le diagramme potentiel-pH du fer doit présenter une structure semblable à la suivante :



• **Frontière du couple Fe(III)/Fe(II)**

Le couple Fe(III)/Fe(II) est décrit par la demi-équation :



dont la loi de Nernst prévoit un potentiel :

$$E = E_2^0 + 0,06 \log \left( \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) \quad (73)$$

- Lorsque  $\text{pH} < \text{pH}_1 = 1,67$ , les espèces  $\text{Fe}^{2+}$  et  $\text{Fe}^{3+}$  sont dissoutes et de même concentration sur la frontière  $E_2$ . C'est pourquoi :

$$[\text{Fe}^{3+}] = [\text{Fe}^{2+}] \Rightarrow E_2 = E_2^0 = 0,77 \text{ V}$$

- Si  $1,67 < \text{pH} < 9,5$ , l'élément fer en solution se présente exclusivement sous forme d'ions  $\text{Fe}^{2+}$ , d'où il s'ensuit que :

$$[\text{Fe}^{2+}] = C_t = 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En revanche, Fe(III) se trouve sous forme d'oxyde  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , de sorte que  $[\text{Fe}^{3+}]$  est donné par l'identité (69) :

$$[\text{Fe}^{3+}] = \frac{K_{s3}}{K_e^3} \times [\text{H}^+]^3$$

De fait, la relation (73) devient :

$$\begin{aligned} E_3 &= E_2^0 + 0,06 \times \log \left( \frac{K_{s3}}{K_e^3} \times \frac{[\text{H}^+]^3}{c_t} \right) \\ &= E_2^0 + 0,06 \times (3 \times 14 - \log C_t - \text{p}K_{s3}) - 0,18 \text{ pH} \\ &= 0,77 + 0,06 \times (3 \times 14 + 6 - 43) - 0,18 \times \text{pH} \\ &\Rightarrow E_3 = 1,07 - 0,18 \times \text{pH} \end{aligned}$$

- Pour  $9,5 < \text{pH} < 12,3$ , l'espèce Fe(III) se présente encore sous forme d'oxyde  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , ce qui a pour conséquence :

$$[\text{Fe}^{3+}] = \frac{K_{s3}}{K_e^3} \times [\text{H}^+]^3$$

tandis que Fe(II) compose l'hydroxyde  $\text{Fe}(\text{OH})_2$ , pour lequel la relation (71) révèle que :

$$[\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s1}}{K_e^2} \times [\text{H}^+]^2$$

Par conséquent, l'identité (73) devient :

$$\begin{aligned} E_4 &= E_2^0 + 0,06 \log \left( \frac{K_{s3} [\text{H}^+]^3}{K_e^3} \times \frac{K_e^2}{K_{s1} [\text{H}^+]^2} \right) \\ &= E_2^0 + 0,06 \times (14 + \text{p}K_{s1} - \text{p}K_{s3}) - 0,06 \times \text{pH} \\ &= 0,77 + 0,06 \times (14 + 15 - 43) - 0,06 \times \text{pH} \\ &\Rightarrow E_4 = -0,07 - 0,06 \times \text{pH} \end{aligned}$$

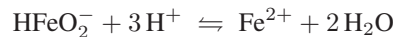
- Lorsque  $\text{pH} > 12,3$ , la concentration des ions  $\text{Fe}^{3+}$  est encore donnée par :

$$[\text{Fe}^{3+}] = \frac{K_{s3}}{K_e^3} \times [\text{H}^+]^3$$

alors que Fe(II) se présente sous forme d'ions  $\text{HFeO}_2^-$ , dont la concentration vérifie l'équation (72) :

$$\underbrace{[\text{Fe}^{3+}] + [\text{Fe}^{2+}]}_{\simeq 0} + [\text{HFeO}_2^-] = C_t \Rightarrow [\text{HFeO}_2^-] \simeq C_t$$

Afin d'exprimer  $[\text{Fe}^{2+}]$  en fonction de  $[\text{HFeO}_2^-]$ , il convient de calculer la constante de l'équilibre qui lie ces deux espèces :



La loi d'action de masse conduit alors à :

$$K = \frac{[\text{Fe}^{2+}]}{[\text{HFeO}_2^-] [\text{H}^+]^3} = \frac{[\text{Fe}^{2+}] [\text{HO}^-]^2}{[\text{HO}^-]^2 [\text{H}^+]^2} \times \frac{1}{[\text{HFeO}_2^-] [\text{H}^+]} = \frac{K_{s1}}{K_e^2 K_{s2}}$$

c'est-à-dire :

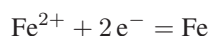
$$[\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s1}}{K_e^2 K_{s2}} \times [\text{HFeO}_2^-] [\text{H}^+]^3 = \frac{K_{s1} C_t [\text{H}^+]^3}{K_e^2 K_{s2}} \quad (74)$$

Par suite, l'identité (73) devient :

$$\begin{aligned} E_5 &= E_2^0 + 0,06 \log \left( \frac{K_{s3} [\text{H}^+]^3}{K_e^3} \times \frac{K_e^2 K_{s2}}{K_{s1} C_t [\text{H}^+]^3} \right) \\ &= E_2^0 + 0,06 \times (14 + \text{p}K_{s1} - \log C_t - \text{p}K_{s3} - \text{p}K_{s2}) \\ &= 0,77 + 0,06 \times (14 + 15 + 6 - 43 - 18,3) \Rightarrow E_5 = -0,81 \text{ V} \end{aligned}$$

• **Frontière du couple Fe(II)/Fe(0)**

- Lorsque  $\text{pH} < 9,5$ , Fe(II) se trouve exclusivement sous forme d'ions  $\text{Fe}^{2+}$ , auquel cas le couple Fe(II)/Fe(0) est décrit par la demi-équation :



dont le potentiel est donné par la loi de Nernst :

$$E = E_1^0 + 0,03 \log [\text{Fe}^{2+}] \quad (75)$$

Notamment, dans cette gamme de pH, la relation (72) se simplifie :

$$\underbrace{[\text{Fe}^{3+}]}_{\simeq 0} + [\text{Fe}^{2+}] + \underbrace{[\text{HFeO}_2^-]}_{\simeq 0} = C_t \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] \simeq C_t$$

ce qui conduit à :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log C_t = -0,44 + 0,03 \times 6 \Rightarrow E_1 = -0,62 \text{ V}$$

- Pour  $9,5 < \text{pH} < 12,3$ , le fer Fe(II) se trouve sous la forme d'hydroxyde  $\text{Fe}(\text{OH})_2$ , auquel cas la relation (71) fournit :

$$[\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s1}}{K_e^2} [\text{H}^+]^2$$

Ainsi, l'identité (75) devient-elle :

$$\begin{aligned} E_6 &= E_1^0 + 0,03 \log \left( \frac{K_{s1}}{K_e^2} [\text{H}^+]^2 \right) \\ &= E_1^0 + 0,03 \times (28 - \text{p}K_{s1}) - 0,06 \times \text{pH} \\ &= -0,44 + 0,03 \times (28 - 15) - 0,06 \times \text{pH} \\ &\Rightarrow E_6 = -0,05 - 0,06 \times \text{pH} \end{aligned}$$

- Lorsque  $\text{pH} > 12,3$ , l'espèce Fe(II) se présente sous la forme d'ions ferrite  $\text{HFeO}_2^-$ , en raison de quoi la concentration en ions  $\text{Fe}^{2+}$  est donnée par la relation (74) :

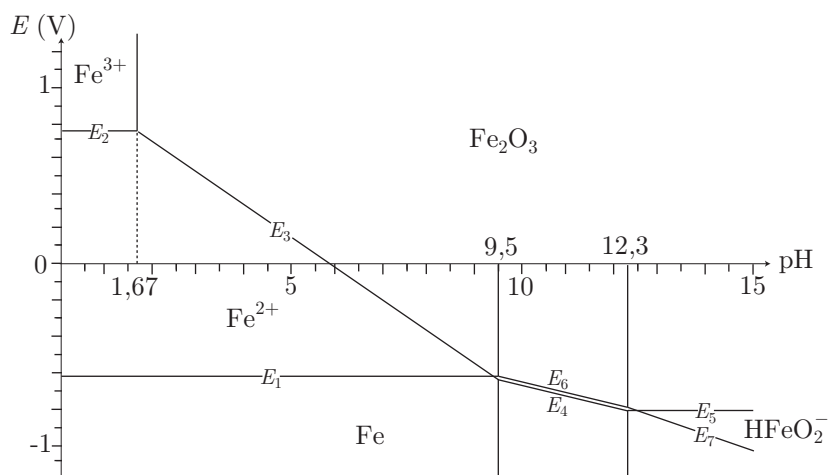
$$[\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s1} C_t}{K_e^2 K_{s2}} [\text{H}^+]^3$$

Il s'ensuit que :

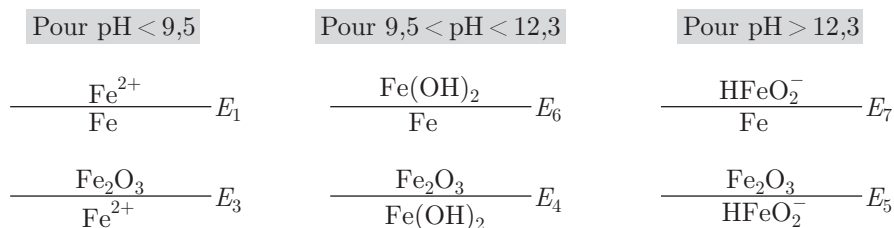
$$\begin{aligned} E_7 &= E_1^0 + 0,03 \log \left( \frac{K_{s1} C_t}{K_e^2 K_{s2}} \times [\text{H}^+]^3 \right) \\ &= E_1^0 + 0,03 \times (28 + \text{p}K_{s2} - \text{p}K_{s1} + \log C_t) - 0,09 \times \text{pH} \\ &= -0,44 + 0,03 \times (28 + 18,3 - 15 - 6) - 0,09 \times \text{pH} \\ &\Rightarrow E_7 = 0,32 - 0,09 \times \text{pH} \end{aligned}$$

Une première tentative de représentation du diagramme potentiel-pH conduit alors à la figure ci-dessous :





Il apparaît cependant un domaine (entre les pH voisins de 9,5 et de 12,5), où les frontières entre les espèces Fe(III)/Fe(II) et Fe(II)/Fe(0) se croisent. Pour comprendre la signification de ce croisement, on peut représenter schématiquement les positions relatives des frontières concernées pour des pH auxquels se produit le phénomène :



Ces schémas montrent que :

- Fe<sup>2+</sup> subit une dismutation en Fe et Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ;
- la dismutation de Fe(OH)<sub>2</sub> produit Fe et Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> ;
- Fe et Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> sont également les produits de la dismutation de HFeO<sub>2</sub><sup>-</sup>.

Il apparaît ainsi que, dans le domaine [pH<sub>I</sub>, pH<sub>II</sub>] où se croisent les frontières Fe(III)/Fe(II) et Fe(II)/Fe(0), seuls Fe et Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub> peuvent coexister de manière stable. Or, ces frontières se croisent une première fois pour une valeur pH<sub>I</sub> du pH telle que :

$$E_1(\text{pH}_I) = E_3(\text{pH}_I) \Rightarrow -0,62 = 1,07 - 0,18 \times \text{pH}_I$$

$$\Rightarrow \text{pH}_I = \frac{1,07 + 0,62}{0,18} = 9,39$$

tandis qu'elles se croisent à nouveau pour une seconde valeur pH<sub>II</sub> du pH telle que :

$$E_7(\text{pH}_{II}) = E_5(\text{pH}_{II}) \Rightarrow 0,32 - 0,09 \times \text{pH}_{II} = -0,81$$

$$\Rightarrow \text{pH}_{II} = \frac{0,32 + 0,81}{0,09} = 12,56$$

Ainsi, pour  $\text{pH} \in [\text{pH}_I, \text{pH}_{II}]$ , seules les espèces Fe(III) et Fe(0) sont présentes (sous forme respectives de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  et Fe), dont le potentiel  $E_8$  de la frontière est donné par la loi de Nernst :

$$E_8 = E^0 + \frac{0,06}{3} \log [\text{Fe}^{3+}] \text{ pour } \text{Fe}^{3+} + 3e^- = \text{Fe} \text{ et } E^0 = -0,04 \text{ V}$$

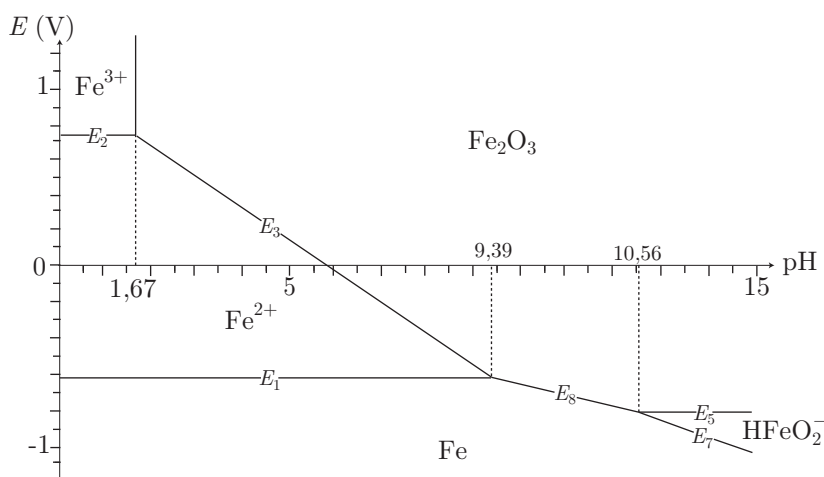
Du reste, la concentration  $[\text{Fe}^{3+}]$  vérifie l'égalité (69) :

$$\begin{aligned} [\text{Fe}^{3+}] &= \frac{K_{s3}}{K_e^3} [\text{H}^+]^3 \Rightarrow E_8 = E^0 + 0,02 \log \left( \frac{K_{s3}}{K_e^3} [\text{H}^+]^3 \right) \\ &\Rightarrow E_8 = E^0 + 0,02 \times (3 \times 14 - \text{p}K_{s3}) - 0,06 \times \text{pH} \\ &\Rightarrow E_8 = -0,04 + 0,02 \times (3 \times 14 - 43) - 0,06 \times \text{pH} \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque  $\text{pH}_I \leq \text{pH} \leq \text{pH}_{II}$ , la frontière qui sépare les espèces  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  et Fe est décrite par la relation :

$$E_8 = -0,06 + 0,06 \times \text{pH}$$

Finalement, le diagramme potentiel-pH du fer présente l'allure suivante :



### ● 231 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Soit  $\text{Ca}_{(\text{ref})}$  l'état *standard* de référence du calcium à une température  $T$  (solide, liquide ou gaz), qui ne peut être précisé avec les informations fournies par l'énoncé. Les équations-bilan des réactions de formation de  $\text{CO}_2(\text{gaz})$ ,  $\text{CaO}(\text{sol})$  et de  $\text{CaCO}_3(\text{sol})$  sont écrites en respectant deux contraintes : les réactifs doivent se présenter dans leur état *standard* de référence et le coefficient stœchiométrique des produits vaut 1 :

- Réaction de formation de  $\text{CO}_2(\text{gaz})$  :



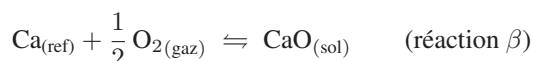
où  $\text{C}_{(\text{sol})}$  désigne le carbone graphite (forme allotropique stable du carbone solide).

La somme des coefficients stœchiométriques algébriques des espèces gazeuses valant :  $\Delta\nu_g = 1 - 1 = 0$ , il s'ensuit que l'entropie *standard*  $\Delta_f S^0$  de cette réaction (proportionnelle à  $\Delta\nu_g$ ) est presque nulle. De fait, la courbe :

$$\Delta_f G_\alpha^0(T) = \Delta_f H_\alpha^0 - T \times \Delta_f S_\alpha^0 \simeq \Delta_f H_\alpha^0$$

présente une pente nulle sur le diagramme.

- Réaction de formation de  $\text{CaO}_{(\text{sol})}$  :



Si l'état *standard* de référence du calcium est solide ou liquide, l'entropie *standard*  $\Delta_f S_\beta^0$  de cette réaction présente le même signe que :

$$\Delta\nu_g = -\frac{1}{2} \Rightarrow \Delta_f S_\beta^0 < 0 = -|\Delta_f S_\beta^0|$$

Si l'état *standard* de référence du calcium est gazeux, l'entropie *standard*  $\Delta_f S_\beta^0$  a le même signe que :

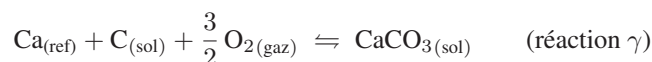
$$\Delta\nu_g = -1 - \frac{1}{2} < 0 \Rightarrow \Delta_f S_\beta^0 < 0 \Rightarrow \Delta_f S_\beta^0 = -|\Delta_f S_\beta^0|$$

Par conséquent, l'enthalpie libre *standard* de cette réaction :

$$\Delta_f G_\beta^0(T) = \Delta_f H_\beta^0 - T \times \Delta_f S_\beta^0 = \Delta_f H_\beta^0 + T \times |\Delta_f S_\beta^0|$$

dépend linéairement de la température, avec une pente positive.

- Réaction de formation de  $\text{CaCO}_{3(\text{sol})}$  :



À nouveau, le signe de l'entropie *standard*  $\Delta_f S_\beta^0$  est le même que :

$$\Delta\nu_g = -\frac{3}{2} \text{ si } \text{Ca}_{(\text{ref})} = \text{Ca}_{(\text{sol})} \text{ ou } \text{Ca}_{(\text{liq})} \text{ sinon } \Delta\nu_g = -\frac{5}{2} \text{ si } \text{Ca}_{(\text{ref})} = \text{Ca}_{(\text{gaz})}$$

de sorte que :

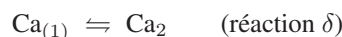
$$\Delta_f S_\gamma^0 < 0 \Rightarrow \Delta_f S_\gamma^0 = -|\Delta_f S_\gamma^0|$$

Par suite, la représentation graphique de l'enthalpie libre *standard* :

$$\Delta_f G_\gamma^0(T) = \Delta_f H_\gamma^0 - T \times \Delta_f S_\gamma^0 = \Delta_f H_\gamma^0 + T \times |\Delta_f S_\gamma^0|$$

est un segment de droite dont la pente est positive.

2. La rupture de pente observée pour les courbes  $\Delta_f G_\beta^0(T)$  et  $\Delta_f G_\gamma^0$  provient d'une discontinuité des entropies *standard*  $\Delta_f S_\beta^0$  et  $\Delta_f S_\gamma^0$  consécutive à un changement d'état de Ca. Pour simplifier les équations, notons  $\text{Ca}_{(1)}$  et  $\text{Ca}_{(2)}$  deux états du calcium pour  $T < T_{12} \simeq 1\,750 \text{ K}$  et pour  $T > T_{12}$ . La réaction de changement d'état :



est caractérisée par une chaleur latente  $L_{12} > 0$ , qui permet d'en définir l'enthalpie *standard* et l'entropie *standard* :

$$\Delta_r H_\delta^0 = L_{12} \text{ et } \Delta_r S_\delta^0 = \frac{L_{12}}{T_{12}} > 0$$

La représentation graphique de l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_f G^0(T)$  de formation d'un oxyde de calcium doit donc tenir compte des valeurs relatives de  $T$  et  $T_{12}$  :

- Pour  $T \leq T_{12} \simeq 1750 \text{ K}$ , la formation de l'oxyde de calcium :



a pour entropie *standard*  $\Delta_r S_\varepsilon^0$  de sorte que la pente de la courbe :

$$\Delta_r G_\varepsilon^0(T) = \Delta_r H_\varepsilon^0 - T \times \Delta_r S_\varepsilon^0$$

vaut  $p_\varepsilon = -\Delta_r S_\varepsilon^0$ .

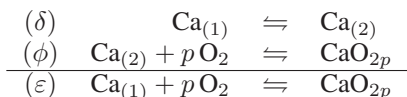
- Pour  $T \geq T_{12}$ , la formation de l'oxyde de calcium :



a, en revanche, pour enthalpie *standard* :  $\Delta_r H_\phi^0$  et pour entropie *standard*  $\Delta_r S_\phi^0$  et donc pour enthalpie libre *standard* :

$$\Delta_r G_\phi^0(T) = \Delta_r H_\phi^0 - T \times \Delta_r S_\phi^0$$

La pente de ce segment vaut par conséquent  $p_\phi = -\Delta_r S_\phi^0$ . Or, l'équation ( $\varepsilon$ ) est aussi la somme des équations ( $\delta$ ) et ( $\phi$ ) :



en conséquence de quoi :

$$\begin{aligned} (\delta) + (\phi) = (\varepsilon) &\Rightarrow \Delta_r S_\delta^0 + \Delta_r S_\phi^0 = \Delta_r S_\varepsilon^0 \\ &\Rightarrow \Delta_r S_\phi^0 = \Delta_r S_\varepsilon^0 - \Delta_r S_\delta^0 = \Delta_r S_\varepsilon^0 - \frac{L_{12}}{T_{12}} \\ &\Rightarrow p_\phi = p_\varepsilon + \frac{L_{12}}{T_{12}} > p_\varepsilon \end{aligned}$$

car la chaleur latente  $L_{12}$  est positive (il s'agit de l'enthalpie *standard* de la réaction  $\text{Ca}_{(\text{sol})} \rightleftharpoons \text{Ca}_{(\text{liq})}$  ou de la réaction  $\text{Ca}_{(\text{liq})} \rightleftharpoons \text{Ca}_{(\text{gaz})}$ ). Il s'ensuit que la pente du segment  $\Delta_r G^0(T)$  est supérieure aux températures les plus élevées.

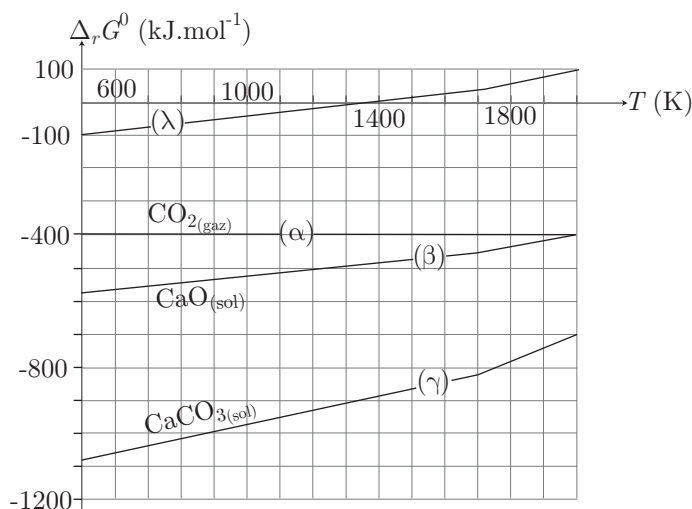
3. Les solides  $\text{CaO}_{(\text{sol})}$  et  $\text{CaCO}_{3(\text{sol})}$  ne peuvent coexister que si la réaction d'équation :



atteint un état d'équilibre. Or, l'enthalpie libre *standard* de cette réaction peut se déterminer en fonction des enthalpies libres *standard* de formation :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_\lambda^0 &= \Delta_f G^0(\text{CaCO}_3) - \Delta_f G^0(\text{CaO}) - \Delta_f G^0(\text{CO}_2) \\ &= \Delta_r G_\gamma^0 - \Delta_r G_\beta^0 - \Delta_r G_\alpha^0 \end{aligned}$$

La courbe  $\Delta_r G_\lambda^0(T)$  se déduit alors des trois autres :



En outre, l'affinité chimique de la réaction (λ) vaut :

$$A_\lambda(T) = \mathcal{A}_\lambda^0(T) - RT \ln Q$$

où  $\mathcal{A}_\lambda^0(T) = -\Delta_r G_\lambda^0(T)$  et où le quotient de réaction est défini par :

$$Q = \frac{P_0}{P_{\text{CO}_2}} \Rightarrow \mathcal{A}_\lambda(T) = -\Delta_r G_\lambda^0(T) + RT \ln \left( \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_0} \right)$$

Ainsi, dans un milieu où  $P_{\text{CO}_2} = P_0 = 1$  bar,  $\mathcal{A}_\lambda(T)$  s'identifie à  $-\Delta_r G_\lambda^0(T)$ , tandis que l'équilibre entre  $\text{CaO}_{(\text{sol})}$  et  $\text{CaCO}_{3(\text{sol})}$  est atteint lorsque  $\mathcal{A}_\lambda(T) = 0$ , c'est-à-dire lorsque  $\Delta_r G_\lambda^0(T) = 0$ . Le diagramme précédent montre que cette situation se présente pour  $T \simeq 1350$  K.

