

Partie 1

Physique
Première période

Chapitre 1

Mécanique du point

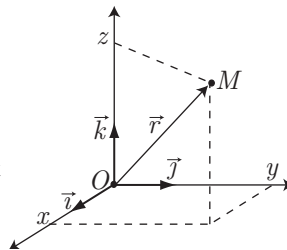
1.1 Cinématique

1.1.1 Coordonnées cartésiennes

La position d'un point matériel M est repérée par le vecteur :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

où O est l'origine du repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et (x, y, z) les coordonnées de M . Le vecteur vitesse de M est défini par :



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

dont les composantes v_x , v_y et v_z sont données par :


$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z}$$

L'accélération \vec{a} de M est enfin donnée par :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{v}_x \vec{i} + \dot{v}_y \vec{j} + \dot{v}_z \vec{k}$$

c'est-à-dire :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

 On considère un point matériel M dont le vecteur vitesse est donné, dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, par :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{t^2} \\ 1 + \frac{1}{t^2} \end{pmatrix}$$

où t désigne le temps, tel que pour $t = 1$ s le point M est confondu avec le point $A \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Représenter la trajectoire du point M dans le repère cartésien.

RÉPONSE Les composantes $v_x = 1 - \frac{1}{t^2}$ et $v_y = 1 + \frac{1}{t^2}$ conduisent à celles de la position de M :

$$v_x = \dot{x} \Rightarrow \dot{x} = 1 - \frac{1}{t^2} \Rightarrow x = t + \frac{1}{t} + A$$

et :

$$v_y = \dot{y} \Rightarrow \dot{y} = 1 + \frac{1}{t^2} \Rightarrow y = t - \frac{1}{t} + B$$

où A et B sont des constantes qui doivent rendre compte des valeurs de x et y pour $t = 1$ s :

$$\begin{aligned} x(t=1) = 2 &\Rightarrow 2 = 2 + A \Rightarrow A = 0 \\ y(t=1) = 0 &\Rightarrow 0 = 1 - 1 + B \Rightarrow B = 0 \end{aligned}$$

Finalement :

$$x = t + \frac{1}{t} \text{ et } y = t - \frac{1}{t}$$

Pour représenter graphiquement l'allure de la trajectoire, il convient de chercher une fonction $y(x)$. Pour cela, remarquons que :

$$\begin{cases} x + y = 2t \\ x - y = \frac{2}{t} \end{cases} \Rightarrow (x + y)(x - y) = 4 \Rightarrow x^2 - y^2 = 4$$

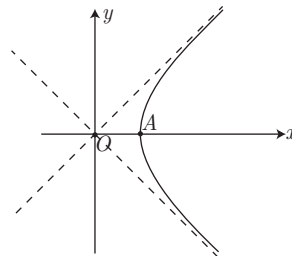
C'est pourquoi :

$$y = \pm \sqrt{x^2 - 4}$$

D'où il découle que :

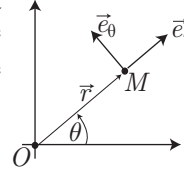
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y) = \lim_{x \rightarrow \infty} (\pm|x|)$$

ce qui montre que les droites d'équation $y = \pm|x|$ sont asymptotes de la trajectoire du point M , qui passe de surcroît par le point $A(2, 0)$:



1.1.2 Coordonnées polaires

La position d'un point matériel M peut aussi être repérée par la distance $r = OM$ qui sépare M de l'origine O d'un repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, et par la direction θ du vecteur \vec{OM} , donnée par celle d'un vecteur radial unitaire \vec{e}_r :



$$\vec{OM} = \vec{r} = r \vec{e}_r$$

Un vecteur orthoradial $\vec{e}_\theta \perp \vec{e}_r$ est alors défini (son sens est celui de l'augmentation de θ), tel que :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta \text{ et } \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

Par suite, le vecteur vitesse du point M est défini par :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

tandis que son vecteur accélération est donné par :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Cas d'un mouvement circulaire

Un mouvement circulaire est caractérisé par une distance r constante (la trajectoire est alors un cercle) :

$$\vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \text{ et } \vec{a} = -r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

c'est-à-dire, en introduisant la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$:

$$\vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta$$

dont la norme $v = r\omega$ admet pour dérivée :

$$\dot{v} = r \dot{\omega} = r \ddot{\theta}$$

d'où :

$$\vec{a} = -r\omega^2 \vec{e}_r + r \dot{\omega} \vec{e}_\theta = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r + \dot{v} \vec{e}_\theta$$

Un mouvement circulaire uniforme désigne un mouvement circulaire dont le vecteur vitesse présente une norme constante :

$$v = r\omega = \text{cte} \Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 r \vec{e}_r = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$$



Un point matériel décrit une trajectoire en forme de cardioïde, d'équation polaire :

$$r(\theta) = a(1 + \cos \theta) \quad (a : \text{constante positive})$$

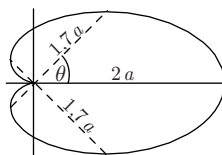
On notera $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ avec $\omega = \text{cte}$.

1. Représenter la trajectoire du point M .
2. Déterminer la vitesse du point en fonction de a , ω et θ , puis en déduire la longueur de la trajectoire.

RÉPONSE

1. Pour représenter la trajectoire, il suffit de calculer r pour quelques valeurs de θ :

θ	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
r	$2a$	$1,7a$	a	$0,3a$	0	$0,3a$	a	$1,7a$



2. En coordonnées polaires, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta = -a\omega \sin \theta \vec{e}_r + a\omega(1 + \cos \theta) \vec{e}_\theta \text{ avec } \omega = \dot{\theta}$$

auquel correspond la norme :

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{a^2\omega^2 \sin^2 \theta + a^2\omega^2 (1 + \cos \theta)^2} \\ &= a\omega \sqrt{2(1 + \cos \theta)} \end{aligned}$$

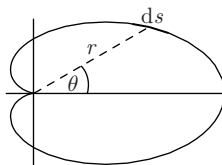
où l'on remarque que :

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos(2x) \Rightarrow 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \Rightarrow v = 2a\omega \left| \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|$$



N'oubliez pas la valeur absolue dans l'expression de $v = \|\vec{v}\|$ qui doit demeurer positif quelle que soit la valeur de θ .

Pendant la durée dt , le point M parcourt la distance $ds = v \times dt$ sur sa trajectoire :



C'est pourquoi :

$$ds = 2a \left| \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| \times \omega dt = 2a \left| \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| \times d\theta \text{ car } \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

Aussi, la totalité de la trajectoire étant décrite lorsque θ prend toutes les valeurs comprises entre 0 et 2π , la longueur totale de la trajectoire vaut :

$$s = 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right| d\theta = 4a \int_0^\pi \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) d\theta = 4a \times \left[2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]_0^\pi$$

soit, finalement :

$$s = 8a$$

1.2 Dynamique du point

1.2.1 Notion de forces

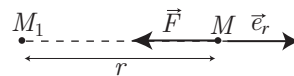
L'interaction entre deux points matériels est représentée formellement par un *vecteur force*, dont la norme indique l'intensité de l'interaction (en newtons). Parmi les nombreuses interactions qui existent, on rencontrera fréquemment :

Le poids \vec{P} d'un point de masse m au voisinage d'un astre qui crée localement un champ de gravitation \vec{g} vertical et descendant :

$$\vec{P} = m \vec{g}$$

La force de gravitation qu'un point M_1 (de masse m_1) exerce sur le point M (de masse m) :

$$\vec{F}_g = -\frac{G m_1 m}{r^2} \vec{e}_r$$



où $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ (S.I.) désigne la constante de gravitation universelle.

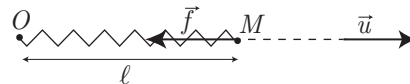
La force électrostatique qu'un point M_1 (de charge électrique q_1) exerce sur le point M (de charge q) :

$$\vec{F}_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_r$$

où $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9}$ (en $\text{A} \cdot \text{s}^4 \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{kg}^{-1}$) désigne la permittivité du vide.

La force de rappel d'un ressort de longueur ℓ , de longueur à vide ℓ_v (ou longueur au repos) et de constante de raideur k :

$$\vec{f} = -k(\ell - \ell_v) \vec{u} \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{OM}}{OM}$$



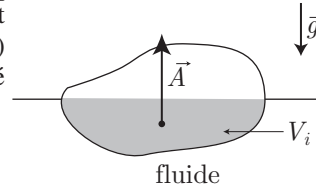
La force de frottement fluide subie par le point matériel qui se déplace avec un vecteur vitesse \vec{v} :

$$\vec{f} = -\lambda \vec{v}$$

où λ est une constante caractéristique du fluide dans lequel s'effectue le mouvement.

La poussée d'Archimède dont l'intensité A est égale au poids que le fluide (de masse volumique μ_f) posséderait s'il occupait le volume du corps V_i immergé dans le fluide :

$$\vec{A} = -\mu_f V_i \vec{g}$$



Définition 1 Un point matériel soumis à aucune force est dit *isolé*.

Un point matériel *pseudo-isolé* est soumis à une résultante \vec{F} de forces \vec{f}_i nulle :

$$\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i = \vec{0}$$

1.2.2 Lois de Newton

Principe de l'inertie

Si un point matériel est isolé ou pseudo-isolé, il existe un référentiel \mathcal{R}_g , appelé *référentiel galiléen*, dans lequel son vecteur vitesse est constant :

$$\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{c} \text{ t\^e dans } \mathcal{R}_g.$$

Loi fondamentale de la dynamique

La résultante \vec{F} des forces qui s'exercent sur un point matériel de masse m est responsable de son accélération \vec{a} ; il existe un référentiel (dit galiléen) dans lequel :

$$\vec{F} = m \vec{a}$$



Un point matériel M , de masse m , a pour coordonnées, dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ O associé à un référentiel galiléen :

$$x = a \cos(\omega t) \quad y = b \sin(\omega t) \quad z = b \times t$$

où a et b sont des constantes positives non nulles. Les propositions suivantes sont-elles exactes ?

1. À la date $t = 0$, la force \vec{F} qui s'exerce sur M est perpendiculaire à sa vitesse \vec{v} .
2. $\vec{F} \perp \vec{v}$ à toute date t .
3. $\vec{F} \perp \overrightarrow{OM}$ à toute date t .

RÉPONSE Les composantes du vecteur position \overrightarrow{OM} conduisent à celles de la vitesse \vec{v} de M et à celles de son accélération \vec{a} , d'où se déduit la force $\vec{F} = m \vec{a}$:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ b \sin(\omega t) \\ b t \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -a\omega \sin(\omega t) \\ b\omega \cos(\omega t) \\ b \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} -ma\omega^2 \cos(\omega t) \\ -mb\omega^2 \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

1. VRAI À la date $t = 0$, le produit scalaire $\vec{F} \cdot \vec{v}$ vaut :

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -ma\omega^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ b\omega \\ b \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \vec{F} \perp \vec{v}$$

2. FAUX À toute autre date t , ce produit scalaire vaut :

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \vec{v} &= ma^2\omega^3 \sin(\omega t) \cos(\omega t) - mb^2\omega^3 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \\ &= \frac{m\omega^3}{2} (a^2 - b^2) \sin(2\omega t) \end{aligned}$$

Excepté aux dates $t_k = k \frac{\pi}{2\omega}$, $k \in \mathbb{N}$, ce produit scalaire ne s'annule pas.

3. FAUX Le produit scalaire $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{F}$ vaut :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} \cdot \vec{F} &= -ma^2\omega^2 \cos^2(\omega t) - mb^2\omega^2 \sin^2(\omega t) \\ &= -m\omega^2 [a^2 \cos^2(\omega t) + b^2 \sin^2(\omega t)] \end{aligned}$$

Tous les termes du crochet de cette expression étant positifs, il s'ensuit que :

$$t \geq 0, \overrightarrow{OM} \cdot \vec{F} \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{OM} \not\perp \vec{F}$$

Principe des actions réciproques

Soient deux points M_1 et M_2 . Si le point M_1 exerce une force \vec{f}_{12} sur M_2 , alors M_2 exerce également une force \vec{f}_{21} sur M_1 , telle que :

- $\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$;
- les directions de \vec{f}_{12} et de \vec{f}_{21} sont les mêmes que celle de la droite (M_1M_2) .



1.3 Énergies

1.3.1 Travail et puissance d'une force

Définition 2 Au cours du déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ d'un point matériel soumis à une force \vec{F} , cette force exerce un travail élémentaire :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{\ell} \text{ (en joules)}$$

Au cours du déplacement du point matériel M entre deux points A et B , la force \vec{F} qui s'exerce sur M exerce un travail :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$$

Remarque – Si le champ de force est homogène (\vec{F} ne dépend pas de la position du point matériel), ce travail devient :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Le travail d'une force \vec{F} est *moteur* si $W_{AB}(\vec{F}) > 0$; dans le cas contraire, le travail est *résistant*.

Définition 3 Si, au cours d'une durée dt , une force \vec{F} exerce un travail δW , cette force délivre une puissance :

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} \text{ (en watts)}$$

La puissance d'une force \vec{F} qui s'exerce sur un point animé d'une vitesse \vec{v} est aussi donné par :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



La force de résistance exercée par l'eau sur les navires d'un certain modèle, s'écrit :

$$F = k v^3$$

v étant la vitesse du navire et k une constante.

1. Calculer k , sachant que le moteur fournit une puissance de 4 MW et que la vitesse limite atteinte est de $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.
2. On arrête le moteur. Quel est le temps nécessaire pour que la vitesse passe de $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ à $16 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

On donne la masse du navire : $m = 12 \times 10^6 \text{ kg}$.

RÉPONSE

1. Outre son poids et la poussée d'Archimède qui se compensent, le navire est soumis à la force de propulsion \vec{f}_p et à la résistance \vec{f} de l'eau. Son accélération $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_p + \vec{f} \quad (1)$$

Lorsque la vitesse limite $v_\ell = 18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ est atteinte, le navire se déplace à vitesse constante, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \vec{0} = \vec{f}_p + \vec{f} &\Rightarrow \vec{f}_p = -\vec{f} \Rightarrow f_p = f \text{ avec } f_p = \|\vec{f}_p\| \text{ et } f = \|\vec{f}\| \\ &\Rightarrow f_p = k \times v_\ell^3 \end{aligned}$$

Cette force de propulsion provient, du reste, d'un moteur qui fournit une puissance $\mathcal{P} = 4 \times 10^6 \text{ W}$. Aussi, en admettant que toute cette puissance soit transmise sous forme de propulsion, elle correspond aussi à la puissance de la force \vec{f}_p au demeurant définie par :

$$\mathcal{P} = \vec{f}_p \cdot \vec{v}_\ell = f_p \times v_\ell$$

car \vec{f}_p et \vec{v}_ℓ ont même sens et même direction. Il s'ensuit que :

$$f_p = \frac{\mathcal{P}}{v_\ell} \Rightarrow \frac{\mathcal{P}}{v_\ell} = k \times v_\ell^3 \Rightarrow k = \frac{\mathcal{P}}{v_\ell^4}$$

avec :

$$v_\ell = 18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow k = \frac{4 \times 10^6}{(5)^4} \Rightarrow k = 6400 \text{ kg} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$$

2. En arrêtant le moteur, on supprime la force de propulsion, auquel cas la loi (1) devient :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

où \vec{f} est une force de frottement opposée au déplacement du navire, ce qui signifie aussi qu'en notant \vec{u} un vecteur unitaire directeur de \vec{v} :

$$\begin{aligned} \vec{v} = v \times \vec{u} &\Rightarrow \vec{f} = -kv^3 \vec{u} \\ &\Rightarrow m \frac{dv}{dt} \vec{u} = -kv^3 \vec{u} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{v^3} \frac{dv}{dt} = \frac{k}{m} \end{aligned}$$

dans laquelle on remarque que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \right) = -\frac{2}{v^3} \times \frac{dv}{dt} \Rightarrow -\frac{1}{v^3} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \right)$$

L'équation différentielle en v devient ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \right) = \frac{2k}{m}$$

et admet pour solution :

$$\frac{1}{v^2} = \frac{2k}{m} t + A \Rightarrow t = \frac{m}{2k} \times \frac{1}{v^2} - \frac{mA}{2k}$$

où A est une constante.

Appelons t_ℓ la date à laquelle le moteur est arrêté (la vitesse du navire vaut v_ℓ) et soit t_1 la date à laquelle la vitesse du navire atteint la valeur $v_1 = 16 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 4,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La loi précédente fournit :

$$t_1 = \frac{m}{2k} \times \frac{1}{v_1^2} - \frac{mA}{2k} \text{ et } t_\ell = \frac{m}{2k} \times \frac{1}{v_\ell^2} - \frac{mA}{2k}$$

ce qui signifie que pour passer de v_ℓ à v_1 , le navire met un temps :

$$\Delta t = t_1 - t_\ell = \frac{m}{2k} \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_\ell^2} \right) = \frac{12 \times 10^6}{2 \times 6400} \times \left[\frac{1}{(4,44)^2} - \frac{1}{(5)^2} \right] \Rightarrow \Delta t = 10 \text{ s}$$

1.3.2 Théorème de l'énergie cinétique

Définition 4 L'énergie cinétique E_c d'un point matériel M de masse m , animé d'une vitesse v , est définie par :


$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

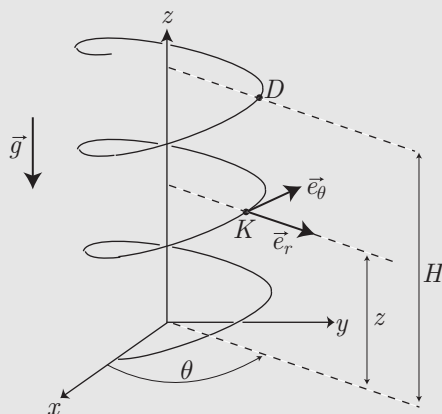
Si, au cours d'un déplacement élémentaire, M est soumis à une force \vec{F} qui exerce un travail δW , son énergie cinétique varie de la quantité :

$$dE_c = \delta W$$

Cette identité se généralise au cas d'un déplacement entre deux points A et B où la vitesse de M vaut respectivement v_A et v_B :

$$\Delta E_c = W_{AB}(\vec{F}) \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = W_{AB}(\vec{F})$$

 Un anneau, assimilé à un point matériel, est enfilé sur une hélice d'équation polaire $r = a$ et $z = h \times \theta$. Il est abandonné sans vitesse initiale au point d'altitude H .



En négligeant les forces de frottement, calculer le temps qu'il met pour arriver au point d'altitude $z = 0$, sous l'action de son poids.

RÉPONSE L'anneau A se déplace selon une trajectoire décrite par $r = a$ et $z = h \times \theta$, auquel cas son vecteur vitesse a pour composantes, en coordonnées cylindro-polaires :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z \text{ car } r = a = \text{cte} \\ \Rightarrow v^2 &= a^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2\end{aligned}$$

avec :

$$\theta = \frac{z}{h} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{z}}{h} \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \times \frac{a^2 + h^2}{h^2}$$

Entre le point de départ D (à l'altitude H) et un point K d'altitude z , l'anneau est soumis à son poids \vec{P} et à la réaction \vec{R} de l'hélice. Or, cette dernière étant toujours perpendiculaire au vecteur déplacement de l'anneau, seul le poids exerce un travail non nul :

$$W_{DK}(\vec{P}) = mg(H - z)$$

Conformément au théorème de l'énergie cinétique, la vitesse de A varie de $v_D = 0$ à $v_K = v$:

$$\begin{aligned}\Delta E_c = W_{DK}(\vec{F}) &\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = mg(H - z) \\ \Rightarrow \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 &= \frac{2gh^2}{a^2 + h^2} (H - z)\end{aligned}$$

et, puisque z décroît au cours de la chute :

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{\frac{2gh^2}{a^2 + h^2}} \sqrt{H - z} \Rightarrow dt = -\sqrt{\frac{a^2 + h^2}{2gh^2}} \frac{dz}{\sqrt{H - z}}$$

Étant donné que $z = H$ à la date $t = 0$ et que $z = 0$ au bout d'un temps τ , il s'ensuit que :

$$\int_0^\tau dt = \sqrt{\frac{a^2 + h^2}{2gh^2}} \int_H^0 \frac{-dz}{\sqrt{H - z}} = \sqrt{\frac{a^2 + h^2}{2gh^2}} \times [2\sqrt{H - z}]_H^0$$

d'où :

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}} \times \frac{a^2 + h^2}{h^2}$$

1.3.3 Énergie potentielle

1.3.3.1 Force conservative et énergie potentielle

Définition 5 Une force \vec{F} est dite conservative si le travail élémentaire qu'elle fournit provoque une variation d'une fonction E_p , alors appelée énergie potentielle :

$$\vec{F} \text{ conservative} \Leftrightarrow \delta W(\vec{F}) = -dE_p$$

Dans le cas d'un problème à une dimension, X , $\vec{F} = F(X) \vec{u}$ et l'énergie potentielle E_p associée à \vec{F} est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dE_p}{dX} = -F(X)$$

Exemples d'énergies potentielles

- Au poids \vec{P} est associée une énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = mgz + \text{cte}$$

- À la force de rappel $\vec{F} = -k(\ell - \ell_v) \vec{u} = -kX \vec{u}$ correspond l'énergie potentielle élastique :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k X^2 = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_v)^2$$

- Toute force \vec{F} perpendiculaire au déplacement $d\vec{X} = dX \vec{u}$ est associée à une énergie potentielle constante, que l'on choisit arbitrairement nulle :

$$\vec{F} \perp d\vec{X} \Rightarrow E_p = 0$$

1.3.3.2 Position d'équilibre et stabilité

Dans un problème à une dimension (X), la position repérée par X_0 est une position d'équilibre si elle correspond à un *extremum* d'énergie potentielle :

$$\text{équilibre en } X_0 \Leftrightarrow \left. \frac{dE_p}{dX} \right|_{X_0} = 0$$

Si cet *extremum* est un minimum local pour la fonction $E_p(X)$, l'équilibre est stable, tandis qu'il est instable si $E_p(X_0)$ est *maximum* :

$$\left. \frac{d^2 E_p}{dX^2} \right|_{X_0} > 0 \Rightarrow E_p(X_0) \text{ minimum} \Rightarrow \text{équilibre stable ;}$$


$$\left. \frac{d^2 E_p}{dX^2} \right|_{X_0} < 0 \Rightarrow E_p(X_0) \text{ maximum} \Rightarrow \text{équilibre instable.}$$

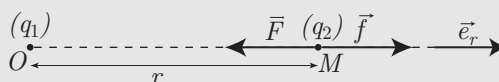
Au voisinage d'une position d'équilibre X_0 , un point matériel de masse m peut effectuer des oscillations de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2 E_p}{dX^2} \right|_{X_0}}$$

⚠ Si le point matériel est contraint d'effectuer des mouvements de rotation de rayon R , la pulsation des oscillations qui se produisent autour de l'angle θ_0 d'équilibre stable vaut :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{mR^2} \left. \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_0}}$$

 Deux particules chargées sont situées sur un axe fixe, de vecteur unitaire directeur \vec{e}_r . La particule de charge q_1 est immobile en un point O , tandis que la particule de charge q_2 occupe la position d'un point M tel que $\vec{OM} = r \vec{e}_r$, où r est la distance (variable) entre les deux charges. La particule de charge q_2 est soumise à deux forces : la force d'interaction électrostatique $\vec{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ et une force constante $\vec{F} = F \vec{e}_r$, dont l'origine n'est pas précisée ici :



1. Exprimer, à une constante près, l'énergie potentielle associée à chacune des forces \vec{f} et \vec{F} . En déduire l'expression de l'énergie potentielle totale de M .
2. Déterminer, en fonction de F , q_1 et q_2 , la position d'équilibre de M .
3. À quelle condition sur q_1 et q_2 cet équilibre est-il stable ?
4. Le cas échéant, établir l'expression de la pulsation ω des petites oscillations qui peuvent se produire autour de la position d'équilibre stable, en fonction de F , q_1 , q_2 et m (masse de M).

RÉPONSE

1. La force $\vec{f} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ ne dépend que du paramètre r , auquel cas elle est associée à une énergie potentielle $E_{p1}(r)$ telle que :

$$\frac{dE_{p1}}{dr} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow E_{p1}(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} + C_1$$

où C_1 est une constante d'intégration.

De même, à la force constante $\vec{F} = F \vec{e}_r$ est associée une énergie potentielle $E_{p2}(r)$ telle que :

$$\frac{dE_{p2}}{dr} = -F \Rightarrow E_{p2}(r) = -F \times r + C_2$$

où C_2 est une nouvelle constante d'intégration.

Par suite, en définissant par $C = C_1 + C_2$ une constante, l'énergie potentielle totale de M vaut :

$$E_p(r) = E_{p1}(r) + E_{p2}(r) \Rightarrow E_p(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r} - F \times r + C$$

2. S'il existe une position d'équilibre pour M , elle correspond à une valeur r_e de r qui affecte à $e_p(r)$ une valeur *extremum*, c'est-à-dire :

$$\left. \frac{dE_p}{dr} \right|_{r_e} = 0 \Rightarrow -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_e^2} - F = 0 \Rightarrow r_e = \sqrt{\frac{-q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 F}} \quad (2)$$

3. L'équilibre précédemment mentionné est stable si, en $r = r_e$, la fonction $E_p(r)$ est *minimum*, c'est-à-dire si :

$$\left. \frac{d^2 E_p}{dr^2} \right|_{r_e} > 0 \Rightarrow \frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0 r_e^3} > 0 \Rightarrow q_1 \times q_2 > 0$$

4. La pulsation des oscillations qui se produisent autour de la position d'équilibre est donnée par :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2 E_p}{dr^2} \right|_{r_e}} = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{2\pi m \epsilon_0 r_e^3}}$$

où l'expression de r_e est fournie par le résultat (2) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_e} &= \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 F}{q_1 q_2}} \Rightarrow \frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0 r_e^3} = \frac{q_1 q_2}{2\pi\epsilon_0} \sqrt{\frac{64 (\pi\epsilon_0 F)^3}{(q_1 q_2)^3}} \\ &= \sqrt{\frac{16\pi\epsilon_0 F^3}{q_1 q_2}} \\ \Rightarrow \omega &= \left(-\frac{16\pi\epsilon_0 F^3}{m^2 q_1 q_2} \right)^{1/4} \end{aligned}$$

1.3.4 Énergie mécanique

Définition 6 On appelle *énergie mécanique* E_m d'un point matériel la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie potentielle E_p :

$$E_m = E_c + E_p$$

Si le point matériel est soumis à une force *dissipative* $\vec{F}_{\text{dis.}}$, son énergie mécanique varie d'une quantité :

$$\Delta E_m = W(\vec{F}_{\text{dis.}})$$

Remarque – Un point M soumis à des forces exclusivement conservatives possède une énergie mécanique constante :

$$E_m = \text{cte si } \vec{F} = \vec{F}_{\text{conservative}}$$

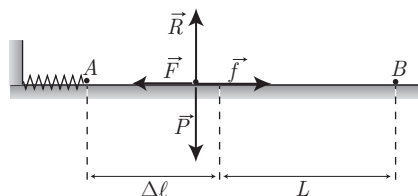


Un ressort comprimé de $\Delta\ell = 20$ cm (de raideur $k = 200$ N · m⁻¹) est placé sur un plan horizontal. Il projette un bloc de masse $m = 1$ kg, assimilé à un point matériel M , sur le plan. Le coefficient de frottement solide du bloc sur la table possède la valeur constante μ . Déterminer la valeur numérique de μ , sachant que le bloc parcourt 50 cm après sa phase de lancement.

On prendra $g = 10$ m · s⁻².

On rappelle que si \vec{R} désigne la réaction normale du plan, la force de frottement qui s'exerce sur le bloc a pour norme : $\|\vec{F}\| = \mu \|\vec{R}\|$.

RÉPONSE Lorsque le point M se déplace, il est soumis à la force de frottement \vec{F} , à son poids \vec{P} et à la réaction \vec{R} du support (auxquelles s'ajoute la force élastique \vec{f} du ressort, tant que ce dernier reste en contact avec M).



La planéité du mouvement de M trahit la compensation de \vec{R} et \vec{P} :

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -\vec{P} \Rightarrow \|\vec{R}\| = mg \Rightarrow \|\vec{F}\| = \mu \times mg$$

De plus, \vec{R} et \vec{P} étant perpendiculaires au mouvement de M , ils sont associés à une énergie potentielle constante E_{p0} .

En revanche, pendant le déplacement \vec{AB} (la phase de lancement correspond à $\Delta\ell = 20$ cm et M se déplace ensuite sur une distance $L = 50$ cm), tel que $\|AB\| = \Delta\ell + L = 70$ cm, la force de frottement (constante) exerce un travail :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{AB} = -\|\vec{F}\| \times \|\vec{AB}\| = -\mu mg (\Delta\ell + L)$$

La nature dissipative de \vec{F} est responsable de la variation de l'énergie mécanique :

$$\Delta E_m = E_m(B) - E_m(A) = W_{AB}(\vec{F}) = -\mu mg (\Delta\ell + L)$$

où :

$$E_m(B) = \frac{1}{2} m v_B^2 + E_{p0} = E_{p0}$$

$$E_m(A) = \frac{1}{2} m v_A^2 + E_{p0} + \frac{1}{2} k (\Delta\ell)^2 = E_{p0} + \frac{1}{2} k (\Delta\ell)^2$$

car, en A et B , la vitesse du bloc est nulle ($v_B = v_A = 0$), tandis que la compression du ressort de $\Delta\ell = 20$ cm par rapport à sa longueur au repos lui confère une énergie potentielle élastique $E_{pe} = \frac{1}{2} k (\Delta\ell)^2$. C'est pourquoi :

$$E_m(B) - E_m(A) = -\frac{1}{2} k (\Delta\ell)^2 = -\mu mg (\Delta\ell + L) \Rightarrow \mu = \frac{k (\Delta\ell)^2}{2mg (\Delta\ell + L)}$$

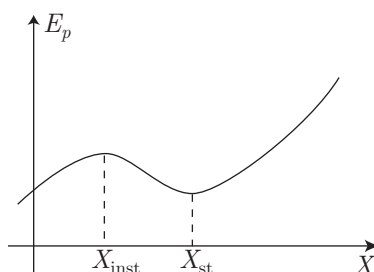
Application numérique :

$$\mu = \frac{200 \times (20 \times 10^{-2})^2}{2 \times 1 \times 10 \times 70 \times 10^{-2}} \Rightarrow \mu = 0,57$$

1.3.5 Représentations graphiques

1.3.5.1 Diagramme d'énergie potentielle

Il s'agit de représenter graphiquement la courbe $E_p(X)$, dont les *extrema* indiquent les positions d'équilibre stables (x_{st}) ou instables (X_{inst}) :



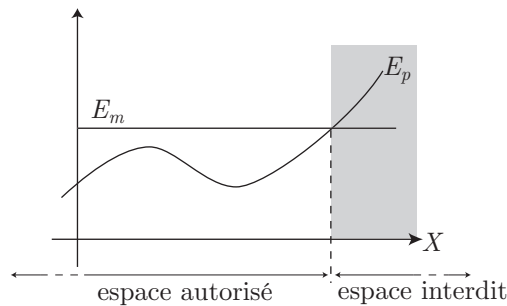
En outre, la définition de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_p + E_c = E_p + \frac{1}{2}mv^2$$

révèle que :

$$E_m \geq E_p \text{ car } \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$$

Cette relation montre que le point matériel ne peut exister que dans certaines régions de l'espace :



1.3.5.2 Portraits de phase

Définition 7 On appelle portrait de phase la courbe représentative de la vitesse \dot{X} d'un point matériel, en fonction de sa position X .

Au voisinage d'une position d'équilibre stable X_0 , l'énergie potentielle admet pour développement limité :

$$E_p(X) = E_p(X_0) + \frac{1}{2}k(X - X_0)^2 \text{ avec } k = \left. \frac{d^2 E_p}{dX^2} \right|_{X_0} > 0$$

C'est pourquoi en l'absence de force dissipative, la conservation de l'énergie mécanique impose :

$$\frac{1}{2}m\dot{X}^2 + E_p(X_0) + \frac{1}{2}k(X - X_0)^2 = E_m \Rightarrow m\dot{X}^2 + k(X - X_0)^2 = 2[E_m - E_p(X_0)]$$

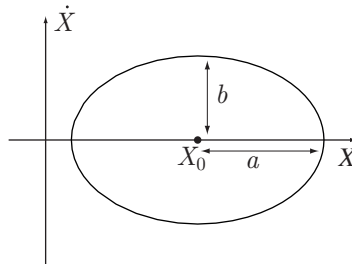
c'est-à-dire, en posant :


$$b^2 = \frac{2}{m}[E_m - E_p(X_0)] \text{ et } a^2 = \frac{2}{k}[E_m - E_p(X_0)]$$

cette équation devient :

$$\frac{(X - X_0)^2}{a^2} + \frac{(\dot{X})^2}{b^2} = 1$$

qui représente l'équation cartésienne d'une ellipse :



 Un point matériel M admet une position d'équilibre instable en $X = 0$. Son énergie potentielle ne dépend que du paramètre X et on suppose qu'à l'instant $t = 0$, $X = X_0$ tandis que la vitesse de M est nulle.

1. Établir, à partir d'un développement limité, l'expression simplifiée de l'énergie potentielle au voisinage de 0.

2. Montrer qu'en l'absence de force dissipative, il existe un nombre réel α tel que :

$$(\dot{X})^2 - \alpha^2 X^2 = -\alpha^2 X_0^2$$

3. En déduire l'allure de son portrait de phase (on déterminera les éventuelles asymptotes de cette courbe).

RÉPONSE

1. Pour X voisin de 0, l'énergie potentielle admet pour développement, à l'ordre 2 :

$$E_p(X) = E_p(0) + X \left. \frac{dE_p}{dX} \right|_{X_0} + \frac{X^2}{2} \left. \frac{d^2E_p}{dX^2} \right|_{X_0}$$

où l'existence d'un équilibre instable en 0 se traduit par :

$$\left. \frac{dE_p}{dX} \right|_{X_0} = 0 \text{ et } \left. \frac{d^2E_p}{dX^2} \right|_0 < 0 \Rightarrow \left. \frac{d^2E_p}{dX^2} \right|_{X_0} = - \left| \left. \frac{d^2E_p}{dX^2} \right|_0 \right|$$

Par suite :

$$E_p(X) = E_p(0) - \frac{X^2}{2} \left| \left. \frac{d^2E_p}{dX^2} \right|_0 \right|$$

2. En l'absence de force dissipative, l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m(\dot{X})^2 + E_p(X) = \frac{1}{2} m(\dot{X})^2 + E_p(0) - \frac{X^2}{2} \left| \left. \frac{d^2E_p}{dX^2} \right|_0 \right|$$

conserve la même valeur, quel que soit X , et notamment pour $X = X_0$ où $\dot{X} = 0$:

$$\frac{1}{2} m(\dot{X})^2 - \frac{X^2}{2} \left| \left. \frac{d^2E_p}{dX^2} \right|_0 \right| = -\frac{X_0^2}{2} \left| \left. \frac{d^2E_p}{dX^2} \right|_0 \right|$$

Il existe donc un nombre réel α , tel que :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{m} \times \left| \left. \frac{d^2E_p}{dX^2} \right|_0 \right|}$$

permettant d'écrire :

$$\dot{X}^2 - \alpha^2 X^2 = -\alpha^2 X_0^2$$

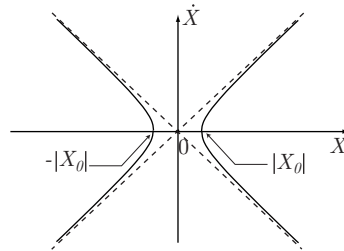
3. De cette expression, il découle que :

$$\dot{X} = \pm|\alpha| \sqrt{X^2 - X_0^2}$$

ce qui montre, d'une part que $|X| > |X_0|$, et d'autre part que :

$$\lim_{X \rightarrow \pm\infty} (\dot{X}) = \lim_{X \rightarrow \pm\infty} (\pm|\alpha X|)$$

Aussi, la courbe représentative de \dot{X} en fonction de X admet pour asymptotes les droites d'équation $\dot{X} = |\alpha X|$ et $\dot{X} = -|\alpha X|$.

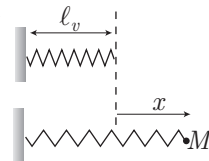


1.4 Oscillateurs à une dimension

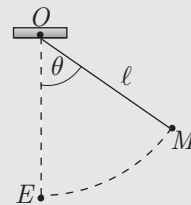
1.4.1 Oscillations non amorties

La conservation de l'énergie mécanique permet de montrer que le mouvement d'un point matériel M , de masse m , fixé à un ressort de longueur à vide ℓ_v et de raideur k , a un mouvement décrit par l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$



Un pendule pesant est constitué d'un point M , de masse m , accroché à une extrémité d'un fil sans masse, dont l'autre extrémité est fixée à un support horizontal en un point O . Les oscillations du pendule sont repérées par l'angle θ que fait le fil OM par rapport à la verticale (OE) .



1. Trouver l'expression de la vitesse \vec{v} du point M en fonction de ℓ et $\dot{\theta}$. En déduire l'expression de son énergie cinétique.
2. Établir l'expression de l'énergie potentielle de M en fonction de m , ℓ , θ et g (intensité de la pesanteur). On choisira l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur au point d'équilibre E .
3. Exprimer l'énergie mécanique E_m de M en fonction de θ et $\dot{\theta}$ puis, en admettant θ assez petit pour que $\sin \theta \simeq \theta$, montrer que :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

RÉPONSE

1. Le point M étant animé d'un mouvement de rotation autour du point O , il convient d'exprimer son vecteur vitesse en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta \text{ car } r = \ell = \text{cte}$$

Il s'ensuit que son énergie cinétique vaut :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

2. En choisissant l'origine de l'énergie potentielle en E , celle-ci adopte la forme :

$$E = mgz$$

avec :

$$\begin{aligned} OE = OH + HE &\Rightarrow \ell = \ell \cos \theta + z \Rightarrow z = \ell(1 - \cos \theta) \\ &\Rightarrow E_p = mg\ell(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

3. La tension du fil étant perpendiculaire au mouvement de M , l'énergie potentielle associée est une constante, que l'on choisira arbitrairement nulle de manière à assimiler l'énergie potentielle de M à son énergie potentielle de pesanteur. Ce faisant, son énergie mécanique vaut :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos \theta)$$

Le point M n'étant soumis à aucune force dissipative, son énergie mécanique demeure constante :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m \ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mg\ell \dot{\theta} \sin \theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

Enfin, l'approximation des « petits angles » : $\sin \theta \simeq \theta$ linéarise cette équation différentielle :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

De manière générale, l'équation différentielle décrivant le mouvement d'un oscillateur non amorti se présente sous la forme :

$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

qui fait apparaître la pulsation propre ω_0 et dont la solution est de la forme :

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

1.4.2 Oscillations amorties

Sous l'influence d'une force de frottement $\vec{F} = -\lambda \dot{X} \vec{u}$ (où λ est une constante positive), l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$m \ddot{X} + \lambda \dot{X} + k X = 0 \Rightarrow \ddot{X} + \frac{\lambda}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = 0$$

que l'on présente sous la forme canonique :

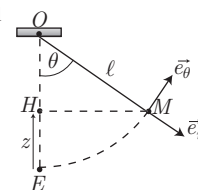
$$\ddot{X} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{X} + \omega_0^2 X = 0 \quad (3)$$

qui introduit le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0 :

$$Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Trois régimes d'oscillations se dégagent de l'équation caractéristique (en x) associée à l'équation différentielle (3) :

$$x^2 + \frac{\omega_0}{Q} x + \omega_0^2 = 0$$



1.4.2.1 Régime pseudo-périodique

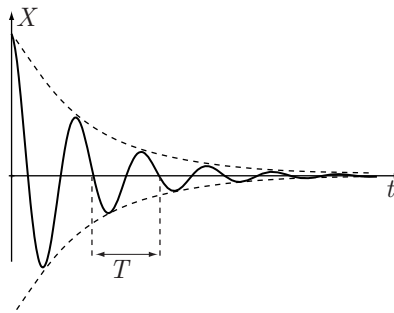
Il est obtenu lorsque le discriminant Δ de l'équation caractéristique est négatif :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) < 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{2}$$

Les solutions complexes obtenues pour x génèrent une solution pseudo-périodique :

$$X = e^{-\alpha t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

avec $\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$.



La pseudo-période vaut :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{4\pi Q}{\omega_0 \sqrt{4Q^2 - 1}}$$

tandis que l'énergie mécanique de l'oscillateur : $E_m = \frac{1}{2} k \dot{X}^2 + \frac{1}{2} k X^2$ se met sous la forme :

$$E_m = e^{-2\alpha t} \varphi(t)$$

où $\varphi(t)$ est une fonction périodique, de période T :

$$\varphi(t + T) = \varphi(t)$$

Il s'ensuit que :

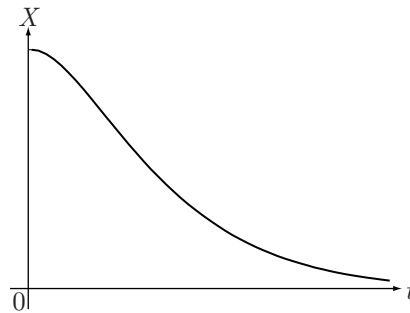
$$\left| \frac{\Delta E_m}{E_m} \right| = \left| \frac{E_m(t + T) - E_m(t)}{E_m(t)} \right| = 1 - e^{-2\alpha T}$$

1.4.2.2 Régime apériodique

Obtenu pour $\Delta > 0$, ce régime est décrit par l'existence de deux solutions réelles pour l'équation caractéristique, d'où se déduit la solution de l'équation différentielle (3) :

$$X(t) = e^{-\alpha t} [A e^{\kappa t} + B e^{-\kappa t}] \text{ pour } Q < \frac{1}{2}$$

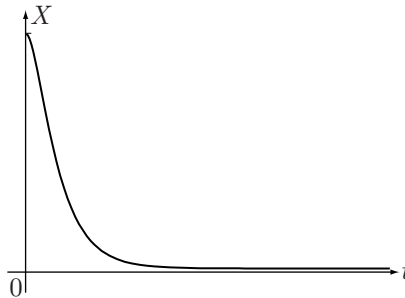
où $\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\kappa = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2}$.



1.4.2.3 Régime aperiodique critique

Ce régime correspond au cas où $\Delta = 0$; la seule solution $X_0 = -\omega_0$ de l'équation caractéristique confère à $X(t)$ la forme suivante :

$$X(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t}$$



Un point matériel, de masse m , est soumis à une force de rappel élastique de raideur k et à une force de frottement de coefficient λ . Sous l'influence de ces deux forces, sa position vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

On posera : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et on admet que $\lambda^2 = 4km$.

1. Sachant qu'à la date $t = 0$, x vaut x_0 et \dot{x} est nul, donner l'expression de la fonction $x(t)$.
2. Donner les expressions simplifiées de x et de \dot{x} pour $\omega_0 t \ll 1$ et $\omega_0 t \gg 1$.
3. En déduire l'allure du portrait de phase.

RÉPONSE

1. L'équation caractéristique (en X) associée à l'équation différentielle du mouvement :

$$X^2 + \frac{\lambda}{m} X + \frac{k}{m} = 0$$

admet pour discriminant :

$$\Delta = \frac{\lambda^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = \frac{\lambda^2 - 4km}{m^2} = 0 \text{ car } \lambda^2 = 4km$$

Par suite, l'unique solution de cette équation :

$$X_0 = -\frac{\lambda}{2m} = -\frac{\sqrt{4km}}{2m} = -\sqrt{\frac{k}{m}} = -\omega_0$$

conduit à la solution générale cherchée :

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t} \Rightarrow \dot{x} = e^{-\omega_0 t} \times (B - \omega_0 A - \omega_0 Bt)$$

dont les constantes A et B sont ajustées aux conditions initiales :

$$x(0) = x_0 \Rightarrow A = x_0$$

et :

$$\dot{x}(0) = 0 \Rightarrow B - \omega_0 A = 0 \Rightarrow B = \omega_0 A = \omega_0 x_0$$

C'est pourquoi :

$$x(t) = x_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \text{ et } \dot{x}(t) = -\omega_0^2 x_0 t e^{-\omega_0 t}$$

2. Lorsque $\omega_0 t \ll 1$, $e^{-\omega_0 t}$ admet pour développement développé d'ordre 1 :

$$e^{-\omega_0 t} \simeq 1 - \omega_0 t \Rightarrow \begin{cases} x(t) \simeq x_0 (1 + \omega_0 t) (1 - \omega_0 t) \\ \dot{x}(t) \simeq -x_0 \omega_0^2 t (1 - \omega_0 t) \end{cases}$$

c'est-à-dire, en ne conservant que les termes de plus petit ordre non nul en $\omega_0 t$ (l'ordre 0 reviendrait à éliminer la dépendance de x et de \dot{x} avec t), il reste :

$$x = x_0 (1 - \omega_0^2 t^2) \Rightarrow \omega_0 t = \sqrt{1 - \frac{x}{x_0}}$$

et :

$$\dot{x} = -x_0 \omega_0 \times \omega_0 t = -\omega_0 \sqrt{(x_0 - x) x_0} \tag{4}$$

En revanche, lorsque $\omega_0 t \gg 1$:

$$1 + \omega_0 t \simeq \omega_0 t \Rightarrow x(t) \simeq x_0 \omega_0 t e^{-\omega_0 t} \Rightarrow \omega_0 t e^{-\omega_0 t} = \frac{x}{x_0}$$

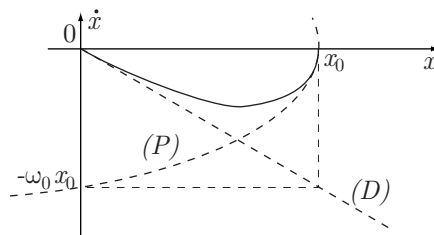
et :

$$\dot{x} = -\omega_0 x_0 \times \omega_0 t e^{-\omega_0 t} = -\omega_0 x \tag{5}$$

3. Le comportement asymptotique de la courbe $\dot{x}(x)$ découle de l'étude précédente :

- lorsque $\omega_0 t \ll 1$: $\dot{x} \simeq -\omega_0 \sqrt{(x_0 - x) x_0}$; il s'agit d'une branche de parabole (P) que le portrait de phase suit pour $x \simeq x_0$;
- lorsque $\omega_0 t \gg 1$, $\dot{x} = -\omega_0 x$ correspond à l'équation cartésienne d'une droite (D) qui passe par l'origine du repère (O, x, \dot{x}).

Finalement, ces expressions asymptotiques conduisent à la représentation graphique du portrait de phase :



● 1 ————— Lycée Pasteur, Neuilly

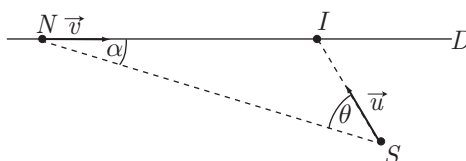
5 min.

Cinématique

MPSI-PCSI-PTSI

Un navire N est animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vitesse \vec{v} le long d'une droite D . Un sous-marin immobile S tire une torpille T à l'instant où l'angle $(\vec{v}, \overrightarrow{NS})$ a la valeur α .

T étant animé d'un mouvement rectiligne uniforme de vecteur vitesse \vec{u} , quelle doit être la valeur de l'angle de tir $\theta = (\overrightarrow{SN}, \vec{u})$ si l'on veut couler N ?



● 2 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

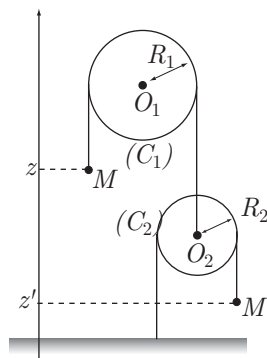
5 min.

Cinématique

MPSI-PCSI-PTSI

Une poulie (C_1) , de rayon R_1 , possède un axe fixe. À une extrémité du fil est placé un point M d'altitude z tandis qu'à l'autre extrémité est accrochée une seconde poulie (C_2) , de rayon R_2 . Les extrémités du fil de (C_2) sont l'une fixée au sol et l'autre attachée à un point M' d'altitude z' .

En supposant que les fils ne glissent pas sur les poulies et qu'ils sont inextensibles, établir une relation entre $\frac{dz}{dt}$ et $\frac{dz'}{dt}$.



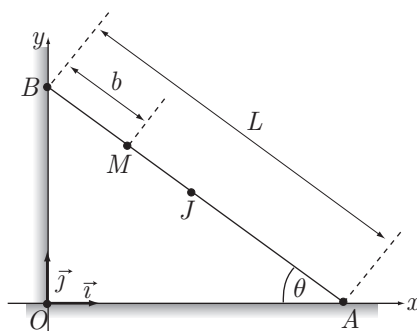
● 3 ————— Lycée Roosevelt, Reims

10 min.

Cinématique

MPSI-PCSI-PTSI

Une barre AB , de longueur L , a ses extrémités qui restent sans cesse au contact avec l'axe Ox (extrémité A) et avec l'axe Oy (extrémité B) perpendiculaire à Ox . Soit θ l'angle que fait la barre avec Ox à l'instant t .



1. Quelle est la trajectoire de J , milieu de $[AB]$?
2. Quelle est la trajectoire d'un point M de AB , situé à la distance $BM = b < L$ (b étant constant) ?
Tracer l'allure de celle-ci.
3. Quelles sont les composantes du vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ en fonction de L, b, θ et $\dot{\theta}$?

● **4** ————— **Lycée Henri Wallon, Valenciennes**

10 min.

Cinématique

MPSI-PCSI-PTSI

Montrer que la courbe (Γ) , d'équation polaire :

$$r \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = a \text{ avec } a \text{ constante positive}$$

est une parabole, et la représenter.

● **5** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

Cinématique

MPSI-PCSI-PTSI

On considère un point M dont la vitesse \vec{v} a pour composantes cartésiennes :

$$v_x = 1 - \frac{1}{t^2} \text{ et } v_y = 1 + \frac{1}{t^2}$$

où t désigne le temps.

À la date $t = 1$ s, le point M occupe la position du point $A(2, 0)$.

1. Exprimer, en fonction de t , les coordonnées x et y de M .
2. Quelle est la trajectoire de M ? la représenter.

● **6** **Lycée Roosevelt, Reims**

15 min.

Cinématique

MPSI-PCSI-PTSI

Par rapport à un repère fixe $(Oxyz)$, muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormée, un point M suit la trajectoire définie par la fonction vectorielle suivante :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ avec } \begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4\left(t - \frac{t^3}{3}\right) \\ z = 3t + t^3 \end{cases}$$

- Déterminer $\vec{v}(t)$, le vecteur vitesse, en fonction du temps, puis sa norme $v = \|\vec{v}\|$.
- Montrer que la tangente à la trajectoire fait un angle constant avec l'axe Oz .

● **7** **Lycée Charlemagne, Paris**

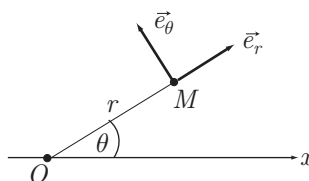
15 min.

Cinématique

MPSI-PCSI-PTSI

Un point M , de coordonnées polaires (r, θ) , a une trajectoire plane décrite par :

$$r = a \times \theta \quad (a : \text{constante réelle positive})$$



- Dessiner l'allure de la trajectoire.
- Sachant que $\theta = \omega \times t$ (ω : constante réelle positive), calculer les composantes polaires du vecteur vitesse \vec{v} , puis $v = \|\vec{v}\|$.
- Soit ψ l'angle (\vec{e}_r, \vec{v}) , montrer que $\psi = \arctan \theta$ et préciser la direction du vecteur vitesse \vec{v} lorsque $\theta = 0$.

● **8** **Lycée Roosevelt, Reims**

25 min.

Cinématique

MPSI-PCSI-PTSI

Un point P suit, dans un repère (O, x, y) , la trajectoire d'équation :

$$P \begin{cases} x = 4w \\ y = 4w^2 - 1 \end{cases}$$

où w est une fonction du temps t telle que : $t = w + \frac{4}{3}w^3$.

On étudie le mouvement pour $t \in [0; +\infty[$.

On note $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ et $r = \|\vec{r}\|$.

- Tracer le graphe de la trajectoire de P dans (O, x, y) .

- Calculer les composantes du vecteur vitesse \vec{v} du point P en fonction de w et de $\dot{w} = \frac{dw}{dt}$.
- Calculer les composantes du vecteur accélération \vec{a} de P , en fonction de w , \dot{w} et $\ddot{w} = \frac{d^2w}{dt^2}$.
- Exprimer \vec{a} en fonction de r et \vec{r} puis en déduire une propriété remarquable du vecteur \vec{a} .

● **9** ————— **Lycée Carnot, Dijon**

5 min.

Dynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Montrer que la superposition d'un champ de force constant $\vec{f}_1 = m\vec{g}$ et d'un champ de force radial $\vec{f}_2 = k\overrightarrow{OM}$ (O est un point fixe d'un référentiel galiléen et M un point où s'exercent les forces \vec{f}_1 et \vec{f}_2) équivaut à un champ de force radial : $\vec{f} = k\overrightarrow{O_1M}$ et déterminer O_1 .

● **10** ————— **Q.C.M.**

5 min.

Dynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Une voiture A roule à la vitesse constante $v_A = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur une route rectiligne. À la date $t = 0$, elle passe à côté d'une voiture B immobile qui démarre alors avec une accélération $a = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Répondre par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes :

- La voiture B rattrape la voiture A au bout de 9,91 s.
- Lorsque B rattrape A , sa vitesse v_B vaut le double de v_A .
- Si la voiture B doublait son accélération, elle rattraperait A au bout de 3,33 s.
- Dans ce cas, v_B vaudrait encore le double de v_A .

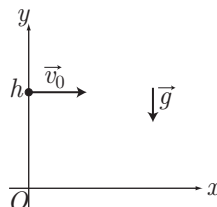
● **11** ————— **Concours Polytechnique**

5 min.

Dynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Un point matériel est lancé à la vitesse initiale \vec{v}_0 horizontale, d'une hauteur h . Quelle est sa vitesse lorsqu'il touche le sol ?



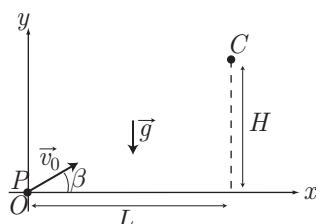
● **12** **Concours de l'E.N.S.**

10 min.

Dynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Une cible C , de masse m_c , est abandonnée sans vitesse initiale d'une hauteur H à l'instant même où un projectile P , de masse m_p , est lancé du sol avec une vitesse \vec{v}_0 inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.



Trouver l'angle β pour que le projectile atteigne la cible.

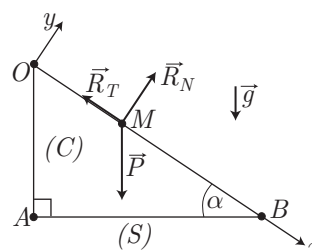
● **13** **Lycée Carnot, Dijon**

10 min.

Dynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Un coin C a la forme d'un prisme de section droite ABO . Il repose sur le sol horizontal (S) , rapporté aux axes (Ox) et (Oy) . On note \vec{g} le champ de pesanteur terrestre vertical. Un point matériel M , de masse m , peut glisser sur le plan (Ox) incliné d'un angle α par rapport au sol. Le plan exerce sur M une réaction $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$, où \vec{R}_N et \vec{R}_T désignent les composantes normale et tangentielle de \vec{R} . On a :



$$\|\vec{R}_T\| = f \|\vec{R}_N\|$$

si M est en mouvement, et :

$$\|\vec{R}_T\| < f \|\vec{R}_N\|$$

si M est immobile (f étant le coefficient constant de frottement).

1. Quelle inégalité doit lier f et α pour que M soit immobile ?
2. Cette condition n'étant pas réalisée, calculer le temps de chute τ (de O à B) et la vitesse de M en B , si M est lâché sans vitesse initiale en O .

Application numérique :

$$m = 1 \text{ kg} \quad OB = \ell = 1 \text{ m} \quad g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \alpha = 30^\circ \quad f = 0,1$$

● **14** **Lycée Poincaré, Nancy**

15 min.

Dynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Un pendule pesant est constitué d'un fil vertical inextensible, de longueur ℓ , de masse négligeable, dont une extrémité O est fixée à un support fixe. À l'autre extrémité est

accroché un point matériel M , de masse m , soumis à la pesanteur d'intensité g . Initialement, le fil est écarté de la verticale d'un angle θ_0 , avec une vitesse nulle.

1. Écrire l'équation différentielle satisfaite par l'angle θ que fait le fil par rapport à la verticale. La résoudre et donner l'expression de $\theta(t)$, en supposant que θ soit suffisamment petit pour que $\sin \theta \simeq \theta$.
2. Dans le cadre de ces approximations, déterminer l'expression de la tension T du fil, en fonction de m , g , θ_0^2 et θ^2 .

Lorsque le fil repasse par la verticale, montrer que $T \geq mg$ et conclure.

● 15 Concours des Mines-Ponts

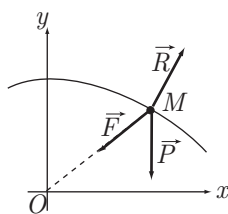
40 min.

Dynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Un anneau M , assimilable à un point matériel, peut se déplacer sans frottements sur une courbe (C) contenue dans un plan vertical.

Il est soumis, en plus de la réaction \vec{R} de la courbe, à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la force $\vec{F} = -\lambda \vec{OM}$ (λ réel constant).



On veut déterminer la courbe (C) pour que l'équilibre soit partout réalisé.

1. À partir de la condition d'équilibre du point $M(x, y)$, trouver les expressions des composantes R_x, R_y de \vec{R} en fonction de λ, x, y, m et g .
2. Sachant que la vitesse \vec{v} de M , se déplaçant sur (C) , est tangente à (C) , que peut-on dire de \vec{R} et \vec{v} ?

En déduire une équation faisant intervenir $R_x, R_y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$.

3. On suppose que la courbe (C) passe par le point $A\left(0, -2\frac{mg}{\lambda}\right)$. Trouver l'expression analytique de (C) et la représenter graphiquement.

● 16 Lycée Clémenceau, Nantes

45 min.

Dynamique

MPSI-PCSI-PTSI

On considère un canon qui tire, depuis un point O , un obus dont la vitesse initiale \vec{v}_0 a une norme v_0 déterminée et fait, avec la direction horizontale Ox , un angle α ajustable à volonté par l'artilleur ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$).

On ne tient pas compte de la résistance de l'air et on considère le référentiel terrestre comme galiléen, la pesanteur étant supposée uniforme : $\vec{g} = -g\vec{u}_y$.

1. Soit H la plus haute altitude qui puisse être atteinte par l'obus tiré verticalement. Déterminer H en fonction de v_0 et de g .

2. Déterminer la nature des trajectoires pour les valeurs de $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ et pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
3. Exprimer, en fonction de α et de H , la portée $X(\alpha)$ pour un tir vers une cible située dans le plan horizontal ($y = 0$). Déterminer le maximum X_m de X et la valeur α_m de α correspondante.
4. Exprimer, de la même manière, la cote *maximum* d'une trajectoire.
5. On désire atteindre un point M donné. Montrer que ceci n'est pas possible si M est à l'extérieur d'une certaine courbe P qui est une parabole (*parabole de sûreté*). Déterminer le sommet de P et représenter P sur une figure, ainsi que plusieurs trajectoires.
6. Dans le cas où M est intérieur à P , de combien de manières est-il possible d'atteindre M ?
Effectuer les calculs pour M de coordonnées $\left(H, \frac{H}{2}\right)$.
Représenter les trajectoires permettant d'atteindre M .

● **17** ————— **Lycée Carnot, Dijon**
10 min.

Énergies

MPSI-PCSI-PTSI

Un bol a la forme d'un parabolôide de révolution vertical ; l'équation de sa méridienne est : $y = ax^2$. On lâche, sans vitesse initiale, en un point de sa surface intérieure, un point matériel en (x_0, y_0) . Calculer la période de ses petites oscillations ($ax \ll 1$).

● **18** ————— **Lycée Poincaré, Nancy**
15 min.

Énergies

MPSI-PCSI-PTSI

La force de résistance exercée par l'eau sur les navires d'un certain modèle s'écrit :

$$f = kv^3$$

v étant la vitesse du navire.

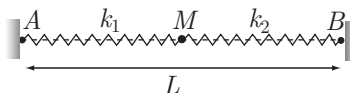
1. Calculer k sachant que le moteur fournit une puissance de 4 MW et que la vitesse limite atteinte est de $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.
2. On arrête le moteur. Quel est le temps nécessaire pour que la vitesse passe de $18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ à $16 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?
On donne la masse du navire : $m = 12 \times 10^6 \text{ kg}$.

● **19** ————— **Lycée Clémenceau, Nantes**
15 min.

Énergies

MPSI-PCSI-PTSI

Sur une tige horizontale sont enfilés un ressort de raideur k_1 , un anneau M de masse m , considéré comme une masse ponctuelle, et un ressort de raideur k_2 .



- Déterminer la position d'équilibre de M en fonction de k_1, k_2, ℓ_1 et ℓ_2 , longueurs au repos des ressorts (1) et (2). On prendra l'origine de l'axe des abscisses au milieu de la tige AB .
- On écarte la masse de la position d'équilibre et on la lâche sans vitesse initiale. Établir l'équation du mouvement de la masse, autour de sa position d'équilibre. Calculer la période du mouvement.
- Retrouver cette équation en utilisant le fait que le système est conservatif.

● 20

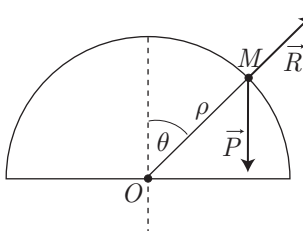
QCM

15 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Énergies

Un point matériel M , de masse m , glisse sans frottements sur une demi-boule de centre O et de rayon ρ . On appelle θ l'angle que fait \overrightarrow{OM} par rapport à la verticale. À la date $t = 0$, θ est pratiquement nul et M est lâché sans vitesse initiale. On admettra que M n'est soumis qu'à son poids \vec{P} et à la réaction \vec{R} de la demi-boule. Le point M quitte la boule lorsque :



- (a) $\alpha = 21,5^\circ$ (b) $\alpha = 48,2^\circ$
 (c) $\alpha = 51,2^\circ$ (d) $\alpha = 28,4^\circ$

● 21

Lycée Charlemagne, Paris

15 min.

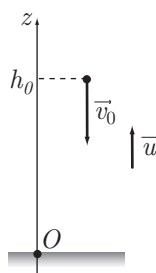
MPSI-PCSI-PTSI

Énergie

Une navette spatiale, assimilée à une masse ponctuelle $m = 5\,103$ kg, est abandonnée à la date $t = 0$ à l'altitude $h_0 = 10^5$ m avec une vitesse $v_0 = 8\,000$ m · s⁻¹. On notera le vecteur vitesse :

$$\vec{v} = -v \times \vec{u}$$

Le champ de gravitation est supposé radial et de norme uniforme : $\vec{g} = -g \times \vec{u}$, avec $g = 10$ m · s⁻².



- (a) Quelle est l'équation horaire de la chute libre $z(t)$?
 (b) Avec quelle vitesse la navette arrive-t-elle au sol ?
 (c) Quelle est la durée de la chute ?

2. L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait dont la masse volumique μ est supposée uniforme ($\mu = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). Elle exerce, sur la navette, une force de frottement :

$$\vec{F} = \mu C v^2 \vec{u}$$

où C est un coefficient positif lié à la forme de la navette.

- (a) Établir l'équation différentielle donnant v en fonction du temps.
 (b) Vérifier qu'il existe une vitesse limite et donner son expression en fonction de m, g, μ et C .

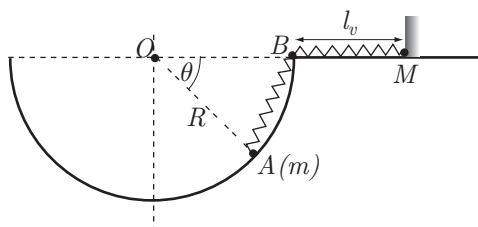
● 22 ————— Concours ENSI

20 min.

Énergies

MPSI-PCSI-PTSI

Un point matériel, de masse m , est solidaire d'une rigole verticale circulaire (de centre O et de rayon R) sur laquelle il peut glisser sans frottements.



Outre son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, le point A est soumis à la tension d'un ressort ABM , de longueur à vide l_v et de raideur k .

- Exprimer la longueur AB en fonction de R et θ .
- Donner l'énergie potentielle totale E_p du point matériel soumis à son poids et à la tension du ressort, en fonction de m, g, θ, k et R .
- Montrer qu'il existe une position d'équilibre stable pour $\theta = \theta_e$, telle que :

$$\tan \theta_e = \frac{mg}{kR}$$

- Calculer, en fonction de k, R, m et g , la pulsation ω des oscillations qui se produisent.

● 23 ————— Lycée Janson de Sailly, Paris

20 min.

Énergies

MPSI-PCSI-PTSI

Un pendule est constitué d'un fil souple, de longueur $l = 0,8 \text{ m}$, auquel on suspend une bille ponctuelle de masse $m = 0,2 \text{ kg}$. Le fil est écarté de sa position d'équilibre d'un angle $\theta_m = 60^\circ$. La bille est lancée avec une vitesse initiale v_0 tangente à la trajectoire dans un plan vertical.

La valeur minimale pour que la bille effectue un tour complet dans ce plan vertical est, en prenant $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$:

- a- $v_0 = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ b- $v_0 = 4,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
 c- $v_0 = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ d- $v_0 = 5,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

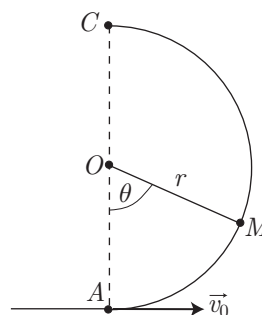
● **24** ————— **Lycée Henri Wallon, Valenciennes**

20 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Énergies

Un solide ponctuel M , de masse m , est lancé avec une vitesse \vec{v}_0 sur une glissière circulaire de rayon r et de centre O . Les frottements sont négligeables. La position du mobile sur la portion circulaire de la trajectoire est repérée par l'angle $\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$.



1. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, exprimer la vitesse v de M en fonction de r et θ .
2. Déterminer la norme R de la réaction \vec{R} exercée par la glissière sur le solide.
3. Montrer que R s'annule pour une valeur θ_m qui est fonction de v_0 . Quelle est la valeur minimale de v_0 pour que le mobile atteigne le sommet C de la trajectoire ? Quelle est alors sa vitesse en C ?

● **25** ————— **Lycée Poincaré, Nancy**

30 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Énergies

Dans le référentiel terrestre, supposé galiléen, où règne le champ de pesanteur \vec{g} uniforme, on considère un cerceau circulaire de centre O , de rayon R , dans le plan vertical (xOy) , (Oy) étant la verticale ascendante. Au sommet A du cerceau est accroché un ressort de masse négligeable, de longueur à vide $L_0 = \alpha R$ ($\alpha \in \mathbb{R}^+$). À son autre extrémité M est accrochée une particule de masse m , astreinte à glisser sans frottements sur le cerceau. On pose :

$$\omega_p^2 = \frac{g}{R} \quad \omega_R^2 = \frac{k}{m} > \omega_p^2 \quad \phi = (Oy, OM) \text{ avec } \phi \in [0\pi]$$

1. Exprimer la longueur L du ressort en fonction de R et ϕ .
2. On suppose d'abord $\alpha = 0$.
 - (a) Exprimer l'énergie potentielle de la particule sous les actions de la pesanteur et du ressort.

Montrer que cette énergie potentielle peut se mettre sous la forme :

$$E_p = mR^2 [\omega_R^2 + (\omega_p^2 - \omega_R^2) \cos \phi]$$

- (b) Préciser les positions d'équilibre.
- (c) Étudier la stabilité de ces équilibres et montrer que la pulsation des petites oscillations qui se produisent autour de l'une d'elles vaut :

$$\omega = \sqrt{\omega_R^2 - \omega_p^2}$$

3. On suppose maintenant que $\alpha \neq 0$.
 - (a) Présenter l'énergie potentielle de la particule, soumise aux actions de la pesanteur et du ressort, sous la forme :

$$E_p = mR^2 \left[(\omega_p^2 - \omega_R^2) \cos \phi + \omega_R^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right) \right]$$

- (b) Préciser les conditions sur ω_R , ω_p et α pour qu'il y ait deux positions d'équilibre, et donner ces positions.
- (c) Préciser les conditions sur ω_R , ω_p et α pour qu'il n'y ait qu'une seule position d'équilibre. Où se trouve-t-elle ?

● **26** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

10 min.

Oscillateurs

MPSI-PCSI-PTSI

Un oscillateur mécanique est constitué d'une masselotte A , de masse m , accrochée à l'extrémité inférieure d'un ressort vertical, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . On néglige les forces de frottement.

On désigne par x la coordonnée fixant la position de A le long de la verticale descendante, à partir de l'origine O prise par l'extrémité supérieure du ressort.

1. Exprimer l'énergie potentielle en fonction de la variable $X = x - x_1$, où x_1 est la position d'équilibre de A ; on choisira l'origine de l'énergie potentielle sur la position d'équilibre de A .
2. Établir l'équation différentielle du mouvement de A . La résoudre, sachant qu'à la date $t = 0$, A est lâché sans vitesse initiale de la position X_0 .
3. Représenter le diagramme énergétique correspondant.

● **27** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

Oscillateurs

MPSI-PCSI-PTSI

Sous l'action d'une force de rappel élastique de raideur $k > 0$, et d'une force de frottement de constante $\lambda > 0$, un point matériel de masse m se déplace sur un axe Ox conformément à l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$$

Initialement, le point matériel est immobile et occupe la position repérée par $x(t = 0) = x_0$.