4. Le diagramme ci-dessus révèle qu'en choisissant  $T > 1350$  K,  $\Delta_r G_\lambda^0(T)$  est positif, de sorte que  $-\Delta_r G_\lambda^0(T) < 0$ . En outre, à la pression atmosphérique,  $\text{CO}_2$  représente moins de 1% de l'air, de manière à ce que  $P_{\text{CO}_2} \ll P_0 = 1$  bar. Il s'ensuit que :

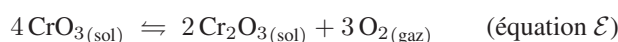
$$\mathcal{A}_\lambda(T) = -\Delta_r G_\lambda^0(T) + RT \ln \left( \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_0} \right) < 0$$

ce qui montre que la réaction (λ) est déplacée vers la formation de CaO (c'est-à-dire de la chaux). Ce déplacement est d'autant plus marqué que  $T$  est grand, aussi le choix de 1500 K est-il le fruit d'un compromis entre le rendement chimique et le coût que représente l'augmentation de la température.

## ● 232 ————— Lycée Charlemagne, Paris

### 1. Le trioxyde de chrome (VI)

(a) La réaction, d'équation :



à pour enthalpie *standard* :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^0 &= 2 \Delta_f H^0 [\text{Cr}_2\text{O}_3(\text{sol})] + 3 \Delta_f H^0 [\text{O}_2(\text{gaz})] - 4 \Delta_f H^0 [\text{CrO}_3(\text{sol})] \\ &= -2 \times 1140 + 3 \times 0 - 4 \times 590 = -800 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

et pour entropie *standard* :

$$\begin{aligned}\Delta_r S^0 &= 2 S^0 [\text{Cr}_2\text{O}_3(\text{sol})] + 3 S^0 [\text{O}_2(\text{gaz})] - 4 S^0 [\text{CrO}_3(\text{sol})] \\ &= 2 \times 81 + 3 \times 205 - 4 \times 73 = 485 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

Par conséquent, son enthalpie libre *standard* vaut :

$$\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0 = -800 - T \times 485 \text{ (en J} \cdot \text{mol}^{-1}\text{)}$$

et, notamment, à 300 K :

$$\Delta_r G_{300}^0 = -800 - 485 \times 300 = -146,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- (b) Le quotient de réaction associé à ( $\mathcal{E}$ ) :  $Q = \left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}\right)^3$  conduit à l'expression de son affinité chimique :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(T) &= -\Delta_r G^0(T) - RT \ln \left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}\right)^3 \text{ où } \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} = 0,2 \\ &= -\Delta_r G^0(T) - 3 RT \ln 0,2\end{aligned}$$

En l'occurrence :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{300} &= 146,5 - 3 \times 8,31 \times 300 \ln 0,2 = 77,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ &\Rightarrow \mathcal{A}_{300} > 0\end{aligned}$$

Le signe de  $\mathcal{A}_{300}$  montre que ( $\mathcal{E}$ ) est déplacé vers la formation de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , tant que  $P_{\text{O}_2}$  ne varie pas (ce qui est le cas dans l'air). Par conséquent :

$\text{CrO}_3$  est instable à 300 K

ce qui signifie qu'un cristal de trioxyde de chrome laissé à l'air ambiant est susceptible de se transformer complètement en  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , avec toutefois une cinétique qui n'est pas indiquée dans l'énoncé.

- (c) L'expression trouvée pour  $\mathcal{A}(T)$  conduit à :

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{A}}{dT} &= -\frac{d\Delta_r G^0}{dT} - 3R \ln \left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}\right) \text{ où } \Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0 \\ &= \Delta_r S^0 - 3R \ln \left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}\right) = 485 - 3 \times 8,31 \times \ln(0,2) \\ &\Rightarrow \frac{d\mathcal{A}}{dT} = 525,1 > 0\end{aligned}$$

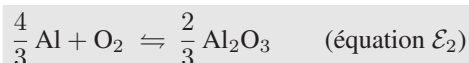
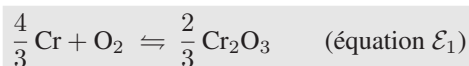
Cette relation prouve que  $\mathcal{A}(T)$  est une fonction croissante de  $T$ , ce qui se traduit par :

$$\forall T > 300 \text{ K}, \mathcal{A}(T) > \mathcal{A}_{300} > 0$$

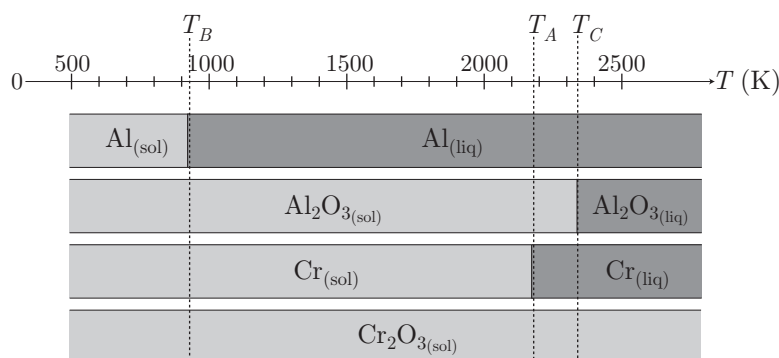
c'est-à-dire que l'instabilité de  $\text{CrO}_{3(\text{sol})}$  demeure, voire s'accroît, lorsque  $T > 300 \text{ K}$ .

## 2. Étude de la réduction de $\text{Cr}_2\text{O}_3$ par Al

(a) Associée à une mole de dioxygène, la formation des oxydes de chrome ou d'aluminium s'écrit :



(b) Aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , les courbes  $\Delta_r G^0(T)$  changent de pente ; des changements d'état s'y produisent, que l'on peut identifier à l'aide des températures de fusion et de vaporisation fournies par l'énoncé :

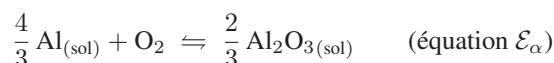


Ce diagramme permet d'isoler les phénomènes qui se produisent aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$  :

- en  $B$ , fusion de l'aluminium :  $\text{Al}_{(\text{sol})} \rightleftharpoons \text{Al}_{(\text{liq})}$  (équation  $\mathcal{E}_3$ ) ;
- en  $C$ , fusion de l'alumine :  $\text{Al}_2\text{O}_{3(\text{sol})} \rightleftharpoons \text{Al}_2\text{O}_{3(\text{liq})}$  ;
- en  $A$ , fusion du chrome :  $\text{Cr}_{(\text{sol})} \rightleftharpoons \text{Cr}_{(\text{liq})}$ .

Ainsi, au point  $B$  s'observe la fusion de l'aluminium, de sorte que :

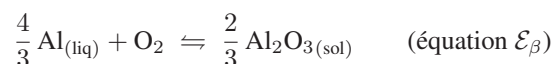
- pour  $T < T_B$ , l'équation ( $\mathcal{E}_2$ ) s'écrit :



d'entropie *standard* :

$$\Delta_r S_\alpha^0 = \frac{2}{3} S^0 [\text{Al}_2\text{O}_{3(\text{sol})}] - S^0 [\text{O}_2] - \frac{4}{3} S^0 [\text{Al}_{(\text{sol})}]$$

- pour  $T > T_B$ , l'équation ( $\mathcal{E}_2$ ) devient :



dont l'entropie *standard* vaut :

$$\Delta_r S_\beta^0 = \frac{2}{3} S^0 [\text{Al}_2\text{O}_{3(\text{sol})}] - S^0 [\text{O}_2] - \frac{4}{3} S^0 [\text{Al}_{(\text{liq})}]$$

On remarque alors que :

$$\Delta_r S_\alpha^0 - \Delta_r S_\beta^0 = \frac{4}{3} \{ S^0 [\text{Al}_{(\text{sol})}] - S^0 [\text{Al}_{(\text{liq})}] \} > 0$$

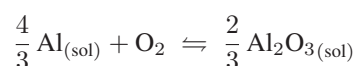
car la phase solide est plus structurée que la phase liquide ce qui a pour conséquence :

$$S^0 [\text{Al}_{(\text{sol})}] < S^0 [\text{Al}_{(\text{liq})}]$$

Or, la courbe  $\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0$  a pour pente  $p = -\Delta_r S^0$ , ce qui conduit à :

$$p_\beta - p_\alpha = -\Delta_r S_\beta^0 + \Delta_r S_\alpha^0 > 0 \Rightarrow p_\beta > p_\alpha \quad (76)$$

(c) Le segment  $NB$ , représentatif de l'équation ( $\mathcal{E}_\alpha$ ) :



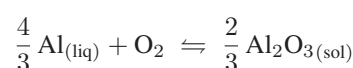
est décrit par la fonction :

$$\Delta_r G_\alpha^0(T) = \Delta_r H_\alpha^0 - T \times \Delta_r S_\alpha^0$$

dont la pente vaut :

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \frac{d\Delta_r G_\alpha^0}{dT} = -\Delta_r S_\alpha^0 \\ &= -\frac{2}{3} S^0 [\text{Al}_2\text{O}_{3(\text{sol})}] + S^0 [\text{O}_2] + \frac{4}{3} S^0 [\text{Al}_{(\text{sol})}] \\ &= -\frac{2}{3} \times 51 + 205 + \frac{4}{3} \times 27 \\ \Rightarrow p_\alpha &= \frac{d\Delta_r G_\alpha^0}{dT} = 207 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

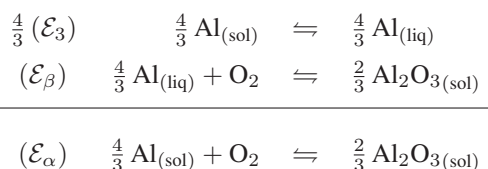
Quant au segment de droite  $BC$ , relatif à l'équation ( $\mathcal{E}_\beta$ ) :



il est décrit par l'équation :  $\Delta_r G_\beta^0 = \Delta_r H_\beta^0 - T \times \Delta_r S_\beta^0$  en conséquence de quoi sa pente vaut :

$$p_\beta = \frac{d\Delta_r G_\beta^0}{dT} = -\Delta_r S_\beta^0$$

On remarque, du reste, que les équations ( $\mathcal{E}_\alpha$ ), ( $\mathcal{E}_\beta$ ) et ( $\mathcal{E}_3$ ) sont linéairement dépendantes :





Aussi, de l'équation :  $\frac{4}{3}(\mathcal{E}_3) + (\mathcal{E}_\beta) = (\mathcal{E}_\alpha)$ , il découle que :

$$\begin{aligned}\Delta_r S_\beta^0 &= \Delta_r S_\alpha^0 - \frac{4}{3} \Delta_r S_3^0 \\ &= -p_\alpha - \frac{4}{3} \times \frac{\Delta_{\text{fus}} H^0(\text{Al})}{T_{\text{fus}}(\text{Al})} \\ &= -207 - \frac{4}{3} \times \frac{10 \cdot 10^3}{933} = -221,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

d'où il ressort que le segment  $BC$  a pour pente :

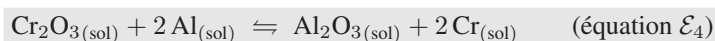
$$p_\beta = -\Delta_r S_\beta^0 = 221,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Remarque – La comparaison des deux valeurs numériques obtenues pour  $p_\alpha$  et  $p_\beta$  confirme le résultat (76) :

$$p_\alpha > p_\beta$$

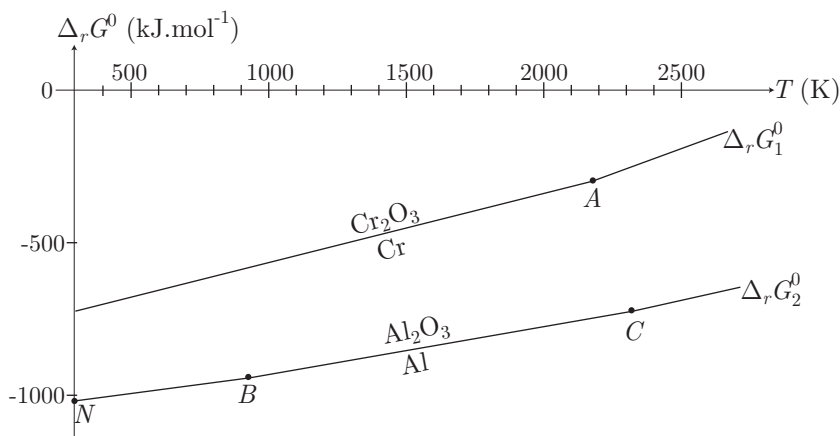
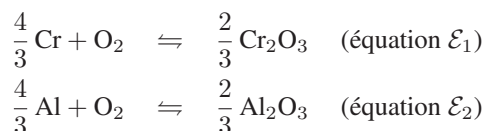
#### Étude de la réaction de réduction

(d) La réduction d'une mole de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  par  $\text{Al}$  s'écrit, à 300 K :

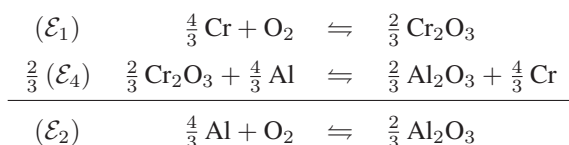


car, à cette température, toutes les espèces sont solides.

(e) Notons  $\Delta_r G_1^0(T)$  et  $\Delta_r G_2^0(T)$  les expressions de l'enthalpie libre *standard* des réactions ( $\mathcal{E}_1$ ) et ( $\mathcal{E}_2$ ) :



Les équations ( $\mathcal{E}_1$ ), ( $\mathcal{E}_2$ ) et ( $\mathcal{E}_4$ ) apparaissent alors comme linéairement dépendantes :



Ainsi, la relation :  $(\mathcal{E}_2) = \frac{2}{3} (\mathcal{E}_4) + (\mathcal{E}_1)$  indique comment sont liées les enthalpies libres *standard* :

$$\Delta_r G_2^0 = \frac{2}{3} \Delta_r G_4^0 + \Delta_r G_1^0 \Rightarrow \Delta_r G_4^0 = \frac{3}{2} \times (\Delta_r G_2^0 - \Delta_r G_1^0)$$

et conduit donc à l'expression de l'affinité chimique *standard* de la réaction  $(\mathcal{E}_4)$  :

$$\mathcal{A}_4^0 = -\Delta_r G_4^0 = \frac{3}{2} \times (\Delta_r G_1^0 - \Delta_r G_2^0)$$

dont le quotient de réaction vaut :

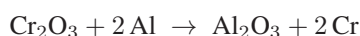
$$Q = \frac{a_{\text{Al}_2\text{O}_3} \times a_{\text{Cr}}^2}{a_{\text{Cr}_2\text{O}_3} \times a_{\text{Al}}^2} = 1$$

car, les solides étant non miscibles, leurs activités  $a_i$  valent 1. Par suite, la réaction  $(\mathcal{E}_4)$  a pour affinité chimique :

$$\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_4^0 - RT \ln Q \Rightarrow \mathcal{A}_4 = \frac{3}{2} \times (\Delta_r G_1^0 - \Delta_r G_2^0) > 0$$

puisque le diagramme d'Ellingham précédent révèle que  $\Delta_r G_1^0(T) > \Delta_r G_2^0(T)$  pour toute température  $T$ . La réaction  $(\mathcal{E}_4)$  est donc totalement déplacée vers la formation de  $\text{Al}_2\text{O}_3$  et de  $\text{Cr}$ , ce qui signifie aussi que la réduction de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  par  $\text{Al}$  est thermodynamiquement possible à toute température.

Remarque – Cette conclusion pouvait découler directement du diagramme d'Ellingham des systèmes  $\text{Cr}/\text{Cr}_2\text{O}_3$  et  $\text{Al}/\text{Al}_2\text{O}_3$  : les domaines d'existence de  $\text{Al}$  et de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  étant disjoints à toute température, la réaction :



est totalement déplacée vers la réduction de  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  en  $\text{Cr}$ .

### ● 233 ————— Concours Commun Polytechnique

1. L'approximation d'Ellingham consiste à considérer que l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H^0$  et l'entropie *standard*  $\Delta_r S^0$  d'une réaction  $(\mathcal{E})$  sont indépendantes de la température  $T$ . Ce faisant, la représentation graphique de l'enthalpie libre *standard* de  $(\mathcal{E})$  :  $\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0$  est un segment de droite.
2. Considérons les équilibres suivants :

- $\text{C} + \text{O}_2 \rightleftharpoons \text{CO}_2$ , dont  $\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r S^0$  valent :

$$\Delta_r H_1^0 = \Delta_f H^0(\text{CO}_2) = -390 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et :

$$\Delta_r S_1^0 = S^0(\text{CO}_2) - S^0(\text{C}) - S^0(\text{O}_2) = 210 - 6 - 205 = -1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La droite d'Ellingham correspondante a pour équation :

$$\Delta_r G_I^0(T) = -390.10^3 + T \text{ pour } C + O_2 \rightleftharpoons CO_2$$

- $2C + O_2 \rightleftharpoons 2CO$ , tel que :

$$\Delta_r S_{II}^0 = 2 \Delta_f H^0(CO) = -220 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta_r S_{II}^0 &= 2 S^0(CO) - 2 S^0(C) - S^0(O_2) \\ &= 2 \times 200 - 2 \times 6 - 205 = 183 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

de sorte que la droite d'Ellingham a pour équation :

$$\Delta_r G_{II}^0(T) = -220.10^3 - 183 \times T \text{ pour } 2C + O_2 \rightleftharpoons 2CO$$

- $2CO + O_2 \rightleftharpoons 2CO_2$ , d'entropie et d'enthalpie *standard* :

$$\Delta_r H_{III}^0 = 2 \Delta_f H^0(CO_2) - 2 \Delta_f H^0(CO) = -2 \times 390 + 2 \times 110 = -560 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

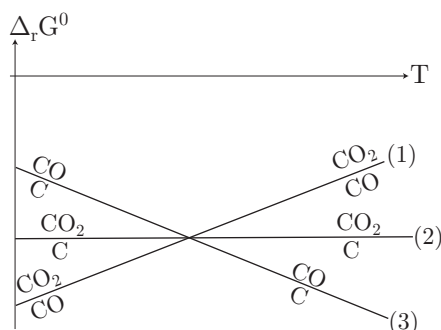
et :

$$\begin{aligned} \Delta_r S_{III}^0 &= 2 S^0(CO_2) - S^0(O_2) - 2 S^0(CO) \\ &= 2 \times 210 - 205 - 2 \times 200 = -185 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$\Delta_r G_{III}^0(T) = -560.10^3 + 185 \times T \text{ pour } 2CO + O_2 \rightleftharpoons 2CO_2$$

Les droites d'Ellingham précédentes ont des pentes de signe différents, ce qui permet une distinction rapide des courbes fournies par l'énoncé :



- Le couple  $CO_2/C$  présente une droite d'Ellingham de pente négligeable, de même que la courbe (2).
- Le couple  $CO/C$ , dont le diagramme d'Ellingham présente une pente  $-\Delta_r S_{II}^0 < 0$ , est représenté par la courbe (3).
- Le couple  $CO_2/CO$  est représenté, dans le diagramme d'Ellingham, par la courbe (1) dont la pente positive est la seule compatible avec le coefficient directeur  $-\Delta_r S_{III}^0 = 185 > 0$  de  $\Delta_r G_{III}^0(T)$ .

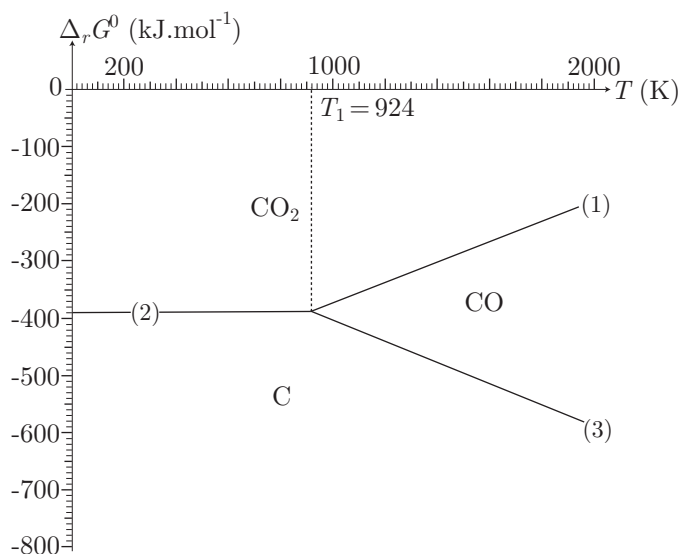
Remarque – Si l'on s'en tenait aux simples signes de  $\Delta_r S^0$  pour répondre à cette question, il suffirait d'évaluer la somme  $\Delta \nu_g$  des coefficients stœchiométriques algébriques des espèces gazeuses qui interviennent dans les équations-bilan :

- $\text{C}_{(\text{sol})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons \text{CO}_{2(\text{gaz})} \Rightarrow \Delta\nu_g = 0$ , ce qui signifie que  $\Delta_r S_I^0$  est nul (car  $\Delta_r S^0$  présente le même signe que  $\Delta\nu_g$ ); la courbe (2) convient au couple  $\text{CO}_2/\text{CO}$ .
- $2\text{C}_{(\text{sol})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons 2\text{CO}_{(\text{gaz})} \Rightarrow \Delta\nu_g = 2 - 1 = +1$ . Le signe de  $\Delta_r S_{II}^0$  est alors positif, tandis que la courbe (3) est la seule à présenter une pente négative, c'est-à-dire de même signe que  $-\Delta_r S_{II}^0$ .
- $2\text{CO}_{(\text{gaz})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons 2\text{CO}_{2(\text{gaz})} \Rightarrow \Delta\nu_g = 2 - 2 - 1 = -1$  montre que la droite d'Ellingham du couple  $\text{CO}/\text{CO}_2$  est celle de pente positive, car  $\Delta_r S_{III}^0 < 0 \Rightarrow -\Delta_r S_{III}^0 > 0$ .

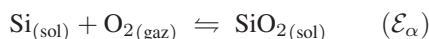
Ayant identifié les courbes (1), (2) et (3), nous remarquons que les domaines d'existence ou de prédominance de CO sont disjoints pour une température  $T < T_1$ , telle que :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_{II}^0(T_1) = \Delta_r G_{III}^0(T_1) &\Rightarrow -220.10^3 - 183 \times T_1 = -560.10^3 + 185 \times T_1 \\ &\Rightarrow T_1 = \frac{560.10^3 - 220.10^3}{185 + 183} \Rightarrow T_1 = 924 \text{ K} \end{aligned}$$

De ce fait, pour  $T < T_1$ , CO n'est pas stable et seul le couple  $\text{CO}_2/\text{CO}$  (courbe 2) peut rendre compte des domaines de prédominance du carbone et de  $\text{CO}_2$ . En revanche, pour  $T > T_1$ , la prédominance de CO est assurée entre les courbes (1) et (3), ce qui fournit le diagramme d'Ellingham suivant :



3. Dans l'intervalle d'étude :  $T \in [0, 2000 \text{ K}]$ , le silicium est susceptible d'un changement d'état, dont il faut tenir compte dans son diagramme d'Ellingham :
- Pour  $T < T_{\text{fus}}$ , l'oxydation du silicium est correctement décrite par l'équation :



dont l'enthalpie standard vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_\alpha^0 &= \Delta_f H^0(\text{SiO}_{2(\text{sol})}) - \Delta_f H^0(\text{Si}_{(\text{sol})}) - \Delta_f H^0(\text{O}_{2(\text{gaz})}) \\ &= -910.10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

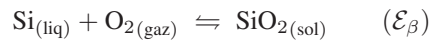
et l'entropie *standard* prend la valeur :

$$\begin{aligned}\Delta_r S_\alpha^0 &= S^0(\text{SiO}_2(\text{sol})) - S^0(\text{Si}(\text{sol})) - S^0(\text{O}_2(\text{gaz})) \\ &= 40 - 19 - 205 = -184 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

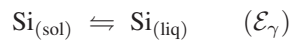
C'est pourquoi son enthalpie libre *standard* est donnée par :

$$\Delta_r G_\alpha^0(T) = \Delta_r H_\alpha^0 - T \times \Delta_r S_\alpha^0 = -910.10^3 + 184 \times T$$

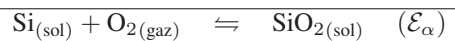
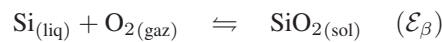
- Dès que  $T > T_{\text{fus}} = 1683 \text{ K}$ , l'oxydation de Si est décrite par l'équation-bilan :



dont l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H_\beta^0$  et l'entropie *standard*  $\Delta_r S_\beta^0$  doivent être déterminées. Dans ce but, l'énoncé donne l'enthalpie *standard*  $\Delta_{\text{fus}} H^0 = \Delta_r H_\gamma^0$  de la réaction de fusion du silicium :



En remarquant que la somme des équations  $(\mathcal{E}_\beta)$  et  $(\mathcal{E}_\gamma)$  donne l'équation  $(\mathcal{E}_\alpha)$  :



on peut conclure que :

$$\begin{aligned}\Delta_r H_\beta^0 + \Delta_{\text{fus}} H^0 = \Delta_r H_\alpha^0 &\Rightarrow \Delta_r H_\beta^0 = \Delta_r H_\alpha^0 - \Delta_{\text{fus}}^0 = -910.10^3 - 46.10^3 \\ &\Rightarrow \Delta_r H_\beta^0 = -956.10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

et que :

$$\Delta_r S_\beta^0 + \Delta_r S_\gamma^0 = \Delta_r S_\alpha^0 \Rightarrow \Delta_r S_\beta^0 = \Delta_r S_\alpha^0 - \Delta_r S_\gamma^0$$

avec :

$$\Delta_r S_\gamma^0 = \frac{\Delta_{\text{fus}} H^0}{T_{\text{fus}}} \Rightarrow \Delta_r S_\beta^0 = -184 - \frac{46.10^3}{1683} = -211,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Par conséquent, l'enthalpie libre *standard* d'oxydation du silicium est donnée par :

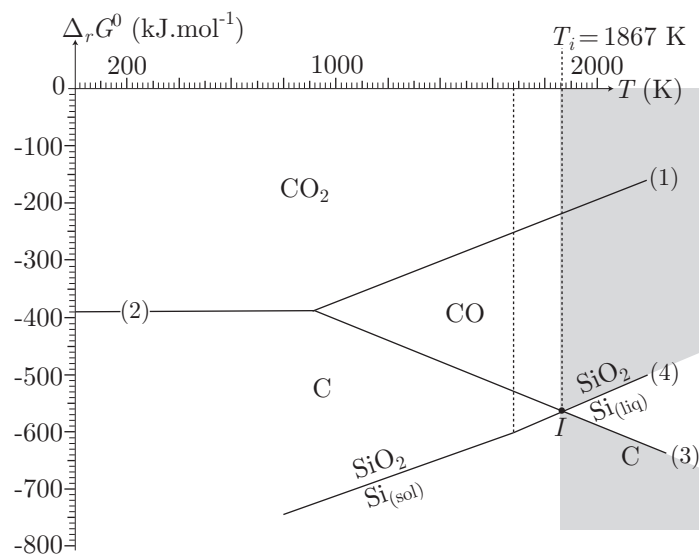
$$\Delta_r G_\beta^0(T) = \Delta_r H_\beta^0 - T \times \Delta_r S_\beta^0 = -956.10^3 + 211,3 \times T$$

Remarque – On peut vérifier que :

$$\begin{cases} \Delta_r G_\alpha^0(T_{\text{fus}}) = -910.10^3 + 184 \times 1683 = -600 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r G_\beta^0(T_{\text{fus}}) = -956.10^3 + 211,3 \times 1683 = -600 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$$

assure la continuité de  $\Delta_r G^0(T)$  pour le système  $\text{SiO}_2/\text{Si}$ .