1. Montrer qu'il existe deux coefficients A et ϕ , dépendant de $Q > \frac{1}{2}$, tels que :

$$x(t) = Ax_0 e^{-\alpha t} \times \cos(\Omega t - \phi) \text{ avec } \alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \text{ et } \Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

2. Quelle valeur doit prendre Q pour assurer $\phi = \frac{\pi}{3}$?

● **28** ————— **Lycée du Parc, Lyon**

10 min.

Oscillateurs

MPSI-PCSI-PTSI

Étudier la loi $x(t)$ du mouvement d'un point matériel de masse m , mobile sur un axe $x'Ox$, et soumis aux deux forces : $-Kx$ et $-\lambda \frac{dx}{dt}$, avec $K > 0$ et $\lambda > 0$. On introduira

les grandeurs $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ et $\tau = \frac{2m}{\lambda}$, avec $\omega_0\tau \gg 1$.

Dans le cas d'un amortissement faible ($\omega_0\tau \gg 1$) calculer, en fonction de m , ω_0 , λ , le facteur de qualité Q de l'oscillateur, défini par :

$$Q = 2\pi \left| \frac{E(t)}{\Delta E} \right|$$

où $\Delta E = E(t + T) - E(t)$ représente la perte d'énergie mécanique pendant une pseudo-période T , d'un oscillateur d'énergie $E(t)$ à la date t .

● **29** **Lycée Champollion, Grenoble**

15 min.

Oscillateurs

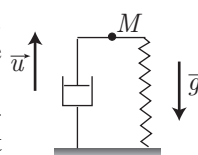
MPSI-PCSI-PTSI

On considère le dispositif ci-contre, dans lequel un ressort exerce une force élastique et un piston exerce une force d'amortissement.

À l'extrémité mobile du dispositif est fixé un point matériel M de masse $m = 255$ kg.

La longueur à vide du ressort est $L_0 = 1$ m ; on note L sa longueur à un instant quelconque ; sa constante de raideur vaut $k = 12,5$ kN · m⁻¹.

La force d'amortissement fluide est de type visqueux ;



$$\vec{F} = -\beta \vec{v}$$

où β est un coefficient constant, positif et égal à $15,3$ kg · s⁻¹ et où \vec{v} est le vecteur vitesse de M .

À la date $t = 0$, on communique à M une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}$, avec $v_0 = 0,5$ m · s⁻¹, et M occupe une position d'équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

- Calculer la longueur L_1 du ressort avant la perturbation de l'équilibre de M .

On posera : $x = L - L_e$, avec $L_e = L_0 - \frac{mg}{k}$. Que représente L_e ?

- Déterminer l'équation différentielle donnant x en fonction de t .
- (a) Compte tenu des valeurs numériques, montrer qu'on peut mettre x sous la forme :

$$x = [a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)] \times e^{-\Lambda t}$$

Exprimer a , b , Ω et Λ en fonction des données et calculer leur valeur numérique.

- (b) Quelle est la valeur absolue maximale A_{\max} de l'amplitude A ?

Au bout de combien de temps peut-on considérer que la position d'équilibre est atteinte (c'est-à-dire lorsque A est toujours inférieur à $10^{-3} \times A_{\max}$) ?

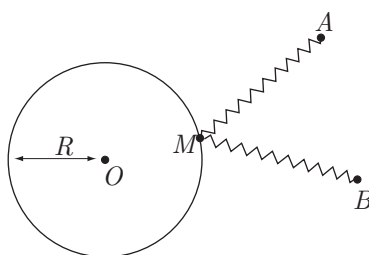
● **30** **Lycée Charlemagne, Paris**

15 min.

Oscillateurs

MPSI-PCSI-PTSI

Un point matériel M , de masse m , peut se déplacer sans frottements sur un cercle de centre O , de rayon R , situé dans un plan horizontal. M est relié à deux ressorts de raideurs k_1 et k_2 , de longueurs à vide nulles, accrochés en A et B dans le plan horizontal. On considère que le segment AB se trouve entièrement à l'extérieur du cercle.



1. Montrer que l'action sur M des deux ressorts est équivalente à celle d'un ressort unique, dont on donnera la constante de raideur, et accroché en un point G défini par :

$$k_1 \overrightarrow{GA} + k_2 \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

2. Montrer qu'il existe deux positions d'équilibre de M sur le cercle. Les représenter schématiquement.
3. Soit M_1 la position d'équilibre stable et on pose $\theta = (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM})$, lorsque M s'écarte de sa position d'équilibre. Désignons par ℓ la norme de $\|\overrightarrow{OG}\|$ et notons $\dot{\theta}$ la dérivée, par rapport au temps, de θ .
Donner l'expression de l'énergie totale de l'oscillateur en fonction de $m, R, \ell, k_1, k_2, \theta$ et $\dot{\theta}$.
4. Donner l'équation différentielle vérifiée par θ et en déduire la période des oscillations de M lorsque θ est faible.

● 31 Concours E.N.S.T.I.M.

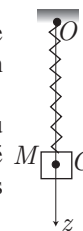
20 min.

Oscillateurs

MPSI-PCSI-PTSI

On considère une masse M , de masse volumique μ et de volume V , plongée dans de l'eau (de masse volumique $\mu_{\text{H}_2\text{O}}$). Cette masse est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , accroché en un point O .

Soit (Oz) la verticale orientée vers le bas, le point O est fixe. On s'intéresse au mouvement suivant (Oz) de la masse et on note z la cote du centre de gravité G de la masse. À l'équilibre, la masse est située en $z = h$. On négligera les dimensions de la masse devant h .



Soit \mathcal{R} le référentiel terrestre supposé galiléen.

1. Écrire la condition d'équilibre de M dans \mathcal{R} .
2. En déduire l'équation différentielle du mouvement d'oscillations de M . On écrira une équation reliant z à ses dérivées, M, k et h . Donner la pulsation propre ω_0 de cet oscillateur. On négligera les frottements dans cette question.
3. Y a-t-il un terme de l'équation différentielle précédente qui dépende de l'intensité de la poussée d'Archimède ?
4. On tient compte d'une force de frottement visqueux, colinéaire à la vitesse \vec{v} : $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par z .

En se plaçant dans le cas d'un amortissement très faible, donner l'allure de la fonction $z(t)$ avec les conditions initiales suivantes : à $t = 0$, $z = h_1 > h$ et la vitesse initiale est nulle.

● **32** **Lycée du Parc, Lyon**

25 min.

Oscillateurs

MPSI-PCSI-PTSI

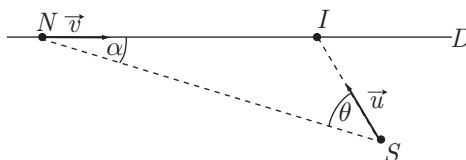
On étudie les oscillations libres d'un point matériel M , de masse m accroché à un ressort vertical, de masse négligeable et de constante de raideur k . On choisit un axe Ox orienté vers le bas, d'origine O correspondant à la position d'équilibre de la masse ponctuelle.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par x , écart de M par rapport à sa position d'équilibre.
2. La masse est écartée d'une quantité x_0 de sa position d'équilibre, puis lâchée de cette position à un instant pris comme origine du temps, avec une vitesse nulle. Résoudre l'équation vérifiée par x en fonction du temps t .
3. On prend les mêmes conditions initiales que précédemment. Donner l'expression de l'énergie potentielle de l'oscillateur (on prendra $x = 0$ pour origine de l'énergie potentielle). Calculer la valeur moyenne sur une période T :

$$\langle E_p \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_p(t) dt$$

● 1 ————— Lycée Pasteur, Neuilly

Soit $t = 0$ la date à laquelle la torpille est tirée, lorsque $(\vec{NI}, \vec{NS}) = \alpha$:



Les vitesses \vec{v} et \vec{u} étant uniformes, leurs normes constantes v et u vérifient :

$$SI = u \times t \text{ et } NI = v \times t$$

Les relations métriques dans le triangle (NIS) fournissent, en outre :

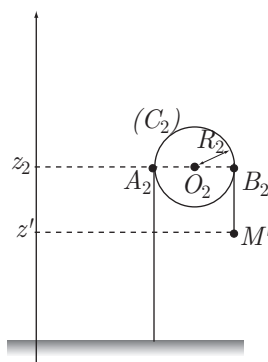
$$\begin{aligned} \frac{NI}{\sin \theta} &= \frac{SI}{\sin \alpha} \Rightarrow \sin \theta = \frac{NI}{SI} \times \sin \alpha \\ &\Rightarrow \sin \theta = \frac{v}{u} \sin \alpha \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\theta = \arcsin\left(\frac{v}{u} \sin \alpha\right)$$

● 2 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

Soit z_2 l'altitude commune du centre O_2 de la poulie (C_2) et des points A_2, B_2 de contact de la poulie avec ses fils :



La longueur L_2 du fil qui passe par cette poulie vaut :

$$\begin{aligned} L_2 &= z_2 + \widehat{A_2 B_2} + B_2 M' \text{ avec } \begin{cases} \widehat{A_2 B_2} = \pi R_2 \\ B_2 M' = z_2 - z' \end{cases} \\ &= z_2 + \pi R_2 + z_2 - z' \\ &= 2z_2 + \pi R_2 - z' \end{aligned}$$

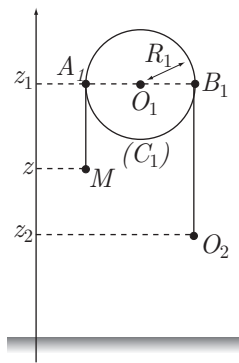
La dérivation de cette équation fournit :

$$\frac{dL_2}{dt} = 2 \frac{dz_2}{dt} - \frac{dz'}{dt} = 0$$

car le fil étant inextensible, sa longueur L_2 ne varie pas dans le temps. Finalement :

$$\frac{dz'}{dt} = 2 \frac{dz_2}{dt} \quad (6)$$

De même, notons z_1 l'altitude commune du centre O_1 de (C_1) et des points A_1, B_1 où le fil établit le contact avec (C_1) :



À nouveau la longueur L_1 du fil vaut :

$$\begin{aligned} L_1 &= A_1M + \widehat{A_1B_1} + B_1O_2 \\ &= (z_1 - z) + \pi R_1 + z_1 - z_2 \\ &= 2z_1 + \pi R_1 - z - z_2 \end{aligned}$$

De ces termes, seuls z et z_2 varient dans le temps (car l'axe qui passe par O_1 est immobile) est c'est pourquoi une dérivation de cette équation fournit :

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{d(2z_1 + \pi R_1)}{dt} - \frac{dz}{dt} - \frac{dz_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dz_2}{dt} = -\frac{dz}{dt}$$

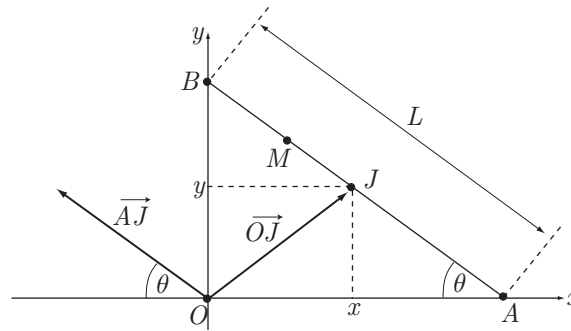
ce qui permet d'écrire le résultat (6) sous la forme suivante :

$$\frac{dz'}{dt} = 2 \frac{dz_2}{dt} \Rightarrow \frac{dz'}{dt} = -2 \frac{dz}{dt}$$

● 3 ————— Lycée Roosevelt, Reims

1. La trajectoire du point J sera connue à partir de l'expression des composantes (x, y) du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AJ}$$



Il s'agit donc d'exprimer les vecteurs \vec{OA} et \vec{AJ} :

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} OA \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } OA = L \cos \theta$$

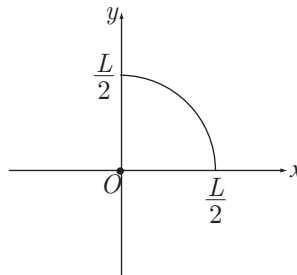
et :

$$\begin{aligned} \vec{AJ} &= \begin{pmatrix} -AJ \cos \theta \\ AJ \sin \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{L}{2} \cos \theta \\ \frac{L}{2} \sin \theta \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = L \cos \theta - \frac{L}{2} \cos \theta = \frac{L}{2} \cos \theta \\ y = \frac{L}{2} \sin \theta \end{cases} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2$$

On reconnaît, dans cette équation, l'expression analytique d'un cercle centré sur O et de rayon $\frac{L}{2}$:



2. La trajectoire d'un point M , situé à la distance $AM = L - b$ de A , s'obtient de la même manière :

$$\vec{OM} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{OA} + \vec{AM}$$

avec :

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} OA \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

et :

$$\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} -AM \cos \theta \\ AM \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b-L) \cos \theta \\ (L-b) \sin \theta \end{pmatrix}$$

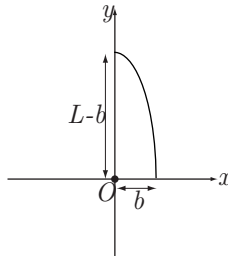
il s'ensuit que :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \cos \theta + (b-L) \cos \theta \\ (L-b) \sin \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = b \cos \theta \\ y = (L-b) \sin \theta \end{cases} \quad (7)$$

d'où l'on tire que :

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(L-b)^2} = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \Rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{(L-b)^2} = 1$$

Il s'agit de l'équation cartésienne d'une ellipse dont le demi-axe horizontal a pour longueur b et le demi-axe vertical a pour longueur $L-b$:



3. Des coordonnées (x, y) du point M , exprimées par les relations (7), sont issues les composantes v_x et v_y de la vitesse \vec{v} de M :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [b \cos \theta] \Rightarrow v_x = -b \dot{\theta} \sin \theta$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} [(L-b) \sin \theta] \Rightarrow v_y = (L-b) \dot{\theta} \cos \theta$$

● 4 ————— Henri Wallon, Valenciennes

Pour répondre à cette question, deux méthodes conviennent : la recherche d'une équation polaire d'une parabole (cette méthode est la plus élégante et elle permet de se familiariser avec les équations polaires des coniques) ou la recherche de l'expression cartésienne (la méthode est moins élégante, mais les résultats sont plus familiers). Ces deux méthodes sont développées ci-dessous.

• Première méthode

La relation trigonométrique : $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$ conduit directement à

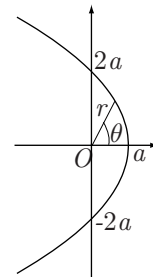
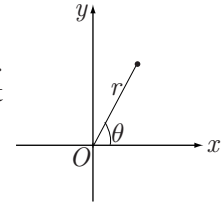
$$\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 + \cos \theta}{2} \Rightarrow r = \frac{a}{\cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)} = \frac{a}{\frac{1}{2}(1 + \cos \theta)}$$

soit encore :

$$r = \frac{2a}{1 + \cos \theta}$$

ce qui correspond effectivement à l'équation d'une parabole. Quant à sa représentation graphique, elle s'obtient directement à partir de quelques valeurs remarquables de θ :

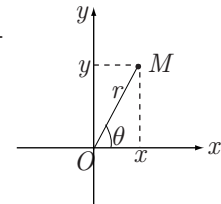
- Pour $\theta = 0$, $r = \frac{2a}{2} = a$.
- Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 2a$ et $\theta = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2a$.
- $\lim_{\theta \rightarrow \pi} r = +\infty$ et $\lim_{\theta \rightarrow -\pi} r = +\infty$.



• Seconde méthode

Les coordonnées cartésiennes (x, y) d'un point M se déduisent aisément de ses coordonnées polaires (r, θ) :

$$x = r \cos \theta \text{ et } y = r \sin \theta$$



De plus, la relation trigonométrique : $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos \theta}{2}$ permet d'écrire l'équation de (Γ) sous la forme suivante :

$$r \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = a \Rightarrow r \times \frac{1 + \cos \theta}{2} = a \Rightarrow r + r \cos \theta = 2a \text{ avec } r \cos \theta = x$$

c'est-à-dire :

$$r + x = 2a \Rightarrow r = 2a - x \quad (8)$$

En outre, les expressions de x et y conduisent à :

$$\begin{cases} x^2 = r^2 \cos^2 \theta \\ y^2 = r^2 \sin^2 \theta \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = r^2$$

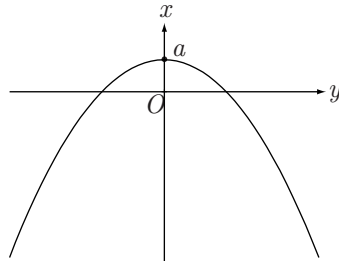
soit, compte tenu du résultat (8) :

$$x^2 + y^2 = (2a - x)^2 = 4a^2 - 4ax + x^2 \Rightarrow 4ax = 4a^2 - y^2$$

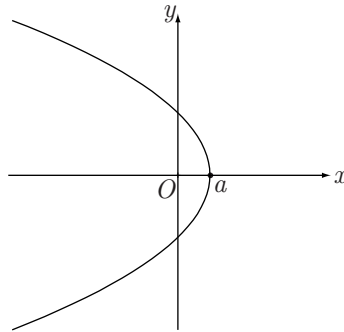
d'où l'on tire que :

$$x = a - \frac{1}{4a} y^2$$

La représentation graphique de x en fonction de y correspond à une parabole de sommet $\begin{pmatrix} y = 0 \\ x = a \end{pmatrix}$:



et une permutation des axes Ox et Oy fournit finalement la représentation graphique de la courbe (Γ) :



● **5** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

1. Les composantes v_x et v_y de la vitesse s'expriment comme dérivées temporelles des coordonnées x et y :

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 1 - \frac{1}{t^2} \\ \dot{y} = 1 + \frac{1}{t^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} + X_0 \\ y = t - \frac{1}{t} + Y_0 \end{cases}$$

où X_0 et Y_0 sont des constantes réelles que l'on doit ajuster à la condition fournie par l'énoncé : lorsque $t = 1$ s, le point passe par $A(2, 0)$, c'est-à-dire que x prend la valeur 2 et y la valeur 0 :

$$\begin{cases} 2 = 1 + \frac{1}{1} + X_0 \\ 0 = 1 - \frac{1}{1} + Y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_0 = 0 \\ Y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + \frac{1}{t} \\ y = t - \frac{1}{t} \end{cases}$$

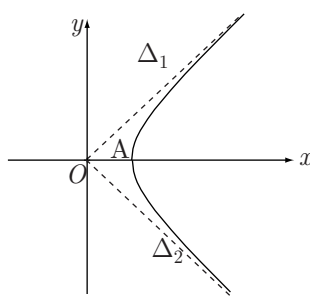
2. Les deux expressions précédentes conduisent à :

$$\begin{cases} x + y = 2t \\ x - y = \frac{2}{t} \end{cases} \Rightarrow (x + y) \times (x - y) = 4$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = 4$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{x^2 - 4}$$

Il s'agit de l'équation d'une hyperbole, dont le sommet est le point $A(2, 0)$ et dont les asymptotes sont la première bissectrice Δ_1 (d'équation $y = x$) et la deuxième bissectrice Δ_2 (d'équation $y = -x$) :



6 Lycée Roosevelt, Reims

1. Les composantes v_x , v_y et v_z du vecteur vitesse \vec{v} sont définies comme les dérivées temporelles des coordonnées x , y et z :

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \text{ avec } \begin{cases} v_x = \dot{x} = 8t \\ v_y = \dot{y} = 4 \times (1 - t^2) \\ v_z = \dot{z} = 3 \times (1 + t^2) \end{cases}$$

quant à la norme $\|\vec{v}\| = v$, son carré vaut :

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = 64t^2 + 16 \times (1 - t^2)^2 + 9 \times (1 + t^2)^2 \\ &= 64t^2 + 16 - 32t^2 + 16t^4 + 9 + 18t^2 + 9t^4 \\ &= 25 + 50t^2 + 25t^4 = 25 \times (1 + 2t^2 + t^4) \\ &= 25 \times (1 + t^2)^2 \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$v = 5 \times (1 + t^2)$$

2. Le vecteur vitesse \vec{v} est en tout point tangent à la trajectoire du point M . C'est pourquoi la direction de la tangente \mathcal{T} à cette trajectoire est donnée par celle du vecteur \vec{v} (qui est alors vecteur directeur de \mathcal{T}). En outre, si θ désigne l'angle entre \vec{v} et l'axe Oz , le produit scalaire de \vec{v} par \vec{k} (vecteur unitaire directeur de Oz) est défini par :

$$\vec{v} \cdot \vec{k} = \|\vec{v}\| \times \|\vec{k}\| \times \cos \theta = v \times \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{v}$$

où les composantes de $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ et de $\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ fournissent :

$$\vec{v} \cdot \vec{k} = v_z \Rightarrow \cos \theta = \frac{v_z}{v}$$

avec :

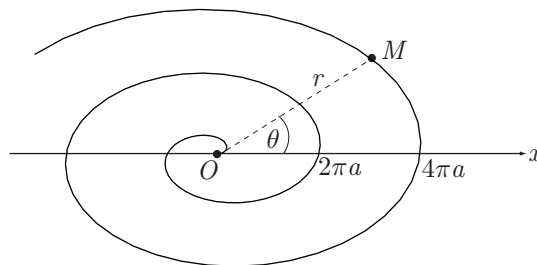
$$\begin{cases} v_z = 3 \times (1 + t^2) \\ v = 5 \times (1 + t^2) \end{cases} \Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta \simeq 53,13^\circ$$

Ce résultat montre que \vec{v} fait un angle constant avec l'axe Oz ; il en va de même pour \mathcal{T} .

● 7 ————— Lycée Charlemagne, Paris

1. La trajectoire est décrite par l'équation polaire $r = a \times \theta$, ce qui signifie que la distance $r = OM$ s'accroît lorsque θ augmente ; une telle trajectoire est une spirale, dont les caractéristiques peuvent être précisées :

- lorsque $\theta = 0$, $r = 0$ révèle que la spirale passe par O ;
- à chaque tour complet, l'angle θ s'accroît de $\Delta\theta = 2\pi$, provoquant un accroissement concomitant de r : $\Delta r = a \times 2\pi$;
- par définition, r est positif, de même que a , de sorte que $\theta = \frac{r}{a} > 0$; la spirale est parcourue dans le sens positif trigonométrique.



2. Les composantes v_r et v_θ du vecteur vitesse :

$$\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$$

sont directement calculables à partir de $\theta = \omega t$ et de $r = a\theta = a\omega t$:

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_r = a\omega \\ v_\theta = a\omega^2 t \end{cases}$$

Ces composantes conduisent à :

$$\begin{aligned} v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 &\Rightarrow v^2 = a^2\omega^2 + a^2\omega^4 t^2 = a^2\omega^2 (1 + \omega^2 t^2) \\ &\Rightarrow v = a\omega\sqrt{1 + \omega^2 t^2} \end{aligned}$$

3. Si ψ désigne l'angle (\vec{e}_r, \vec{v}) , le produit scalaire $\vec{e}_r \cdot \vec{v}$ est défini par :

$$\vec{e}_r \cdot \vec{v} = \|\vec{e}_r\| \times \|\vec{v}\| \times \cos \psi = v \times \cos \psi \Rightarrow \cos \psi = \frac{\vec{e}_r \cdot \vec{v}}{v}$$

où :

$$\vec{e}_r \cdot \vec{v} = \vec{e}_r \cdot (v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta) = v_r \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{=1} + v_\theta \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\theta}_{=0} = v_r = a\omega$$

et :

$$v = a\omega\sqrt{1 + \omega^2 t^2} = a\omega\sqrt{1 + \theta^2} \text{ car } \theta = \omega t$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{a\omega}{a\omega\sqrt{1 + \theta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2}} \\ \Rightarrow \cos^2 \psi &= \frac{1}{1 + \theta^2} \\ \Rightarrow 1 + \theta^2 &= \frac{1}{\cos^2 \psi} \\ \Rightarrow \theta^2 &= \frac{1}{\cos^2 \psi} - 1 = \frac{1 - \cos^2 \psi}{\cos^2 \psi} \end{aligned}$$

avec :

$$1 = \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \Rightarrow \theta^2 = \frac{\sin^2 \psi}{\cos^2 \psi} \Rightarrow \theta = \tan \psi$$

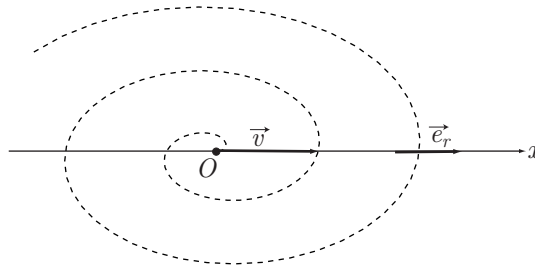
ce qui revient à montrer que :

$$\psi = \arctan \theta$$

Lorsque $\theta = 0$, cette relation montre que :

$$\psi = (\vec{e}_r, \vec{v}) = 0 \text{ pour } \theta = 0$$

ce qui signifie que \vec{v} est colinéaire à \vec{e}_r , dont la direction est aussi celle de l'axe Ox lorsque $\theta = 0$. Donc, à la date $t = 0$, la vitesse est dirigée selon Ox :



● 8 ————— Lycée Roosevelt, Reims

1. Pour tracer la trajectoire de P , il faut pouvoir exprimer y en fonction de x (ou x en fonction de y). À cette fin, on remarque que :

$$x = 4w \Rightarrow w = \frac{x}{4}$$

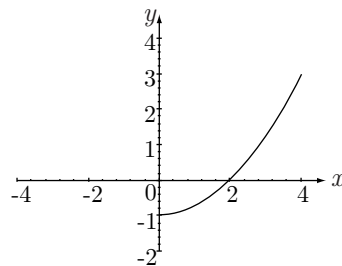
de sorte que :

$$y = 4w^2 - 1 = \frac{x^2}{4} - 1 = \left(\frac{x}{2} - 1\right) \left(\frac{x}{2} + 1\right)$$

En outre, la condition : $t = w + \frac{4}{3}w^3 \in [0; \infty[$ impose :

$$w \left(1 + \frac{4}{3}w^2\right) \geq 0 \Rightarrow w \geq 0 \Rightarrow x = 4w \geq 0$$

Aussi, la trajectoire de P est une branche de parabole dans le demi-plan $x \geq 0$:



2. Les composantes v_x et v_y du vecteur vitesse \vec{v} s'expriment à partir des composantes x et y :

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(4w)}{dt} \Rightarrow v_x = 4\dot{w}$$

et

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(4w^2 - 1)}{dt} \Rightarrow v_y = 8w\dot{w}$$

3. Les composantes v_x et v_y conduisent directement à celles de l'accélération $\vec{a} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d(4\dot{w})}{dt} \Rightarrow a_x = 4\ddot{w}$$

et :

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d(8w\dot{w})}{dt} \Rightarrow a_y = 8(\dot{w})^2 + 8w\ddot{w}$$

4. La relation entre t et w donne, après dérivation :

$$t = w + \frac{4}{3}w^3 \Rightarrow 1 = \dot{w} + 4\dot{w}w^2 = \dot{w}(1 + 4w^2) \quad (9)$$

et, après une nouvelle dérivation :

$$0 = \ddot{w}(1 + 4w^2) + \dot{w} \times (8w\dot{w}) \Rightarrow 8w(\dot{w})^2 = -\ddot{w}(1 + 4w^2) \quad (10)$$

C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} a_y = 8(\dot{w})^2 + 8w\ddot{w} &= -\frac{\ddot{w}}{w}(1+4w^2) + 8w\ddot{w} \\ &= -\frac{\ddot{w}}{w} + 4w\ddot{w} \\ &= \frac{\ddot{w}}{w}(4w^2 - 1) = \frac{\ddot{w}}{w} \times y \end{aligned}$$

De même :

$$a_x = 4\ddot{w} = \frac{\ddot{w}}{w} \times 4w = \frac{\ddot{w}}{w} \times x$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \vec{a} \begin{pmatrix} \frac{\ddot{w}}{w}x \\ \frac{\ddot{w}}{w}y \end{pmatrix} = \frac{\ddot{w}}{w} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\ddot{w}}{w} \vec{r}$$

Quant aux expressions de x et y , elles conduisent à :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4w)^2 + (4w^2 - 1)^2} \\ &= \sqrt{16w^4 + 16w^2 - 8w^2 + 1} \\ &= \sqrt{16w^4 + 8w^2 + 1} = \sqrt{(4w^2 + 1)^2} \\ &= 4w^2 + 1 \end{aligned}$$

de sorte que l'équation (9) devient :

$$1 = \dot{w}(1 + 4w^2) = \dot{w} \times r \Rightarrow \dot{w} = \frac{1}{r}$$

et l'équation (10) mène à :

$$\begin{aligned} 8w(\dot{w})^2 = -\ddot{w}(1 + 4w^2) &\Rightarrow 8w \times \frac{1}{r^2} = -\ddot{w} \times r \\ &\Rightarrow \frac{\ddot{w}}{w} = -\frac{8}{r^3} \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$\vec{a} = \frac{\ddot{w}}{w} \vec{r} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{8}{r^3} \times \vec{r}$$

Cette relation montre une propriété remarquable de cette accélération : elle demeure, tout au long du mouvement, colinéaire au vecteur position et est dirigée vers O , ce qui signifie aussi qu'elle demeure centripète.

● 9 ————— Lycée Carnot, Dijon

La résultante $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = m\vec{g} + k\overrightarrow{OM}$ peut s'écrire $\vec{f} = k\overrightarrow{O_1M}$, ce qui signifie que :

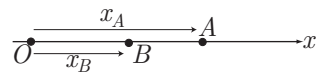
$$m\vec{g} + k\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{O_1M} \Rightarrow m\vec{g} = k(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{OM}) = k\overrightarrow{O_1O}$$

Cette relation confirme que :

$$\vec{f} = k \overrightarrow{O_1 M} \text{ avec } \overrightarrow{O\dot{O}_1} = -\frac{m}{k} \vec{g}$$

● 10 Q.C.M.

Soit Ox l'axe de la route rectiligne sur laquelle circulent les deux véhicules.



Le point O correspond au point de leur rencontre ; on appelle x_A et x_B les distances parcourues par A et B depuis O pendant un temps t . Étant donné que A avance avec une vitesse constante v_A :

$$x_A = v_A \times t$$

tandis que l'accélération de B est constante :

$$\begin{aligned} \frac{dv_B}{dt} = a &\Rightarrow v_B = a \times t \text{ car } v_B = 0 \text{ à } t = 0 \\ &\Rightarrow x_B = \frac{1}{2} at^2 \text{ car } x_B = 0 \text{ à } t = 0 \end{aligned}$$

1. FAUX – Les deux véhicules se rencontrent à une date t_1 telle que :

$$x_A = x_B \Rightarrow v_A t_1 = \frac{a}{2} t_1^2 \Rightarrow t_1 \left(\frac{a}{2} t_1 - v_A \right) = 0$$

Outre la date $t_1 = 0$ (A dépasse B à l'arrêt), cette équation admet pour solution :

$$t_1 = \frac{2v_A}{a} \tag{11}$$

soit, avec $v_A = 16,67 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $a = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$:

$$t_1 = 6,67 \text{ s}$$

2. VRAI – La vitesse v_B est donnée par :

$$v_B = a \times t_1 = 5 \times 6,67 = 33,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow v_B \simeq 120 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

3. VRAI – En doublant son accélération, le véhicule met un temps t'_1 pour rattraper B , donné par le résultat (11) :

$$t'_1 = \frac{2v_A}{2a} = \frac{2 \times 16,67}{2 \times 5} \Rightarrow t'_1 = 3,33 \text{ s}$$

4. VRAI – La vitesse v_B étant donnée par $v_B = a t_1$ à la date $t_1 = \frac{2v_A}{a}$ où B rattrape A , il s'ensuit que :

$$v_B = a \times \frac{2v_A}{a} \Rightarrow v_B = 2v_A \text{ quel que soit } a.$$

● 11 Concours Polytechnique

Soumis à l'action de son poids \vec{P} , le point de masse m acquiert une accélération \vec{a} telle que :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

c'est-à-dire, en notant v_x et v_y les composantes de son vecteur \vec{v} :

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_x = A \\ v_y = -gt + B \end{cases}$$

où A et B sont des constantes liées aux conditions initiales :

$$\vec{v}(t=0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -gt \end{cases}$$

De même, les coordonnées (x, y) du point vérifient :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t + C \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + D \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 t \\ y = h - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Ce point touche le sol à une date τ qui annule son altitude y :

$$0 = h - \frac{1}{2}g\tau^2 \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

auquel cas son vecteur vitesse a pour composantes :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -g\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = -\sqrt{2gh} \end{cases}$$

et a pour norme :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

● 12 Concours de l'E.N.S.

Le point C , soumis à son poids, présente une accélération \vec{a}_c telle que :

$$\begin{aligned} m_c \vec{a}_c = m_c \vec{g} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_{cx} = 0 \\ \dot{v}_{cy} = -g \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{cx} = 0 \\ v_{cy} = -gt \end{cases} \quad \text{car } \vec{v}_c(t=0) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_c = L \\ y_c = H - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \end{aligned}$$

car, à la date $t = 0$, le point C a pour coordonnées (L, H) dans le repère (O, x, y) .

De même, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 \begin{pmatrix} v_0 \cos \beta \\ v_0 \sin \beta \end{pmatrix}$ et une position initiale $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, la trajectoire du point P est donnée par la loi fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} m_p \vec{a}_p = m_p \vec{g} &\Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_{px} = 0 \\ \dot{v}_{py} = -g \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_{px} = v_0 \cos \beta \\ v_{py} = v_0 \sin \beta - gt \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_p = v_0 \cos \beta \times t \\ y_p = v_0 \sin \beta \times t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Le projectile atteint la cible à une date τ telle que :

$$x_p(\tau) = x_c(\tau) \Rightarrow v_0 \cos \beta \times \tau = L \Rightarrow \tau = \frac{L}{v_0 \cos \beta}$$

et :

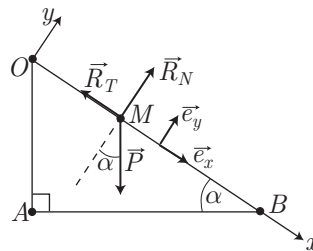
$$\begin{aligned} y_p(\tau) = y_c(\tau) &\Rightarrow v_0 \sin \beta \times \tau - \frac{1}{2}g\tau^2 = H - \frac{1}{2}g\tau^2 \\ &\Rightarrow v_0 \sin \beta \times \frac{L}{v_0 \cos \beta} = H \\ &\Rightarrow \tan \beta = \frac{H}{L} \end{aligned}$$

● 13 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. Dans le repère (O, x, y) , le point M est soumis aux forces :

$$\vec{R}_T \begin{pmatrix} -R_T \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{R}_N \begin{pmatrix} 0 \\ R_N \end{pmatrix} \quad \vec{P} \begin{pmatrix} mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \end{pmatrix}$$

dont l'annulation de la résultante conditionne l'équilibre de M :



$$\begin{cases} R_T = mg \sin \alpha \\ R_N = mg \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \frac{R_T}{R_N} = \tan \alpha$$

et où l'immobilité de M impose :

$$R_T < f R_N \Rightarrow \frac{R_T}{R_N} < f \Rightarrow \tan \alpha < f$$

2. Si la condition précédente n'est pas respectée, le point M adopte une accélération

$\vec{a} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$ soumise à la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_T + \vec{R}_N \Rightarrow \begin{pmatrix} m \ddot{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \sin \alpha - R_T \\ R_N - mg \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = mg \sin \alpha - R_T \\ R_N = mg \cos \alpha \end{cases}$$

Étant donné que M est en mouvement :

$$R_T = f R_N = mg f \cos \alpha \Rightarrow m \ddot{x} = mg (\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

aussi, en notant a l'accélération de M :

$$\ddot{x} = a = g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \Rightarrow \dot{x} = at + v_0$$

Or, à la date $t = 0$, M est en O ($x = 0$) sans vitesse initiale ($\dot{x} = 0$) :

$$0 = a \times 0 + v_0 \Rightarrow v_0 = 0 \Rightarrow \dot{x} = at \Rightarrow x = \frac{a}{2} t^2 + x_0 \quad (12)$$

avec :

$$0 = \frac{a}{2} \times 0 + x_0 \Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2} t^2$$

Le point M parcourt donc la distance $OB = \ell$ pendant une durée τ telle que :

$$\ell = \frac{a}{2} \tau^2 \Rightarrow \tau = \sqrt{\frac{2\ell}{a}} = \sqrt{\frac{2\ell}{g (\sin \alpha - f \cos \alpha)}}$$

Quant à la ligne de calcul (12), elle fournit la vitesse \dot{x} de M en B :

$$\dot{x}_B = a \tau = \sqrt{2\ell a} \Rightarrow \dot{x} = \sqrt{2g\ell (\sin \alpha - f \cos \alpha)}$$

Applications numériques :

$$\tau = \sqrt{\frac{2 \times 1}{10 \times [\sin(30^\circ) - 0,1 \cos(30^\circ)]}} \Rightarrow \tau = 0,7 \text{ s}$$

$$\dot{x}_B = \sqrt{2 \times 10 \times 1 \times [\sin(30^\circ) - 0,1 \cos(30^\circ)]} \Rightarrow \dot{x}_B = 2,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

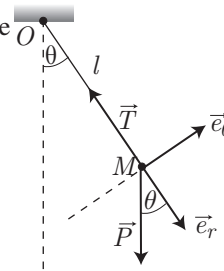
● 14 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. Dans un système de coordonnées polaires, l'accélération de M s'écrit :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\ell\dot{\theta}^2 \\ \ell\ddot{\theta} \end{pmatrix} \text{ car } r = \ell = \text{cte}$$

En vertu de la loi fondamentale de la dynamique, \vec{a} est lié au poids $\vec{P} \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \end{pmatrix}$ et à la tension $\vec{T} \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Rightarrow \begin{pmatrix} -m\ell\dot{\theta}^2 \\ m\ell\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta - T \\ -mg \sin \theta \end{pmatrix}$$



d'où :

$$T = mg \cos \theta + m\ell\dot{\theta}^2 \text{ et } \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (13)$$

En utilisant l'approximation « des petits angles » : $\sin \theta \simeq \theta$, cette équation devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

dont la solution générale : $\theta = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$, contient des constantes (A et B), déterminées par les conditions initiales :

$$t = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \Leftrightarrow \theta_0 = A$$

et :

$$\dot{\theta}(t = 0) = 0 \Rightarrow -A\omega \sin(0) + B\omega \cos(0) = 0 \Rightarrow B = 0$$

C'est pourquoi :

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}} t\right) = \theta_0 \cos(\omega t)$$

2. L'expression (13) de la tension T du ressort fait intervenir :

$$\dot{\theta} = -\sqrt{\frac{g}{\ell}} \theta_0 \sin(\omega t) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g}{\ell} \theta_0^2 [1 - \cos^2(\omega t)]$$

avec :

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g}{\ell} (\theta_0^2 - \theta^2)$$

Une nouvelle application de l'approximation « des petits angles » :

$$\cos \theta \simeq 1 - \frac{1}{2} \theta^2$$

conduit à :

$$T = mg \left(1 - \frac{1}{2} \theta^2\right) + m\ell \times \frac{g}{\ell} (\theta_0^2 - \theta^2) \Rightarrow T = mg \left(1 + \theta_0^2 - \frac{3}{2} \theta^2\right)$$

Lorsque le fil repasse par la verticale, c'est-à-dire lorsque $\theta = 0$, cette expression devient :

$$T_0 = mg(1 + \theta_0^2) \geq mg$$

Si le pendule n'était pas écarté initialement ($\theta_0 = 0$), la tension T_0 vaudrait $T_{0i} = mg$. Ainsi, l'inégalité : $T_0 \geq T_{0i}$ montre que l'élan acquis par M ajoute un surcroît de tension sur le fil.

● 15 ————— Concours des Mines-Ponts

1. Les vecteurs forces qui s'exercent sur $M(x, y)$ sont :

$$\vec{F} = -\lambda \overrightarrow{OM} = -\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda x \\ -\lambda y \end{pmatrix}; \vec{R} = \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix}; \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

Ainsi l'équilibre de M est assujéti à l'équation :

$$\begin{aligned} \vec{F} + \vec{R} + \vec{P} = \vec{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda x \\ -\lambda y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} R_x = \lambda x \\ R_y = \lambda y + mg \end{cases} \end{aligned}$$

2. Le vecteur \vec{v} étant toujours tangent à la courbe (C) , elle-même perpendiculaire à \vec{R} , il s'ensuit que :

$$\vec{v} \perp \vec{R}$$

Soient $v_x = \frac{dx}{dt}$ et $v_y = \frac{dy}{dt}$ les composantes de \vec{v} , le produit scalaire $\vec{R} \cdot \vec{v}$ est toujours nul car $\vec{v} \perp \vec{R}$:

$$\begin{aligned} \vec{R} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow R_x v_x + R_y v_y = 0 \\ &\Rightarrow R_x \frac{dx}{dt} + R_y \frac{dy}{dt} = 0 \end{aligned}$$

3. Compte tenu des expressions obtenues pour R_x et R_y , l'équation précédente s'écrit aussi :

$$\lambda x \frac{dx}{dt} + \lambda y \frac{dy}{dt} + mg \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda}{2} x^2 + \frac{\lambda}{2} y^2 + mgy \right) = 0$$

ce qui signifie qu'il existe une constante K telle que :

$$\frac{\lambda}{2} x^2 + \frac{\lambda}{2} y^2 + mgy = K$$

Cette constante s'obtient grâce à l'information fournie par l'énoncé : la courbe (C) passe par le point $A \left(0, -2 \frac{mg}{\lambda} \right)$, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} K &= \frac{\lambda}{2} x^2 + \frac{\lambda}{2} y^2 + mgy = \frac{\lambda}{2} \left(-2 \frac{mg}{\lambda} \right)^2 + mg \times \frac{-2mg}{\lambda} \\ &= \frac{2m^2g^2}{\lambda} - 2 \frac{m^2g^2}{\lambda} = 0 \end{aligned}$$

Par conséquent, la courbe (C) a pour expression analytique :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{\lambda}{2}y^2 + mgy = 0 &\Rightarrow x^2 + y^2 + 2\frac{mg}{\lambda}y = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + 2\frac{mg}{\lambda}y + \left(\frac{mg}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{mg}{\lambda}\right)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + 2\frac{mg}{\lambda}y + \left(\frac{mg}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{mg}{\lambda}\right)^2 \end{aligned}$$

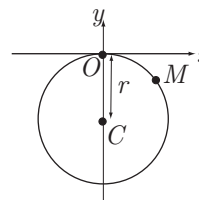
où l'on reconnaît l'identité remarquable :

$$\left(y + \frac{mg}{\lambda}\right)^2 = y^2 + 2\frac{mg}{\lambda}y + \left(\frac{mg}{\lambda}\right)^2$$

qui conduit finalement à :

$$x^2 + \left(y + \frac{mg}{\lambda}\right)^2 = \left(\frac{mg}{\lambda}\right)^2$$

Il s'agit de l'expression analytique d'un cercle de centre $C\left(0, -\frac{mg}{\lambda}\right)$ et de rayon $r = \frac{mg}{\lambda}$:



● 16 ————— Lycée Clémenceau, Nantes

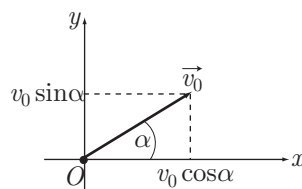
1. L'obus, d'accélération $\vec{a} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$, est soumis à son poids $m\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ auquel cas la loi de la dynamique impose :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{cases}$$

ce qui signifie que les composantes v_x et v_y du vecteur vitesse \vec{v} vérifient les équations différentielles :

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = 0 \\ a_y = \dot{v}_y = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = A \\ v_y = -gt + B \end{cases}$$

où les constantes A et B dépendent de la direction prise par \vec{v}_0 à la date $t = 0$:



C'est pourquoi, lorsque $t = 0$:

$$\begin{cases} v_{x0} = v_0 \cos \alpha \\ v_{y0} = v_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = v_0 \cos \alpha \\ B = v_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha \\ v_y = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases} \quad (14)$$

Notamment, lorsque l'obus est tiré verticalement :

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_y = v_0 - gt$$

d'où l'on déduit l'expression de l'altitude y :

$$v_y = \dot{y} = v_0 - gt \Rightarrow y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 + C$$

La constante C est alors ajustée de manière qu'à la date $t = 0$, y soit nul :

$$0 = v_0 \times 0 - \frac{1}{2} g \times (0)^2 + C = C \Rightarrow y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2 = t \times \left(v_0 - \frac{1}{2} gt \right) \quad (15)$$

Or, l'équation : $\dot{y} = v_0 - gt$ montre que y est *maximum* à une date t_0 telle que :

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_0} = 0 \Rightarrow v_0 - gt_0 = 0 \Rightarrow t_0 = \frac{v_0}{g}$$

et, à cette date, y prend la valeur H , vérifiant l'équation (15) :

$$H = t_0 \times \left(v_0 - \frac{1}{2} gt_0 \right) = \frac{v_0}{g} \times \left(v_0 - \frac{1}{2} g \times \frac{v_0}{g} \right) = \frac{v_0}{g} \times \frac{v_0}{2}$$

soit, finalement :

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \quad (16)$$

2. Les coordonnées x et y de l'obus s'obtiennent à partir des composantes de \vec{v} , exprimées par le résultat (14) :

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ v_y = \dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \times t + C \\ y = v_0 \sin \alpha \times t - \frac{1}{2} gt^2 + D \end{cases}$$

Les constantes C et D prennent alors des valeurs qui assurent la présence de l'obus en $O(0,0)$ à la date $t = 0$:

$$\begin{cases} 0 = v_0 \cos \alpha \times 0 + C \\ 0 = v_0 \sin \alpha \times 0 - \frac{1}{2} g \times (0)^2 + D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = 0 \end{cases} \quad (17)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \times t \\ y = v_0 \sin \alpha \times t - \frac{1}{2} gt^2 \end{cases} \quad (18)$$

Deux cas sont envisageables, selon les valeurs de α :

- Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la première relation du système (18) révèle que :

$$x = v_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \times t = 0 \times t = 0$$

tandis que :

$$y = v_0 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \times t - \frac{1}{2} gt^2 = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2$$

Aussi, y varie dans le temps tandis que x demeure nul. La trajectoire est donc un segment de droite confondu avec l'axe vertical Oy .

- Si $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, le système (18) conduit à :

$$x = v_0 \cos \alpha \times t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

de sorte que :

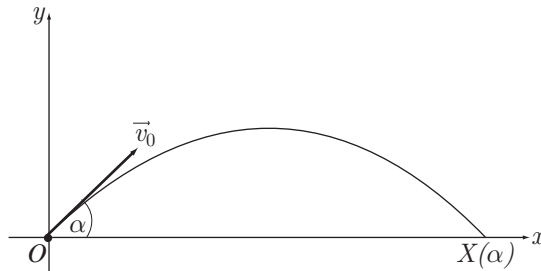
$$y = v_0 \sin \alpha \times \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \times \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2$$

soit encore :

$$y = \tan \alpha \times x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \times x^2 \Leftrightarrow y = x \times \left(\tan \alpha - \frac{g x}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) \quad (19)$$

Dans ce cas, les trajectoires correspondant à cette expression analytique sont des paraboles.

3. La portée $X(\alpha)$ représente la distance, depuis O , où atterrit l'obus, c'est-à-dire l'abscisse non nulle à laquelle correspond l'altitude $y = 0$:



Par conséquent, $X(\alpha)$ est solution de l'équation (19) :

$$\begin{aligned} 0 &= X(\alpha) \times \left[\tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} X(\alpha) \right] = 0 \\ \Rightarrow \tan \alpha &= \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} X(\alpha) \text{ car } X(\alpha) \neq 0 \\ \Rightarrow X(\alpha) &= \tan \alpha \times \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \text{ où } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \Rightarrow X(\alpha) &= \frac{2v_0^2 \times \sin \alpha \cos \alpha}{g} \end{aligned}$$

où l'on reconnaît l'identité trigonométrique :

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin(2\alpha) \Rightarrow X(\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \times \sin(2\alpha)$$

Étant donné que $\sin(2\alpha) \leq 1$, $X(\alpha)$ admet pour valeur maximale :

$$X_m = \frac{v_0^2}{g}$$

lorsque α prend la valeur α_m telle que :

$$\sin(2\alpha_m) = 1 \Rightarrow 2\alpha_m = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

4. L'altitude y devient maximale à une date t_m qui annule la dérivée $\frac{dy}{dt}$, exprimée par le système d'équations (14) :

$$v_y = \frac{dy}{dt} \Rightarrow \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t_m} = v_0 \sin \alpha - gt_m = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Or, à cette date, l'altitude y de l'obus prend une valeur maximale y_m directement calculable à partir du résultat (18) :

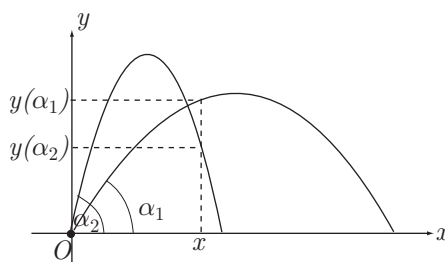
$$\begin{aligned} y_m &= t_m \times \left(v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} gt_m \right) \\ &= \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \times \left(v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g \times \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right) \\ &= \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \times \left(v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} v_0 \sin \alpha \right) \\ &= \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \times \frac{v_0 \sin \alpha}{2} \end{aligned}$$

soit encore :

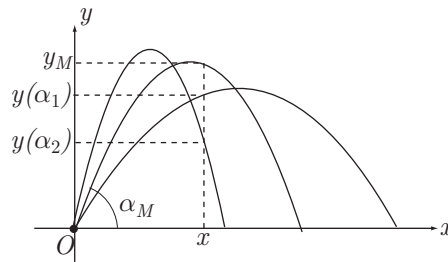
$$y_m = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

5. Pour une valeur de x fixée, l'altitude $y(\alpha)$ atteinte par l'obus dépend de α conformément à l'expression (19) :

$$y(\alpha) = x \times \left(\tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right)$$



En faisant varier α de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $y(\alpha)$ varie également et atteint une valeur maximale que l'obus ne pourra pas excéder ; on appelle α_M l'angle α correspondant et y_M cette altitude maximale.



Ainsi définie, α_M est la valeur de α qui annule la dérivée $\frac{dy}{d\alpha}$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{d\alpha} \right|_{\alpha_M} &= x \times \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha_M} - \frac{g \times 2 \cos \alpha_M \sin \alpha_M}{2v_0^2 \cos^4 \alpha_M} x \right) \\ &= x \times \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha_M} - \frac{g \sin \alpha_M}{v_0^2 \cos^3 \alpha_M} x \right) \\ &= \frac{x}{\cos^2 \alpha_M} \left(1 - \frac{gx}{v_0^2} \tan \alpha_M \right) \end{aligned}$$

Aussi :

$$\left. \frac{dy}{d\alpha} \right|_{\alpha_M} = 0 \Rightarrow 1 - \frac{gx}{v_0^2} \tan \alpha_M = 0 \Rightarrow \tan \alpha_M = \frac{v_0^2}{gx}$$

En outre :

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha_M} = 1 + \tan^2 \alpha_M = 1 + \frac{v_0^4}{g^2 x^2}$$

permet de calculer y_M grâce à l'identité (19) :

$$\begin{aligned} y_M &= x \times \left(\tan \alpha_M - \frac{gx}{2v_0^2} \times \frac{1}{\cos^2 \alpha_M} \right) \\ &= x \times \left[\frac{v_0^2}{gx} - \frac{gx}{2v_0^2} \times \left(1 + \frac{v_0^4}{g^2 x^2} \right) \right] \\ &= x \times \left[\frac{v_0^2}{2gx} - \frac{gx}{2v_0^2} \right] \end{aligned}$$

soit encore :

$$y_M = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Cette équation montre que l'ensemble des points (y_M, x) , au-dessus desquels l'obus ne peut jamais passer, est une parabole. Celle-ci coupe l'axe des abscisses lorsque :

$$y_M = 0 \Rightarrow \frac{g}{2v_0^2} x^2 = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow x^2 = \frac{v_0^4}{g^2}$$

c'est-à-dire pour deux valeurs de x :

$$x_1 = -\frac{v_0^2}{g} \text{ et } x_2 = \frac{v_0^2}{g}$$

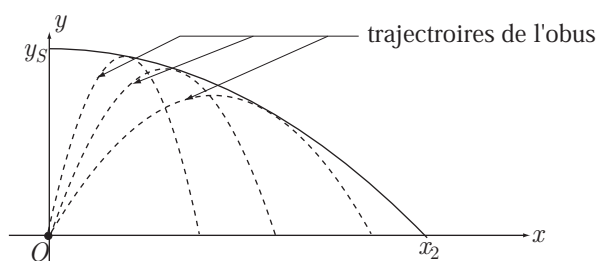
Son sommet S admet donc pour abscisse :

$$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2} = 0$$

et pour ordonnée :

$$y_S = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x_S^2 = \frac{v_0^2}{2g}$$

Connaissant le sommet $S \left(0, \frac{v_0^2}{2g} \right)$, le tracé de la parabole de sûreté devient aisé :



6. Dans le cas où $M(x, y)$ est intérieur à la parabole de sûreté, il existe au moins un angle α vérifiant la relation (19) :

$$y = x \times \left(\tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x \right) \Rightarrow \frac{y}{x} = \tan \alpha - \frac{gx}{2v_0^2} \times \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

et l'identité trigonométrique : $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$ fournit :

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha - \frac{gx}{2v_0^2} - \frac{gx}{2v_0^2} \tan^2 \alpha \Rightarrow \frac{gx}{2v_0^2} \tan^2 \alpha - \tan \alpha + \frac{y}{x} + \frac{gx}{2v_0^2} = 0$$

que l'on peut aussi écrire, en posant $X = \tan \alpha$:

$$X^2 - \frac{2v_0^2}{gx} X + \left(1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2} \right) = 0$$

Le discriminant réduit de cette équation du second degré vaut :

$$\Delta' = \frac{v_0^4}{g^2 x^2} - \left(1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2} \right)$$

Or, M étant situé sous la parabole de sûreté, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} y < y_M &\Rightarrow y < \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2 \\ &\Rightarrow \frac{2v_0^2 y}{gx^2} < \frac{v_0^4}{g^2 x^2} - 1 \\ &\Rightarrow 1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2} < \frac{v_0^4}{g^2 x^2} \\ &\Rightarrow \Delta' > 0 \end{aligned}$$

Cette inégalité assure l'existence de deux solutions distinctes à l'équation du second degré :

$$X_1 = \frac{v_0^2}{gx} + \sqrt{\Delta'} \text{ et } X_2 = \frac{v_0^2}{gx} - \sqrt{\Delta'}$$

auxquelles sont associés deux angles α_1 et α_2 tels que :

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1 &= \frac{v_0^2}{gx} + \sqrt{\Delta'} \text{ et } \tan \alpha_2 = \frac{v_0^2}{gx} - \sqrt{\Delta'} \\ \text{avec } \Delta' &= \left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2 - \left(1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2}\right) \end{aligned}$$

Notamment, le point $M\left(H, \frac{H}{2}\right)$ impose, compte tenu du résultat (16) :

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow x = H = \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow \frac{v_0^2}{gx} = 2 \text{ et } y = \frac{H}{2} = \frac{x}{2}$$

c'est-à-dire :

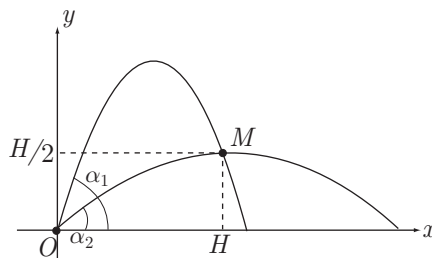
$$\Delta' = \left(\frac{v_0^2}{gx}\right)^2 - \left(1 + 2 \times \frac{v_0^2}{gx} \times \frac{y}{x}\right) = (2)^2 - \left(1 + 2 \times 2 \times \frac{1}{2}\right) = 4 - 3 = 1$$

de sorte que :

$$\tan \alpha_1 = \frac{v_0^2}{gx} + \sqrt{\Delta'} = 2 + 1 = 3 \Rightarrow \alpha_1 \simeq 71,6^\circ$$

et :

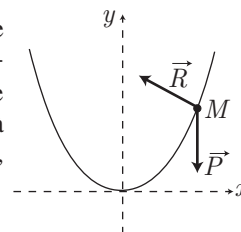
$$\tan \alpha_2 = \frac{v_0^2}{gx} - \sqrt{\Delta'} = 2 - 1 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ$$



● 17 ————— Lycée Carnot, Dijon

Sur le paraboloïde d'équation $y = ax^2$, le point matériel M est soumis à son poids \vec{P} et à la réaction \vec{R} du bol. La méconnaissance des composantes de \vec{R} n'encourage pas l'emploi de la loi fondamentale de la dynamique, tandis que l'énergie potentielle d'une force qui ne travaille pas (\vec{R} est perpendiculaire au déplacement de M) est constante ; on la notera E_{p0} . Quant à l'énergie potentielle de pesanteur de M , choisie nulle en $y = 0$, elle vaut :

$$E_{pp} = mgy = mga x^2$$



et son énergie cinétique s'écrit :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2)$$

car $y = ax^2 \Rightarrow \dot{y} = 2a x \dot{x}$

C'est pourquoi l'énergie mécanique de M adopte la forme suivante :

$$\begin{aligned} E_m &= mga x^2 + E_{p0} + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 4a^2 x^2 \dot{x}^2) \\ &= E_{p0} + m x^2 (ga + 2a^2 \dot{x}^2) + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \\ &\simeq E_{p0} + mga x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \end{aligned}$$

en négligeant $a^2 \dot{x}^2 = \left[\frac{d(ax)}{dt} \right]^2$ devant ga .

L'absence de force dissipative assure, en outre, la conservation de l'énergie mécanique dans le temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m \dot{x} \ddot{x} + 2mga x \dot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} + 2gax = 0$$

Cette équation différentielle admet une solution sinusoïdale dont la propulsion ω est aussi celle des petites oscillations :

$$\omega = \sqrt{2ga}$$

● 18 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. Outre son poids et la poussée d'Archimède qui se compensent, le navire est soumis à la force de propulsion \vec{f}_p et à la résistance \vec{f} de l'eau. Son accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ est soumise à la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}_p + \vec{f} \quad (20)$$

Lorsque la vitesse limite $v_\ell = 18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ est atteinte, le navire se déplace à vitesse constante, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned}\vec{0} = \vec{f}_p + \vec{f} &\Rightarrow \vec{f}_p = -\vec{f} \Rightarrow f_p = f \text{ avec } f_p = \|\vec{f}_p\| \text{ et } f = \|\vec{f}\| \\ &\Rightarrow f_p = k \times v_\ell^3\end{aligned}$$

Cette force de propulsion provient, du reste, d'un moteur qui fournit une puissance $\mathcal{P} = 4 \times 10^6 \text{ W}$. Aussi, en admettant que toute cette puissance soit transmise sous forme de propulsion, elle correspond aussi à la puissance de la force \vec{f}_p au demeurant définie par :

$$\mathcal{P} = \vec{f}_p \cdot \vec{v}_\ell = f_p \times v_\ell$$

car \vec{f}_p et \vec{v}_ℓ ont même sens et même direction. Il s'ensuit que :

$$f_p = \frac{\mathcal{P}}{v_\ell} \Rightarrow \frac{\mathcal{P}}{v_\ell} = k \times v_\ell^3 \Rightarrow k = \frac{\mathcal{P}}{v_\ell^4}$$

avec :

$$v_\ell = 18 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow k = \frac{4 \times 10^6}{(5)^4} \Rightarrow k = 6\,400 \text{ kg} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$$

2. En arrêtant le moteur, on supprime la force de propulsion, auquel cas la loi (20) devient :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

où \vec{f} est une force de frottement opposée au déplacement du navire, ce qui signifie aussi qu'en notant \vec{u} un vecteur unitaire directeur de \vec{v} :

$$\begin{aligned}\vec{v} = v \times \vec{u} &\Rightarrow \vec{f} = -kv^3 \vec{u} \\ &\Rightarrow m \frac{dv}{dt} \vec{u} = -kv^3 \vec{u} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{v^3} \frac{dv}{dt} = \frac{k}{m}\end{aligned}$$

dans laquelle on remarque que :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \right) = -\frac{2}{v^3} \times \frac{dv}{dt} \Rightarrow -\frac{1}{v^3} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \right)$$

L'équation différentielle en v devient ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v^2} \right) = \frac{2k}{m}$$

et admet pour solution :

$$\frac{1}{v^2} = \frac{2k}{m} t + A \Rightarrow t = \frac{m}{2k} \times \frac{1}{v^2} - \frac{mA}{2k}$$

où A est une constante.

Appelons t_ℓ la date à laquelle le moteur est arrêté (la vitesse du navire

vaut v_ℓ) et soit t_1 la date à laquelle la vitesse du navire atteint la valeur $v_1 = 16 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 4,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La loi précédente fournit :

$$t_1 = \frac{m}{2k} \times \frac{1}{v_1^2} - \frac{mA}{2k} \text{ et } t_\ell = \frac{m}{2k} \times \frac{1}{v_\ell^2} - \frac{mA}{2k}$$

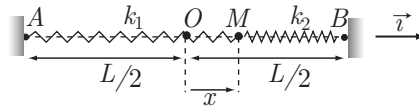
ce qui signifie que pour passer de v_ℓ à v_1 , le navire met un temps :

$$\Delta t = t_1 - t_\ell = \frac{m}{2k} \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_\ell^2} \right) = \frac{12 \times 10^6}{2 \times 6400} \times \left[\frac{1}{(4,44)^2} - \frac{1}{(5)^2} \right] \Rightarrow \Delta t = 10 \text{ s}$$

● 19 ————— Lycée Clémenceau, Nantes

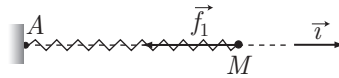
1. L'origine O de l'axe des abscisses se trouvant au milieu de la tige AB , il s'ensuit que :

$$AM = \frac{L}{2} + x \text{ et } BM = BO - x = \frac{L}{2} - x$$



Le ressort (1), ayant une longueur AM , il exerce sur M une force :

$$\vec{f}_1 = -k_1 (AM - \ell_1) \vec{i}$$



En revanche le ressort (2) exerce une force $\vec{f}_2 = -k_2 (BM - \ell_2) \vec{u}$ où $\vec{u} = -\vec{i}$ est un vecteur unitaire orienté vers l'allongement de ce ressort, en conséquence de quoi il exerce sur M une force :

$$\vec{f}_2 = -k_2 (BM - \ell_2) (-\vec{i}) = k_2 (BM - \ell_2) \vec{i}$$

Ce faisant, M est soumis à une force résultante :

$$\begin{aligned} \vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 &= [-k_1 (AM - \ell_1) + k_2 (BM - \ell_2)] \vec{i} \\ &= \left[-k_1 \left(\frac{L}{2} + x - \ell_1 \right) + k_2 \left(\frac{L}{2} - x - \ell_2 \right) \right] \vec{i} \\ &= \left[-(k_1 + k_2) x + \frac{(k_2 - k_1)L}{2} + k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2 \right] \vec{i} \end{aligned}$$

La position d'équilibre de M se trouve alors à une abscisse $x = x_e$ qui annule \vec{f} :

$$\vec{f} = \vec{0} \Rightarrow -(k_1 + k_2) x_e + \frac{(k_2 - k_1)L}{2} + k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2 = 0 \quad (21)$$

$$\Rightarrow (k_1 + k_2) x_e = \frac{k_2 - k_1}{2} L + k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2 \quad (22)$$

$$\Rightarrow x_e = \frac{(k_2 - k_1)L}{2(k_1 + k_2)} + \frac{k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2}{k_1 + k_1} \quad (23)$$

2. Lorsqu'on écarte M de sa position d'équilibre, la résultante des forces provoque son accélération $\vec{a} = \ddot{x} \vec{i}$, conformément à la loi fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{a} = \vec{f} &\Rightarrow m \ddot{x} \vec{i} = \left[-(k_1 + k_2)x + \frac{k_2 - k_1}{2}L + k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2 \right] \vec{i} \\ &\Rightarrow m \ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + \frac{k_2 - k_1}{2}L + k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2 \end{aligned}$$

où l'on retrouve l'expression (22) de x_e :

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)x_e &= \frac{k_2 - k_1}{2}L + k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2 \\ &\Rightarrow m \ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + (k_1 + k_2)x_e \\ &\Rightarrow m \ddot{x} = -(k_1 + k_2)(x - x_e) \\ &\Rightarrow \ddot{x} + \frac{k_1 + k_2}{m}(x - x_e) = 0 \end{aligned}$$

Si $\varepsilon = x - x_e$ désigne l'écart à l'équilibre :

$$x = x_e + \varepsilon \Rightarrow \dot{x} = \dot{\varepsilon} \Rightarrow \ddot{x} = \ddot{\varepsilon}$$

ce qui simplifie l'équation du mouvement :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k_1 + k_2}{m}\varepsilon = 0 \text{ et } \varepsilon = x - x_e$$

La solution générale de cette équation :

$$\varepsilon = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

montre que des oscillations se produisent autour de la position d'équilibre, avec une pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

c'est-à-dire une période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$$

3. Le ressort (1) est à l'origine d'une énergie potentielle :

$$E_{p1} = \frac{1}{2} k_1 (AM - \ell_1)^2 = \frac{1}{2} k_1 \left(x + \frac{L}{2} - \ell_1 \right)^2$$

tandis que le ressort (2) génère une énergie potentielle :

$$E_{p2} = \frac{1}{2} k_2 (BM - \ell_2)^2 = \frac{1}{2} k_2 \left(-x + \frac{L}{2} - \ell_2 \right)^2$$

C'est pourquoi, M est soumis à l'énergie potentielle :

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} = \frac{1}{2} k_1 \left(x + \frac{L}{2} - \ell_1 \right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(-x + \frac{L}{2} - \ell_2 \right)^2$$



L'énergie potentielle de pesanteur a été délibérément ignorée. Cette attitude est motivée par deux arguments :

- l'énoncé ne précisant pas que l'on travaille dans le champ de pesanteur, rien n'interdit d'admettre l'absence de gravité ;
- si l'on tenait compte de l'énergie potentielle de pesanteur E_{pp} , celle-ci demeurerait constante au cours de l'expérience (la tige étant horizontale). Par conséquent, on peut définir l'altitude de la tige AB comme origine des énergies potentielles de pesanteur, auquel cas E_{pp} est constamment nul.

En outre, l'énergie cinétique de M est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

si bien que l'énergie mécanique de M vaut :

$$E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k_1 \left(x + \frac{L}{2} - \ell_1 \right)^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(-x + \frac{L}{2} - \ell_2 \right)^2$$

Étant donné que le système est conservatif, l'énergie mécanique ne varie pas dans le temps, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \frac{dE_m}{dt} = 0 &\Rightarrow m \dot{x} \ddot{x} + k_1 \dot{x} \left(x + \frac{L}{2} - \ell_1 \right) + k_2 (-\dot{x}) \left(-x + \frac{L}{2} - \ell_2 \right) = 0 \\ &\Rightarrow \dot{x} \left[m \ddot{x} + (k_1 + k_2) x + \frac{k_1 - k_2}{2} L - k_1 \ell_1 + k_2 \ell_2 \right] = 0 \\ &\Rightarrow m \ddot{x} + (k_1 + k_2) x + \frac{k_1 - k_2}{2} L - k_1 \ell_1 + k_2 \ell_2 = 0 \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\frac{k_2 - k_1}{2} L + k_1 \ell_1 - k_2 \ell_2 = (k_1 + k_2) x_e$$

cette équation s'écrit aussi :

$$m \ddot{x} + (k_1 + k_2) x - (k_1 + k_2) x_e = 0 \Rightarrow m \ddot{x} + (k_1 + k_2) (x - x_e) = 0$$

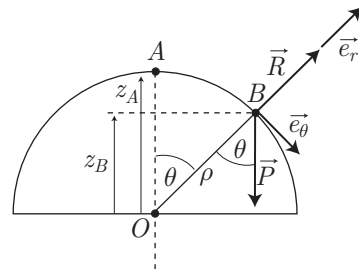
ce qui confirme l'équation différentielle obtenue à la question précédente :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k_1 + k_2}{m} \varepsilon = 0$$

● 20

QCM

Étant donné le mouvement de rotation dont est animé M , il convient d'exprimer les vecteurs en coordonnées polaires $(0, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$; les forces $\vec{P} \begin{pmatrix} -mg \cos \theta \\ mg \sin \theta \end{pmatrix}$ et $\vec{R} \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix}$ sont à l'origine de l'accélération de M qui effectue un mouvement de rotation autour de O tant qu'il y a contact entre M et la demi-boule :



$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Rightarrow m \begin{pmatrix} -v^2/\rho \\ \rho \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R - mg \cos \theta \\ mg \sin \theta \end{pmatrix}$$

où v est la vitesse de M . Il s'ensuit que :

$$R = m \left(g \cos \theta - \frac{v^2}{\rho} \right)$$

Le contact entre M et la demi-boule est, du reste, conditionné par :

$$R > 0 \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} < g \cos \theta \quad (24)$$

De plus, l'absence de force de frottement assure la conservation de l'énergie mécanique entre deux points A et B du mouvement de M (l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est choisie au niveau de O) d'altitudes respectives $z_A = \rho$ et $z_B = \rho \cos \theta$:

$$E_m(A) = mg\rho \text{ et } E_m(B) = \frac{1}{2}mv^2 + mg\rho \cos \theta$$

D'où :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\rho \cos \theta = mg\rho \Rightarrow \frac{v^2}{\rho} = g(2 - 2 \cos \theta)$$

Aussi, la condition de contact (24) équivaut à :

$$g \cos \theta > g(2 - 2 \cos \theta) \Rightarrow \cos \theta > \frac{2}{3}$$

C'est pourquoi M quitte la demi-boule pour un angle θ_0 tel que :

$$\cos \theta_0 = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_0 = 48,2^\circ \text{ (réponse b.)}$$

● 21 ————— Lycée Charlemagne, Paris

1. (a) On note $\overrightarrow{OM} = z \vec{u}$ la position de la navette, d'où sont issues les définitions de sa vitesse \vec{v} et de son accélération \vec{a} :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dz}{dt} \vec{u} = v \vec{u} \text{ et } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u} \quad (25)$$

En considérant galiléen le référentiel terrestre pendant le temps de la chute de la navette, la loi fondamentale de la dynamique impose :

$$\begin{aligned} m \vec{a} = m \vec{g} &\Rightarrow -m \frac{dv}{dt} \vec{u} = -mg \vec{u} \\ &\Rightarrow \frac{dv}{dt} = g \\ &\Rightarrow v = gt + A \end{aligned}$$

où A est une constante ajustée à la condition initiale ($t = 0 \Rightarrow v = v_0$) :

$$v_0 = A \Rightarrow v = gt + v_0 \quad (26)$$

La définition (25) de v conduit alors à :

$$\frac{dz}{dt} = -v = -gt - v_0$$

qui admet pour solution générale :

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0t + B$$

dont la constante B s'obtient en remarquant qu'à la date $t = 0$, $z = h_0$:

$$h_0 = B \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 - v_0t + h_0$$

- (b) La navette n'est soumise qu'à son poids, qui est une force conservative, en raison de quoi l'énergie mécanique E_m en $z = h_0$ et celle en $z = 0$ sont égales :

$$E_m(h_0) = E_m(0) \Rightarrow E_c(h_0) + E_p(h_0) = E_c(0) + E_p(0)$$

En notant v la vitesse avec laquelle la navette arrive au sol, au demeurant choisi comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur ($E_p(0) = 0$), l'équation précédente se développe aisément :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$$

Application numérique :

$$v = \sqrt{(8000)^2 + 2 \times 10 \times 10^5} \Rightarrow v \simeq 8124 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- (c) Le résultat (26) montre que la navette arrive au sol à une date t telle que :

$$v = gt + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{g}$$

Application numérique :

$$t = \frac{8124 - 8000}{10} = 12,4 \text{ s}$$

2. (a) La navette est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}$ et à la force de frottement de l'atmosphère $\vec{F} = \mu C v^2 \vec{u}$, en conséquence de quoi son accélération $\vec{a} = -\frac{dv}{dt} \vec{u}$ vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

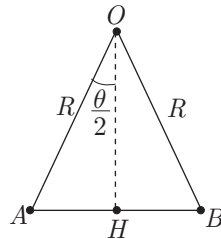
$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{P} + \vec{F} \Rightarrow -m \frac{dv}{dt} \vec{u} = -mg\vec{u} + \mu C v^2 \vec{u} \\ &\Rightarrow m \frac{dv}{dt} = mg - \mu C v^2 \end{aligned}$$

- (b) L'équation différentielle précédente montre qu'il existe une vitesse limite v_ℓ à partir de laquelle la navette ne peut plus accélérer sa chute ; pour $v = v_\ell$:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow mg - \mu C v_\ell^2 = 0 \Rightarrow v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\mu C}}$$

● 22 ————— Concours ENSI

1. Les points A et B appartenant au même cercle de rayon R , $OA = OB$ rend le triangle (OAB) isocèle, en conséquence de quoi la hauteur OH (perpendiculaire à AB) est aussi bissectrice de θ (coupant l'angle θ en deux parties égales) et est également médiatrice de $[AB]$ ($AH = HB = \frac{AB}{2}$):

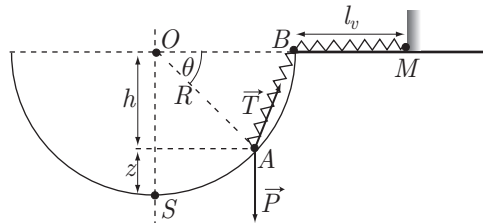


Il s'ensuit que :

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{AH}{OA} = \frac{AH}{R} \Rightarrow AH = R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow AB = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

2. Le point A est soumis à :

- la tension \vec{T} du ressort, de longueur $l = AB + BM$:



Cette force conservative dérive de l'énergie potentielle :

$$E_{pr} = \frac{1}{2} k (l - l_v)^2 = \frac{1}{2} k (AB + BM - BM)^2 = \frac{1}{2} k (AB)^2$$

soit encore :

$$E_{pr} = \frac{1}{2} k \left[2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]^2 = kR^2 \times 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

où l'identité trigonométrique : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ conduit à :

$$2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 - \cos \theta \Rightarrow E_{pr} = kR^2 - kR^2 \cos \theta$$

- son poids $P = mg$, dont l'énergie potentielle par rapport au point S vaut : $E_{pp} = mgz$. Or :

$$z + h = OS = R \Rightarrow z = R - h = R - R \sin \theta \text{ car } h = R \sin \theta$$

$$\Rightarrow E_{pp} = mgR - mgR \sin \theta$$

De cette étude, découle l'expression de l'énergie potentielle émanant du poids et de la tension du ressort :

$$E_p = E_{pp} + E_{pr} = mgR + kR^2 - R(kR \cos \theta + mg \sin \theta)$$

3. S'il existe une position d'équilibre, elle correspond nécessairement à un angle θ_e qui annule $\frac{dE_p}{d\theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{dE_p}{d\theta} = -R(-kR \sin \theta + mg \cos \theta) &\Rightarrow -kR \sin \theta_e + mg \cos \theta_e = 0 \\ &\Rightarrow kR \sin \theta_e = mg \cos \theta_e \\ &\Rightarrow \tan \theta_e = \frac{mg}{kR} \end{aligned}$$

En outre :

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = -R(-kR \cos \theta - mg \sin \theta) \Rightarrow \left. \frac{d^2E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_e} = R(kR \cos \theta_e + mg \sin \theta_e)$$

où :

$$\begin{aligned} mg \cos \theta_e = kR \sin \theta_e &\Rightarrow mg = kR \frac{\sin \theta_e}{\cos \theta_e} \\ &\Rightarrow \left. \frac{d^2E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_e} = R \left(kR \cos \theta_e + kR \frac{\sin^2 \theta_e}{\cos \theta_e} \right) \\ &\Rightarrow \left. \frac{d^2E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_e} = \frac{kR^2}{\cos \theta_e} \underbrace{(\cos^2 \theta_e + \sin^2 \theta_e)}_{=1} \end{aligned}$$

Et, puisque :

$$\theta_e \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[\Rightarrow \cos \theta_e > 0$$

il s'ensuit que :

$$\left. \frac{d^2E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_e} = \frac{kR^2}{\cos \theta_e} > 0$$

ce qui révèle la stabilité de l'équilibre en $\theta = \theta_e$.

4. La relation trigonométrique : $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \theta_e} &= 1 + \tan^2 \theta_e = 1 + \left(\frac{mg}{kR}\right)^2 = \frac{k^2R^2 + m^2g^2}{k^2R^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\cos \theta_e} &= \frac{\sqrt{k^2R^2 + m^2g^2}}{kR} \end{aligned}$$

ce qui fournit :

$$\left. \frac{d^2E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_e} = \frac{kR^2}{\cos \theta_e} = R\sqrt{k^2R^2 + m^2g^2}$$

Or, la pulsation ω des oscillations qui se produisent au cours d'un mouvement circulaire de rayon R vaut :

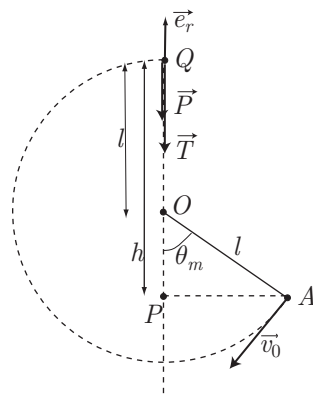
$$\omega = \sqrt{\frac{1}{mR^2} \left. \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_e}} = \sqrt{\frac{1}{mR} \sqrt{k^2 R^2 + m^2 g^2}}$$

c'est-à-dire :

$$\omega = \left(\frac{k^2}{m^2} + \frac{g^2}{R^2} \right)^{1/4}$$

● 23 ————— Lycée Janson de Sailly, Paris

On note A le point de départ de la bille et P la projection de A sur l'axe vertical passant par le centre O de la trajectoire circulaire de la bille. Lorsque celle-ci atteint son point culminant Q , elle est soumise à son poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_r$ et à la tension $\vec{T} = -T \vec{e}_r$ du fil :



Les points P et Q sont séparés d'une distance :

$$h = PO + OQ = l \cos \theta_m + l = l(1 + \cos \theta_m)$$

En A , la bille possède une énergie cinétique $E_c(A) = \frac{1}{2} m v_0^2$ et une énergie potentielle de pesanteur $E_{pp}(A)$ que nous choisissons nulle arbitrairement (l'altitude de P est ainsi définie comme référence pour les énergies potentielles de pesanteur) ; son énergie mécanique vaut :

$$E_m(A) = E_c(A) + E_{pp}(A) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

En Q , la bille possède une énergie cinétique $E_c(B) = \frac{1}{2} m v^2$ et une énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp}(Q) = mgh = mgl(1 + \cos \theta_m)$$

Entre A et Q , seul le poids (conservatif) exerce un travail, en raison de quoi l'énergie potentielle de la bille demeure constante :

$$\begin{aligned} E_m(Q) = E_m(A) &\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 + \cos\theta_m) = \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &\Rightarrow v^2 + 2gl(1 + \cos\theta_m) = v_0^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$v^2 = v_0^2 - 2gl(1 + \cos\theta_m) \quad (27)$$

En outre, dans un système de coordonnées polaires, la bille possède, en Q , une accélération :

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega})\vec{e}_\theta$$

où :

$$\begin{cases} r = l = \text{cte} \\ \omega = \frac{v}{l} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{v^2}{l}\vec{e}_r + l\dot{\omega}\vec{e}_\theta$$

et la loi fondamentale de la dynamique stipule que :

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P} = -\frac{mv^2}{l}\vec{e}_r + ml\dot{\omega}\vec{e}_\theta = -T\vec{e}_r - mg\vec{e}_r$$

La projection de cette équation vectorielle sur l'axe vertical PQ fournit alors :

$$\frac{mv^2}{l} = T + mg \Rightarrow T = m\left(\frac{v^2}{l} - g\right)$$

Pour que la bille fasse un tour complet, il est nécessaire que le fil soit tendu lorsque la bille se trouve en Q , ce qui signifie que T ne peut y être nul :

$$T > 0 \Rightarrow \frac{v^2}{l} - g > 0 \Rightarrow v^2 > gl$$

Or, l'expression de v^2 est fournie par l'identité (27) :

$$\begin{aligned} v^2 = v_0^2 - 2gl(1 + \cos\theta_m) > gl &\Rightarrow v_0^2 > gl[1 + 2(1 + \cos\theta_m)] \\ &\Rightarrow v_0 > \sqrt{gl(3 + 2\cos\theta_m)} \end{aligned}$$

Aussi, la valeur minimale que doit posséder v_0 pour que la bille effectue un tour complet vaut :

$$v_0 = \sqrt{9,8 \times 0,8 \times [3 + 2\cos(60^\circ)]} \Rightarrow v_0 = 5,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (réponse d-)}$$

● 24 ————— Lycée Henri Wallon, Valenciennes

1. Entre le point A et le point C , l'énergie cinétique de M varie de la quantité :

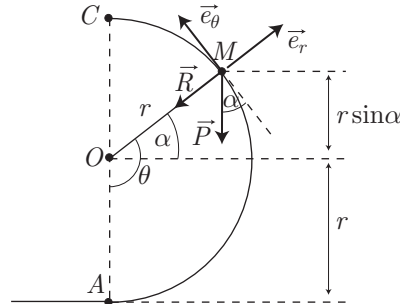
$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2$$

tandis que le travail (résistant) du poids \vec{P} vaut :

$$W(\vec{P}) = -mg(r + r \sin \alpha)$$

avec :

$$\alpha = \theta - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = -\cos \theta \\ \cos \alpha = \sin \theta \end{cases} \Rightarrow W(\vec{P}) = -mgr(1 - \cos \theta)$$



Par conséquent, le théorème de l'énergie cinétique impose :

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgr(\cos \theta - 1) \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2gr(\cos \theta - 1) \quad (28)$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2gr(\cos \theta - 1)} \quad (29)$$

2. Dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, le poids \vec{P} et la réaction \vec{R} qui s'exercent sur M s'écrivent :

$$\vec{R} = \begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{P} = \begin{pmatrix} -mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \end{pmatrix}$$

et sont responsables de l'accélération $\vec{a} \begin{pmatrix} -v^2/r \\ r\ddot{\theta} \end{pmatrix}$ du point M en rotation, conformément à la loi fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Rightarrow \begin{cases} -m \frac{v^2}{r} = mg \cos \theta - R \\ mr\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases}$$

La première de ces équations, associée au résultat (28) conduit ainsi à :

$$R = mg \cos \theta + m \frac{v^2}{r} = mg \cos \theta + m \frac{v_0^2}{r} + 2mg(\cos \theta - 1)$$

$$\Rightarrow R = m \frac{v_0^2}{r} + mg(3 \cos \theta - 2)$$

3. Cette relation montre que R s'annule pour un angle θ_m tel que :

$$3 \cos \theta_m - 2 = -\frac{v_0^2}{gr} \Rightarrow \cos \theta_m = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{v_0^2}{gr} \right)$$

La valeur minimale de la vitesse v_0 pour que M atteigne C est celle qui annule R

en $\theta_m = \pi$:

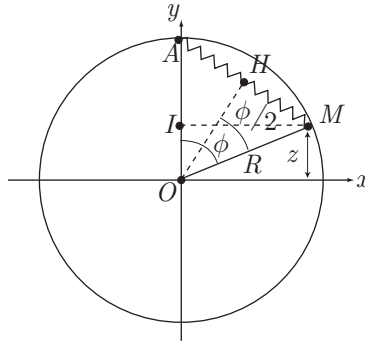
$$-1 = \frac{1}{3} \left(2 - \frac{v_0^2}{gr} \right) \Rightarrow -5 = -\frac{v_0^2}{gr} \Rightarrow v_0 = \sqrt{5gr}$$

La vitesse en C est alors fournie par le résultat (29) :

$$\begin{cases} v_0 = \sqrt{5gr} \\ \cos \theta_m = -1 \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{5gr + 2gr(-1 - 1)} \Rightarrow v = \sqrt{gr}$$

● 25 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. On appelle H le milieu du ressort ($HM = \frac{L}{2}$) et I le projeté de M sur l'axe (Oy), tel que $OI = z$:



Ce schéma montre que le triangle (OHM) est rectangle en H , ce qui permet de définir :

$$\sin \left(\frac{\phi}{2} \right) = \frac{HM}{OM} = \frac{L/2}{R} = \frac{L}{2R} \Rightarrow L = 2R \times \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \quad (30)$$

2. (a) Si l'on choisit l'axe (Ox) comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur, celle du point M vaut : $E_{pp} = mgz$, où z s'obtient en remarquant que le triangle (OMI) est rectangle en I , ce qui définit :

$$\cos \phi = \frac{OI}{OM} = \frac{z}{R} \Rightarrow z = R \cos \phi \Rightarrow E_{pp} = mgR \cos \phi \quad (31)$$

Quant à l'énergie potentielle liée au ressort, de longueur L , elle vaut :

$$E_{pr} = \frac{1}{2} k (L - L_0)^2$$

soit, d'après le résultat (30), et compte tenu que $L_0 = \alpha R$:

$$E_{pr} = \frac{kR^2}{2} \left[2 \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) - \alpha \right]^2 \quad (32)$$

Notamment, avec $\alpha = 0$:

$$E_{pr} = kR^2 \times 2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right)$$

où l'on peut appliquer la relation trigonométrique :

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x = 1 - \cos(2x) &\Rightarrow 2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) = 1 - \cos \phi \\ &\Rightarrow E_{pr} = kR^2 \times (1 - \cos \phi) \end{aligned}$$

Aussi, l'énergie potentielle de la particule, soumise à ces deux interactions, s'écrit :

$$\begin{aligned} E_p &= E_{pr} + E_{pp} \\ &= kR^2 (1 - \cos \phi) + mgR \cos \phi \\ &= mR^2 \left[\frac{k}{m} (1 - \cos \phi) + \frac{g}{R} \cos \phi \right] \text{ avec } \frac{k}{m} = \omega_R^2 \text{ et } \frac{g}{R} = \omega_p^2 \\ &= mR^2 [\omega_R^2 - \omega_R^2 \cos \phi + \omega_p^2 \cos \phi] \\ &\Rightarrow E_p = mR^2 [\omega_R^2 + (\omega_p^2 - \omega_R^2) \cos \phi] \end{aligned}$$

(b) Les positions d'équilibre de la particule sont celles qui annulent la dérivée de E_p :

$$\frac{dE_p}{d\phi} = mR^2 (\omega_R^2 - \omega_p^2) \sin \phi \quad (33)$$

À ce titre, elles correspondent aux solutions de l'équation :

$$\sin \phi = 0 \Rightarrow \phi_1 = 0 \text{ ou } \phi_2 = \pi$$

(c) Un équilibre est stable lorsqu'il correspond à un *minimum* d'énergie potentielle, caractérisé par l'inégalité : $\frac{d^2 E_p}{d\phi^2} > 0$. Le résultat (33) fournit, du reste :

$$\frac{dE_p}{d\phi} = mR^2 (\omega_R^2 - \omega_p^2) \sin \phi \Rightarrow \frac{d^2 E_p}{d\phi^2} = mR^2 (\omega_R^2 - \omega_p^2) \cos \phi$$

ce qui devient :

- pour $\phi = \phi_1 = 0$:

$$\cos \phi_1 = 1 \Rightarrow \left. \frac{d^2 E_p}{d\phi^2} \right|_{\phi_1} = mR^2 (\omega_R^2 - \omega_p^2) > 0 \text{ car } \omega_R^2 > \omega_p^2$$

La position d'équilibre repérée par $\phi = \phi_1 = 0$ est stable.

- Pour $\phi = \phi_2 = \pi$:

$$\cos \phi_2 = -1 \Rightarrow \left. \frac{d^2 E_p}{d\phi^2} \right|_{\phi_2} = -mR^2 \underbrace{(\omega_R^2 - \omega_p^2)}_{>0} < 0$$

Il s'ensuit que :

la position d'équilibre située en $\phi = \phi_2 = \pi$ est instable.

Les oscillations ne peuvent se produire qu'au voisinage d'une position d'équilibre stable, c'est-à-dire autour du point A (car $\phi = \phi_1 = 0$). En ce point, nous avons obtenu :

$$\left. \frac{d^2 E_p}{d\phi^2} \right|_{\phi_1} = mR^2 (\omega_R^2 - \omega_p^2)$$

tandis que le cours enseigne que la pulsation ω des oscillations est donnée par :

$$\omega^2 = \frac{1}{mR^2} \left. \frac{d^2 E_p}{d\phi^2} \right|_{\phi_1} = \omega_R^2 - \omega_p^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_R^2 - \omega_p^2}$$

3. (a) En posant $\alpha \neq 0$, l'expresssion (32) de l'énergie potentielle élastique devient :

$$\begin{aligned} E_{pr} &= \frac{kR^2}{2} \left[4 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) + \alpha^2 - 4\alpha \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] \\ &= kR^2 \left[2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) + \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

où la relation trigonométrique :

$$2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) = 1 - \cos \phi$$

peut à nouveau être utilisée :

$$E_{pr} = kR^2 \left[1 - \cos \phi + \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right]$$

Ainsi, l'énergie potentielle de pesanteur étant encore donnée par l'identité (31) :

$$E_{pp} = mgR \cos \phi$$

l'énergie potentielle totale de la particule s'écrit :

$$\begin{aligned} E_p &= E_{pp} + E_{pr} \\ &= mgR \cos \phi - kR^2 \cos \phi + kR^2 \left[1 + \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] \\ &= mR^2 \left\{ \left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m} \right) \cos \phi + \frac{k}{m} \left[1 + \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

ou encore :

$$E_p = mR^2 \left\{ (\omega_p^2 - \omega_R^2) \cos \phi + \omega_R^2 \left[1 + \frac{\alpha^2}{2} - 2\alpha \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] \right\}$$

$$\text{avec } \omega_p^2 = \frac{g}{R} \text{ et } \omega_R^2 = \frac{k}{m}$$

(b) L'existence d'une position d'équilibre est conditionnée par la présence d'un *extremum* de l'énergie potentielle, vérifiant l'équation :

$$\frac{dE_p}{d\phi} = 0 \Rightarrow mR^2 \left[(\omega_R^2 - \omega_p^2) \sin \phi - \alpha \omega_R^2 \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \right] = 0 \quad (34)$$

c'est-à-dire, en utilisant l'identité : $\sin \phi = 2 \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \times \cos \left(\frac{\phi}{2} \right)$:

$$2 (\omega_R^2 - \omega_p^2) \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) - \alpha \omega_R^2 \cos \left(\frac{\phi}{2} \right) = 0$$

Ainsi, les positions d'équilibre sont localisées par les angles ϕ solutions de l'équation :

$$\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) \times \left[2 (\omega_R^2 - \omega_p^2) \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) - \alpha \omega_R^2 \right] = 0 \quad (35)$$

• soit :

$$\cos \left(\frac{\phi}{2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = \phi_0 = \pi \in [0, \pi]$$

• soit :

$$2 (\omega_R^2 - \omega_p^2) \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) = \alpha \omega_R^2 \Rightarrow \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) = \frac{\alpha \omega_R^2}{2 (\omega_R^2 - \omega_p^2)} > 0 \text{ car } \omega_R^2 > \omega_p^2$$

La majoration de $\sin \left(\frac{\phi}{2} \right)$ par 1 impose une contrainte à l'existence à cette solution :

$$\begin{aligned} \sin \left(\frac{\phi}{2} \right) \leq 1 &\Rightarrow \frac{\alpha \omega_R^2}{2 (\omega_R^2 - \omega_p^2)} \leq 1 \\ &\Rightarrow \alpha \omega_R^2 \leq 2 \omega_R^2 - 2 \omega_p^2 \\ &\Rightarrow 2 \omega_p^2 \leq (2 - \alpha) \omega_R^2 \\ &\Rightarrow \omega_R \geq \sqrt{\frac{2}{2 - \alpha}} \omega_p \end{aligned}$$

à condition toutefois que $\alpha < 2$.

En outre, si $\omega_R = \sqrt{\frac{2}{2 - \alpha}} \omega_p$, la solution devient :

$$\sin \left(\frac{\phi}{2} \right) = \frac{\alpha \omega_R^2}{2 (\omega_R^2 - \omega_p^2)} = 1 \Rightarrow \frac{\phi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = \pi$$

Donc, pour obtenir une solution différente de ϕ_0 , il est nécessaire que :

$$\alpha < 2; \omega_R > \sqrt{\frac{2}{2 - \alpha}} \omega_p \text{ et } \omega_R > \omega_p$$

Cette solution, notée ϕ_3 , vérifie alors :

$$\sin \left(\frac{\phi_3}{2} \right) = \frac{\alpha \omega_R^2}{2 (\omega_R^2 - \omega_p^2)} \Rightarrow \phi_3 = 2 \arcsin \left[\frac{\alpha \omega_R^2}{2 (\omega_R^2 - \omega_p^2)} \right]$$

(c) D'après l'étude qui précède, la solution ϕ_3 ne peut exister dès que :

$$\alpha > 2 \text{ ou } \omega_R \leq \sqrt{\frac{2}{2-\alpha}} \omega_p$$

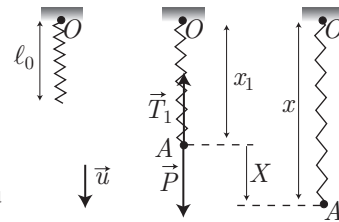
auquel cas la seule solution possible demeure :

$$\phi = \phi_0 = \pi$$

● 26 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Le point A étant soumis à son poids \vec{P} et à la tension \vec{T}_1 du ressort, son énergie potentielle vaut :

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} k (x - \ell_0)^2 - mgX + E_{p0} \\ &= \frac{1}{2} k (X + x_1 - \ell_0)^2 - mgX + E_{p0} \end{aligned}$$



où E_{p0} est une constante.

Or, à l'équilibre, la tension $\vec{T}_1 = -k(x_1 - \ell_0)\vec{u}$ du ressort est compensée par le poids $\vec{P} = mg\vec{u}$ de A :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{T}_1 = \vec{0} &\Rightarrow mg = k(x_1 - \ell_0) \\ &\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k (X + x_1 - \ell_0)^2 - kX(x_1 - \ell_0) + E_{p0} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E_p &= \left[\frac{1}{2} kX^2 + kX(x_1 - \ell_0) + \frac{1}{2} k(x_1 - \ell_0)^2 \right] - kX(x_1 - \ell_0) + E_{p0} \\ &= \frac{1}{2} kX^2 + \frac{1}{2} k(x_1 - \ell_0)^2 + E_{p0} \end{aligned}$$

Enfin, l'énoncé précise que l'origine de l'énergie potentielle est choisie en $X = 0$, ce qui signifie aussi que :

$$E_p(X = 0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} k(x_1 - \ell_0)^2 + E_{p0} = 0 \Rightarrow E_{p0} = -\frac{1}{2} k(x_1 - \ell_0)^2$$

2. Le vecteur position $\vec{OA} = x\vec{u} = (x_1 + X)\vec{u}$ fournit le vecteur vitesse de A :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OA}}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dX}{dt} \right) \vec{u} = \dot{X}\vec{u} \text{ car } x_1 = \text{cte}$$

d'où découle l'expression de son énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \dot{X}^2$$

Par conséquent, l'énergie mécanique de A vaut :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m \dot{X}^2 + \frac{1}{2} kX^2$$

et, en l'absence de frottements, cette énergie est constante :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m \dot{X} \ddot{X} + k \dot{X} X = 0 \Rightarrow \ddot{X} + \frac{k}{m} X = 0$$

Cette équation différentielle admet pour solution générale :

$$X = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

où la constante a s'obtient à partir de la valeur initiale de X :

$$X(t=0) = X_0 \Rightarrow a = X_0$$

et la valeur de la constante b découle de la valeur initiale :

$$\dot{X}(t=0) = 0 \Rightarrow b\omega = 0 \Rightarrow b = 0$$

Finalement, le mouvement de A est décrit par :

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t), \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

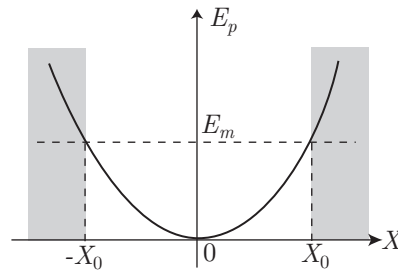
3. La représentation graphique de la fonction $E_p(X) = \frac{1}{2} kX^2$ est une parabole qui correspond au diagramme énergétique attendu. En outre, l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m\dot{X}^2 + \frac{1}{2} kX^2$$

conserve la valeur qu'elle adopte à la date $t = 0$:

$$E_m = \frac{1}{2} kX_0^2 \text{ car } X(t=0) = X_0 \text{ et } \dot{X}(t=0) = 0$$

ce qui complète la représentation du diagramme énergétique :



et confirme le résultat fourni par $X = X_0 \cos(\omega t)$: inféodé à la condition $E_m \geq E_p$, le point A est contraint d'osciller entre les positions $X = -X_0$ et $X = +X_0$.

● 27 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. L'équation caractéristique associée à l'équation du mouvement :

$$X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$$

a pour discriminant :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) < 0 \text{ car } Q > \frac{1}{2}$$

Ainsi, deux solutions apparaissent pour l'équation caractéristique :

$$\begin{cases} X_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = -\alpha + j\Omega \\ X_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = -\alpha - j\Omega \end{cases}$$

auquel cas l'équation du mouvement a pour solution générale :

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{X_1 t} + A_2 e^{X_2 t} = e^{-\alpha t} (A_1 e^{j\Omega t} + A_2 e^{-j\Omega t}) \\ &= e^{-\alpha t} [a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)] \text{ avec } a = A_1 + A_2 \text{ et } b = j(A_1 - A_2) \end{aligned}$$

Les constantes a et b sont données par les valeurs de x et de \dot{x} à la date $t = 0$:

$$x(t=0) = x_0 \Rightarrow a = x_0$$

et :

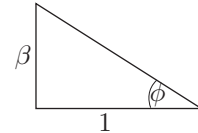
$$\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow -\alpha a + b\Omega = 0 \Rightarrow b = \frac{\alpha}{\Omega} x_0$$

C'est pourquoi, en définissant le coefficient : $\beta = \frac{\alpha}{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$, il vient :

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{-\alpha t} [\cos(\Omega t) + \beta \sin(\Omega t)] \\ &= x_0 \sqrt{1 + \beta^2} e^{-\alpha t} \left[\frac{\cos(\Omega t)}{\sqrt{1 + \beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \sin(\Omega t) \right] \end{aligned}$$

En traçant un triangle rectangle de cotés 1 et β (donc d'hypoténuse $\sqrt{1 + \beta^2}$), on définit un angle ϕ tel que :

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \text{ et } \sin \phi = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}}$$



Par suite :

$$\frac{\cos(\Omega t)}{\sqrt{1 + \beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \sin(\Omega t) = \cos \phi \cos(\Omega t) + \sin \phi \sin(\Omega t) = \cos(\Omega t - \phi)$$

ce qui confirme l'existence de deux coefficients A et ϕ permettant de présenter x sous la forme :

$$x(t) = Ax_0 e^{-\alpha t} \cos(\Omega t - \phi)$$

avec :

$$A = \sqrt{1 + \beta^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2 - 1}} \Rightarrow A = \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Quant à ϕ , sa valeur est donnée par :

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}} \Rightarrow \cos \phi = \frac{\sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q}$$

et :

$$\sin \phi = \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \times \frac{\sqrt{4Q^2 - 1}}{2Q} \Rightarrow \sin \phi = \frac{1}{2Q}$$

2. Lorsque $\phi = \frac{\pi}{3}$, la dernière égalité fournit directement :

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2Q} \Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

● 28 ————— Lycée du Parc, Lyon

Soumis à l'action des deux forces, l'accélération $\frac{d^2x}{dt^2}$ du point matériel vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda \frac{dx}{dt} - Kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{K}{m} x = 0$$

soit encore :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } \tau = \frac{2m}{\lambda} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

L'équation caractéristique associée à cette équation :

$$X^2 + \frac{2}{\tau} X + \omega_0^2 = 0$$

a pour discriminant réduit :

$$\Delta' = \frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 \simeq -\omega_0^2 = (j\omega_0)^2 \text{ car } \omega_0 \gg \frac{1}{\tau}$$

et présente donc deux solutions complexes :

$$X_1 = -\frac{1}{\tau} + j\omega_0 \text{ et } X_2 = -\frac{1}{\tau} - j\omega_0$$

C'est pourquoi la solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$x = A_1 e^{X_1 t} + A_2 e^{X_2 t} = e^{-t/\tau} \times (A_1 e^{j\omega_0 t} + A_2 e^{-j\omega_0 t})$$

ou encore, en posant : $A_1 + A_2 = a$ et $j(A_1 - A_2) = b$:

$$x(t) = e^{-t/\tau} \times [a \cos(\omega_0 t) + b \sin(\omega_0 t)]$$

La vitesse du point matériel est alors donnée par :

$$\dot{x} = e^{-t/\tau} \times \left[\left(-\frac{a}{\tau} + b\omega_0 \right) \cos(\omega_0 t) - \left(a\omega_0 + \frac{b}{\tau} \right) \sin(\omega_0 t) \right]$$

En notant $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ la pseudo-période, on constate qu'il existe deux fonctions périodiques $\phi(t)$ et $\psi(t)$ telles que :

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t/\tau} \times \phi(t) \\ \dot{x}(t) = e^{-t/\tau} \times \psi(t) \end{cases} \text{ avec } \phi(t+T) = \phi(t) \text{ et } \psi(t+T) = \psi(t)$$

Aussi, l'énergie mécanique du point matériel vaut, à une date t :

$$E(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} kx^2 = e^{-2t/\tau} \Theta(t)$$

avec :

$$\Theta(t) = \frac{m}{2} [\psi(t)]^2 + \frac{K}{2} [\phi(t)]^2 \Rightarrow \Theta(t+T) = \Theta(t)$$

Ce faisant, à la date $t+T$, cette énergie mécanique s'écrit :

$$E(t+T) = e^{-2t/\tau} \times e^{-2T/\tau} \times \Theta(t+T) = e^{-2t/\tau} \Theta(t) \times e^{-2T/\tau} = E(t) \times e^{-2T/\tau}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\Delta E = E(t+T) - E(t) = E(t) \times (e^{-2T/\tau} - 1) \Rightarrow \frac{E(t)}{\Delta E} = \frac{1}{e^{-2T/\tau} - 1}$$

Le facteur de qualité est alors défini par :

$$Q = 2\pi \left| \frac{E(t)}{\Delta E} \right| = \frac{2\pi}{1 - e^{-2T/\tau}}$$

où la condition des amortissements faibles a pour conséquence :

$$\begin{aligned} \frac{2T}{\tau} = 2 \times \frac{2\pi}{\omega_0 \tau} \ll 1 &\Rightarrow e^{-2T/\tau} \simeq 1 - \frac{2T}{\tau} \simeq 1 - \frac{4\pi}{\omega_0 \tau} \\ &\Rightarrow Q \simeq 2\pi \times \frac{\omega_0 \tau}{4\pi} = \frac{\omega_0 \tau}{2} \end{aligned}$$

avec :

$$\tau = \frac{2m}{\lambda} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$$

● 29 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Dans le cas général, le point M est soumis à :

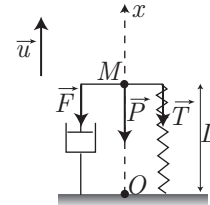
- son poids $\vec{P} = -mg \vec{u}$;
- la force de rappel du ressort de longueur L :

$$\vec{T} = -k(L - L_0) \vec{u}$$

- la force d'amortissement : $\vec{F} = -\beta \vec{v}$.

À l'équilibre, la résultante de ces forces s'annule tandis que $\vec{v} = \vec{0}$:

$$-mg \vec{u} - k(L_1 - L_0) \vec{u} = \vec{0} \Rightarrow L_1 = L_0 - \frac{mg}{k} = L_e \quad (36)$$



Ce calcul montre que L_e désigne la longueur du ressort lorsque M est à l'équilibre.

2. Hors équilibre, depuis un point O immobile, le point M est repéré par :

$$\overrightarrow{OM} = L \vec{u} = (x + L_e) \vec{u} \Rightarrow \vec{v} = \dot{x} \vec{u} \Rightarrow \vec{a} = \ddot{x} \vec{u}$$

C'est pourquoi la loi fondamentale de la dynamique fournit :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F} \Rightarrow m \ddot{x} \vec{u} = -mg \vec{u} - k(L - L_0) \vec{u} - \beta \dot{x} \vec{u}$$

tandis que l'équation (36) conduit à :

$$-mg \vec{u} = k(L_e - L_0) \vec{u} \Rightarrow -mg \vec{u} - k(L - L_0) \vec{u} = -k(L - L_e) \vec{u} = -kx \vec{u}$$

Finalement, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$m \ddot{x} = -kx - \beta \dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\beta}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

3. (a) L'équation caractéristique correspondante :

$$X^2 + \frac{\beta}{m} X + \frac{k}{m} = 0$$

a pour discriminant :

$$\Delta = \frac{\beta^2}{m^2} - \frac{4k}{m} = \frac{(15,3)^2}{(255)^2} - \frac{4 \times 12,5 \times 10^3}{255} \simeq -196 = -(14)^2$$

Le signe de Δ révèle ainsi que :

$$\Delta = (j)^2 \times \left(\frac{4k}{m} - \frac{\beta^2}{m^2} \right) \text{ avec } (j)^2 = -1 \text{ et } \frac{4k}{m} - \frac{\beta^2}{m^2} > 0$$

d'où sont issues les deux solutions de l'équation caractéristique :

$$X_1 = -\frac{\beta}{2m} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\Lambda + j\Omega \text{ et } X_2 = -\frac{\beta}{2m} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = -\Lambda - j\Omega$$

où :

$$\Lambda = \frac{\beta}{2m} \text{ et } \Omega = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4k}{m} - \frac{\beta^2}{m^2}}$$

Application numérique :

$$\Lambda = \frac{15,3}{2 \times 255} \Rightarrow \Lambda = 0,03 \text{ s}^{-1} \text{ et } \Omega = \frac{14}{2} = 7 \text{ s}^{-1}$$

De ces calculs ressort finalement la solution générale de l'équation différentielle du mouvement :

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{X_1 t} + A_2 e^{X_2 t} = e^{-\Lambda t} (A_1 e^{j\Omega t} + A_2 e^{-j\Omega t}) \\ &= e^{-\Lambda t} \times [(A_1 + A_2) \cos \Omega t + j(A_1 - A_2) \sin(\Omega t)] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant $a = A_1 + A_2$ et $b = j(A_1 - A_2)$:

$$x = e^{-\Lambda t} \times [a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t)]$$

Les coefficients a et b s'obtiennent à partir des conditions initiales :

$$x(t = 0) = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow x = b e^{-\Lambda t} \sin(\Omega t)$$

et :

$$\dot{x}(t = 0) = v_0 \Rightarrow b\Omega = v_0 \Rightarrow b = \frac{v_0}{\Omega}$$

Application numérique :

$$b = \frac{0,5}{7} \Rightarrow b \simeq 0,07 \text{ m}$$

(b) Compte tenu de l'expression de x :

$$x = A \sin(\Omega t) \text{ avec } A = b e^{-\Lambda t}$$

la valeur maximale de A est :

$$A_{\max} = b = \frac{v_0}{\Omega} = 0,07 \text{ m}$$

La position d'équilibre est donc atteinte à une date τ telle que :

$$A(\tau) = 10^{-3} \times A_{\max} \Rightarrow b e^{-\Lambda \tau} = 10^{-3} \times b \Rightarrow \tau = \frac{3 \ln 10}{\Lambda}$$

Application numérique :

$$\tau = \frac{3 \ln 10}{0,03} = 230 \text{ s}$$

● 30 ————— Lycée Charlemagne, Paris

1. Si \vec{u} désigne un vecteur unitaire directeur de la droite (AM) , tel que $\overrightarrow{AM} = AM \times \vec{u}$, la tension \vec{T}_1 qu'exerce le ressort fixé en A , sur M , s'écrit :

$$\vec{T}_1 = -k_1 AM \vec{u} = -k_1 \overrightarrow{AM} = k_1 \overrightarrow{MA}$$

Il en va de même pour la tension \vec{T}_2 exercée par l'autre ressort : $\vec{T}_2 = k_2 \overrightarrow{MB}$, de sorte que la résultante de ces deux forces sur M vaut :

$$\begin{aligned} \vec{T} &= \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = k_1 \overrightarrow{MA} + k_2 \overrightarrow{MB} \\ &= k_1 (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + k_2 (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \\ &= (k_1 + k_2) \overrightarrow{MG} + k_1 \overrightarrow{GA} + k_2 \overrightarrow{GB} \end{aligned}$$

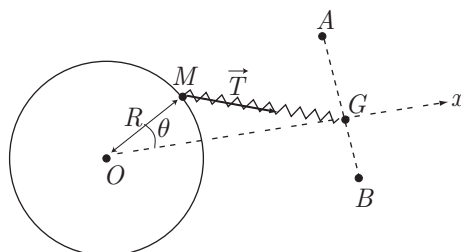
Par conséquent, si G désigne le barycentre des points A et B , pondérés par les coefficients k_1 et k_2 :

$$k_1 \overrightarrow{GA} + k_2 \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \vec{T} = (k_1 + k_2) \overrightarrow{MG}$$

La tension \vec{T} est alors équivalente à celle qu'exercerait un ressort de longueur à vide nulle, de constante de raideur :

$$k = k_1 + k_2$$

dont les extrémités sont fixées en M et G :



2. On notera, dorénavant, θ l'angle $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OG})$. L'énergie potentielle du point M soumis à la tension $\vec{T} = k \overrightarrow{MG}$ vaut :

$$E_p = \frac{1}{2} k MG^2$$

avec :

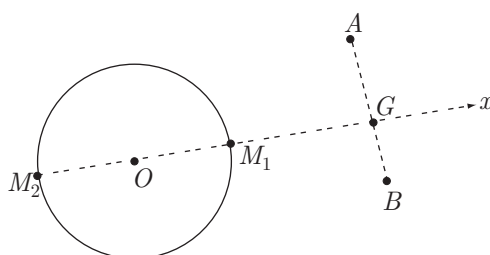
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MG} &= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OG} \Rightarrow MG^2 = MO^2 + OG^2 + 2 \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OG} \\ &= R^2 + OG^2 - 2ROG \cos \theta \end{aligned}$$

en conséquence de quoi :

$$E_p = \frac{1}{2} k (R^2 + OG^2) - kROG \cos \theta$$

S'il existe des positions d'équilibre pour M , elles correspondent aux valeurs de θ qui rendent *extremum* l'énergie potentielle, c'est-à-dire qui annulent la dérivée de E_p :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = kROG \sin \theta = 0 \text{ pour } \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi$$



Deux positions d'équilibre sont donc accessibles à M : les points M_1 et M_2 diamétralement opposés.

3. L'énergie cinétique du point M , en rotation sur le cercle de rayon R , est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2} mv^2 \text{ avec } v = R\dot{\theta} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2$$

Aussi, en posant : $OG = \ell$ et $k = k_1 + k_2$, l'énergie totale de M vaut :

$$E = E_c + E_p \Rightarrow E = \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k (R^2 + \ell^2) - kR\ell \cos \theta \text{ avec } k = k_1 + k_2$$

4. L'absence de force dissipative rend E constant, ce qui signifie que :

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} = 0 &\Rightarrow mR^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + kR\dot{\theta} \sin \theta = 0 \\ &\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{k\ell}{mR} \sin \theta = 0 \text{ pour } \dot{\theta} \neq 0\end{aligned}$$

Or, la position d'équilibre stable est caractérisée par un *minimum* d'énergie potentielle, c'est-à-dire pour la valeur (0 ou π) telle que :

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} > 0 \Rightarrow kR\ell \cos \theta > 0$$

Cette position d'équilibre se trouve donc au point M_1 (pour $\theta = 0$), autour duquel se produisent des oscillations, dont l'amplitude est suffisamment faible pour que $\sin \theta \simeq 0$ lorsque $\theta \simeq 0$.

De cette simplification découle celle de l'équation différentielle satisfaite par θ :

$$\ddot{\theta} + \frac{k\ell}{mR} \theta = 0 \text{ avec } k = k_1 + k_2$$

et qui admet des solutions harmoniques de pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{k\ell}{mR}} = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)\ell}{mR}}$$

et donc de période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{mR}{(k_1 + k_2)\ell}}$$

Remarque – On pouvait retrouver directement ce résultat en utilisant l'énergie potentielle pour un point M , de masse m , en rotation autour d'un point O tel que $OM = R$, des oscillations se produisent autour de l'angle θ_0 caractérisant la position d'équilibre stable. La pulsation de ces oscillations vaut :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{mR^2} \times \left. \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_0}}$$

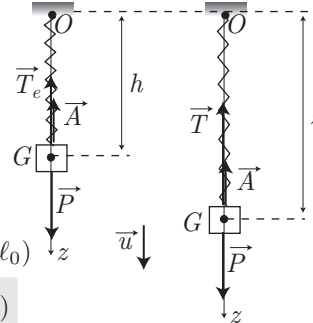
et, notamment, pour $\theta_0 = 0$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = (k_1 + k_2) R\ell \cos \theta &\Rightarrow \left. \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_0} = (k_1 + k_2) R\ell \\ &\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)\ell}{mR}}\end{aligned}$$

● **31** **Concours E.N.S.T.I.M.**

1. Soit \vec{u} le vecteur unitaire directeur de l'axe (Oz) ; on note $\vec{T}_e = -k(h - \ell_0)\vec{u}$ la tension du ressort à l'équilibre, $\vec{P} = Mg\vec{u}$ le poids de M et $\vec{A} = -\mu_{\text{H}_2\text{O}}Vg\vec{u}$ la poussée d'Archimède exercée par l'eau. L'équilibre de M est conditionné par l'équation :

$$\begin{aligned} \vec{T}_e + \vec{P} + \vec{A} = \vec{0} &\Rightarrow \vec{P} + \vec{A} = k(h - \ell_0)\vec{u} \\ &\Rightarrow g(M - \rho_{\text{H}_2\text{O}}V) = k(h - \ell_0) \\ &\Rightarrow h = \ell_0 + \frac{g}{k}(M - \mu_{\text{H}_2\text{O}}V) \end{aligned}$$



2. Du vecteur position de G : $\vec{OG} = z\vec{u}$, se déduit son accélération $\vec{a} = \ddot{z}\vec{u}$, au demeurant soumise à la loi fondamentale de la dynamique :

$$M\vec{a} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{A}$$

où $\vec{P} + \vec{A} = k(h - \ell_0)\vec{u}$ (conformément à la question précédente) et $\vec{T} = -k(z - \ell_0)\vec{u}$:

$$M\ddot{z}\vec{u} = [-k(z - \ell_0) + k(h - \ell_0)]\vec{u} \Rightarrow M\ddot{z} = -kz + kh$$

En définissant la pulsation propre par : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$, cette équation se présente aussi sous la forme :

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

3. La pulsation propre est indépendante de l'intensité de la poussée d'Archimède, à l'inverse de h qui en dépend par l'intermédiaire de $\rho_{\text{H}_2\text{O}}$, comme le montre le résultat de la première question.
4. En tenant compte de la force de frottement $\vec{F} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{z}\vec{u}$, la loi fondamentale de la dynamique devient :

$$\begin{aligned} M\vec{a} = \vec{T} + \vec{P} + \vec{A} + \vec{F} &\Rightarrow M\ddot{z}\vec{u} = -k(z - \ell_0)\vec{u} + k(h - \ell_0)\vec{u} - \alpha\dot{z}\vec{u} \\ &\Rightarrow M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + kz = kh \end{aligned}$$

En utilisant l'expression précédente de la pulsation propre : $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ et en définissant le facteur de qualité par : $Q = \frac{M\omega_0}{\alpha}$, cette équation s'écrit aussi :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h \tag{37}$$

Le second membre de cette équation étant constant ($\omega_0^2 h$), la solution z_h homogène à ce second membre est aussi constante, et vérifie par conséquent :

$$\underbrace{\ddot{z}_h}_0 + \frac{\omega_0}{Q}\underbrace{\dot{z}_h}_0 + \omega_0^2 z_h = \omega_0^2 h \Rightarrow z_h = h$$

Quant à la solution z_s de l'équation sans second membre :

$$\ddot{z}_s + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z}_s + \omega_0^2 z_s = 0$$

elle s'obtient à partir de l'équation caractéristique associée :

$$X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$$

est négatif dans le cas d'un régime très faiblement amorti ; α est assez petit pour que l'on puisse poser :

$$\alpha < 2M\omega_0 \Rightarrow 2 \frac{M\omega_0}{\alpha} > 1 \Rightarrow 2Q > 1 \Rightarrow 4Q^2 > 1$$

L'équation caractéristique admet ainsi deux solutions complexes :

$$X_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \text{ et } X_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

que l'on écrit aussi :

$$X_1 = -\lambda + j\Omega \text{ et } X_2 = -\lambda - j\Omega \text{ avec } \lambda = \frac{\omega_0}{2Q} \text{ et } \Omega = \lambda \sqrt{4Q^2 - 1}$$

C'est pourquoi il existe deux constantes μ_1 et μ_2 qui permettent de présenter la solution z_s sous la forme :

$$\begin{aligned} z_s &= \mu_1 e^{X_1 t} + \mu_2 e^{X_2 t} = e^{-\lambda t} (\mu_1 e^{j\Omega t} + \mu_2 e^{-j\Omega t}) \\ \Rightarrow z_s &= e^{-\lambda t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \text{ avec } \begin{cases} A = \mu_1 + \mu_2 \\ B = j(\mu_1 - \mu_2) \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, la solution générale de l'équation différentielle (37) est :

$$\begin{aligned} z &= z_h + z_s = h + e^{-\lambda t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \\ \Rightarrow \dot{z} &= e^{-\lambda t} [(B\Omega - A\lambda) \cos(\Omega t) - (A\Omega + B\lambda) \sin(\Omega t)] \end{aligned}$$

dans laquelle les constantes A et B s'obtiennent à partir des conditions initiales :

$$z(t=0) = h_1 \Rightarrow h + A = h_1 \Rightarrow A = h_1 - h$$

et :

$$\dot{z}(t=0) = 0 \Rightarrow B\Omega - A\lambda = 0 \Rightarrow B = \frac{\lambda}{\Omega} A = \frac{h_1 - h}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

de sorte que :

$$z(t) = h + (h_1 - h) e^{-\lambda t} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \right]$$

En outre, si les amortissements sont suffisamment faibles, une nouvelle condition sur Q :

$$Q \gg \frac{1}{2} \Rightarrow 4Q^2 \gg 1 \Rightarrow \sqrt{4Q^2 - 1} \simeq 2Q$$

apporte une simplification :

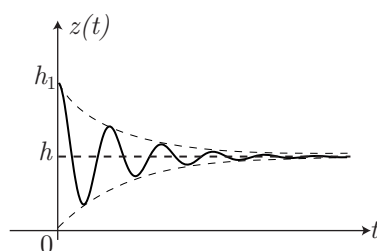
$$\begin{aligned} \cos(\Omega t) + \frac{\sin(\Omega t)}{\sqrt{4Q^2 - 1}} &\simeq \cos(\Omega t) + \frac{1}{2Q} \sin(\Omega t) \\ &\simeq \cos(\Omega t) \text{ car } \frac{1}{2Q} \ll 1 \end{aligned}$$

d'où :

$$z(t) \simeq h + (h_1 - h) e^{-\lambda t} \cos(\omega_0 t)$$

puisque $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \simeq \frac{\omega_0}{2Q} \times 2Q = \omega_0$.

De cette expression de $z(t)$ découle finalement la représentation graphique suivante :

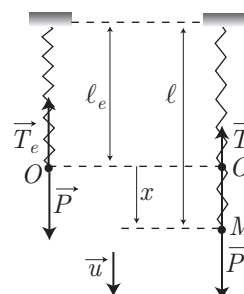


● 32 ————— Lycée du Parc, Lyon

1. Soit ℓ_0 la longueur à vide du ressort à partir de laquelle est définie la tension \vec{T} qu'il exerce :

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}$$

Notamment à l'équilibre, le ressort est allongé de ℓ_e tandis que le ressort exerce une tension \vec{T}_e qui s'oppose au poids \vec{P} de M :



$$\vec{P} + \vec{T}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -\vec{T}_e = k(\ell_e - \ell_0) \vec{u} \quad (38)$$

En revanche, lorsque M est écarté de sa position d'équilibre, la longueur du ressort vaut ℓ ; le point M est soumis à une force résultante :

$$\begin{aligned} \vec{T} + \vec{P} &= -k(\ell - \ell_0) \vec{u} + k(\ell_e - \ell_0) \vec{u} = -k(\ell - \ell_e) \vec{u} \\ &= -kx \vec{u} \text{ car } \ell = \ell_e + x \end{aligned}$$

à l'origine de son accélération :

$$\vec{a} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2(x\vec{u})}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{u} = \ddot{x} \vec{u}$$

La loi fondamentale de la dynamique stipule alors que :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{T} + \vec{P} \Rightarrow m\ddot{x}\vec{u} = -kx\vec{u} \\ &\Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \text{ avec } \omega^2 = \frac{k}{m} \end{aligned}$$

2. Cette équation différentielle admet pour solution générale :

$$x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \Rightarrow \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$$

où les constantes A et B s'obtiennent à partir des conditions initiales :

$$x(t=0) = x_0 \Rightarrow A = x_0$$

et :

$$\dot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow B\omega = 0 \Rightarrow B = 0$$

Finalement :

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) \text{ avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. L'axe Ox étant dirigé vers le bas, l'énergie potentielle de pesanteur vaut :

$$E_{pp} = -mgx + E_{pp_0}$$

où E_{pp_0} est une grandeur constante, tandis que l'énergie potentielle élastique vaut :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 + E_{pe_0} \text{ (} E_{pe_0} \text{ est une constante)}$$

C'est pourquoi l'énergie potentielle totale de M s'écrit :

$$E_p = E_{pp} + E_{pe} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 - mgx + E_{p_0} \text{ avec } E_{p_0} = E_{pp_0} + E_{pe_0}$$

L'énoncé précise, en outre, que l'énergie potentielle est choisie nulle en $x = 0$, c'est-à-dire lorsque $\ell = \ell_e$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} (\ell_e - \ell_0)^2 + E_{p_0} \Rightarrow E_{p_0} = -\frac{1}{2} k (\ell_e - \ell_0)^2 \\ &\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 - \frac{1}{2} k (\ell_e - \ell_0)^2 - mgx \\ &\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_e) (\ell + \ell_e - 2\ell_0)^2 - mgx \text{ avec } \ell = \ell_e + x \\ &\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} kx (2\ell_e - 2\ell_0 + x) - mgx \\ &\Rightarrow E_p = \frac{1}{2} kx^2 + k(\ell_e - \ell_0)x - mgx \end{aligned}$$

Enfin, étant donné que $\vec{P} = mg \vec{u}$, l'équation (38) fournit :

$$mg = k(\ell_e - \ell_0) \Rightarrow k(\ell_e - \ell_0)x - mgx = 0$$

d'où il découle que :

$$E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kx_0^2 \cos^2(\omega t)$$

Sur une période T , la valeur moyenne de E_p est définie par :

$$\begin{aligned} \langle E_p \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E_p(t) dt = \frac{kx_0^2}{2T} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t) dt \\ &= \frac{kx_0^2}{2T} \int_t^{t+T} \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt \\ &= \frac{kx_0^2}{4T} \left\{ T + \int_t^{t+T} \cos(2\omega t) dt \right\} \end{aligned}$$

avec :

$$\int_t^{t+T} \cos(2\omega t) dt = \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t)]_t^{t+T} = \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t + 2\omega T) - \sin(2\omega t)]$$

Or, la période T étant définie par ; $T = \frac{2\pi}{\omega}$, cette dernière intégrale est nulle, de

sorte qu'il reste simplement : $\langle E_p \rangle = \frac{kx_0^2}{4}$

Chapitre 2

Électrocinétique

2.1 Lois générales

Définition 1 Si, pendant, une durée dt , une charge électrique δq traverse une section S de conducteur, il apparaît alors un courant électrique d'intensité :

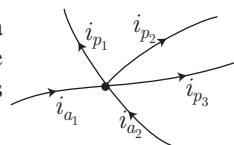
$$i = \frac{\delta q}{dt}$$

Ce courant électrique est conventionnellement représenté par une flèche dans un circuit :



Définition 2 Un nœud est un point d'intersection de plusieurs conducteurs électriques.

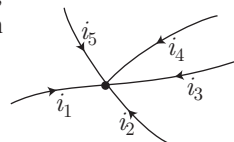
Dans l'approximation des régimes lentement variables, la conservation de la charge conduit à la loi des nœuds : la somme des intensités i_{a_k} des courants arrivant à un nœud vaut celle des intensités i_{p_k} qui en partent.



$$\sum_k i_{a_k} = \sum_k i_{p_k}$$

Cette loi peut se généraliser au cas où, conventionnellement, tous les courants ont été représentés arrivant (ou partant) à un nœud :

$$\sum_k i_k = 0$$



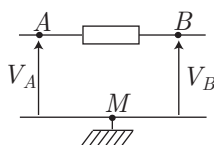
Définition 3 On appelle tension $u = u_{AB}$ la différence de potentiel (d.d.p.) électrique entre deux points A et B :

$$u_{AB} = V_A - V_B$$

Cette tension est alors représentée par une flèche qui pointe vers le point A :



Définition 4 On appelle potentiel V_A d'un point A la tension entre le point A et un point M défini comme une masse (de potentiel nul par définition).



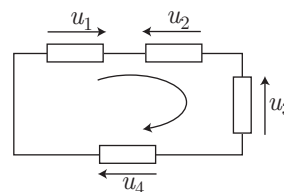
Définition 5 Une maille est un circuit fermé sur lui-même.

La loi des mailles stipule que la somme algébrique des tensions rencontrées en parcourant une maille est nulle :

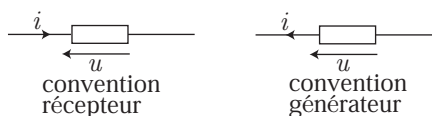
$$\sum_k u_k = 0$$

Le signe des tensions u_k est défini positif si ces tensions sont orientées dans le sens de parcours de la maille (choisi arbitrairement), et négatif sinon :

$$u_1 - u_2 - u_3 + u_4 = 0$$



Définition 6 La convention récepteur consiste à représenter u et i dans des sens opposés, tandis qu'en convention générateur u et i présentent le même sens.



Définition 7 En convention récepteur, la puissance électrique \mathcal{P}_r reçue par un dipôle vaut :

$$\mathcal{P}_r = u \times i \text{ (}\mathcal{P}_r \text{ en watts, } u \text{ en volts, } i \text{ en ampères).}$$

Pendant la durée dt , un dipôle reçoit une énergie δE_r telle que :

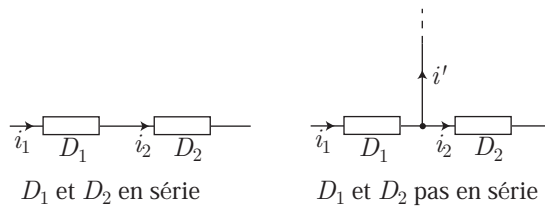
$$\delta E_r = \mathcal{P}_r \times dt \Rightarrow \mathcal{P}_r = \frac{\delta E_r}{dt}$$

2.2 Dipôles de base

2.2.1 Lois d'association des dipôles

Définition 8 Deux dipôles D_1 et D_2 sont en série si la totalité du courant i_1 qui traverse D_1 représente également le courant i_2 qui traverse D_2 :

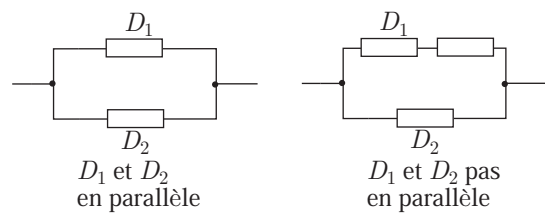
$$i_1 = i_2$$



La définition des tensions en termes de différences de potentiels permet aussi d'écrire :

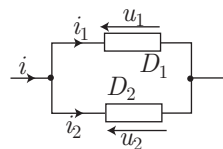
$$u = u_1 + u_2 \text{ avec } \begin{cases} u = V_A - V_C \\ u_1 = V_A - V_B \\ u_2 = V_B - V_C \end{cases}$$

Définition 9 Deux dipôles D_1 et D_2 sont en parallèle si leurs bornes sont reliées deux à deux par des fils électriques.



La loi des nœuds, associée à la définition des tensions, fournit :

$$i = i_1 + i_2 \text{ et } u_1 = u_2$$

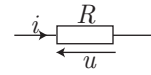


2.2.2 Description de quelques dipôles

2.2.2.1 Le resistor

En convention récepteur, la tension u aux bornes d'un *resistor* est proportionnelle à l'intensité i qui le traverse ; il s'agit de la loi d'Ohm :

$$U = R \times i \quad \left\{ \begin{array}{l} u \text{ en volts (V)} \\ i \text{ en ampères (A)} \\ R \text{ en ohms } (\Omega) \end{array} \right.$$



R désigne la résistance du *resistor* et permet de définir la conductance G :

$$G = \frac{1}{R} \quad \left\{ \begin{array}{l} R \text{ en ohms } (\Omega) \\ S \text{ en siemens (S)} \end{array} \right.$$

L'association en série de deux *resistors* (de résistances R_1 et R_2) équivaut à un *resistor* de résistance :

$$R = R_1 + R_2 \text{ (en série)}$$

tandis qu'en parallèle :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

ce que l'on peut aussi écrire :

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ ou encore : } G = \frac{1}{R} = G_1 + G_2$$

Un *resistor* de résistance R , parcouru par un courant d'intensité i et qui présente une d.d.p. $u = Ri$ à ses bornes, consomme une puissance :

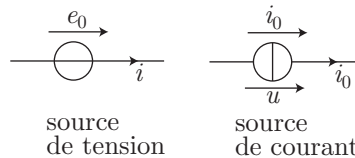
$$\mathcal{P} = u \times i = R i^2 = \frac{u^2}{R}$$

totale dissippée sous forme de chaleur ; il s'agit de l'effet Joule

2.2.2.2 Sources et générateurs

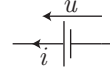
Définition 10 Une source de tension génère, entre ses bornes, une d.d.p. e_0 indépendante de l'intensité i du courant qu'elle débite.

Une source de courant débite un courant d'intensité i_0 indépendante de la tension u à ses bornes.



Un générateur de tension réel génère cependant une tension u qui dépend du courant i qu'il débite :

$$u = e_0 - r \times i$$



e_0 et r sont respectivement la *force électromotrice* (f.é.m.) et la *résistance interne* du générateur de tension.

Ce générateur est aussi un générateur de courant, qui débite un courant d'intensité i dépendante de u :

$$i = i_0 - g \times u$$

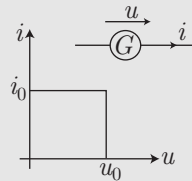
i_0 et g désignent respectivement le *courant électromoteur* (c.é.m.) et la *conductance interne* du générateur de courant.

Ces générateurs sont équivalents, à condition de poser :

$$e_0 = r i_0 \text{ et } g = \frac{1}{r}$$



Un générateur G est connecté à une résistance R . La caractéristique de G est représentée ci-dessous.



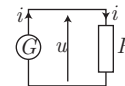
Montrer que G se comporte comme une source de tension pour $R > R_0$ et comme une source de courant pour $R < R_0$.

Établir l'expression de R_0 en fonction de e_0 et de i_0 .

RÉPONSE

Étant donné que G est relié directement aux bornes d'une résistance R , la tension u à ses bornes est aussi celle aux bornes de R :

$$u = Ri$$



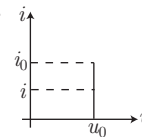
La caractéristique courant-tension de G révèle deux comportements possibles :

- G se comporte comme une source de tension lorsque u demeure indépendant de i ;
 u prend alors la valeur u_0 :

$$u_0 = Ri \Rightarrow i = \frac{u_0}{R}$$

et cette situation se présente lorsque i demeure inférieure à i_0 :

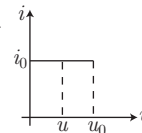
$$i < i_0 \Rightarrow \frac{u_0}{R} < i_0 \Rightarrow R > \frac{u_0}{i_0} \Rightarrow R > R_0 \text{ avec } R_0 = \frac{u_0}{i_0}$$



- G se comporte comme une source de courant dès que i adopte une valeur i_0 indépendante de u :

$$u = Ri_0$$

Ce comportement est conditionné par :



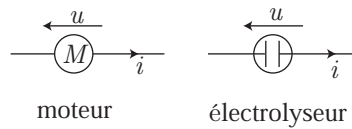
$$\begin{aligned} u < u_0 &\Rightarrow R i_0 < u_0 \Rightarrow R < \frac{u_0}{i_0} \\ &\Rightarrow R < R_0 \end{aligned}$$

2.2.2.3 Moteurs et électrolyseurs

La tension aux bornes d'un de ces dipôles parcourus par un courant d'intensité i suit la loi :

$$u = e_0 + r \times i$$

où e_0 désigne la *force contre-électromotrice* (f.c.é.m.) et r la résistance interne.

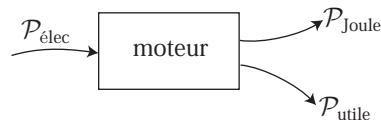


⚠ La convention récepteur doit impérativement être respectée pour utiliser la loi : $u = e_0 + r i$. Dans cette convention, i est nécessairement positif.

La puissance électrique $\mathcal{P}_{\text{élec}}$ reçue par un de ces dipôles s'écrit :

$$\mathcal{P}_{\text{élec}} = u i = e_0 i + r i^2 = \mathcal{P}_{\text{utile}} + \mathcal{P}_{\text{Joule}}$$

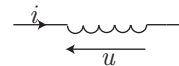
ce qui fait apparaître une « puissance utile » $\mathcal{P}_{\text{utile}} = e_0 i$ (motrice ou chimique) et une puissance $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = r i^2$ dissipée par effet Joule.



2.2.2.4 Bobines

Une bobine idéale est caractérisée par son (*auto*)inductance L (en henrys : H) qui établit une relation entre u et i :

$$u = L \frac{di}{dt}$$



En revanche, une bobine réelle présente également une résistance électrique :

$$u = L \frac{di}{dt} + r i$$

Les associations en série et en parallèle de deux bobines, d'inductances L_1 et L_2 , sont équivalentes à une bobine d'inductance L telle que :

$$L = L_1 + L_2 \text{ en série et } \frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \text{ en parallèle.}$$

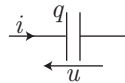
L'énergie électromagnétique emmagasinée dans une bobine parcourue par un courant d'intensité I vaut :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} LI^2$$

2.2.2.5 Condensateurs

Si q désigne la charge portée par l'armature du condensateur qui reçoit le courant i , la conservation de la charge impose :

$$i = \frac{dq}{dt}$$



En convention récepteur, le comportement d'un condensateur est décrit par la loi suivante :

$$u = \frac{q}{C} \Rightarrow i = C \frac{du}{dt}$$

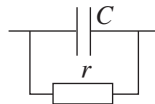
où C est la capacité du condensateur, exprimée en farads (F).

L'association de deux condensateurs (de capacités C_1 et C_2) équivaut à un condensateur de capacité C telle que :

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \text{ en série}$$

$$C = C_1 + C_2 \text{ en parallèle}$$

Remarque – Un condensateur réel n'est jamais parfaitement isolant ; entre ses armatures peut circuler un faible courant de fuite, ce dont on rend parfois compte en introduisant une résistance de fuite entre les deux armatures :



Un condensateur, dont la charge Q provoque une d.d.p. U à ses bornes, possède une énergie électrique :

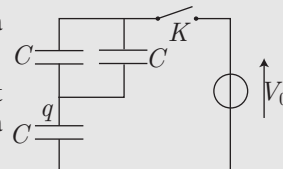
$$\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CU^2$$



Dans le montage ci-contre, on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$, les condensateurs étant déchargés.

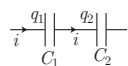
1. Montrer que lorsque deux condensateurs en série sont initialement déchargés, ils portent en permanence la même charge.

2. Exprimer, en fonction de C et V_0 , la charge q portée par le condensateur situé dans le bas du schéma, pour $t > 0$.



RÉPONSE

1. Soient deux condensateurs en série portant les charges q_1 et q_2 sur les armatures qui reçoivent un courant de même intensité i (par définition de la mise en série de deux dipôles) :



Les charges q_1 et q_2 s'accroissent donc de la même manière :

$$i = \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \Rightarrow q_1 = q_2 + A$$

où A est une constante déterminée par l'absence de charge initiale des condensateurs :

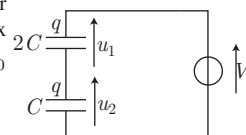
$$\underbrace{q_1(t=0)}_{=0} = \underbrace{q_2(t=0)}_{=0} + A \Rightarrow A = 0 \Rightarrow q_1(t) = q_2(t)$$

2. Les deux condensateurs en parallèle sont équivalents à un seul condensateur de capacité $2C$, et qui porte la même charge q que le condensateur de capacité C , compte tenu de la question précédente. Les tensions aux bornes de ces dipôles : $u_1 = \frac{q}{2C}$ et $u_2 = \frac{q}{C}$ sont liées à la tension V_0 par la loi des mailles :

$$u_1 + u_2 = V_0 \Rightarrow \frac{q}{2C} + \frac{q}{C} = V_0 \Rightarrow \frac{3q}{2C} = V_0$$

d'où découle l'expression de la charge q :

$$q = \frac{2CV_0}{3}$$

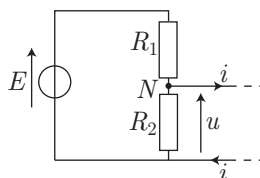


2.3 Montages de base

2.3.1 Ponts diviseurs

2.3.1.1 Diviseur de tension

Le montage du diviseur de tension :



conduit à la loi :

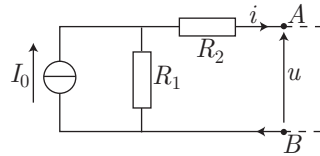
$$u = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \times i$$

Remarque – Si le courant i est nul, la tension $u = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$ est inférieure à E (ce qui justifie le nom de ce montage). En outre, si le courant i arrive dans le nœud N , la loi du diviseur de tension devient :

$$u = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \times i$$

2.3.1.2 Diviseur de courant

Le montage de ce pont diviseur :

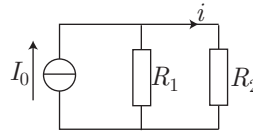


permet de relier i à I_0 , à u et aux conductances $G_1 = \frac{1}{R_1}$ et $G_2 = \frac{1}{R_2}$:

$$i = \frac{G_2 I_0}{G_1 + G_2} - \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} \times u$$

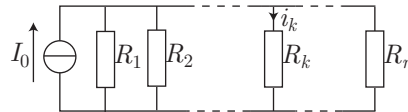
Notamment, lorsque $u = 0$ (les points A et B sont directement reliés), cette loi devient :

$$i = \frac{G_2 I_0}{G_1 + G_2}$$

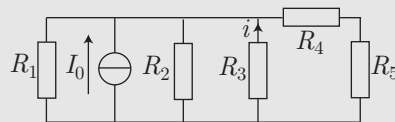


et admet une généralisation :

$$i_k = \frac{G_k I_0}{G_1 + G_2 + \dots + G_n}$$



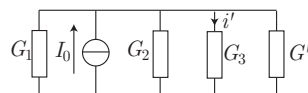
Dans le montage suivant, on demande d'exprimer le courant i en fonction du courant électromoteur I_0 et des conductances $G_i = \frac{1}{R_i}$ du circuit. On appliquera exclusivement la formule du diviseur de courant.