La courbe  $\Delta_r G^0(T)$  pour ce système est représentée par la courbe (4) sur le diagramme d'Ellingham :



4. Le diagramme d'Ellingham précédent montre que, pour obtenir du silicium à partir de  $\text{SiO}_2$  et d'un réducteur Red, il faut que les domaines d'existence (ou de prédominance) de  $\text{SiO}_2$  et de Red soient disjoints (de manière à ce que Red et  $\text{SiO}_2$  puissent réagir). Ces domaines (grisés sur le diagramme ci-dessus) apparaissent à partir de la température  $T_i$  du point d'intersection  $I$  des courbes (3) et (4) :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_{\beta}^0(T) > \Delta_r G_{\text{II}}^0(T) &\Rightarrow -956.10^3 + 211,3 \times T > -220.10^3 - 183 \times T \\ &\Rightarrow T > \frac{956.10^3 - 220.10^3}{211,3 + 183} = 1867 \text{ K} \end{aligned}$$

Dans ce domaine de température, le silicium obtenu est alors liquide.

## ● 234 ————— Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand

### 1. Diagramme d'Ellingham

- (a) Soit une réaction d'oxydation d'une entité X en son oxyde (noté XO pour simplifier), dont l'équation :



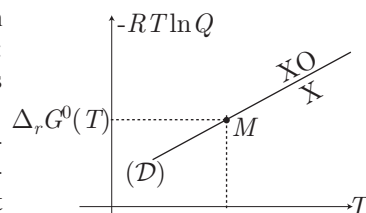
présente  $\text{O}_2$  avec un coefficient stœchiométrique égal à 1.

On note  $Q$  son quotient de réaction et  $\Delta_r G^0(T)$  son enthalpie libre *standard*, telle que :

$$\Delta_r G^0(T) = -RT \ln Q_e$$

lorsque, l'équilibre étant réalisé,  $Q$  adopte la valeur  $Q_e$ .

Le diagramme d'Ellingham du système XO/X consiste à représenter la courbe  $-RT \ln Q$  en fonction de  $T$ ; la courbe  $(\mathcal{D})$ , d'équation :  $\Delta_r G^0(T) = -RT \ln Q_e$ , représente les points  $M$  pour lesquels l'équilibre (77) est atteint. L'approximation d'Ellingham consiste à admettre que l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H^0$  et l'entropie *standard*  $\Delta_r S^0$  de la réaction (77) sont indépendantes de la température.

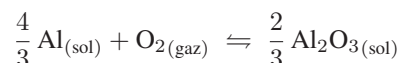


Dans le cadre de cette approximation, l'ensemble  $(\mathcal{D})$  des points caractéristiques de l'équilibre entre X et XO est un segment de droite d'équation :

$$\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0$$

- (b) Sur le segment proposé par l'énoncé, le point  $A$  est relatif au système  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}$ ; la discontinuité de la pente qui est observée en ce point traduit alors une discontinuité de  $\Delta_r S^0$ , consécutive à un changement d'état. Celui-ci pourrait concerner Al ou  $\text{Al}_2\text{O}_3$ , mais l'énoncé ne mentionne que l'aluminium dans deux états physiques. C'est pourquoi, en notant  $T_A$  la température  $T$  au point  $A$ , il convient de distinguer deux situations :

- Si  $T < T_A$ , l'aluminium se présente sous forme solide, de sorte que son oxydation est décrite par l'équation :



dont l'enthalpie *standard* vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^0 &= \frac{2}{3} \Delta_f H^0 [\text{Al}_2\text{O}_{3(\text{sol})}] - \frac{4}{3} \Delta_f H^0 [\text{Al}_{(\text{sol})}] - \Delta_f H^0 [\text{O}_2] \\ &= -\frac{2}{3} \times 1680 = -1120 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

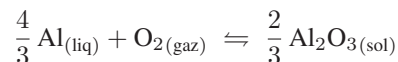
et l'entropie *standard* vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_r S_1^0 &= \frac{2}{3} S^0 [\text{Al}_2\text{O}_{3(\text{sol})}] - \frac{4}{3} S^0 [\text{Al}_{(\text{sol})}] - S^0 [\text{O}_2] \\ &= \frac{2}{3} \times 50,9 - \frac{4}{3} \times 28,3 - 205 = -208,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Aussi, l'enthalpie libre *standard* de cette réaction d'oxydation a pour expression :

$$\Delta_r G_1^0(T) = -1120 \cdot 10^3 + 208,8 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

- Lorsque  $T > T_A$ , l'aluminium liquide participe à la réaction d'oxydation :



d'enthalpie *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_2^0 &= \frac{2}{3} \Delta_f H^0 [\text{Al}_2\text{O}_{3(\text{sol})}] - \frac{4}{3} \Delta_f H^0 [\text{Al}_{(\text{liq})}] - S^0 [\text{O}_2] \\ &= -\frac{2}{3} \times 1680 - \frac{4}{3} \times 10,6 = -1134 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

et d'entropie *standard* :

$$\begin{aligned}\Delta_r S_2^0 &= \frac{2}{3} S^0 [\text{Al}_2\text{O}_3(\text{sol})] - \frac{4}{3} S^0 [\text{Al}(\text{liq})] - S^0 [\text{O}_2] \\ &= \frac{2}{3} \times 50,9 - \frac{4}{3} \times 39,6 - 205 = -223,9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

son enthalpie libre *standard* vaut donc :

$$\Delta_r G_2^0(T) = -1\,134 \cdot 10^3 + 223,9 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

Le diagramme d'Ellingham fourni par l'énoncé confirme la continuité de la fonction  $\Delta_r G^0(T)$  en  $T = T_A$ , ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned}\Delta_r G_1^0(T_A) &= \Delta_r G_2^0(T_A) \\ \Rightarrow -1\,120 \cdot 10^3 + 208,8 \times T_A &= -1\,134 \cdot 10^3 + 223,9 \times T_A \\ \Rightarrow T_A &= \frac{1\,134 \cdot 10^3 - 1\,120 \cdot 10^3}{223,9 - 208,8} = 927 \text{ K}\end{aligned}$$

*Remarque* – Il est facile de contrôler la compatibilité de cette valeur avec celle déductible du diagramme d'Ellingham.

(c) Le système C/CO est caractérisé par l'équation-bilan d'oxydation :



dont les coefficients stœchiométriques affectés aux espèces gazeuses varie de :

$$\Delta \nu_g = 2 - 1 = 1$$

Ainsi, l'entropie *standard*  $\Delta_r S_3^0$  de cette réaction ayant le même signe que  $\Delta \nu_g$ , nous savons que :

$$\Delta_r S_3^0 > 0 \Rightarrow \Delta_r S_3^0 = |\Delta_r S_3^0|$$

Par suite, la courbe (3), décrite analytiquement par l'expression :

$$\Delta_r G_3^0(T) = \Delta_r H_3^0 - T \times |\Delta_r S_3^0|$$

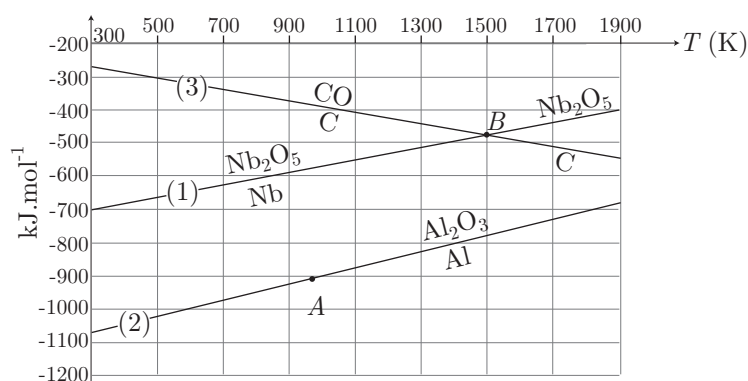
présente une pente  $\frac{d\Delta_r G_3^0}{dT} = -|\Delta_r S_3^0| < 0$ .

## 2. Exploitation du diagramme

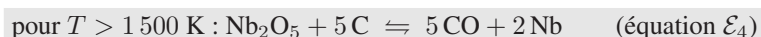
(a) *Réduction de l'oxyde par le carbone*

Représentons, sur le diagramme d'Ellingham, les domaines de prédominance (ou d'existence) de Al, Nb, C et leurs oxydes :

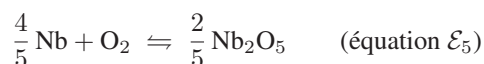




Ce faisant, la réduction de  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  par C peut être prévue : cette réaction se produit dans une gamme de température pour laquelle les domaines d'existence (ou de prédominance) de  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  et de C sont disjoints. Le diagramme montre que cette réaction se produit à partir de la température  $T_B \simeq 1500$  K du point d'intersection B des courbes (1) et (3) ; les espèces Nb et CO sont alors obtenues :



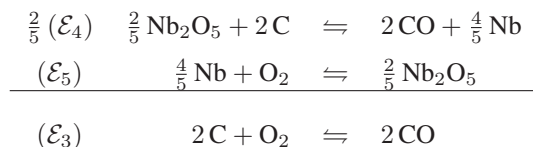
Rappelons que la courbe (1), relative à la réaction d'équation :



présente une enthalpie libre *standard* qui fait intervenir l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H_5^0$  :

$$\Delta_r G_5^0(T) = \Delta_r H_5^0 - T \times \Delta_r S_5^0$$

Or, en remarquant que les réactions ( $\mathcal{E}_3$ ), ( $\mathcal{E}_4$ ) et ( $\mathcal{E}_5$ ) sont linéairement dépendantes :



il ressort que :

$$\frac{2}{5} \Delta_r H_4^0 + \Delta_r H_5^0 = \Delta_r H_3^0 \Rightarrow \Delta_r H_4^0 = \frac{5}{2} \times (\Delta_r H_3^0 - \Delta_r H_5^0)$$

où  $\Delta_r H_3^0$  représente l'ordonnée à l'origine de la courbe (3) et  $\Delta_r H_5^0$  celle de la courbe (1). Le diagramme d'Ellingham suggère alors que  $\Delta_r H_3^0$  est supérieur à  $\Delta_r H_5^0$ , d'où il découle que :

$$\Delta_r H_4^0 > 0$$

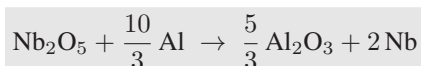
c'est-à-dire que :

la réaction d'équation ( $\mathcal{E}_4$ ) est endothermique.

En conséquence, la réduction de  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  par C ne pourra pas s'auto-entretenir : pour se produire, elle consomme de la chaleur, ce qui provoquera une diminution de la température du milieu ambiant, pouvant atteindre la température  $T_B$

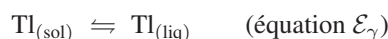
en dessous de laquelle cette réaction n'est plus possible. En outre, la nature endothermique de cette réaction lui interdit de produire l'énergie nécessaire à son déroulement.

- (b) Le diagramme d'Ellingham reproduit ci-avant permet, de surcroît, de prévoir la réduction possible de  $\text{Nb}_2\text{O}_5$  par Al : les domaines d'existence de ces espèces étant disjoints à toute température, leur réaction est totale et produit  $\text{Al}_2\text{O}_3$  ainsi que Nb (dont les domaines d'existence sont communs) selon l'équation :



### ● 235 ————— Concours Commun Polytechnique

1. La fusion du thallium, qui se produit à la température  $T_{\text{fus}} = 577 \text{ K}$ , est décrite par l'équation :



dont l'enthalpie *standard* vaut :

$$\Delta_r H_\gamma^0 = \Delta_{\text{fus}} H^0 = 4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

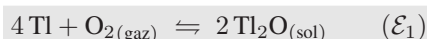
et dont l'entropie *standard* vaut :

$$\Delta_r S_\gamma^0 = \frac{\Delta_{\text{fus}} H^0}{T_{\text{fus}}} = \frac{4.10^3}{577} \Rightarrow \Delta_r S_\gamma^0 = 6,93 \simeq 7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

De ces valeurs découle l'expression de l'enthalpie libre *standard* de fusion du thallium (dans le cadre de l'approximation d'Ellingham) :

$$\Delta_r G_\gamma^0 = \Delta_r H_\gamma^0 - T \times \Delta_r S_\gamma^0 = 4.10^3 - 7 \times T \quad (\text{en } \text{J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

2. L'oxydation du thallium par le dioxygène est décrite par l'équation-bilan :



3. L'approximation d'Ellingham consiste à négliger l'influence de la température  $T$  sur l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H^0$  et sur l'entropie *standard* d'une réaction ( $\mathcal{E}$ ). Ce faisant, l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G^0$  de ( $\mathcal{E}$ ) dépend de manière affine de la température :

$$\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0$$

4. Étant donné la fusion du thallium qui se produit à  $T_{\text{fus}} = 577 \text{ K}$ , l'écriture de l'équation ( $\mathcal{E}_1$ ) requiert la distinction de deux cas :

- Si  $T < 577 \text{ K}$ , le thallium est solide, de sorte que l'équation ( $\mathcal{E}_1$ ) s'écrit :



L'enthalpie *standard* de cette réaction vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_\alpha^0 &= 2 \Delta_f H^0 [\text{Tl}_2\text{O}_{(\text{sol})}] - 4 \Delta_f H^0 [\text{Tl}_{(\text{sol})}] - \Delta_f H^0 [\text{O}_{2(\text{gaz})}] \\ &= -2 \times 180 = -360 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

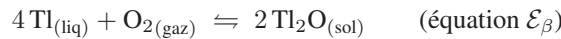
et son entropie *standard* vaut :

$$\begin{aligned}\Delta_r S_\alpha^0 &= 2 S^0 [\text{Tl}_2\text{O}_{(\text{sol})}] - 4 S^0 [\text{Tl}_{(\text{sol})}] - S^0 [\text{O}_{2(\text{gaz})}] \\ &= 2 \times 125 - 4 \times 65 - 206 = -216 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

Par suite :

$$\Delta_r G_1^0(T < 577 \text{ K}) = \Delta_r G_\alpha^0 = -360.10^3 + 216 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

- Si  $T > 577 \text{ K}$ , le thallium étant liquide, l'équation ( $\mathcal{E}_1$ ) devient :



Étant donné que les équations ( $\mathcal{E}_\alpha$ ), ( $\mathcal{E}_\beta$ ) et ( $\mathcal{E}_\gamma$ ) sont linéairement dépendantes :

$$\begin{array}{r} (\mathcal{E}_\beta) \quad 4 \text{Tl}_{(\text{liq})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons 2 \text{Tl}_2\text{O}_{(\text{sol})} \\ 4 (\mathcal{E}_\gamma) \quad \quad \quad 4 \text{Tl}_{(\text{sol})} \rightleftharpoons 4 \text{Tl}_{(\text{liq})} \\ \hline (\mathcal{E}_\alpha) \quad 4 \text{Tl}_{(\text{sol})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons 2 \text{Tl}_2\text{O}_{(\text{sol})} \end{array}$$

l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G_\beta^0$  vérifie :

$$\begin{aligned}\Delta_r G_\alpha^0 &= \Delta_r G_\beta^0 + 4 \Delta_r G_\gamma^0 \Rightarrow \Delta_r G_\beta^0 = \Delta_r G_\alpha^0 - 4 \Delta_r G_\gamma^0 \\ &\Rightarrow \Delta_r G_\beta^0 = (-360.10^3 + 216 \times T) - 4 \times (4.10^3 - 7 \times T) \\ &\Rightarrow \Delta_r G_1^0(T > 577 \text{ K}) = \Delta_r G_\beta^0 = -376.10^3 + 244 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})\end{aligned}$$

Ces expressions permettent le calcul de :

$$\begin{cases} \Delta_r G_\alpha^0(300 \text{ K}) = -295 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r G_\alpha^0(577 \text{ K}) = -235 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \Delta_r G_\beta^0(577 \text{ K}) = -235 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r G_\beta^0(1500 \text{ K}) = -10 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases} \quad (78)$$

ce qui confirme la continuité de la courbe  $\Delta_r G_1^0(T)$  en  $T = 577 \text{ K}$ .

5. Soient  $\Delta_r G_1^0(T)$  l'enthalpie libre *standard* de la réaction ( $\mathcal{E}_1$ ) et  $Q$  son quotient de réaction. Son affinité chimique vaut alors :

$$\mathcal{A}_1 = -\Delta_r G_1^0(T) - RT \ln Q = -\Delta_r G_1^0(T) + RT \left[ \frac{P(T)}{P_0} \right] \quad (79)$$

où  $P(T)$  désigne la pression partielle de  $\text{O}_2$ . Notamment, lorsque l'équilibre ( $\mathcal{E}_1$ ) est établi, la pression  $P(T)$  (alors appelée *pression de corrosion*) prend une valeur  $P_e(T)$  qui annule  $\mathcal{A}_1(T)$  :

$$-\Delta_r G_1^0(T) + RT \ln \left[ \frac{P_e(T)}{P_0} \right] = 0 \Rightarrow P_e(T) = P_0 \exp \left[ \frac{\Delta_r G_1^0(T)}{RT} \right]$$

Compte tenu des expressions de  $\Delta_r G_1^0(T)$ , on obtient alors :

$$\begin{aligned}P_e(300 \text{ K}) &= P_0 \times \exp \left[ \frac{\Delta_r G_\alpha^0(300 \text{ K})}{RT} \right] = 10^5 \times \exp \left( -\frac{295.10^3}{8 \times 300} \right) \\ &\Rightarrow P_e(300 \text{ K}) = 4,1.10^{-49} \text{ Pa}\end{aligned}$$

et :

$$P_e(1500 \text{ K}) = P_0 \times \exp \left[ \frac{\Delta_r G_\beta^0(1500 \text{ K})}{RT} \right] = 10^5 \times \exp \left( -\frac{10^4}{8 \times 1500} \right)$$

$$\Rightarrow P_e(1500 \text{ K}) = 43\,460 \text{ Pa}$$

La relation entre  $P_e(T)$  et  $\Delta_r G_1^0(T)$  permet d'écrire l'identité (79) sous la forme suivante :

$$\mathcal{A}_1(T) = -RT \left[ \frac{P_e(T)}{P_0} \right] + RT \ln \left[ \frac{P(T)}{P_0} \right] = RT \left[ \frac{P(T)}{P_e(T)} \right]$$

Ce résultat montre que :

- lorsque  $P(T) > P_e(T)$ ,  $\mathcal{A}_1(T) > 0$  signifie que la réaction ( $\mathcal{E}_1$ ) est totalement déplacée vers la formation de  $\text{Tl}_2\text{O}$  qui devient la forme stable du thallium ;
- en revanche,  $P(T) < P_e(T)$  affecte à  $\mathcal{A}_1(T)$  un signe négatif qui se traduit par un déplacement de la réaction ( $\mathcal{E}_1$ ) vers la formation totale de  $\text{Tl}$  qui est alors la forme stable du thallium.

Ces arguments conduisent par conséquent à conclure que :

pour une pression  $P(T) = 21\,300 \text{ Pa}$  telle que :

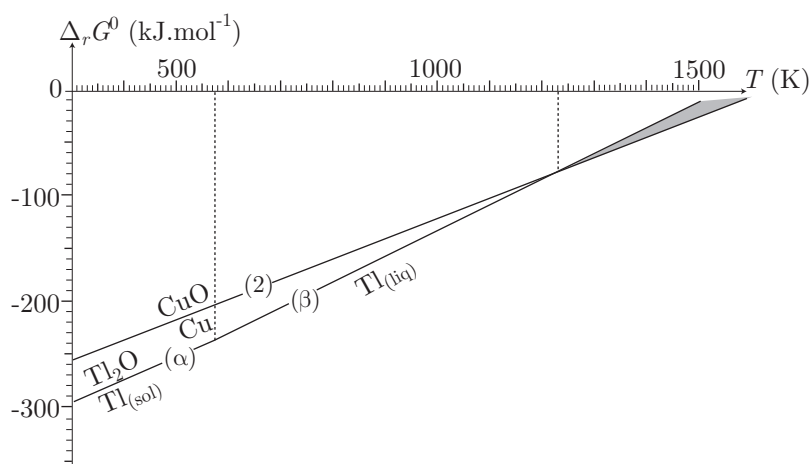
$$\underbrace{P(300 \text{ K})}_{21\,300 \text{ Pa}} > \underbrace{P_e(300 \text{ K})}_{4,1 \cdot 10^{-49} \text{ Pa}} \text{ et } \underbrace{P(1500 \text{ K})}_{21\,300 \text{ Pa}} < \underbrace{P_e(1500 \text{ K})}_{43\,460 \text{ Pa}}$$

l'oxyde de thallium  $\text{Tl}_2\text{O}$  est stable à 300 K tandis qu'à 1500 K, le thallium liquide  $\text{Tl}_{(\text{liq})}$  est stable.

6. Étant donné que :

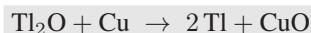
$$\Delta_r G_2^0(T) = -312 + 0,192 \times T \Rightarrow \begin{cases} \Delta_r G_2^0(300 \text{ K}) = -254 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r G_2^0(1350 \text{ K}) = -53 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{cases}$$

et compte tenu des valeurs (78) de  $\Delta_r G_1^0(T)$ , le diagramme d'Ellingham des couples  $\text{CuO}_{(\text{sol})}/\text{Cu}_{(\text{sol})}$  et  $\text{Tl}_2\text{O}/\text{Tl}$  prend l'allure suivante :



**CORRIGÉS**

7. Le cuivre Cu peut réduire  $Tl_2O$  à condition que les domaines d'existence de ces deux espèces soient disjoints, afin de réagir selon l'équation-bilan :



Or, le diagramme d'Ellingham ci-dessus montre que cette condition n'est respectée qu'au delà d'une température voisine de 1 250 K, pour laquelle le thallium est liquide, c'est-à-dire pour :

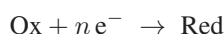
$$\begin{aligned} \Delta_r G_\beta^0(T) > \Delta_r G_2^0(T) &\Rightarrow -376.10^3 + 244 \times T > -312.10^3 + 192 \times T \\ &\Rightarrow T > \frac{376.10^3 - 312.10^3}{244 - 192} = 1\,231 \text{ K} \end{aligned}$$

### ● 236 ————— Lycée Kléber, Strasbourg

À l'issue de la réduction des ions métalliques, la solution contient Zn, Ni et Cu amalgamés, ainsi que  $H^+$  et  $H_2O$  (les ions  $Cl^-$  ne participent à aucune réaction). Pour qu'un métal M puisse se redissoudre, il doit être oxydé :



par un courant anodique  $i_a > 0$ . Dans ce cas, il doit également se produire une réduction, à la même électrode de mercure, d'une espèce Ox :



ce qui requiert le départ d'un courant  $i_c < 0$ . Or, l'intensité  $i$  du courant qui circule dans le circuit coupé est nulle, ce qui signifie également que, pour un potentiel  $E_{Hg}$  donné (celui pris par l'électrode de mercure) :  $|i_a| = |i_c|$ , de manière à assurer :  $i = i_a + i_c = 0$ .