RÉPONSE Les résistances R_4 et R_5 étant associées en série, elles équivalent à une résistance R' telle que :

$$R' = R_4 + R_5 = \frac{1}{G_4} + \frac{1}{G_5} = \frac{G_4 + G_5}{G_4 G_5}$$

à laquelle correspond la conductance $G' = \frac{G_4 G_5}{G_4 + G_5}$. Aussi, en posant $i' = -i$, le montage proposé par l'énoncé équivaut à :



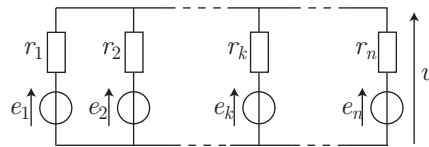
La formule du diviseur de courant fournit alors directement :

$$i' = \frac{G_3 I_0}{G_1 + G_2 + G_3 + G'} = \frac{G_3 I_0}{G_1 + G_2 + G_3 + \frac{G_4 G_5}{G_4 + G_5}}$$

$$\Rightarrow i = -\frac{G_3 (G_4 + G_5) I_0}{(G_1 + G_2 + G_3)(G_4 + G_5) + G_4 G_5}$$

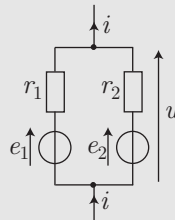
2.3.2 Théorème de Millman

Soit une association en parallèle de n branches $\{e_k, r_k\}$, e_k étant des forces électromotrices et r_k des résistances associées à des conductances g_k .



$$u = \frac{\sum_{k=1}^n g_k e_k}{\sum_{k=1}^n g_k}$$

⚠ La loi précédente (théorème de Millman) ne peut être utilisée s'il existe un nœud d'où peut s'échapper un courant i ; par exemple, dans le montage :

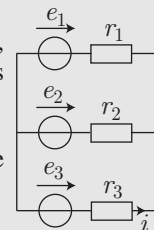


il n'est pas possible d'écrire : $u = \frac{g_1 e_1 + g_2 e_2}{g_1 + g_2}$.



Dans le montage ci-contre, les sources de tension e_k sont idéales, ainsi que les résistances r_k , auxquelles sont associées les conductances $g_k = \frac{1}{r_k}$.

Trouver l'expression de l'intensité i du courant électrique qui traverse r_3 , en fonction de g_1, g_2, g_3, e_1, e_2 et e_3 .



RÉPONSE

Soit u la tension commune aux bornes des mailles horizontales, et $u_3 = r_3 i$ celle aux bornes de la résistance r_3 . La tension u s'exprime aisément à l'aide du théorème de Millman :

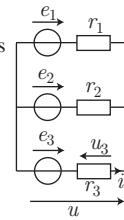
$$u = \frac{g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_3}{g_1 + g_2 + g_3}$$

avec :

$$u = e_3 - u_3 = e_3 - r_3 i \Rightarrow i = g_3 (e_3 - u) = g_3 \times \left(e_3 - \frac{g_1 e_1 + e_2 g_2 + g_3 e_3}{g_1 + g_2 + g_3} \right)$$

On obtient ainsi :

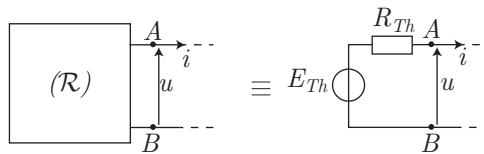
$$i = \frac{g_1 (e_3 - e_1) + g_2 (e_3 - e_2)}{g_1 + g_2 + g_3}$$



2.3.3 Modélisations linéaires

2.3.3.1 Théorème de Thévenin

Soit (\mathcal{R}) un réseau linéaire comprenant des résistances et des sources (de tension ou de courant). Ce réseau est équivalent à un générateur, de force électromotrice E_{Th} et de résistance interne R_{Th} .



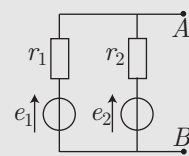
- E_{Th} s'identifie à la tension u lorsque $i = 0$ (circuit ouvert) ;
- R_{Th} vaut la résistance entre A et B (\mathcal{R} étant déconnecté du reste du circuit) après suppression des sources (les sources de tension sont remplacées par des fils électriques et les sources de courant par des interrupteurs ouverts).



Répondre, par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes.

Le dipôle AB est équivalent à un générateur :

1. de force électromotrice $E_{Th} = \frac{e_1 + e_2}{2}$;
2. de résistance interne $R_{Th} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}$.

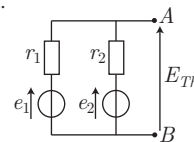


RÉPONSE

1. FAUX

D'après le théorème de Thévenin, la f.é.m. du générateur équivalent au montage proposé s'identifie à la tension E_{Th} entre les bornes A et B , en circuit ouvert. Le théorème de Millman fournit alors immédiatement :

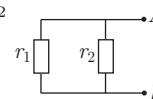
$$E_{Th} = \frac{\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \Rightarrow E_{Th} = \frac{r_2 e_1 + r_1 e_2}{r_1 + r_2} \neq \frac{e_1 + e_2}{2}$$



2. VRAI

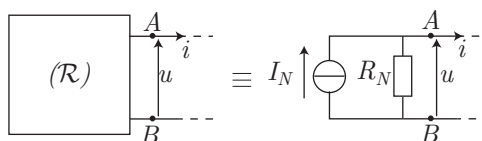
La résistance interne équivalente à ce même générateur vaut la résistance R_{Th} entre les points A et B , après suppression des sources e_1 et e_2 ; les résistances r_1 et r_2 apparaissent alors en parallèle, en conséquence de quoi :

$$R_{Th} = \frac{r_1 \times r_2}{r_1 + r_2}$$



2.3.3.2 Théorème de Norton

Un réseau linéaire (\mathcal{R}), composé de résistances et de sources (de tension ou de courant), équivaut à un générateur de courant électromoteur I_N et de résistance interne R_N .



- I_N s'identifie au courant qui circulerait dans un fil électrique reliant directement les bornes A et B ;
- R_N est la résistance entre A et B calculée après isolement de (\mathcal{R}) et suppression des sources.

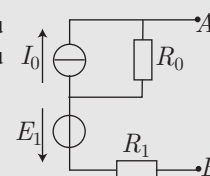
Remarque – Les représentations de Thévenin et de Norton sont équivalentes, à condition de poser :

$$R_{Th} = R_N \text{ et } E_{Th} = R_N \times I_N$$



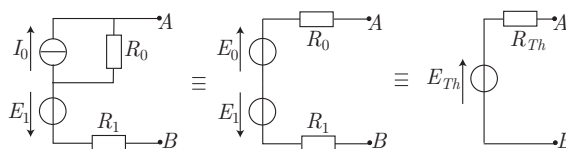
Dans le montage ci-contre, on demande de donner l'expression du courant électromoteur I_N du générateur de courant équivalent, vu des bornes de sortie A et B

1. en raisonnant par association de générateurs ;
2. en mettant en œuvre le théorème de Norton.



RÉPONSE

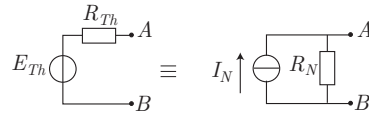
1. L'association, en parallèle, de la source de courant et de la résistance R_0 équivaut à un générateur de tension, de f.é.m. $E_0 = R_0 I_0$ et de résistance interne R_0 .



C'est pourquoi ce montage équivaut à un générateur de tension, de f.é.m. E_{Th} et de résistance interne R_{Th} telles que :

$$E_{Th} = E_0 - E_1 = R_0 I_0 - E_1 \text{ et } R_{Th} = R_0 + R_1$$

Ce générateur peut par conséquent être remplacé par un générateur de courant équivalent :



de résistance interne $R_N = R_{Th} = R_0 + R_1$ et de courant électromoteur :

$$I_N = \frac{E_{Th}}{R_{Th}} = \frac{R_0 I_0 - E_1}{R_0 + R_1}$$

2. D'après le théorème de Norton, le courant électromoteur du générateur de courant équivalent vaut le courant I_N qui circule dans le fil électrique reliant directement les bornes A et B .

Soit $i_1 = I_0 - I_N$ l'intensité du courant qui circule dans la résistance R_0 , aux bornes de laquelle apparaît une différence de potentiel u_1 :

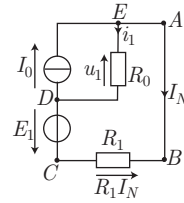
$$u_1 = R_0 i_1 = R_0 I_0 - R_0 I_N$$

La loi des mailles appliquée à $(DCBAED)$ conduit à :

$$\begin{aligned} E_1 + R_1 I_N - u_1 &= 0 \Rightarrow E_1 + R_1 I_N - R_0 I_0 + R_0 I_N = 0 \\ &\Rightarrow (R_1 + R_0) I_N = R_0 I_0 - E_1 \end{aligned}$$

ce qui confirme le résultat obtenu par la première méthode :

$$I_N = \frac{R_0 I_0 - E_1}{R_0 + R_1}$$

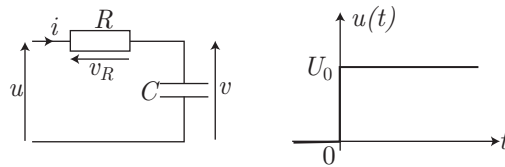


2.4 Régimes transitoires

2.4.1 Circuit RC série

2.4.1.1 Solution générale

Un circuit RC série est alimenté par un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude U_0 :



En remarquant que $i = C \frac{dv}{dt}$, la loi des mailles fournit :

$$u = Ri + v \Rightarrow \tau \frac{dv}{dt} + v = u = U_0 \text{ pour } t \geq 0 \quad (1)$$

où $\tau = RC$ désigne le *temps caractéristique* du montage. Cette équation différentielle admet :

- une solution v_h homogène au second membre, c'est-à-dire constante :

$$\tau \underbrace{\frac{dv_h}{dt}}_0 + v_h = U_0 \Rightarrow v_h = U_0$$

- une solution v_s de l'équation (1) dépourvue de second membre :

$$\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = 0$$

dont l'équation caractéristique (en X) :

$$\tau \times X + 1 = 0 \Rightarrow X = -\frac{1}{\tau}$$

fournit la solution :

$$v_s = A e^{Xt} = A e^{-t/\tau}$$

La solution générale de l'équation (1) :

$$v(t) = v_h + v_s = U_0 + A e^{-t/\tau}$$

présente une constante (A) qui doit s'adapter à la condition initiale : $v(t=0)$.

2.4.1.2 Condition initiale et solution particulière

À la date $t = 0$, l'équation différentielle (1) s'écrit :

$$\tau \left. \frac{dv}{dt} \right|_0 + v(0) = U_0$$

Étant donné que $v(0)$ et U_0 , ne sont pas infinis, $\left. \frac{dv}{dt} \right|_0$ ne l'est pas non plus, ce qui suggère la continuité de v en $t = 0$. En outre, $v(t) = 0$ pour $t < 0$, d'où il découle que :

$$\begin{aligned} v(t=0) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} [v(t)] \Rightarrow v(t=0) = 0 \\ &\Rightarrow U_0 + A = 0 \\ &\Rightarrow A = -U_0 \end{aligned}$$

La solution particulière vaut par conséquent :

$$v(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \text{ pour } t \geq 0$$

⚠ Il n'aurait pas été judicieux de chercher la condition initiale relative à $v_R(t)$, solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dv_R}{dt} + \frac{1}{\tau} v_R = \frac{du}{dt}$$

car, à $t = 0$, la fonction $u(t)$ subit une discontinuité :

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_0 = +\infty \Rightarrow \left. \frac{dv_R}{dt} \right|_0 = +\infty$$

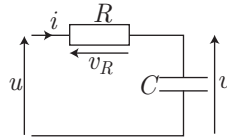
Ce résultat montrerait, tout au plus, que $v_R(t)$ étant discontinue en $t = 0$, il conviendrait de poser :

$$v_R(0) \neq \lim_{t \rightarrow 0^-} [v_R(t)] \Rightarrow v_R(0) \neq 0$$

2.4.1.3 Comportement du condensateur

Les calculs précédents ont révélé que, sous l'influence d'un échelon de tension :

$$v(t = 0) = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} [v(t)] = U_0$$



La première identité montre que :

pour $t = 0$ le condensateur équivaut à un fil électrique

tandis que le second résultat indique que :

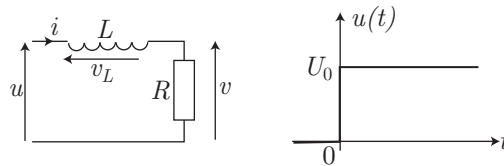
$$\lim_{t \rightarrow \infty} [i(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{U_0 - v(t)}{R} \right] = 0$$

ce qui signifie aussi que :

pour $t \rightarrow \infty$, le condensateur équivaut à un interrupteur ouvert.

2.4.2 Circuit RL série

Soit un circuit RL série alimenté par un échelon de tension $u(t)$ d'amplitude U_0 .



Une étude analogue montrerait que :

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = u \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}$$

dont la solution générale :

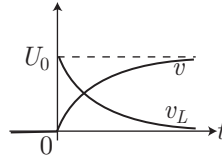
$$v(t) = U_0 + A e^{-t/\tau}$$

présente une constante A adaptée à la condition initiale qui repose sur la continuité de la fonction $v(t)$ en $t = 0$:

$$\begin{aligned} \tau \frac{dv}{dt} \Big|_0 + \underbrace{v(0)}_{\neq 0} &= \underbrace{U_0}_{\neq 0} \Rightarrow \frac{dv}{dt} \Big|_0 \neq \infty \Rightarrow v(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} [v(t)] = 0 \\ &\Rightarrow v(t) = U_0 \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \end{aligned}$$

Cette expression permet de trouver celle de la tension $v_L(t)$ aux bornes de la bobine :

$$\begin{aligned} v_L &= u - v = U_0 - U_0 (1 - e^{-t/\tau}) \\ \Rightarrow v_L &= U_0 e^{-t/\tau} \end{aligned}$$



Remarque – La discontinuité observée pour $v_L(t)$ en $t = 0$ pouvait se prévoir à partir de l'équation différentielle :

$$v_L = \tau \frac{dv}{dt} \Rightarrow \tau \frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dv_L}{dt} \Rightarrow \frac{dv_L}{dt} + \frac{1}{\tau} v_L = \frac{du}{dt}$$

qui devient, à la date $t = 0$:

$$\left. \frac{dv_L}{dt} \right|_0 + \frac{1}{\tau} \underbrace{v_L(0)}_{\neq \infty} = \underbrace{\left. \frac{du}{dt} \right|_0}_{\infty} \Rightarrow \left. \frac{dv_L}{dt} \right|_0 = \infty \Rightarrow v_L(0) \neq \lim_{t \rightarrow 0^-} [v_L(t)] = 0$$

Enfin, la représentation graphique de $v_L(t)$ révèle que :

$$v_L(0) = U_0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} [v_L(t)] = 0$$

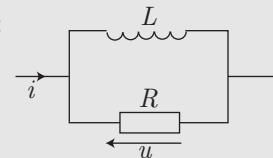
ce qui montre que :

pour $t = 0$, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert, tandis que pour $t \rightarrow \infty$, elle se comporte comme un fil électrique.



Le circuit ci-contre est alimenté par un échelon de courant :

$$\begin{cases} i(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ i(t) = I_0 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$



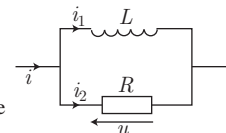
1. Trouver la condition initiale portant sur $u(t = 0)$.
2. Déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t \geq 0$ et représenter graphiquement $u(t)$.

RÉPONSE

1. Soient i_1 et i_2 les intensités des courants qui circulent dans la bobine et dans la résistance respectivement. La loi des nœuds impose :

$$i = i_1 + i_2 = i_1 + \frac{u}{R} \text{ car } u = R i_2$$

et, puisque $u = L \frac{di_1}{dt}$ ne peut pas tendre vers l'infini, cela signifie que $i_1(t)$ est une fonction continue du temps :



$$i_1(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} [i_1(t)] = 0$$

Remarque - Ce résultat pouvait se trouver directement à partir du comportement de la bobine à la date $t = 0$: équivalente à un interrupteur ouvert, elle ne laisse passer aucun courant : $i_1(0) = 0$. Par conséquent :

$$i(t=0) = i_1(t=0) + \frac{1}{R} u(t=0) \Rightarrow I_0 = \frac{1}{R} u(t=0) \Rightarrow u(t=0) = R I_0$$

2. Pour $t > 0$, la loi des nœuds a fourni :

$$i_1 + \frac{u}{R} = i = I_0 \Rightarrow \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} = 0$$

c'est-à-dire, étant donné que $u = L \frac{di_1}{dt}$:

$$\frac{1}{L} u + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle :

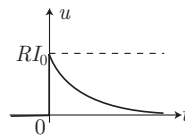
$$\frac{1}{L} + \frac{1}{R} X = 0 \Rightarrow X = -\frac{R}{L}$$

montre que $u(t)$ se présente sous la forme générale :

$$u(t) = A e^{Xt} = A \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$

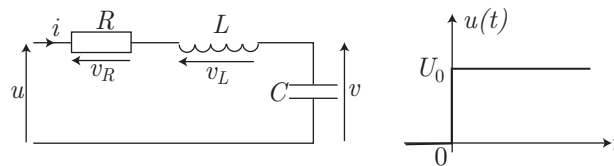
où la constante A tient compte de la valeur initiale de $u(t)$:

$$u(t=0) = R I_0 \Rightarrow A = R I_0 \Rightarrow u(t) = R I_0 \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$



2.4.3 Circuit RLC série

Un circuit RLC série est alimenté sous un échelon de tension d'amplitude U_0 .



La loi des mailles impose :

$$\begin{aligned} u &= v_R + v_L + v = R i + L \frac{di}{dt} + v \text{ avec } i = C \frac{dv}{dt} \\ &= LC \frac{d^2v}{dt^2} + RC \frac{dv}{dt} + v \\ \Rightarrow \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{LC} v &= \frac{u}{LC} \end{aligned}$$

En définissant la *pulsation propre* ω_0 et le *facteur de qualité* Q par :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

cette équation se présente sous la forme canonique suivante :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = \omega_0^2 u = \omega_0^2 U_0 \text{ pour } t \geq 0 \quad (2)$$

Outre une solution homogène au second membre, $v_h = \text{cte}$:

$$\underbrace{\frac{d^2v_h}{dt^2}}_0 + \underbrace{\frac{\omega_0}{Q} \frac{dv_h}{dt}}_0 + \omega_0^2 v_h = \omega_0^2 U_0 \Rightarrow v_h = U_0$$

cette équation admet également une solution v_s après annulation du second membre :

$$\frac{d^2v_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 0 \Rightarrow X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$$

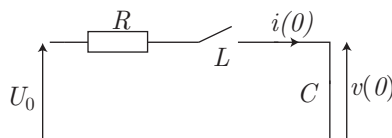
L'équation caractéristique ainsi obtenue a pour discriminant :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$$

qui génère trois types de fonctionnements, selon son signe.

Conditions initiales

Les comportements asymptotiques de la bobine et du condensateur à la date $t = 0$ rendent le schéma du circuit équivalent à :



d'où l'on déduit que :

$$v(0) = 0 \text{ et } \left. \frac{dv}{dt} \right|_0 = \frac{1}{C} \times i(0) = 0$$

Régime pseudo-périodique

Obtenu pour $\Delta < 0 \Rightarrow Q > \frac{1}{2}$, il correspond aux deux racines complexes de l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} X_1 &= -\frac{\omega_0}{2Q} + j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = -\alpha + j\Omega \\ X_2 &= -\frac{\omega_0}{2Q} - j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = -\alpha - j\Omega \end{aligned} \quad \text{avec } \begin{cases} \alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \\ \Omega = \alpha \sqrt{4Q^2 - 1} \end{cases}$$

d'où est issue la solution :

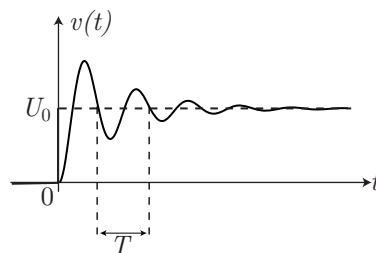
$$v_s = \mu_1 e^{X_1 t} + \mu_2 e^{X_2 t} = e^{-\alpha t} [A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t)]$$

c'est-à-dire :

$$v(t) = v_h + v_s = U_0 + e^{-\alpha t} [A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t)]$$

Des conditions initiales : $v(0) = 0$ et $\dot{v}(0) = 0$ découlent enfin les expressions des constantes A_1 et A_2 :

$$v(t) = U_0 - U_0 e^{-\alpha t} \left[\cos(\Omega t) + \frac{\alpha}{\Omega} \sin(\Omega t) \right]$$



La pseudo-période de ce régime est alors définie par :

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{4\pi Q}{\omega_0 \sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Régime apériodique

La valeur $\Delta > 0 \Rightarrow Q < \frac{1}{2}$ est à l'origine de ce régime ; l'équation caractéristique admet deux racines réelles :

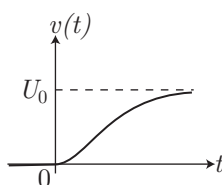
$$\begin{cases} X_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} = -\alpha + \kappa \\ X_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} = -\alpha - \kappa \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \\ \kappa = \alpha \sqrt{1 - 4Q^2} \end{cases}$$

d'où découle la solution :

$$\begin{aligned} v_s &= e^{-\alpha t} [A_1 e^{\kappa t} + A_2 e^{-\kappa t}] \\ \Rightarrow v(t) &= v_h + v_s = U_0 + e^{-\alpha t} [A_1 e^{\kappa t} + A_2 e^{-\kappa t}] \end{aligned}$$

À nouveau, les valeurs initiales de $v(0) = 0$ et de $\dot{v}(0) = 0$ conduisent à la solution particulière cherchée :

$$v(t) = U_0 - U_0 e^{-\alpha t} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{\kappa}\right) \frac{e^{\kappa t}}{2} + \left(1 - \frac{\alpha}{\kappa}\right) \frac{e^{-\kappa t}}{2} \right]$$



Régime apériodique critique

Lorsque $\Delta = 0 \Rightarrow Q = \frac{1}{2}$ l'équation caractéristique admet pour unique solution :

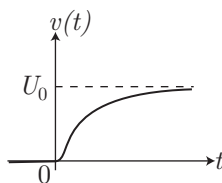
$$X = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

d'où est issue l'expression de v_s :

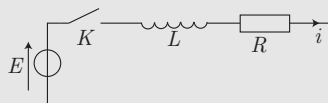
$$\begin{aligned} v_s &= (A + Bt) e^{-\omega_0 t} \\ \Rightarrow v(t) &= v_h + v_s = U_0 + (A + Bt) e^{-\omega_0 t} \end{aligned}$$

Des valeurs initiales : $v(0) = 0$ et $\dot{v}(0) = 0$ découlent les expressions de A et B , et par conséquent de $v(t)$:

$$v(t) = U_0 - U_0 (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}$$



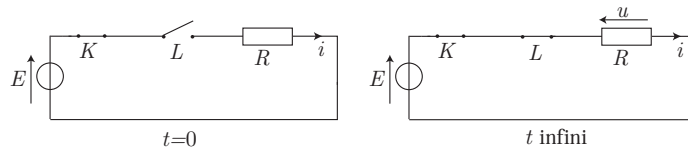
On branche, en série, une bobine d'inductance L et une résistance R . À la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .



1. En rappelant ce qu'équivaut la bobine à la date $t = 0$ et lorsque t tend vers l'infini, déterminer $i(t = 0)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} [i(t)]$.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t \geq 0$. On posera $\tau = \frac{L}{R}$.
3. Résoudre cette équation différentielle et calculer $\lim_{t \rightarrow \infty} [i(t)]$. Conclure.

RÉPONSE

1. À la date $t = 0$ (fermeture de K), la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert, tandis que pour t tendant vers l'infini, elle se comporte comme un fil électrique.

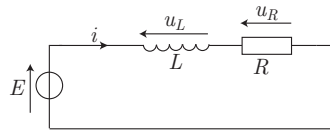


On peut ainsi distinguer deux cas :

- à $t = 0$, le courant ne circule pas : $i(t = 0) = 0$;
- lorsque t tend vers l'infini, la loi des mailles fournit :

$$E - u = 0 \Rightarrow E = u = Ri \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} [i(t)] = \frac{E}{R}$$

2. Soient $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $u_R = Ri$ les tensions respectives aux bornes de la bobine et de la résistance.



La loi des mailles fournit directement l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$:

$$E - u_L - u_R = 0 \Rightarrow u_L + u_R = E \Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = E \text{ pour } t \geq 0$$

Cette équation différentielle admet :

- une solution i_s vérifiant : $L \frac{di_s}{dt} + Ri_s = 0$, dont l'équation caractéristique :

$$LX + R = 0 \Rightarrow X = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

procure la solution :

$$i_s = A e^{Xt} = A e^{-t/\tau}$$

- une solution i_h homogène au second membre, c'est-à-dire constante :

$$L \underbrace{\frac{di_h}{dt}}_0 + Ri_h = E \Rightarrow i_h = \frac{E}{R}$$

La solution générale de l'équation différentielle :

$$i(t) = i_h + i_s = \frac{E}{R} + A e^{-t/\tau}$$

doit vérifier la condition initiale :

$$i(0) = 0 \Rightarrow \frac{E}{R} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

3. Ce résultat permet de calculer :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [i(t)] = \frac{E}{R}$$

ce qui confirme, du reste, le résultat de la première question.

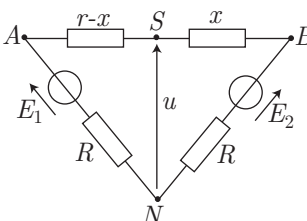
● **33** **Lycée Thiers, Marseille**

5 min.

Lois générales

MPSI-PCSI-PTSI

Le schéma ci-contre comprend deux sources idéales de forces électromotrices E_1 et E_2 . Elles sont intercalées dans les branches AN et BN de même résistance R . La branche AB contient deux résistances : $r - x$ et x . Déterminer la tension u aux bornes S, N , en fonction de E_1, E_2, R, r et x .



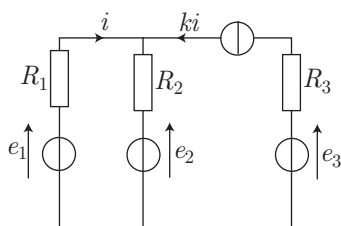
● **34** **Lycée Fabert, Metz**

5 min.

Lois générales

MPSI-PCSI-PTSI

Dans le circuit ci-dessous, où ki représente une source de courant liée, calculer l'intensité i du courant qui circule dans la résistance R_1 .



● **35** **Lycée Camille Guérin, Poitiers**

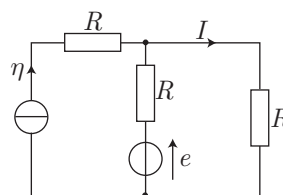
5 min.

Dipôles de base

MPSI-PCSI-PTSI

Le réseau ci-contre contient deux sources idéales, l'une de courant électromoteur $\eta = 40$ mA, l'autre de force électromotrice $e = 6$ V.

Exprimer le courant i en fonction de e, η , et de la résistance R ; faire l'application numérique avec $R = 100 \Omega$.



● **36** **Lycée Pissaro, Pontoise**

10 min.

Dipôles de base

MPSI-PCSI-PTSI

À l'aide d'un voltmètre de très grande impédance d'entrée (c'est-à-dire, qui ne laisse pas circuler le courant), on mesure la différence de potentiel entre les bornes d'un générateur de tension continue ; on obtient $u_1 = 24$ V.

On place alors une résistance $R = 42 \Omega$ entre les bornes de ce générateur ; le voltmètre indique une tension $u_2 = 21$ V.

En déduire la force électromotrice e_0 et la résistance interne r de ce générateur.

● 37 Lycée Thiers, Marseille

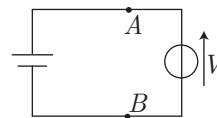
10 min.

Dipôles de base

MPSI-PCSI-PTSI

Soit une pile de force électromotrice E et de résistance interne r , résistance que l'on se propose de déterminer.

- On branche un voltmètre de résistance R entre les points A et B . Soit V la différence de potentiel indiquée par l'appareil. Exprimer V en fonction de E , R et r .



- On complète le montage précédent en intercalant une résistance connue ρ entre A et B . Soit u la différence de potentiel indiquée par le voltmètre.

Exprimer u en fonction de E , R , r et ρ .

- Calculer r connaissant V , u , R et ρ :

$$V = 996 \text{ mV} \quad u = 415 \text{ mV} \quad R = 10 \text{ k}\Omega \quad \rho = 1 \Omega$$

● 38 Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

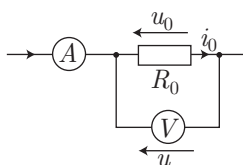
15 min.

Dipôles de base

MPSI-PCSI-PTSI

Une résistance $R_0 = 1 \text{ k}\Omega$ est parcourue par un courant d'intensité i_0 et la tension entre ses bornes vaut u_0 . On cherche à déterminer simultanément ces deux grandeurs à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre (assimilés à des résistances respectives $r_V = 1 \text{ M}\Omega$ et $r_A = 10 \Omega$); deux montages peuvent être réalisés.

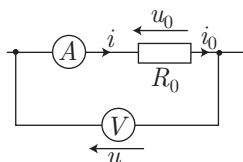
- 1. Voltmètre en courte dérivation**



- Le voltmètre permet-il une mesure de u_0 ?
- Soit i l'intensité du courant mesurée par l'ampèremètre ; évaluer l'erreur relative :

$$\frac{\Delta i}{i_0} = \frac{i - i_0}{i_0}$$

- 2. Voltmètre en longue dérivation**



- L'ampèremètre mesure-t-il l'intensité i_0 ?
- Si u désigne la tension mesurée par le voltmètre, calculer l'erreur relative :

$$\frac{\Delta u}{u_0} = \frac{u - u_0}{u_0}$$

3. Compte tenu des caractéristiques des deux appareils de mesure, lequel de ces deux montages (dérivation courte ou longue) semble le plus fiable ?

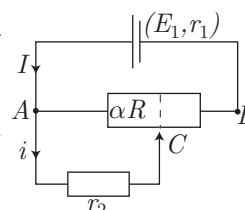
● **39** ————— **Lycée Carnot, Dijon**

20 min.

Dipôles de base

MPSI-PCSI-PTSI

Un générateur de tension, de f.é.m. E_1 , de résistance interne r_1 , alimente une résistance R d'extrémités A et B . Un curseur C délimite une fraction αR de la résistance R entre les bornes A et C ($0 < \alpha < 1$). Soit $E_2 = u_{AC}$ la différence de potentiel existant entre A et C . Ce montage potentiométrique permet d'alimenter une résistance r_2 branchée entre A et C , sous une tension $E_2 < E_1$. On posera $x = \frac{r_1}{r_2}$ et $y = \frac{R}{r_2}$.



- Exprimer le rapport $\frac{E_1}{E_2}$ en fonction de x , y et α dans les cas suivants :
 - si la résistance r_2 tend vers l'infini ;
 - si cette résistance r_2 a une valeur quelconque.
- Le générateur de tension est supposé idéal et l'on choisit $r_2 = 2R$. Pour quelle valeur du rapport potentiométrique α a-t-on $E_2 = \frac{E_1}{2}$?

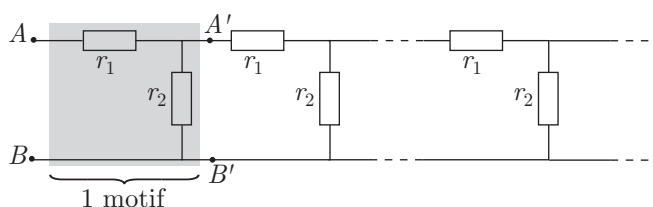
● **40** ————— **Lycée Blaise Pascal, Orsay**

25 min.

Dipôles de base

MPSI-PCSI-PTSI

Une association de résistances r_1 et r_2 comporte une infinité identique (r_1, r_2) comme l'indique le schéma de la figure ci-dessous.



Donner, en fonction de r_1 et r_2 , l'expression de la résistance R équivalente entre les bornes A et B .

● **41** ————— **Q.C.M.**

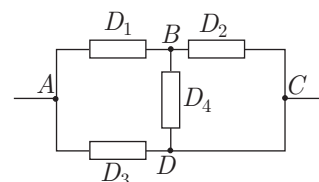
10 min.

Association de dipôles

MPSI-PCSI-PTSI

Concernant le dipôle ci-contre, répondre par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes.

- D_1 et D_2 sont montés en série.
- D_1 et D_3 sont montés en parallèle.
- D_2 et D_4 sont montés en parallèle.
- Si les dipôles D_i sont des résistances R_i , le réseau équivaut à une résistance :



$$R = R_3 \times \frac{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_2 R_4}$$

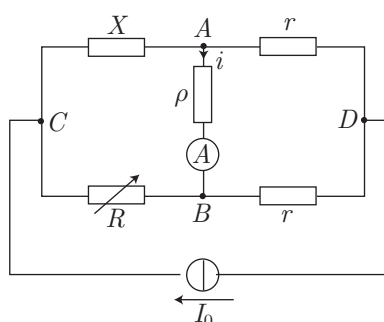
● **42** ————— **Lycée Saint-Louis, Paris**

20 min.

Association de dipôles

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le pont de Wheatstone schématisé ci-dessous, alimenté par une source de courant I_0 .



1. Exprimer le courant i qui circule dans la branche AB , en fonction de I_0 , r , X , R , et S .
2. X est une résistance de platine variant avec la température θ . Le coefficient de température $a = \frac{1}{X} \frac{dX}{d\theta}$ vaut $4 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Le pont étant initialement équilibré¹ à la température θ , pour laquelle $X = X_0$, une faible variation de température $d\theta$ est imposée à X (R et r restant constants). Exprimer, en fonction de R , r , ρ , I_0 et $d\theta$ le courant di dans l'ampèremètre.

Application numérique :

$$R = 50 \Omega \quad r = 1 \text{ k}\Omega \quad \rho = 200 \Omega \quad I_0 = 5 \text{ mA} \quad d\theta = 1^\circ\text{C}$$

● **43** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

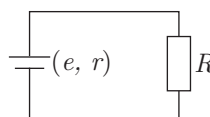
5 min.

Puissance et énergie

MPSI-PCSI-PTSI

Un générateur, de force électromotrice e et de résistance interne r , est connecté à une résistance R . On appelle \mathcal{P} la puissance dissipée par effet Joule dans R .

1. Donner l'expression de \mathcal{P} en fonction de R , r et e .
2. Montrer qu'il existe une valeur R_0 de R pour laquelle \mathcal{P} devient *maximum*, e et r étant maintenus fixes.
Exprimer ce *maximum* \mathcal{P}_{\max} en fonction de r et de e .



¹On dit d'un tel pont qu'il est équilibré lorsque $i = 0$.

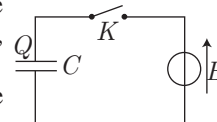
● **44** ————— **Concours des Mines-Ponts**

5 min.

Puissance et énergie

MPSI-PCSI-PTSI

Un condensateur de capacité C , portant initialement la charge $Q = nCE$ ($n > 1$), est relié aux bornes d'une source de tension, de f.é.m. E , lorsque l'interrupteur K est fermé. Déterminer la variation d'énergie $\Delta\mathcal{E}$ emmagasinée dans le condensateur.



● **45** ————— **Lycée Claude Bernard, Paris**

10 min.

Puissance et énergie

MPSI-PCSI-PTSI

On désire connaître la résistance interne d'un générateur, de f.é.m. e_0 . Pour cela, on connecte une résistance R_1 à ses bornes et on mesure la puissance \mathcal{P}_1 qu'elle dissipe par effet Joule. Lorsqu'on substitue à R_1 une résistance R_2 , la puissance mesurée devient $\mathcal{P}_2 = \eta \mathcal{P}_1$.

Montrer que r_0 peut s'exprimer en fonction de R_1 , R_2 et η .

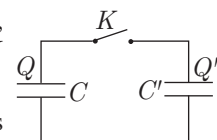
● **46** ————— **Concours des Mines-Ponts**

20 min.

Puissance et énergie

MPSI-PCSI-PTSI

Deux condensateurs de capacités C et C' sont reliés par des fils de résistance négligeable et d'un interrupteur K . À l'instant $t = 0$, les condensateurs portent les charges Q_0 et Q'_0 . L'interrupteur K est alors fermé.



1. Quelles sont les charges finales Q_f et Q'_f portées par les condensateurs, en fonction de Q_0 , Q'_0 , C et C' ?
2. Donner, en fonction des mêmes paramètres, la variation $\Delta\mathcal{E}$ d'énergie électrostatique emmagasinée par les condensateurs. Quel est le signe de $\Delta\mathcal{E}$?

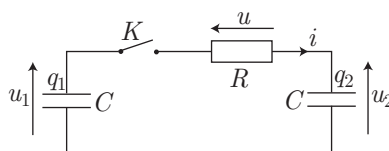
● **47** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

30 min.

Puissance et énergie

MPSI-PCSI-PTSI

Dans le montage ci-dessous, les condensateurs, de même capacité C , possèdent initialement les charges $q_1 = q_{10}$ et $q_2 = q_{20}$. À la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K et on attend que l'intensité i du courant qui circule dans le circuit s'annule ; les condensateurs portent alors les charges q'_1 et q'_2 .



1. Trouver les expressions de q'_1 et q'_2 en fonction de q_{10} et q_{20} . En déduire la variation $\Delta\mathcal{E}$ de l'énergie emmagasinée dans les condensateurs au cours de cette expérience, en fonction de C et q_{10} et q_{20} .

2. (a) Exprimer i et u en fonction des charges instantanées q_1 et q_2 portées par les condensateurs. En déduire l'équation différentielle :

$$RC \frac{dq_2}{dt} + 2q_2 = q_{10} + q_{20}$$

- (b) Résoudre cette équation et en déduire l'expression de $i(t)$.
 (c) Calculer l'énergie W perdue par effet Joule au cours de cette expérience et comparer W à $\Delta\mathcal{E}$.

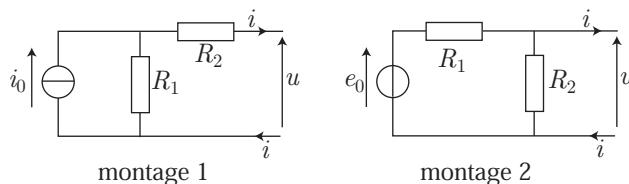
● **48** ————— **Lycée Janson de Sailly, Paris**

20 min.

Montages de base

MPSI-PCSI-PTSI

On considère les deux montages ci-dessous :



1. (a) En notant $G_1 = \frac{1}{R_1}$ et $G_2 = \frac{1}{R_2}$ les conductances des *resistors* du montage 1, donner la relation $i = f(u)$ en fonction de G_1 et G_2 .
 (b) À quelle condition un tel montage est-il équivalent à une source de courant ? Pourquoi parle-t-on de « diviseur de courant » lorsque $u = 0$?
2. (a) Pour le montage 2, établir la relation $i = f(u)$ en fonction de R_1 et R_2 .
 (b) Quelle condition permet d'assimiler ce montage à une source de tension ? pourquoi parle-t-on alors de « diviseur de tension » lorsque $i = 0$?

● **49** ————— **Q.C.M.**

5 min.

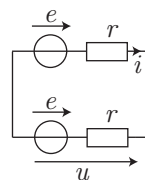
Théorème de Millman

MPSI-PCSI-PTSI

Le montage ci-contre comporte des sources idéales de forces électromotrices $e = 10$ V et des résistances $r = 5$ Ω. Parmi les propositions suivantes, indiquer celles qui sont exactes.

1. La tension u aux bornes du montage vaut :

a. $u = 20$ V b. $u = 10$ V c. $u = 0$ V



2. L'intensité i du courant qui y circule vaut :

a. $i = 2$ A b. $i = 4$ A c. $i = 0$ A

● **50** ————— **Lycée Janson de Sully, Paris**

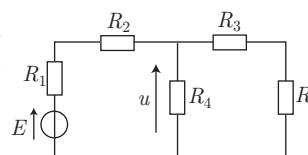
10 min.

Théorème de Millman

MPSI-PCSI-PTSI

Dans le montage ci-contre, on demande d'exprimer la tension u en fonction de la force électromotrice E et des résistances du circuit :

1. en appliquant le théorème de Millman ;
2. en utilisant la loi du diviseur de tension.



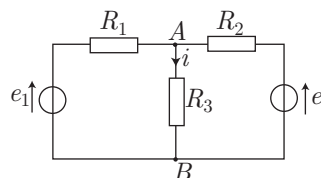
● **51** ————— **Lycée Fabert, Metz**

10 min.

Théorème de Millman

MPSI-PCSI-PTSI

1. En utilisant le théorème de Millman, calculer l'intensité i du courant qui circule dans la branche AB du circuit ci-contre.
2. On ajoute, en parallèle sur R_3 , un électrolyseur de f.c.é.m. e' et de résistance r' . Quelle est la valeur limite e'_0 de e' telle que l'électrolyseur fonctionne. Que se passe-t-il si $e' > e'_0$?



● **52** ————— **Lycée Thiers, Marseille**

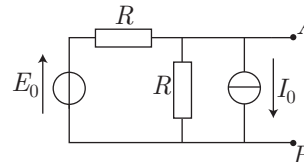
5 min.

Théorème de Thévenin

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le circuit ci-contre, dans lequel sont placées des sources de force électromotrice E_0 et de courant électromoteur I_0 .

On veut remplacer le circuit entre A et B par un générateur de force électromotrice E_e et de résistance interne R_e . Exprimer E_e et R_e en fonction de R , I_0 et E_0 .



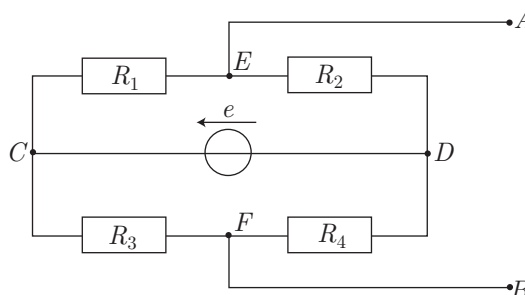
● **53** ————— **Q.C.M.**

10 min.

Théorème de Thévenin

MPSI-PCSI-PTSI

Donner les caractéristiques (force électromotrice e_0 et résistance interne r_0) du générateur de Thévenin équivalent au réseau suivant :



1. $e_0 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} e$ et $r_0 = \frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$
2. $e_0 = \frac{R_1 R_2 - R_3 R_4}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3)} e$ et $r_0 = \frac{R_1 R_3 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_1 + R_3)}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3)}$
3. $e_0 = \frac{R_2 R_3 + R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} e$ et $r_0 = \frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4) - R_3 R_4 (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}$
4. $e_0 = \frac{R_1 R_2 + R_3 R_4}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3)} e$ et $r_0 = \frac{R_1 R_3 (R_2 + R_4) - R_2 R_4 (R_1 + R_3)}{(R_2 + R_4)(R_1 + R_3)}$

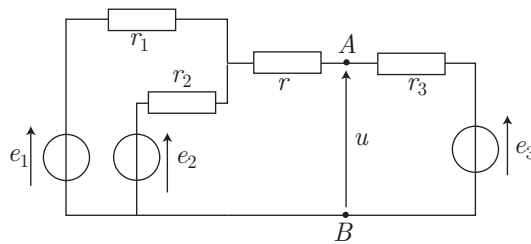
● **54** **Q.C.M.**

10 min.

Théorème de Thévenin

MPSI-PCSI-PTSI

Si $r_3 = \frac{r(r_1 + r_2) + r_1 r_2}{r_1 + r_2}$, la tension entre les bornes A et B du circuit suivant :



a pour expression :

- | | |
|--|--|
| <p>a. $u = \frac{r_1 (e_2 + e_3) + r_2 (e_2 + e_3)}{2(r_1 + r_2)}$</p> | <p>b. $u = \frac{r_1 (e_2 + e_3) + r_2 (e_1 + e_3)}{2(r_1 + r_2)}$</p> |
| <p>c. $u = \frac{r_1 (e_1 + e_2) + r_2 (e_1 + e_3)}{2(r_1 + r_2)}$</p> | <p>d. $u = \frac{r_1 (e_2 + e_3) + r_2 (e_1 + e_2)}{2(r_1 + r_2)}$</p> |

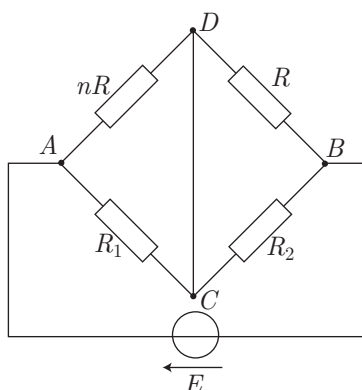
● **55** **Q.C.M.**

10 min.

Théorème de Thévenin

MPSI-PCSI-PTSI

Un pont de résistances est alimenté par une source de tension continue, de f.é.m. E . La branche CD a une résistance négligeable. R , R_1 et R_2 sont des résistances et n un nombre entier.



1. Calculer la force électromotrice E_{Th} du générateur de tension équivalent au dipôle de bornes C et D , obtenu en enlevant la branche CD , en fonction de n , R_1 , R_2 et E .

$$\begin{aligned} \text{a. } E_{Th} &= \frac{R_1 - (n+1)R_2}{n(R_1 + R_2)} E & \text{b. } E_{Th} &= \frac{R_1 - nR_2}{(n+1)(R_1 + R_2)} E \\ \text{c. } E_{Th} &= \frac{R_2 - nR_1}{n(R_1 + R_2)} E & \text{d. } E_{Th} &= \frac{R_2 - (n+1)R_1}{n(R_1 + R_2)} E \end{aligned}$$

2. Calculer la résistance interne R_{Th} du générateur équivalent, en fonction de R_1 , R_2 , R et n :

$$\begin{aligned} \text{a. } R_{Th} &= \frac{nR}{n+1} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & \text{b. } R_{Th} &= R + n \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ \text{c. } R_{Th} &= (n+1)R + 2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} & \text{d. } R_{Th} &= \frac{n+1}{n} R - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

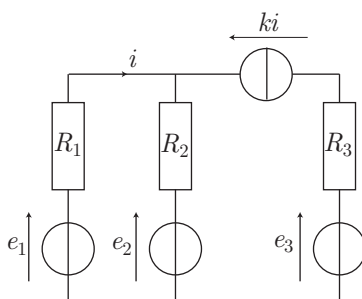
● 56 ————— Lycée Fabert, Metz

10 min.

Théorème de Norton

MPSI-PCSI-PTSI

Dans le circuit ci-dessous, où ki représente une source de courant liée, calculer l'intensité du courant i en utilisant le théorème de Norton.



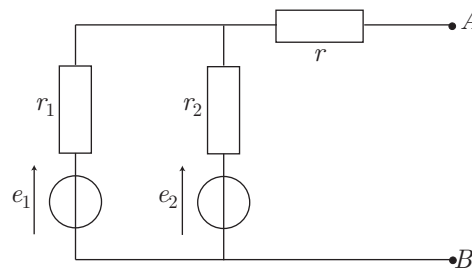
● **57** **Lycée Carnot, Dijon**

15 min.

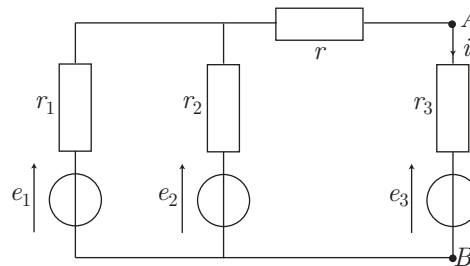
Théorèmes de Thévenin et de Norton

MPSI-PCSI-PTSI

1. Donner la force électromotrice e_0 et la résistance interne r_0 du générateur de tension équivalent au montage ci-dessous, entre les points A et B .



2. Exprimer, en fonction de $e_1, e_2, e_3, r_1, r_2, r$ et r_3 l'intensité i du courant qui circule dans la branche AB du montage présenté ci-dessous.



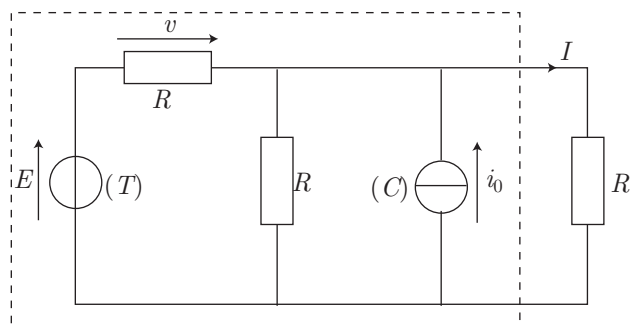
● **58** **Lycée Roosevelt, Reims**

15 min.

Théorème de Thévenin

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le circuit suivant où (T) est une source de tension de f.é.m. E , et (C) une source de courant commandée, de c.é.m. $i_0 = g v$ (v étant la tension aux bornes de R). Les flèches indiquent les conventions d'orientation.



1. On peut remplacer la partie encadrée du circuit précédent par un générateur de tension, de force électromotrice u_i en série avec une résistance R_i . Calculer u_i et R_i en fonction de E, g et R .

2. En déduire l'expression de l'intensité I en fonction de E , g et R .

● **59** **Lycée Condorcet, Paris**

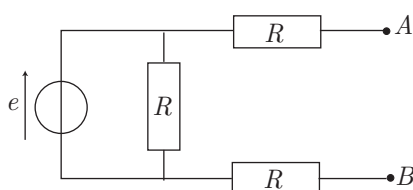
20 min.

Théorèmes de Norton et de Thévenin

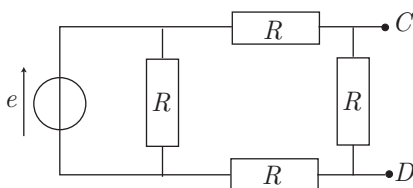
MPSI-PCSI-PTSI

1. Générateur de Thévenin

- (a) En utilisant le théorème de Thévenin, donner la force électromotrice e_0 et la résistance interne r_0 du générateur de tension équivalent au montage ci-dessous, vu des bornes A et B .



- (b) En déduire la force électromotrice e_1 et la résistance interne r_1 du générateur de tension équivalent au montage suivant.



2. Générateur de courant

- (a) Utiliser le résultat précédent afin d'exprimer le courant électromoteur i_1 et la résistance interne R_1 du générateur de courant équivalent au dernier montage.
- (b) Retrouver ces résultats en appliquant le théorème de Norton.

● **60** **Lycée Lakanal, Sceaux**

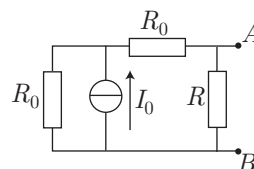
30 min.

Théorème de Norton

MPSI-PCSI-PTSI

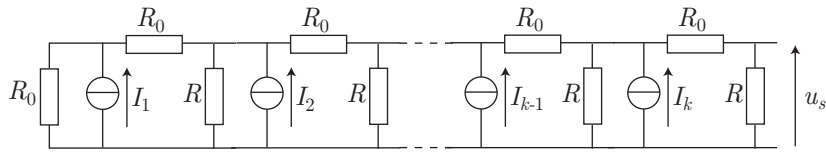
Dans les dispositifs électroniques, un convertisseur numérique-analogique permet de délivrer une tension, image d'une grandeur numérique issue par exemple d'un ordinateur. On se propose un tel dispositif.

1. (a) Déterminer les caractéristiques I_N , R_N du générateur de Norton équivalent.
- (b) Établir la relation entre R et R_0 pour que R_N soit égal à R_0 .



On se placera désormais dans cette situation.

2. On associe k cellules ; on obtient le dispositif ci-dessous :



- (a) Quel est le générateur de Norton équivalent ?
 (b) En déduire la tension de sortie u_s en fonction de R_0 et des courants électromoteurs I_1, I_2, \dots, I_k .
3. En fait, chaque source de courant délivre un courant égal à 0 ou I_0 . On définit une variable binaire $a_i = 0$ ou $a_i = 1$ telle que $I_i = a_i I_0$. Exprimer u_s en fonction de R_0, I_0, k et de :

$$\sum_{i=1}^k 2^{i-1} a_i = a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{k-1} a_k$$

4. Pour une structure à $k = 8$ cellules, quelles plages de valeurs d'un entier N la tension u_s peut-elle convertir ?

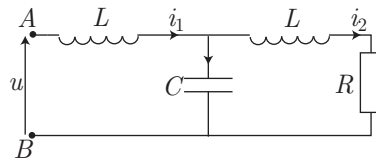
● **61** **Lycée Hoche, Versailles**

5 min.

Équation différentielle

MPSI-PCSI

On applique, entre les bornes A et B du circuit ci-dessous, une tension u continue.



Établir l'équation différentielle vérifiée par i_2 .

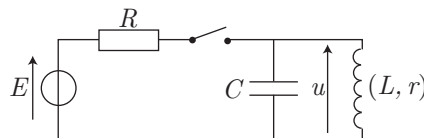
● **62** **Lycée Fabert, Metz**

15 min.

Équation différentielle

MPSI-PCSI-PTSI

Un condensateur, de capacité C et initialement déchargé, est en parallèle avec une bobine d'inductance L et de résistance r . On charge le condensateur à travers une résistance R , à l'aide d'une source de tension, de f.é.m. E .



L'interrupteur de la branche (E, R) est fermé à la date $t = 0$.

Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes de la bobine.

● **63** **Lycée Carnot, Dijon**

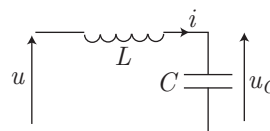
10 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Régime transitoire

Le circuit schématisé ci-contre est soumis à un échelon de tension :

$$\begin{cases} u(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ u(t) = E \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$



et le condensateur est initialement déchargé.

1. Trouver les conditions initiales portant sur $i(t = 0)$ et $\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$.
2. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Exprimer $i(t)$ pour $t \geq 0$.

● **64** **Lycée Fabert, Metz**

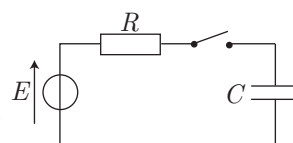
10 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Régime transitoire

On étudie la charge, sous une tension $E = 10 \text{ V}$, dans un condensateur (initialement déchargé) de capacité $C = 10 \mu\text{F}$, à travers une résistance $R = 100 \Omega$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.
2. En déduire l'expression de $u(t)$.
3. Au bout de quelle durée T , $u(t)$ approche-t-il E , à 0,1 V près ?



● **65** **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

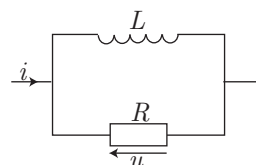
10 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Régime transitoire

Le circuit ci-contre est alimenté par un échelon de courant :

$$\begin{cases} i(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ i(t) = I_0 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$



1. Trouver la condition initiale portant sur $u(t = 0)$.
2. Déterminer l'expression de $u(t)$ pour $t \geq 0$ et le représenter graphiquement.

● **66** **Lycée Fabert, Metz**

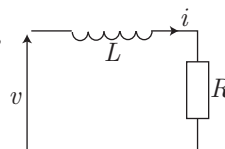
10 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Régime transitoire

Soit le circuit représenté ci-contre. On s'intéresse au courant $i(t)$, en supposant que $i(t \leq 0) = 0$.

On note $\tau = \frac{L}{R}$.



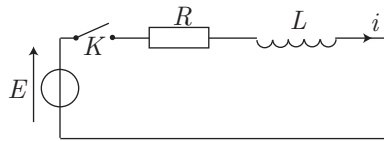
À la date $t = 0$, on applique la tension $v(t) = V_m \cos(\omega t)$. Déterminer l'expression de $i(t)$ pour $t \geq 0$.

● **67** ————— **Lycée Poincaré, Nancy**
10 min.

Régime transitoire

MPSI-PCSI-PTSI

On branche, en série, une bobine pure d'inductance L et une résistance R . À la date $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .



1. En rappelant ce qu'équivaut la bobine à la date $t = 0$ et lorsque $t \rightarrow \infty$, déterminer $i(t = 0)$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} [i(t)]$.
2. Trouver l'équation différentielle vérifiée par i et en déduire l'expression de i pour $t \geq 0$. On posera $\tau = \frac{L}{R}$.
3. L'expression $i(t)$ confirme-t-elle le résultat de la première question ?

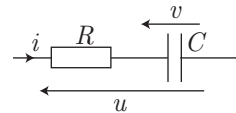
● **68** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**
10 min.

Régime transitoire

MPSI-PCSI-PTSI

Un circuit RC série est soumis à un échelon de tension :

$$\begin{cases} u(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ u(t) = U_0 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$



1. Le condensateur étant initialement déchargé, exprimer la tension $v(t)$ aux bornes du condensateur et la représenter graphiquement.
2. Faire de même avec l'intensité $i(t)$ du courant qui circule dans le circuit.

● **69** ————— **Lycée Lakanal, Sceaux**
15 min.

Régime transitoire

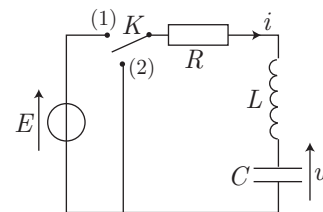
MPSI-PCSI-PTSI

On considère le circuit schématisé ci-contre. Pour $t < 0$ l'interrupteur K est basculé en position (1) tandis qu'il est en position (2) pour $t \geq 0$.

On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{R} > \frac{1}{2}$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u aux bornes du condensateur, pour $t \geq 0$.
2. Montrer que cette équation admet pour solution générale :

$$u(t) = e^{-\alpha t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$



Exprimer les paramètres α et Ω en fonction de Q et de ω_0 .

On ne calculera pas les constantes A et B .

3. Soit T la pseudo-période du signal $v(t)$. On définit le décrément logarithmique par :

$$\delta = \ln \left[\frac{u(t)}{u(t+T)} \right]$$

Exprimer δ en fonction de Q .

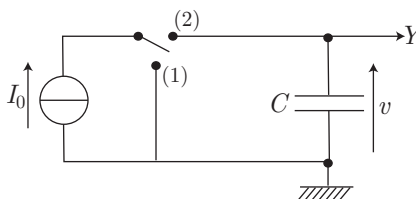
● 70 ————— Lycée Kléber, Strasbourg

15 min.

Régime transitoire

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le circuit suivant comprenant une source idéale de courant (de c.é.m. I_0), un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$, un interrupteur deux positions permettant, soit de court-circuiter la source (position 1), soit de charger le condensateur (position 2).



- À l'instant $t = 0$, le condensateur étant déchargé, l'interrupteur est basculé en position 2 pendant la durée t_0 , puis revient en position 1. Étudier $v(t)$, tension aux bornes du condensateur ; tracer qualitativement le graphe de la fonction $v(t)$ pour $t \in]-\infty, +\infty[$.
- On utilise effectivement ce montage et on observe le signal à l'oscilloscope (entrée Y – en continu). On relève la déviation verticale du spot à l'écran lorsque l'interrupteur est en position 2 ; lorsque celui-ci revient en position 1, cette déviation est divisée par 2 en 7,2 secondes. Déterminer la résistance d'entrée de l'oscilloscope.

● 71 ————— Lycée Michelet, Vanves

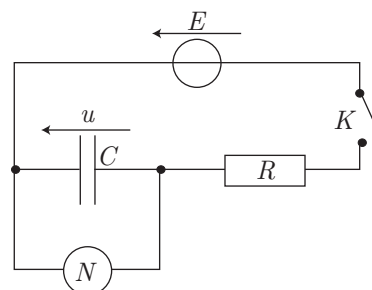
15 min.

Régime transitoire

MPSI-PCSI-PTSI

On réalise le montage ci-contre dans lequel une lampe néon (N) est branchée en parallèle aux bornes du condensateur de capacité C . Initialement la lampe est éteinte et le condensateur est déchargé ; la résistance de la lampe est infinie. Lorsque la tension u atteint la valeur u_a (tension d'allumage), la lampe s'allume et se comporte comme une résistance nulle.

On pose : $\tau = RC$ et on admet que $E > u_a$.



À la date $t = 0$, on ferme K ; on observe périodiquement de très brefs éclairs.

1. Interpréter le phénomène observé.
2. Calculer la période des éclairs observés. Pour l'application numérique, on prendra :

$$R = 50 \text{ k}\Omega \quad C = 8 \text{ }\mu\text{F} \quad u_a = 150 \text{ V} \quad E = 500 \text{ V}$$

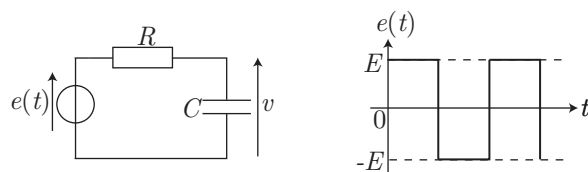
● **72** ————— **Lycée Kléber, Strasbourg**

20 min.

Régime transitoire

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le dipôle RC suivant, alimenté par un générateur débitant une tension crête à crête $e(t)$.



On pose $\tau = RC$ et on suppose que le générateur impose sa période T au circuit.

1. Écrire les équations différentielles en v , correspondant aux deux demi-périodes de $e(t)$.
2. On note v_1 la tension aux bornes du condensateur pour $e(t) = E$ et v_2 pour $e(t) = -E$.

Calculer les constantes d'intégration en utilisant les valeurs des tensions v_1 ou v_2 aux dates $0, \frac{T}{2}, T$.

On exprimera ces constantes en fonction de E, T et τ .

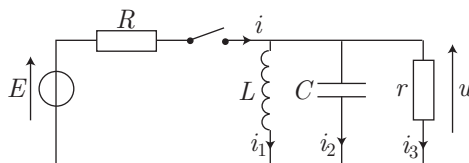
● **73** ————— **Extrait du concours E.N.S.T.I.M.**

20 min.

Régime transitoire

MPSI-PCSI-PTSI

La figure ci-dessous donne le schéma du montage étudié ; la source de tension a une force électromotrice E constante. Les *resistors* sont linéaires, de résistances R et r constantes.



1. Établir l'équation différentielle liant i_3 à ses dérivées par rapport au temps t . On posera par la suite :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } \lambda = \frac{R+r}{2RrC}$$

2. Quelle relation doit exister entre R, r, C et L pour que la solution de l'équation différentielle précédente corresponde à un régime pseudo-périodique ?

3. Définir et exprimer la pseudo-pulsation ω .

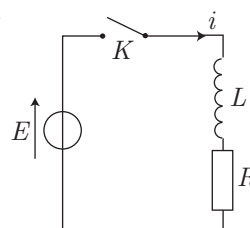
● **74** **Lycée Henri IV, Paris**

20 min.

Régime transitoire

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le circuit de la figure ci-contre, constitué par la mise en série d'une source de tension de f.é.m. E , d'un interrupteur K , d'une résistance R et d'une inductance pure de valeur L . À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .



1. Quelle est l'équation différentielle relative au courant i ?
Donner l'expression littérale de $i(t)$, solution de cette équation, en fonction de t .

On notera I_m la quantité $\frac{E}{R}$ et τ la constante de temps : $\tau = \frac{L}{R}$.

2. On désigne par $W_L(t)$ l'énergie mise en jeu par l'inductance L à l'instant t , $W_E(t)$ l'énergie fournie par la source entre l'instant 0 et l'instant t .

Donner l'expression de ces deux grandeurs et représenter l'allure des courbes correspondantes sur un même graphe.

3. Que représente la quantité $(W_E - W_L)$?

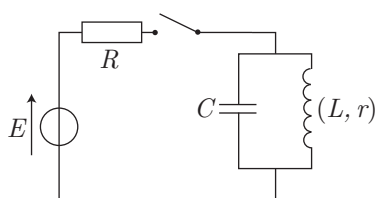
● **75** **Lycée Fabert, Metz**

25 min.

Régime transitoire

MPSI-PCSI-PTSI

Un condensateur (de capacité $C = 10 \mu\text{F}$), initialement déchargé, a ses bornes reliées à celles d'une bobine d'inductance $L = 1 \text{ H}$ et de résistance $r = 100 \Omega$, à l'aide d'une source de tension de f.é.m. $E = 10 \text{ V}$. On attend qu'un régime stationnaire soit établi.



- Quels sont alors la tension U_0 aux bornes du condensateur et le courant I_0 dans la bobine ?
- L'interrupteur de la branche (E, R) est brusquement ouvert à la date $t = 0$. Quelle équation différentielle vérifie dès lors la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur ?
- Compte tenu des valeurs numériques, quel sera le type de régime transitoire observé ?
- Résoudre cette équation différentielle pour donner les expressions de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur en fonction de U_0 , I_0 et de grandeurs que l'on définira à partir de r , L et C .

● 76 Lycée Michelet, Vanves

25 min.

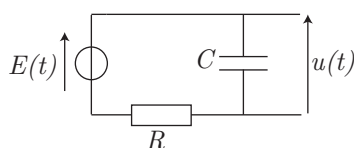
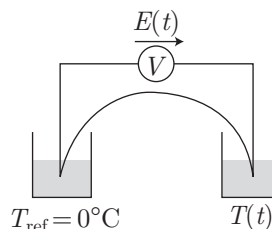
Régime transitoire

MPSI-PCSI-PTSI

Le thermocouple est un appareil permettant une mesure de température par rapport à une température de référence (souvent 0°C). Il délivre une tension E proportionnelle à la différence de température, dans le cas idéal :

$$E(t) = A [T(t) - T_{\text{réf}}] = AT(t)$$

En fait, on peut le modéliser, en général, par le circuit ci-dessous :



où $u(t)$ est la tension effectivement mesurée au voltmètre.

On notera : $\tau = RC$.

1. Initialement, le corps étudié est à la température $T = 0^\circ\text{C}$ (le condensateur étant déchargé) ; on le chauffe, sa température croît alors linéairement avec le temps t :

$$T(t) = \frac{T_0}{\theta} \times t$$

Établir l'équation différentielle que vérifie $u(t)$ et celle que vérifie $\dot{u} = \frac{du}{dt}$.

2. Déterminer $u(t)$.
3. Au bout du temps τ_0 , on arrête de chauffer ; T demeure alors constant.
Donner les expressions de $E(t)$ et de $u(t)$ pour $t \geq \tau_0$.

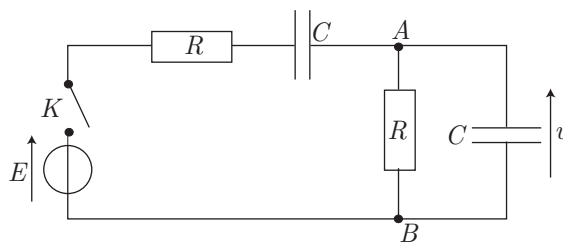
● 77 Lycée Hoche, Versailles

30 min.

Régime transitoire

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le circuit représenté ci-dessous :



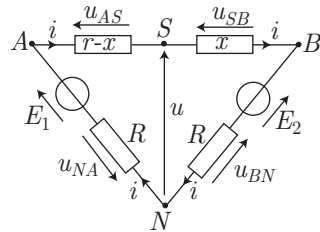
Pour $t < 0$, l'interrupteur K est ouvert et les deux condensateurs, de même capacité C , sont déchargés. Les deux *resistors* sont de même résistance R en l'on note $\tau = RC$.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $v(t) = V_A - V_B$ pour $t > 0$.

2. Trouver les conditions initiales $v(t = 0)$ et $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0}$.
3. En déduire l'expression de $v(t)$.
4. À quelle date $v(t)$ devient-il *maximum* ?
5. Représenter graphiquement l'allure de $v(t)$.

● **33** **Lycée Thiers, Marseille**

Soit i l'intensité du courant qui circule dans le circuit.



La loi d'Ohm relie cette intensité aux différences de potentiel entre les bornes des diverses résistances :

$$u_{AS} = (r - x) i \quad u_{SB} = x i \quad u_{BN} = u_{NA} = R i$$

et la loi des mailles (dans le sens de i) fournit :

$$\begin{aligned} 0 &= E_1 - u_{AS} - u_{SB} - E_2 - u_{BN} - u_{NA} \\ \Rightarrow E_1 - E_2 &= i \times (r + 2R) \Rightarrow i = \frac{E_1 - E_2}{r + 2R} \end{aligned}$$

De même, la loi des mailles appliquée à (SBN) s'exprime par :

$$u - u_{SB} - E_2 - u_{BN} = 0 \Rightarrow u = E_2 + (R + x) i = E_2 + \frac{(R + x)(E_1 - E_2)}{r + 2R}$$

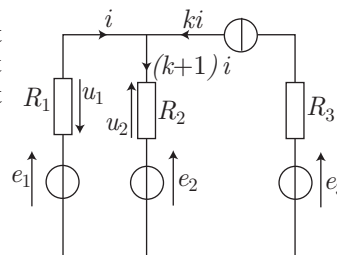
soit, finalement :

$$u = \frac{E_2 (R + r - x) + E_1 (R + x)}{r + 2R}$$

● **34** **Lycée Fabert, Metz**

La loi des nœuds indique que la résistance R_2 est parcourue par un courant d'intensité $(k + 1) i$. C'est pourquoi, d'après la loi d'Ohm, les résistances R_1 et R_2 ont, à leurs bornes, des différences de potentiel :

$$u_1 = R_1 i \text{ et } u_2 = R_2 (k + 1) i$$



Enfin, la loi des mailles précise que :

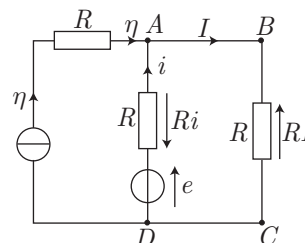
$$\begin{aligned} e_1 - u_1 - u_2 - e_2 &= 0 \Rightarrow u_1 + u_2 = e_1 - e_2 \\ &\Rightarrow [R_1 + (k + 1) R_2] i = e_1 - e_2 \\ &\Rightarrow i = \frac{e_1 - e_2}{R_1 + (k + 1) R_2} \end{aligned}$$

● 35 ————— Lycée Camille Guérin, Poitiers

En appliquant la loi des mailles à $(ABCD A)$, on obtient :

$$e - Ri - RI = 0$$

où i désigne l'intensité du courant arrivant au nœud A , qui reçoit également le courant d'intensité η :



$$I = i + \eta \Rightarrow i = I - \eta \Rightarrow e - RI + R\eta - RI = 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{e + R\eta}{2R}$$

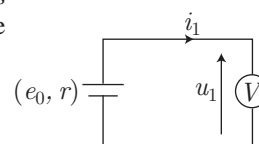
Application numérique :

$$I = \frac{6 + 100 \times 40 \times 10^{-3}}{2 \times 100} \Rightarrow I = 005 \text{ A} = 50 \text{ mA}$$

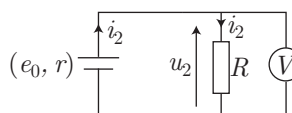
● 36 ————— Lycée Pissaro, Pontoise

Lorsque le générateur délivre un courant i_1 , la tension à ses bornes vaut $u_1 = e_0 - r i_1$. Or, le voltmètre interdisant le passage du courant, il s'ensuit que :

$$i_1 = 0 \Rightarrow e_0 = u_1 = 24 \text{ V}$$



Pour les mêmes raisons, le courant i_2 délivré par le générateur passe intégralement dans la résistance R , au bornes de laquelle apparaît par conséquent une tension $u_2 = R i_2$. C'est pourquoi :



$$u_2 = R i_2 = e_0 - r i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{e_0}{R + r}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{R}{R + r} e_0 = \frac{R}{R + r} u_1$$

$$\Rightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{R + r}{R} = 1 + \frac{r}{R}$$

$$\Rightarrow r = R \left(\frac{u_1}{u_2} - 1 \right)$$

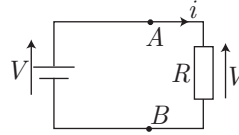
Application numérique :

$$r = 42 \times \left(\frac{24}{21} - 1 \right) \Rightarrow r = 6 \Omega$$

● 37 ————— Lycée Thiers, Marseille

1. La pile et le voltmètre (résistance R) étant montés en parallèle, la tension $V = Ri$ est aussi celle aux bornes de la pile :

$$V = E - r i \Rightarrow E = V + r i = V + \frac{r}{R} V = \frac{R+r}{R} V$$

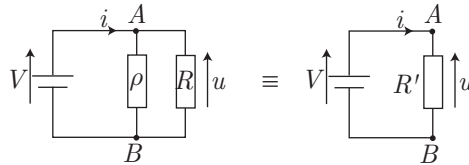


d'où :

$$V = \frac{R E}{R + r}$$

2. En intercalant une résistance ρ entre A et B , on réalise une résistance R' équivalente à R et ρ en parallèle :

$$R' = \frac{R \rho}{R + \rho}$$



La similitude avec ce montage équivalent et celui de la question précédente permet d'affirmer que :

$$u = \frac{R' E}{R' + r} = \frac{\frac{R \rho E}{R + \rho}}{\frac{R \rho}{R + \rho} + r} \Rightarrow u = \frac{R \rho E}{R \rho + r (R + \rho)}$$

3. D'après les deux résultats précédents :

$$E = \frac{R+r}{R} V = V + r \frac{V}{R}$$

et :

$$E = \frac{R \rho + r (R + \rho)}{R \rho} u = u + r \times \frac{(R + \rho) u}{R \rho}$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} V + r \frac{V}{R} &= u + r \times \frac{(R + \rho) u}{R \rho} \Rightarrow V - u = r \times \frac{(R + \rho) u - \rho V}{R \rho} \\ &\Rightarrow r = \frac{R \rho (V - u)}{(R + \rho) u - \rho V} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$r = \frac{10^4 \times (0,996 - 0,415)}{0,415 \times (10^4 + 1) - 0,996} \Rightarrow r = 1,4 \Omega$$

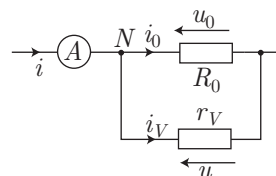
● 38 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Voltmètre en courte dérivation

- (a) Dans ce montage, le voltmètre est monté en parallèle avec la résistance R_0 , ce qui implique :

$$u = u_0$$

C'est pourquoi ce voltmètre mesure la tension u_0



- (b) Le courant i se sépare en i_0 et i_V au nœud N , en conséquence de quoi :

$$i = i_0 + i_V \Rightarrow i - i_0 = i_V$$

où la loi d'Ohm fournit :

$$\begin{cases} u_0 = R_0 i_0 \\ u = r_V i_V = u_0 \end{cases} \Rightarrow i_V = \frac{R_0}{r_V} i_0 \Rightarrow i - i_0 = \frac{R_0}{r_V} i_0$$

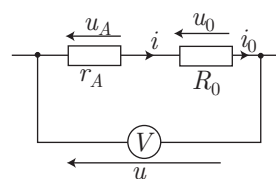
Finalement :

$$\frac{\Delta i}{i_0} = \frac{i - i_0}{i_0} = \frac{R_0}{r_V} = 0,1\%$$

2. Voltmètre en longue dérivation

- (a) L'ampèremètre permet la mesure de i_0 , étant donné qu'il est monté en série avec R_0 :

$$i = i_0$$



- (b) Les branches $\{r_A, R_0\}$ et $\{V\}$ étant en parallèle :

$$u = u_A + u_0 = r_A i + u_0 \Rightarrow u - u_0 = r_A i = r_A i_0$$

avec :

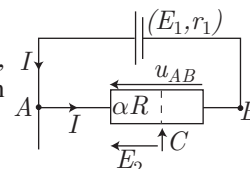
$$\begin{aligned} i_0 = \frac{u_0}{R_0} &\Rightarrow u - u_0 = u_0 \times \frac{r_A}{R_0} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta u}{u_0} = \frac{u - u_0}{u_0} = \frac{r_A}{R_0} = 1\% \end{aligned}$$

3. Ces deux calculs montrent que la mesure simultanée de u_0 et i_0 apporte des résultats plus fidèles lorsque le voltmètre est monté en courte dérivation.

● 39 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. (a) Lorsque la résistance r_2 tend vers l'infini, aucun courant i ne peut la traverser (sans quoi la tension entre ses bornes tendrait vers l'infini).

En outre, la résistance entre les points A et B valant R , il s'ensuit que $u_{AB} = R I$. Or, u_{AB} est aussi la tension entre les bornes du générateur :



$$u_{AB} = E_1 - r_1 I = RI \Rightarrow I = \frac{E_1}{r_1 + R}$$

La tension E_2 aux bornes de la résistance αR vaut donc :

$$E_2 = \alpha RI = \frac{\alpha R E_1}{r_1 + R} \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{r_1 + R}{\alpha R}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} r_1 = x r_2 \\ R = y r_2 \end{cases} \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{x r_2 + y r_2}{\alpha y r_2} = \frac{x + y}{\alpha y}$$

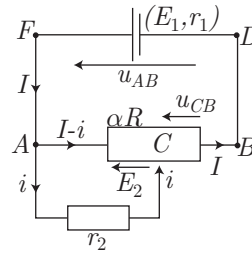
- (b) Dans le cas général, un courant i circule dans la résistance r_2 aux bornes de laquelle apparaît ainsi une tension $E_2 = r_2 i$.

Dans la résistance αR circule alors un courant $I - i$, de sorte que :

$$E_2 = \alpha R (I - i) \Rightarrow \alpha R I - \alpha R i = r_2 i$$

$$\Rightarrow I = \frac{r_2 + \alpha R}{\alpha R} i$$

$$\Rightarrow I = \frac{1 + \alpha y}{\alpha y} i \text{ car } r_2 = \frac{R}{y}$$



En outre, la loi des mailles impose, dans (ACBDF A) :

$$-E_2 - u_{CB} + u_{AB} = 0 \text{ avec } u_{AB} = E_1 - r_1 I = E_1 - \frac{x}{y} RI$$

et, puisque la résistance entre C et B vaut $R - \alpha R = R(1 - \alpha)$, il s'ensuit que :

$$u_{CB} = R(1 - \alpha) I$$

C'est pourquoi :

$$-E_2 - R(1 - \alpha) I + E_1 - \frac{x}{y} RI = 0 \Rightarrow E_1 = E_2 + \frac{x + y(1 - \alpha)}{y} RI$$

Or, $E_2 = r_2 i$ permet de poser :

$$\begin{aligned} RI &= \frac{1 + \alpha y}{\alpha y} Ri = \frac{1 + \alpha y}{\alpha y} \frac{R}{r_2} E_2 \text{ avec } \frac{R}{r_2} = y \\ &= \frac{1 + \alpha y}{\alpha} E_2 \end{aligned}$$

Par suite :

$$E_1 = E_2 \left[1 + \frac{x + y(1 - \alpha)}{y} \times \frac{1 + \alpha y}{\alpha} \right] \Rightarrow \frac{E_1}{E_2} = 1 + \frac{1 + \alpha y}{\alpha y} \times [x + y(1 - \alpha)]$$

On peut s'assurer qu'avec $x = \frac{r_1}{R} y$:

$$\frac{E_1}{E_2} = 1 + \frac{1 + \alpha y}{\alpha} \times \left[\frac{r_1}{R} + 1 - \alpha \right]$$

de sorte que lorsque r_2 tend vers l'infini, $y = \frac{R}{r_2}$ tend vers zéro, ce qui aboutit à :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{E_1}{E_2} \right) = 1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{r_1}{R} + 1 - \alpha \right) = \frac{r_1 + R}{\alpha R}$$

résultat compatible avec celui de la question précédente.

2. En supposant le générateur idéal, on impose $r_1 = 0$, c'est-à-dire $x = \frac{r_1}{r_2} = 0$, ce qui simplifie l'expression de $\frac{E_1}{E_2}$:

$$\frac{E_1}{E_2} = 1 + \frac{1 + \alpha y}{\alpha} \times (1 - \alpha)$$

De même, les conditions :

$$\frac{E_1}{E_2} = 2 \text{ et } r_2 = 2R = \frac{R}{y} \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

permettent d'établir l'équation du second degré satisfaite par α :

$$2 = 1 + \frac{(2 + \alpha)(1 - \alpha)}{2\alpha} \Rightarrow 2\alpha = 2 - \alpha - \alpha^2 \Rightarrow \alpha^2 + 3\alpha - 2 = 0$$

qui admet deux solutions mathématiques :

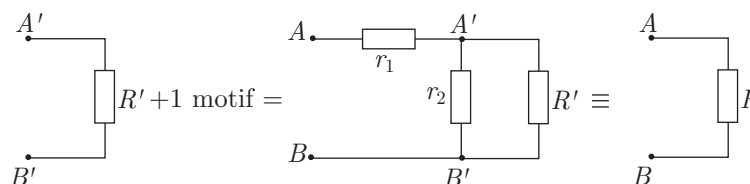
$$\alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

Cependant, seule la solution positive présente réellement un sens physique :

$$\alpha = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2} \simeq 0,56$$

● 40 ————— Lycée Blaise Pascal, Orsay

Soit R' la résistance équivalente entre les points A' et B' . Cette résistance ne doit pas changer si l'on rajoute un motif (r_1, r_2) à gauche des points A' et B' , car le dispositif comporte déjà une infinité de motifs ; la résistance R ainsi obtenue s'identifie alors à R' .



Or :

$$R = r_1 + \frac{r_2 R'}{r_2 + R'}$$

permet d'obtenir, après identification de R et R' :

$$R = r_1 + \frac{r_2 R}{r_2 + R} \Rightarrow R^2 = r_1 r_2 + r_1 R \Rightarrow R^2 - r_1 R - r_1 r_2 = 0$$

La seule solution positive de cette équation du second degré donne finalement :

$$R = \frac{r_1 + \sqrt{r_1^2 + 4r_1 r_2}}{2}$$

● 41 ————— Q.C.M.

1. FAUX

Une partie (ou la totalité) du courant qui traverse D_1 peut ne pas traverser D_2 et plutôt passer par D_4 ; les dipôles D_1 et D_2 ne sont pas nécessairement traversés par le même courant.

2. FAUX

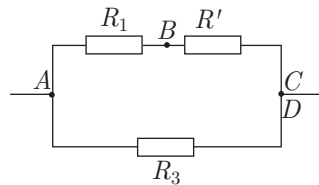
Les dipôles D_1 et D_3 n'ont que leur borne A en commun ; les bornes B et D sont séparées par le dipôle D_4 , ce qui signifie que D_1 et D_3 ne sont pas en parallèle.

3. VRAI

La borne B est commune à D_2 et D_4 , de même que la borne C de D_2 et la borne D de D_4 sont reliées par un fil électrique ; par définition, D_2 et D_4 sont en parallèle.

4. VRAI

D'après la question précédente, la résistance équivalente à R_2 et R_4 en parallèle vaut $R' = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$, de sorte que le montage proposé équivaut à :



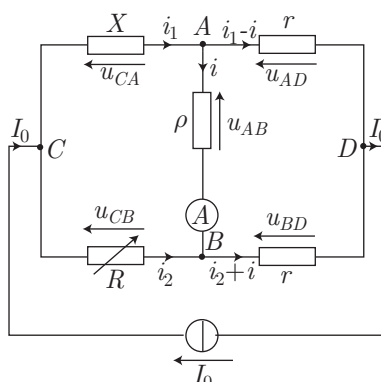
La résistance équivalente de ce montage vaut par conséquent :

$$R = \frac{(R_1 + R') R_3}{R_1 + R_3 + R'} = R_3 \times \frac{R_1 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}{R_1 + R_3 + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}}$$

$$\Rightarrow R = R_3 \times \frac{R_1 R_2 + R_1 R_4 + R_2 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4) + R_2 R_4}$$

● 42 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

1. On désigne respectivement par i_1 et i_2 les intensités des courants qui circulent dans les résistances X et R respectivement :



Les tensions aux bornes de X , R et ρ sont liées, quant à elles, par la loi des mailles :

$$\begin{aligned} u_{AB} + u_{CA} - u_{CB} &= 0 \Rightarrow u_{AB} = u_{CB} - u_{CA} \\ &\Rightarrow \rho i = R i_2 - X i_1 \end{aligned}$$

et, puisqu'au nœud C le courant I_0 se sépare en i_1 et i_2 , il s'ensuit que :

$$I_0 = i_1 + i_2 \Rightarrow i_2 = I_0 - i_1 \Rightarrow \rho i = R I_0 - (X + R) i_1$$

d'où :

$$i_1 = \frac{R I_0}{R + X} - \frac{\rho i}{R + X} \Rightarrow i_2 = I_0 - i_1 = \frac{X I_0}{R + X} + \frac{\rho i}{R + X} \quad (3)$$

De même, la loi des mailles appliquée à $(BADB)$, fournit :

$$\begin{aligned} u_{AB} - u_{AD} + u_{BD} &= 0 \Rightarrow \rho i - r(i_1 - i) + r(i_2 + i) = 0 \\ &\Rightarrow (\rho + 2r) i = r(i_1 - i_2) \end{aligned}$$

où les identités (3) conduisent à :

$$\begin{aligned} i_1 - i_2 &= \left(\frac{R I_0}{R + X} - \frac{\rho i}{R + X} \right) - \left(\frac{X I_0}{R + X} + \frac{\rho i}{R + X} \right) \\ &= I_0 \frac{R - X}{R + X} - \frac{2\rho i}{R + X} \\ &\Rightarrow (\rho + 2r) i = r I_0 \frac{R - X}{R + X} - \frac{2\rho r i}{R + X} \\ &\Rightarrow i \left(\rho + 2r + \frac{2\rho r}{R + X} \right) = I_0 r \times \frac{R - X}{R + X} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$i = I_0 r \times \frac{R - X}{2\rho r + (R + X)(\rho + 2r)}$$

Cette expression montre que le pont est équilibré pour :

$$X = X_0 = R \Rightarrow i = 0$$

2. Lorsque le pont est équilibré (à la température θ), X prend la valeur $X_0 = R$, tandis qu'à la température $\theta + d\theta$, X prend la valeur $X = X_0 + dX = R + dX$. Conséquent, le courant qui circule dans la branche AB vaut :

$$\begin{aligned} di &= I_0 r \times \frac{R - X}{2\rho r + (R + X)(\rho + 2r)} \text{ où } X = R + dR \\ &= -\frac{I_0 r dX}{2\rho r + (2R + dX)(\rho + 2r)} \end{aligned}$$

En outre, l'accroissement de X s'écrit, au premier ordre :

$$X = X_0 + d\theta \times \left. \frac{dX}{d\theta} \right|_{\theta} \Rightarrow dX = d\theta \times \left. \frac{dX}{d\theta} \right|_{\theta}$$

où la définition du coefficient de température fournit :

$$a = \frac{1}{X} \frac{dX}{d\theta} \Rightarrow \frac{dX}{d\theta} = aX \Rightarrow \left. \frac{dX}{d\theta} \right|_{\theta} = aR$$

car, pour la température θ , X adopte la valeur R . Il ressort de ces calculs que :

$$dX = d\theta \times aR \Rightarrow di = \frac{-I_0 r a R d\theta}{2\rho r + R(2 + a d\theta)(\rho + 2r)}$$

soit, en négligeant $a d\theta = 4 \times 10^{-3}$ devant 2 :

$$di = -\frac{I_0 r a R d\theta}{2\rho r + 2R(\rho + 2r)}$$

Application numérique :

$$di = -\frac{5.10^{-3} \times 1000 \times 4 \times 10^{-3} \times 50 \times 1}{2 \times 200 \times 1000 + 2 \times 50 \times (200 + 2 \times 10^3)} \Rightarrow di = 1,6.10^{-6} \text{ A}$$

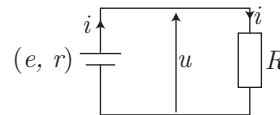
● 43 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Soit i l'intensité du courant qui circule dans le circuit, la tension $u = Ri$ aux bornes de R est la même que celle aux bornes du générateur :

$$u = e - ri = Ri \Rightarrow i = \frac{e}{R + r}$$

C'est pourquoi la résistance dissipe, par effet Joule, une puissance :

$$\mathcal{P} = Ri^2 \Rightarrow \mathcal{P} = \frac{Re^2}{(R + r)^2}$$



2. Si R est le seul paramètre variable, la dérivée de \mathcal{P} :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} = e^2 \times \frac{(R + r)^2 - 2R(R + r)}{(R + r)^4} = e^2 \times \frac{r - R}{(R + r)^3}$$

s'annule lorsque $R = R_0 = r$ et change de signe au voisinage de cette valeur :

$$\frac{d\mathcal{P}}{dR} > 0 \text{ pour } R < r \text{ et } \frac{d\mathcal{P}}{dR} < 0 \text{ pour } R > r$$

Ces inégalités indiquent clairement que \mathcal{P} devient *maximum* lorsque R prend la valeur $R_0 = r$:

$$\mathcal{P}_{\max} = \mathcal{P}(R = r)$$

et ce *maximum* vaut alors :

$$\mathcal{P}_{\max} = \frac{r e^2}{(2r)^2} \Rightarrow \mathcal{P}_{\max} = \frac{e^2}{4r}$$

● 44 ————— Concours des Mines-Ponts

Avant la fermeture de l'interrupteur K , le condensateur possédait l'énergie électrique :

$$\mathcal{E}_{\text{ini}} = \frac{Q^2}{2C} = n^2 \frac{CE^2}{2}$$

En revanche, à la fermeture de K , ce condensateur présente à ses bornes une d.d.p. E , auquel cas il accumule une énergie :

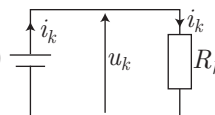
$$\mathcal{E}_{\text{fin}} = \frac{1}{2} CE^2$$

Finalement, au cours de cette opération, l'énergie emmagasinée par le condensateur a varié de :

$$\Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{fin}} - \mathcal{E}_{\text{ini}} \Rightarrow \Delta\mathcal{E} = \frac{CE^2}{2} (1 - n^2) < 0$$

● 45 ————— Lycée Claude Bernard, Paris

Lorsque le générateur délivre un courant d'intensité i_k dans la résistance R_k , la tension $u_k = e_0 - r_0 i_k$ devient (e_0, r_0) égale à celle, $u_k = R_k i_k$, aux bornes de la résistance :



$$R_k i_k = e_0 - r_0 i_k \Rightarrow i_k = \frac{e_0}{R_k + r_0}$$

Par suite, la puissance dissipée par effet Joule par R_k vaut :

$$P_k = R_k i_k^2 = \frac{R_k e_0^2}{(R_k + r_0)^2}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} P_2 = \frac{R_2 e_0^2}{(R_2 + r_0)^2} \\ P_1 = \frac{R_1 e_0^2}{(R_1 + r_0)^2} \end{cases} \Rightarrow \eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{R_1 + r_0}{R_2 + r_0} \right)^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\eta R_1} = \sqrt{R_2} \times \frac{R_1 + r_0}{R_2 + r_0}$$

$$\Rightarrow R_2 \sqrt{\eta R_1} + r_0 \sqrt{\eta R_1} = R_1 \sqrt{R_2} + r_0 \sqrt{R_2}$$

Finalement, la résistance r_0 est donnée par :

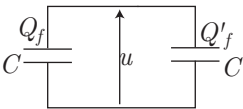
$$r_0 = \frac{R_1 \sqrt{R_2} - R_2 \sqrt{\eta R_1}}{\sqrt{\eta R_1} - \sqrt{R_2}}$$

● 46 ————— Concours des Mines-Ponts

1. Lorsque K est fermé, les deux condensateurs présentent la même tension à leurs bornes :

$$u = \frac{Q_f}{C} = \frac{Q'_f}{C'} \Rightarrow Q'_f = \frac{C'}{C} Q_f$$

En outre, au cours de l'expérience, la charge initiale $Q_0 + Q'_0$ contenue dans le système n'a pas varié :



$$Q_f + Q'_f = Q_0 + Q'_0 \Rightarrow Q_f \left(1 + \frac{C'}{C} \right) = Q_0 + Q'_0$$

$$\Rightarrow Q_f = C \times \frac{Q_0 + Q'_0}{C + C'}$$

et :

$$Q'_f = \frac{C'}{C} Q_f \Rightarrow Q'_f = C' \times \frac{Q_0 + Q'_0}{C + C'}$$

2. Initialement, les condensateurs ont emmagasiné les énergies $\mathcal{E}_0 = \frac{Q_0^2}{2C}$ et $\mathcal{E}'_0 = \frac{Q_0'^2}{2C'}$ ce qui représente une énergie totale :

$$\mathcal{E}_{\text{ini}} = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}'_0 = \frac{Q_0^2}{2C} + \frac{Q_0'^2}{2C'} = \frac{C' Q_0^2 + C Q_0'^2}{2CC'}$$

De même, en fin d'expérience, les condensateurs ont emmagasiné les énergies :

$$\mathcal{E}_f = \frac{Q_f^2}{2C} = C \frac{(Q_0 + Q'_0)^2}{2(C + C')^2} \text{ et } \mathcal{E}'_f = \frac{Q_f'^2}{2C'} = C' \frac{(Q_0 + Q'_0)^2}{2(C + C')^2}$$

c'est-à-dire une énergie totale :

$$\mathcal{E}_{\text{fin}} = \mathcal{E}_f + \mathcal{E}'_f = \frac{(Q_0 + Q'_0)^2 (C + C')}{2(C + C')^2} = \frac{(Q_0 + Q'_0)^2}{2(C + C')}$$

Par conséquent, l'énergie électrostatique du système a varié de la quantité :

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_{\text{fin}} - \mathcal{E}_{\text{ini}} = \frac{(Q_0 + Q'_0)^2}{2(C + C')} - \frac{C' Q_0^2 + C Q'_0{}^2}{2CC'}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \frac{CC' (Q_0^2 + 2Q_0Q'_0 + Q'_0{}^2) - (CC' + C'^2) Q_0^2 - (C^2 + CC') Q'_0{}^2}{2CC' (C + C')} \\ &= \frac{-C'^2 Q_0^2 + 2C'Q_0CQ'_0 - C^2 Q'_0{}^2}{2CC' (C + C')} \\ \Rightarrow \Delta \mathcal{E} &= -\frac{(C'Q_0 - CQ'_0)^2}{2CC' (C + C')} \end{aligned}$$

Ce résultat révèle que $\Delta \mathcal{E} < 0$, ce qui signifie que le circuit dissipe de l'énergie.

● 47 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Lorsque i s'annule, aucune d.d.p. n'est observée aux bornes de la résistance R , auquel cas les tensions u'_1 et u'_2 sont identiques :

$$u'_1 = u'_2 \Rightarrow \frac{q'_1}{C} = \frac{q'_2}{C} \Rightarrow q'_1 = q'_2$$

De plus, la conservation des charges électriques dans le circuit impose :

$$q'_1 + q'_2 = q_{10} + q_{20} \Rightarrow 2q'_1 = q_{10} + q_{20} \Rightarrow q'_1 = q'_2 = \frac{q_{10} + q_{20}}{2}$$

Initialement, les condensateurs, portant les charges q_{10} et q_{20} , avaient accumulé les énergies électrostatiques $\mathcal{E}_{10} = \frac{q_{10}^2}{2C}$ et $\mathcal{E}_{20} = \frac{q_{20}^2}{2C}$. En revanche, à la fin de l'expérience ces énergies deviennent :

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{q_1'^2}{2C} = \frac{(q_{10} + q_{20})^2}{8C} \text{ et } \mathcal{E}'_2 = \frac{q_2'^2}{2C} = \frac{(q_{10} + q_{20})^2}{8C}$$

Aussi, la variation de l'énergie emmagasinée dans les condensateurs vaut-elle :

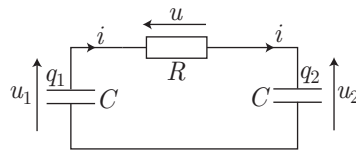
$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 - \mathcal{E}_{10} - \mathcal{E}_{20} = \frac{(q_{10} + q_{20})^2}{4C} - \frac{q_{10}^2 + q_{20}^2}{2C} \\ &= \frac{1}{4C} (2q_{10}q_{20} - q_{10}^2 - q_{20}^2) \end{aligned}$$

soit encore :

$$\Delta \mathcal{E} = -\frac{1}{4C} (q_{10} - q_{20})^2$$

2. (a) Le courant i atteignant l'armature du condensateur de charge q_2 , il s'ensuit que :

$$i = \frac{dq_2}{dt}$$



Par ailleurs, les tensions $u_1 = \frac{q_1}{C}$ et $u_2 = \frac{q_2}{C}$ conduisent, grâce à la loi des mailles, à :

$$u_1 - u - u_2 = 0 \Rightarrow u = u_1 - u_2 \Rightarrow u = \frac{q_1 - q_2}{C} \Rightarrow Cu = q_1 - q_2$$

tandis que la conservation des charges électriques dans le circuit se traduit par :

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= q_{10} + q_{20} \Rightarrow q_1 = q_{10} + q_{20} - q_2 \\ &\Rightarrow Cu = q_{10} + q_{20} - 2q_2 \end{aligned}$$

Enfin, la loi d'Ohm s'applique à la résistance R :

$$u = Ri = R \frac{dq_2}{dt} \Rightarrow Cu = RC \frac{dq_2}{dt} = q_{10} + q_{20} - 2q_2$$

d'où se déduit l'équation différentielle :

$$RC \frac{dq_2}{dt} + 2q_2 = q_{10} + q_{20}$$

(b) Soient :

- q_{2s} la solution de l'équation précédente dépourvue de son second membre :

$$RC \frac{dq_{2s}}{dt} + 2q_{2s} = 0$$

que l'on cherche sous la forme :

$$q_{2s} = A e^{\alpha t} \Rightarrow RC\alpha + 2 = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{RC} \Rightarrow q_{2s} = A e^{-2t/RC}$$

où A est une constante.

- q_{2h} la solution homogène au second membre ($q_{10} + q_{20}$), c'est-à-dire constante :

$$RC \underbrace{\frac{dq_{2h}}{dt}}_0 + 2q_{2h} = q_{10} + q_{20} \Rightarrow q_{2h} = \frac{q_{10} + q_{20}}{2}$$

La solution générale de cette équation :

$$q_2(t) = q_{2h} + q_{2s} = \frac{q_{10} + q_{20}}{2} + A e^{-2t/RC}$$

doit être adaptée à la valeur initiale prise par q_2 :

$$\begin{aligned} q_2(0) = q_{20} &\Rightarrow q_{20} = \frac{q_{10} + q_{20}}{2} + A \Rightarrow A = \frac{q_{20} - q_{10}}{2} \\ &\Rightarrow q_2(t) = \frac{q_{10} + q_{20}}{2} + \frac{q_{20} - q_{10}}{2} e^{-2t/RC} \end{aligned}$$

Le courant i vaut par conséquent :

$$i = \frac{dq_2}{dt} = \frac{q_{10} - q_{20}}{RC} e^{-2t/RC}$$

- (c) L'énergie δW perdue par effet Joule pendant la durée dt est liée à la puissance $\mathcal{P} = Ri^2$ dissipée par la résistance :

$$\frac{\delta W}{dt} = \mathcal{P} \Rightarrow \delta W = Ri^2 dt = \frac{(q_{10} - q_{20})^2}{RC^2} e^{-\frac{4t}{RC}} dt$$

de sorte que, pendant la durée totale de l'expérience, est dissipée une énergie :

$$W = \frac{(q_{10} - q_{20})^2}{RC^2} \int_0^\infty e^{-\frac{4t}{RC}} dt = \frac{(q_{10} - q_{20})^2}{RC^2} \left[-\frac{RC}{4} e^{-4t/RC} \right]_0^\infty$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{4C} (q_{10} - q_{20})^2$$

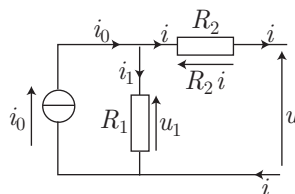
Compte tenu du résultat établi à la question 1., on constate que :

$$\Delta \mathcal{E} = -W$$

ce qui signifie que l'énergie dissipée par effet Joule est entièrement responsable de la perte d'énergie électrostatique du circuit.

● 48 ————— Lycée Janson de Sailly, Paris

1. (a) Conformément à la loi des nœuds, la résistance R_1 est parcourue par un courant d'intensité $i_1 = i_0 - i$ tandis qu'elle est soumise à une tension $u_1 = R_1 i_1 = R_1 i_0 - R_1 i$.



La loi des mailles impose alors :

$$\begin{aligned} u_1 - R_2 i - u &= 0 \Rightarrow R_1 i_0 - (R_1 + R_2) i = u \\ &\Rightarrow \frac{i_0}{G_1} - \frac{G_1 + G_2}{G_1 G_2} i = u \\ &\Rightarrow \frac{G_1 + G_2}{G_1 G_2} i = \frac{i_0}{G_1} - u \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$i = \frac{G_2 i_0}{G_1 + G_2} - \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} u$$

- (b) Ce montage équivaut à une source de courant lorsque i est indépendant de u , sans être nul. Ceci impose :

$$G_1 G_2 = 0 \text{ avec } G_2 i_0 \neq 0$$

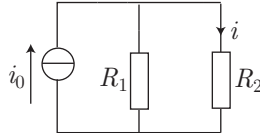
c'est-à-dire :

$$G_1 = 0 \Rightarrow i = i_0$$

Lorsque $u = 0$, on constate que :

$$i = \frac{G_2 i_0}{G_1 + G_2} < i_0$$

Il s'agit par conséquent d'un montage « diviseur de courant », souvent représenté de la manière suivante :

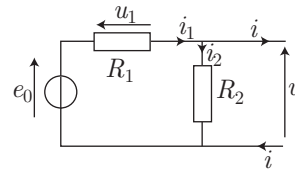


2. (a) La tension u_1 aux bornes de la résistance R_1 , parcourue par un courant d'intensité i_1 , est donnée par la loi d'Ohm : $u_1 = R_1 i_1$.

La loi des mailles impose alors :

$$e_0 - u_1 - u = 0 \Rightarrow e_0 - R_1 i_1 - u = 0$$

tandis que la loi des nœuds fournit :



$$\begin{aligned} i_1 = i_2 + i = \frac{u}{R_2} + i &\Rightarrow e_0 - \frac{R_1}{R_2} u - R_1 i - u = 0 \\ &\Rightarrow \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) u = e_0 - R_1 i \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$u = \frac{R_2 e_0}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i$$

- (b) Ce montage est assimilable à une source de tension si u , non nul, demeure indépendant de i , c'est-à-dire :

$$\begin{cases} R_1 R_2 = 0 \\ R_2 e_0 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow R_1 = 0 \Rightarrow u = e_0$$

Lorsque i est nul, la tension u vaut :

$$u = \frac{R_2 e_0}{R_1 + R_2} < e_0$$

ce qui justifie le nom de « diviseur de tension » attribué à ce montage.

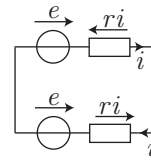
● 49 Q.C.M.

1. Le théorème de Millman fournit directement la réponse :

$$u = \frac{\frac{e}{r} + \frac{e}{r}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r}} = e \Rightarrow u = 10 \text{ V (réponse b.)}$$

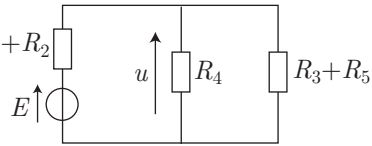
2. Compte tenu de l'orientation des tensions dans le montage, la loi des mailles s'écrit :

$$\begin{aligned} e - ri - ri - e = 0 &\Rightarrow 2ri = 0 \\ &\Rightarrow i = 0 \text{ A (réponse c.)} \end{aligned}$$



● 50 Janson de Sailly, Paris

1. Les résistances R_1 et R_2 étant en série ainsi que les résistances R_3 et R_5 , le montage proposé par l'énoncé est équivalent à celui représenté ci-contre. Le théorème de Millman fournit alors directement :



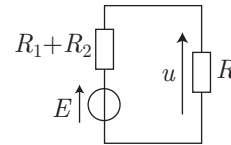
$$u = \frac{\frac{E}{R_1 + R_2}}{\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3 + R_5}} = \frac{E}{1 + (R_1 + R_2) \left(\frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_3 + R_5} \right)}$$

c'est-à-dire :

$$u = \frac{R_4 (R_3 + R_5) E}{R_4 (R_3 + R_5) + (R_1 + R_2) (R_3 + R_4 + R_5)}$$

2. Les résistances R_4 et $R_3 + R_5$ étant en parallèle, leur association équivaut à une résistance :

$$R = \frac{R_4 (R_3 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}$$



La loi du diviseur de tension indique alors que :

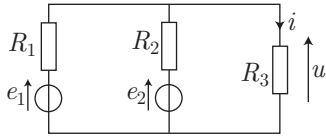
$$u = \frac{R E}{R + R_1 + R_2} = \frac{\frac{R_4 (R_3 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5} \times E}{\frac{R_4 (R_3 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5} + (R_1 + R_2)}$$

ce qui confirme le résultat de la question précédente :

$$u = \frac{R_4 (R_3 + R_5) E}{R_4 (R_3 + R_5) + (R_1 + R_2) (R_3 + R_4 + R_5)}$$

● 51 Lycée Fabert, Metz

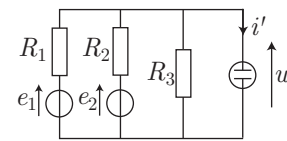
1. En représentant le schéma de la manière équivalente ci-dessous, le théorème de Millman permet le calcul de la tension u aux bornes de R_3 :

$$u = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = R_3 \times \frac{e_1 R_2 + e_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$


qui mène directement à l'expression de i :

$$i = \frac{u}{R_3} \Rightarrow i = \frac{e_1 R_2 + e_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

2. À nouveau, la tension $u = e' + r' i$ aux bornes de l'électrolyseur s'obtient par application du théorème de Millman :

$$u = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} - \frac{e'}{r'}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{r'}} = e' + r' i'$$


soit :

$$r' i' = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} - \frac{e'}{r'}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{r'}} - e'$$

Or, l'électrolyseur ne pouvant se comporter comme un générateur de courant, i est nécessairement positif ou nul, ce qui impose :

$$\begin{aligned} \frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} - \frac{e'}{r'} &\geq e' \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{r'} \right) \\ \Rightarrow \frac{R_2 e_1 + R_1 e_2}{R_1 R_2} &\geq e' \times \frac{2 R_1 R_2 R_3 + r' (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)}{R_1 R_2 R_3 r'} \\ \Rightarrow e' &\leq \frac{R_3 r' (R_2 e_1 + R_1 e_2)}{2 R_1 R_2 R_3 + r' (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)} = e'_0 \end{aligned}$$

Si e' venait à excéder e'_0 , le courant i' deviendrait alors nul.

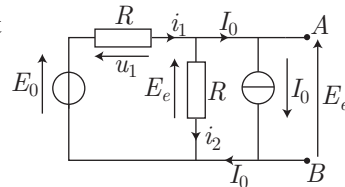
● 52 ————— Lycée Thiers, Marseille

Le générateur équivalent qu'il s'agit de trouver s'obtient en appliquant le théorème de Thévenin.

- Sa force électromotrice est la tension E_e entre les bornes A et B lorsqu'aucun courant ne traverse ces bornes.

Si i_1 et i_2 désignent les courants qui circulent dans les résistances, la loi d'Ohm impose :

$$u_1 = R i_1 \text{ et } E_e = R i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{E_e}{R}$$



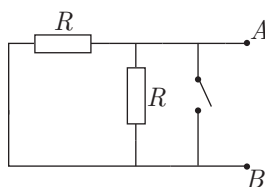
tandis que de la loi des mailles découle l'intensité :

$$i_1 = I_0 + i_2 = I_0 + \frac{E_e}{R}$$

En outre :

$$\begin{aligned} E_0 = u_1 + E_e = R i_1 + E_e &\Rightarrow E_0 = R \left(I_0 + \frac{E_e}{R} \right) + E_e \\ &\Rightarrow E_0 = R I_0 + 2E_e \\ &\Rightarrow E_e = \frac{E_0 - R I_0}{2} \end{aligned}$$

- Sa résistance interne est celle que l'on mesure, entre A et B , après avoir supprimé les sources de tension (alors remplacées par des fils) et de courant (remplacées par des interrupteurs ouverts) :



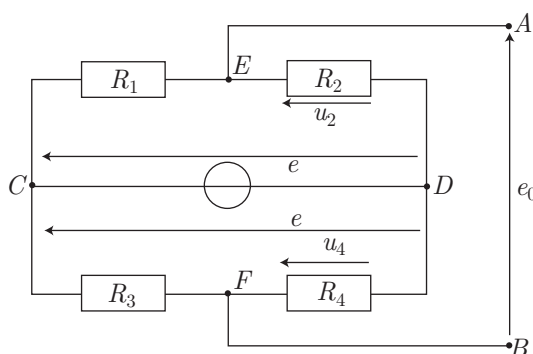
Les deux résistances se trouvant, dans cette configuration, en parallèle, il s'ensuit que :

$$R_e = \frac{R \times R}{R + R} = \frac{R}{2}$$

● 53 ————— Q.C.M.

Le théorème de Thévenin révèle que le circuit proposé est équivalent à un générateur caractérisé par :

- une f.é.m. qui s'identifie à la tension e_0 aux bornes A et B , lorsqu'aucun courant ne passe de A à B .



Or, la branche (CED) montre un diviseur de tension tel que :

$$u_2 = \frac{R_2 e}{R_1 + R_2}$$

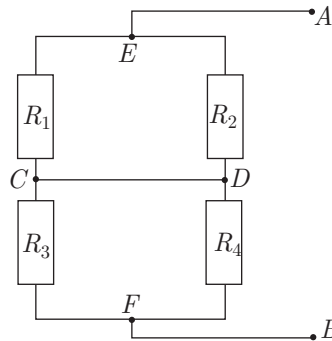
de même que la loi du diviseur de tension s'applique à la branche (CFD) :

$$u_4 = \frac{R_4 e}{R_3 + R_4}$$

Enfin, la loi des mailles relative à (BAEDFB) impose :

$$\begin{aligned} e_0 - u_2 + u_4 = 0 &\Rightarrow e_0 = u_2 - u_4 = \frac{R_2 e}{R_1 + R_2} - \frac{R_4 e}{R_3 + R_4} \\ &\Rightarrow e_0 = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} e \end{aligned}$$

- une résistance interne qui vaut la résistance r_0 entre les points A et B après suppression de la source de tension (remplacée par un fil électrique). Les résistances R_1, R_2 (en parallèle) équivalent à une résistance $R_{1e} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ tandis que les résistances R_3, R_4 (aussi en parallèle) équivalent à une résistance $R_{2e} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$. C'est pourquoi :

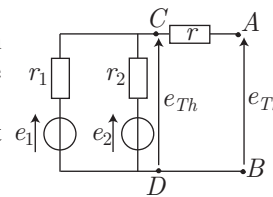


$$\begin{aligned} r_0 &= R_{1e} + R_{2e} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} \\ &\Rightarrow r_0 = \frac{R_1 R_2 (R_3 + R_4) + R_3 R_4 (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} \quad (\text{réponse 1.}) \end{aligned}$$

● 54 ————— Q.C.M.

À gauche des points A et B se trouve un montage que l'on peut identifier à un générateur, en appliquant le théorème de Thévenin.

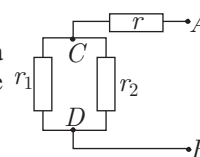
La f.é.m. d'un tel générateur vaut la tension e_{Th} entre A et B lorsqu'aucun courant ne circule entre ces deux points.



Ce faisant, e_{Th} désigne également la tension aux bornes C et D car aucun courant ne circule entre C et A . Le théorème de Millman fournit alors :

$$e_{Th} = \frac{\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{r_2 e_1 + r_1 e_2}{r_1 + r_2}$$

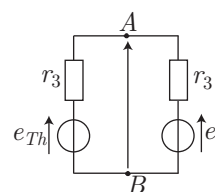
Quant à la résistance interne d'un tel générateur, elle s'identifie à la résistance r_{Th} entre A et B , après remplacement des sources de tension par des fils électriques :



$$r_{Th} = r + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r(r_1 + r_2) + r_1 r_2}{r_1 + r_2} = r_3$$

Le montage peut dès lors être représenté à l'aide de ce générateur de Thévenin, ce qui invite à utiliser le théorème de Millman :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\frac{e_{Th}}{r_3} + \frac{e_3}{r_3}}{\frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_3}} = \frac{1}{2}(e_{Th} + e_3) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{r_2 e_1 + r_1 e_2}{r_1 + r_2} + e_3 \right) \end{aligned}$$

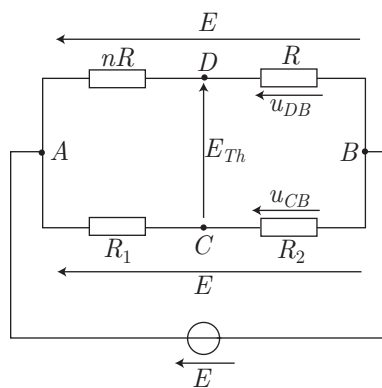


soit finalement :

$$u = \frac{r_1(e_2 + e_3) + r_2(e_1 + e_3)}{2(r_1 + r_2)} \quad (\text{réponse b.})$$

● 55 ————— Q.C.M.

1. En l'absence de la branche DC , le montage proposé est équivalent au suivant :



D'après le théorème de Thévenin, E_{Th} vaut la tension entre D et C (car aucun courant ne circule entre ces deux points). Or, l'existence de deux ponts diviseurs de tension suggère que :

$$u_{DB} = \frac{RE}{(n+1)R} = \frac{E}{n+1} \text{ et } u_{CB} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

de sorte que la loi des mailles, appliquée à $(BCDB)$, conduit à :

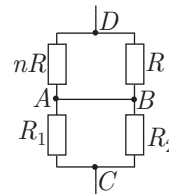
$$u_{CB} + E_{Th} - u_{DB} = 0 \Rightarrow E_{Th} = u_{DB} - u_{CB} = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right) E$$

c'est-à-dire :

$$E_{Th} = \frac{R_1 - n R_2}{(n + 1)(R_1 + R_2)} E \quad (\text{réponse b.})$$

2. D'après le théorème de Thévenin, la résistance interne R_{Th} vaut la résistance entre D et C en l'absence de la branche CD et de la source de f.é.m. E (alors remplacée par un fil électrique).

Le schéma du montage est alors équivalent à celui représenté ci-contre. Les résistances R et nR étant en parallèle, elles équivalent à une résistance $\frac{nR}{n+1}$, de même pour l'association en parallèle des résistances R_1 et R_2 , qui peut être remplacée par $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.
Finalement :



$$R_{Th} = \frac{n R}{n + 1} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \quad (\text{réponse a.})$$

● 56 ————— Lycée Fabert, Metz

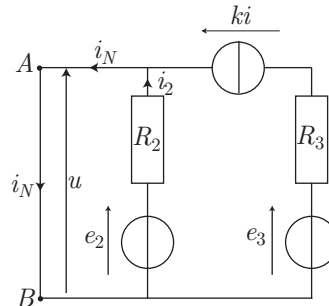
En vertu du théorème de Norton, le générateur de courant équivalent au montage situé à droite des points A et B est caractérisé par :

- son courant électromoteur i_N qui circule dans un fil liant A et B . Ce faisant, la tension u aux bornes de l'association en série de R_2 et e_2 est nulle :

$$u = e_2 - R_2 i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{e_2}{R_2}$$

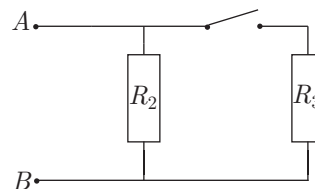
ce qui fournit directement :

$$i_N = ki + i_2 \Rightarrow i_N = \frac{e_2 + kR_2 i}{R_2}$$

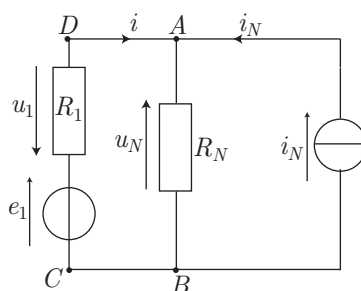


- sa résistance interne R_N qui vaut celle mesurée entre les points A et B après suppression des sources de tension (remplacées par des fils) et de courant (remplacées par des interrupteurs ouverts). C'est pourquoi :

$$R_N = R_2$$



Ainsi, le montage situé à droite des points A et B peut être remplacé par un générateur de courant (association en parallèle de R_N et de i_N) :



La loi des mailles appliquée à $(CDABC)$, conduit ainsi à :

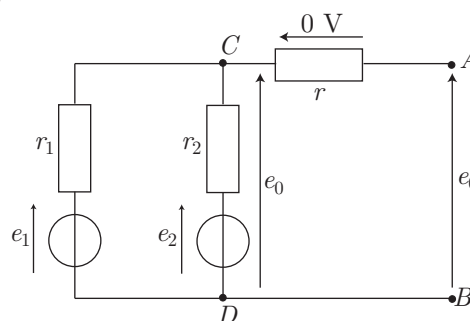
$$\begin{aligned}
 e_1 - R_1 i - R_N (i_N + i) &= 0 \Rightarrow e_1 = R_1 i + R_2 \left(\frac{e_2 + k R_2 i}{R_2} + i \right) \\
 &\Rightarrow e_1 = R_1 i + e_2 + k R_2 i + R_2 i \\
 &\Rightarrow i = \frac{e_1 - e_2}{R_1 + (1 + k) R_2}
 \end{aligned}$$

● 57 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. D'après le théorème de Thévenin, la force électromotrice du générateur vaut la tension e_0 entre les bornes A et B , lorsqu'aucun courant ne passe par A ou B , c'est-à-dire lorsque la tension aux bornes de r est nulle.

C'est pourquoi e_0 désigne aussi la tension entre les bornes C et D , directement accessible à partir du théorème de Millman :

$$\begin{aligned}
 e_0 &= \frac{\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} \\
 &\Rightarrow e_0 = \frac{r_2 e_1 + r_1 e_2}{r_1 + r_2}
 \end{aligned}$$

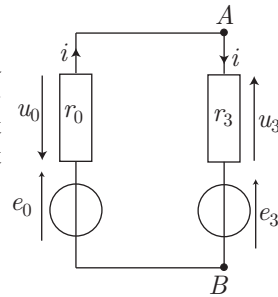


Quant à la résistance interne de ce générateur, elle équivaut à celle, entre les points A et B , lorsque les sources de tension sont remplacées par des fils électriques ; r est alors en série avec l'association de r_1 et r_2 en parallèle, d'où :

$$r_0 = r + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{r(r_1 + r_2) + r_1 r_2}{r_1 + r_2}$$

2. D'après la question précédente, le montage situé à gauche des points A et B peut être remplacé par le générateur de Thévenin équivalent. En notant $u_0 = r_0 i$ et $u_3 = r_3 i$ les tensions aux bornes des résistances r_0 et r_3 , la loi des mailles conduit à :

$$e_0 - u_0 - u_3 - e_3 = 0 \Rightarrow (r_0 + r_3) i = e_0 - e_3$$



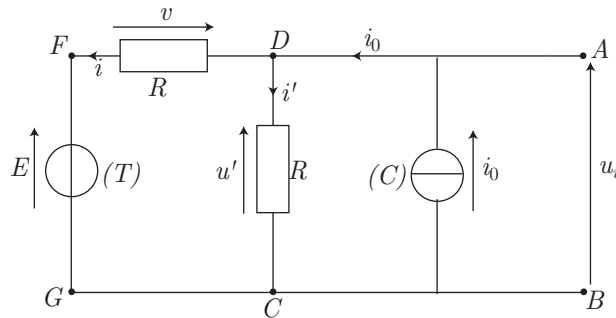
c'est-à-dire :

$$\left[\frac{r(r_1 + r_2) + r_1 r_2}{r_1 + r_2} + r_3 \right] i = \frac{r_2 e_1 + r_1 e_2}{r_1 + r_2} - e_3$$

$$\Rightarrow i = \frac{r_1(e_2 - e_3) + r_2(e_1 - e_3)}{(r + r_3)(r_1 + r_2) + r_1 r_2}$$

● 58 ————— Lycée Roosevelt, Reims

1. D'après le Théorème de Thévenin, la force électromotrice du générateur est la tension u_i entre les bornes A et B du générateur qui ne délivre aucun courant.



Au nœud D , le courant i_0 se sépare en i et i' , en conséquence de quoi :

$$i_0 = i + i' \Rightarrow i' = i_0 - i$$

La tension u' entre les points D et C suit alors la loi d'Ohm :

$$u' = R i' = R(i_0 - i)$$

avec :

$$\begin{cases} v = R i \\ i_0 = g v \end{cases} \Rightarrow i_0 = g R i \Rightarrow u' = R i (g R - 1)$$

Quant à la loi des mailles appliquée à $(GFDCG)$, elle fournit :

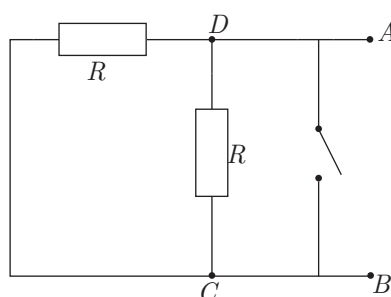
$$E + v - u' = 0 \Rightarrow E + R i - R i (g R - 1) = 0$$

$$\Rightarrow i = \frac{E}{R(g R - 2)}$$

Enfin, une seconde application de la loi des mailles en (AFGCBA) indique que :

$$\begin{aligned} u_i - v - E = 0 &\Rightarrow u_i = v + E = Ri + E \\ &\Rightarrow u_i = E \left(\frac{1}{gR - 2} + 1 \right) \\ &\Rightarrow u_i = E \times \frac{gR - 1}{gR - 2} \end{aligned}$$

La résistance interne de ce même générateur est la résistance R_i équivalente située entre les points A et B après suppression de la source de tension (remplacée par un fil électrique) et de la source de courant (remplacée par un interrupteur ouvert) :



Les deux résistances R étant alors en parallèle entre les points C et D , il s'ensuit que :

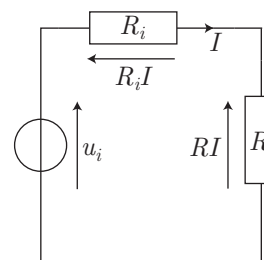
$$R_i = \frac{R \times R}{R + R} = \frac{R}{2}$$

2. Le remplacement, dans le montage, de la partie encadrée, par le générateur équivalent, permet l'emploi de la loi des mailles :

$$u_i - R_i I - RI = 0 \Rightarrow I = \frac{u_i}{R_i + R}$$

avec :

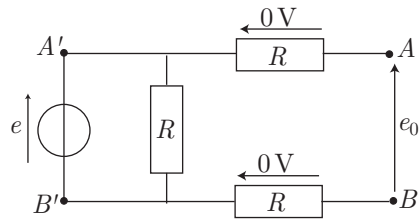
$$R + R_i = \frac{3R}{2} \Rightarrow I = E \times \frac{gR - 1}{gR - 2} \times \frac{2}{3R}$$



● 59 ————— Lycée Condorcet, Paris

1. Générateur de tension

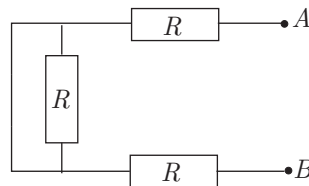
- (a) Conformément au théorème de Thévenin, la force électromotrice du générateur équivalent vaut la tension e_0 entre les bornes A et B lorsqu'aucun courant ne passe par ces points.



Dans ce cas, les tensions aux bornes des résistances horizontales sont nulles et la loi des mailles appliquée à $(BAA'B'B)$ donne directement :

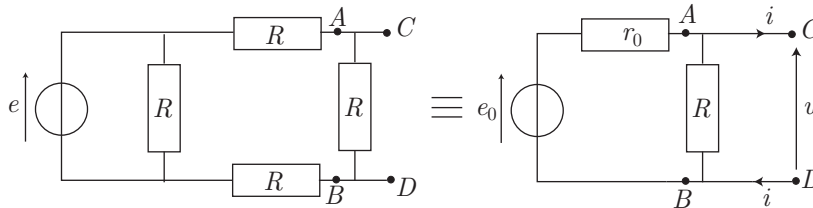
$$e_0 - e = 0 \Rightarrow e_0 = e$$

Quant à la résistance interne, elle s'identifie à la résistance r_0 entre les points A et B , lorsque la source de tension e est remplacée par un fil électrique, court-circuitant de fait la résistance verticale ; entre A et B se trouvent ainsi les deux résistances horizontales en série :



$$r_0 = R + R = 2R$$

- (b) Compte tenu de ce qui précède, entre A et B le montage peut être remplacé par un générateur de force électromotrice $e_0 = e$ et de résistance interne $r_0 = 2R$:



Si u désigne la tension entre les points C et D , et i l'intensité du courant qui passe par les mêmes points, la loi du diviseur de tension :

$$u = \frac{R e_0}{R + r_0} - \frac{R r_0}{R + r_0} i = e_1 - r_1 i$$

montre qu'un tel montage est équivalent à un générateur de tension, caractérisé par sa f.é.m. :

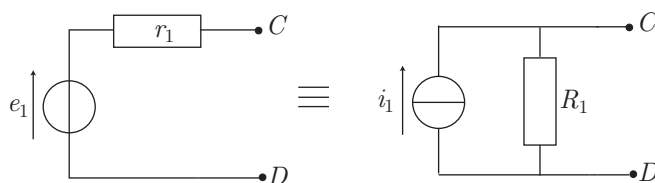
$$e_1 = \frac{R e_0}{R + r_0} = \frac{R e}{R + 2R} \Rightarrow e_1 = \frac{e}{3}$$

et sa résistance interne :

$$r_1 = \frac{R r_0}{R + r_0} = \frac{R \times 2R}{R + 2R} \Rightarrow r_1 = \frac{2R}{3}$$

2. Générateur de courant

- (a) Un générateur de tension de f.é.m. e_1 et de résistance interne r_1 équivaut à un générateur de courant, de c.é.m. i_1 et de résistance interne R_1 :



à condition que :

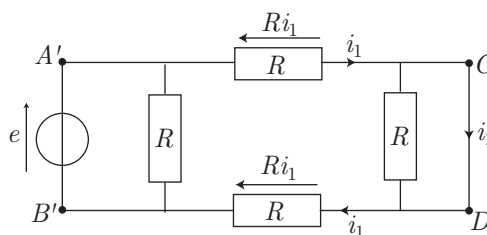
$$R_1 = r_1 = \frac{2R}{3}$$

et que :

$$i_1 = \frac{e_1}{r_1} = \frac{e}{\frac{3}{2}R} \Rightarrow i_1 = \frac{e}{2R}$$

(b) Le théorème de Norton donne directement accès à ces caractéristiques :

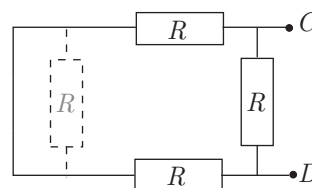
- le courant électromoteur vaut l'intensité i_1 du courant qui circule dans un fil électrique reliant les points C et D ; la résistance verticale, parallèle à la branche CD , est court-circuitée et ne laisse donc pas passer de courant, si bien que i_1 désigne également l'intensité du courant qui circule dans les deux résistances horizontales.



La loi des mailles relative à $(A' C D B')$ fournit alors :

$$e - R i_1 - R i_1 = 0 \Rightarrow i_1 = \frac{e}{2R}$$

- La résistance interne représente la résistance R_1 située entre C et D lorsque la source de tension est remplacée par un fil électrique ; la mise en court-circuit de la résistance verticale place en série les deux résistances horizontales.



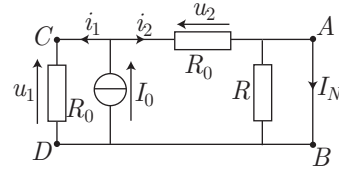
La résistance verticale R restant est alors associée en parallèle avec une résistance $2R$:

$$R_1 = \frac{R \times 2R}{R + 2R} \Rightarrow R_1 = \frac{2R}{3}$$

● 60 ————— Lycée Lakanal, Sceaux

1. (a) En vertu du théorème de Norton, le courant I_N est celui qui circule dans un fil reliant directement les points A et B .

La résistance R étant ainsi court-circuitée, elle n'est traversée par aucun courant, ce qui impose $i_2 = I_N$ et $I_0 = i_1 + I_N$.
Quant à la loi des mailles appliquée à $(ABCD)$, elle fournit :

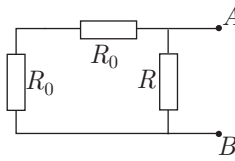


$$u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow R_0 i_1 = R_0 I_N \Rightarrow i_1 = I_N$$

Par suite :

$$I_0 = 2I_N \Rightarrow I_N = \frac{I_0}{2}$$

Toujours en vertu du théorème de Norton, R_N s'identifie à la résistance entre les points A et B après suppression de la source de courant. R_N est donc équivalent à l'association en parallèle de R avec $2R_0$ (les deux résistances R_0 sont en série) :

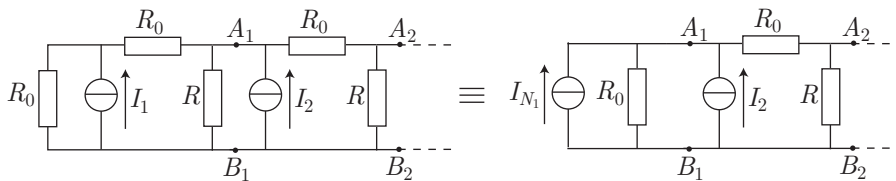


$$R_N = \frac{2R_0 \times R}{2R_0 + R}$$

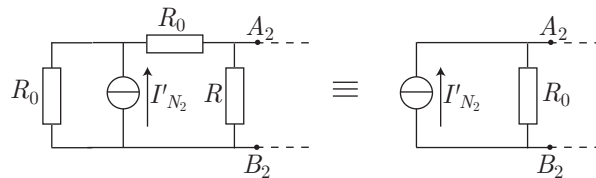
(b) D'après ce qui précède, R_N vaut R_0 lorsque :

$$\frac{2R_0 \times R}{2R_0 + R} = R_0 \Rightarrow 2R = 2R_0 + R \Rightarrow R = 2R_0$$

2. (a) Compte tenu des résultats précédents, la première cellule est équivalente à un générateur de courant, de courant électromoteur $I_{N_1} = \frac{I_1}{2}$ et de résistance interne R_0 :



et, puisque les positions respectives de R_0 et I_{N_1} sont sans influence, le montage entre les points A_2 et B_2 équivaut à :



avec : $I'_{N_2} = I_{N_1} + I_2 = I_2 + \frac{1}{2} I_1$. Ce générateur est alors semblable à celui de la première cellule : son courant électromoteur vaut $I_{N_2} = \frac{I'_{N_2}}{2}$ et sa

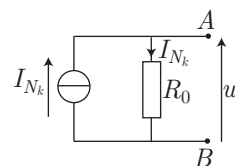
résistance interne vaut R_0 . Ce phénomène se reproduit avec la troisième cellule, de courant électromoteur :

$$I_{N_3} = I_{N_2} + I_3 = \frac{1}{2} \left(I_2 + \frac{1}{2} I_1 \right) + I_3 = \frac{1}{2^2} I_1 + \frac{1}{2} I_2 + I_3$$

et c'est pourquoi, avec k cellules identiques, le générateur de Norton équivalent a pour résistance interne R_0 et pour courant électromoteur :

$$I_{N_k} = \frac{1}{2^{k-1}} I_1 + \frac{1}{2^{k-2}} I_2 + \dots + I_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{k-i}} I_i$$

- (b) Le générateur de Norton équivalent au réseau proposé se présente comme une association en parallèle d'une source de courant I_{N_k} et d'une résistance interne R_0 . Par suite, la tension de sortie vaut, d'après la loi d'Ohm :



$$u_s = R_0 I_{N_k} = R_0 \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^{k-i}} I_i$$

3. Chacun des courants I_i s'écrivant $a_i I_0$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} u_s &= R_0 \sum_{i=1}^k \frac{2^i}{2^k} \times a_i I_0 = R_0 \sum_{i=1}^k 2^{i-1} a_i \frac{I_0}{2^{k-1}} \\ \Rightarrow u_s &= \frac{R_0 I_0}{2^{k-1}} \times \sum_{i=1}^k 2^{i-1} a_i \end{aligned}$$

4. La somme $\sigma = \sum_{i=1}^k a_i 2^{i-1}$ convertit un nombre binaire $\{a_0 a_1 \dots a_8\}$ en son équivalent décimal. Les valeurs des a_i étant 0 ou 1, le plus petit nombre binaire s'écrit :

$$\{00000000\} \Rightarrow \sigma = \sum_{i=1}^8 0 \times 2^{i-1} = 0$$

tandis que le plus grand nombre binaire vaut $\{11111111\}$ auquel cas :

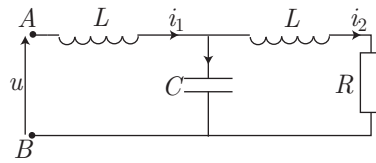
$$\sigma = \sum_{i=1}^8 2^{i-1} = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 = 255$$

C'est pourquoi, avec huit cellules, il est possible de représenter 256 entiers naturels (de 0 à 255).

● 61 Lycée Hoche, Versailles

En vertu de la loi des mailles, la tension u vérifie :

$$u - u_{L_1} - u_C = 0 \Rightarrow u = u_{L_1} + u_C$$



avec :

$$u_{L_1} = L \frac{di_1}{dt} \Rightarrow u = L \frac{di_1}{dt} + u_C \quad (4)$$

En outre, la loi des mailles fournit également :

$$u_C - u_{L_2} - u_R = 0 \Rightarrow u_C = u_{L_2} + u_R = L \frac{di_2}{dt} + R i_2$$

et la loi des nœuds indique que :

$$\begin{aligned} i_1 &= i_2 + i_3 = i_2 + C \frac{du_C}{dt} = i_2 + C \frac{d}{dt} \left(L \frac{di_2}{dt} + R i_2 \right) \\ \Rightarrow i_1 &= i_2 + LC \frac{d^2 i_2}{dt^2} + RC \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

Ce faisant, l'équation (4) devient :

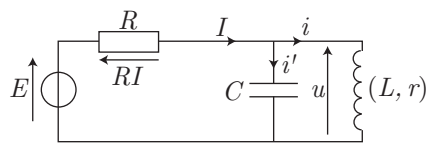
$$u = L \frac{d}{dt} \left(i_2 + LC \frac{d^2 i_2}{dt^2} + RC \frac{di_2}{dt} \right) + \left(L \frac{di_2}{dt} + R i_2 \right)$$

soit encore :

$$u = L^2 C \frac{d^3 i_2}{dt^3} + RLC \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 2L \frac{di_2}{dt} + R i_2$$

● 62 ————— Lycée Fabert, Metz

Soit I l'intensité du courant qui circule dans la résistance R , i celle du courant qui circule dans la bobine et i' celle dans le condensateur.



La loi des nœuds permet d'écrire :

$$I = i + i' \Rightarrow i = I - i'$$

où la tension commune u , aux bornes du condensateur et de la bobine, vérifie :

$$i' = C \frac{du}{dt} \Rightarrow i = I - C \frac{du}{dt}$$

En outre, la loi des mailles impose :

$$E - RI - u = 0 \Rightarrow I = \frac{E}{R} - \frac{u}{R} \Rightarrow i = \frac{E}{R} - \frac{u}{R} - C \frac{du}{dt}$$

Enfin, la tension aux bornes de la bobine vaut :

$$\begin{aligned} u &= L \frac{di}{dt} + ri = L \frac{d}{dt} \left(\frac{E}{R} - \frac{u}{R} - C \frac{du}{dt} \right) + r \left(\frac{E}{R} - \frac{u}{R} - C \frac{du}{dt} \right) \\ &= -\frac{L}{R} \frac{du}{dt} - LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{r}{R} E - \frac{r}{R} u - rC \frac{du}{dt} \end{aligned}$$

soit, après regroupement des termes de même ordre :

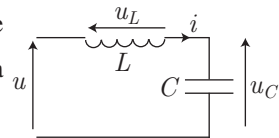
$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R} + rC \right) \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R} \right) u = \frac{rE}{R}$$

● 63 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. La tension aux bornes de la bobine étant $u_L = \frac{di}{dt}$, la loi des mailles stipule que :

$$u - u_L - u_C = 0 \Rightarrow u = L \frac{di}{dt} + u_C$$

Cette équation montre que la fonction $i(t)$ est continue (sans quoi $\frac{di}{dt}$ tendrait vers l'infini tandis que u prend la valeur E à la date $t = 0$). C'est pourquoi :



$$i(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} [i(t)] \Rightarrow i(t=0) = 0$$

En outre, le condensateur étant initialement déchargé, $u_C(t=0)$ est nul, ce qui conduit à :

$$u(t=0) = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} + \underbrace{u_C(t=0)}_0 \Rightarrow E = L \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} \Rightarrow \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{L}$$

2. Pour $t > 0$, $u(t) = E$, de sorte que $\left. \frac{du}{dt} \right|_{t>0} = 0$ (il serait hasardeux de dériver la fonction $u(t)$ à la date $t = 0$ pour laquelle cette fonction admet une discontinuité). C'est pourquoi, pour $t > 0$:

$$L \frac{di}{dt} + u_C = E \Rightarrow L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{du_C}{dt} = 0$$

avec :

$$i = C \frac{du_C}{dt} \Rightarrow L \frac{d^2i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0 \Rightarrow \frac{d^2i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0 \text{ avec } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

Cette équation différentielle admet pour solution générale :

$$i(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \Rightarrow \frac{di}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

où les constantes A et B sont ajustées aux conditions initiales :

$$i(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

et :

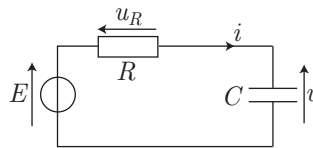
$$\left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{L} \Rightarrow B\omega_0 = \frac{E}{L} \Rightarrow B = \frac{E}{L\omega_0} = E\sqrt{\frac{C}{L}}$$

Finalement :

$$i(t) = E\sqrt{\frac{C}{L}} \sin(\omega_0 t)$$

● 64 ————— Lycée Fabert, Metz

1. Tandis que la tension aux bornes du condensateur vaut u , celle aux bornes de la résistance vaut $u_R = Ri$, où $i = C \frac{du}{dt}$. La loi des mailles fournit directement :



$$E = u + Ri \Rightarrow u + RC \frac{du}{dt} = E$$

2. Cette équation admet :

- une solution u_s en l'absence du second membre :

$$u_s + RC \frac{du_s}{dt} = 0$$

dont l'équation caractéristique (en X) : $1 + RC X = 0$ admet pour solution : $X = -\frac{1}{RC}$. C'est pourquoi, il existe une constante A permettant de présenter u_s sous la forme :

$$u_s = A e^{Xt} = A e^{-t/RC}$$

- une solution u_h homogène au second membre ; celui-ci étant constant, u_h l'est aussi, tout en vérifiant l'équation différentielle :

$$u_h + RC \underbrace{\frac{du_h}{dt}}_0 = E \Rightarrow u_h = E$$

La solution générale : $u = u_h + u_s = E + A e^{-t/RC}$ doit, en outre, rendre compte de l'absence initiale de charge dans le condensateur, c'est-à-dire :

$$u(t=0) = 0 \Rightarrow E + A = 0 \Rightarrow A = -E \Rightarrow u = E - E e^{-t/RC}$$

3. Au bout d'une durée $t = T$, la tension u approche E à $\frac{E}{100} = 0,1$ V près, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} u(T) = E - \frac{E}{100} &\Rightarrow E - E e^{-T/RC} = E - \frac{E}{100} \\ &\Rightarrow T = RC \ln(100) \end{aligned}$$

Application numérique :

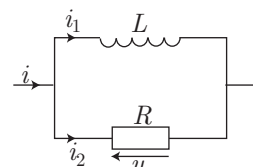
$$t = 100 \times 10 \cdot 10^{-6} \times \ln(100) \Rightarrow t = 4,6 \text{ ms}$$

● 65 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Soient i_1 et i_2 les intensités des courants qui circulent dans la bobine et dans la résistance respectivement. La loi des nœuds impose :

$$i = i_1 + i_2 = i_1 + \frac{u}{R} \text{ car } u = R i_2$$

où $u = L \frac{di_1}{dt}$ ne peut tendre vers l'infini (car i prend la valeur finie I_0 à la date $t = 0$).