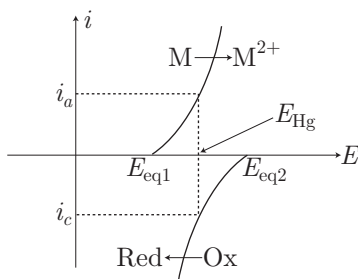


Figure 1

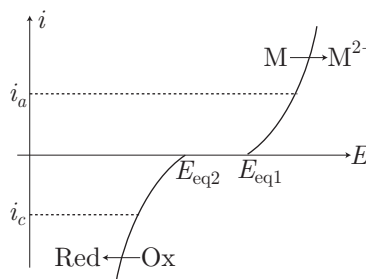
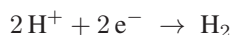
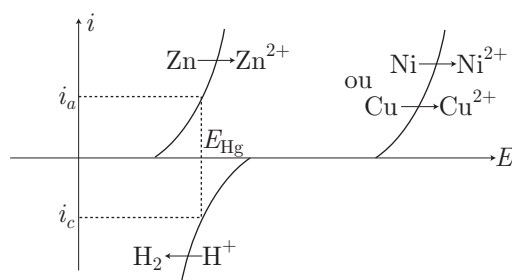


Figure 2

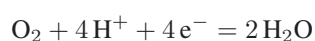
Une réaction d'oxydo-réduction entre M et Ox ne peut donc se produire (figure 1) que si  $E_{eq1} < E_{eq2}$  ( $E_{eqi}$  désignant le potentiel d'équilibre d'un des systèmes Ox/Red ou  $M^{2+}/M$ ), sans quoi  $E_{Hg}$  ne peut être défini (figure 2). En l'absence de dioxygène, seuls les ions  $H^+$  sont susceptibles de jouer le rôle de Ox :



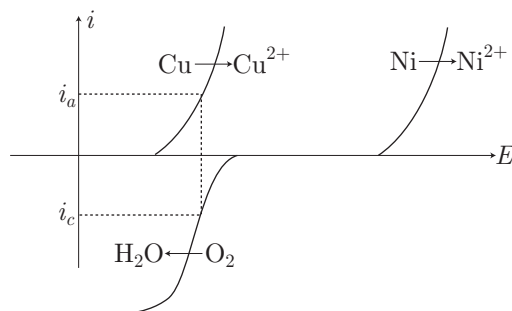
C'est pourquoi les courbes intensité-potential des couples  $Zn^{2+}/Zn$ ,  $Ni^{2+}/Ni$  et  $Cu^{2+}/Cu$  sont disposées de la manière suivante par rapport à celle du système  $H^+/H_2$  :



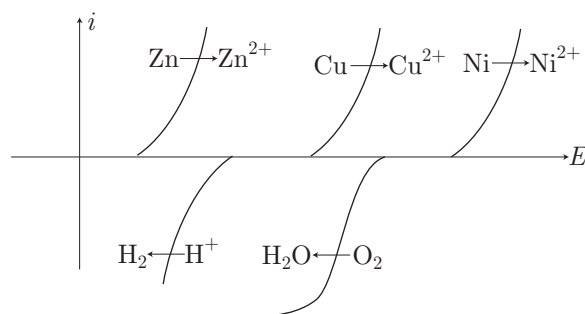
En outre, la présence d'oxygène dans la solution assure l'existence de l'oxydant  $O_2$  du couple  $O_2/H_2O$  :



La réactivité du cuivre dans une solution oxygénée suggère la localisation des courbes intensité-potentiel : celle du couple  $Cu^{2+}/Cu$  se trouve plus « à gauche » que celle de  $O_2/H_2O$ , elle-même plus « à gauche » que celle de  $Ni^{2+}/Ni$  :



En conclusion, les courbes intensité-potentiel des différents systèmes sont disposées de la manière suivante :



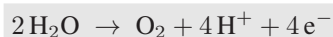
### ● 237 ————— Concours du CAPES

1. L'énoncé donne la composition de la solution qui subit l'électrolyse :



Aussi, en l'absence de réactivité des ions sulfate, on peut attendre :

- une oxydation de l'eau à l'anode :



- des réductions des ions  $\text{Zn}^{2+}$  et  $\text{H}^+$  à la cathode :

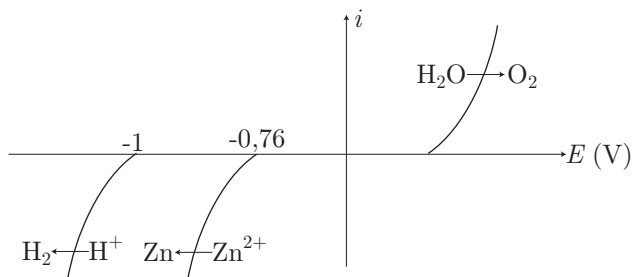


Remarque – On peut également envisager une réaction électrochimique de l'électrode de plomb :



Cependant, la couche d'oxyde de plomb isole Pb de l'eau nécessaire au déroulement de cette réaction. Cette passivation est d'ailleurs confirmée par les données numériques qui omettent toute valeur relative à l'élément plomb.

Compte tenu des surtensions aux électrodes associées aux systèmes  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$  et  $\text{H}^+/\text{H}_2$ , les courbes intensité-potential de ces couples doivent présenter les allures suivantes (l'échelle sur l'axe horizontal n'est pas respecté) :



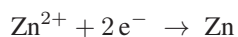
L'emploi d'une cathode en aluminium est justifié par la grande surtension que le système  $\text{H}^+/\text{H}_2$  y présente ; le système  $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$  est situé dans le domaine d'électroactivité de l'eau, auquel cas la réduction de  $\text{Zn}^{2+}$  est possible en milieu aqueux.

2. (a) Les courbes intensité-potential fournissent des informations concernant la cinétique des réactions d'oxydo-réduction ; la vitesse  $v$  de ces réactions est proportionnelle à l'intensité du courant ou à sa densité.
- (b) Les courbes intensité-potential présentées ci-dessus permettent de prévoir qu'il se produira :



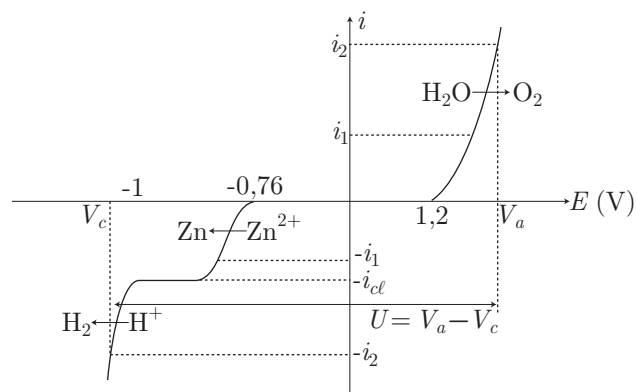
- (c) À l'anode, la réaction d'oxydation de l'eau peut se produire sans qu'il y ait diffusion des molécules  $\text{H}_2\text{O}$  qui constituent le solvant ; il n'y a pas de palier de diffusion à l'anode.

En revanche, la cathode est le siège de la réaction électrochimique d'équation :



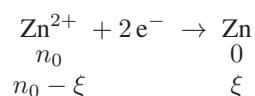
dont le déroulement est limité par la diffusion des ions  $\text{Zn}^{2+}$  dans la solution. Par conséquent, la courbe intensité-potential du système  $\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}$  présente un palier de diffusion.

- (d) Compte tenu de ce qui précède, le diagramme intensité-potentiel qui décrit le fonctionnement de la cellule électrolytique présente l'allure suivante :



Ce diagramme montre que la réduction de  $\text{Zn}^{2+}$  est la seule réaction qui se produit à la cathode, à condition que l'intensité  $-i_1$  demeure supérieure à la valeur  $-i_{cl}$  du palier de diffusion. De fait, cette contrainte limite la tension que l'on peut appliquer aux bornes des électrodes. Par exemple, si l'on applique une tension<sup>4</sup>  $U = V_a - V_c$  supérieure à  $1,2 - (-1) = 2,2$  V, la réduction de  $\text{H}^+$  se produit également à la cathode. *A fortiori*, l'application d'une tension de 5 V est à proscrire si l'on souhaite éviter un dégagement de dihydrogène à la cathode.

3. La production cathodique du zinc est décrite par l'équation-bilan :



dont l'avancement est noté  $\xi$ . Cette équation montre que la production de  $n_{\text{Zn}} = \xi$  moles de zinc solide s'accompagne d'un transfert de  $n_e = 2\xi$  moles d'électrons, c'est-à-dire d'une charge  $q = \mathcal{F} n_e = 2\mathcal{F} \xi$ , apportée pendant  $\Delta t = 24 \times 3600 = 86\,400$  s par un courant d'intensité :

$$I = \frac{q}{\Delta t} = \frac{2\mathcal{F} \xi}{\Delta t} \Rightarrow n_{\text{Zn}} = \xi = \frac{I \Delta t}{2\mathcal{F}}$$

Ce faisant, pendant 24 h, il se dépose une masse de zinc :

$$\begin{aligned} m_{\text{Zn}} &= M \times n_{\text{Zn}} = \frac{IM \Delta t}{2\mathcal{F}} = \frac{115 \cdot 10^3 \times 65,4 \cdot 10^{-3} \times 86\,400}{2 \times 96\,500} \\ &\Rightarrow m_{\text{Zn}} = 3\,367 \text{ kg} \end{aligned}$$

sur une épaisseur  $h$  d'électrode, c'est-à-dire dans un volume  $V = S \times h$  tel que :

$$\rho = \frac{m_{\text{Zn}}}{V} = \frac{m_{\text{Zn}}}{Sh} \Rightarrow h = \frac{m_{\text{Zn}}}{\rho S} = \frac{3\,367}{7,14 \cdot 10^3 \times 3,2} \Rightarrow h = 0,15 \text{ m}$$

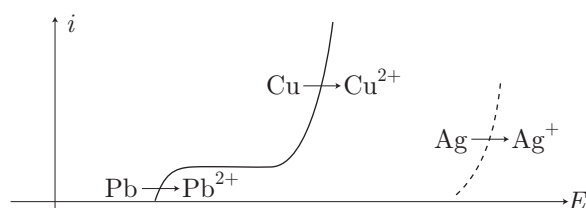
<sup>4</sup>En l'absence d'indication dans l'énoncé, nous négligeons l'éventuelle surtension anodique ; si le système  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$  était lent (ce qui est probable), les raisonnements ne seraient pas modifiés.



## ● 238 ————— Concours Commun Polytechnique

1. Recensons, au préalable, les espèces susceptibles de réagir à l'anode :

- le plomb peut être oxydé :  $\text{Pb} \rightarrow \text{Pb}^{2+} + 2\text{e}^-$  mais, apparaissant comme impurité dans l'électrode, sa quantité est assez faible pour que la courbe intensité-potentiel du système  $\text{Pb}^{2+}/\text{Pb}$  soit limitée par un palier.
- le cuivre peut également être oxydé :  $\text{Cu} \rightarrow \text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^-$ . Or, le cuivre métallique compose l'électrode, en raison de quoi la courbe intensité-potentiel monte très haut dans le diagramme ;
- l'argent pourrait être oxydé en l'absence de cuivre, dont la courbe intensité-potentiel interdit le déroulement de la réaction  $\text{Ag} \rightarrow \text{Ag}^+ + \text{e}^-$ .

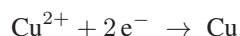


Par conséquent, à l'anode, on observe :

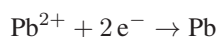
- une oxydation du plomb :  $\text{Pb} \rightarrow \text{Pb}^{2+} + 2\text{e}^-$  ;
- une oxydation du cuivre :  $\text{Cu} \rightarrow \text{Cu}^{2+} + 2\text{e}^-$  ;
- la libération d'argent métallique Ag au fur et à mesure de la disparition de la matrice de cuivre constituant l'électrode.

2. À la cathode peut se produire la réduction d'au moins une espèce présente dans l'électrolyte :  $\text{Pb}^{2+}$ ,  $\text{Cu}^{2+}$ , Ag (espèces libérées à l'anode) et  $\text{H}^+$  (dont l'énoncé omet la courbe intensité-potentiel) :

- étant présents en grande quantité, les ions  $\text{Cu}^{2+}$  subissent une réduction :



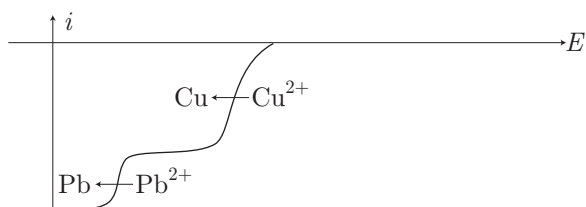
- les ions  $\text{Pb}^{2+}$  subissent éventuellement une réduction :



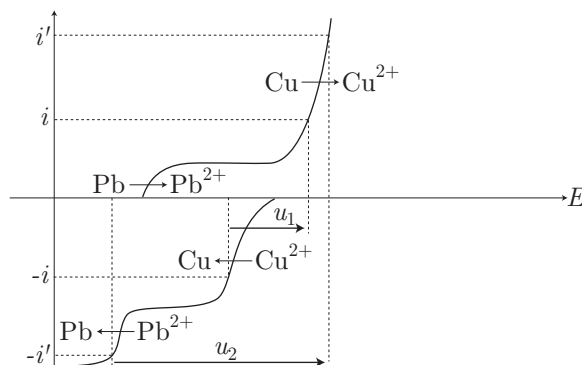
Cette réduction est rendue possible par l'existence d'un palier de diffusion des ions  $\text{Cu}^{2+}$  vers l'électrode ;

- les ions  $\text{H}^+$  contenus dans l'eau peuvent être réduits selon l'équation :  $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \rightarrow \text{H}_2$  ; l'énoncé ne fournissant pas la courbe intensité-potentiel de ce système, nous ignorerons cette réaction.

Ce faisant, à la cathode, le diagramme intensité-potentiel présente l'allure suivante :



La réunion des deux diagrammes permet alors de comprendre le fonctionnement de la cellule d'électrolyse :

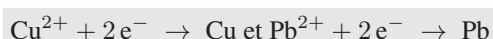


- Si la tension  $u$ , aux bornes des électrodes, est assez faible ( $u_1$  sur le schéma), un courant d'intensité  $i$  circule dans le circuit et l'on observe :



Par ce moyen, il est possible de purifier le cuivre que l'on retrouve pur à la cathode.

- Si la tension  $u$  est assez importante ( $u_2$  sur le schéma), la cathode peut être le siège de deux réactions de réduction :



Un tel dispositif permet de débarrasser une pièce de cuivre de l'argent qu'elle contient : la cathode présente la même composition que l'anode, excepté l'argent qui demeure dans l'électrolyte.

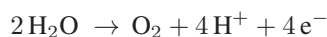
## ● 239 ————— Concours Centrale

1. Les trois systèmes présentés contiennent, en commun :

- de l'eau, susceptible de subir une réduction à la cathode (c'est-à-dire pour  $i < 0$ ) :



et une oxydation à l'anode (pour  $i > 0$ ) :



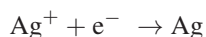
Les courbes intensité-potentiel associées à ces réactions électrochimiques ne présentent aucun palier de diffusion car l'eau est le solvant. Du reste, l'absence de dégagement gazeux à l'anode ne permettra pas de retenir cette dernière réaction.

- une électrode d'argent, susceptible de subir une oxydation à l'anode ( $i > 0$ ) :

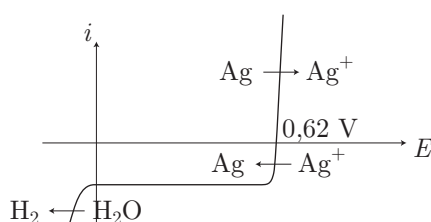
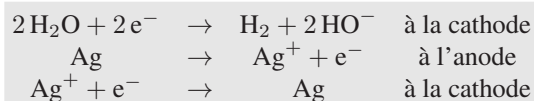


En outre, chacun des systèmes étudiés contient un électrolyte spécifique :

- Dans la première cellule, les ions  $\text{Ag}^+$  peuvent subir une réduction à la cathode ( $i < 0$ ) :

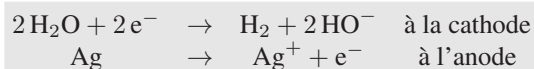


Les réactions électrochimiques qui se produisent alors sont :

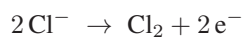


*Remarque* – L'absence de palier de diffusion observée à l'anode est justifiée par la nature même de l'électrode : elle contient l'argent susceptible d'être oxydé, sans migration des atomes dans la solution.

- La deuxième cellule contient, initialement, les espèces  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Ag}$  et  $\text{Cl}^-$ . Outre les réactions décrites par les équations (80) et (81) :



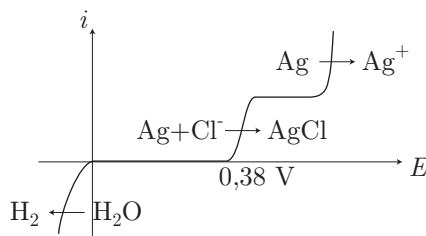
l'ion  $\text{Cl}^-$  peut participer à une réaction d'oxydation à l'anode. Celle d'équation :



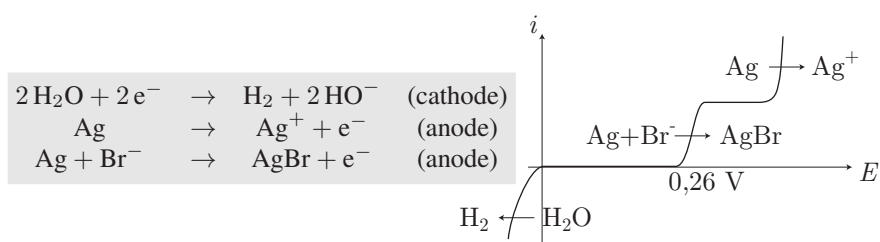
ne peut être retenue puisque aucun dégagement gazeux n'est observé à l'anode. En revanche, en présence d'ions  $\text{Cl}^-$ , les ions  $\text{Ag}^+$  produits à l'anode peuvent former le précipité de  $\text{AgCl}$ , conformément à l'équation :



Ces trois réactions peuvent alors prendre place dans le diagramme intensité-potentiel de la cellule :



- Dans la troisième cellule, les ions  $\text{Br}^-$  remplacent les ions  $\text{Cl}^-$ , dont l'influence a déjà été étudiée précédemment. C'est pourquoi il se produit, dans cette cellule, les réactions électrochimiques suivantes :



2. (a) Le premier diagramme révèle que le potentiel d'équilibre du couple  $\text{Ag}^+/\text{Ag}$  vaut  $E_e = 0,62 \text{ V}$ . Or, pour un système rapide tel que celui étudié (aucune sur-tension n'apparaît), ce potentiel s'identifie à celui fourni par la loi de Nernst :

$$E_e = E = E^0(\text{Ag}^+/\text{Ag}) + 0,06 \log [\text{Ag}^+] \text{ pour } \text{Ag}^+ + \text{e}^- = \text{Ag} \quad (\mathcal{E}_1)$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} E^0(\text{Ag}^+/\text{Ag}) &= E_e - 0,06 \log [\text{Ag}^+] = 0,62 - 0,06 \times \log (10^{-3}) \\ \Rightarrow E^0(\text{Ag}^+/\text{Ag}) &= 0,80 \text{ V} \end{aligned}$$

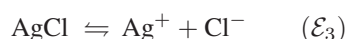
- (b) Pour les mêmes raisons, le potentiel d'équilibre  $E_e = 0,38 \text{ V}$  s'identifie au potentiel du couple  $\text{AgCl}/\text{Ag}$  :

$$E_e = E^0(\text{AgCl}/\text{Ag}) + 0,06 \log \left( \frac{1}{[\text{Cl}^-]} \right) \text{ pour } \text{AgCl} + \text{e}^- = \text{Ag} + \text{Cl}^- \quad (\mathcal{E}_2)$$

en conséquence de quoi :

$$E^0(\text{AgCl}/\text{Ag}) = E_e - 0,06 \log \left( \frac{1}{[\text{Cl}^-]} \right) = 0,38 - 0,06 \times \log \left( \frac{1}{10^{-3}} \right) = 0,20 \text{ V}$$

Quant à l'équilibre de précipitation de  $\text{AgCl}$  :



il est caractérisé par le produit de solubilité :

$$K_s = [\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-]$$

On peut alors remarquer que la somme des équations  $(\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_3)$  conduit à :

$$\begin{array}{r} (\mathcal{E}_1) \quad \text{Ag}^+ + \text{e}^- = \text{Ag} \\ (\mathcal{E}_3) \quad \text{AgCl} \rightleftharpoons \text{Ag}^+ + \text{Cl}^- \\ \hline (\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_3) \quad \text{AgCl} + \text{e}^- = \text{Ag} + \text{Cl}^- \end{array}$$

c'est-à-dire :  $(\mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_3) = (\mathcal{E}_2)$ . Il en va donc de même des enthalpies libres *standard* correspondantes :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_1^0 + \Delta_r G_3^0 &= \Delta_r G_2^0 \\ \Rightarrow -\mathcal{F} E^0(\text{Ag}^+/\text{Ag}) - RT \ln K_s &= -\mathcal{F} E^0(\text{AgCl}/\text{Ag}) \\ \Rightarrow \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \log K_s &= E^0(\text{AgCl}/\text{Ag}) - E^0(\text{Ag}^+/\text{Ag}) \end{aligned}$$

Aussi, en adoptant la valeur numérique :  $\frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \simeq 0,06 \text{ V}$ , on obtient :

$$\log K_s = \frac{1}{0,06} \times (0,20 - 0,80) = -10 \Rightarrow K_s = 10^{-10} \text{ pour AgCl}$$

- (c) Dans la troisième cellule, les ions  $\text{Br}^-$  sont substitués aux ions  $\text{Cl}^-$ , en raison de quoi les calculs se mènent comme précédemment ; le potentiel *standard* du couple  $\text{AgBr}/\text{Ag}$  vaut :

$$E^0(\text{AgBr}/\text{Ag}) = E_e - 0,06 \log \left( \frac{1}{[\text{Cl}^-]} \right) = 0,26 - 0,06 \times 3 = 0,08 \text{ V}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \log K_s &= \frac{1}{0,06} \times [E^0(\text{AgBr}/\text{Ag}) - E^0(\text{Ag}^+/\text{Ag})] = \frac{1}{0,06} \times (0,08 - 0,8) \\ &= -12 \Rightarrow K_s = 10^{-12} \text{ pour AgBr} \end{aligned}$$

## ● 240 ————— Concours Commun Polytechnique

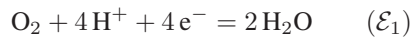
### I- Étude préliminaire

1. L'énoncé fait état des couples  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Cl}_2/\text{Cl}^-$ ,  $\text{H}^+/\text{H}_2$  et  $\text{Na}^+/\text{Na}$ , tandis que la cellule d'électrolyse est alimentée en espèces  $\text{Na}^+$ ,  $\text{Cl}^-$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  et  $\text{HO}^-$ . À l'anode peuvent se produire des réactions d'oxydation :

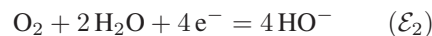
- du dichlore, selon la demi-équation :



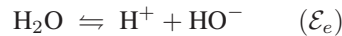
- de l'eau, dont l'énoncé donne le potentiel *standard*  $E_1^0 = 1,23 \text{ V}$  du couple  $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ , associé à la demi-équation :



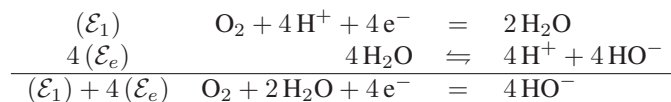
Cependant, en milieu basique, cette équation doit être remplacée par :



dont le potentiel *standard* sera noté  $E_2^0$ . En outre, l'équilibre d'autoprotolyse de l'eau :



est caractérisé par le produit ionique  $K_e = 10^{-14}$  à  $25^\circ\text{C}$ , tandis que la combinaison linéaire des équations  $(\mathcal{E}_1)$  et  $(\mathcal{E}_e)$  :



redonne l'équation  $(\mathcal{E}_2)$  :  $(\mathcal{E}_2) = (\mathcal{E}_1) + 4 \mathcal{E}_e$ . Il en va de même des enthalpies libres *standard* associées à ces réactions :

$$\Delta_r G_2^0 = \Delta_r G_1^0 + 4 \Delta_r G_e^0$$

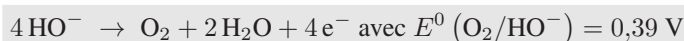
Ainsi, en notant  $T = 298 \text{ K}$  la température,  $R$  la constante molaire des gaz parfaits et  $\mathcal{F}$  le Faraday :

$$\Delta_r G_2^0 = -4\mathcal{F} E_2^0 \quad \Delta_r G_1^0 = -4\mathcal{F} E_1^0 \quad \Delta_r G_e^0 = -RT \ln K_e$$

C'est pourquoi :