Cela signifie que $i_1(t)$ est une fonction continue du temps :

$$i_1(t = 0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} [i_1(t)] = 0$$

et c'est pourquoi :

$$i(t = 0) = \underbrace{i_1(t = 0)}_{=0} + \frac{1}{R} u(t = 0) \Rightarrow I_0 = \frac{1}{R} u(t = 0) \Rightarrow u(t = 0) = R I_0$$

2. Pour $t > 0$, la loi des nœuds a fourni :

$$i_1 + \frac{u}{R} = i = I_0 \Rightarrow \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} = 0$$

c'est-à-dire, étant donné que $u = L \frac{di_1}{dt}$:

$$\frac{1}{L} u + \frac{1}{R} \frac{du}{dt} = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle :

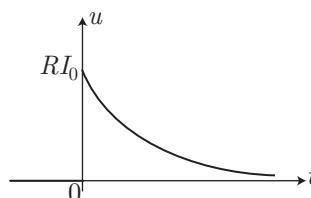
$$\frac{1}{L} + \frac{1}{R} X = 0 \Rightarrow X = -\frac{R}{L}$$

montre que $u(t)$ se présente sous la forme générale :

$$u = A e^{Xt} = A e^{-Rt/L}$$

où la constante A tient compte de la condition initiale :

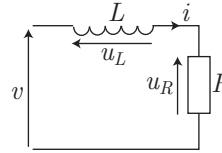
$$u(t = 0) = R I_0 \Rightarrow A = R I_0 \Rightarrow u(t) = R I_0 e^{-Rt/L}$$



● 66 ————— Lycée Fabert, Metz

Soient $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $u_R = Ri$ les tensions aux bornes de la bobine et de la résistance. La loi des mailles impose :

$$\begin{aligned} v - u_L - u_R &= 0 \Rightarrow u_L + u_R = v \\ &\Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = V_m \cos(\omega t) \end{aligned}$$



Cette équation différentielle admet :

- une solution i_s de l'équation : $L \frac{di_s}{dt} + Ri_s = 0$, dont l'équation caractéristique :

$$LX + R = 0 \Rightarrow X = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

montre qu'elle s'écrit :

$$i_s = A e^{Xt} = A e^{-t/\tau}$$

- une solution i_h homogène au second membre ; ce dernier étant une fonction sinusoïdale de ωt , il convient de chercher i_h sous la forme :

$$i_h = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{di_h}{dt} = -\alpha\omega \sin(\omega t) + \beta\omega \cos(\omega t)$$

L'équation différentielle devient ainsi :

$$\begin{aligned} V_m \cos(\omega t) &= L \frac{di_h}{dt} + Ri_h \\ &= (L\beta\omega + R\alpha) \cos(\omega t) + (R\beta - L\alpha\omega) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

L'identification des deux membres de cette équation fournit :

$$R\beta - \alpha L\omega = 0 \Rightarrow \beta = \alpha \frac{L\omega}{R} = \alpha\omega\tau \text{ car } L = R \times \tau \quad (5)$$

et :

$$\begin{aligned} L\beta\omega + R\alpha &= V_m \Rightarrow L\alpha\omega^2\tau + R\alpha = V_m \Rightarrow \alpha R(\omega^2\tau^2 + 1) = V_m \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{V_m}{R(\tau^2\omega^2 + 1)} \\ &\Rightarrow \beta = \omega\tau \times \alpha = \frac{V_m}{R(\omega^2\tau^2 + 1)} \times \omega\tau \end{aligned}$$

d'où il ressort que :

$$i_h = \frac{V_m}{R(\omega^2\tau^2 + 1)} [\cos(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t)]$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$i(t) = i_s + i_h = A e^{-t/\tau} + \frac{V_m}{R(\omega^2\tau^2 + 1)} [\cos(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t)]$$

où la constante A doit être ajustée de manière à assurer $i(t=0) = 0$:

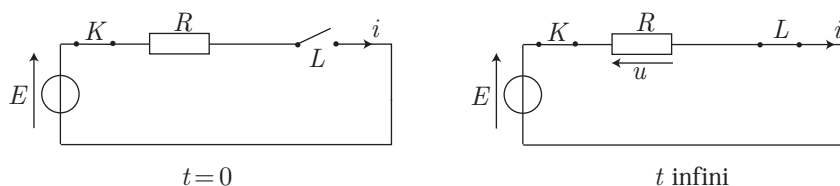
$$A + \frac{V_m}{R(\omega^2\tau^2 + 1)} = 0 \Rightarrow A = -\frac{V_m}{R(\omega^2\tau^2 + 1)}$$

Finalement :

$$i(t) = \frac{V_m}{R(\omega^2\tau^2 + 1)} \left[\cos(\omega t) + \omega\tau \sin(\omega t) - e^{-t/\tau} \right]$$

● 67 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. Lors d'une discontinuité dans le circuit, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert (à $t = 0$) tandis qu'en régime permanent, elle se comporte comme un fil électrique (t tendant vers l'infini).

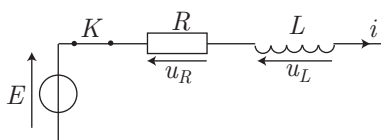


On peut ainsi distinguer deux cas :

- à $t = 0$, aucun courant ne circule : $i(t=0) = 0$;
- lorsque t tend vers l'infini, la loi des mailles fournit :

$$E - u = 0 \Rightarrow E = u = Ri \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} [i(t)] = \frac{E}{R}$$

2. Soient $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $u_R = Ri$ les tensions aux bornes de la bobine et de la résistance.



La loi des mailles fournit alors directement :

$$E - u_L - u_R = 0 \Rightarrow u_L + u_R = E \Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

Cette équation différentielle admet :

- une solution i_s vérifiant : $L \frac{di_s}{dt} + Ri_s = 0$, dont l'équation caractéristique :

$$LX + R = 0 \Rightarrow X = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

procure la solution :

$$i_s = Ae^{Xt} = Ae^{-t/\tau}$$

- une solution i_h homogène au second membre, c'est-à-dire constante :

$$L \underbrace{\frac{di_h}{dt}}_0 + R i_h = E \Rightarrow i_h = \frac{E}{R}$$

La solution générale de l'équation différentielle :

$$i(t) = i_h + i_s = \frac{E}{R} + A e^{-t/\tau}$$

doit vérifier la condition initiale :

$$\begin{aligned} i(0) = 0 &\Rightarrow \frac{E}{R} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{R} \\ &\Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \end{aligned}$$

3. Cette expression permet de vérifier le résultat de la première question :

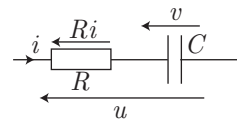
$$\lim_{t \rightarrow \infty} [i(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \right] = \frac{E}{R}$$

● 68 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Aux bornes de l'association en série règne une tension :

$$u = R i + v$$

où la tension v aux bornes du condensateur vérifie :



$$i = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow RC \frac{dv}{dt} + v = u$$

À la date $t = 0$, u prend la valeur finie U_0 , ce qui trahit la continuité de la fonction $v(t)$ (à défaut de quoi $\frac{dv}{dt}$ serait infini). Or, le condensateur est initialement déchargé : $v(t < 0) = 0$, ce qui fournit :

$$v(t = 0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} [v(t)] = 0 \quad (6)$$

En outre, l'équation différentielle : $RC \frac{dv}{dt} + v = U_0$ admet :

- une solution v_s en l'absence de second membre :

$$RC \frac{dv_s}{dt} + v_s = 0$$

L'équation caractéristique associée : $RC X + 1 = 0 \Rightarrow X = -\frac{1}{RC}$ montre que :

$$v_s = A e^{Xt} = A e^{-t/RC}$$

- une solution v_h homogène au second membre, c'est à dire constante (comme l'est U_0) :

$$RC \underbrace{\frac{dv_h}{dt}}_0 + v_h = U_0 \Rightarrow v_h = U_0$$

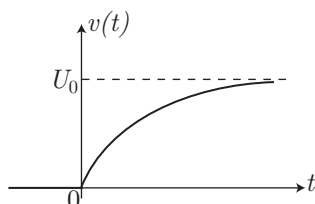
La solution générale de l'équation différentielle :

$$v(t) = v_h + v_s = U_0 + A e^{-t/RC}$$

doit alors rendre compte de la condition initiale (6) :

$$v(t=0) = 0 \Rightarrow U_0 + A = 0 \Rightarrow A = -U_0 \Rightarrow v(t) = U_0 (1 - e^{-t/RC})$$

Le calcul de $\lim_{t \rightarrow \infty} [v(t)] = U_0$ conduit rapidement à la représentation graphique de $v(t)$:



2. La tension $v(t)$ aux bornes du condensateur est liée à i par :

$$i = C \frac{dv}{dt} = C \frac{d}{dt} [U_0 - U_0 e^{-t/RC}] = \frac{CU_0}{RC} e^{-t/RC} \Rightarrow i = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC}$$

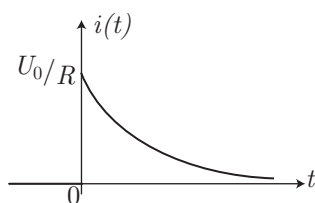
En outre, la loi : $u = Ri + v$ permet de poser :

$$\underbrace{u(t < 0)}_{=0} = Ri(t < 0) + \underbrace{v(t < 0)}_{=0} \Rightarrow i(t < 0) = 0$$

tandis que :

$$i(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{U_0}{R} e^{-t/RC} \right] = \frac{U_0}{R}$$

Enfin : $\lim_{t \rightarrow \infty} [i(t)] = 0$ permet de tracer l'allure de $i(t)$:



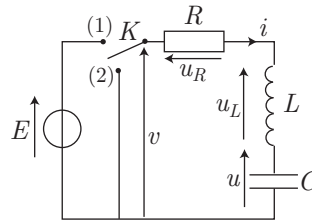
● **69** **Lycée Lakanal, Sceaux**

1. Soient $u_R = Ri$, $u_L = L \frac{di}{dt}$ et u les tensions aux bornes de la résistance, de la bobine et du condensateur. Lorsque l'interrupteur K est en position (2), la tension $v = 0$ vérifie la loi des mailles :

$$0 = v = u_L + u_R + u \Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u = 0$$

où :

$$\begin{aligned} i = C \frac{du}{dt} &\Rightarrow LC \frac{d^2u}{dt^2} + RC \frac{du}{dt} + u = 0 \\ &\Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0 \end{aligned}$$



soit, en posant $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ et $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \quad (7)$$

2. L'équation caractéristique associée à l'équation précédente :

$$X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$$

admet pour discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} [1 - 4Q^2] < 0 \text{ car } Q > \frac{1}{2} \\ &= \left(j \frac{\omega_0}{Q} \right)^2 (4Q^2 - 1) \end{aligned}$$

Ses deux solutions complexes :

$$X_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \text{ et } X_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

s'écrivent aussi :

$$X_1 = -\alpha + j\Omega \text{ et } X_2 = -\alpha - j\Omega$$

à condition de définir les paramètres :

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \text{ et } \Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = \alpha \sqrt{4Q^2 - 1}$$

De ces solutions est alors issue celle de l'équation différentielle (7) :

$$\begin{aligned} u &= \mu_1 e^{X_1 t} + \mu_2 e^{X_2 t} = e^{-\alpha t} (\mu_1 e^{j\Omega t} + \mu_2 e^{-j\Omega t}) \\ &= e^{-\alpha t} \{ \mu_1 [\cos(\Omega t) + j \sin(\Omega t)] + \mu_2 [\cos(\Omega t) - j \sin(\Omega t)] \} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant $A = \mu_1 + \mu_2$ et $B = j(\mu_1 - \mu_2)$:

$$u(t) = e^{-\alpha t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

3. La fonction $\psi(t) = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$ est périodique, de période T , ce qui signifie que :

$$\psi(t + T) = \psi(t) \text{ avec } T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\alpha\sqrt{4Q^2 - 1}} \quad (8)$$

Par suite : $u(t) = e^{-\alpha t} \psi(t)$ et :

$$u(t + T) = e^{-\alpha T} \times e^{-\alpha t} \psi(t + T) = e^{-\alpha T} \times e^{-\alpha t} \psi(t)$$

C'est pourquoi :

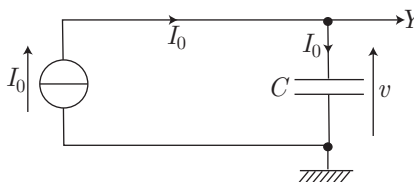
$$\frac{u(t)}{u(t + T)} = e^{\alpha T} \Rightarrow \delta = \ln \left[\frac{u(t)}{u(t + T)} \right] = \alpha T$$

où l'identité (8) fournit l'expression de δ :

$$\delta = \alpha \times \frac{2\pi}{\alpha\sqrt{4Q^2 - 1}} \Rightarrow \delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

● 70 ————— Lycée Kléber, Strasbourg

1. • Pendant la période $t \in [0, t_0]$, la position de l'interrupteur est telle que le condensateur se charge directement avec le courant I_0 .



C'est pourquoi :

$$I_0 = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{I_0}{C} \Rightarrow v = \frac{I_0}{C} t + A$$

où A est une constante qui tient compte de l'absence initiale de charge dans le condensateur :

$$v(t = 0) = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow v = \frac{I_0}{C} t \text{ pour } t \in [0, t_0]$$

- Pour $t \in [t_0, +\infty[$, l'interrupteur n'autorise plus le passage du courant dans le condensateur, si bien qu'en notant $i = 0$ ce courant, la tension $v(t)$ vérifie :

$$i = C \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = B$$

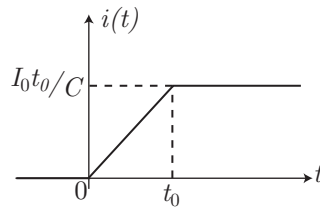
À nouveau, la constante B est ajustée de manière à assurer la continuité de la

fonction $v(t)$ à la date t_0 :

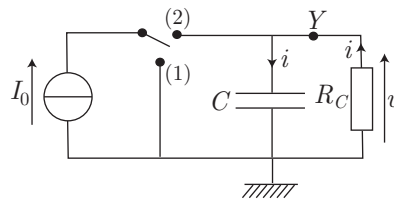
$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} [v(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0^+} [v(t)] \Rightarrow \frac{I_0 t_0}{C} = B$$

$$\Rightarrow v = \frac{I_0 t_0}{C} \text{ pour } t \in [t_0 + \infty[$$

De ces calculs se déduit finalement la représentation graphique de $v(t)$:



2. Notons t_1 la date à laquelle l'interrupteur bascule de la position (2) à la position (1), et V_1 la valeur $v(t_1)$.



Le courant qui circule dans le condensateur est aussi celui qui circule dans la résistance d'entrée R_e de l'oscilloscope :

$$i = C \frac{dv}{dt} \text{ et } v = -R_e i$$

Il s'ensuit que :

$$v = -R_e C \frac{dv}{dt} \Rightarrow R_e C \frac{dv}{dt} + v = 0$$

L'équation caractéristique : $R_e C X + 1 = 0 \Rightarrow X = -\frac{1}{R_e C}$ procure ainsi la solution générale :

$$v(t) = D e^{-t/R_e C}$$

dans laquelle la constante D doit tenir compte de la condition initiale :

$$v(t_1) = V_1 \Rightarrow V_1 = D e^{-t_1/R_e C} \Rightarrow D = V_1 \exp\left(\frac{t_1}{R_e C}\right)$$

$$\Rightarrow v(t) = V_1 \exp\left(\frac{t_1 - t}{R_e C}\right)$$

En outre, au bout d'une période T , c'est-à-dire à une date $t_2 = t_1 + T$, la déviation

du spot est divisée par deux, ce qui signifie également que :

$$\begin{aligned} v(t_2) = \frac{V_1}{2} &\Rightarrow V_1 \exp\left(\frac{t_1 - t_2}{R_e C}\right) = \frac{V_1}{2} \\ &\Rightarrow \exp\left(-\frac{T}{R_e C}\right) = \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{T}{R_e C} = \ln 2 \end{aligned}$$

Finalement, la résistance d'entrée vaut :

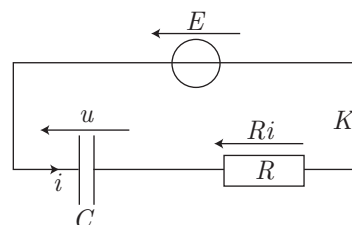
$$R_e = \frac{T}{C \ln 2} = \frac{7,2}{10^{-5} \times \ln 2} \Rightarrow R_e \simeq 1 \text{ M}\Omega$$

● 71 ————— Lycée Michelet, Vanves

1. Pour comprendre l'existence des éclairs, il convient de distinguer deux phases.

Phase 1 Depuis la date $t = 0$, la lampe est éteinte et se comporte comme une résistance infinie (aucun courant n'y circule, ce qui revient à ignorer sa présence). Le montage équivalent alors à celui schématisé ci-contre.

La loi des mailles impose :



$$E - u - Ri = 0 \Rightarrow Ri + u = E$$

avec :

$$i = C \frac{du}{dt} \Rightarrow \tau \frac{du}{dt} + u = E$$

Cette équation admet :

- une solution u_s de l'équation : $\tau \frac{du_s}{dt} + u_s = 0$ dont l'équation caractéristique :

$$\tau \times X + 1 = 0 \Rightarrow X = -\frac{1}{\tau}$$

montre qu'elle s'écrit :

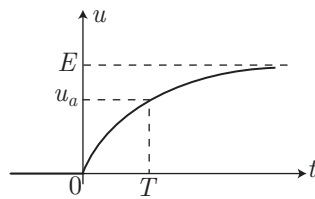
$$u_s = A e^{Xt} = A e^{-t/\tau}$$

- une solution u_h homogène au second membre, c'est-à-dire constante :

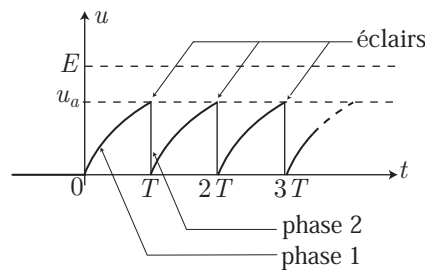
$$\tau \underbrace{\frac{du_h}{dt}}_0 + u_h = E \Rightarrow u_h = E$$

La solution générale : $u = E + A e^{-t/\tau}$ présente une constante A adaptée à l'état initial du condensateur déchargé :

$$u(t=0) = 0 \Rightarrow E + A = 0 \Rightarrow A = -E \Rightarrow u = E - E e^{-t/\tau}$$



Phase 2 Si la lampe n’existait pas, la tension $u(t)$ croîtrait jusqu’à tendre vers sa valeur asymptotique E . Cependant, $u_a < E$ permet à $u(t)$ d’atteindre la valeur u_a à une date T ; u y devient nul (la lampe se comporte comme un fil de résistance nulle). Le condensateur ainsi déchargé peut à nouveau entreprendre sa charge, conformément à la phase 1.



2. La figure précédente montre que la période T des éclairs correspond à la date à laquelle u atteint la valeur u_a :

$$\begin{aligned}
 u(T) = u_a &\Rightarrow u_a = E - E e^{-T/\tau} \\
 &\Rightarrow e^{-t/\tau} = \frac{E - u_a}{E} \text{ avec } \tau = RC \\
 &\Rightarrow T = RC \ln\left(\frac{E}{E - u_a}\right)
 \end{aligned}$$

Application numérique :

$$T = 50 \cdot 10^3 \times 8 \cdot 10^{-6} \times \ln\left(\frac{500}{500 - 150}\right) \Rightarrow T = 143 \text{ ms}$$

● **72** ————— **Lycée Kléber, Strasbourg**

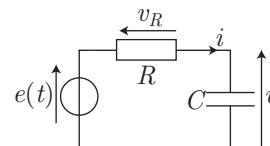
1. Soient i l’intensité du courant qui circule dans le circuit, $v_R = Ri$ et v les tensions respectives aux bornes de la résistance et de la bobine.

La loi des mailles impose :

$$e(t) = v_R + v = Ri + v$$

avec :

$$i = C \frac{dv}{dt} \Rightarrow \tau \frac{dv}{dt} + v = e(t)$$



d'où proviennent les deux équations différentielles :

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = E \text{ pour } t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \quad (9)$$

$$\tau \frac{dv}{dt} + v = -E \text{ pour } t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \quad (10)$$

2. La tension v_1 , satisfaisant à l'équation (9) est la somme :

- d'une solution v_{1s} de l'équation dépourvue de son second membre :

$$\tau \frac{dv_{1s}}{dt} + v_{1s} = 0 \Rightarrow \tau X + 1 = 0$$

dont la solution $X = -\frac{1}{\tau}$ de l'équation caractéristique montre que :

$$v_{1s} = A_1 e^{-t/\tau}$$

- d'une solution v_{1h} homogène au second membre, c'est-à-dire constante :

$$\tau \underbrace{\frac{dv_{1h}}{dt}}_0 + v_{1h} = E \Rightarrow v_{1h} = E$$

La solution générale de l'équation (9) s'écrit donc :

$$v_1(t) = E + A_1 e^{-t/\tau}$$

Quant à la solution de l'équation (10), elle s'obtient en remplaçant, dans le résultat ci-dessus, E par $-E$ et la constante A_1 par une autre constante A_2 :

$$v_2(t) = -E + A_2 e^{-t/\tau}$$

Afin d'assurer la périodicité de la fonction $v(t)$, ainsi que sa continuité à la date $t = T$, il convient de poser :

$$v_1(0) = v_2(T) \Rightarrow E + A_1 = -E + A_2 e^{-T/\tau} \Rightarrow A_1 = -2E + A_2 e^{-T/\tau} \quad (11)$$

De même, la continuité de $v(t)$ à la date $t = \frac{T}{2}$ impose :

$$v_1\left(\frac{T}{2}\right) = v_2\left(\frac{T}{2}\right) \Rightarrow E + A_1 e^{-T/2\tau} = -E + A_2 e^{-T/2\tau}$$

soit, compte tenu de la condition (11) :

$$\begin{aligned} (-2E + A_2 e^{-T/\tau}) e^{-T/2\tau} &= -2E + A_2 e^{-T/2\tau} \\ \Rightarrow A_2 e^{-T/2\tau} (1 - e^{-T/\tau}) &= 2E (1 - e^{-T/2\tau}) \\ \Rightarrow A_2 &= e^{T/2\tau} \times 2E \frac{1 - e^{-T/2\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \end{aligned}$$

ou encore :

$$A_2 = 2E \times \frac{e^{T/2\tau} - 1}{1 - e^{-T/\tau}}$$

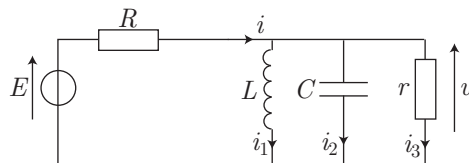
À nouveau, l'équation (11) fournit alors :

$$\begin{aligned} A_1 &= -2E + e^{-T/\tau} \times 2E \frac{e^{T/2\tau} - 1}{1 - e^{-T/\tau}} \\ &= 2E \left[-1 + \frac{e^{-T/2\tau} - e^{T/\tau}}{1 - e^{-T/\tau}} \right] \\ \Rightarrow A_1 &= 2E \times \frac{e^{-T/2\tau} - 1}{1 - e^{-T/\tau}} \end{aligned}$$

● 73 ————— Extrait du concours E.N.S.T.I.M.

1. En vertu de la loi des nœuds, le courant i s'identifie à $i_1 + i_2 + i_3$, tandis que la loi des mailles révèle que :

$$E = Ri + u = R(i_1 + i_2 + i_3) + r i_3 = R i_1 + R i_2 + (R + r) i_3$$



Or, E étant constant, il s'ensuit que :

$$\frac{dE}{dt} = R \frac{di_1}{dt} + R \frac{di_2}{dt} + (R + r) \frac{di_3}{dt} = 0$$

En outre, la tension $u = r i_3$ est aussi celle aux bornes de la bobine :

$$r i_3 = L \frac{di_1}{dt} \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = \frac{r}{L} i_3$$

et s'identifie également à celle aux bornes du condensateur :

$$i_2 = C \frac{du}{dt} = C \frac{d(r i_3)}{dt} = rC \frac{di_3}{dt}$$

C'est pourquoi :

$$\frac{Rr}{L} i_3 + RrC \frac{d^2 i_3}{dt^2} + (R + r) \frac{di_3}{dt} = 0$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{R + r}{RrC} \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{LC} i_3 = 0$$

ou encore :

$$\frac{d^2 i_3}{dt^2} + 2\lambda \frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \lambda = \frac{R + r}{2RrC} \end{cases}$$

2. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle :

$$X^2 + 2\lambda X + \omega_0^2 = 0 \quad (12)$$

a pour discriminant réduit :

$$\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$$

Or, pour assurer une solution pseudo-périodique à l'équation différentielle, il est nécessaire que Δ' soit négatif :

$$\lambda^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \frac{(R+r)^2}{(2RrC)^2} < \frac{1}{LC} \Rightarrow L(R+r)^2 < 4R^2r^2C$$

3. Dans le cas précédemment cité, Δ' s'écrit : $\Delta' = (j)^2 (\omega_0^2 - \lambda^2)$, tandis que les deux solutions complexes de l'équation (12) :

$$X_1 = -\lambda + j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \text{ et } X_2 = -\lambda - j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

introduisent la forme générale de la solution de l'équation différentielle :

$$i_3 = \mu_1 e^{X_1 t} + \mu_2 e^{X_2 t} = e^{-\lambda t} \left[\mu_1 e^{j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} + \mu_2 e^{-j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} \right]$$

c'est-à-dire, en posant : $A = \mu_1 + \mu_2$ et $B = j(\mu_1 - \mu_2)$:

$$i_3(t) = e^{-\lambda t} \underbrace{\left[A \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t\right) \right]}_{\psi(t)}$$

La pseudo-pulsation ω est alors définie comme la pulsation de la fonction sinusoïdale $\psi(t)$, auquel cas :

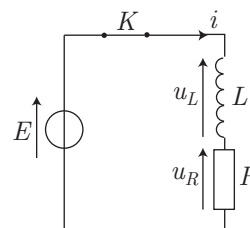
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

● 74 ————— Lycée Henri IV, Paris

1. Les expressions des tensions $u_R = Ri$ et $u_L = L \frac{di}{dt}$, aux bornes de la résistance et de la bobine, associées à la loi des mailles, fournissent directement :

$$E - u_R - u_L = 0 \Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = E$$

Cette équation différentielle admet :



• une solution i_s de l'équation : $L \frac{di_s}{dt} + Ri_s = 0$, dont l'équation caractéristique :

$$LX + R = 0 \Rightarrow X = -\frac{R}{L} = -\frac{1}{\tau}$$

révèle que $i_s = A e^{Xt} = A e^{-t/\tau}$.

- une solution i_h , homogène au second membre (c'est-à-dire constante), vérifiant :

$$L \underbrace{\frac{di_h}{dt}}_{=0} + R i_h = E \Rightarrow i_h = \frac{E}{R} = I_m$$

La solution générale : $i(t) = i_h + i_s = I_m + A e^{-t/\tau}$ présente une constante A que l'on doit adapter à la valeur initiale $i(t=0)$. Or, à $t < 0$, $i(t)$ est nul car l'interrupteur K est ouvert, et à partir de la date $t \geq 0$, l'équation :

$$L \frac{di}{dt} + R i = E$$

montre que la fonction $i(t)$ doit être continue (sans quoi $\frac{di}{dt}$ deviendrait infini !) :

$$i(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} [i(t)] = 0 \Rightarrow I_m + A = 0 \Rightarrow A = -I_m$$

Finalement, ces calculs aboutissent à :

$$i(t) = I_m \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

2. L'énergie $W_L(t)$ emmagasinée par la bobine à une date t est donnée par :

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2 \Rightarrow W_L(t) = \frac{L I_m^2}{2} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)^2 \quad (13)$$

Quant à l'énergie δW_E fournie par la source de tension pendant une durée dt , elle définit la puissance électrique délivrée par cette source :

$$\frac{\delta W_E}{dt} = \mathcal{P}_E = E \times i \Rightarrow \delta W_E = E \times I_m \left(1 - e^{-t/\tau}\right) dt \text{ avec } E = R I_m$$

Aussi, entre l'instant initial et l'instant t , la source délivre l'énergie :

$$\begin{aligned} W_E(t) &= R I_m^2 \int_0^t \left(1 - e^{-t/\tau}\right) dt = R I_m^2 \left[t + \tau e^{-t/\tau}\right]_0^t \\ &= R I_m^2 \left[t + \tau \left(e^{-t/\tau} - 1\right)\right] \text{ où } \tau = \frac{L}{R} \end{aligned}$$

d'où :

$$W_E(t) = R I_m^2 t + L I_m^2 \left(e^{-t/\tau} - 1\right) \quad (14)$$

Lorsque t est voisin de zéro, la fonction $e^{-t/\tau}$ admet pour développement développé limité d'ordre 2 :

$$e^{-t/\tau} \simeq 1 - \frac{t}{\tau} + \frac{t^2}{2\tau^2}$$

en conséquence de quoi :

$$W_E(t \simeq 0) \simeq RI_m^2 t + LI_m^2 \left(-t \times \frac{R}{L} + \frac{R^2}{2L^2} t^2 \right) \quad (15)$$

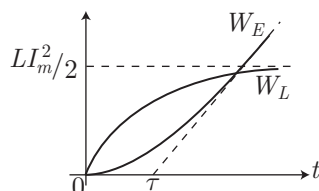
$$\Rightarrow W_E(t) \simeq \frac{R^2}{2L} I_m^2 \times t^2 \text{ pour } t \simeq 0 \quad (16)$$

En revanche, lorsque $t \gg \tau$, la fonction $e^{-t/\tau}$ devient assez petite par rapport à 1 pour simplifier l'expression (14) :

$$W_E \simeq RI_m^2 t - LI_m^2 \text{ pour } t \gg \tau \quad (17)$$

Les relations (16) et (17) révèlent le comportement asymptotique de la courbe représentative de $W_E(t)$: une branche parabolique pour $t \simeq 0$ et une droite pour $t \gg \tau$.

Quant à l'expression (13) de $W_L(t)$, elle conduit naturellement à la courbe ci-dessous.



3. La loi des mailles utilisée lors de la question 1., a permis de poser :

$$E - u_L = u_R \Rightarrow E \times i - u_L \times i = u_R \times i \Rightarrow \mathcal{P}_E - \mathcal{P}_L = \mathcal{P}_R$$

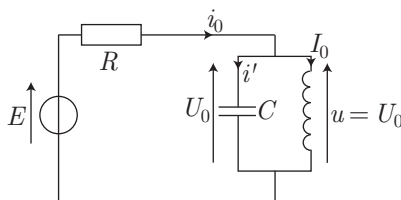
où $\mathcal{P}_L = \frac{\delta W_L}{dt}$ et $\mathcal{P}_R = \frac{\delta W_R}{dt}$ désignent les puissances consommées par la bobine et la résistance respectivement, tandis que δW_L représente l'énergie accumulée par la bobine pendant dt et δW_R celle dissipée par effet Joule par la résistance, pendant dt :

$$\frac{\delta W_E}{dt} - \frac{\delta W_L}{dt} = \frac{\delta W_R}{dt} \Rightarrow \delta W_E - \delta W_L = \delta W_R \Rightarrow W_E - W_L = W_R$$

Ce résultat signifie que la quantité $(W_E - W_L)$ représente l'énergie W_R dissipée par effet Joule, par la résistance, entre l'instant initial et l'instant t .

● 75 ————— Lycée Fabert, Metz

1. En régime permanent, la tension u prend la valeur constante U_0 , de sorte que le courant i' qui circule dans le condensateur vérifie : $i' = C \frac{dU_0}{dt} = 0$.



Par suite, le courant i_0 qui circule dans la résistance est le même que le courant $i = I_0$ qui circule dans la bobine, aux bornes de laquelle se trouve une tension :

$$U_0 = r I_0 + L \underbrace{\frac{dI_0}{dt}}_{=0} = r I_0$$

La loi des mailles révèle alors que :

$$E = R i_0 + U_0 = R I_0 + r I_0 \Rightarrow I_0 = \frac{E}{R + r}$$

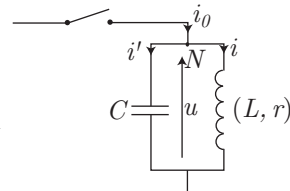
ce qui conduit finalement à :

$$U_0 = r I_0 = \frac{r E}{R + r}$$

2. Au nœud N , le courant i_0 se sépare en i et i' , tels que :

$$i' = C \frac{du}{dt} \text{ et } u = L \frac{di}{dt} + r i$$

Or, l'ouverture de l'interrupteur provoque l'annulation du courant i_0



$$\begin{aligned} i_0 = 0 &\Rightarrow i' = -i \Rightarrow i = -C \frac{du}{dt} \\ &\Rightarrow u = -LC \frac{d^2u}{dt^2} - rC \frac{du}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0 \end{aligned}$$

On notera dorénavant :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{10 \times 10^{-6}} \Rightarrow \omega_0 = 316 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

et :

$$Q = \frac{L\omega_0}{r} = \sqrt{\frac{L}{r^2 C}} = \sqrt{\frac{1}{(100)^2 \times 10 \times 10^{-6}}} \Rightarrow Q = \sqrt{10}$$

de manière à présenter cette équation différentielle sous sa forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

3. L'équation caractéristique associée à l'équation précédente :

$$X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0 \quad (18)$$

a pour discriminant :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$$

où :

$$Q^2 = 10 \Rightarrow \Delta = -39 \frac{\omega_0^2}{Q^2} = -3,9 \omega_0^2 < 0 \Rightarrow \Delta = \left(j \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{39} \right)^2$$

ce qui révèle la nature pseudo-périodique du régime.

4. Les solutions de l'équation caractéristique (18) :

$$\begin{cases} X_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{39} \\ X_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{39} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -\alpha + j\Omega \\ X_2 = -\alpha - j\Omega \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \\ \Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{39} \end{cases}$$

mènent à la solution générale de l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} u &= \mu_1 e^{X_1 t} + \mu_2 e^{X_2 t} = e^{-\alpha t} (\mu_1 e^{j\Omega t} + \mu_2 e^{-j\Omega t}) \\ &= e^{-\alpha t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \text{ avec } \begin{cases} A = \mu_1 + \mu_2 \\ B = j(\mu_1 - \mu_2) \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{du}{dt} &= e^{-\alpha t} [(B\Omega - \alpha A) \cos(\Omega t) - (\alpha B + \Omega A) \sin(\Omega t)] \end{aligned}$$

Les constantes A et B sont alors accessibles à partir des conditions initiales :

- à $t = 0$, $u = U_0$ implique que $U_0 = A$;
- le courant $i(t)$ est continu dans le temps, sans quoi la tension aux bornes de la bobine : $u = L \frac{di}{dt} + r i$ tendrait vers l'infini. C'est pourquoi :

$$i(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} [i(t)] = I_0$$

En outre, le courant i' aux bornes du condensateur est donnée par :

$$i' = C \frac{du}{dt}$$

et, à $t = 0$:

$$\begin{aligned} i' = -I_0 &\Rightarrow \left. \frac{du}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{I_0}{C} = B\Omega - \alpha A \\ \Rightarrow B &= \frac{\alpha A}{\Omega} - \frac{I_0}{C\Omega} = \frac{\alpha U_0}{\Omega} - \frac{I_0}{C\Omega} \end{aligned}$$

où les expressions des paramètres α et Ω fournissent :

$$\frac{\alpha}{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{39}} \text{ et } \frac{1}{C\Omega} = \frac{2Q}{C\omega_0 \sqrt{39}} = \frac{2}{\sqrt{39}} \times \frac{L\omega_0}{r} \times \frac{1}{C\omega_0} = \frac{2L}{rC\sqrt{39}}$$

Finalement :

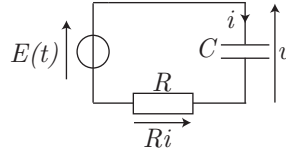
$$u = e^{-\alpha t} \left[U_0 \cos(\Omega t) + \left(\frac{U_0}{\sqrt{39}} - \frac{2LI_0}{rC\sqrt{39}} \right) \sin(\Omega t) \right]$$

● 76 Lycée Michelet, Vanves

1. Soit i l'intensité du courant circulant dans le circuit, tel que : $i = C \frac{du}{dt}$.

La loi des mailles impose :

$$\begin{aligned} E(t) - u - Ri &= 0 \Rightarrow Ri + u = E(t) \\ \Rightarrow \tau \frac{du}{dt} + u &= E(t) \\ \text{avec } \tau &= RC \end{aligned}$$



où :

$$E(t) = \frac{AT_0}{\theta} \times t \Rightarrow \tau \frac{du}{dt} + u = \frac{AT_0}{\theta} \times t \Leftrightarrow \tau \dot{u} + u = \frac{AT_0}{\theta} \times t \quad (19)$$

En dérivant par rapport à t cette équation, on obtient également :

$$\tau \frac{d\dot{u}}{dt} + \dot{u} = \frac{AT_0}{\theta}$$

2. Cette dernière équation différentielle admet :

- une solution \dot{u}_s telle que : $\tau \frac{d\dot{u}_s}{dt} + \dot{u}_s = 0$, dont l'équation caractéristique :

$$\tau X + 1 = 0 \Rightarrow X = -\frac{1}{\tau}$$

fournit : $\dot{u}_s = \alpha e^{Xt} = \alpha e^{-t/\tau}$.

- une solution \dot{u}_h homogène au second membre, c'est-à-dire constante :

$$\tau \underbrace{\frac{d\dot{u}_h}{dt}}_{=0} + \dot{u}_h = \frac{AT_0}{\theta} \Rightarrow \dot{u}_h = \frac{AT_0}{\theta}$$

auquel cas la solution générale se met sous la forme :

$$\dot{u} = \dot{u}_h + \dot{u}_s = \frac{AT_0}{\theta} + \alpha e^{-t/\tau}$$

où la constante α s'adapte aux conditions initiales. Notamment, $i = C \dot{u}$ est une fonction continue, sans quoi $\frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{1}{C} \frac{di}{dt}$ tendrait vers l'infini, ce qui signifie que :

$$i(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} [i(t)] = 0 \Rightarrow \dot{u}(t=0) = 0 \Rightarrow \alpha + \frac{AT_0}{\theta} = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{AT_0}{\theta}$$

C'est pourquoi :

$$\frac{du}{dt} = \dot{u} = \frac{AT_0}{\theta} - \frac{AT_0}{\theta} e^{-t/\tau} \Rightarrow u = \frac{AT_0}{\theta} t + \frac{At_0\tau}{\theta} e^{-t/\tau} + \beta$$

À nouveau, la constante β est ajustée à la condition initiale (le condensateur est initialement déchargé) :

$$u(t=0) = 0 \Rightarrow \beta + \frac{AT_0\tau}{\theta} = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{AT_0\tau}{\theta}$$

Finalement, il ressort de ces calculs que :

$$u(t) = \frac{AT_0 t}{\theta} + \frac{AT_0 \tau}{\theta} \left(e^{-t/\tau} - 1 \right) \quad (20)$$

3. Si la température demeure constante à partir de la date τ_0 :

$$T(t) = T(\tau_0) = \frac{T_0 \tau_0}{\theta} \Rightarrow E(t \geq \tau_0) = \frac{AT_0}{\theta} \times \tau_0$$

l'équation différentielle (19) devient :

$$\tau \frac{du}{dt} + u = \frac{AT_0 \tau_0}{\theta}$$

Comme précédemment, cette solution est la somme d'un terme $u_s = \gamma e^{-t/\tau}$ et d'un terme constant $u_h = \frac{AT_0 \tau_0}{\theta}$:

$$u = \frac{AT_0 \tau_0}{\theta} + \gamma e^{-t/\tau} \quad (21)$$

où la constante γ assure la continuité des fonctions (20) et (21) à la date $t = \tau_0$:

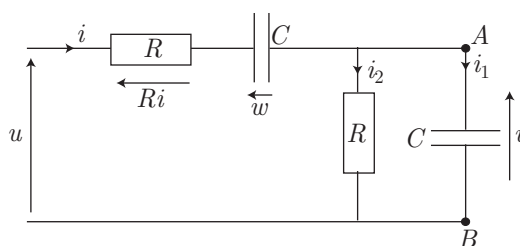
$$\begin{aligned} \frac{AT_0 \tau_0}{\theta} + \frac{AT_0 \tau}{\theta} \left(e^{-\tau_0/\tau} - 1 \right) &= \frac{AT_0 \tau_0}{\theta} + \gamma e^{-\tau_0/\tau} \\ \Rightarrow \gamma &= \frac{AT_0 \tau}{\theta} \left(1 - e^{\tau_0/\tau} \right) \end{aligned}$$

ce qui mène à :

$$u(t) = \frac{AT_0 \tau_0}{\theta} + \frac{AT_0 \tau}{\theta} \left(1 - e^{\tau_0/\tau} \right) \times e^{-t/\tau} \quad (22)$$

● 77 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. Soit $u(t)$ la tension aux bornes du circuit ($u = E$ pour $t \geq 0$), i le courant circulant dans la branche RC horizontale, i_1 et i_2 les intensités des courants qui traversent le condensateur et le *resistor* verticaux.



Compte tenu de ces définitions : $i_1 = C \frac{dv}{dt}$ et $i_2 = \frac{v}{R}$, tandis que la loi des nœuds impose :

$$i = i_1 + i_2 = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \quad (23)$$

En outre, si w désigne la tension aux bornes du condensateur horizontal, telle que $i = C \frac{dw}{dt}$, la loi des mailles fournit :

$$\begin{aligned} u = Ri + w + v &\Rightarrow \frac{du}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{dw}{dt} + \frac{dv}{dt} \\ &= R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i + \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'identité (23) :

$$R \frac{d}{dt} \left(C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \right) + \frac{1}{C} \left(C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \right) + \frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt}$$

soit, en posant $\tau = RC$:

$$\tau \frac{d^2v}{dt^2} + 3 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = \frac{du}{dt} \quad (24)$$

avec $u = E$ pour $t > 0$:

$$\tau \frac{d^2v}{dt^2} + 3 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = 0 \quad (25)$$

2. L'identité (23) : $i = C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R}$ montre que la fonction $v(t)$ est continue, faute de quoi $\frac{dv}{dt}$ tendrait vers l'infini, tandis que i ne peut être infini. C'est pourquoi :

$$v(t=0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} [v(t)] = 0$$

En outre, l'équation issue de la loi des mailles :

$$u = Ri + w + v = R \left(C \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} \right) + w + v$$

demeure utilisable à la date $t = 0$ pour laquelle $u = E$, $v = 0$, $w = 0$ (les condensateurs sont initialement déchargés) auquel cas :

$$E = RC \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} \Rightarrow \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{RC}$$

En revanche, il aurait été hasardeux d'utiliser l'équation (25) pour en déduire que $\frac{dv}{dt}$ est une fonction continue. En effet, cette équation provient de l'équation (24) :

$$\tau \frac{d^2v}{dt^2} + 3 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = \frac{du}{dt}$$

dans laquelle le membre de droite tend vers l'infini à $t = 0$ (u passe brusquement de 0 à E), ce qui révèle que $\frac{d^2v}{dt^2}$ tend aussi vers l'infini ; il s'ensuit que $\frac{dv}{dt}$ est discontinu à $t = 0$.

3. L'équation différentielle (25) a pour équation caractéristique :

$$\tau X^2 + 3X + \frac{1}{\tau} = 0$$

dont le discriminant :

$$\Delta = 9 - 4 = 5$$

révèle l'existence de deux solutions :

$$\begin{cases} X_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2\tau} = -\alpha + \beta \\ X_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2\tau} = -\alpha - \beta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{3}{2\tau} \\ \beta = \frac{\sqrt{5}}{2\tau} \end{cases}$$

Par suite, l'équation différentielle (25) admet pour solution générale :

$$v = A_1 e^{X_1 t} + A_2 e^{X_2 t} = A_1 e^{(\beta - \alpha)t} + A_2 e^{-(\beta + \alpha)t}$$

Or, à $t = 0$, v est nul :

$$\begin{aligned} 0 = A_1 + A_2 &\Rightarrow A_2 = -A_1 \Rightarrow v(t) = A_1 \left[e^{(\beta - \alpha)t} - e^{-(\beta + \alpha)t} \right] \\ &\Rightarrow \frac{dv}{dt} = A_1 \left[(\beta - \alpha) e^{(\beta - \alpha)t} + (\beta + \alpha) e^{-(\beta + \alpha)t} \right] \end{aligned}$$

tandis que :

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{RC} \Rightarrow A_1 \times 2\beta = \frac{E}{RC} \Rightarrow A_1 \times \frac{\sqrt{5}}{2\tau} = \frac{E}{RC} \Rightarrow A_1 = \frac{E}{\sqrt{5}}$$

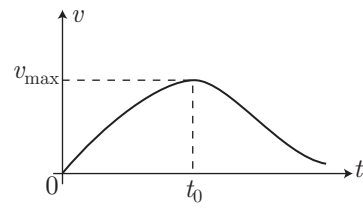
Finalement :

$$v(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} \left[e^{(\beta - \alpha)t} - e^{-(\beta + \alpha)t} \right] \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{3}{2\tau} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{5}}{2\tau}$$

4. Étant donné que $\lim_{t \rightarrow 0} [v(t)] = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} [v(t)] = 0$, cela suggère l'existence d'un maximum U_{max} pour $v(t)$, à une date t_0 telle que :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t_0} = 0 &\Rightarrow \frac{E}{\sqrt{5}} \left[(\beta - \alpha) e^{(\beta - \alpha)t_0} + (\beta + \alpha) e^{-(\beta + \alpha)t_0} \right] = 0 \\ &\Rightarrow (\alpha - \beta) e^{\beta t_0} = (\alpha + \beta) e^{-\beta t_0} \\ &\Rightarrow e^{2\beta t_0} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \\ &\Rightarrow t_0 = \frac{1}{2\beta} \ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right) = \frac{RC}{\sqrt{5}} \ln \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \right) \end{aligned}$$

5. De ces calculs ressort la représentation graphique de $v(t)$:



Chapitre 3

Optique géométrique

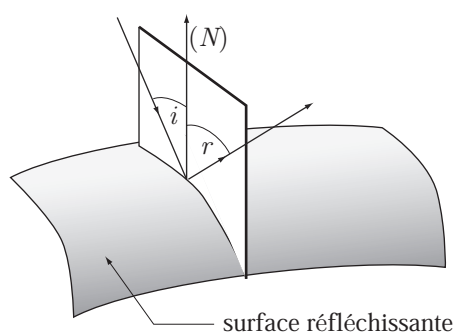
3.1 Réflexion et réfraction

3.1.1 Réflexion de la lumière


Définition 1 On appelle normale (N) à une surface en un point P , la droite passant par P , perpendiculairement à la surface.

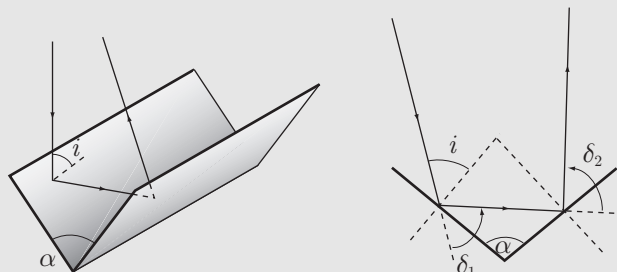
Les lois de Snell-Descartes stipulent que, lors de la réflexion :

- les angles d'incidence (i) et de réflexion (r) sont identiques ;
- les rayons incident, réfléchi et la normale (N) au point d'incidence de la lumière sont coplanaires.



⚠ Les angles i et r sont toujours mesurés par rapport à la normale (N). Prenez garde à ne pas les confondre avec les angles que font les rayons lumineux par rapport à la surface réfléchissante.

 Deux miroirs plans, d'arête commune, forment un dièdre d'angle α . Un rayon arrive sur un des miroirs sous un angle d'incidence i .



1. La déviation totale de ce rayon est la somme des déviations δ_1 et δ_2 subies au cours des réflexions sur chacun des miroirs. Exprimer D en fonction de α .
2. Que se produit-il lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$? Quelle application peut-on trouver à un tel système ?

RÉPONSE

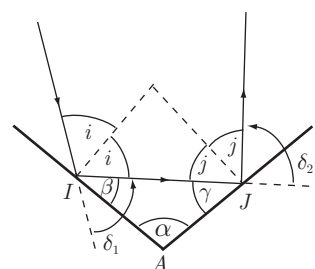
1. Soient i et j les angles (d'incidence ou de réflexion, qui sont identiques) aux points respectifs I et J des deux miroirs.

Dans le triangle AIJ , la somme des angles valant π , il convient d'écrire :

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

tandis qu'au points I et J :

$$\begin{cases} i + \beta = \frac{\pi}{2} \\ j + \gamma = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{\pi}{2} - i \\ \gamma = \frac{\pi}{2} - j \end{cases}$$



d'où :

$$\beta + \gamma = \pi - i - j \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \alpha + \pi - i - j = \pi \Rightarrow \alpha = i + j$$

Quant aux déviations δ_1 et δ_2 , elles vérifient :

$$\begin{cases} \text{au point } I : \delta_1 + 2i = \pi \\ \text{au point } J : \delta_2 + 2j = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} \delta_1 + \delta_2 + 2(i + j) &= 2\pi \\ \Rightarrow \delta_1 + \delta_2 &= 2 \times [\pi - (i + j)] \end{aligned}$$

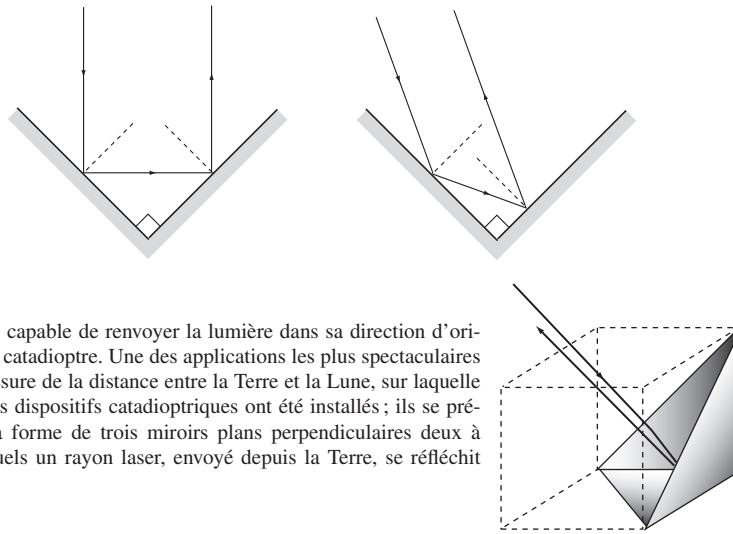
c'est-à-dire, compte tenu du résultat : $\alpha = i + j$ et de la définition de la déviation totale :

$$D = \delta_1 + \delta_2 \Rightarrow D = 2 \times (\pi - \alpha)$$

2. Lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le résultat précédent devient :

$$D = 2 \times \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

Il s'ensuit que le rayon est réfléchi parallèlement au rayon incident, quelle qu'en soit l'incidence :



Un tel système capable de renvoyer la lumière dans sa direction d'origine est appelé catadioptré. Une des applications les plus spectaculaires concerne la mesure de la distance entre la Terre et la Lune, sur laquelle plusieurs de ces dispositifs catadioptriques ont été installés ; ils se présentent sous la forme de trois miroirs plans perpendiculaires deux à deux, sur lesquels un rayon laser, envoyé depuis la Terre, se réfléchit vers la Terre.

3.1.2 Réfraction de la lumière

3.1.2.1 Loi de Snell-Descartes

Définition 2 On appelle indice de réfraction n d'un milieu transparent le rapport de la célérité (c) de la lumière dans le vide à celle (v) dans le matériau :

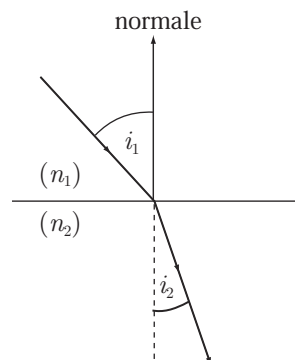
$$n = \frac{c}{v} \geq 1$$

Soit i_1 l'angle d'incidence d'un rayon lumineux qui se propage dans un milieu d'indice de réfraction n_1 et soit i_2 l'angle de réfraction du rayon lumineux qui se propage dans un autre milieu, d'indice n_2 .

Lorsque la réfraction se produit (passage de la lumière d'un milieu transparent vers un autre milieu transparent), la loi de Snell-Descartes stipule que :

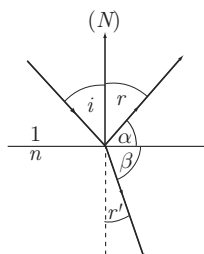
- les deux rayons et la normale sont contenus dans un même plan ;
- les angles i_1 et i_2 vérifient :

$$n_1 \times \sin i_1 = n_2 \times \sin i_2$$



Un dioptré plan sépare l'air (d'indice de réfraction valant 1) d'un autre milieu transparent d'indice n . Pour quelle valeur de l'angle d'incidence i , le rayon réfléchi est-il perpendiculaire au rayon réfracté (incidence de Brewster) ?

RÉPONSE Du rayon incident, qui arrive sous un angle i par rapport à la normale (N) du dioptre, une partie est réfléchiée sous un angle r par rapport à (N) et l'autre est réfractée dans le second milieu transparent, sous un angle de réfraction r' .



Les rayons réfracté et réfléchi font entre-eux un angle $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, tandis que :

$$\begin{cases} \beta + r' = \frac{\pi}{2} \\ \alpha + r = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{2} + r + r' = \pi \Rightarrow r + r' = \frac{\pi}{2}$$

Quant aux lois relatives à la réflexion et à la réfraction, elles stipulent d'une part que :

$$i = r \Rightarrow i + r' = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r' = \frac{\pi}{2} - i$$

et d'autre part que :

$$1 \times \sin i = n \times \sin r' \Rightarrow \sin i = n \sin \left(\frac{\pi}{2} - i \right) = n \cos i$$

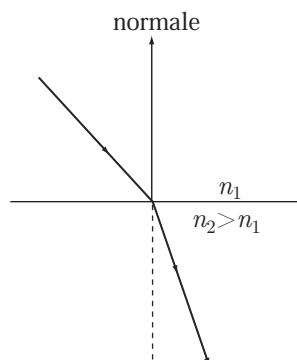
L'angle de Brewster est alors donné par :

$$\tan i = n \Rightarrow i = \arctan(n)$$

Définition 3 Soient deux milieux transparents d'indices n_1 et n_2 . L'un des deux milieux est dit plus réfringent que l'autre si son indice de réfraction est plus grand :

$$(1) \text{ plus réfringent que } (2) \Leftrightarrow n_1 > n_2$$

Cette définition a comme corollaire le rapprochement des rayons lumineux vers la normale des milieux plus réfringents.

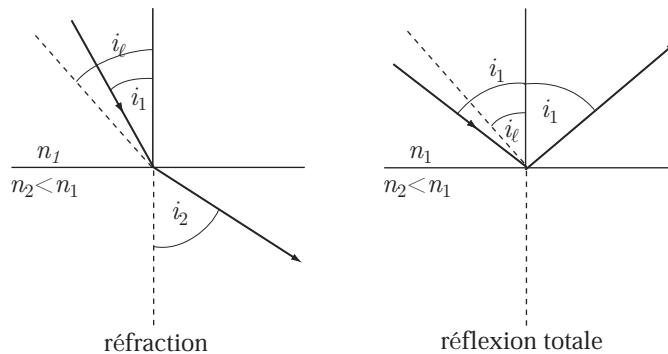


3.1.2.2 Réflexion totale

Lorsque la lumière passe d'un milieu transparent d'indice n_1 vers un autre milieu d'indice n_2 , moins réfringent, le phénomène de réfraction ne se produit que si l'angle d'incidence demeure inférieur à un *angle limite* i_ℓ tel que :

$$\sin(i_\ell) = \frac{n_2}{n_1}$$

Si i_1 excède i_ℓ , la lumière se réfléchit totalement dans le milieu d'incidence.



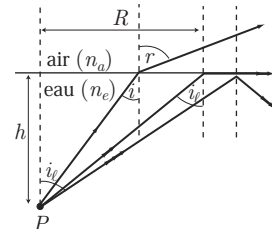
Soit P un point lumineux se trouvant à une distance $h = 1$ m sous la surface plane de l'eau d'un bassin. L'indice de réfraction de cette eau vaut $n_e = 1,33$ et celui de l'air ambiant vaut $n_a = 1,00$. À la surface de l'eau n'apparaît, pour un observateur situé dans l'air, qu'un disque éclairé de rayon R .

Donner l'expression de R en fonction de h, n_a, n_e , puis passer à l'application numérique.

RÉPONSE

La lumière aborde l'interface séparant un milieu $n_e = 1,33$ (l'eau), d'un milieu moins réfringent (l'air) d'indice $n_a = 1,00$. Un phénomène de réflexion totale peut donc se produire si l'angle d'incidence i excède la valeur de l'angle limite i_ℓ , tel que :

$$\sin(i_\ell) = \frac{n_a}{n_e}$$



Le disque lumineux, de rayon R , tire son origine de cette réflexion totale ; seuls les rayons incidents tels que $i < i_\ell$ peuvent émerger dans l'air. Il apparaît ainsi que :

$$\tan(i_\ell) = \frac{R}{h} \Rightarrow R = h \times \frac{\sin i_\ell}{\sqrt{1 - \sin^2 i_\ell}} = h \times \sqrt{\frac{\sin^2 i_\ell}{1 - \sin^2 i_\ell}}$$

soit, compte tenu de l'expression de i_ℓ :

$$\sin i_\ell = \frac{n_a}{n_e} \Rightarrow R = h \times \sqrt{\frac{n_a^2}{n_e^2 - n_a^2}}$$

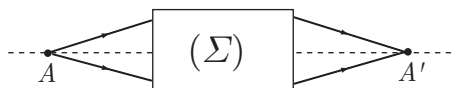
Application numérique :

$$R = 1 \times \sqrt{\frac{1}{(1,33)^2 - 1}} = 1,14 \text{ m}$$

3.2 Formation d'images

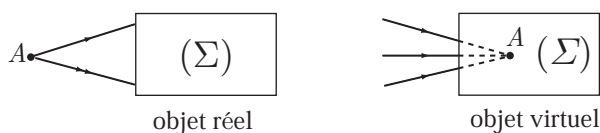
3.2.1 Stigmatisme et aplanétisme

Définition 4 Un système optique (Σ) est rigoureusement stigmatique pour un couple de points A et A' si tout rayon qui passe par A passe également par A' après avoir atteint (Σ) ; A et A' sont alors conjugués optiques.

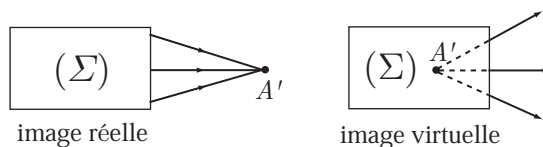


Remarque – Si tous les rayons issus de A passent au voisinage de A' , après avoir rencontré (Σ) , le stigmatisme n'est qu'approché, mais A et A' demeurent conjugués optiques dans la mesure où le pouvoir de résolution de l'œil admet une tolérance.

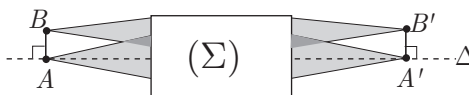
Définition 5 Le point A de convergence de tous les rayons qui arrivent sur (Σ) est appelé objet; cet objet est réel si les rayons se coupent réellement en A et il est virtuel si seuls les prolongements de ces rayons concourent en A .



Définition 6 Le point A' où convergent tous les rayons issus de (Σ) est appelé image; cette image est réelle lorsque A' intercepte réellement ces rayons et est virtuelle si seuls les prolongements de ces rayons y convergent.



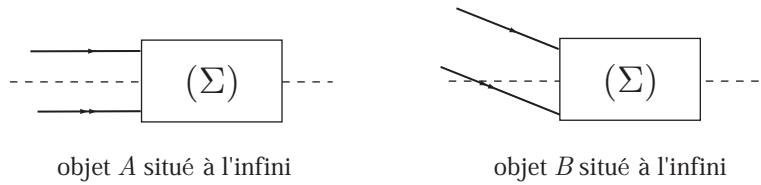
Définition 7 Un système optique (Σ) est dit aplanétique s'il forme d'un segment AB , perpendiculaire à l'axe optique Δ , une image $A'B'$ également perpendiculaire à Δ .



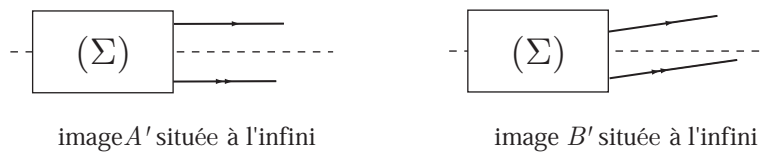
Dans la suite, tous les systèmes optiques seront supposés stigmatiques (au moins de manière approchée) et aplanétiques à condition toutefois d'être utilisés dans les conditions de Gauss :

- les rayons lumineux arrivent sur (Σ) avec un angle d'incidence très faible (c'est-à-dire presque parallèlement à l'axe optique);
- le point d'incidence des rayons lumineux demeure très voisin du centre optique du système optique.

Lorsque des rayons lumineux arrivent sur (Σ) parallèlement les uns aux autres, ils proviennent d'un objet situé à l'infini (sur l'axe optique, comme A , ou hors de l'axe optique, comme B) :



De même, des rayons qui émergent de (Σ) parallèlement les uns aux autres forment une image à l'infini.

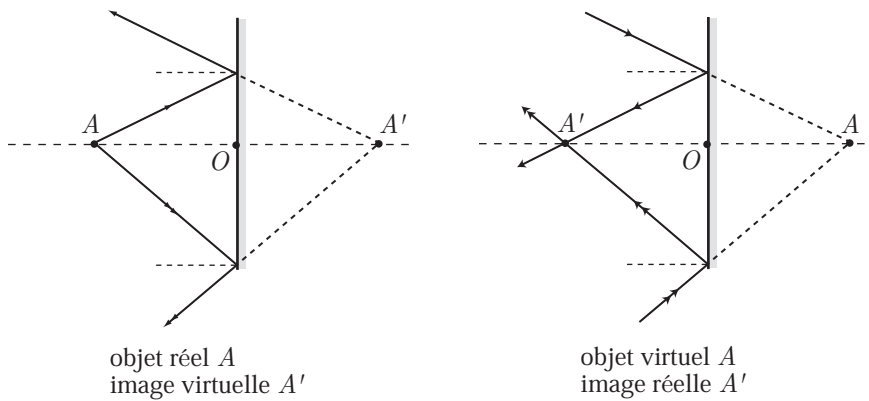


3.2.2 Les miroirs

3.2.2.1 Les miroirs plans

Un miroir plan renvoie les rayons lumineux avec un angle de réflexion r qui s'identifie à l'angle d'incidence.

L'image A' d'un point A est symétrique de A par rapport au miroir plan :



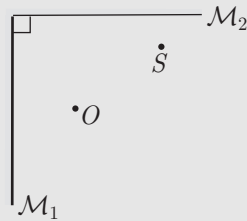
Si O désigne l'intersection entre la droite (AA') et le plan du miroir, les points conjugués sont associés par une *relation de conjugaison* :

$$\overline{OA'} + \overline{OA} = 0$$

Remarque – L'axe optique (AA') est conventionnellement orienté dans le sens de la lumière incidente (vers la droite sur les deux figures précédentes); une valeur algébrique $\overline{OA'}$ est comptée positivement si le déplacement de O vers A' s'effectue dans ce sens (cas du premier schéma) et négativement dans le cas contraire (deuxième schéma).



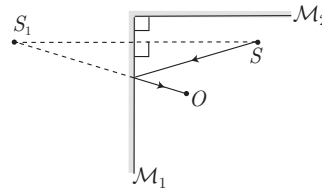
On place deux miroirs plans perpendiculairement :



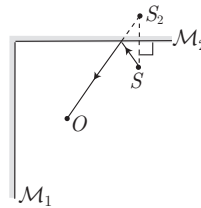
En reproduisant la figure ci-dessus, tracer la marche des rayons issus de S qui arrivent en O après réflexion(s).

RÉPONSE Trois rayons peuvent parvenir en S après réflexion :

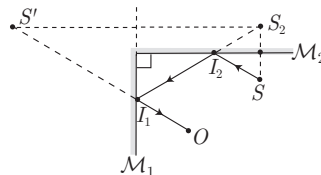
- sur le miroir \mathcal{M}_1 seulement ; ce rayon semble issu de l'image S_1 de S par le miroir \mathcal{M}_1 :



- sur le miroir \mathcal{M}_2 seulement ; ce rayon semble provenir de l'image S_2 de S par \mathcal{M}_2 :



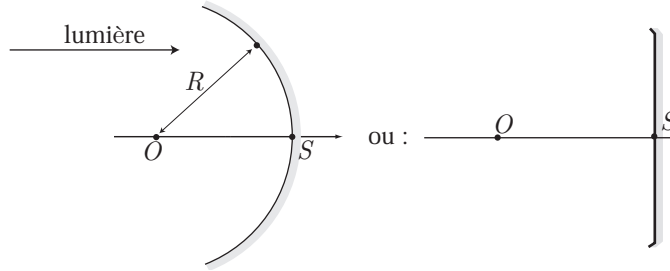
- sur le miroir \mathcal{M}_1 , puis sur le miroir \mathcal{M}_2 . Le rayon issu de S et qui se réfléchit au point I_2 de \mathcal{M}_2 semble provenir de S_2 . Ce rayon se réfléchit ensuite sur \mathcal{M}_1 au point I_1 ; il semble provenir de l'image S' de S_2 par \mathcal{M}_1 et passe par S :



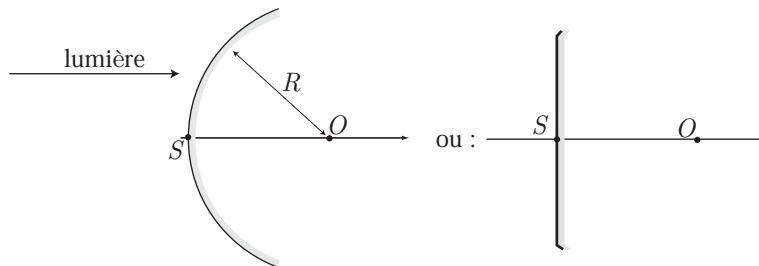
3.2.2.2 Les miroirs sphériques

Caractérisés par leur rayon R , leur centre O et leur sommet S , les miroirs sphériques sont de deux types :

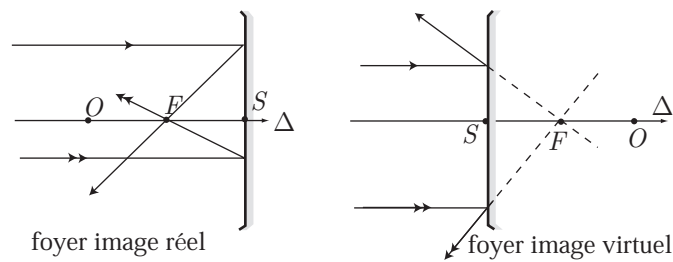
- les miroirs concaves :



- les miroirs convexes :



Définition 8 Un faisceau de rayons incidents, parallèles à l'axe optique Δ , converge en un point F de Δ , appelé foyer image, après réflexion sur le miroir ; si les rayons convergent réellement vers F , ce foyer est réel, tandis qu'il est virtuel dans le cas où seuls les prolongements des rayons réfléchis convergent vers F

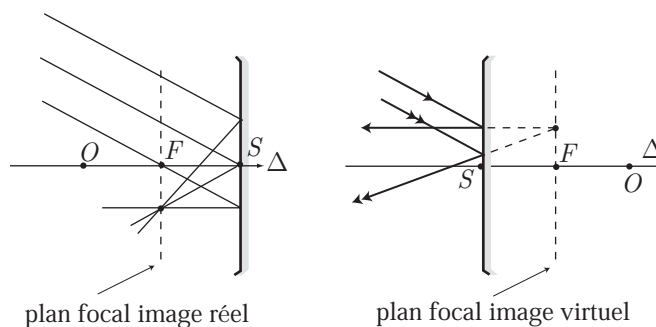


Dans le cas d'un miroir sphérique, F se trouve au milieu de $[OS]$, c'est-à-dire :

$$\overline{OF} = \frac{R}{2} \text{ pour un miroir convexe}$$

$$\overline{OF} = -\frac{R}{2} \text{ pour un miroir concave}$$

Définition 9 Un faisceau incident de rayons parallèles entre eux, mais pas nécessairement parallèles à Δ , convergent, après réflexion, en un point du plan focal image contenant F .