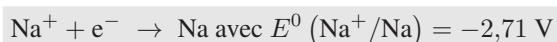
$$\begin{aligned} E_2^0 &= E_1^0 + \frac{RT}{\mathcal{F}} \ln K_e = E_1^0 + \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \log K_e \\ &= 1,23 - 0,06 \times 14 \text{ car } \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \simeq 0,06 \text{ V} \\ &= 0,39 \text{ V} \end{aligned}$$

Finalement, l'anode peut aussi être le siège d'une réaction d'oxydation :

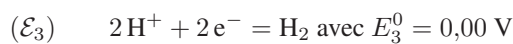


Quant à la cathode, elle ne peut être le siège que de réactions de réduction :

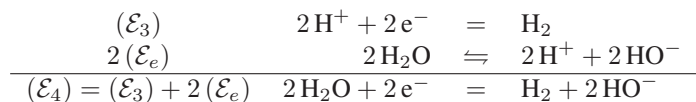
- de l'élément sodium :



- de l'élément hydrogène contenu dans l'eau :



Or, en milieu basique, cette équation doit être remplacée par la combinaison linéaire de équations  $(\mathcal{E}_3)$  et  $(\mathcal{E}_e)$  :



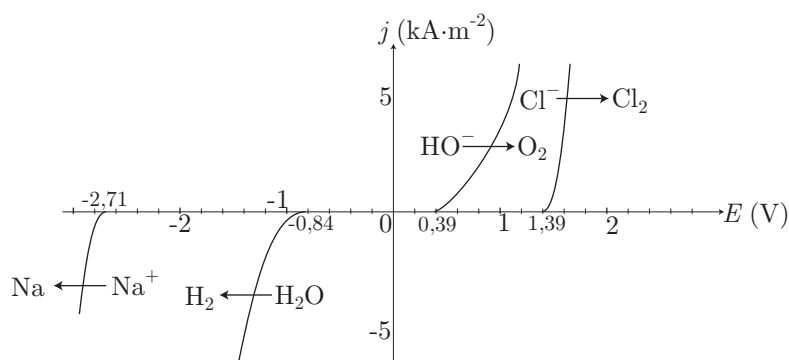
De l'identité :  $(\mathcal{E}_4) = (\mathcal{E}_3) + 2 (\mathcal{E}_e)$  découle celle des enthalpies libres *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_4^0 &= \Delta_r G_3^0 + 2 \Delta_r G_e^0 \Rightarrow -2\mathcal{F} E_4^0 = -2\mathcal{F} E_3^0 - 2RT \ln K_e \\ \Rightarrow E_4^0 &= E_3^0 + \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} \log K_e = 0 + 0,06 \log (10^{-14}) \\ \Rightarrow E_4^0 &= -0,84 \text{ V} \end{aligned}$$

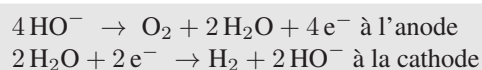
C'est pourquoi, à la cathode, il peut également se produire une oxydation de l'eau :



2. En l'absence de surtension, les courbes densité de courant-potential des couples précédemment rencontrés couperaient l'axe des potentiels en de valeurs proches des leurs potentiels *standard* :

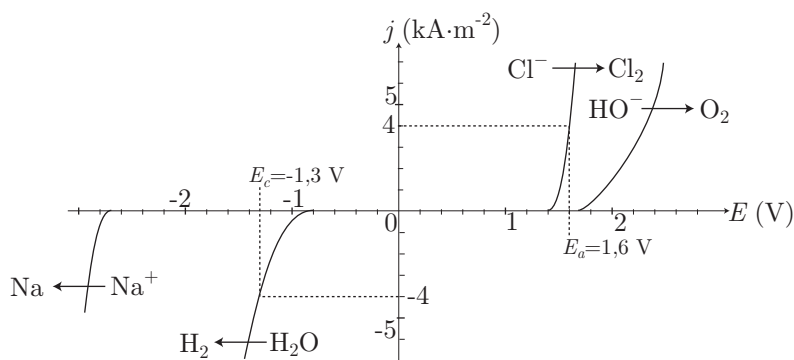


Par conséquent, l'absence de surtension se traduirait par une simple électrolyse de l'eau :

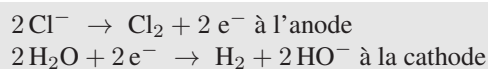


## II- Procédé à cellules à membranes

- Le diagramme proposé par l'énoncé tient compte des surtensions (essentiellement celle du couple  $\text{O}_2/\text{HO}^-$ ) :



De ce fait, il apparaît que l'électrolyse produit du dichlore à l'anode et du dihydrogène à la cathode :



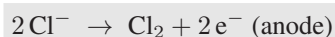
- À l'aide de ce diagramme, il est possible de compléter le schéma fourni par l'énoncé :
  - (2) est l'anode, qui reçoit le courant électrique délivré par le générateur ;
  - (3) est la cathode, d'où part le courant électrique qui circule dans le générateur ;
  - (1) est un dégagement de  $\text{Cl}_{2(\text{gaz})}$  produit à l'anode ;
  - (4) est un dégagement gazeux de  $\text{H}_{2(\text{gaz})}$  produit à la cathode ;
  - (7) représente les ions  $\text{Cl}^-$  qui réagissent à l'anode ;

- (5) désigne le dichlore  $\text{Cl}_2(\text{gaz})$  produit à l'anode ;
  - (6) rend compte du transfert d'ions  $\text{Na}^+$ , qui assure la neutralité électrique des deux compartiments.
3. Ce diagramme montre également que, pour assurer le passage d'un courant de densité  $j = 4 \text{ kA} \cdot \text{m}^{-2}$ , l'anode est portée au potentiel  $E_a = 1,6 \text{ V}$  tandis que la cathode est portée au potentiel  $E_c = -1,3 \text{ V}$ . Par conséquent, aux bornes de l'électrolyseur règne une tension :

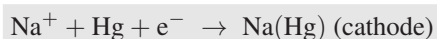
$$U_1 = E_a - E_c = 2,9 \text{ V}$$

### III- Procédé à cellules à cathodes de mercure

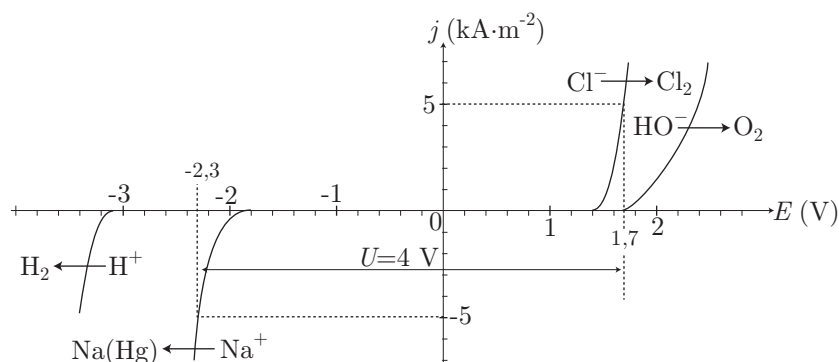
1. Compte tenu des surtensions observées aux électrodes, il se produit une oxydation de  $\text{Cl}^-$  à l'anode :



et une réduction de  $\text{Na}^+$  à la cathode, avec formation d'un amalgame avec le mercure :

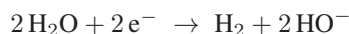


2. Le diagramme densité de courant-potentiel montre que, pour produire du dichlore à l'anode, sans produire de dioxygène ( $4\text{HO}^- \rightarrow \text{O}_2 + 2\text{H}_2\text{O} + 4\text{e}^-$ ), il est nécessaire de maintenir son potentiel à une valeur inférieure à  $1,7 \text{ V}$ . À cette condition, s'ajoute celle du rôle symétrique joué par les électrodes : si une densité de courant  $j$  traverse l'anode, la cathode doit être traversée par un courant de densité  $-j$  :



Ce diagramme montre qu'une tension de  $4 \text{ V}$  (c'est-à-dire  $1,7 + 2,3 \text{ V}$ ) appliquée aux bornes des électrodes s'accompagne du courant de densité  $j = 5 \text{ kA} \cdot \text{m}^{-2}$ .

3. D'après l'énoncé, l'eau réagit pour se transformer en  $\text{H}_2$  et  $\text{HO}^-$ , conformément à l'équation (82) :



tandis que le sodium amalgamé est oxydé en ions  $\text{Na}^+$  :



Il se produit alors, dans le décomposeur, une réaction d'oxydo-réduction d'équation-bilan :





4. Ces deux procédés présentent leurs propres inconvénients :

- le procédé à membrane utilise des membranes dont la fragilité accroît le coût d'exploitation ;
- le procédé à cathode de mercure emploi du mercure qui, par sa grande toxicité, représente un réel risque de pollution majeure. En outre, ce procédé requiert une puissance :

$$\mathcal{P}_2 = u \times j = 4 \times 5.10^3 = 20 \text{ kJ} \cdot \text{m}^{-2}$$

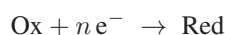
tandis que le premier procédé consomme :

$$\mathcal{P}_1 = 2,9 \times 4.10^3 = 11,6 \text{ kJ} \cdot \text{J}^{-2}$$

## ● 241 ————— Concours Centrale-Supélec

### 1. Étude de courbes intensité-potentiel

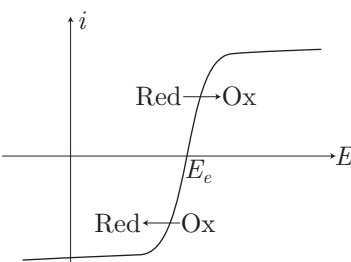
- (a) Soit un couple Ox/Red, de potentiel *standard*  $E^0$ , dont l'équation de la réaction à la cathode s'écrit :



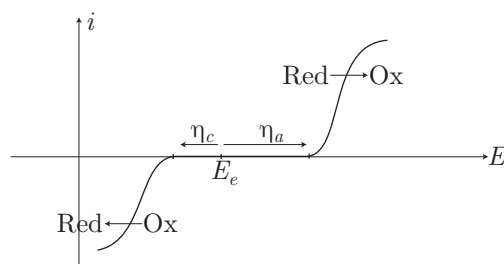
et celle à l'anode s'écrit :



Un système électrochimique est dit *rapide* en l'absence de surtension ; les courants anodique et cathodique sont simultanément nuls lorsque le potentiel  $E$  prend la valeur  $E_e$  prévue par la loi de Nernst.

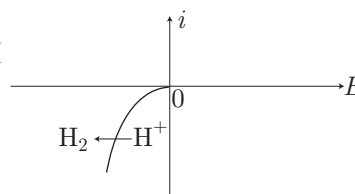
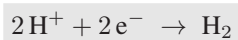


En revanche, un système est qualifié de *lent* lorsqu'il existe une surtension anodique  $\eta_a$  et une surtension cathodique  $\eta_c$  telles que  $i$  est nul pour un ensemble de valeurs de  $E$  comprises entre  $E_e + \eta_a$  et  $E_e + \eta_c$  :

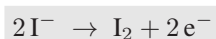


- (b) Recensons l'ensemble des réactions électrochimiques qui peuvent se produire lorsque les espèces  $\text{H}^+$ ,  $\text{I}^-$ ,  $\text{I}_2$  et  $\text{Sn}^{4+}$  sont placées en milieu aqueux ; on confondra  $E_e$  avec  $E^0$ .

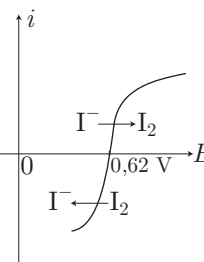
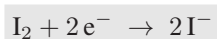
- $H^+$  peut être réduit par un courant cathodique ( $i < 0$ ) qui s'annule pour  $E = 0$  V (car le système est rapide) :



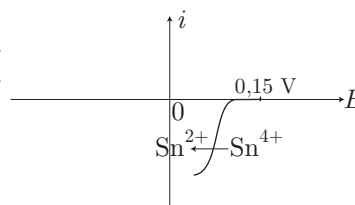
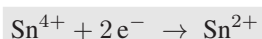
- $I^-$  peut être oxydé par un courant anodique ( $i > 0$ ) dès que  $E > 0,62$  V (le système est rapide) :



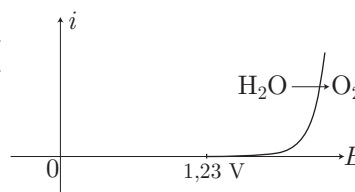
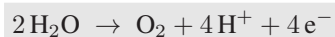
tandis que  $I_2$  peut être réduit par un courant cathodique ( $i < 0$ ) dès que  $E < 0,62$  V :



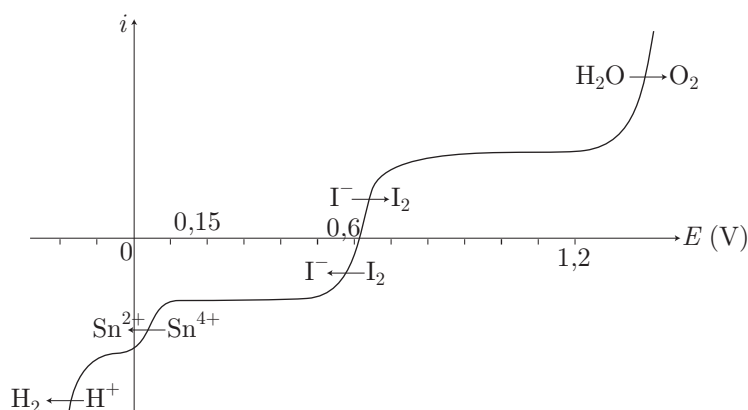
- $Sn^{4+}$  ne peut être que réduit par un courant cathodique ( $i < 0$ ), pour un potentiel  $E$  inférieur à 0,15 V (système lent) :



- $H_2O$  peut être oxydé par un courant anodique ( $i > 0$ ) pour un potentiel  $E$  supérieur à 1,23 V (le système est lent) :



La synthèse de ces phénomènes aboutit à la courbe intensité-potentiel proposée par l'énoncé :

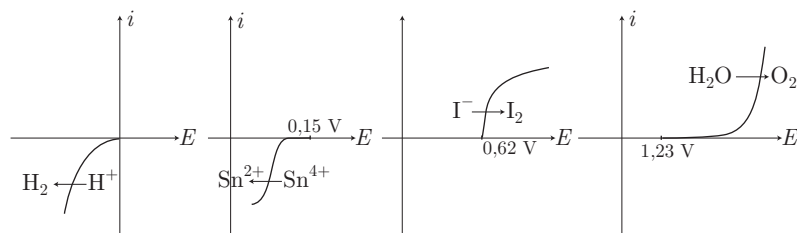
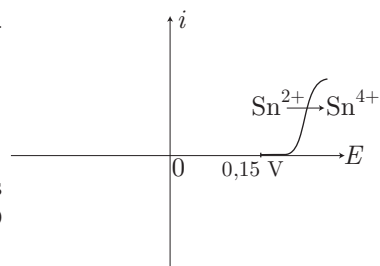


**CORRIGÉS**

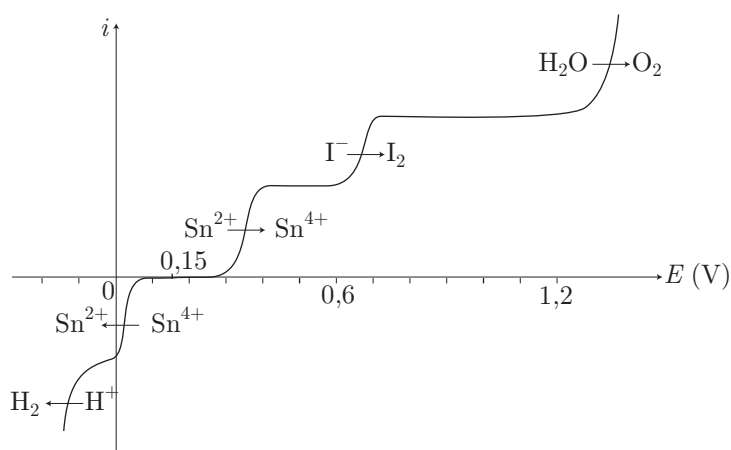
- (c) L'ion  $\text{Sn}^{2+}$  peut être oxydé par un courant anodique ( $i > 0$ ) :



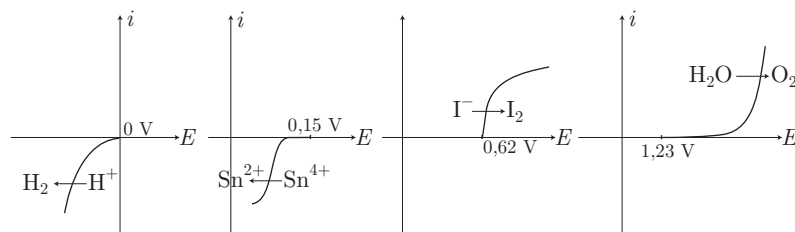
pour un potentiel  $E$  supérieur à 0,15 V.  
 Cette courbe, associée à celles illustrant les transformations que  $\text{H}^+$ ,  $\text{Sn}^{4+}$ ,  $\text{I}^-$  et  $\text{H}_2\text{O}$  peuvent subir :



conduit au diagramme  $i - E$  d'une solution aqueuse qui contient  $\text{H}^+$ ,  $\text{Sn}^{2+}$ ,  $\text{Sn}^{4+}$  et  $\text{I}^-$  :

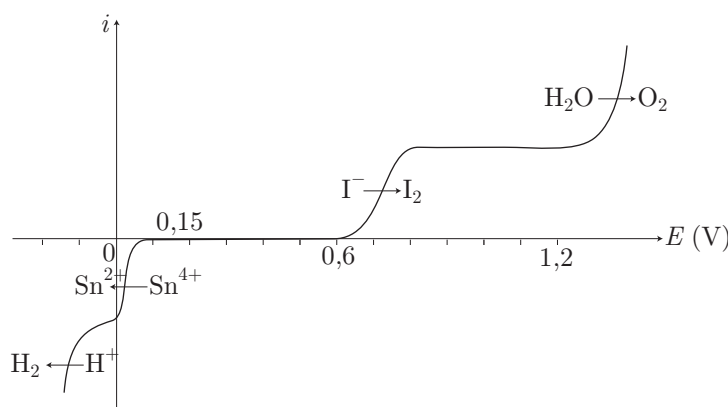


- (d) De même, les espèces  $\text{H}^+$ ,  $\text{Sn}^{4+}$ ,  $\text{I}^-$  et  $\text{H}_2\text{O}$  présentent les diagrammes suivants :



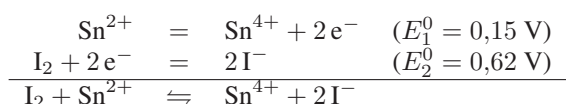
auquel cas une solution aqueuse qui contient  $\text{H}^+$ ,  $\text{Sn}^{4+}$ ,  $\text{I}^-$  et  $\text{H}_2\text{O}$  a pour diagramme intensité-potentiel :

**CORRIGÉS**



## 2. Titration suivi par potentiométrie à courant nul

- (a) La solution titrée contient initialement, outre les ions  $\text{H}^+$  (le pH vaut zéro), des ions  $\text{Sn}^{2+}$ , de concentration  $c_0$ , c'est-à-dire  $n_0 = c_0 V_0$  moles d'ions  $\text{Sn}^{2+}$ . En outre, un volume  $V$  de solution titrante introduit, dans le milieu réactionnel,  $n = c \times V$  moles de  $\text{I}_2$ . Ces deux réactifs sont susceptibles d'interagir conformément aux deux demi-équations :



d'où est issue l'équation-bilan de l'équilibre, dont la constante vaut :

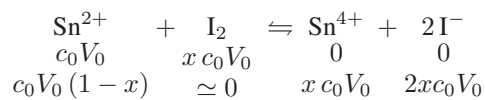
$$K^0 = 10^{\frac{2}{0,06} \times (E_2^0 - E_1^0)} = 10^{15,7} \gg 1$$

La valeur de cette constante justifie que la réaction soit considérée comme totale. En outre, l'équivalence est atteinte dès que :

$$\begin{aligned} n = n_0 & \Rightarrow c V_{\text{éq}} = c_0 V_0 \Rightarrow c = \frac{c_0 V_0}{V_{\text{éq}}} \\ & \Rightarrow c V = c_0 V_0 \times \frac{V}{V_{\text{éq}}} = c_0 V_0 \times x \end{aligned}$$

Étudions alors l'évolution du potentiel du milieu réactionnel :

- Avant l'équivalence ( $x < 1$ ) :



Aussi, la formule de Nernst appliquée au couple  $\text{Sn}^{4+}/\text{Sn}^{2+}$  fournit :

$$E = 0,15 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{Sn}^{4+}]}{[\text{Sn}^{2+}]} \right)$$

où :

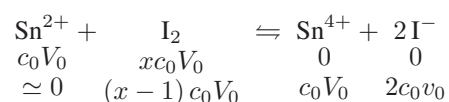
$$\begin{cases} [\text{Sn}^{4+}] = \frac{x c_0 V_0}{V + V_0} \\ [\text{Sn}^{2+}] = \frac{c_0 V_0 (1-x)}{V + V_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{[\text{Sn}^{4+}]}{[\text{Sn}^{2+}]} = \frac{x}{1-x}$$

$$\Rightarrow E = 0,15 + 0,03 \log \left( \frac{x}{1-x} \right)$$

En particulier, lorsque  $x = 0,5$  ;

$$E_{x=0,5} = 0,15 \text{ V}$$

- Après l'équivalence ( $x > 1$ ), le bilan de la réaction s'écrit :



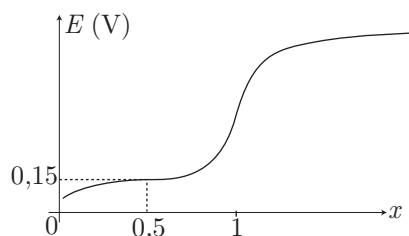
de sorte que :

$$\begin{cases} [\text{I}_2] = \frac{(x-1) c_0 V_0}{V + V_0} \\ [\text{I}^-] = \frac{2 c_0 V_0}{V + V_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2} = \frac{(x-1)(V + V_0)}{4 c_0 V_0}$$

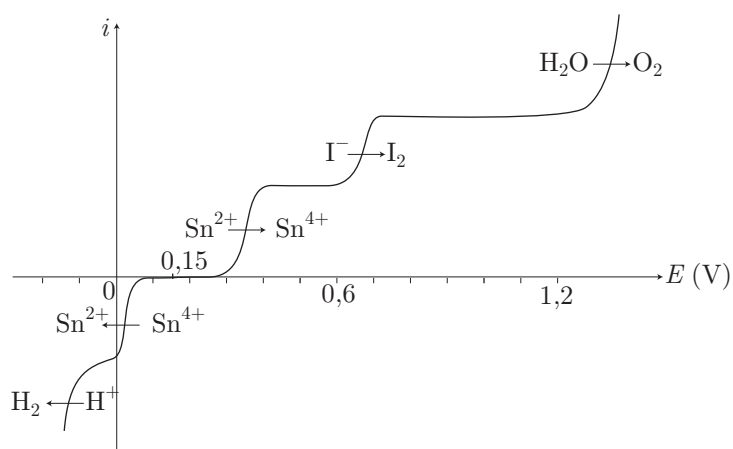
Ce faisant, la loi de Nernst appliquée au couple  $\text{I}_2/\text{I}^-$  conduit à :

$$E = 0,62 + 0,03 \log \left( \frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2} \right) \Rightarrow E = 0,62 + 0,03 \log \left[ \frac{(x-1)(V + V_0)}{4 c_0 V_0} \right]$$

L'ensemble de ces informations fournit l'allure de la courbe  $E(x)$  au cours du dosage :

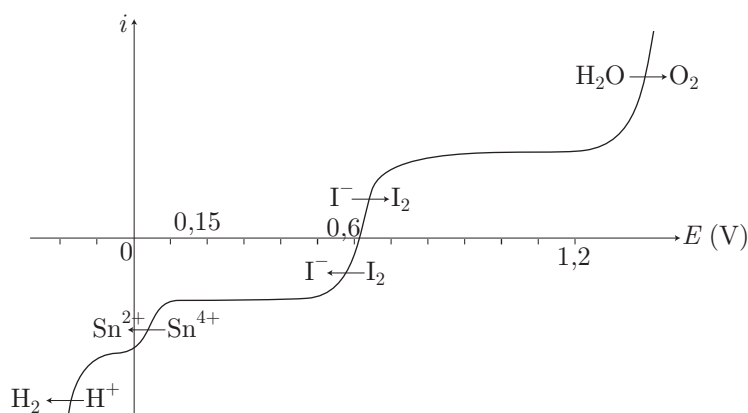


- (b) Avant l'équivalence, le milieu contient  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Sn}^{2+}$ ,  $\text{Sn}^{4+}$ ,  $\text{I}^-$  et  $\text{H}^+$  auquel cas la courbe  $i - E$  qui prévaut est celle de la question 1.(c) :



Ce diagramme montre que, pour un courant  $i$  nul, le potentiel n'est pas défini : il peut varier entre  $0,15 + 0,1 = 0,25$  V et  $0,15 - 0,1 = 0,05$  V, étant donné que les surtensions sont de l'ordre de 0,1 V. L'instabilité du potentiel ne permet donc pas d'obtenir expérimentalement la courbe  $E(x)$  dans ces conditions.

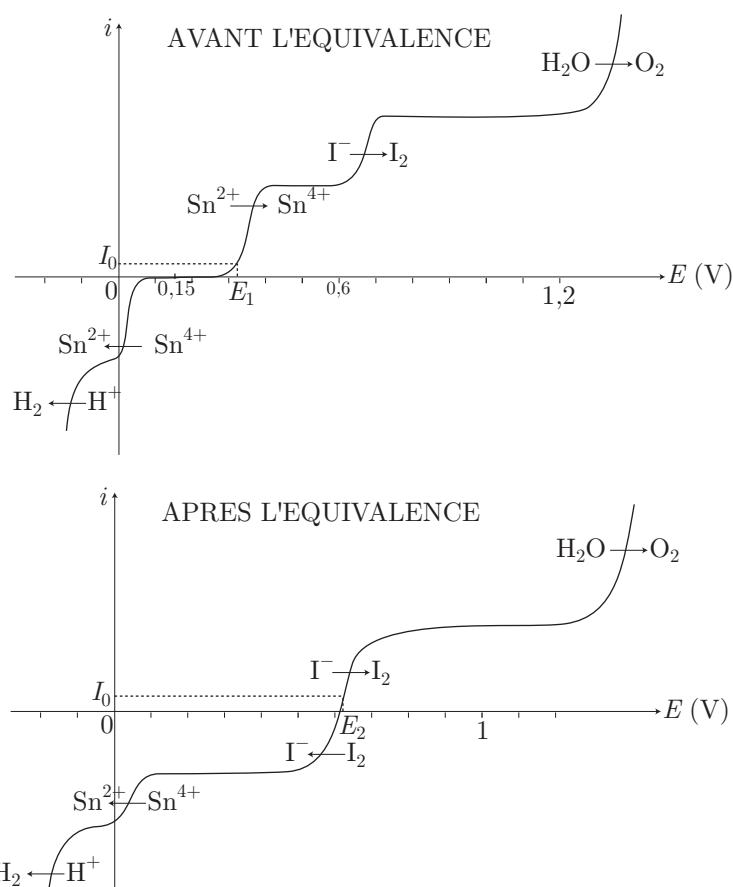
En revanche, après l'équivalence, le milieu contient les espèces  $I_2$ ,  $I^-$ ,  $Sn^{4+}$ ,  $H^+$  et  $H_2O$ , dont la courbe  $i - E$  a été tracée dans la question 1.(b) :



Ce diagramme montre que le potentiel du milieu est fixé par le couple  $I_2/I^-$ , considéré comme un système rapide.

### 3. Titrage suivi par potentiométrie à courant imposé

Lorsqu'un courant anodique  $I_0 \neq 0$  arrive sur l'électrode de platine, le diagramme  $i - E$  montre que le potentiel ( $E_1$  ou  $E_2$ ) prend une valeur définie par les courbes relatives aux couples  $Sn^{4+}/Sn^{2+}$  et  $I_2/I^-$  :



Ce faisant, le potentiel étant bien défini pour  $x < 1$  et pour  $x > 1$ , il devient possible de tracer expérimentalement la courbe de dosage  $E(x)$ .

## ● 242 ————— Concours E3A

1. L'approximation d'Ellingham consiste à négliger les variations de l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H^0$  et de l'entropie *standard*  $\Delta_r S^0$  d'une réaction, avec la température. Cette approximation demeure valable sur un large domaine de températures, à condition toutefois que :

- $\Delta_r C_p^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i C_p^0(X_i)$  soit assez faible ;
- qu'aucun changement d'état n'intervienne, sans quoi  $\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r S^0$  subissent une discontinuité à la température du changement d'état.

Dans le cadre de cette approximation, l'enthalpie libre *standard* de la réaction varie selon une loi affine :

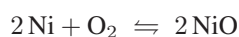
$$\Delta_r G^0(T) = \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0$$

dont la représentation graphique est un segment de droite où :

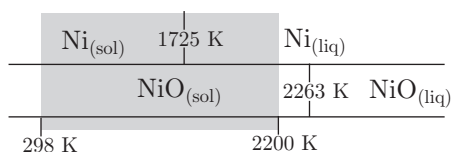
- l'ordonnée à l'origine  $\Delta_r G^0(T = 0)$  s'identifie à  $\Delta_r H^0$  ;
- la pente :  $\frac{d\Delta_r G^0}{dT}$  prend la valeur de  $-\Delta_r S^0$ .

Lors d'un changement d'état,  $\Delta_r H^0$  et  $\Delta_r S^0$  subissent une discontinuité, ce qui signifie que la pente d'une courbe d'Ellingham ( $-\Delta_r S^0$ ) subit également une discontinuité.

2. Rapportée à une mole de dioxygène, l'équation-bilan de l'oxydation du nickel s'écrit :



où les états physiques de Ni et de NiO dépendent de la température  $T$  :



Ce faisant, dans l'intervalle  $T \in [298 \text{ K}, 2200 \text{ K}]$ , il convient de distinguer deux cas :

- Pour  $T < T_{\text{fus}} = 1725 \text{ K}$ , le nickel et son oxyde apparaissent sous formes solides ; l'équation-bilan :



a pour enthalpie *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^0 &= 2 \Delta_f H^0 [\text{NiO}_{(\text{sol})}] - \Delta_f H^0 [\text{O}_2] - 2 \Delta_f H^0 [\text{Ni}_{(\text{sol})}] \\ &= -2 \times 244,6 = -489,2 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

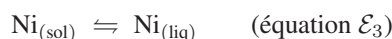
et pour entropie *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_r S_1^0 &= 2 S^0 [\text{NiO}_{(\text{sol})}] - S^0 [\text{O}_2] - 2 S^0 [\text{Ni}_{(\text{sol})}] \\ &= 2 \times 38 - 205,2 - 2 \times 29,9 = -189 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\Delta_r G_1^0(T) = -489,2 \cdot 10^3 + 189 \times T \text{ pour } T < T_{\text{fus}} = 1725 \text{ K}$$

- Pour  $T > T_{\text{fus}}$ , le nickel apparaît sous forme liquide, suite à la fusion qui se produit à la température  $T_{\text{fus}}$  :



Cette réaction a pour enthalpie *standard* :

$$\Delta_r H_3^0 = \Delta_{\text{fus}} H^0 = 17,6 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et pour entropie *standard* :

$$\Delta_r S_3^0 = \frac{\Delta_{\text{fus}} H^0}{T_{\text{fus}}} = \frac{17,6 \cdot 10^3}{1725} = 10,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$



son entropie *standard* vaut par conséquent :

$$\Delta_r G_3^0(T) = 17,6 \cdot 10^3 - 10,2 \times T \quad (\text{en } \text{J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

Ainsi, pour  $T > T_{\text{fus}}$ , l'oxydation du nickel est décrite par l'équation-bilan :



dont la combinaison linéaire avec l'équation ( $\mathcal{E}_2$ ) conduit à l'équation ( $\mathcal{E}_1$ ) :

$$\begin{array}{r} (\mathcal{E}_2) \quad 2\text{Ni}_{(\text{liq})} + \text{O}_2 \rightleftharpoons 2\text{NiO}_{(\text{sol})} \\ 2(\mathcal{E}_3) \quad \quad \quad 2\text{Ni}_{(\text{sol})} \rightleftharpoons 2\text{Ni}_{(\text{liq})} \\ \hline (\mathcal{E}_1) \quad 2\text{Ni}_{(\text{sol})} + \text{O}_2 \rightleftharpoons 2\text{NiO}_{(\text{sol})} \end{array}$$

De l'identité : ( $\mathcal{E}_1$ ) = ( $\mathcal{E}_2$ ) + 2( $\mathcal{E}_3$ ) découle alors l'expression  $\Delta_r G_2^0(T)$  de l'enthalpie libre *standard* de la réaction d'équation ( $\mathcal{E}_2$ ) :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_1^0(T) &= \Delta_r G_2^0(T) + 2\Delta_r G_3^0(T) \\ \Rightarrow \Delta_r G_2^0(T) &= \Delta_r G_1^0(T) - 2\Delta_r G_3^0(T) \\ \Rightarrow \Delta_r G_2^0(T) &= (-489,2 \cdot 10^3 + 189 \times T) \\ &\quad - 2 \times (17,6 \cdot 10^3 - 10,2 \times T) \end{aligned}$$

Finalement :

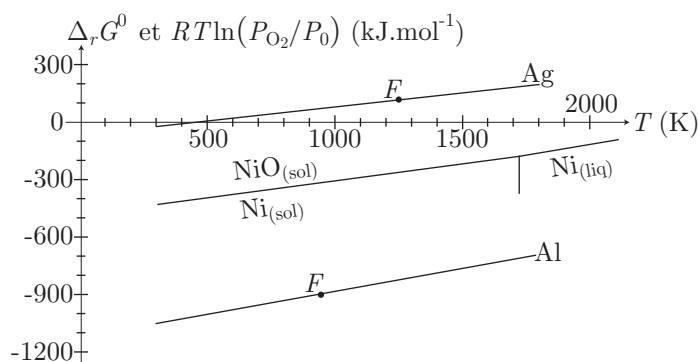
$$\Delta_r G_2^0(T) = -524,4 \cdot 10^3 + 209,4 \times T \quad (\text{pour } T > 1725 \text{ K})$$

Remarque – Les valeurs numériques de :

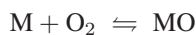
$$\Delta_r G_1^0(1725 \text{ K}) = -163,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ et } \Delta_r G_2^0(1725 \text{ K}) = -163,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

confirment la continuité de la courbe  $\Delta_r G^0(T)$  en  $T = T_{\text{fus}} = 1725 \text{ K}$ .

La courbe d'Ellingham du système Ni/NiO prend alors l'allure suivante :



3. Les réactions d'oxydation d'un métal M en son oxyde MO, notées :



sont exothermiques. Par conséquent, les lois de modération des équilibres chimiques permettent de prévoir :

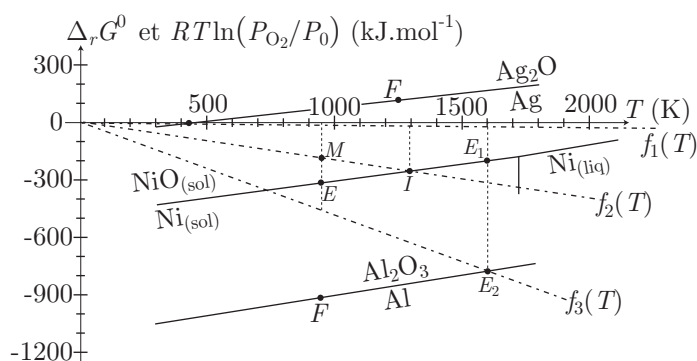
- qu'une augmentation de température provoque un déplacement de l'équilibre dans le sens où la réaction absorbe de la chaleur, c'est-à-dire vers la formation du métal M ;

- qu'une augmentation de pression induit un déplacement de l'équilibre dans le sens d'une diminution de pression dans le milieu réactionnel ; la seule espèce gazeuse étant  $O_2$ , ce déplacement est favorable à la formation de l'oxyde MO.

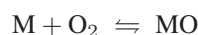
4. Soit  $f(T)$  la fonction qui s'identifie à  $RT \ln \left( \frac{P_{O_2}}{P_0} \right)$ .

- Lorsque  $P_{O_2} = 0,2 \text{ bar} = 0,2 \times P_0$  :  $f_1(T) = -13,4 \times T$  (en  $J \cdot \text{mol}^{-1}$ );
- Lorsque  $P_{O_2} = 10^{-10} \text{ bar} = 10^{-10} \times P_0$  :  $f_2(T) = -191,3 \times T$  (en  $J \cdot \text{mol}^{-1}$ ).

Sur le diagramme d'Ellingham, les courbes  $f_1(T)$  et  $f_2(T)$  présentent alors les allures suivantes :



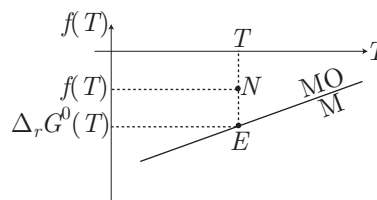
5. Soit  $N$  un point d'abscisse  $T$ , d'ordonnée  $f(T)$  et soit  $E$  celui d'abscisse  $T$  et d'ordonnées  $\Delta_r G^0(T)$ , pour une réaction d'oxydation d'équation-bilan :



L'affinité chimique de cette réaction vaut :

$$\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}^0(T) - RT \ln Q$$

où  $\mathcal{A}^0(T) = -\Delta_r G^0(T)$ , tandis que le quotient de réaction s'écrit :  $Q = \frac{P_0}{P_{O_2}}$ . Il s'ensuit que :



$$\mathcal{A}(T) = -\Delta_r G^0(T) + RT \ln \left( \frac{P_{O_2}}{P_0} \right) = f(T) - \Delta_r G^0(T)$$

Apparaissent ainsi trois cas :

- si  $N$  et  $E$  sont confondus,  $f(T) = \Delta_r G^0(T) \Rightarrow \mathcal{A}(T) = 0$ , ce qui suffit à montrer que les points de la droite  $\Delta_r G^0(T)$  sont représentatifs de l'équilibre de  $M$  avec  $MO$  ;
- si  $N$  est situé au dessus de  $E$ ,  $f(T) > \Delta_r G^0(T) \Rightarrow \mathcal{A}(T) > 0$ , si bien que l'équilibre est déplacé dans le sens de formation de  $MO$  (il s'agit du domaine d'existence de l'oxyde) ;
- lorsque  $N$  est situé en dessous de  $E$ ,  $f(T) < \Delta_r G^0(T) \Rightarrow \mathcal{A}(T) < 0$  montre que la réaction est déplacée dans le sens de formation de  $M$  ; il s'agit du domaine d'existence du métal.

L'application de cette étude au diagramme d'Ellingham représenté ci-dessus conduit, dans un premier temps, à remarquer l'existence d'un point d'intersection  $I$  entre les courbes  $f_2(T)$  et  $\Delta_r G^0(T)$  pour le nickel solide :

$$\begin{aligned}\Delta_r G_1^0(T_i) = f_2(T_i) &\Rightarrow -489,2 \cdot 10^3 + 189 \times T_i = -191,3 \times T_i \\ &\Rightarrow T_i = \frac{489,2 \cdot 10^3}{189 + 191,3} = 1\,286 \text{ K}\end{aligned}$$

Le diagramme d'Ellingham montre alors que :

- quelle que soit la température, la courbe  $f_2(T)$  est située en dessous de la courbe  $\Delta_r G^0(T)$  du système  $\text{Ag}_2\text{O}/\text{Ag}$  et au dessus de la courbe  $\text{Al}_2\text{O}_3/\text{Al}$ , ce qui signifie que :

pour  $T < 2\,000 \text{ K}$ , l'argent métallique est stable tandis que l'aluminium n'est stable que sous forme d'oxyde  $\text{Al}_2\text{O}_3$ .

- pour  $T < T_i$ , la courbe  $f_2(T)$  se trouve au dessus de la courbe  $\Delta_r G^0(T)$  du système  $\text{NiO}/\text{Ni}$ , tandis que la situation s'inverse dès que  $T > T_i$ . Par conséquent :

tant que  $T < 1\,286 \text{ K}$ , l'oxyde de nickel est la forme stable du nickel, lequel se présente sous forme métallique stable pour des températures supérieures à  $1\,286 \text{ K}$ .

6. (a) L'oxygène représente 20% de la composition de l'air qui, sous une pression  $P_0 = 1 \text{ bar}$ , soumet alors l'oxygène à une pression partielle  $P_{\text{O}_2} = 0,2 P_0$ . Dans ces conditions, l'équilibre entre  $\text{Ag}$  et  $\text{Ag}_2\text{O}$  dans l'air est représenté, graphiquement, par l'intersection des courbes  $f_1(T)$  et  $\Delta_r G^0(T)$  relative à  $\text{Ag}_2\text{O}/\text{Ag}$ , laquelle intersection est observée sur le graphique, pour  $T \simeq 425 \text{ K}$ .
- (b) L'équilibre entre un métal  $M$  et son oxyde est réalisé lorsque la courbe  $\Delta_r G^0(T)$  de  $\text{MO}/M$  coupe celle représentative de  $f(T) = RT \ln \left( \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} \right)$ , c'est-à-dire aux points  $E_1$  et  $E_2$  d'abscisse  $T = 1\,600 \text{ K}$  (voir le diagramme précédent).

- Pour le système  $\text{NiO}/\text{Ni}$ , cette intersection se produit lorsque, pour  $T = 1\,600 \text{ K}$  :

$$\begin{aligned}\Delta_r G_1^0(T) &= RT \ln \left( \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} \right) \\ &\Rightarrow -489,2 \cdot 10^3 + 189 \times 1\,600 = 8,31 \times 1\,600 \times \ln \left( \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} \right) \\ &\Rightarrow \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} = \exp(-14) \Rightarrow P_{\text{O}_2} = 8 \cdot 10^{-7} \text{ bar}\end{aligned}$$

Il suffit donc d'une très faible quantité de dioxygène pour provoquer, à  $1\,600 \text{ K}$ , la corrosion du nickel par l'air.

- Pour l'aluminium, le point d'intersection  $E_2$  de la courbe  $\Delta_r G^0(T)$  avec

$f_3(T)$  apparaît, sur le diagramme (pour  $T = 1\,600\text{ K}$ ), avec une ordonnée :

$$\begin{aligned} f_3(1\,600\text{ K}) &\simeq -775.10^3 \Rightarrow 8,31 \times 1\,600 \times \ln\left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}\right) = -775.10^3 \\ &\Rightarrow \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} = \exp(-58,3) \Rightarrow P_{\text{O}_2} \simeq 5.10^{-26}\text{ bar} \end{aligned}$$

L'ordre de grandeur de cette valeur numérique montre que l'aluminium est toujours oxydé en  $\text{Al}_2\text{O}_3$  à la température  $T = 1\,600\text{ K}$ .

7. À la température ambiante  $T = 298\text{ K}$ , l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G^0(298\text{ K})$  de la plupart des métaux est très inférieure à  $-10\text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ . C'est pourquoi la pression de corrosion (pression partielle  $P_{\text{O}_2}$  qui assure l'équilibre du métal avec son oxyde) vérifie :

$$\begin{aligned} RT \ln\left(\frac{P_{\text{O}_2}}{P_0}\right) &= \Delta_r G^0(298\text{ K}) \ll -10^4\text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \\ &\Rightarrow \frac{P_{\text{O}_2}}{P_0} \ll 1,8.10^{-2} \Rightarrow P_{\text{O}_2} \ll 0,018\text{ bar} \end{aligned}$$

Or, dans l'air, la pression partielle de dioxygène ( $P_{\text{O}_2} = 0,2\text{ bar}$ ) excède de beaucoup cette pression de corrosion. De ce fait, dans l'air, la plupart des métaux subissent la corrosion.

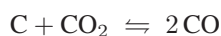
8. Protéger un métal de la corrosion liée à l'oxygène de l'air revient donc à isoler ce métal de l'air (puisque la pression partielle en dioxygène ne peut être maintenue en permanence inférieure à la pression de corrosion). Pour y parvenir :
- un vernis ou une peinture peuvent être déposés sur le métal ;
  - on peut laisser se former l'oxyde (ou provoquer son apparition) à la surface du métal ; si cet oxyde est imperméable à l'air (c'est le cas du zinc, de l'aluminium, du cuivre), on réalise ainsi la passivation du métal.

La deuxième méthode assure une meilleure protection que la première, qui reste vulnérable aux rayures pouvant endommager le revêtement protecteur.

## ● 243 ————— Concours ESTP - ENSAM

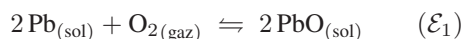
### 1. Étude préliminaire

- (a) Le coke apporte le carbone nécessaire à la synthèse de CO, selon l'équilibre de Boudouard :



- (b) Dans l'intervalle de températures auxquelles travaille le four (300 – 1 500 K), le plomb et son oxyde peuvent changer d'état :

- Pour  $T < 600\text{ K}$ , le plomb et son oxyde sont solides, auquel cas la réaction :



a pour enthalpie *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^0 &= 2 \Delta_f H^0 [\text{PbO}_{(\text{sol})}] - 2 \Delta_f H^0 [\text{Pb}_{(\text{sol})}] - \Delta_f H^0 [\text{O}_{2(\text{gaz})}] \\ &= -2 \times 217,9 = -435,8\text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

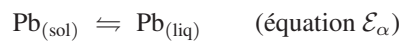
et pour entropie *standard* :

$$\begin{aligned}\Delta_r S_1^0 &= 2 S^0 [\text{PbO}_{(\text{sol})}] - 2 S^0 [\text{Pb}_{(\text{sol})}] - S^0 [\text{O}_{2(\text{gaz})}] \\ &= 2 \times 69,4 - 2 \times 64,9 - 205 = -196 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

Ainsi, son enthalpie libre *standard* vaut-elle :

$$\begin{aligned}\Delta_r G_1^0 &= \Delta_r H_1^0 - T \times \Delta_r S_1^0 \\ \Rightarrow \Delta_r G_1^0(T) &= -435,8 \cdot 10^3 + 196 \times T \quad (\text{en kJ} \cdot \text{mol}^{-1})\end{aligned}$$

- Pour  $600 \text{ K} < T < 1159 \text{ K}$ , PbO demeure solide tandis que le plomb se présente sous forme liquide, suite à sa fusion qui se produit à 600 K :



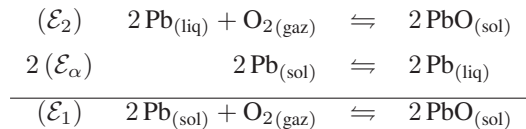
dont l'enthalpie *standard*  $\Delta_r H_\alpha^0$  s'identifie à  $\Delta_{\text{fus}} H^0(\text{Pb}) = 4,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  et dont l'entropie *standard* vaut :

$$\Delta_r S_\alpha^0 = \frac{\Delta_{\text{fus}} H^0(\text{Pb})}{T_{\text{fus}}(\text{Pb})} = \frac{4,8 \cdot 10^3}{600} = 8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Par conséquent, l'enthalpie libre *standard* de la réaction ( $\mathcal{E}_\alpha$ ) vaut :

$$\Delta_r G_\alpha^0(T) = 4,8 \cdot 10^3 - 8 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

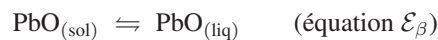
Or, les équations  $\mathcal{E}_1$ , ( $\mathcal{E}_2$ ) et ( $\mathcal{E}_\alpha$ ) sont linéairement dépendantes :



Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}\Delta_r G_1^0 &= \Delta_r G_2^0 + 2 \Delta_r G_\alpha^0 \Rightarrow \Delta_r G_2^0 = \Delta_r G_1^0 - 2 \Delta_r G_\alpha^0 \\ \Rightarrow \Delta_r G_2^0 &= (-435,8 \cdot 10^3 + 196 \times T) - 2 \times (4,8 \cdot 10^3 - 8 \times T) \\ \Rightarrow \Delta_r G_2^0(T) &= -445,4 \cdot 10^3 + 212 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})\end{aligned}$$

- lorsque  $T > 1159 \text{ K}$ , le plomb et son oxyde sont liquides étant donné la fusion que PbO subit à 1159 K :



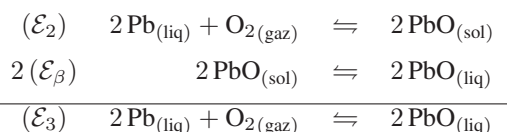
dont l'enthalpie *standard* vaut  $\Delta_{\text{fus}} H^0(\text{PbO}) = 11,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$  et dont l'entropie *standard* vaut :

$$\Delta_r S_\beta^0 = \frac{\Delta_{\text{fus}} H^0(\text{PbO})}{T_{\text{fus}}(\text{PbO})} = \frac{11,7 \cdot 10^3}{1159} = 10,09 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Son enthalpie libre *standard* vaut par conséquent :

$$\Delta_r G_\beta^0(T) = 11,7 \cdot 10^3 - 10,09 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

Quant à l'équation ( $\mathcal{E}_3$ ), elle se présente comme une combinaison linéaire des équations ( $\mathcal{E}_2$ ) et ( $\mathcal{E}_\beta$ ) :



De cette combinaison linéaire :  $(\mathcal{E}_3) = (\mathcal{E}_2) + 2 (\mathcal{E}_\beta)$ , il ressort que :

$$\begin{aligned}
 \Delta_r G_3^0 &= \Delta_r G_2^0 + 2 \Delta_r G_\beta^0 \\
 &= (-445,4 \cdot 10^3 + 212 \times T) + 2 \times (11,7 \cdot 10^3 - 10,09 \times T) \\
 \Rightarrow \Delta_r G_3^0(T) &= -422 \cdot 10^3 + 191,8 \times T \text{ (en J} \cdot \text{mol}^{-1}\text{)}
 \end{aligned}$$

Quant au carbone, il peut s'oxyder selon :

- l'équation  $(\mathcal{E}_4)$  :  $2 \text{C}_{(\text{sol})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons 2 \text{CO}_{(\text{gaz})}$ , dont l'enthalpie *standard* vaut :

$$\begin{aligned}
 \Delta_r H_4^0 &= 2 \Delta_f H^0(\text{CO}) - 2 \Delta_f H^0(\text{C}) - \Delta_f H^0(\text{O}_2) \\
 &= -2 \times 110,5 = -221 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}
 \end{aligned}$$

et dont l'entropie *standard* vaut :

$$\begin{aligned}
 \Delta_r S_4^0 &= 2 S^0(\text{CO}) - 2 S^0(\text{C}) - S^0(\text{O}_2) \\
 &= 2 \times 197,9 - 2 \times 5,7 - 205 = 179,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}
 \end{aligned}$$

Par conséquent, son enthalpie libre *standard* a pour expression :

$$\Delta_r G_4^0(T) = -221 \cdot 10^3 - 179,4 \times T \text{ (en J} \cdot \text{mol}^{-1}\text{)}$$

- ou selon l'équation  $(\mathcal{E}_5)$  :  $\text{C}_{(\text{sol})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons \text{CO}_{2(\text{gaz})}$ , d'enthalpie *standard* :

$$\Delta_r H_5^0 = \Delta_f H^0(\text{CO}_2) - \Delta_f H^0(\text{C}) - \Delta_f H^0(\text{O}_2) = -393,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et d'entropie *standard* :

$$\begin{aligned}
 \Delta_r S_5^0 &= S^0(\text{CO}_2) - S^0(\text{C}) - S^0(\text{O}_2) \\
 &= 213,8 - 5,7 - 205 = 3,1 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}
 \end{aligned}$$

Par suite, son enthalpie libre *standard* prend la valeur :

$$\Delta_r G_5^0(T) = -393,6 \cdot 10^3 - 3,1 \times T \text{ (en J} \cdot \text{mol}^{-1}\text{)}$$

(c) Les points remarquables du diagramme d'Ellingham sont :

- le point  $F_1$ , auquel se produit la fusion du plomb, c'est-à-dire à la température  $T_{\text{fus}}(\text{Pb}) = 600 \text{ K}$ , dont on vérifie que :

$$\begin{cases}
 \Delta_r G_1^0(600 \text{ K}) = -435,8 \cdot 10^3 + 196 \times 600 = -318,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\
 \Delta_r G_2^0(600 \text{ K}) = -445,4 \cdot 10^3 + 212 \times 600 = -318,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}
 \end{cases}$$

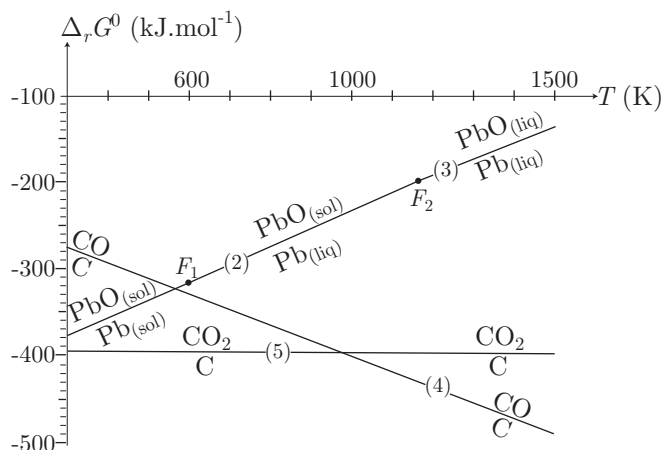
assure la continuité de la courbe  $\Delta_r G^0(T)$  en  $T = 600 \text{ K}$ .