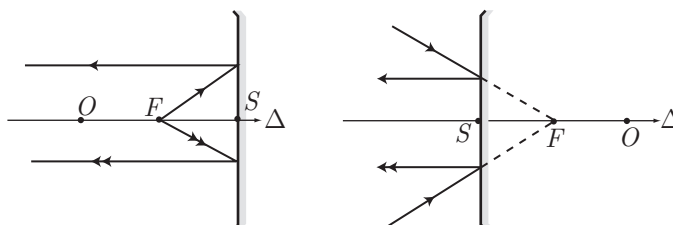
Définition 10 On appelle distance focale la grandeur :

$$f = \overline{OF}$$

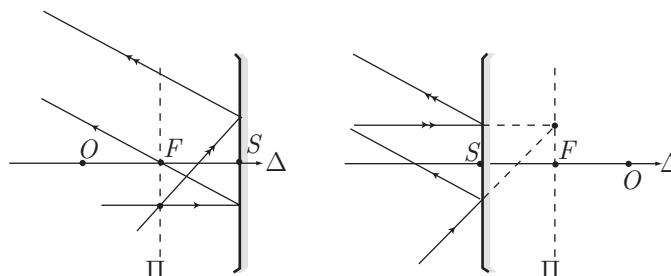
La distance focale d'un miroir concave est positive tandis qu'elle est négative dans le cas d'un miroir convexe.

Remarque – Le principe du retour inverse de la lumière permet de définir :

- le foyer objet F comme étant le point dont sont issus les rayons qui se réfléchissent sur le miroir parallèlement à l'axe optique Δ :

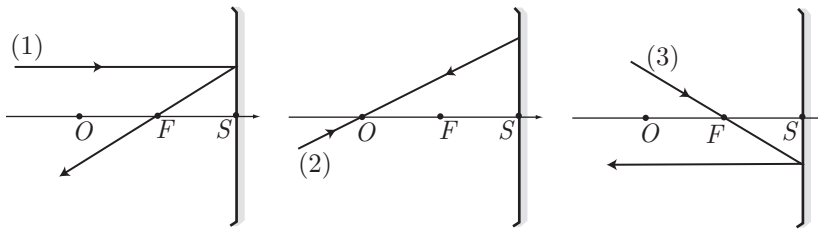


- le plan focal objet Π (auquel appartient F), qui contient tous les points dont sont issus les rayons qui se réfléchissent parallèlement les uns aux autres (mais pas nécessairement parallèlement à Δ).



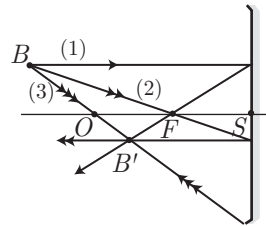
De ces définitions ressortent trois rayons remarquables :

- le rayon (1) qui arrive sur le miroir parallèlement à l'axe optique est réfléchi dans la direction de F (même si seul son prolongement passe par F) ;
- le rayon (2) qui arrive sur le miroir dans la direction du centre O est réfléchi sur lui-même ;
- le rayon (3) qui arrive sur le miroir dans la direction de F est réfléchi parallèlement à l'axe optique.



La construction de deux de ces rayons lumineux permet de trouver l'image B' de tout point B n'appartenant pas à l'axe optique :

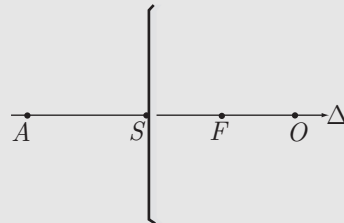
- du point B , tracer deux des trois rayons remarquables ;
- repérer l'intersection des rayons réfléchis ; elle coïncide avec B' .



⚠ Cette construction géométrique ne peut être utilisée pour localiser l'image d'un point A de l'axe optique Δ . Dans ce cas, il convient de choisir un point B tel que $(AB) \perp \Delta$, de déterminer l'image B' de B , puis de projeter perpendiculairement B' sur Δ ; cette projection coïncide avec A' , qui appartient à Δ .

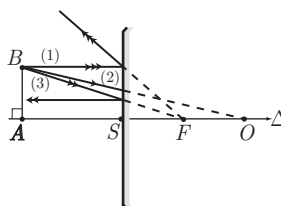


Trouver, à l'aide d'un tracé géométrique, l'image A' qu'un miroir sphérique convexe donne d'un point A de l'axe optique.

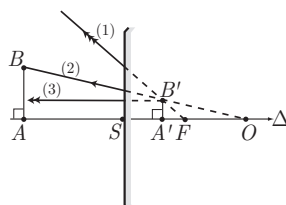


RÉPONSE D'après la mise en garde précédente, il convient d'utiliser l'hypothèse d'aplanétisme pour représenter A' ; on peut considérer un point B hors de l'axe optique Δ , dont sont issus trois rayons remarquables (AB étant perpendiculaire à Δ) :

- le rayon (1) qui arrive sur le miroir parallèlement à l'axe optique Δ est réfléchi en prenant la direction de F (seul son prolongement passe par F , inaccessible aux rayons lumineux);
- le rayon (2), dont le prolongement passe par O est réfléchi sur lui-même;
- le rayon (3) qui arrive sur le miroir dans la direction de F est réfléchi parallèlement à Δ .



Le point d'intersection des rayons réfléchis (et eux seuls !) coïncide alors avec B' , dont la projection sur Δ fournit A' :



Relations de conjugaison et grandissement

Définition 11 Soit $A'B'$ l'image qu'un système optique forme de AB ; le grandissement transversal γ de ce système optique est le rapport de $A'B'$ et AB :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB}$$

Une relation de conjugaison est une relation qui permet de localiser l'image A' (ou l'objet A) dès qu'est connue la position de son objet conjugué A (ou son image conjuguée A'). On dispose ainsi de :

$$\text{la relation de conjugaison de Descartes : } \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF} = \frac{1}{f}$$

et de :

$$\text{la relation de conjugaison de Newton : } \overline{FA} \times \overline{FA'} = f^2$$

auxquelles on peut joindre la relation de conjugaison avec origine au sommet :

$$\frac{1}{SA'} - \frac{1}{SA} = \frac{1}{SF}$$

De même, le grandissement peut s'exprimer à partir du point O ou du point F :

$$\gamma = \frac{OA'}{OA} \quad \gamma = \frac{f}{FA} = \frac{FA'}{f}$$



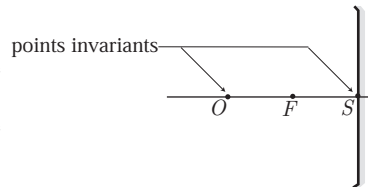
Chercher tous les points invariants de l'axe optique pour un miroir sphérique (points I confondus avec leur propre image).

RÉPONSE Lorsque l'image I est confondue avec son objet conjugué I , la relation de conjugaison de Newton s'écrit :

$$\begin{aligned} \overline{FI} \times \overline{FI} = f^2 &\Rightarrow (\overline{FO} + \overline{OI})^2 = f^2 \\ &\Rightarrow f^2 + 2\overline{FO} \times \overline{OI} + \overline{OI}^2 = f^2 \text{ car } \overline{FO} = -f \\ &\Rightarrow \overline{OI} \times (\overline{OI} + 2\overline{FO}) = 0 \end{aligned}$$

Deux solutions apparaissent alors :

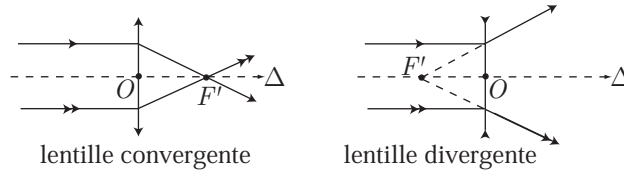
- soit $\overline{OI} = 0$, ce qui signifie que I est confondu avec le centre O du miroir ;
- soit $\overline{OI} = 2\overline{FO}$, auquel cas le point I coïncide avec le sommet S du miroir.



3.2.3 Les lentilles minces

3.2.3.1 Définitions et propriétés

Un faisceau incident de rayons parallèles à l'axe optique Δ , sort de la lentille en convergeant vers le foyer image F' appartenant à Δ ; si ces rayons convergent réellement en F' , la lentille est *convergente* tandis qu'elle est *divergente* lorsque seuls les prolongements de ces rayons convergent en F' .



Définition 12 On appelle *distance focale (image)* la grandeur :

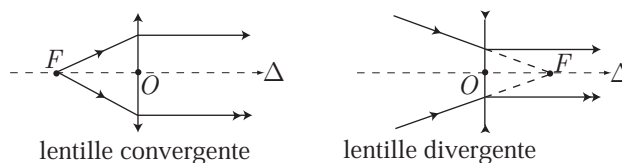
$$f' = \overline{OF'}$$

et *vergence* son inverse :

$$v = \frac{1}{f} \text{ (en dioptries : } \delta \equiv \text{m}^{-1}\text{)}$$

Remarque – La distance focale peut être négative ; c'est d'ailleurs son signe qui distingue les lentilles convergentes ($f' > 0$) des lentilles divergentes ($f' < 0$).

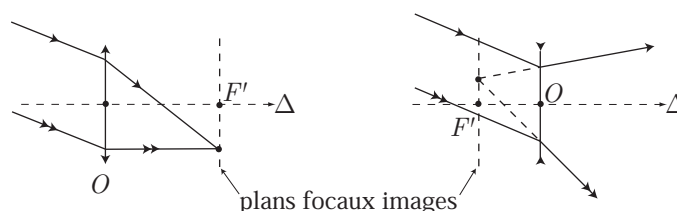
Définition 13 On appelle *foyer objet F* le point de l'axe optique où convergent les rayons incidents qui émergent de la lentille parallèlement à l'axe optique. Si F est réel (les rayons incidents se coupent en F) la lentille est convergente, tandis qu'elle est divergente si F est virtuel (seuls les prolongements des rayons incidents s'y croisent).



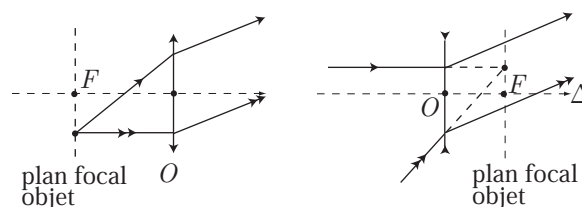
Quelle que soit la nature de la lentille, on n'étudiera que les cas où les foyers F et F' d'une même lentille sont symétriques par rapport au centre optique O :

$$\overline{OF} = -\overline{OF'}$$

Définition 14 Le plan focal image est le plan (auquel appartient F') où se forment toutes les images dont les objets se trouvent à l'infini (les rayons incidents arrivent parallèlement les uns aux autres).



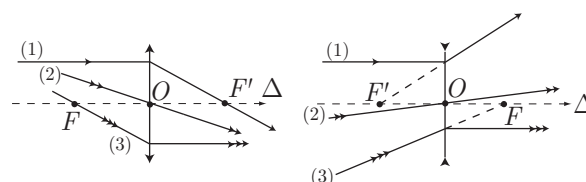
Définition 15 Le plan focal objet d'une lentille contient tous les points objets dont elle forme l'image à l'infini ; ce plan contient F .



3.2.3.2 Constructions géométriques

Trois rayons singuliers peuvent traverser une lentille mince :

- le rayon (1) incident, parallèle à l'axe optique Δ , émerge de la lentille en passant par F' (parfois seul le prolongement du rayon émergent parvient en F') ;
- le rayon (2) qui traverse la lentille en son centre optique O n'est pas dévié ;
- le rayon (3) incident (ou son prolongement) qui intercepte le foyer F émerge de la lentille parallèle à l'axe optique Δ .

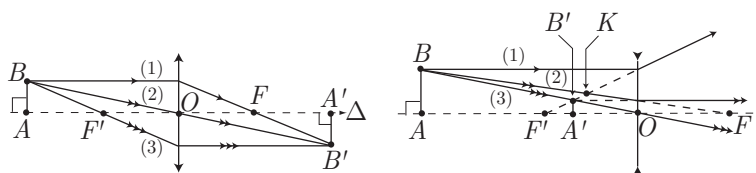


Pour construire graphiquement l'image B' d'un point B n'appartenant pas à l'axe optique, il convient de représenter au moins deux de ces trois rayons remarquables ; l'intersection des rayons émergents coïncide avec B' .

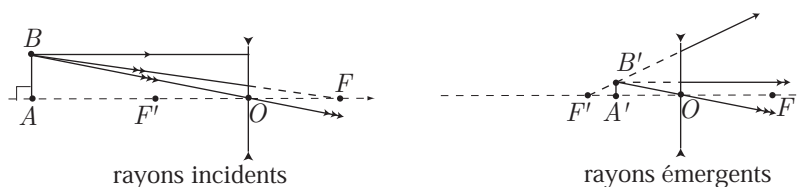


Il n'est pas nécessaire de représenter systématiquement les trois rayons remarquables ; deux suffisent et parfois la représentation du troisième rayon peut rendre la figure trop confuse. En revanche, la présence d'un troisième rayon permet souvent un contrôle rapide de la construction géométrique.

⚠ La méthode graphique présentée ici ne permet pas d'obtenir directement l'image A' d'un point A de l'axe optique Δ . Pour y parvenir, il faut représenter un point B hors de l'axe optique, tel que $(AB) \perp \Delta$ et chercher l'image B' de B . La projection orthogonale de B' sur Δ fournit finalement A' (il s'agit d'une application directe de l'aplanétisme des lentilles minces dans les conditions de Gauss).



⚠ Seule l'intersection des rayons émergents (ou de leurs prolongements) présente un intérêt physique ; par exemple, dans le cas précédent, le point K (intersection d'un rayon incident et d'un rayon émergent) n'a aucune signification physique. Pour éviter cette situation, il est recommandé de distinguer clairement le rôle des rayons incidents et des rayons émergents.



3.2.3.3 Relations de conjugaison et grandissement

À l'instar des miroirs sphériques, la localisation de l'image $A'B'$ d'un objet AB , ainsi que sa taille et son sens, sont fournies par des relations de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OF'}} \quad (\text{relation de Descartes})$$


$$\overline{FA} \times \overline{F'A'} = \overline{FO} \times \overline{F'O'} = -f'^2 \quad (\text{relation de Newton})$$

et par le grandissement $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$:

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{f'}{\overline{FA}}$$

$$\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$$

 Soit \mathcal{L} une lentille mince divergente, de centre optique O et de foyers objet F et image F' . Sa distance focale image est définie par $f' = \overline{OF'}$. \mathcal{L} donne d'un objet AB une image $A'B'$ dans le même sens que AB mais deux fois plus grande.

1. Localiser, sur l'axe optique, la position des points A et A' .
2. Confirmer ce résultat par une construction géométrique.

RÉPONSE

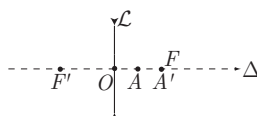
1. L'image $A'B'$ ayant le même sens que l'objet AB , les grandeurs $\overline{A'B'}$ et \overline{AB} sont de même signe, de sorte que le grandissement transversal s'exprime par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{A'B'}{AB} = 2 \Rightarrow \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = 2$$

car $A'B'$ est deux fois plus grand que AB . Quant à la relation de Descartes, elle fournit :

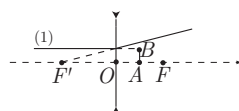
$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} &= \frac{1}{\overline{OF'}} \Rightarrow \frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}} - 1 = \frac{\overline{OA}}{\overline{OF'}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{\overline{OA}}{\overline{OF'}} \text{ avec } \gamma = 2 \\ &\Rightarrow \overline{OA} = -\frac{1}{2} \overline{OF'} = \frac{1}{2} \overline{OF} \\ &\Rightarrow \overline{OA'} = \gamma \overline{OA} = \overline{OF} \end{aligned}$$

Par suite, A' est confondu avec O .

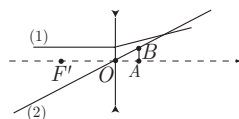


2. Considérons l'objet AB situé au milieu du segment $[OF]$ et cherchons l'image $A'B'$ associée, par construction géométrique des trois rayons remarquables :

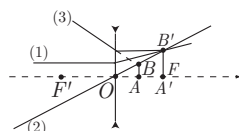
- Le rayon (1) incident, parallèle à l'axe optique et dont le prolongement passe par B , ressort de la lentille dans la direction de F' (en fait seul le prolongement du rayon émergent peut réellement passer par F') :



- Le rayon (2) incident qui traverse \mathcal{L} en O et qui passe par B n'est pas dévié par la lentille :



- le rayon (3) incident, dont le prolongement passe simultanément par B et F émerge de la lentille parallèlement à l'axe optique :

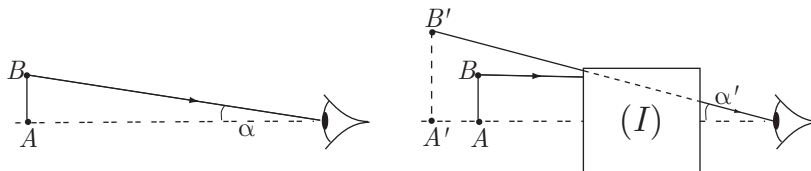


L'intersection de ces trois rayons émergents forme B' , dont la projection orthogonale sur l'axe optique coïncide avec A' . Cette construction géométrique confirme d'une part que A' est confondu avec F , et d'autre part que $A'B'$ est deux fois plus grand, et dans le même sens que AB .

3.3 Quelques instruments d'optique

Définition 16 Un objet AB étant observé à l'œil nu sous un angle α et à travers un instrument d'optique (I) , sous un angle α' , on appelle G le grossissement de cet instrument le rapport :

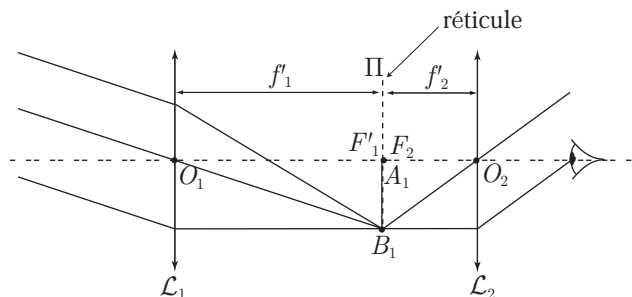
$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}$$




3.3.1 Lunette de visée à l'infini

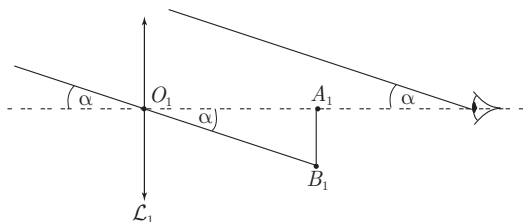
Une lunette de visée à l'infini est composée :

- d'un objectif qui recueille les rayons lumineux (parallèles entre-eux) provenant d'un objet AB situé à l'infini ; cet objectif, assimilé à une lentille \mathcal{L}_1 de distance focale image f'_1 , forme de AB une image A_1B_1 dans le plan focal image (II) de \mathcal{L}_1 .
- d'un oculaire, assimilé ici à une lentille convergente (\mathcal{L}_2) de distance focale image f'_2 , qui forme de A_1B_1 une image $A'B'$ à l'infini, observable par l'œil normal (un œil dont le PR ne se trouverait pas situé à l'infini utiliserait la lunette avec $A'B'$ dans le plan de son PR).
- d'un réticule (croix ou graduation gravée dans une mince plaque transparente), situé dans le plan II ; l'oculaire en forme alors une image superposée à celle, $A'B'$, de AB , située également sur II.

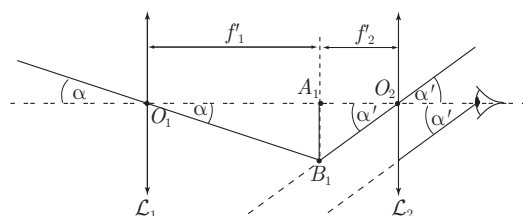


 En isolant des rayons remarquables passant par B_1 , exprimer le grandissement G de la lunette de visée à l'infini, en fonction de f'_1 et f'_2 .

RÉPONSE Parmi tous les rayons parallèles qui arrivent sur la lunette, celui qui passe par le centre optique O_1 de \mathcal{L}_1 n'est pas dévié et sa direction, repérée par l'angle α qu'il fait avec l'axe optique, est aussi celle des rayons qui, issus de B , arriveraient dans l'œil en l'absence de lunette.



Du point B_1 est aussi issu un rayon qui traverse l'oculaire \mathcal{L}_2 en O_2 sans être dévié ; sa direction, repérée par l'angle α' qu'il fait avec l'axe optique, est aussi celle où l'œil devra observer l'image B' .



Dans les triangles $O_1A_1B_1$ et $O_2A_1B_1$ sont alors définis les angles α et α' tels que :

$$\tan \alpha = \frac{A_1B_1}{O_1A_1} = \frac{A_1B_1}{f'_1} \quad \text{et} \quad \tan \alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2A_1} = \frac{A_1B_1}{f'_2}$$

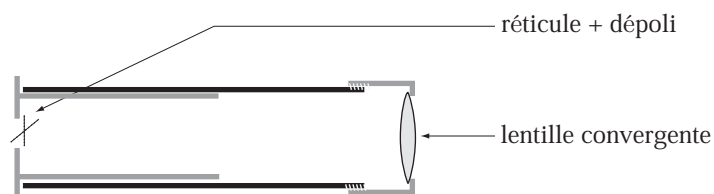
Or, les conditions de Gauss imposent à α et α' d'être suffisamment petits pour que $\tan \alpha \simeq \alpha$ et $\tan \alpha' \simeq \alpha'$:

$$\alpha = \frac{A_1B_1}{f'_1} \quad \text{et} \quad \alpha' = \frac{A_1B_1}{f'_2}$$

Par suite, le grandissement de cette lunette vaut :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{A_1B_1}{f'_2} \times \frac{f'_1}{A_1B_1} \Rightarrow G = \frac{f'_1}{f'_2}$$

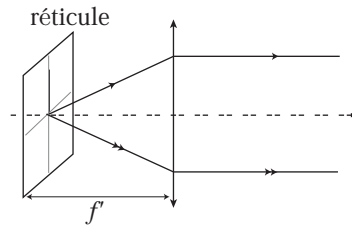
3.3.2 Collimateur



Le collimateur est composé :

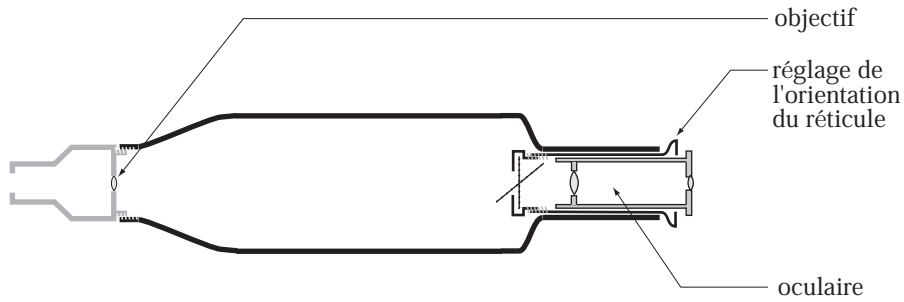
- d'une ouverture où pénètre la lumière. Derrière cette ouverture est parfois placé un réticule ;
- d'une lentille convergente, dont le plan focal objet contient soit l'ouverture, soit le réticule lorsqu'il existe.

Cet instrument sert à former de l'ouverture (ou du réticule) une image à l'infini.

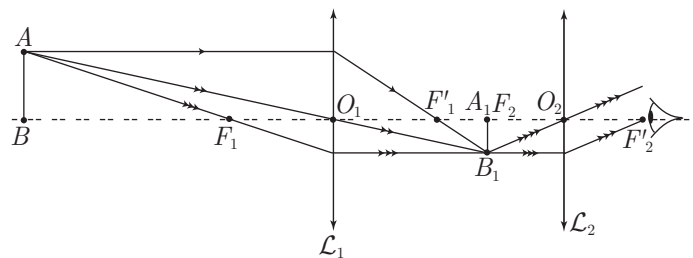



3.3.3 Viseur

Le viseur est une lunette (munie d'un objectif et d'un oculaire) qui sert à observer l'image d'un objet AB qui n'est pas situé à l'infini.



L'image A_1B_1 de AB par la lentille \mathcal{L}_1 (objectif) se forme dans le plan focal objet de l'oculaire \mathcal{L}_2 , qui permet une observation à l'infini sans accommodation de l'œil.

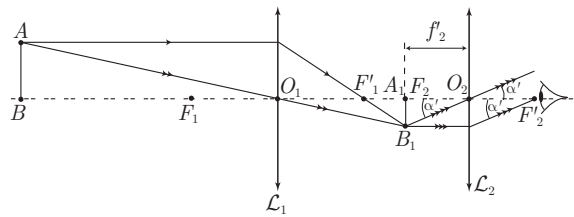


 Un viseur permet de former, à l'infini, l'image $A'B'$ d'un objet AB située à une distance d de l'objectif \mathcal{L}_1 . On note α' l'angle sous lequel l'œil observe cette image, γ_1 le grandissement du \mathcal{L}_1 et f'_2 la distance focale image de l'oculaire \mathcal{L}_2 .

1. Représenter, sur un schéma, ces diverses grandeurs, ainsi que l'image A_1B_1 que \mathcal{L}_1 forme de AB .
2. Trouver, en fonction de γ et f'_2 , l'expression de la puissance de ce viseur, définie par $P = \frac{\alpha'}{AB}$.

RÉPONSE

1. Il suffit de reprendre le schéma représenté ci-dessus et d'y faire apparaître α' et f'_2 :



2. D'une part la définition du grandissement γ_1 conduit à :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} \Rightarrow |\gamma_1| = \frac{A_1B_1}{AB} \Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{|\gamma_1|}{A_1B_1}$$

et d'autre part le triangle $(O_2A_1B_1)$ introduit l'angle α' tel que :

$$\tan \alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2A_1} = \frac{A_1B_1}{f'_2} \Rightarrow \alpha' \simeq \tan \alpha' = \frac{A_1B_1}{f'_2}$$

C'est pourquoi la puissance de viseur est donnée par :

$$P = \frac{\alpha'}{AB} = \frac{A_1B_1}{f'_2} \times \frac{|\gamma_1|}{A_1B_1} \Rightarrow P = \frac{|\gamma_1|}{f'_2}$$

● 78

Q.C.M.

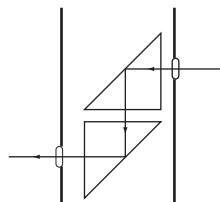
5 min.

Réflexion totale

MPSI-PCSI-PTSI

Un périscope est constitué de deux prismes à réflexion totale jouant le rôle de miroirs. Par accident, de l'eau s'accumule dans le tube jusqu'à noyer le prisme inférieur. L'utilisateur ne voit plus parce que :

1. l'eau absorbe trop de lumière ;
2. l'image sort du champ de vision de l'observateur ;
3. les rayons sont réfléchis sur la surface libre de l'eau ;
4. la lumière ne subit plus de réflexion totale sur le prisme inférieur.



Données : indices de réfraction de quelques milieux :

$$\text{air} : n_a = 1 \quad \text{eau} : n_e = 1,3 \quad \text{verre} : n_v = 1,5$$

● 79

Lycée Pissarro, Pontoise

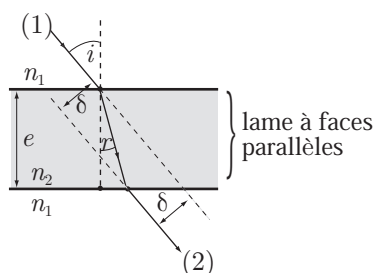
10 min.

Réfraction de la lumière

MPSI-PCSI-PTSI

On assimile une lame à faces parallèles à un milieu transparent d'indice n_2 inséré dans un autre milieu transparent d'indice n_1 ; on posera $n = \frac{n_2}{n_1}$ l'indice de réfraction relatif correspondant.

1. Montrer que les rayons (1) et (2) sont parallèles.
2. Établir la relation donnant la translation δ en fonction de l'épaisseur e de la lame et des angles i et r .
3. En déduire que lorsque i est suffisamment petit :



$$\delta \simeq e \times \frac{n-1}{n} \times i$$

● 80

Lycée Livet, Nantes

15 min.

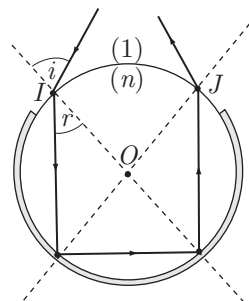
Réflexion et réfraction de la lumière

MPSI-PCSI-PTSI

Un cylindre en verre d'indice n , d'axe (Δ), est entouré d'air d'indice 1. Ce cylindre est argenté sur sa partie arrière de manière à réfléchir la lumière.

Un rayon incident pénètre en I dans le cylindre, subit deux réflexions dans le cylindre et ressort en J .

1. Calculer la déviation D , c'est-à-dire l'angle que font les directions des rayons incident et émergent, en fonction des angles i et r .
2. Étudier les variations de D lorsque l'angle d'incidence i en I varie. Calculer notamment la valeur maximum de D .



Application numérique : $n = 1,5$

81 Lycée Poincaré, Nancy

15 min.

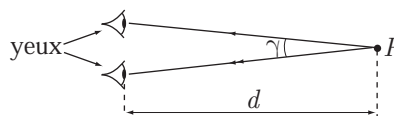
Réfraction de la lumière

MPSI-PCSI-PTSI

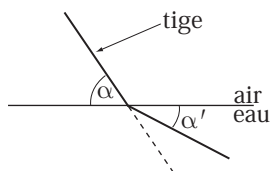
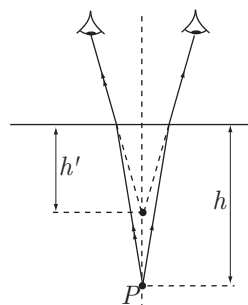
On admet que l'évaluation des distances est une conséquence de la vision stéréoscopique, chez l'homme.

Compte tenu de l'écart entre les yeux d'un individu et la distance d qui les sépare d'un point P observé, on supposera valable l'approximation des petits angles :

$$\sin \gamma \simeq \gamma \text{ et } \tan \gamma \simeq \gamma$$



1. Un point lumineux P est immergé à une profondeur h dans l'eau, d'indice de réfraction $n = 1,33$. Un observateur, placé dans l'air (d'indice de réfraction égal à 1), à la verticale de ce point semble l'apercevoir à une profondeur h' . L'observateur aperçoit néanmoins P' . Trouver l'expression de h' en fonction de h et de n .
2. Une tige est partiellement immergée dans cette eau et fait, dans l'air, un angle $\alpha = 45^\circ$ par rapport à l'horizontale. Un observateur situé dans l'air estime que la tige présente, dans l'eau, un segment linéaire d'angle α' par rapport à l'horizontale :



Donner la valeur de α' .

82 Concours ENSI

20 min.

Réfraction et réflexion totale

MPSI-PCSI-PTSI

I- Les lois de Descartes

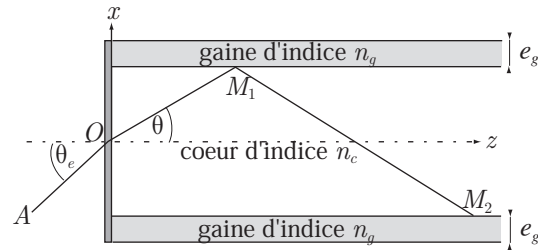
On considère deux milieux transparents semi-infinis d'indices optiques n_1 et n_2 , séparés par une frontière plane.

indice n_1	milieu 1
indice n_2	milieu 2

1. Donner les lois de Descartes relatives à la réfraction pour un rayon venant du milieu 1. On notera i_1 l'angle d'incidence et i_2 l'angle réfracté.
2. On considère maintenant le cas $n_1 > n_2$.
Démontrer que lorsque i_1 est supérieur à un angle i_{\max} , le rayon ne peut pas se propager dans le milieu 2.
3. Donner l'expression de i_{\max} en fonction de n_1 et n_2 .
4. Que se passe-t-il alors pour un rayon d'incidence supérieure à i_{\max} ?

II- Propagation dans une fibre optique : aspect géométrique

Dans la suite, on considère le modèle simple de la fibre optique suivant :



Un cylindre d'indice n_c et de rayon a , dénommé le cœur de la fibre, est entouré d'un milieu d'indice n_g plus faible ($n_c > n_g$) d'épaisseur e_g , dénommé gaine de la fibre. La fibre est placée dans l'air d'indice optique égal à 1.

On ne considère, dans ce problème, que les rayons lumineux se propageant dans le plan Oxz (plan de la feuille).

1. On considère un rayon lumineux se propageant de O vers M_1 dans le cœur en faisant un angle θ avec l'axe Oz (voir la figure).
 - (a) Pour quelles valeurs de θ le rayon est-il totalement réfléchi au point M_1 ?
 - (b) Que se passe-t-il alors au point M_2 ?
2. On considère maintenant le rayon se propageant de A vers O dans l'air, en faisant un angle θ_e avec l'axe Oz (voir la figure).
 - (a) Exprimer la valeur maximale de θ_e , notée $\theta_{e_{\max}}$, pour laquelle le rayon est totalement réfléchi au point M_1 .
 - (b) Calculer la valeur numérique de $\theta_{e_{\max}}$ pour $n_c = 1,53$ et $n_g = 1,49$.

III- Propagation dans une fibre optique : aspect dynamique

On suppose qu'une lampe émet des impulsions lumineuses à une fréquence f . De plus, on considère que ces impulsions lumineuses ont une durée très brève devant leur période.

1. On considère un rayon lumineux issu d'une impulsion de cette source et pénétrant à l'instant $t = 0$ dans la fibre optique (en $z = 0$) sous l'incidence $\theta_e = 0$. Calculer alors le temps mis par ce rayon pour parcourir une longueur L de la fibre.
2. On considère maintenant le rayon pénétrant (en $z = 0$), à l'instant $t = 0$, dans la fibre optique sous l'incidence $\theta_e = \theta_1$ définie par :

$$\sin \theta_1 = n_c \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}}$$

Calculer alors le temps mis par ce rayon pour parcourir la longueur L de fibre.

3. Dans la pratique, une impulsion lumineuse issue de la lampe et incidente sur la fibre (en $z = 0$) se traduit par un cône de rayons arrivant à l'instant $t = 0$ suivant toutes les incidences $0 < \theta_e < \theta_1$. Calculer alors la différence Δt entre les durées de propagation des rayons correspondant à $\theta_e = \theta_1$ et $\theta_e = 0$, pour une longueur de fibre égale à L .

4. La grandeur Δt s'appelle l'*élargissement temporel* de l'impulsion lumineuse au bout d'une distance de propagation L . Au bout de quelle distance L_1 y a-t-il recouvrement des impulsions ?

● **83**

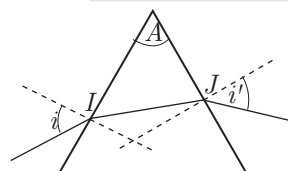
Concours ESIGETEL

30 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Réfraction

Un *spectroscope* est un appareil destiné à étudier le spectre d'une source lumineuse. Un collimateur permet de réaliser un faisceau de rayons parallèles qui va éclairer un prisme. Un viseur permet ensuite d'étudier la lumière ayant traversé le prisme.



Le prisme utilisé est caractérisé par un indice n qui dépend de la longueur d'onde. Sa section est un triangle d'angle A . Le prisme est placé dans l'air dont l'indice sera pris égal à 1. Un rayon rencontre une face au point I sous l'angle d'incidence i et ressort par l'autre face au point J sous l'angle i' :

- On suppose d'abord la lumière monochromatique et l'indice du prisme égal à n .
 - Écrire les lois de Snell-Descartes en I et J et la condition d'émergence en J . En déduire que A doit être inférieur à une valeur limite A_0 , pour qu'il existe au moins un rayon émergent. On suppose désormais cette condition réalisée.
 - Calculer l'angle de déviation D , en fonction de i , i' et A .
 - Déterminer la valeur i_0 de i correspondant à un minimum de déviation, en fonction de n et A . Calculer alors la déviation minimum D_m .
 - En déduire que l'on peut calculer n avec la relation :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

- On éclaire le prisme avec une lampe à vapeur de mercure, pour laquelle on a mesuré D_m pour différentes longueurs d'onde et obtenu les valeurs de n correspondantes :

λ (μm)	0,404 7	0,435 8	0,491 6	0,546 1	0,577 0
n	1,803	1,791	1,774	1,762	1,757
$\frac{1}{\lambda^2}$ (μm^{-2})	6,11	5,27	4,14	3,35	3,00

- Montrer que n peut se mettre sous la forme :

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

où a et b sont des constantes.

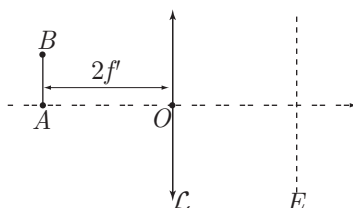
- Pour une lampe à vapeur de cadmium, on mesure un indice égal à $n = 1,777$. En déduire la longueur d'onde et la couleur correspondantes.

● **84** ————— **Concours Centrale-Supélec**
5 min.

Lentilles minces

MPSI-PCSI-PTSI

On forme, à l'aide d'une lentille mince \mathcal{L} convergente, de centre O , de distance focale image f' , l'image $A'B'$ d'un objet AB sur un écran E . La distance de AB à \mathcal{L} est égale à $2f'$.



Où doit-on placer l'écran E pour obtenir une image nette ?
Comparer la taille de l'image à celle de l'objet.

● **85** ————— **Lycée Clémenceau, Reims**
10 min.

Lentilles minces

MPSI-PCSI-PTSI

On considère une lentille mince convergente de distance focale image f' . Elle est placée dans l'air dont on suppose l'indice absolu égal à l'unité.

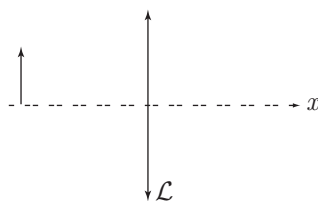
1. Pour quelles positions de l'objet cette lentille donne-t-elle d'un petit objet réel AB , perpendiculaire à l'axe optique principal, une image $A'B'$ visible sur un écran E perpendiculaire à l'axe optique principal ?
2. Applications numériques : calculer la position de l'écran si AB est à 0,2 m du centre optique O de la lentille et $f' = 10$ cm. Quelle est, dans ce cas, la taille de l'image si AB mesure 1 mm ?
3. Vérifier les calculs par construction géométrique.

● **86** ————— **Concours ESIGETEL**
15 min.

Lentilles minces

MPSI-PCSI-PTSI

On considère une lentille mince et on oriente l'espace de la façon suivante :



On négligera les phénomènes de diffraction.

1. **Introduction**

On considère une lentille convergente de centre optique O , de foyers objet F et image F' .

On note $f' = \overline{OF'}$ sa distance focale image.

On pose $x = \overline{OA}$ et $x' = \overline{OA'}$, A' étant l'image d'un objet A ponctuel sur l'axe optique.

(a) Construire l'image d'un objet transversal AB situé à $1,5 \times f'$ avant la lentille.

Estimer, à l'aide du schéma, le grandissement transversal $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

(b) Exprimer le grandissement transversal en fonction de \overline{FA} et f' , puis $\overline{F'A'}$ et f' .

2. Méthode de Silberman

On se propose de déterminer, expérimentalement, la valeur de la distance focale f' d'une lentille convergente.

(a) Montrer qu'il existe un unique couple de plans conjugués pour lequel le grandissement vaut -1 . Déterminer les valeurs de x et x' correspondantes.

(b) On obtient, expérimentalement, un grandissement de -1 lorsque l'objet et l'image sont distants de 1 m. En déduire la distance focale de la lentille.

3. Méthode de Bessel

L'objet A et l'image A' sont fixés à une distance D l'un de l'autre, on cherche les positions du centre O de la lentille permettant de les conjuguer.

(a) Montrer qu'il existe deux positions O_1 et O_2 de la lentille réalisant cette conjugaison.

En déduire la distance a entre O_1 et O_2 en fonction de D et f' . Quelle condition doit vérifier D pour que ces positions existent ?

(b) On obtient, expérimentalement, $a = 0,50$ m pour $D = 1,2$ m. En déduire f' .

(c) Que pensez-vous de la précision de ces déterminations ?

● 87 ————— Lycée Amyot, Melun

15 min.

Lentilles minces

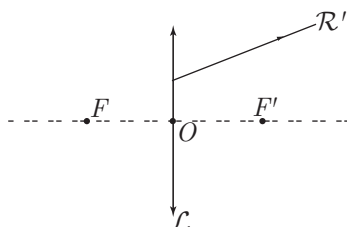
MPSI-PCSI-PTSI

On considère une lentille mince \mathcal{L} utilisée dans les conditions de Gauss. Elle est caractérisée par son centre optique O , sa distance focale image f' et ses foyers objet et image qui sont notés respectivement F et F' .

La formule de conjugaison de Descartes (relation 1) précise la position, sur l'axe optique, des points conjugués A et A' :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad (1)$$

1. \mathcal{L} est une lentille convergente et \mathcal{R}' un rayon émergent, non parallèle à l'axe optique. Recopier approximativement la figure ci-contre et proposer une construction géométrique du rayon incident \mathcal{R} correspondant.



2. On souhaite déterminer, expérimentalement, la distance focale image f' de la lentille \mathcal{L} . Pour cela, on effectue le relevé, sur un banc d'optique gradué, des positions sur l'axe : du centre optique O , du point objet lumineux A et de son image A' . Les résultats sont consignés dans le tableau suivant :

\overline{AO} (cm)	24,0	26,0	28,0	30,0	32,0	34,0	36,0	38,0
$\overline{OA'}$ (cm)	120	86,7	70,2	60,2	53,1	48,6	45,2	42,2

- (a) Exploiter les résultats du tableau pour vérifier la formule de Descartes (1).
 (b) En déduire la valeur numérique de la distance focale image f' .

88 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

15 min.

Lentilles minces

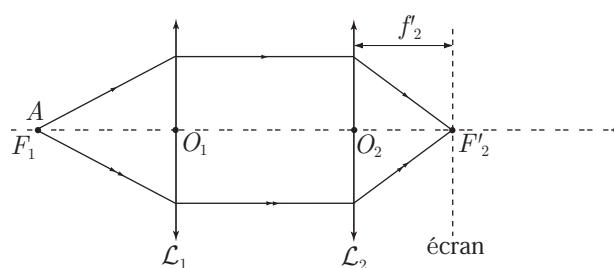
MPSI-PCSI-PTSI

On dispose, dans un laboratoire, de trois lentilles minces :

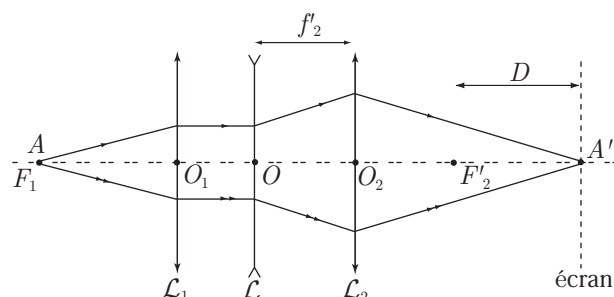
- une lentille convergente \mathcal{L}_1 , de distance focale image f'_1 connue et de centre optique O_1 ;
- une lentille convergente \mathcal{L}_2 , de distance focale image f'_2 connue et de centre optique O_2 ;
- une lentille divergente \mathcal{L} , de distance focale image f' inconnue et de centre optique O .

Afin de déterminer f' , on met en œuvre l'expérience suivante (appelée *méthode de Badal*) :

- Un objet ponctuel lumineux A est placé au foyer objet de \mathcal{L}_1 et son image par \mathcal{L}_2 est projetée sur un écran situé à une distance f'_2 de \mathcal{L}_2 :



- La lentille \mathcal{L} est intercalée entre \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 ; il est alors nécessaire de reculer l'écran d'une distance D pour y recevoir l'image nette A' de A :



Montrer que la distance focale f' est alors calculable par la formule :

$$f' = -\frac{(f'_2)^2}{D} \text{ si } \overline{OO_2} = f'_2$$

● 89 ————— Concours E.N.S.T.I.M.

20 min.

Miroirs sphériques

MPSI-PCSI-PTSI

On admet qu'au niveau du sol, une surface Σ orientée perpendiculairement aux rayons solaires, reçoit du Soleil une puissance par rayonnement P_R égale à $\pi_0 \times \Sigma$, avec $\pi_0 = 1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$. Le principe d'une centrale thermo-solaire est le suivant : le rayonnement solaire, concentré par un grand miroir sphérique, apporte de l'énergie thermique à une chaudière qui sert de source chaude à un moteur ditherme entraînant un générateur électrique.

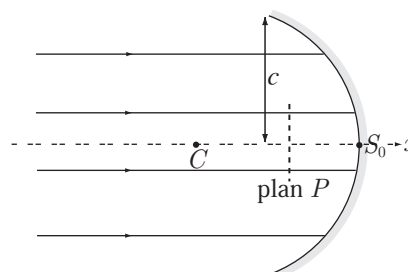
1. Rappel sur les miroirs sphériques

Soit un miroir sphérique de centre C , de sommet S et d'axe principal (Cx) , utilisé dans les conditions de Gauss.

- Qu'appelle-t-on foyer principal d'un miroir sphérique ? Préciser sa position et illustrer sa propriété par une figure, pour un miroir concave puis un miroir convexe.
- Indiquer rapidement une méthode expérimentale permettant de déterminer la position du foyer d'un miroir concave. Indiquer aussi une méthode expérimentale permettant de déterminer rapidement le caractère concave ou convexe d'un miroir sphérique.

2. Étude de la concentration du rayonnement solaire

La concentration du rayonnement solaire est réalisée par un grand miroir sphérique concave, de sommet S_0 , de centre C , de rayon de courbure $R_0 = CS_0$ et de rayon d'ouverture c (le *rayon d'ouverture* est le rayon de base de la calotte sphérique effectivement réfléchissante), représenté sur la figure ci-contre. Ce miroir est orientable, si bien que le centre O du Soleil est constamment situé sur son axe principal (Cx) . On admet que les conditions de Gauss sont vérifiées.



Données numériques :

- rayon de courbure du miroir : $R_0 = 40$ m
 - rayon d'ouverture : $c = 5,6$ m
 - rayon du Soleil : $a_s = 7,1 \cdot 10^8$ m
 - rayon moyen de l'orbite terrestre : $R = 1,50 \cdot 10^{11}$ m
- (a) Sur le schéma ne sont représentés que les rayons solaires parallèles à l'axe optique du miroir. Exprimer, en fonction de a_s (rayon du Soleil) et de R (distance Soleil-Terre), l'inclinaison maximale α par rapport à l'axe optique des rayons tombant sur le miroir ; effectuer l'application numérique.
- (b) Préciser la position du plan (P) sur lequel se formera l'image géométrique du Soleil et réaliser la construction géométrique de cette image. Préciser son rayon a' .
- (c) Le miroir est parfaitement réfléchissant. Quelle est la puissance rayonnée P_R incidente sur le plan (P) au niveau de l'image du Soleil ? On négligera la faible partie du faisceau incident qui aura été arrêtée par (P) avant réflexion.

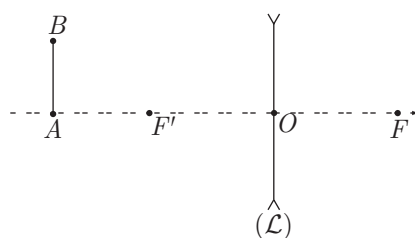
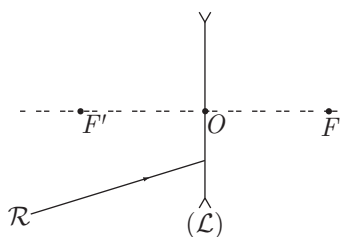
● **90** **Lycée Roosevelt, Reims**
20 min.

Lentilles minces

MPSI-PCSI-PTSI

Une lentille mince divergente \mathcal{L} , de centre optique O et de distance focale image f' est utilisée dans le cadre de l'approximation de Gauss. Les foyers objet et image sont notés respectivement F et F' .

1. On considère un rayon incident \mathcal{R} non parallèle à l'axe optique de \mathcal{L} . Recopier approximativement la figure ci-contre et proposer une construction géométrique du rayon émergent \mathcal{R}' correspondant.
2. On choisit un point A sur l'axe optique et un objet réel AB orthogonal à l'axe, tels que $\overline{AF'} > 0$ (figure ci-dessous).
 - (a) Recopier approximativement cette figure et proposer une construction géométrique de l'image $A'B'$ correspondante.



- (b) Quelle est la nature de l'image $A'B'$?
3. Application numérique : $f' = -5$ cm et $\overline{AO} = 7,5$ cm.
 - (a) Calculer $\overline{A'O}$.

- (b) Calculer la valeur du grandissement linéaire défini par : $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$.

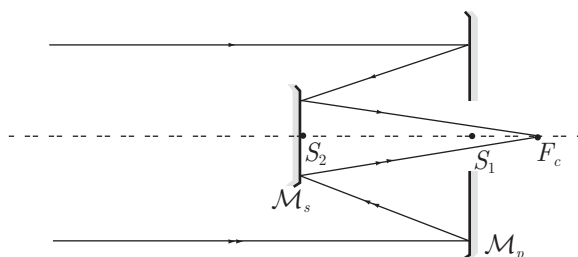
● **91** **Concours ENSI**
5 min.

Instruments d'optique

MPSI-PCSI-PTSI

L'objectif d'un télescope est constitué d'un miroir primaire sphérique \mathcal{M}_p concave, dont le rayon de courbure sur l'axe optique est de 30 m, et d'un petit miroir sphérique

\mathcal{M}_s , convexe, de rayon de courbure 32 m. La distance entre les sommets S_1 et S_2 des deux miroirs est 9 m



1. Où se trouve le foyer image F_p du miroir primaire \mathcal{M}_p ?
2. Quelle est, par rapport au sommet S_2 du miroir secondaire \mathcal{M}_s , la position de l'image F_c que donne \mathcal{M}_s de F_p ?
En déduire la distance qui sépare F_c du sommet S_1 du miroir primaire.

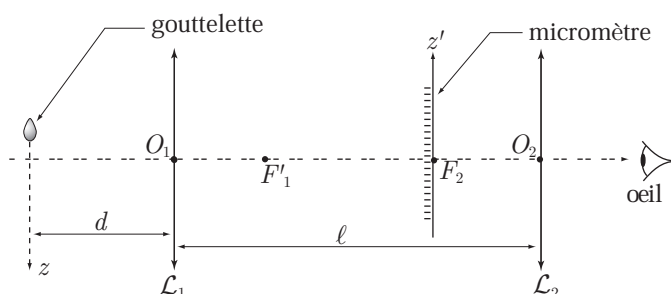
● 92 ————— Lycée Hoche, Versailles

10 min.

Instruments d'optique

MPSI-PCSI

Une lunette de visée est utilisée pour mesurer la vitesse verticale de chute de gouttelettes d'huile. Elle peut être schématisée par un système de deux lentilles convergentes : l'objectif \mathcal{L}_1 de distance focale image f'_1 et l'oculaire \mathcal{L}_2 de distance focale f'_2 . Dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 , on a placé un micromètre (échelle graduée dont deux graduations consécutives sont espacées d'une distance ε mètre).



L'observateur n'accorde pas et voit donc net un objet à l'infini. La longueur ℓ de la lunette est réglée de telle façon qu'une gouttelette située à la distance d de l'objectif est vue nette à travers la lunette.

1. Pourquoi le micromètre est-il placé dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 ?
Pourquoi est-il nécessaire de placer l'œil à proximité de l'oculaire ?
2. Quelle relation entre d , ℓ , f'_1 et f'_2 traduit le réglage de netteté de la lunette ?
3. (a) On repère la position verticale z de la gouttelette par la graduation z' lue sur le micromètre. Quelle est l'expression de la vitesse verticale v d'une gouttelette si, pendant une durée τ , elle s'est déplacée de $\Delta z'$ graduations ? On exprimera cette vitesse en fonction de $\Delta z'$, τ , d , ℓ , ε et f'_2 .

- (b) Déterminer les valeurs de d et ℓ , sachant que $f'_1 = 2$ cm, $f'_2 = 0,5$ cm et qu'en $\tau = 10$ s le déplacement $\Delta z'$ mesuré sur le micromètre, correspondant à une gouttelette de vitesse $0,01 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$, est de $0,5$ mm.

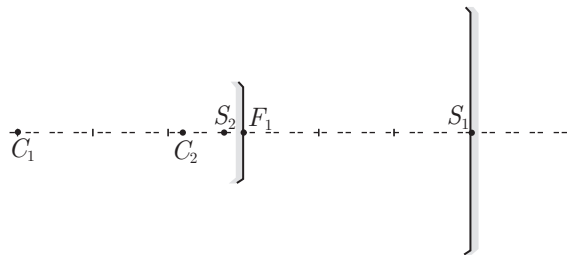
● **93** **Concours ENSI**

15 min.

Instruments d'optique

MPSI-PCSI-PTSI

On considère un système optique (de type objectif de télescope) constitué d'un miroir principal sphérique concave (centre C_1 , sommet S_1 , avec $\overline{C_1S_1} = R_1 = 6$ m) et d'un miroir secondaire sphérique convexe (centre C_2 , sommet S_2 , avec : $\overline{C_2S_2} = R_2 = 60$ m).



F_1 étant le foyer associé au premier miroir, on supposera que l'on a en outre : $\overline{S_2F_1} = 20$ cm.

À l'aide d'un tel dispositif, on observe un objet lumineux infiniment éloigné et de diamètre apparent $\phi = 0,5^\circ$.

Déterminer les caractéristiques (position, dimension) de l'image fournie par ce système optique.

● **94** **Lycée Pissarro, Pontoise**

15 min.

Instruments d'optique

MPSI-PCSI-PTSI

Soit α l'angle sous lequel un observateur voit, à l'œil nu, un objet réel AB orthogonal à l'axe et situé à l'infini (α est appelé *diamètre apparent* de l'objet AB). Le point A appartient à l'axe.

Afin de mieux observer cet objet, on utilise une lunette constituée de deux lentilles : \mathcal{L}_1 (objectif convergent de distance focale image f'_1) et \mathcal{L}_2 (oculaire divergent de distance focale image f'_2).

La distance e séparant les deux lentilles est réglée pour qu'un œil normal n'ait pas à accommoder lorsqu'il observe, à travers la lunette, l'image d'un objet situé à l'infini.

1. Exprimer $e = \overline{O_1O_2}$ en fonction des valeurs algébriques f'_1 et f'_2 .
2. Faire un schéma et tracer la marche d'un faisceau de rayons issus de B , point à l'infini n'appartenant pas à l'axe.
3. Soit α' le diamètre apparent de l'image finale $A'B'$. Exprimer, en fonction des valeurs algébriques f'_1 et f'_2 , le grossissement défini par $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$.
4. Application numérique : $f'_1 = 20$ cm et $f'_2 = -5$ cm.
Calculer le grossissement G .

5. L'image $A'B'$ est-elle renversée par rapport à l'objet AB ?

● 95

Concours Icare

20 min.

Instrument d'optique

MPSI-PCSI-PTSI

On étudie, dans ce problème, un viseur à frontale fixe.

1. Caractéristiques de la lunette

Une lunette est constituée par un objectif, un réticule et un oculaire.

On admettra, pour simplifier, qu'objectif et oculaire sont des systèmes minces de distances focales images f'_1 et f'_2 .

- L'utilisateur observe, sans effort, le réticule à travers l'oculaire ; quelle doit être la position du plan du réticule par rapport à l'oculaire ? Où l'utilisateur doit-il placer son œil ? Ce placement présente-t-il une contrainte importante pour l'observation ?
- Le réglage de la lunette nécessite l'observation sans fatigue de l'image nette d'un objet situé à grande distance. Quelle est la distance entre objectif et oculaire dans ce cas ? Comment peut-on qualifier la lunette ainsi réalisée ?
- Donner l'expression du grossissement en fonction des distances focales de l'objectif et de l'oculaire ; ce grossissement peut-il être positif, négatif ? Une lunette sans réticule présente-t-elle les mêmes contraintes ?

2. Transformation en frontale fixe par adjonction d'une bonnette

- On place en avant de l'objectif une lentille supplémentaire, la *bonnette*, de distance focale image f'_b bien connue et assimilée à une lentille mince convergente ; montrer qu'un tel dispositif permet de viser des objets à distance constante de la bonnette. La distance entre la bonnette et l'objectif est-elle quelconque ?
- On suppose connues toutes les distances focales ; exprimer la taille de l'objet visé en fonction de la taille de son image vue dans le plan du réticule (on supposera que le plan du réticule porte des graduations).

3. Transformation en frontale fixe par déplacement de l'objectif

L'objectif est éloigné de l'oculaire de telle sorte que l'observateur obtienne une image nette d'un objet placé à une distance donnée de l'objectif. On souhaite ainsi ne pas avoir à utiliser une bonnette de distance focale image donnée f'_b collée à l'objectif (de distance focale image f'_1) en déplaçant cet objectif. Quel est le déplacement de cet objectif ?

● 96

Lycée Saint-Louis, Paris

25 min.

Instruments d'optique

MPSI-PCSI-PTSI

Une lunette est composée d'un objectif assimilé à une lentille mince convergente de distance focale image $f'_1 = 10$ cm, de centre optique O_1 , de monture circulaire de diamètre $d_1 = 3$ cm, et d'un oculaire réglable en distance par rapport à l'objectif ; cet oculaire est assimilable aussi à une lentille convergente de distance focale image $f'_2 = 2$ cm, de centre optique O_2 , de diamètre $d_2 = 1$ cm.

La lunette est réglée, dans un premier temps, pour observer un objet situé à l'infini ; l'observateur regarde dans l'instrument en accommodant à l'infini.

1. Quelle est la distance O_1O_2 ?

2. **Grossissement**

- (a) Dessiner, sans nécessairement respecter l'échelle, mais avec soin, la marche d'un rayon lumineux venant de l'infini et faisant un angle θ avec l'axe de l'instrument.
- (b) Ce faisceau ressort en faisant un angle θ' avec l'axe. Les angles θ et θ' étant orientés, calculer le grossissement $G = \frac{\theta'}{\theta}$.

3. **Cercle oculaire**

- (a) On appelle cercle oculaire l'image de la monture de l'objectif par l'oculaire. Donner sa position C sur l'axe optique, par rapport à l'oculaire.
- (b) Un faisceau parallèle incident, limité par la monture de l'objectif et provenant d'un objet à l'infini, vu sous la distance angulaire θ , pénètre dans l'instrument. Il éclaire l'oculaire selon un cercle de diamètre δ' . Calculer δ' .
À quelle condition sur θ ce cercle est-il entièrement compris dans la monture de l'oculaire ?
À quelle condition portant sur θ tous les rayons entrant dans le système optique sont-ils stoppés par l'oculaire ?
- (c) L'observateur place, en principe, son œil en C (position du cercle oculaire). Pourquoi l'observateur a-t-il l'impression que les bords des images observées sont moins lumineux que la zone centrale (on justifiera la réponse par des calculs) ?
Pourquoi vaut-il mieux placer son œil au niveau du cercle oculaire ?

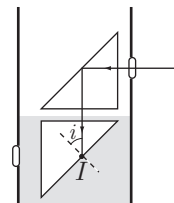
4. **Rôle de l'œil**

- (a) L'observateur place son œil en C . Sachant que pour une vue normale, l'œil voit net de 25 cm à l'infini, déterminer la position A sur l'axe optique de l'objet le plus proche qui peut être vu nettement.
On donnera la valeur de la distance O_1A .
- (b) Calculer le grandissement transversal de la lunette pour un objet placé en A .

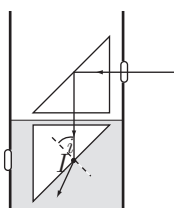
● 78 Q.C.M.

Le prisme supérieur joue toujours son rôle tandis que le prisme inférieur est immergé dans l'eau : Un rayon arrive donc au point I de ce prisme sous incidence $i = 45^\circ$, alors que l'angle limite i_ℓ dépend de l'indice $n_e = 1,3$ de l'eau et de celui ($n_v = 1,5$) du verre :

$$i_\ell = \arcsin\left(\frac{n_e}{n_v}\right) = \arcsin\left(\frac{1,3}{1,5}\right) = 60,1^\circ$$



Il apparaît ainsi que $i < i_\ell$, ce qui signifie aussi que le rayon subit, en I , une réfraction et non une réflexion totale :



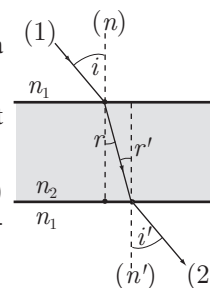
Ainsi, l'absence de réflexion totale explique le défaut de vision de l'observateur : réponse 5.

● 79 Lycée Pissarro, Pontoise

1. Soient :

- i' l'angle que fait le rayon (2) avec la normale à la deuxième face de la lame ;
- r et r' les angles entre le rayon à l'intérieur de la lame et les normales (n) et (n') des faces.

Les faces de la lame étant parallèles, les normales (n) et (n') le sont également, en conséquence de quoi $r = r'$, ce qui implique que :



$$\sin r = \sin r' \Rightarrow n_2 \sin r = n_2 \sin r'$$

soit, compte tenu de la loi de Snell-Descartes :

$$\underbrace{n_1 \sin i}_{=n_2 \sin r} = \underbrace{n_1 \sin i'}_{=n_2 \sin r'} \Rightarrow i = i'$$

Ainsi, les rayons (1) et (2) faisant, dans le plan de la feuille, le même angle avec les droites (n) et (n') parallèles, on en déduit que ces rayons sont parallèles.

2. Soient A et B les points d'incidence et d'émergence du rayon lumineux.

En appelant H le projeté de A sur le prolongement du rayon (2), il apparaît que :

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{AH}{AB} = \frac{\delta}{AB} \Rightarrow \delta = AB \sin \alpha \text{ avec } \alpha + r = i \\ &\Rightarrow \delta = AB \sin(i - r) \end{aligned}$$

De même, si B' désigne le projeté orthogonal de B sur la face supérieure de la lame :

$$\cos r = \frac{BB'}{AB} = \frac{e}{AB} \Rightarrow AB = \frac{e}{\cos r}$$

Finalement :

$$\delta = e \times \frac{\sin(i - r)}{\cos r}$$

3. Si l'angle i est suffisamment petit (de même que l'angle r), on peut poser :

$$\sin(i - r) \simeq i - r \text{ et } \cos r \simeq 1$$

c'est-à-dire :

$$\delta \simeq e \times (i - r)$$

De plus, le développement limité au premier ordre s'applique aussi à la loi de Snell-Descartes :

$$\begin{aligned} n_1 \sin i &= n_2 \sin r \Rightarrow n_1 \times i \simeq n_2 \times r \\ &\Rightarrow r \simeq \frac{n_1}{n_2} \times i = \frac{1}{n} \times i \text{ pour } n = \frac{n_2}{n_1} \\ &\Rightarrow \delta \simeq e \times i \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

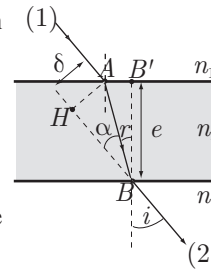
ce qui revient à :

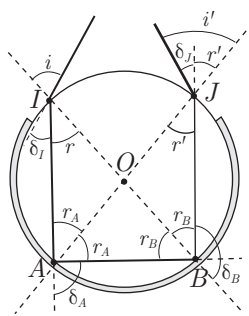
$$\delta \simeq e \times \frac{n-1}{n} \times i$$

● 80 ————— Lycée Livet, Nantes

1. Soit i l'angle d'incidence du rayon qui arrive en I , où il est réfracté sous un angle r dans le milieu d'indice n :

$$\sin i = n \sin r \quad (2)$$





On note O la trace de l'axe du cylindre sur la feuille de papier, de sorte que les points A, B où la lumière se réfléchit ainsi que les points I, J où la lumière est réfractée, sont équidistants de O :

$$OI = OA = OB = OJ \quad (3)$$

Après avoir pénétré dans le cylindre, le rayon arrive en A sous un angle r_A , et se réfléchit avec le même angle. L'identité (3) montre que le triangle (IOA) est isocèle, en conséquence de quoi :

$$r = r_A \quad (4)$$

De même, le rayon parvient en B sous un angle r_B d'où il est réfléchi avec le même angle. Or, l'identité (3) montre également que le triangle (AOB) est isocèle, ce qui impose :

$$r_B = r_A \quad (5)$$

Enfin, le rayon parvient en J sous un angle r' tel que :

$$r' = r_B \quad (6)$$

car l'identité (3) révèle que le triangle (BOJ) est isocèle.

Quant à l'angle d'émergence du rayon lumineux en J , il est aussi soumis à la loi de Snell-Descartes :

$$\sin i' = n \sin r'$$

où les identités (4), (5) et (6) fournissent :

$$r' = r_B = r_A = r \Rightarrow \sin i' = n \sin r \text{ car } r = r'$$

et la loi (2) conduit à :

$$\sin i = n \sin r \Rightarrow \sin i' = \sin i \Rightarrow i' = i$$

On appelle $\delta_I, \delta_A, \delta_B$ et δ_J les déviations successives subies par le rayon lumineux, telles que :

$$\begin{cases} i = \delta_I + r \\ \delta_A + 2r_A = \pi \\ \delta_B + 2r_B = \pi \\ \delta_J + r' = i' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_I = i - r \\ \delta_A = \pi - 2r_A \\ \delta_B = \pi - 2r_B \\ \delta_J = i' - r' \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} r' = r \\ i' = i \\ r_A = r \\ r_B = r \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_I = i - r \\ \delta_J = i - r \\ \delta_A = \pi - 2r \\ \delta_B = \pi - 2r \end{cases}$$

La déviation totale subie par le rayon vaut alors :

$$D = \delta_I + \delta_J + \delta_A + \delta_B = 2i - 2r + 2\pi - 4r$$

c'est-à-dire :

$$D = 2i - 6r + 2\pi \quad (7)$$

2. Compte tenu de la loi précédente :

$$\frac{dD}{di} = 2 - 6 \frac{dr}{di} = 2 \left(1 - 3 \frac{dr}{di} \right) \quad (8)$$

Or, la différentielle de la loi de Snell-Descartes : $n \sin r = \sin i$ s'exprime par :

$$n dr \cos r = di \cos i \Rightarrow n \frac{dr}{di} \cos r = \cos i \quad (9)$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{di} = \frac{\cos i}{n \cos r} \quad (10)$$

C'est pourquoi :

$$\frac{dD}{di} = 2 \left(1 - 3 \frac{\cos i}{n \cos r} \right) \quad (11)$$

Aussi, la déviation D devient *extremum* pour une valeur $i = i_0$ (à laquelle correspond une valeur r_0 de r) telle que :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dD}{di} \right|_{i_0} = 0 &\Rightarrow 3 \cos i_0 = n \cos r_0 \\ &\Rightarrow 3 \cos i_0 = n \sqrt{1 - \sin^2 r_0} = \sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 r_0} \\ &\Rightarrow 3 \cos i_0 = \sqrt{n^2 - \sin^2 i_0} \text{ car } n \sin r_0 = \sin i_0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire aussi :

$$\begin{aligned} 9 \cos^2 i_0 &= n^2 - \sin^2 i_0 = n^2 - (1 - \cos^2 i_0) \\ &= n^2 - 1 + \cos^2 i_0 \\ &\Rightarrow 8 \cos^2 i_0 = n^2 - 1 \\ &\Rightarrow \cos i_0 = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{8}} \end{aligned}$$

$$\cos i_0 = \sqrt{\frac{(1,5)^2 - 1}{8}} \Rightarrow \boxed{i_0 = 0,39 \text{ rad}}$$

À cette valeur correspond une valeur r_0 de r vérifiant :

$$n \sin r_0 = \sin i_0 \Rightarrow \sin r_0 = \frac{\sin i_0}{n} = \frac{\sin(0,39)}{1,5} \Rightarrow \boxed{r_0 = 0,26 \text{ rad}}$$

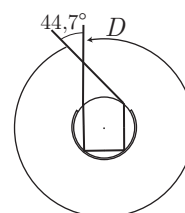
La déviation correspondant à i_0 et r_0 est alors donnée par le résultat (7) :

$$\begin{aligned} D_0 &= 2i_0 - 6r_0 + 2\pi = 2 \times 0,39 - 6 \times 0,26 + 2\pi \\ &\Rightarrow \boxed{D_0 = 5,5 \text{ rad} = 2\pi - 0,78 \text{ rad}} \end{aligned}$$

Cette valeur montre qu'à la sortie du cylindre, les rayons lumineux font entre eux un angle de 0,78 rad. Il convient maintenant de chercher la nature de l'*extremum* D_0 de D (*maximum* ou *minimum*).