- le point  $F_2$ , dont l'abscisse  $T_{\text{fus}}(\text{PbO}) = 1159 \text{ K}$  vérifie :

$$\begin{cases}
 \Delta_r G_2^0(1159 \text{ K}) = -445,4 \cdot 10^3 + 212 \times 1159 = -199,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\
 \Delta_r G_3^0(1159 \text{ K}) = -422 \cdot 10^3 + 191,8 \times 1159 = -199,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}
 \end{cases}$$

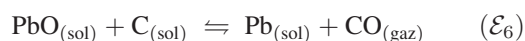
Ce faisant, on s'assure également de la continuité de la courbe  $\Delta_r G^0(T)$  lors de la fusion de PbO.

Le diagramme d'Ellingham du couple Pb/PbO et du carbone présente alors l'allure suivante :



## 2. Réduction directe par le carbone

(a) Considérons la réaction d'équation :



dont l'enthalpie *standard* vaut :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_6^0 &= \Delta_f H^0 [\text{CO}_{(\text{gaz})}] + \Delta_f H^0 [\text{Pb}_{(\text{sol})}] \\ &\quad - \Delta_f H^0 [\text{PbO}_{(\text{sol})}] - \Delta_f H^0 [\text{C}_{(\text{sol})}] \\ &= -110,5 + 217,9 = 107,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

et dont l'entropie *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_r S_6^0 &= S^0 [\text{CO}_{(\text{gaz})}] + S^0 [\text{Pb}_{(\text{sol})}] - S^0 [\text{PbO}_{(\text{sol})}] - S^0 [\text{C}_{(\text{sol})}] \\ &= 197,9 + 64,9 - 69,4 - 5,7 = 187,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

permet de retrouver l'expression de l'enthalpie libre *standard* :

$$\Delta_r G_6^0(T) = \Delta_r H_6^0 - T \times \Delta_r S_6^0 = 107,4 \cdot 10^3 - 187,7 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

Aussi, en notant  $\mathcal{A}_6^0(T) = -\Delta_r G_6^0(T)$  l'affinité chimique *standard* de la réaction ( $\mathcal{E}_6$ ) et  $Q$  son quotient de réaction :

$$Q = \frac{a_{\text{Pb}} \times a_{\text{CO}}}{a_{\text{PbO}} \times a_{\text{C}}} = a_{\text{CO}}$$

l'affinité chimique de la réaction ( $\mathcal{E}_6$ ) s'exprime par :

$$\mathcal{A}_6(T) = \mathcal{A}_6^0(T) - RT \ln Q = -\Delta_r G_6^0(T) - RT \ln a_{\text{CO}}$$

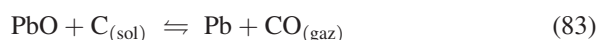
Notamment, dans les conditions *standard*, la pression partielle de CO vaut :

$$P_{\text{CO}} = P_0 = 1 \text{ bar} \Rightarrow a_{\text{CO}} = \frac{P_{\text{CO}}}{P_0} = 1 \Rightarrow \mathcal{A}_6(T) = -\Delta_r G_6^0(T)$$

Ainsi, la réaction ( $\mathcal{E}_6$ ) permet la réduction de PbO à condition que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_6^0(T) > 0 &\Rightarrow \Delta_r G_6^0(T) < 0 \Rightarrow 107,4 \cdot 10^3 - 187,7 \times T < 0 \\ &\Rightarrow T > \frac{107,4 \cdot 10^3}{187,7} = 572 \text{ K} \end{aligned}$$

- (b) Le diagramme d'Ellingham tracé précédemment confirme d'une part l'intersection des courbes  $\Delta_r G_1^0(T)$  et  $\Delta_r G_4^0(T)$  en  $T \simeq 570 \text{ K}$ . D'autre part, ce diagramme montre que, pour  $T$  supérieur à cette valeur, les domaines d'existence (ou de prédominance) de C et de PbO sont disjoints, quels que soient les états de Pb ou de son oxyde. Par conséquent, ce diagramme confirme qu'au delà de 572 K l'oxyde de plomb est réduit en carbone.
- (c) Étant donné que le plomb et son oxyde peuvent se présenter sous forme liquide ou solide, écrivons la réaction de réduction de PbO sous la forme générale :



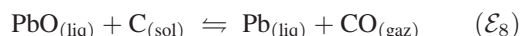
dont l'enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G^0(T)$  et le quotient de réaction  $Q = \frac{P_{\text{CO}}}{P_0}$  conduisent à l'affinité chimique :

$$\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}^0(T) - RT \ln Q = -\Delta_r G^0(T) - RT \ln \left( \frac{P_{\text{CO}}}{P_0} \right)$$

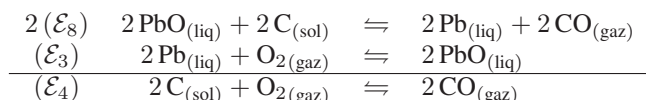
Ainsi, pour que la réaction d'équation (83) assure la réduction de PbO, il est nécessaire<sup>5</sup> que :

$$\mathcal{A}(T) > 0 \Rightarrow \ln \left( \frac{P_{\text{CO}}}{P_0} \right) < -\frac{\Delta_r G^0(T)}{RT} \quad (84)$$

- (d) Vers 1 323 K, le plomb et son oxyde sont liquides, en raison de quoi l'équation (83) de réduction de PbO s'écrit :



Les équations ( $\mathcal{E}_8$ ), ( $\mathcal{E}_3$ ) et ( $\mathcal{E}_4$ ) apparaissent alors linéairement dépendantes :



C'est pourquoi, de la relation :  $(\mathcal{E}_4) = 2(\mathcal{E}_8) + (\mathcal{E}_3)$  il découle que :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_4^0 &= 2\Delta_r G_8^0 + \Delta_r G_3^0 \Rightarrow \Delta_r G_8^0 = \frac{\Delta_r G_4^0 - \Delta_r G_3^0}{2} \\ &\Rightarrow \Delta_r G_8^0 = \frac{1}{2} \times (-221 \cdot 10^3 - 179,4 \times T) - \frac{1}{2} (-422 \cdot 10^3 + 191,8 \times T) \\ &\Rightarrow \Delta_r G_8^0 = 100,5 \cdot 10^3 - 185,6 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1}) \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Des limites cinétiques peuvent néanmoins ralentir, voire interdire, le déroulement de cette réaction, au demeurant possible du point de vue thermodynamique.



Dans ces conditions, la relation (84) devient :

$$\ln \left( \frac{P_{\text{CO}}}{P_0} \right) < - \frac{\Delta_r G_8^0(1323 \text{ K})}{RT} = \frac{-100,5 \cdot 10^3 + 185,6 \times 1323}{8,314 \times 1323}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{P_{\text{CO}}}{P_0} < \exp(13,19) \Rightarrow P_{\text{CO}} < 5,3 \cdot 10^5 \text{ bar}$$

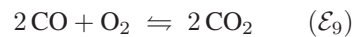
Cette condition, nécessairement vérifiée dans le haut fourneau, montre que la réduction de  $\text{PbO}_{(\text{liq})}$  s'y produit.

### 3. Réduction par le monoxyde de carbone

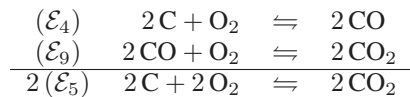
(a) Pour étudier la réduction de  $\text{PbO}$  par  $\text{CO}$  selon l'équation-bilan :



il convient de s'intéresser au couple  $\text{CO}/\text{CO}_2$  :



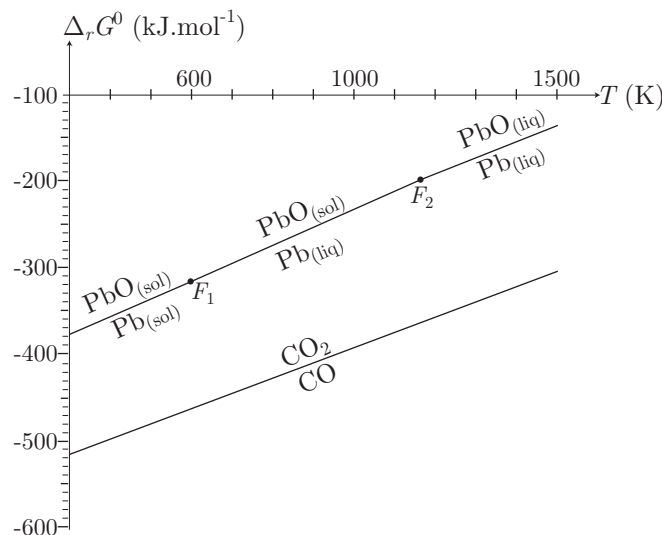
dont l'équation est linéairement dépendante des équations  $(\mathcal{E}_4)$  et  $(\mathcal{E}_5)$  :



De l'identité :  $(\mathcal{E}_4) + (\mathcal{E}_9) = 2 (\mathcal{E}_5)$ , il ressort alors que :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_9^0(T) &= 2 \Delta_r G_5^0(T) - \Delta_r G_4^0(T) \\ &= 2 \times (-393,6 \cdot 10^3 - 3,1 \times T) - (-221 \cdot 10^3 - 179,4 \times T) \\ &= -566,2 \cdot 10^3 + 173,2 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1}) \end{aligned}$$

La représentation du duagramme d'Ellingham des systèmes  $\text{Pb}/\text{PbO}$  et  $\text{CO}/\text{CO}_2$  :



**CORRIGÉS**

montre que les domaines d'existence (ou de prédominance) de CO et de PbO sont disjoints à toute température, ce qui signifie que la réduction de PbO par CO est thermodynamiquement possible.

(b) La réaction, d'équation ( $\mathcal{E}_7$ ) :



a pour enthalpie libre *standard*  $\Delta_r G_7^0(T)$  et pour quotient de réaction :

$$Q = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} \times \frac{a_{\text{Pb}}}{a_{\text{PbO}}}$$

Par conséquent, son affinité chimique vaut :

$$\mathcal{A}_7(T) = -\Delta_r G_7^0(T) - RT \ln Q$$

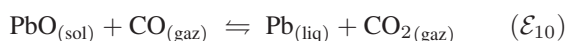
et son signe détermine la possibilité thermodynamique de la réduction de PbO par CO :

$$\mathcal{A}_7(T) > 0 \Rightarrow \ln Q < -\frac{\Delta_r G_7^0(T)}{RT}$$

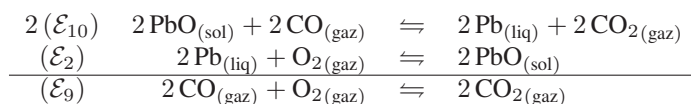
soit encore :

$$\ln \left( \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} \times \frac{a_{\text{Pb}}}{a_{\text{PbO}}} \right) < -\frac{\Delta_r G_7^0(T)}{RT} \quad (85)$$

(c) À la température de 773 K, le plomb est liquide et son oxyde est solide, de sorte que l'équation ( $\mathcal{E}_7$ ) s'écrit :



Or, cette équation apparaît comme une combinaison linéaire des équations ( $\mathcal{E}_2$ ) et ( $\mathcal{E}_9$ ) :



en raison de quoi :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_9^0 &= 2\Delta_r G_{10}^0 + \Delta_r G_2^0 \Rightarrow \Delta_r G_{10}^0 = \frac{\Delta_r G_9^0 - \Delta_r G_2^0}{2} \\ &\Rightarrow \Delta_r G_{10}^0 = \frac{1}{2} \times (-566,2 \cdot 10^3 + 173,2 \times T) \\ &\quad - \frac{1}{2} \times (-445,4 \cdot 10^3 + 212 \times T) \\ &\Rightarrow \Delta_r G_{10}^0(T) = -60,4 \cdot 10^3 - 19,4 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1}) \end{aligned}$$

Ce faisant, à la température  $T = 773$  K, la condition (85) s'écrit :

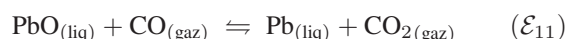
$$\ln \left( \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} \right) < \frac{60,4 \cdot 10^3 + 19,4 \times 773}{8,314 \times 773} = 11,73 \Rightarrow \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} < 12\,450$$

Du reste, l'énoncé précise que les fractions molaires en  $\text{CO}_2$  et en  $\text{CO}$  vérifient :

$$\begin{cases} x_{\text{CO}_2} < 21,9\% \\ x_{\text{CO}} > 7\% \end{cases} \Rightarrow \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} < \frac{21,9}{7} = 3,12$$

Cette valeur numérique confirme que, dans ces conditions, la réduction de  $\text{PbO}$  par  $\text{CO}$  est thermodynamiquement favorisée.

- (d) En revanche, à la température  $T = 1\,273\text{ K}$ , le plomb et son oxyde sont liquides, si bien que l'équation ( $\mathcal{E}_7$ ) devient :



et s'exprime ainsi comme combinaison linéaire des équations ( $\mathcal{E}_3$ ) et ( $\mathcal{E}_{11}$ ) :

$$\begin{array}{r} 2(\mathcal{E}_{11}) \quad 2\text{PbO}_{(\text{liq})} + 2\text{CO}_{(\text{gaz})} \rightleftharpoons 2\text{Pb}_{(\text{liq})} + 2\text{CO}_{2(\text{liq})} \\ (\mathcal{E}_3) \quad \quad 2\text{Pb}_{(\text{liq})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons 2\text{PbO}_{(\text{liq})} \\ \hline (\mathcal{E}_9) \quad \quad 2\text{CO}_{(\text{gaz})} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons 2\text{CO}_{2(\text{gaz})} \end{array}$$

Il s'ensuit que son enthalpie libre *standard* vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_9^0 &= 2\Delta_r G_{11}^0 + \Delta_r G_3^0 \Rightarrow \Delta_r G_{11}^0 = \frac{\Delta_r G_9^0 - \Delta_r G_3^0}{2} \\ &\Rightarrow \Delta_r G_{11}^0 = \frac{1}{2} \times (-566,2 \cdot 10^3 + 173,2 \times T) \\ &\quad - \frac{1}{2} \times (-422 \cdot 10^3 + 191,8 \times T) \\ &\Rightarrow \Delta_r G_{11}^0(T) = -72,1 \cdot 10^3 - 9,3 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1}) \end{aligned}$$

Par conséquent, la condition (85) devient, pour  $T = 1\,273\text{ K}$  :

$$\begin{aligned} \ln \left( \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} \times \frac{0,95}{0,054} \right) &< - \frac{\Delta_r G_{11}^0(1\,273\text{ K})}{RT} = \frac{72,1 \cdot 10^3 + 9,3 \times 1\,273}{8,314 \times 1\,273} \\ &\Rightarrow \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} < \frac{0,054}{0,95} \times \exp(7,9) = 158 \end{aligned}$$

Conformément aux indications de l'énoncé, les fractions molaires de  $\text{CO}_2$  et de  $\text{CO}$  vérifient :

$$\begin{cases} 14,5\% < x_{\text{CO}_2} < 21,9\% \\ 14\% > x_{\text{CO}} > 7\% \end{cases} \Rightarrow 1,0 = \frac{14,5}{14} < \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} < \frac{21,9}{7} = 3,1$$

Bien que les conditions de réduction de  $\text{PbO}$  soient plus contraignantes, elles demeurent respectées à  $T = 1\,273\text{ K}$ . En revanche, ces résultats suggèrent qu'une augmentation de la température ne favorise pas nécessairement la réduction de  $\text{PbO}$  par  $\text{CO}$ .

## ● 244 ————— Concours de l'agrégation

### I- Étude thermodynamique des oxydes de fer

- Rapportée à la consommation d'une mole de  $\text{O}_2$  (condition qu'il faut traduire comme imposant la valeur 1 au coefficient stœchiométrique de  $\text{O}_2$ ), les réactions d'oxydation du fer s'écrivent :



2. Compte tenu des valeurs numériques fournies par l'énoncé, les enthalpies *standard*  $\Delta_r H^0$ , les entropies *standard*  $\Delta_r S^0$  et les enthalpies libres *standard*  $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T \times \Delta_r S^0$  des réactions précédentes valent :

• pour la réaction ( $\alpha$ ) :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_\alpha^0 &= 2 \Delta_f H^0(\text{FeO}) - 2 \Delta_f H^0(\text{Fe}) - \Delta_f H^0(\text{O}_2) \\ &= -2 \times 259,6 \cdot 10^3 = -519,2 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S_\alpha^0 &= 2 S^0(\text{FeO}) - 2 S^0(\text{Fe}) - S^0(\text{O}_2) \\ &= 2 \times 67,1 - 2 \times 27,2 - 205 = -125,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\Delta_r G_\alpha^0(T) = -519,2 \cdot 10^3 + 125,2 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

• pour la réaction ( $\beta$ ) :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_\beta^0 &= 2 \Delta_f H^0(\text{Fe}_3\text{O}_4) - 6 \Delta_f H^0(\text{FeO}) - \Delta_f H^0(\text{O}_2) \\ &= -2 \times 1091,2 \cdot 10^3 + 6 \times 259,6 \cdot 10^3 = -624,8 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S_\beta^0 &= 2 S^0(\text{Fe}_3\text{O}_4) - 6 S^0(\text{FeO}) - S^0(\text{O}_2) \\ &= 2 \times 178,8 - 6 \times 67,1 - 205 = -250,0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$\Delta_r G_\beta^0 = -624,8 \cdot 10^3 + 250 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

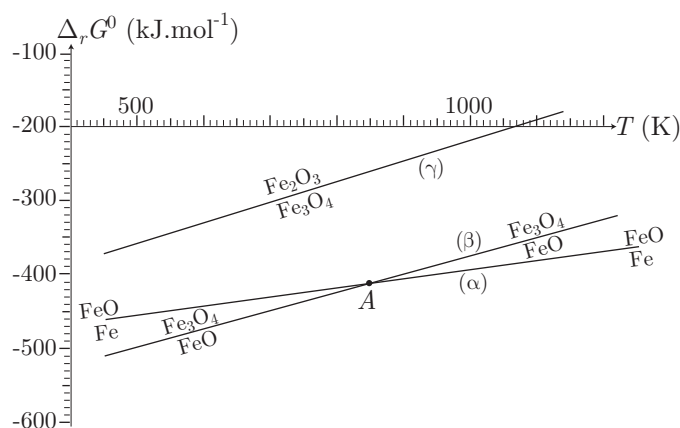
• pour la réaction ( $\gamma$ ) :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_\gamma^0 &= 6 \Delta_f H^0(\text{Fe}_2\text{O}_3) - 4 \Delta_f H^0(\text{Fe}_3\text{O}_4) - \Delta_f H^0(\text{O}_2) \\ &= -6 \times 810,9 \cdot 10^3 + 4 \times 1091,2 \cdot 10^3 = -500,6 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Delta_r S_\gamma^0 &= 6 S^0(\text{Fe}_2\text{O}_3) - 4 S^0(\text{Fe}_3\text{O}_4) - S^0(\text{O}_2) \\ &= 6 \times 106,5 - 4 \times 178,8 - 205 = -281,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

en raison de quoi :

$$\Delta_r G_\gamma^0(T) = -500,6 \cdot 10^3 + 281,2 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

3. Les expressions précédentes conduisent alors au diagramme ci-dessous :



4. Ce diagramme montre que les courbes  $(\alpha)$  et  $(\beta)$  se croisent pour une valeur  $T_1$  de  $T$  qui assure :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_{\alpha}^0(T_1) = \Delta_r G_{\beta}^0(T_1) &\Rightarrow -519,2 \cdot 10^3 + 125,2 \times T_1 = -624,8 \cdot 10^3 + 250 \times T_1 \\ &\Rightarrow T_1 = \frac{624,8 \cdot 10^3 - 519,2 \cdot 10^3}{250 - 125,2} = 846 \text{ K} \end{aligned}$$

À la température  $T_1$ , les espèces Fe, FeO et  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  sont en équilibre, conformément à l'équation :



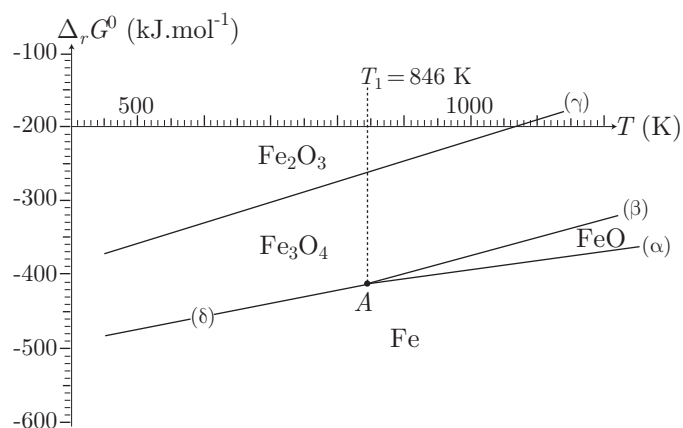
Pour  $T < T_1$ , deux domaines d'existence de FeO sont disjoints, ce qui signifie que FeO n'est pas stable. Aussi, pour  $T < T_1$ , seul l'équilibre entre Fe et  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  peut se réaliser :



En remarquant que les réactions  $(\delta)$ ,  $(\alpha)$  et  $(\beta)$  vérifient :  $(\delta) = \frac{3}{4}(\alpha) + \frac{1}{4}(\beta)$ , on peut directement déduire que l'enthalpie libre *standard* de la réaction  $(\delta)$  vaut :

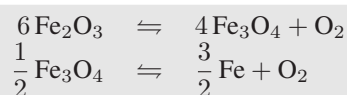
$$\begin{aligned} \Delta_r G_{\delta}^0 &= \frac{3}{4} \Delta_r G_{\alpha}^0 + \frac{1}{4} \Delta_r G_{\beta}^0 \\ &= \frac{3}{4} \times (-519,2 \cdot 10^3 + 125,2 \times T) + \frac{1}{4} \times (-624,8 \cdot 10^3 + 250 \times T) \\ &\Rightarrow \Delta_r G_{\delta}^0 = -545,6 \cdot 10^3 + 156,4 \times T \end{aligned}$$

En tenant compte du système  $\text{Fe}_3\text{O}_4/\text{Fe}$ , le diagramme d'Ellingham du fer prend l'allure suivante :

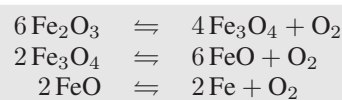


Ce diagramme montre que la réduction de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  provoque une succession de réactions :

(a) Pour  $T < T_1 = 846$  K :



(b) Pour  $T > T_1$  :



## II- Réduction des oxydes de fer par le monoxyde de carbone

### 1. Réduction de l'oxyde ferrique par CO

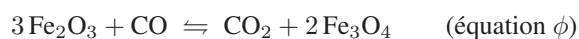
La réaction d'oxydation de CO, rapportée à une mole de  $\text{O}_2$ , est un équilibre :



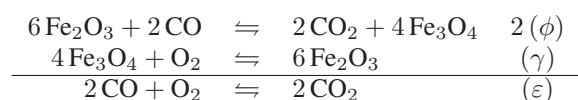
dont l'enthalpie libre *standard* est le double de celle donnée par l'énoncé :

$$\Delta_r G_\varepsilon^0(T) = -565,6 \cdot 10^3 + 173,6 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

tandis que la réduction de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  en  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  par CO est décrite par l'équation ( $\phi$ ) :



linéairement dépendante des équations ( $\gamma$ ) et ( $\varepsilon$ ) :



et vérifient l'équation :  $2(\phi) + (\gamma) = (\varepsilon)$ , auquel cas :

$$\begin{aligned}\Delta_r G_\varepsilon^0 &= 2 \Delta_r G_\phi^0 + \Delta_r G_\gamma^0 \Rightarrow \Delta_r G_\phi^0 = \frac{\Delta_r G_\varepsilon^0 - \Delta_r G_\gamma^0}{2} \\ \Rightarrow \Delta_r G_\phi^0 &= \frac{1}{2} \times (-565,6 \cdot 10^3 + 173,6 \times T) \\ &\quad - \frac{1}{2} \times (-500,6 \cdot 10^3 + 281,2 \times T) \\ \Rightarrow \Delta_r G_\phi^0 &= -32,5 \cdot 10^3 - 53,8 \times T \quad (\text{en J} \cdot \text{mol}^{-1})\end{aligned}$$

C'est pourquoi, à la température  $T_2 = 400^\circ\text{C} = 673 \text{ K}$ , l'affinité chimique *standard* de la réaction ( $\phi$ ) vaut :

$$\mathcal{A}_\phi^0 = -\Delta_r G_\phi^0(673 \text{ K}) = 68,7 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

En outre, le quotient de réaction ( $\phi$ ) s'exprime en fonction des pressions partielles  $P_{\text{CO}_2}$  et  $P_{\text{CO}}$  en  $\text{CO}_2$  et en  $\text{CO}$  :

$$Q = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}}$$

auquel cas l'affinité chimique de la réaction ( $\phi$ ) vaut :

$$\mathcal{A}_\phi = \mathcal{A}_\phi^0 - RT \ln Q = \mathcal{A}_\phi^0 + RT \ln \left( \frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}} \right)$$

La réduction de  $\text{Fe}_2\text{O}_3$  est alors déplacée vers la formation de  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  si  $\mathcal{A}_\phi$  est positif, c'est-à-dire lorsque :

$$\begin{aligned}\ln \left( \frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}} \right) &> -\frac{\mathcal{A}_\phi^0}{2RT} = -\frac{68,7 \cdot 10^3}{8,31 \times 673} = -12,28 \\ \Rightarrow \frac{P_{\text{CO}}}{P_{\text{CO}_2}} &> 4,6 \cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

Bien que cette réaction ne puisse être totale (il s'agit d'un équilibre), ce résultat montre qu'elle peut être favorable à la formation de  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  pour une pression partielle en  $\text{CO}$  très faible.

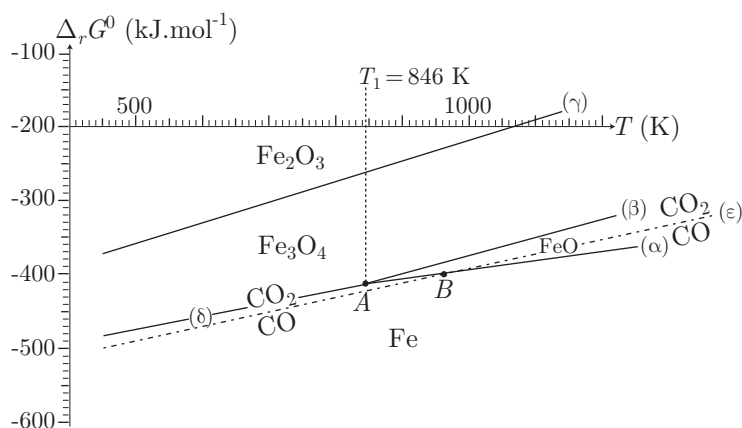
## 2. Réduction de l'oxyde magnétique

(a) Afin de connaître le pouvoir réducteur de  $\text{CO}$  sur  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ , il convient de superposer, au diagramme précédent, le diagramme d'Ellingham relatif à la réaction :



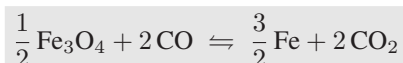
dont l'enthalpie libre *standard* a été exprimée précédemment :

$$\Delta_r G_\varepsilon^0(T) = -565,6 \cdot 10^3 + 173,6 \times T$$



Ce diagramme montre que les domaines d'existence de  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  et de  $\text{CO}$  sont disjoints pour toute température, en conséquence de quoi  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  peut être réduit par  $\text{CO}$ .

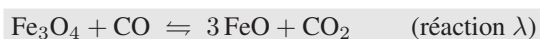
- Pour  $T < T_1$ ,  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  peut être directement réduit en  $\text{Fe}$  par  $\text{CO}$  :



- Pour  $T > T_1$ , il convient de distinguer deux cas imposés par l'intersection des courbes  $\Delta_r G_\alpha^0(T)$  et  $\Delta_r G_\varepsilon^0(T)$  en un point  $B$ , dont la température  $T_B$  vérifie :

$$\begin{aligned} \Delta_r G_\alpha^0(T_B) &= \Delta_r G_\varepsilon^0(T_B) \\ \Rightarrow -519,2 \cdot 10^3 + 125,2 T_B &= -565,6 \cdot 10^3 + 173,6 T_B \\ \Rightarrow T_B &= \frac{565,6 \cdot 10^3 - 519,2 \cdot 10^3}{173,6 - 125,2} = 959 \text{ K} \end{aligned}$$

Tant que la température demeure comprise entre  $T_1$  et  $T_B$ ,  $\text{CO}$  est susceptible de réduire  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  d'abord en  $\text{FeO}$  :



puis en  $\text{Fe}$  :



En revanche, si  $T > T_B$ ,  $\text{FeO}$  et  $\text{CO}$  présentent un domaine d'existence commun, ce qui traduit l'inertie de  $\text{FeO}$  à l'égard de  $\text{CO}$  ; seule la réaction ( $\lambda$ ) peut être observée.

- (b) La réaction d'oxydation de  $\text{CO}$  en  $\text{CO}_2$ , d'équation-bilan :

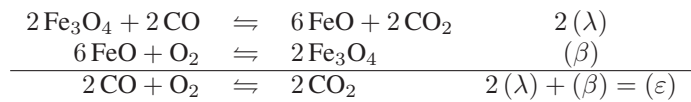


possède une enthalpie libre *standard* déjà évoquée précédemment :

$$\Delta_r G_\varepsilon^0(T) = -565,6 \cdot 10^3 + 173,6 \times T \quad (\text{en } \text{J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

Or, les équations ( $\lambda$ ), ( $\beta$ ) et ( $\varepsilon$ ) sont linéairement dépendantes :





Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
 \Delta_r G_\varepsilon^0 &= 2\Delta_r G_\lambda^0 + \Delta_r G_\beta^0 \Rightarrow \Delta_r G_\lambda^0 = \frac{\Delta_r G_\varepsilon^0 - \Delta_r G_\beta^0}{2} \\
 &\Rightarrow \Delta_r G_\lambda^0 = \frac{1}{2} (-565,6 \cdot 10^3 + 173,6 \times T) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (-624,8 \cdot 10^3 + 250 \times T) \\
 &\Rightarrow \Delta_r G_\lambda^0(T) = 29,6 \cdot 10^3 - 38,2 \times T
 \end{aligned}$$

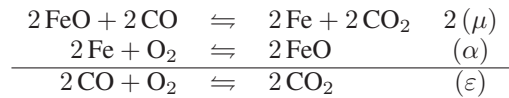
Ainsi, pour  $T = 650^\circ\text{C} = 923\text{ K}$  :

$$\Delta_r G_\lambda^0(923\text{ K}) = -5\,659\text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

L'équilibre ( $\lambda$ ) a donc pour constante :

$$K_\lambda^0 = \exp\left[-\frac{\Delta_r G_\lambda^0}{RT}\right] = \exp\left[\frac{5\,659}{8,31 \times 923}\right] \Rightarrow K_\lambda^0 \simeq 2$$

De même, les équations des réactions ( $\alpha$ ), ( $\mu$ ) et ( $\varepsilon$ ) sont linéairement dépendantes :



Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 \Delta_r G_\varepsilon^0 &= 2\Delta_r G_\mu^0 + \Delta_r G_\alpha^0 \Rightarrow \Delta_r G_\mu^0 = \frac{1}{2} (\Delta_r G_\varepsilon^0 - \Delta_r G_\alpha^0) \\
 &\Rightarrow \Delta_r G_\mu^0 = \frac{1}{2} (-565,6 \cdot 10^3 + 173,6 \times T) \\
 &\quad - \frac{1}{2} (-519,2 \cdot 10^3 + 125,2 \times T) \\
 &\Rightarrow \Delta_r G_\mu^0(T) = -23,2 \cdot 10^3 + 24,2 \times T
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\Delta_r G_\mu^0(923\text{ K}) = -863\text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La constante de la réaction ( $\mu$ ) vaut donc :

$$K_\mu^0 = \exp\left[-\frac{\Delta_r G_\mu^0}{RT}\right] = \exp\left[\frac{863}{8,31 \times 923}\right] \Rightarrow K_\mu^0 \simeq 1$$

À l'équilibre, la constante de la réaction ( $\lambda$ ) s'identifie à son quotient de réaction :

$$K_\lambda^0 = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} = \frac{x_{\text{CO}_2}}{x_{\text{CO}}}$$

où la pression partielle  $P_X$  d'un gaz X est proportionnelle à sa fraction molaire  $x_X$ . Par suite :

$$\frac{x_{\text{CO}_2}}{x_{\text{CO}}} = 2 \Rightarrow x_{\text{CO}_2} = 2 x_{\text{CO}}$$

Or, CO et CO<sub>2</sub> étant les seules espèces gazeuses qui interviennent dans l'équilibre ( $\lambda$ ), il s'ensuit que :

$$x_{\text{CO}_2} + x_{\text{CO}} = 1 \Rightarrow 3 x_{\text{CO}} = 1 \Rightarrow x_{\text{CO}} = \frac{1}{3} = 33,3\% \text{ pour } (\lambda)$$

De la même manière, la constante  $K_\mu^0$  s'identifie au quotient de réaction de l'équilibre ( $\mu$ ) :

$$K_\mu^0 = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} \Rightarrow 1 = \frac{x_{\text{CO}_2}}{x_{\text{CO}}} \Rightarrow x_{\text{CO}_2} = x_{\text{CO}}$$

de sorte que :

$$x_{\text{CO}_2} + x_{\text{CO}} = 1 \Rightarrow 2 x_{\text{CO}} = 1 \Rightarrow x_{\text{CO}} = \frac{1}{2} = 50\% \text{ pour } (\mu)$$

### 3. Intervention de l'équilibre de Boudouard

(a) La constante de l'équilibre :



se calcule directement à partir de la valeur de son enthalpie libre *standard* à  $T = 923 \text{ K}$  :

$$\Delta_r G_\rho^0(923 \text{ K}) = -170,6 \cdot 10^3 + 174,4 \times 923 = -9\,629 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

c'est-à-dire :

$$K_\rho^0 = \exp \left[ -\frac{\Delta_r G_\rho^0}{RT} \right] = \exp \left[ \frac{9\,629}{8,31 \times 923} \right] = 3,51$$

Par conséquent, les pressions partielles  $P_{\text{CO}_2}$  et  $P_{\text{CO}}$  de CO<sub>2</sub> et de CO vérifient, à l'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}^2} \times P_0 &= K_\rho^0 = 3,51 \text{ où } P_0 = 1 \text{ bar} \\ \Rightarrow P_{\text{CO}_2} &= 3,51 \times \frac{P_{\text{CO}}^2}{P_0} \text{ où } P_{\text{CO}_2} = x_{\text{CO}_2} P_0 \text{ et } P_{\text{CO}} = x_{\text{CO}} P_0 \\ \Rightarrow x_{\text{CO}_2} &= 3,51 \times x_{\text{CO}}^2 \end{aligned}$$

La présence exclusive de CO et de CO<sub>2</sub> dans la phase gazeuse impose, en outre :

$$x_{\text{CO}_2} + x_{\text{CO}} = 1 \Rightarrow 3,51 \times x_{\text{CO}}^2 + x_{\text{CO}} - 1 = 0$$

La seule solution positive de cette équation du second degré est alors :

$$x_{\text{CO}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \times 3,51}}{2 \times 3,51} \Rightarrow x_{\text{CO}} = 0,41 \Rightarrow x_{\text{CO}_2} = 0,59 \quad (86)$$

- (b) L'enthalpie libre *standard* de la réaction ( $\lambda$ ) :  $\Delta_r G_\lambda^0(923 \text{ K})$  donne l'affinité chimique *standard* de la réaction ( $\lambda$ ) :

$$\mathcal{A}_\lambda^0(923 \text{ K}) = -\Delta_r G_\lambda^0(923 \text{ K}) = 5\,659 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

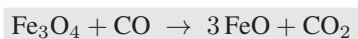
Aussi, le quotient de réaction de l'équilibre ( $\lambda$ ) :

$$Q_\lambda = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} = \frac{59}{41}$$

mène à l'affinité chimique de l'équilibre ( $\lambda$ ) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\lambda &= \mathcal{A}_\lambda^0(923 \text{ K}) - RT \ln Q_\lambda \\ &= 5\,659 - 8,31 \times 923 \times \ln\left(\frac{59}{41}\right) \\ &\Rightarrow \mathcal{A}_\lambda = 2\,867 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} > 0 \end{aligned}$$

Le signe ainsi obtenu permet de conclure que la réaction ( $\lambda$ ) produit FeO :



De même, l'affinité chimique de l'équilibre ( $\mu$ ) :

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^0(923 \text{ K}) - RT \ln Q_\mu \text{ où } Q_\mu = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} = \frac{59}{41}$$

se calcule aisément à l'aide de la valeur de :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\mu^0(923 \text{ K}) &= -\Delta_r G_\mu^0(923 \text{ K}) = 863 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \\ &\Rightarrow \mathcal{A}_\mu = 863 - 8,31 \times 923 \times \ln\left(\frac{59}{41}\right) \\ &\Rightarrow \mathcal{A}_\mu = -1\,929 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Le signe ainsi trouvé pour  $\mathcal{A}_\mu$  montre que la réduction de FeO en Fe n'a pas lieu.

#### 4. Influence de la température

- (a) Les équilibres suggérés par l'énoncé sont :



La constante  $K^0$  des équilibres dépend de la température  $T$  conformément à la loi :

$$\frac{d \ln K^0}{dT} = \frac{\Delta_r H^0}{RT^2}$$

ce qui permet de distinguer :

- l'équilibre ( $\rho$ ), pour lequel :

$$\Delta_r H_\rho^0 = -170,6 \cdot 10^3 \Rightarrow \frac{d \ln K_\rho^0}{dT} < 0$$

ce qui signifie que  $K_\rho^0 = \frac{P_{\text{CO}_2} P_0}{P_{\text{CO}}^2} = \frac{x_{\text{CO}_2}}{x_{\text{CO}}^2}$  est une fonction décroissante de la température. Par conséquent,  $x_{\text{CO}}$  augmente avec  $T$ .

- l'équilibre ( $\lambda$ ), pour lequel :

$$\Delta_r H_\lambda^0 = 29,6 \cdot 10^3 \Rightarrow \frac{d \ln K_\lambda^0}{dT} > 0$$

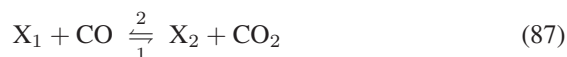
d'où il s'ensuit que  $K_\lambda^0 = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} = \frac{x_{\text{CO}_2}}{x_{\text{CO}}}$  croît avec la température, c'est-à-dire que  $x_{\text{CO}}$  diminue avec  $T$ .

- l'équilibre ( $\mu$ ), pour lequel :

$$\Delta_r H_\mu^0 = -23,2 \cdot 10^3 \Rightarrow \frac{d \ln K_\mu^0}{dT} < 0$$

en conséquence de quoi  $K_\mu^0 = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} = \frac{x_{\text{CO}_2}}{x_{\text{CO}}}$  diminue avec  $T$ , ce qui confirme que  $x_{\text{CO}}$  augmente avec la température.

- (b) Avant de tracer le diagramme suggéré par l'énoncé, il convient d'examiner les informations que fournirait un tel diagramme. Considérons, pour cela, un équilibre (il pourrait s'agir des équations  $\lambda$  et  $\mu$ ) entre les espèces solides  $X_1$  et  $X_2$  :



dont l'affinité chimique  $\mathcal{A}(T)$  dépend du quotient de réaction :

$$Q = \frac{P_{\text{CO}_2}}{P_{\text{CO}}} = \frac{x_{\text{CO}_2}}{x_{\text{CO}}}$$

selon :

$$\mathcal{A}(T) = \mathcal{A}^0(T) - RT \ln Q$$

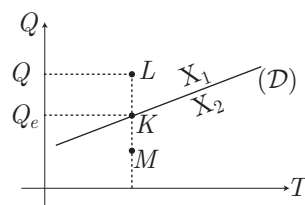
Lorsque l'équilibre est établi, le rapport  $Q$  prend une valeur  $Q_e$  qui annule  $\mathcal{A}(T)$  :

$$\mathcal{A}^0(T) = RT \ln Q_e \Rightarrow \mathcal{A}(T) = RT \ln \left( \frac{Q_e}{Q} \right)$$

Représentons alors le rapport  $Q_e(T)$ , lorsque l'équilibre (87) est établi, ce qui signifie que, pour une température  $T$  donnée, la courbe ( $\mathcal{D}$ ) contient les points  $K$  caractéristiques de l'équilibre.

En revanche, un point  $L$  situé au dessus de  $K$ , c'est-à-dire pour lequel  $Q$  est supérieur à  $Q_e$ , affectera à la réaction (87) une affinité chimique :

$$\mathcal{A}(T) = RT \times \ln \left( \frac{Q_e}{Q} \right) < 0 \text{ car } \frac{Q_e}{Q} < 1$$



ce qui signifie également que l'équilibre (87) sera déplacé dans le sens (2) de la formation de  $X_1$ . La situation s'inverse naturellement pour un point  $M$  situé en dessous de  $K$  :

$$Q < Q_e \Rightarrow \mathcal{A}(T) = RT \ln \left( \frac{Q_e}{Q} \right) > 0$$

Cette étude montre que la courbe ( $\mathcal{D}$ ) sépare deux domaines d'existence : celui de  $X_1$  au dessus de ( $\mathcal{D}$ ) et celui de  $X_2$  en dessous de ( $\mathcal{D}$ ).

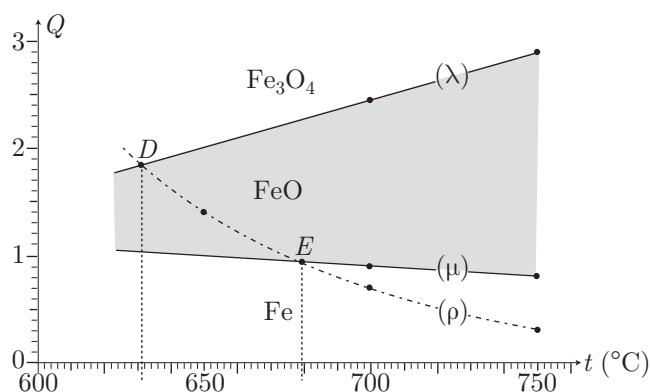
Par ailleurs, dans un système où les seules espèces gazeuses sont CO et  $\text{CO}_2$  :

$$x_{\text{CO}_2} + x_{\text{CO}} = 1 \Rightarrow x_{\text{CO}_2} = 1 - x_{\text{CO}} \Rightarrow Q = \frac{x_{\text{CO}_2}}{x_{\text{CO}}} = \frac{1}{x_{\text{CO}}} - 1$$

ce qui permet de calculer le rapport  $Q_e$  pour les équilibres ( $\rho$ ), ( $\lambda$ ) et ( $\mu$ ), non seulement avec les valeurs numériques fournies par l'énoncé, mais également pour celle de l'équilibre ( $\rho$ ) fournie par le résultat (86), à la température de  $650^\circ\text{C}$  :

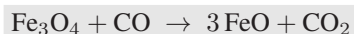
$$x_{\text{CO}} = 0,41 \Rightarrow Q_\rho = \frac{1}{0,41} - 1 = 1,44$$

	$Q(T = 650^\circ\text{C})$	$Q(T = 700^\circ\text{C})$	$Q(T = 750^\circ\text{C})$
( $\rho$ ) : $2 \text{CO} \rightleftharpoons \text{C} + \text{CO}_2$	1,44	0,70	0,30
( $\lambda$ ) : $\text{Fe}_3\text{O}_4/\text{FeO}$	-	2,45	2,92
( $\mu$ ) : $\text{FeO}/\text{Fe}$	-	0,91	0,79

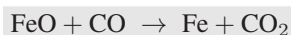


Ce diagramme montre que :

- pour  $t < t_D \simeq 630^\circ\text{C}$ , la courbe ( $\rho$ ) se trouve dans le domaine où  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  est stable, c'est-à-dire inerte vis-à-vis du mélange  $\text{CO} + \text{CO}_2$  ;
- pour les températures  $t$  comprises entre  $t_D (\simeq 630^\circ\text{C})$  et  $t_E (\simeq 680^\circ\text{C})$ , la courbe ( $\rho$ ) traverse le domaine de stabilité de  $\text{FeO}$  ; il s'y produit donc la réduction de  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  :



- pour des températures  $t > t_E \simeq 680^\circ\text{C}$ , la présence de la courbe ( $\rho$ ) dans le domaine d'existence de  $\text{Fe}$  révèle la réduction de  $\text{FeO}$  :



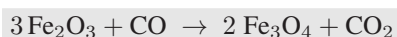
### III- Préparation des fontes et des aciers

1. L'étude précédente montre que la fabrication du fer requiert du minerai de fer, du carbone, de l'oxygène et produit du fer ainsi que des oxydes de carbone (CO et CO<sub>2</sub>). Ce bilan se retrouve dans le schéma de principe du haut fourneau :

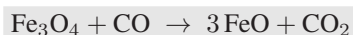
- En *A* sont introduits ; le minerai de fer (par exemple la magnétite Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>, l'hématite Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>), le coke (c'est-à-dire le carbone) et les fondants (qui entraînent l'élimination de la gangue dans laquelle sont pris les oxydes de fer du minerai).
- En *B*, l'oxygène est introduit sous forme d'air surchauffé.
- En *C* s'échappent les espèces gazeuses : N<sub>2</sub> (qui provient de l'air introduit), CO et CO<sub>2</sub> (issus de la réaction du carbone avec O<sub>2</sub>).
- En *E* la fonte est récupérée (il s'agit d'un mélange de fer et de carbone).
- en *D* s'écoule le laitier (surnageant la fonte), qui contient les matériaux de la gangue.

2. Compte tenu de l'étude thermodynamique réalisée précédemment, il est possible de décrire les réactions qui se produisent dans les différentes zones du haut fourneau :

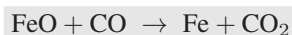
- **Zone 1** : pour des températures inférieures à 400°C :



- **Zone 2** : pour des températures inférieures à  $t_E \simeq 680^\circ\text{C}$ , la réduction de Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub> est observée :



- **Zone 3** : pour des températures supérieures à  $t_E \simeq 680^\circ\text{C}$ , la réduction de FeO s'opère :



- **Zone 4** : pour des températures supérieures à 1 000°C, le fer peut réagir directement avec le carbone pour fournir la cémentite Fe<sub>3</sub>C, principal constituant de la fonte :