Une seconde dérivation de l'équation (8) se traduit par :

$$\left. \frac{d^2 D}{di^2} \right|_{i_0} = -6 \left. \frac{d^2 r}{di^2} \right|_{i_0} \quad (12)$$



tandis que la dérivation de l'équation (9) fournit :

$$\begin{aligned} n \frac{dr}{di} \cos r = \cos i &\Rightarrow n \frac{d^2 r}{di^2} \cos r - n \left(\frac{dr}{di} \right)^2 \sin r = -\sin i \\ &\Rightarrow n \left. \frac{d^2 r}{di^2} \right|_{i_0} \cos r_0 = n \sin r_0 \left(\frac{dr}{di} \right)_{i_0}^2 - \sin i_0 \end{aligned}$$

où la loi de Snell-Descartes impose :

$$n \sin r_0 = \sin i_0 \Rightarrow n \left. \frac{d^2 r}{di^2} \right|_{i_0} \cos r_0 = \sin i_0 \times \left[\left(\frac{dr}{di} \right)_{i_0}^2 - 1 \right]$$

Enfin, i_0 est la valeur de i qui annule $\frac{dD}{di}$, dont l'expression est fournie par l'équation (8) :

$$\begin{aligned} \left. \frac{dD}{di} \right|_{i_0} = 0 &\Rightarrow 2 \left(1 - 3 \left. \frac{dr}{di} \right|_{i_0} \right) = 0 \Rightarrow \left. \frac{dr}{di} \right|_{i_0} = \frac{1}{3} \\ &\Rightarrow n \left. \frac{d^2 r}{di^2} \right|_{i_0} \cos r_0 = \sin i_0 \left[\frac{1}{9} - 1 \right] = -\frac{8}{9} \sin i_0 \\ &\Rightarrow \left. \frac{d^2 r}{di^2} \right|_{i_0} = -\frac{8}{9} \frac{\sin i_0}{n \cos r_0} \end{aligned}$$

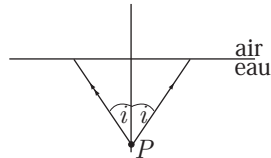
Ainsi l'identité (12) devient :

$$\left. \frac{d^2 D}{di^2} \right|_{i_0} = -6 \left. \frac{d^2 r}{di^2} \right|_{i_0} = \frac{16}{3} \times \frac{\sin i_0}{n \cos i_0} \Rightarrow \boxed{\left. \frac{d^2 D}{di^2} \right|_{i_0} > 0}$$

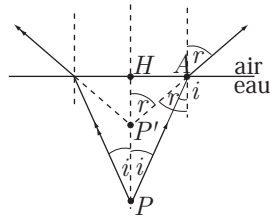
Cette dernière inégalité confirme que D prend une valeur minimale $D_0 = 5,5$ rad pour une incidence $i_0 = 0,39$ rad.

● 81 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. Le point P émet, dans l'eau, des rayons d'angle i par rapport à la verticale :



À leur traversée de l'interface *eau-air*, ces rayons subissent une réfraction ; leur angle de réfraction vaut r :



Soit (HP) la verticale passant par P , et P' le point d'intersection d'un rayon réfracté avec cette verticale. Par définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dans } (HAP') : \tan r = \frac{HA}{HP'} \\ \text{dans } (HAP) : \tan i = \frac{HA}{HP} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{\tan i}{\tan r} = \frac{HP'}{HP} \quad (13)$$

$$\Rightarrow HP' = HP \times \frac{\tan i}{\tan r} \quad (14)$$

En outre, dans le cadre de l'approximation des petits angles, il est légitime de poser :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan i \simeq i \\ \tan r \simeq r \end{array} \right. \Rightarrow HP' \simeq HP \times \frac{i}{r}$$

de même que se simplifie la loi de Snell-Descartes :

$$\sin r = n \sin i \Rightarrow r \simeq n \times i \Rightarrow HP' \simeq \frac{HP}{n} \quad (15)$$

En posant $HP = h$ et $HP' = h'$, cette identité devient aussi :

$$h' = \frac{1}{n} \times h$$

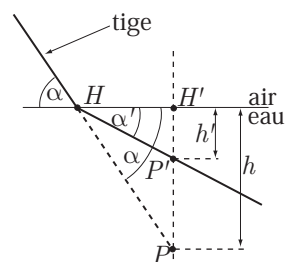
2. À chaque point P de la tige immergée correspond une image P' , seule perceptible par un observateur situé dans l'air.

Les angles α et α' définissent alors, dans les triangles $(HH'P')$ et $(HH'P)$:

$$\begin{cases} \tan \alpha' = \frac{H'P'}{HH'} = \frac{h'}{HH'} \\ \tan \alpha = \frac{H'P}{HH'} = \frac{h}{HH'} \end{cases} \Rightarrow \frac{\tan \alpha'}{\tan \alpha} = \frac{h'}{h} = \frac{1}{n}$$

soit encore :

$$\tan \alpha' = \frac{\tan \alpha}{n}$$



Application numérique :

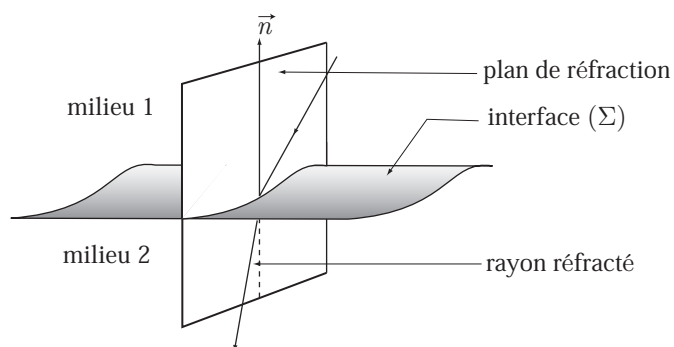
$$\begin{cases} \alpha = 45^\circ \\ n = 1,33 \end{cases} \Rightarrow \tan \alpha' = \frac{\tan(45^\circ)}{1,33} = \frac{1}{1,33} \Rightarrow \alpha' = 37^\circ$$

● 82 ————— Concours ENSI

I-Les lois de Descartes

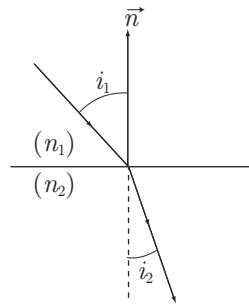
1. On appelle normale \vec{n} le vecteur perpendiculaire à l'interface (Σ) séparant les deux milieux transparents. Les lois de Snell-Descartes relatives à la réfraction stipulent que :

- les rayons incident et réfracté sont coplanaires avec la normale, au point d'intersection entre le rayon incident et la surface (Σ) .



- les angles d'incidence (i_1) et de réfraction (i_2) sont liés par les indices de réfraction correspondants :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

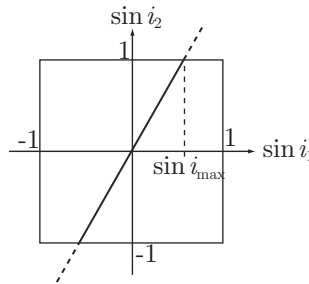


2. Lorsque la réfraction se produit,

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \Rightarrow \sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$$

Aussi, la représentation graphique donnant $\sin i_2$ en fonction de $\sin i_1$ est une droite de pente $\frac{n_1}{n_2} > 1$.

Étant donné que $\sin i_1$ et $\sin i_2$ doivent demeurer inférieurs à 1, il apparaît un angle $i_1 = i_{\max}$ à partir duquel $\sin i_2 \leq 1$ ne peut plus être respecté. Dans ce cas, $i_1 > i_{\max}$ interdit la propagation de la lumière dans le milieu 2 (il n'existe pas d'angle i_2 vérifiant la loi de Snell-Descartes).



3. Compte tenu de ce qui précède, la condition $\sin i_2 < 1$ impose aussi :

$$\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 < 1 \Rightarrow \sin i_1 < \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow i_1 < \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Ce résultat confirme l'existence d'un angle i_{\max} tel que la diffraction soit conditionnée par :

$$i_1 < i_{\max} / i_{\max} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \tag{16}$$

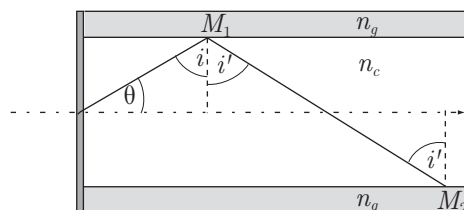
Remarque – L'existence de l'angle i_{\max} est intimement liée à l'inégalité :

$$n_1 > n_2 \Rightarrow \frac{n_2}{n_1} < 1$$

4. Lorsque $i > i_{\max}$, l'énergie lumineuse ne pouvant plus se propager dans le milieu 2, toute celle-ci est réfléchié ; il se produit un phénomène de réflexion totale.

II- Propagation dans une fibre optique : aspect géométrique

1. (a) Compte tenu de l'étude précédente, un phénomène de réflexion totale peut se produire sur M_1 étant donné que $n_c > n_g$.



Ce phénomène se produit dès que l'angle d'incidence i atteint la valeur i_{\max} telle que :

$$\sin(i_{\max}) = \frac{n_g}{n_c}$$

avec :

$$i = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \sin i = \cos \theta$$

c'est-à-dire que la réflexion totale se produit pour une valeur θ_m de θ telle que :

$$\cos \theta_m = \frac{n_g}{n_c} \Rightarrow \theta_m = \arccos\left(\frac{n_g}{n_c}\right) \quad (17)$$

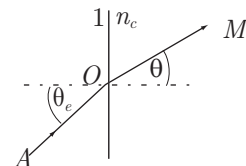
- (b) Dans ces conditions, le rayon subit une réflexion totale en M_1 et est ainsi réfléchi sous un angle $i' = i_{\max}$. Par suite, ce rayon arrive en M_2 sous l'incidence $i' = i_{\max}$, car les interfaces contenant M_1 et M_2 sont parallèles ; une nouvelle réflexion totale se produit en M_2 .

2. (a) Au point O , un phénomène de réfraction se produit.

La loi de Snell-Descartes s'y applique donc :

$$\sin \theta_e = n_c \sin \theta.$$

Notamment, la réflexion totale se produit au point M_1 à partir d'un angle $\theta_{e_{\max}}$ auquel correspond un angle θ_m donné par le résultat (17) :



$$\cos \theta_m = \frac{n_g}{n_c} \Rightarrow \sin \theta_m = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_m} = \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}}$$

c'est-à-dire :

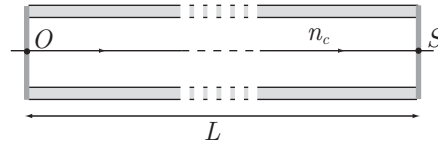
$$\sin \theta_{e_{\max}} = n_c \sin \theta_m \Rightarrow \sin \theta_{e_{\max}} = n_c \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_g^2} \quad (18)$$

- (b) Avec les valeurs numériques $n_c = 1,53$ et $n_g = 1,49$ le résultat précédent devient :

$$\sin \theta_{e_{\max}} = \sqrt{(1,53)^2 - (1,49)^2} = 0,347 \Rightarrow \theta_{e_{\max}} = 20,3^\circ$$

III- Propagation dans une fibre optique : aspect dynamique

1. Lorsque le rayon lumineux arrive en O sous incidence normale ($\theta_e = 0$), il ne subit aucune déviation ; il se déplace en ligne droite dans la fibre optique de longueur L :



Si c désigne la célérité de la lumière dans le vide, celle-ci se déplace à la vitesse v_c dans le cœur :

$$n_c = \frac{c}{v_c} \Rightarrow v_c = \frac{c}{n_c}$$

Ainsi, il faut au rayon lumineux un temps τ pour parcourir la distance L telle que :

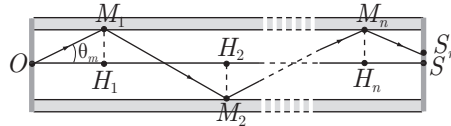
$$v_c = \frac{L}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{L}{v_c} = \frac{n_c L}{c}$$

2. En pénétrant en O sous l'incidence $\theta_e = \theta_1$ telle que : $\sin \theta_1 = n_c \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}}$, le rayon arrive en fait sous l'incidence $\theta_{e_{\max}}$, d'après le résultat (18) :

$$\sin \theta_{e_{\max}} = n_c \sqrt{1 - \frac{n_g^2}{n_c^2}}$$

Par conséquent le rayon est réfracté en O sous un angle θ_m donné par le résultat (17) :

$$\cos \theta_m = \frac{n_g}{n_c}$$



Si H_1 représente le projeté de M_1 sur l'axe Δ de la fibre, on trouve :

$$\cos \theta_m = \frac{OH_1}{OM_1} \Rightarrow OM_1 = \frac{OH_1}{\cos \theta_m} = \frac{n_c}{n_g} \times OH_1$$

Il apparaît donc qu'en notant H_i la projection d'un point M_i sur Δ ,

$$M_i M_{i+1} = \frac{n_c}{n_g} \times H_i H_{i+1}$$

et en notant S_n le point de sortie du rayon, de la fibre optique :

$$M_n S_n = \frac{n_c}{n_g} \times H_n S$$

Par conséquent, la distance L' parcourue par le rayon dans la fibre optique vaut :

$$\begin{aligned} L' &= OM_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n + M_n S_n \\ &= \frac{n_c}{n_g} \underbrace{(OH_1 + H_1 H_2 + \dots + H_{n-1} H_n + H_n S)}_{=L} = \frac{n_c}{n_g} \times L \end{aligned}$$

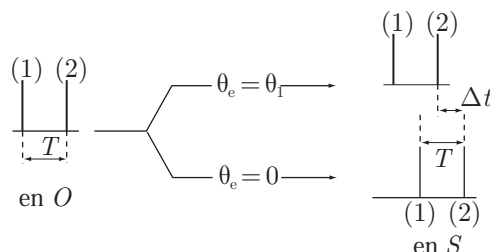
et requiert une durée τ' donnée par :

$$v_c = \frac{L'}{\tau'} \Rightarrow \tau' = \frac{L'}{v_c} \text{ avec } v_c = \frac{c}{n_c} \Rightarrow \tau' = \frac{n_c^2 L}{n_g c}$$

3. Deux impulsions partant simultanément de O sous des incidences $\theta_e = 0$ et θ_1 sortent de la fibre après des durées respectives τ et τ' ; la différence entre ces durées de propagation vaut :

$$\Delta t = \tau' - \tau = \frac{n_c^2 L}{n_g c} - \frac{n_c L}{c} \Rightarrow \Delta t = \frac{n_c L}{n_g c} \times (n_c - n_g)$$

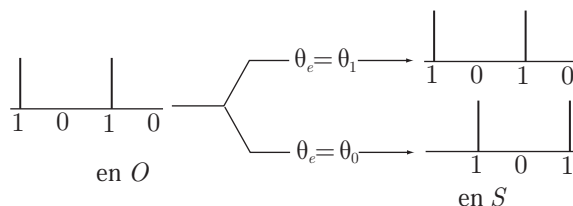
4. Soient (1) et (2) deux impulsions successives émises en O . Ces impulsions sont séparées, en O , d'une durée $T = \frac{1}{f}$ et sont émises sous les incidences $\theta_e = 0$ et $\theta_e = \theta_1$. Par suite, elles arrivent en S avec un décalage temporel Δt :



Il y a recouvrement des impulsions lorsque l'impulsion (2) (pour $\theta_e = \theta_1$) se superpose avec l'impulsion (1) (avec $\theta_e = 0$), c'est-à-dire lorsque :

$$\Delta t = T = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{n_c L_1}{n_g c} \times (n_c - n_g) = \frac{1}{f} \Rightarrow L_1 = \frac{n_g c}{n_c (n_c - n_g) f c}$$

Un tel phénomène peut notamment se produire lors de la propagation d'un signal numérique binaire ; considérons notamment un signal 1 0 1 0 se propageant le long de la fibre opérant le recouvrement des signaux d'incidence $\theta_e = 0$ et $\theta_e = \theta_1$:



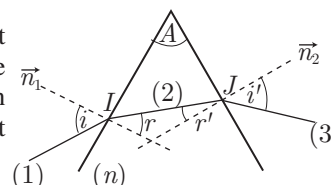
Le détecteur reçoit alors en S un signal numérique 1 1 1 1 totalement différent de celui émis ; il convient alors de tenir compte de ce phénomène, voire le supprimer, pour ne pas compromettre la fiabilité du transport d'informations par fibre optique.

● 83 ————— Concours ESIGETEL

1. (a) Aux points I et J les lois de Snell-Descartes imposent deux contraintes :

- En I les rayons incident et réfracté sont coplanaires avec la normale \vec{n}_1 , tandis qu'en J , les rayons incident et réfracté sont coplanaires avec la normale \vec{n}_2 .

En outre, étant donné d'une part que \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont coplanaires par construction, et d'autre part que le rayon (2) est aussi rayon incident en J , il s'ensuit que les rayons (1), (2) et (3) sont contenus dans un même plan.



- Soit r l'angle de réfraction associé à i en I et soit r' l'angle d'incidence du rayon (2) sur J , auquel est associé l'angle de réfraction i' :

$$n \sin r = \sin i \text{ et } n \sin r' = \sin i' \tag{19}$$

Le milieu transparent constituant le prisme étant plus réfringent que l'air ($n > 1$), un phénomène de réflexion totale pourrait se produire en J . Afin de l'éviter, il convient de remarquer que les lois (19) imposent :

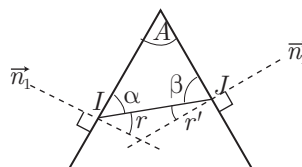
$$\begin{cases} n \sin r' = \sin i' \\ \sin i' \leq 1 \end{cases} \Rightarrow n \sin r' \leq 1 \Rightarrow r' \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \tag{20}$$

En I , ce phénomène de réflexion totale est proscrit, puisque le prisme est réalisé dans un milieu plus réfringent que l'air. En revanche, la condition $\sin i \leq 1$, caractéristique de toute fonction sinus, implique :

$$n \sin r = \sin i \leq 1 \Rightarrow r \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \tag{21}$$

Quant aux angles r et r' , leur relation avec A tient directement aux propriétés géométriques du prisme.

En I et J , les normales \vec{n}_1 et \vec{n}_2 sont, par nature, perpendiculaires aux faces du prisme :



$$\begin{cases} \alpha + r = \frac{\pi}{2} \\ \beta + r' = \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} - r \\ \beta = \frac{\pi}{2} - r' \end{cases}$$

De plus, dans le triangle (AIJ) :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + A = \pi &\Rightarrow \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) + A = \pi \\ &\Rightarrow \pi + A - (r + r') = \pi \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$A = r + r' \tag{22}$$

Enfin, les conditions (20) et (21) conduisent à :

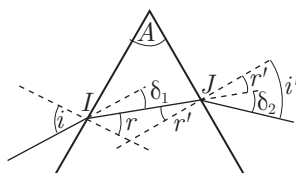
$$\begin{cases} r \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \\ r' \leq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \end{cases} \Rightarrow r + r' \leq 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow A \leq 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Il existe donc un angle :

$$A_0 = 2 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$$

tel que $A \leq A_0$ conditionne l'émergence d'un rayon en J .

- (b) La déviation D d'un rayon lumineux est la somme des déviations δ_1 et δ_2 qu'il subit aux points d'entrée I et de sortie J du prisme :



Le schéma ci-dessus indique que :

$$\begin{cases} i = \delta_1 + r \\ i' = \delta_2 + r' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta_1 = i - r \\ \delta_2 = i' - r' \end{cases} \Rightarrow D = \delta_1 + \delta_2 = i + i' - (r + r')$$

soit, compte tenu du résultat (22) :

$$A = r + r' \Rightarrow D = i + i' - A \quad (23)$$

- (c) Sachant que A est une grandeur indépendante de i , la dérivation du résultat précédent fournit :

$$\frac{dD}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$$

où la loi de la réfraction aux points I et J impose :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin i' = n \sin r' \\ \sin i = n \sin r \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} di' \times \cos i' = n dr' \times \cos r' \\ di \times \cos i = n dr \times \cos r \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{di'}{di} \times \frac{\cos i'}{\cos i} = \frac{dr'}{dr} \times \frac{\cos r'}{\cos r} \\ &\Rightarrow \frac{di'}{di} = \frac{dr'}{dr} \times \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'} \\ &\Rightarrow \frac{dD}{di} = 1 + \frac{dr'}{dr} \times \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'} \end{aligned}$$

En outre, de l'identité (22), il découle que :

$$\begin{aligned} r + r' = A &\Rightarrow dr + dr' = 0 \Rightarrow dr' = -dr \\ &\Rightarrow \frac{dr'}{dr} = -1 \\ &\Rightarrow \frac{dD}{di} = 1 - \frac{\cos r' \cos i}{\cos r \cos i'} \\ &\Rightarrow \frac{dD}{di} = \frac{\cos r \cos i' - \cos r' \cos i}{\cos r \cos i'} \end{aligned}$$

De plus, les lois de la réfraction en I et J se traduisent par :

$$\begin{cases} \sin i' = n \sin r' \\ \sin i = n \sin r \end{cases} \Rightarrow \frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{\sin r'}{\sin r} \Rightarrow \sin r \sin i' = \sin r' \sin i$$

si bien que l'on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dD}{di} &= \frac{\cos r \cos i' - \cos r' \cos i}{\cos r \cos i'} \\ &= \frac{[\cos r \cos i' + \sin r \sin i'] - [\cos r' \cos i + \sin r' \sin i]}{\cos r \cos i'} \\ &= \frac{\cos(r - i') - \cos(r' - i)}{\cos r \cos i'} \end{aligned}$$

où l'on peut utiliser la formule trigonométrique :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \times \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

afin d'obtenir :

$$\frac{dD}{di} = \frac{-2}{\cos r \cos i'} \times \left[\sin\left(\frac{r+r'-i-i'}{2}\right) \times \sin\left(\frac{r-r'+i-i'}{2}\right) \right] \quad (24)$$

On peut dorénavant distinguer trois cas :

- Si i est supérieur à i' , alors : $\frac{\sin i'}{\sin i} = \frac{\sin r'}{\sin r}$ suffit à prouver que $i > i' \Rightarrow r > r'$, auquel cas :

$$(i - i') + (r - r') > 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{r - r' + i - i'}{2}\right) > 0$$

et d'autre part $n > 1$ impose :

$$\sin i' = n \sin r' \Rightarrow i' > r' \text{ et } \sin i = n \sin r \Rightarrow i > r$$

de sorte que :

$$r + r' - i - i' = (r - i) + (r' - i') < 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{r + r' - i - i'}{2}\right) < 0$$

L'identité (24) montre de fait que :

$$i > i' \Rightarrow \frac{dD}{di} > 0 \quad (25)$$

- Au contraire, si i est inférieur à i' , un raisonnement analogue fournit :

$$\begin{aligned} i < i' \Rightarrow r < r' &\Rightarrow (i - i') + (r - r') < 0 \\ &\Rightarrow \sin\left(\frac{r - r' + i - i'}{2}\right) < 0 \end{aligned}$$

tandis que le résultat :

$$n > 1 \Rightarrow \begin{cases} i' > r' \\ i > r \end{cases} \Rightarrow \sin\left(\frac{r + r' - i - i'}{2}\right) < 0$$

demeure inchangé. Il s'ensuit que l'identité (24) équivaut à :

$$i < i' \Rightarrow \frac{dD}{di} < 0 \quad (26)$$

- Lorsque $i = i'$:

$$\sin i = \sin i' \Rightarrow n \sin r = n \sin r' \Rightarrow r = r' \Rightarrow (r - r') + (i - i') = 0$$

d'où il ressort, conformément à l'identité (24) :

$$i = i' \Rightarrow \frac{dD}{di} = 0 \quad (27)$$

Les relations (25), (26) et (27) :

$i < i'$	$i = i'$	$i > i'$
$\frac{dD}{di} < 0$	$\frac{dD}{di} = 0$	$\frac{dD}{di} > 0$

Montre que D prend une valeur *minimum* D_m lorsque $i = i'$; on notera dorénavant $i_0 = i = i'$ cette valeur, à laquelle est associée la valeur $r = r' = r_0$ vérifiant l'identité (22) :

$$r + r' = A \Rightarrow 2r_0 = A \Rightarrow r_0 = \frac{A}{2} \quad (28)$$

Il découle alors de la loi de Snell-Descartes que :

$$\sin i_0 = n \sin r_0 = n \sin\left(\frac{A}{2}\right) \Rightarrow i_0 = \arcsin\left[n \sin\left(\frac{A}{2}\right)\right] \quad (29)$$

La déviation D , décrite par la relation (23), devient, au *minimum* :

$$D_m = i_0 + i_0 - A = 2i_0 - A \quad (30)$$

c'est-à-dire, compte tenu du résultat (29) :

$$D_m = 2 \arcsin\left[n \sin\left(\frac{A}{2}\right)\right] - A$$

- (d) Les identités (30) et (28) conduisent à :

$$D_m = 2i_0 - A \Rightarrow i_0 = \frac{D_m + A}{2} \text{ et } r_0 = \frac{A}{2}$$

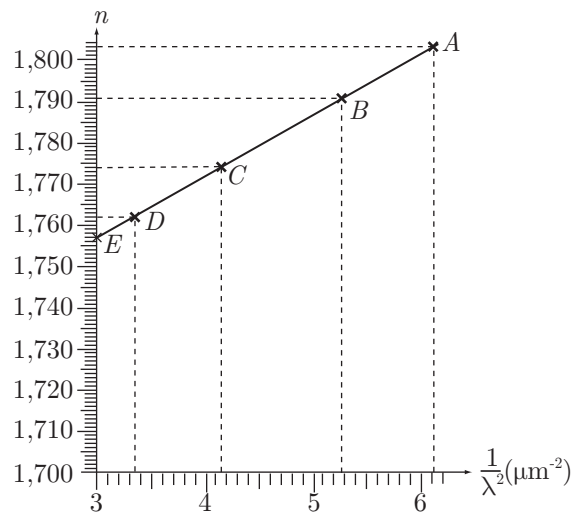
de sorte que l'expression de l'indice de réfraction n découle de la loi de Snell-Descartes :

$$n \sin r_0 = \sin i_0 \Rightarrow n = \frac{\sin i_0}{\sin r_0} \Rightarrow n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}$$

2. (a) Les résultats

λ (μm)	0,404 7	0,435 8	0,491 6	0,546 1	0,577 0
n	1,803	0,791	1,774	1,762	1,757
$\frac{1}{\lambda^2}$ (μm^{-2})	6,11	5,27	4,14	3,35	3,00

peuvent être représentés graphiquement :



La portion de droite qui apparaît indique que n dépend linéairement de $\frac{1}{\lambda^2}$ selon la loi (formule de Cauchy) :

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}$$

Notamment, en conservant $\frac{1}{\lambda^2}$ en μm^{-2} , les coefficients b et a sont respectivement :

- le coefficient directeur de la droite, calculable à partir des coordonnées des points :

$$E \begin{pmatrix} 3,00 \\ 1,757 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 6,11 \\ 1,803 \end{pmatrix}$$

et vaut :

$$b = \frac{1,803 - 1,757}{6,11 - 3,00} \Rightarrow b = 1,48 \cdot 10^{-2} \mu\text{m}^2$$

- l'ordonnée à l'origine, directement accessible à partir des coordonnées du point E :

$$\begin{aligned} n &= a + \frac{b}{\lambda^2} \Rightarrow 1,757 = a + 1,48 \cdot 10^{-2} \times 3,00 \\ &\Rightarrow a = 1,757 - 1,48 \cdot 10^{-2} \times 3 = 1,713 \end{aligned}$$

Finalement, n et λ sont liés par la loi :

$$n = 1,713 + 1,48 \cdot 10^{-2} \times \frac{1}{\lambda^2} \text{ (avec } \lambda \text{ en } \mu\text{m)}$$

- (b) La lampe à vapeur de cadmium émet une radiation de longueur d'onde λ_{Cd} à laquelle correspond un indice de réfraction $n_{\text{Cd}} = 1,777$ vérifiant la loi précédente :

$$\begin{aligned} 1,777 &= 1,713 + 1,48 \cdot 10^{-2} \times \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1,777 - 1,713}{1,48 \cdot 10^{-2}} \\ &\Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{1,48 \cdot 10^{-2}}{1,777 - 1,713}} \\ &\Rightarrow \lambda = 0,4809 \mu\text{m} \end{aligned}$$

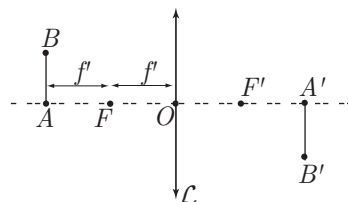
Une telle longueur d'onde correspond à une lumière vert-bleue.

● 84 ————— Concours Centrale-Supélec

Soient A' et B' les images associées à A et B à travers \mathcal{L} .

La relation de conjugaison de Descartes permet de connaître la position de A' :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'}$$



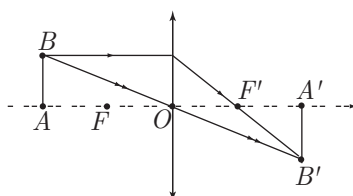
avec :

$$ovOA = -2f' \Rightarrow \frac{1}{ovOA'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{2f'} = \frac{1}{2f'} \Rightarrow \overline{OA'} = 2f'$$

L'écran E devra donc se trouver à une distance $2f'$ de \mathcal{L} pour qu'il s'y forme l'image $A'B'$ de AB . En outre, le grandissement transversal est donné par la loi :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \Rightarrow \gamma = \frac{2f'}{-2f'} \Rightarrow \gamma = -1$$

Ce résultat indique que $\overline{A'B'} = -\overline{AB}$ c'est-à-dire encore que $A'B'$ présente la même taille que AB mais est inversé par rapport à AB :



● 85 ————— Lycée Clémenceau, Reims

1. Soit O le centre optique de la lentille, à partir duquel s'exprime la relation de conjugaison :

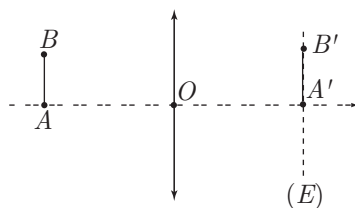
$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{OA'} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{f'}$$

L'énoncé précise, en outre, que :

- l'objet AB est réel, auquel cas il se trouve à gauche de la lentille :

$$\overline{OA} < 0$$

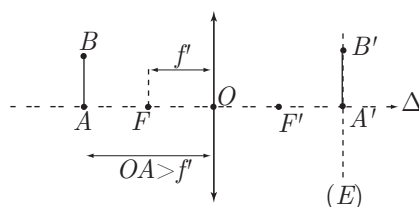
- l'image $A'B'$ peut être rendue visible à l'aide d'un écran E , ce qui signifie également que l'image $A'B'$ est réelle, donc à droite de la lentille : $\overline{OA'} > 0$.



De ces hypothèses, il ressort que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{OA'} > 0 &\Rightarrow \frac{1}{OA} + \frac{1}{f'} > 0 \Rightarrow \frac{1}{OA} > -\frac{1}{f'} \\ &\Rightarrow -\frac{1}{OA} > -\frac{1}{f'} \text{ car } \overline{OA} < 0 \Rightarrow \overline{OA} = -OA \\ &\Rightarrow \boxed{OA > f'} \end{aligned}$$

Finalement, l'objet AB doit se trouver dans un plan à gauche du plan focal objet passant par le foyer F :



2. En posant $\overline{OA} = -0,2 \text{ m}$ et $f' = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$ la relation de conjugaison de la lentille devient :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} = -\frac{1}{0,2} + \frac{1}{0,1} = \frac{1}{0,2}$$

$$\Rightarrow \overline{OA'} = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

L'écran se trouve par conséquent à 20 cm à droite de la lentille.

De plus, le grandissement γ est donné par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \text{ avec } \begin{cases} \overline{AB} = 1 \text{ mm} \\ \overline{OA'} = 20 \text{ cm} \\ \overline{OA} = -20 \text{ cm} \end{cases}$$

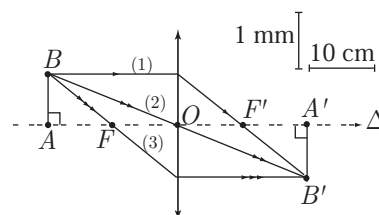
$$\Rightarrow \overline{A'B'} = -1 \text{ mm} \Rightarrow A'B' = 1 \text{ mm}$$

L'image $A'B'$ présente donc la même taille que l'objet AB , mais est inversée par rapport à celui-ci.

3. Parmi tous les rayons issus de B , trois sont remarquables :

- le rayon (1) arrivant sur la lentille \mathcal{L} , parallèlement à l'axe optique, ressort de \mathcal{L} en passant par le foyer image F' ;
- le rayon (2) traversant la lentille en son centre optique O n'est pas dévié ;
- le rayon (3) arrivant sur la lentille après être passé par le foyer objet F ressort de \mathcal{L} parallèlement à l'axe optique.

Ces trois rayons étant issus de B , le stigmatisme de la lentille impose qu'à la sortie de \mathcal{L} les rayons associés ont pour point d'intersection l'image B' . Quant à l'aplanétisme, il assure que l'image $A'B'$ de AB est perpendiculaire à l'axe optique Δ ; le point A' est le projeté orthogonal de B' sur Δ .



Ce schéma confirme les résultats établis à la question précédente, à savoir :

$$\overline{OA'} = 20 \text{ cm} \text{ et } \overline{A'B'} = -1 \text{ mm}$$

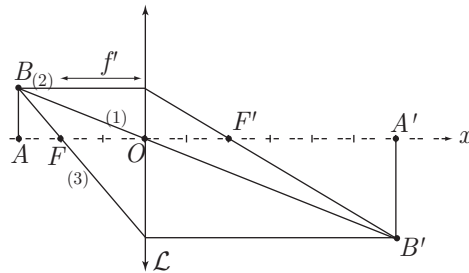
● 86 ————— Concours ESIGETEL

1. Introduction

- (a) La construction géométrique de l'image $A'B'$ associée à AB repose sur la représentation d'au moins deux des trois rayons remarquables :

- Le rayon (1) issu de B et passant par le centre optique O n'est pas dévié.
- Le rayon (2) issu de B parallèlement à l'axe optique ressort de la lentille en passant par le foyer image F' .
- Le rayon (3), issu de B en passant par le foyer F , ressort de la lentille parallèlement à l'axe optique.

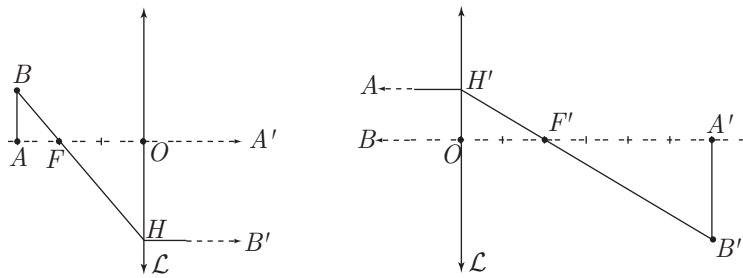
Ces trois rayons, provenant de B , convergent en son image B' dont la projection sur l'axe optique coïncide avec A' :



Ce schéma indique que $A'B' = 2 \times AB$, et comme l'image est inversée par rapport à l'objet AB , il vient :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -2 \quad (31)$$

(b) De la construction précédente peuvent être extraites les figures suivantes :



où s'applique le théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{OH}} \Rightarrow \frac{\overline{OH}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \text{ avec } \begin{cases} \overline{OH} = \overline{A'B'} \\ \overline{FO} = f' \end{cases} \quad (32)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{f'}{\overline{FA}} \Leftrightarrow \gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} \quad (33)$$

et :

$$\frac{\overline{F'O}}{\overline{OH'}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OH'}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \text{ avec } \begin{cases} \overline{OH'} = \overline{AB} \\ \overline{F'O} = -f' \end{cases} \quad (34)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{-f'} \Leftrightarrow \gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} \quad (35)$$

⚠ Même si l'énoncé n'impose pas de confrontation entre les deux questions précédentes, le bon sens la suggère, d'autant plus qu'une construction géométrique est toujours sujette à caution. Ainsi, l'hypothèse de l'énoncé, associée au résultat (33), conduit à :

$$\begin{aligned}\overline{OA} = -1,5 \times f' &\Rightarrow \gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = \frac{f'}{\overline{FO} + \overline{OA}} = \frac{f'}{f' - 1,5 \times f'} \\ &\Rightarrow \gamma = \frac{f'}{-0,5 \times f'} = -2\end{aligned}$$

ce qui confirme le résultat (31) obtenu par construction géométrique.

2. Méthode de Silberman

- (a) La position des points A et A' assurant un grandissement $\gamma = -1$ est accessible à partir des relations (33) :

$$\gamma = -1 = \frac{f'}{\overline{FA}} \Rightarrow \overline{FA} = -f'$$

et (35) :

$$\gamma = -1 = -\frac{\overline{F'A'}}{f'} \Rightarrow \overline{F'A'} = f'$$

Ces deux résultats montrent indiscutablement l'unicité des positions de A et A' assurant $\gamma = 1$. En outre, sachant que $\overline{FO} = f'$ et $\overline{OF'} = f'$, on en déduit que :

$$\overline{FA} = -f' \Rightarrow \underbrace{\overline{FO}}_{f'} + \underbrace{\overline{OA}}_x = -f' \Rightarrow x = -2f'$$

et que :

$$\overline{F'A'} = f' \Rightarrow \underbrace{\overline{F'O}}_{-f'} + \underbrace{\overline{OA'}}_{x'} = f' \Rightarrow x' = 2f'$$

- (b) La distance D entre A et A' valant 1 m, il s'ensuit que :

$$\overline{AA'} = D \Rightarrow \overline{AO} + \overline{OA'} = D \Rightarrow -x + x' = D$$

c'est-à-dire, compte tenu des résultats de la question précédente :

$$4f' = D \Rightarrow f' = \frac{D}{4}$$

Application numérique :

$$f' = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ m} \Rightarrow f' = 25 \text{ cm} \quad (36)$$

3. Méthode de Bessel

- (a) Soient A et A' fixés, tels que $\overline{AA'} = D$. En posant $x = \overline{OA}$ et $x' = \overline{OA'}$, la relation de conjugaison de la lentille mince devient :

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

où :

$$\begin{aligned}x' = \overline{OA'} = \overline{OA} + \overline{AA'} &\Rightarrow x' = x + D \Rightarrow \frac{1}{x+D} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \\&\Rightarrow \frac{-D}{x^2 + Dx} = \frac{1}{f'} \Rightarrow -D f' = x^2 + Dx \\&\Rightarrow x^2 + Dx + D f' = 0\end{aligned}$$

Cette équation du second degré admet deux solutions x_1 et x_2 distinctes, à condition que le discriminant :

$$\Delta = D^2 - 4 D f' = D \times (D - 4 f')$$

soit positif :

$$D \times (D - 4 f') > 0 \Rightarrow D > 4 f' \text{ car } D > 0$$

Dans ce cas, les solutions sont :

$$x_1 = \overline{O_1 A} = \frac{-D + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } x_2 = \overline{O_2 A} = \frac{-D - \sqrt{\Delta}}{2}$$

ce qui montre que les positions O_1 et O_2 sont alors distantes de :

$$\begin{aligned}a = \overline{O_1 O_2} &\Rightarrow a = \overline{O_1 A} + \overline{A O_2} = \overline{O_1 A} - \overline{O_2 A} \\&\Rightarrow a = \frac{-D + \sqrt{\Delta}}{2} + \frac{D + \sqrt{\Delta}}{2} = \sqrt{\Delta} \\&\Rightarrow a = \sqrt{D^2 - 4 D f'}\end{aligned}$$

(b) Du résultat précédent, il découle que :

$$a^2 = D^2 - 4 D f' \Rightarrow 4 D f' = D^2 - a^2 \Rightarrow f' = \frac{D^2 - a^2}{4 D}$$

Application numérique :

$$\begin{cases} D = 1,2 \text{ m} \\ a = 0,5 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow f' = \frac{(1,2)^2 - (0,5)^2}{4 \times 1,2} \\ \Rightarrow f' = 0,248 \text{ m} = 24,8 \text{ cm}$$

(c) La méthode de Bessel a permis d'obtenir :

$$f'_{\text{Bessel}} = 24,8 \text{ cm}$$

tandis que celle de Silberman a fourni le résultat (36) :

$$f'_{\text{Silberman}} = 25 \text{ cm}$$

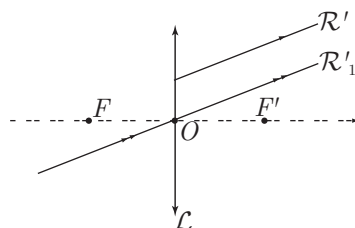
Ces deux résultats donnent des estimations compatibles de la distance focale :

$$f' = 25 \pm 0,2 \text{ cm}$$

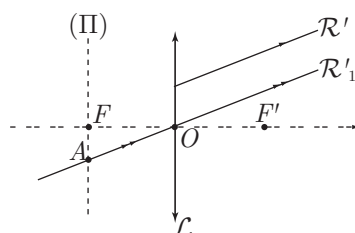
où une incertitude de $\frac{0,2}{25} = 0,8 \%$ est observée, ce qui représente une excellente précision expérimentale, compte tenu de la simplicité des dispositifs mis en œuvre.

● 87 ————— Lycée Amyot, Melun

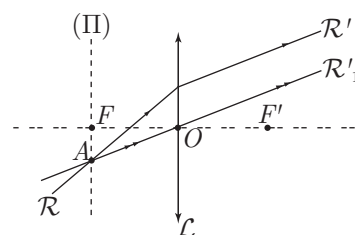
1. Considérons un rayons \mathcal{R}'_1 , parallèle à \mathcal{R}' , et passant par O , c'est-à-dire qui n'a pas été dévié lors de sa traversée de la lentille :



Les deux rayons \mathcal{R}' et \mathcal{R}'_1 étant parallèles, ils forment une image en l'infini d'un même point A appartenant au plan focal objet (II) passant par F . De fait, A appartient simultanément à (II) et à \mathcal{R}'_1 , dont il constitue le point d'intersection :

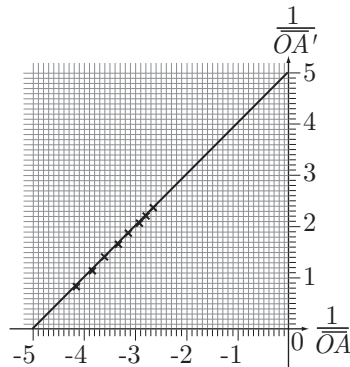


Enfin, les rayons \mathcal{R}' et \mathcal{R}'_1 formant en l'infini l'image d'un même point objet, le rayon \mathcal{R}' passe nécessairement, avant sa traversée de \mathcal{L} , par le point A :



2. (a) En remarquant que $\overline{OA} = -\overline{AO}$, on peut représenter la courbe décrivant $\frac{1}{\overline{OA}'}$ en fonction de $\frac{1}{\overline{OA}}$:

\overline{AO} (cm)	24,0	26,0	28,0	30,0	32,0	34,0	36,0	38,0
\overline{OA}' (cm)	120	86,7	70,2	60,2	53,1	48,6	45,2	42,2
$\frac{1}{\overline{OA}}$ (m^{-1})	-4,17	-3,84	-3,57	-3,33	-3,13	-2,94	-2,78	-2,63
$\frac{1}{\overline{OA}'}$ (m^{-1})	0,83	1,15	1,42	1,66	1,88	2,06	2,21	2,37



La linéarité de cette courbe permet d'affirmer qu'il existe deux coefficients constants α et β tels que :

$$\frac{1}{OA'} = \alpha \times \frac{1}{OA} + \beta$$

En outre, la courbe semble passer par les points :

$$C \left(\begin{array}{l} \frac{1}{OA} = -5 \\ \frac{1}{OA'} = 0 \end{array} \right) \text{ et } D \left(\begin{array}{l} \frac{1}{OA} = 0 \\ \frac{1}{OA'} = 5 \end{array} \right)$$

de telle manière que :

$$\begin{cases} 0 = -5 \times \alpha + \beta \\ 5 = \alpha \times 0 + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5\alpha = \beta \\ \beta = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

La formule de Snell-Descartes est alors vérifiée :

$$\frac{1}{OA'} = \frac{1}{OA} + 5 \Rightarrow \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = 5 \quad (37)$$

(b) La comparaison du résultat (37) avec la formule de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$$

conduit à poser :

$$\frac{1}{f'} = 5 \Rightarrow f' = \frac{1}{5} \Rightarrow f' = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}$$

En outre, ce résultat peut être confirmé par les différentes valeurs du tableau de mesures, dans lequel la relation $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$ fournit une valeur cohérente de f' :

$\frac{1}{\overline{OA}}$ (m ⁻¹)	-4,17	-3,84	-3,57	-3,33	-3,13	-2,94	-2,78	-2,63
$\frac{1}{\overline{OA'}}$ (m ⁻¹)	0,83	1,15	1,42	1,66	1,88	2,06	2,21	2,37
$\frac{1}{f'}$ (m ⁻¹)	5,00	5,00	4,99	4,99	5,01	5,00	4,99	5,00
f' (m)	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20

● 88 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

Dans la seconde manipulation, l'image A' de A se forme par passages successifs à travers les trois lentilles :

- La lentille \mathcal{L}_1 forme de A une image A_1 dont l'abscisse obéit à la formule de Descartes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} &= \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{\overline{O_1A}} \text{ avec } \overline{O_1A} = \overline{OF_1} = -f'_1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f'_1} - \frac{1}{f'_1} = 0 \Rightarrow \overline{O_1A_1} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

- La lentille \mathcal{L} forme de A_1 une image A_2 , conformément à la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA_2}} = \frac{1}{\overline{OA_1}} + \frac{1}{f'}$$

avec :

$$\begin{aligned} \overline{OA_1} &= \overline{OO_1} + \overline{O_1A_1} \rightarrow +\infty \text{ car } \overline{O_1A_1} \rightarrow +\infty \\ &\Rightarrow \frac{1}{\overline{OA_2}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \overline{OA_2} = f' \end{aligned}$$

- La lentille \mathcal{L}_2 donne une image A' de A_2 , telle que :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_2}} = \frac{1}{f'_2} \quad (38)$$

où, d'après l'énoncé :

$$\overline{O_2A'} = \overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2A'} = f'_2 + D$$

et :

$$\overline{O_2A_2} = \overline{O_2O} + \overline{OA_2} = \overline{O_2O} + f'$$

Enfin, l'énoncé stipule que \mathcal{L} se trouve à gauche de \mathcal{L}_2 , à une distance f'_2 , ce qui signifie aussi que :

$$\overline{O_2O} = -f'_2 \Rightarrow \overline{O_2A_2} = f' - f'_2$$

La relation (38) devient ainsi :

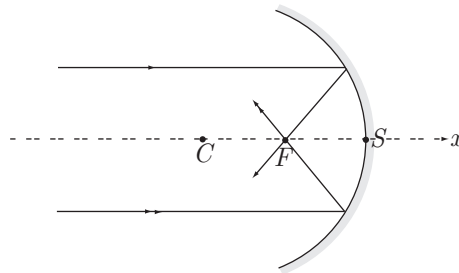
$$\begin{aligned} \frac{1}{f'_2 + D} - \frac{1}{f' - f'_2} &= \frac{1}{f'_2} \\ \Rightarrow \frac{1}{f'_2} &= \frac{f' - D - 2f'_2}{(f'_2 + D)(f' - f'_2)} \\ \Rightarrow (f'_2 + D)(f' - f'_2) &= f'_2(f' - D - 2f'_2) \\ \Rightarrow f'_2 f' + D f' - (f'_2)^2 - D f'_2 &= f'_2 f' - D f'_2 - 2(f'_2)^2 \\ \Rightarrow D f' - (f'_2)^2 &= -2(f'_2)^2 \Rightarrow f' = -\frac{(f'_2)^2}{D} \end{aligned}$$

89 --- Concours E.N.S.T.I.M.

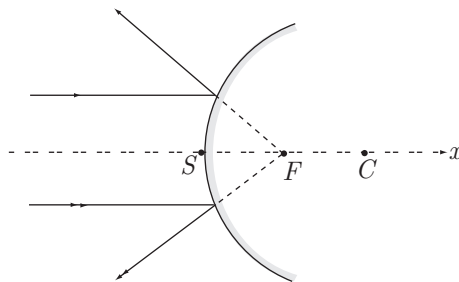
1. Rappel sur les miroirs sphériques

(a) Le foyer principal F d'un miroir sphérique est le point de l'axe optique où convergent, après réflexion, les rayons incidents parallèles à l'axe optique. Ce point est situé entre C et S . Deux situations peuvent être distinguées selon la nature du miroir sphérique :

- F est réel pour le miroir concave :



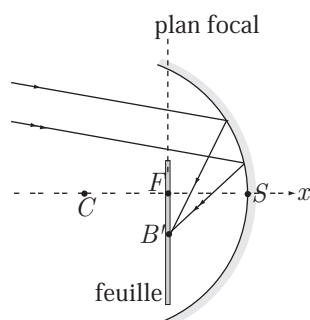
- F est virtuel pour un miroir convexe (seuls les prolongements des rayons réfléchis rencontrent F) :



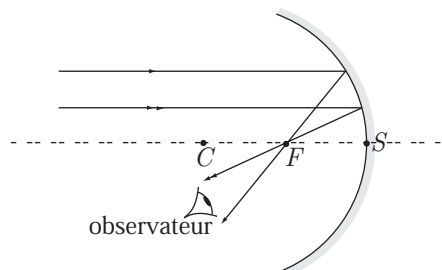
(b) Tout point B situé à l'infini hors de l'axe optique donne une image B' dans le plan focal perpendiculaire à cet axe, et passant par F .

Par ce moyen, on peut former l'image du Soleil sur une feuille de papier afin de déterminer rapidement la position du plan focal et donc celle de F (l'expérience ne devra cependant pas se prolonger si l'on veut protéger la feuille d'une éventuelle brûlure).

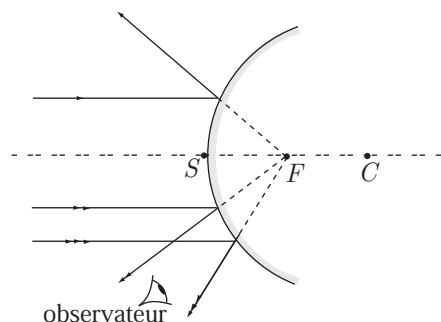
Quant à la nature du miroir sphérique, elle se détermine rapidement à partir de la formation de l'image d'un point éloigné :



- Si le miroir est concave, l'image se forme en F , à l'avant du miroir. Cette image apparaîtra à l'avant du miroir à un observateur (cette expérience peut être facilement réalisée à l'aide d'une cuiller à glace chromée).

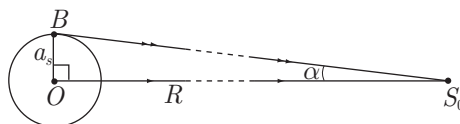


- Si le miroir est convexe, le foyer, virtuel, apparaîtra à l'arrière du miroir à un observateur :



2. Étude de la concentration du rayonnement solaire

- (a) La distance R sépare le centre O du Soleil du centre S_0 du miroir tandis que l'inclinaison maximale α représente l'angle que fait, par rapport à (OS_0) , un rayon provenant d'un point périphérique B du Soleil, en S_0 :



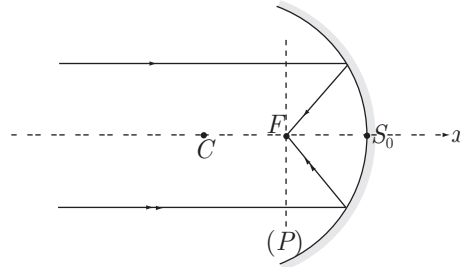
Par suite, $\tan \alpha = \frac{a_s}{R}$ et, puisque $a_s \ll R$, un développement limité permet de poser :

$$\tan \alpha \simeq \alpha \Rightarrow \alpha \simeq \frac{a_s}{R}$$

Application numérique :

$$\alpha = \frac{7,1 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^{11}} \Rightarrow \alpha = 4,73 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

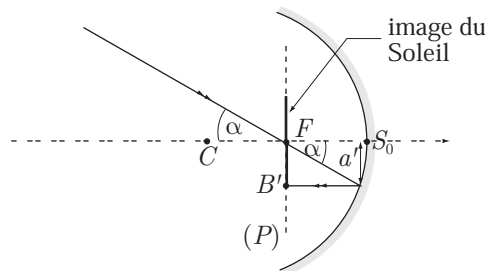
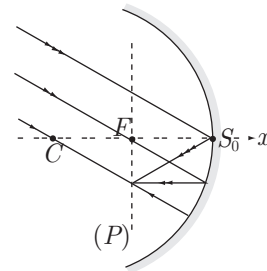
- (b) Le Soleil pouvant être considéré comme situé à une distance infinie du miroir, son image se forme dans le plan focal (P) dont la projection sur l'axe optique coïncide avec le foyer F ; celui-ci est d'ailleurs l'image géométrique du centre O du Soleil :



En outre, la distance FS_0 valant $\frac{CS_0}{2} = \frac{R_0}{2}$, il s'ensuit que le plan (P) se trouve à une distance $\frac{R_0}{2}$ du sommet du miroir.

Quant au point B , il émet également des rayons parallèles, inclinés d'un angle α par rapport à l'axe optique. Parmi tous ces rayons, celui passant par le centre C du miroir se réfléchit sur lui-même au contact du miroir. Par conséquent, l'intersection de ce rayon avec le plan (P) coïncide avec l'image B' de B dans le plan focal :

Finalement, l'image du Soleil est un cercle centré sur F et de rayon $a' = FB'$:



De la construction géométrique précédente, il ressort que :

$$\tan \alpha = \frac{a'}{FS_0} \Rightarrow a' = FS_0 \times \tan \alpha \simeq FS_0 \times \alpha \Rightarrow a' = \frac{R_0 \alpha}{2}$$

Application numérique :

$$a' = \frac{40 \times 4,73 \cdot 10^{-3}}{2} \Rightarrow a_s = 0,0946 \text{ m} = 94,6 \text{ mm}$$

- (c) Le miroir sphérique, de rayon d'ouverture c , présente une surface $\Sigma = \pi \times c^2$ aux rayons solaires. Par conséquent, ce miroir reçoit une puissance par rayonnement :

$$P_R = \pi_0 \times \pi c^2$$

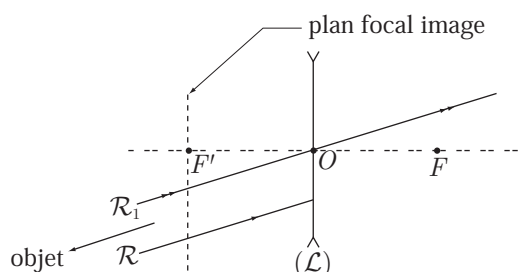
et comme ce miroir réfléchit sur (P) l'intégralité de cette puissance, le plan (P) reçoit également la puissance P_R .

Application numérique :

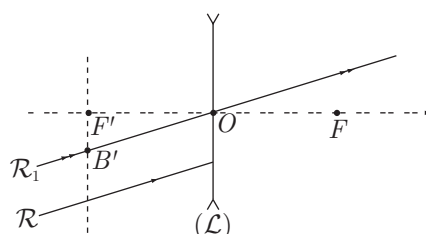
$$P_R = 1 \times \pi \times (5,6)^2 \Rightarrow P_R = 98,5 \text{ kW}$$

● 90 ————— Lycée Roosevelt, Reims

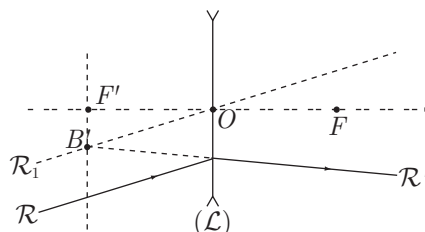
1. Considérons un rayon \mathcal{R}_1 parallèle à \mathcal{R} et passant par O de sorte que les rayons \mathcal{R} et \mathcal{R}_1 semblent provenir d'un point objet situé à l'infini (à gauche de \mathcal{L}) :



L'image B' de cet objet doit alors se former dans le plan focal image de \mathcal{L} . En outre, le rayon \mathcal{R}_1 n'étant pas dévié, il passe nécessairement par B' qui appartient de fait à \mathcal{R}_1 et au plan focal image :

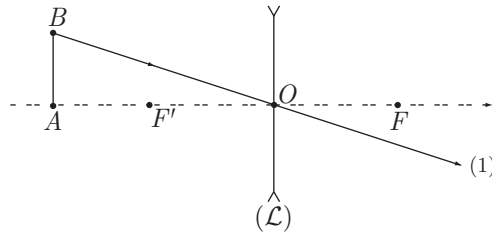


Enfin, le rayon \mathcal{R}' (transformé de \mathcal{R} par \mathcal{L}) ou son prolongement doit passer par B' afin que soit respecté le stigmatisme approché dans les conditions de Gauss (les rayons \mathcal{R} et \mathcal{R}_1 étant issus d'un même objet, leurs transformés \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}' par la lentille passent par le même point image). Le rayon \mathcal{R}' s'obtient ainsi en traçant la droite passant par B' et par l'intersection entre \mathcal{R} et \mathcal{L} .

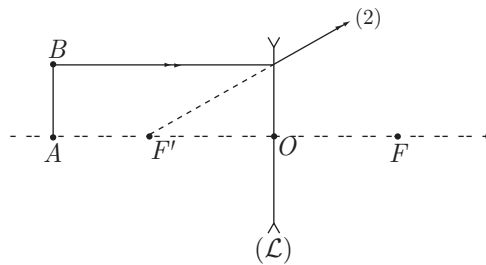


2. (a) Du point B partent, entre autres, trois rayons remarquables dont il convient de rappeler les caractéristiques :

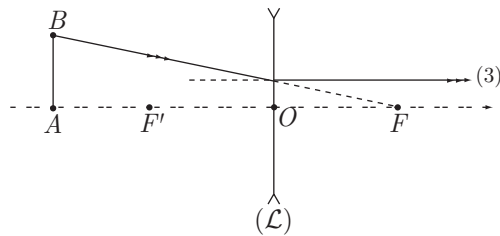
- Le rayon (1) passant par le centre optique O n'est pas dévié :



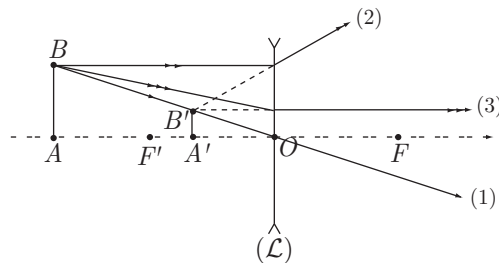
- Le rayon (2) arrivant sur \mathcal{L} parallèlement à l'axe optique en émerge en passant par F' (ici seul son prolongement peut passer par F' , étant donné le sens de propagation de la lumière de la gauche vers la droite) :



- Le rayon (3) se dirigeant vers F (seul son prolongement peut, du reste, atteindre F) ressort de la lentille parallèlement à l'axe optique :



Compte tenu du stigmatisme suggéré par les conditions de Gauss, ces trois rayons sont issus d'un même point B , auquel cas ils émergent de \mathcal{L} en passant par un même point B' image de B (ici les prolongements des rayons émergeant de \mathcal{L} peuvent être impliqués dans la formation du point d'intersection commun) :



Remarque – Dans la pratique, le tracé de deux de ces rayons remarquables suffit souvent pour trouver leur intersection B' .

- (b) La construction géométrique précédente suggère que l'image $A'B'$ est virtuelle car seuls les prolongements des rayons admettent B' comme point d'intersection. Cette constatation peut être confirmée par le calcul si l'on peut prouver que $\overline{OA'} < 0$. En effet, dans ce cas, $A'B'$ se trouve à gauche de \mathcal{L} et compte tenu du sens de propagation de la lumière, il est impossible que des rayons émergeant de \mathcal{L} puissent rebrousser chemin pour converger réellement en A' ou B' . Pour cela, rappelons la formule de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'}$$

L'énoncé précise, en outre, que $\overline{AF'} > 0$, ce qui conduit à :

$$\overline{OA} = \overline{OF'} + \overline{F'A} = \overline{OF'} - \overline{AF'} = -OF' - AF' < 0 \Rightarrow \overline{OA} = -OA$$

car pour une lentille divergente, $\overline{OF'} < 0 \Rightarrow \overline{OF'} = -OF'$.

Quant à la distance focale f' , étant donné son signe ($f' < 0 \Rightarrow f' = -|f'|$), il s'ensuit que :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} = -\left(\frac{1}{OA} + \frac{1}{|f'|}\right) < 0$$

ce qui signifie également que :

$$\overline{OA'} < 0 \Rightarrow A'B' \text{ est virtuel}$$

3. Application numérique.

- (a) La formule de conjugaison de Descartes fournit directement :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{A'O}} = -\frac{1}{\overline{OA}} - \frac{1}{f'}$$

soit encore :

$$\begin{cases} \overline{OA} = -7,5 \text{ cm} \\ f' = -5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\overline{A'O}} = \frac{1}{7,5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{A'O} = 3 \text{ cm}$$

- (b) Le grandissement transversal $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ est aussi donné par la relation :

$$\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'O}}{\overline{AO}} = \frac{3}{7,5} \Rightarrow \gamma = 0,4$$

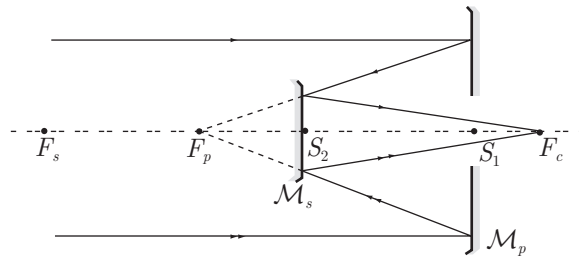
● 91 ————— Concours ENSI

1. Le rayon du miroir primaire \mathcal{M}_p valant $R_p = 30$ m, la distance qui sépare S_1 du foyer F_p vaut $S_1F_p = \frac{R_p}{2} = 15$ m. En outre, pour le miroir concave, le foyer F_p se trouve à l'avant de S_1 , de sorte que :

$$\overline{S_1F_p} = -15 \text{ m}$$

2. Soit F_s le foyer du miroir secondaire, situé à gauche de S_2 , tel que si $R_s = 32$ m désigne le rayon de \mathcal{M}_s :

$$\overline{S_2F_s} = -\frac{R_s}{2} = -16 \text{ m}$$



Le miroir \mathcal{M}_s forme l'image F_c de F_p conformément à la relation de conjugaison de Descartes avec origine au sommet :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{1}{\overline{SF}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{S_2F_c}} + \frac{1}{\overline{S_2F_p}} = \frac{1}{\overline{S_2F_s}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{S_2F_c}} = \frac{1}{\overline{S_2F_s}} - \frac{1}{\overline{S_2F_p}}$$

avec : $\overline{S_2F_s} = -16$ m et :

$$\overline{S_2F_p} = \overline{S_2S_1} + \overline{S_1F_p} = 9 - 15 = -6 \text{ m}$$

Par suite :

$$\frac{1}{\overline{S_2F_c}} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{6} \Rightarrow \overline{S_2F_c} = 9,6 \text{ m}$$

Il s'ensuit que :

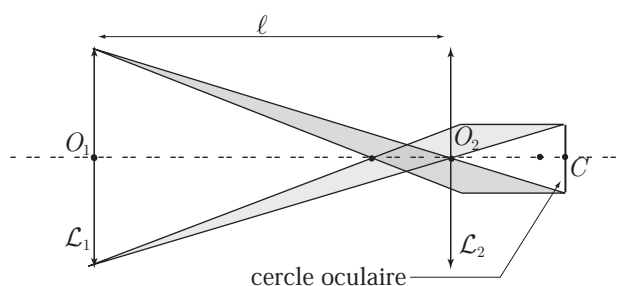
$$\overline{S_1F_c} = \overline{S_1S_2} + \overline{S_2F_c} = -9 + 9,6 \Rightarrow \overline{S_1F_c} = 0,6 \text{ m}$$

● 92 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. La longueur de la lunette est réglée de manière à assurer une observation sans accommodation, c'est-à-dire à l'infini. Par conséquent, les objets que l'œil observe à travers \mathcal{L}_2 se trouvent dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 ; il en va ainsi du micromètre (\mathcal{M}) et de l'image A_1B_1 que l'objectif \mathcal{L}_1 donne d'un objet AB . Par ce moyen, \mathcal{M} et A_1B_1 superposent leurs images observées, à l'infini, par l'œil.

L'œil doit être placé au cercle oculaire de la lunette pour percevoir le *maximum* de lumière. Ce cercle oculaire, de centre C , est l'image que \mathcal{L}_2 forme de \mathcal{L}_1 conformément à la formule de Descartes (O_2 désigne le centre optique de \mathcal{L}_2 et O_1 celui de \mathcal{L}_1) :

$$\frac{1}{\overline{O_2C}} - \frac{1}{\overline{O_2O_1}} = \frac{1}{f'_2}$$



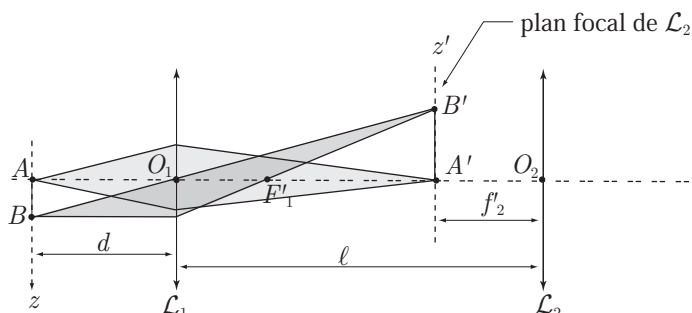
Sachant que $\overline{O_2O_1} = -\ell$, cette relation fournit :

$$\frac{1}{\overline{O_2C}} = \frac{1}{f'_2} - \frac{1}{\ell} \quad (39)$$

et notamment, si $\ell \gg f'_2$, cette équation devient :

$$\frac{1}{\overline{O_2C}} \simeq \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \overline{O_2C} \simeq f'_2 = \overline{OF'_2} \Rightarrow C \simeq F'_2 \quad (40)$$

2. Deux points A (appartenant à l'axe optique) et B , situés à une distance d de \mathcal{L}_1 , forment par \mathcal{L}_1 des images respectives A' et B' dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 :



La formule de Descartes décrivant la conjugaison de A et A' impose :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

avec : $\overline{O_1A} = -d$ et : $\overline{O_1A'} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A'} = \ell - f'_2$. Par conséquent, le réglage de netteté de la lunette est traduit par la relation :

$$\frac{1}{\ell - f'_2} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'_1} \quad (41)$$

3. (a) Le grandissement γ_1 de l'objectif vérifie :

$$\gamma_1 = \frac{A'B'}{AB} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1A}} \Rightarrow |\gamma_1| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} \quad (42)$$

avec : $\overline{O_1A'} = \ell - f'_2$ et $\overline{O_1A} = d$, de sorte que :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{\ell - f'_2}{d} \Rightarrow AB = \frac{d}{\ell - f'_2} \times A'B'$$

Considérons, maintenant, que pendant le temps τ la gouttelette passe du point A au point B . La vitesse de la gouttelette est alors définie par :

$$v = \frac{AB}{\tau} = \frac{d}{\ell - f'_2} \times \frac{A'B'}{\tau}$$

Les points A' et B' sont alors séparés de $\Delta z'$ graduations, c'est-à-dire d'une distance : $A'B' = \Delta z \times \varepsilon$. Par conséquent :

$$v = \frac{d}{\ell - f'_2} \times \frac{A'B'}{\tau} = \frac{d}{\ell - f'_2} \times \frac{\Delta z' \times \varepsilon}{\tau} \quad (43)$$

(b) Compte tenu de la relation (41) :

$$\frac{1}{\ell - f'_2} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \frac{d}{\ell - f'_2} + 1 = \frac{d}{f'_1} \Rightarrow \frac{d}{\ell - f'_2} = \frac{d}{f'_1} - 1$$

le résultat (43) se présente aussi sous la forme :

$$v = \left(\frac{d}{f'_1} - 1 \right) \times \frac{A'B'}{\tau} \Rightarrow \frac{d}{f'_1} - 1 = \frac{v \times \tau}{A'B'} \Rightarrow d = f'_1 \times \left(1 + \frac{v \times \tau}{A'B'} \right)$$

Pendant le temps $\tau = 10$ s le déplacement mesuré au micromètre vaut $A'B' = 0,5$ mm tandis que la vitesse de la goutte atteint $v = 0,01$ mm \cdot s⁻¹. La distance focale f'_1 valant 2 cm, il s'ensuit que :

$$d = 2 \times \left(1 + \frac{0,01 \times 10}{0,5} \right) \Rightarrow d = 2,4 \text{ cm}$$

Quant au résultat (41), il fournit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ell - f'_2} + \frac{1}{d} &= \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \frac{1}{\ell - f'_2} = \frac{1}{f'_1} - \frac{1}{d} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2,4} \\ &\Rightarrow \ell - f'_2 = 12 \text{ cm} \Rightarrow \ell = f'_2 + 12 = 0,5 + 12 \\ &\Rightarrow \ell = 12,5 \text{ cm} \end{aligned}$$

Remarque – À partir de ces valeurs numériques, il devient possible de confirmer le résultat (40) : $\overline{O_2C} \simeq f'_2$. En effet, l'équation (39) devient :

$$\frac{1}{\overline{O_2C}} = \frac{1}{f'_2} - \frac{1}{\ell} = \frac{1}{0,5} - \frac{1}{12,5} = 1,92 \text{ cm}^{-1} \Rightarrow \overline{O_2C} = 0,52 \text{ cm}$$

ce qui justifie l'approximation :

$$\overline{O_2C} = 0,52 \text{ cm} \simeq f'_2 = 0,5 \text{ cm}$$

● 93 ————— Concours ENSI

L'objet observé à l'infini possède un point A périphérique, sur l'axe optique, et un point B diamétralement opposé, hors de l'axe optique. On appellera A_1 , B_1 les images de

A, B par le premier miroir (\mathcal{M}_1) et A', B' les images de A_1, B_1 par le second miroir (\mathcal{M}_2) :

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{M}_1} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{M}_2} \begin{pmatrix} A' \\ B' \end{pmatrix}$$

L'objet AB se trouvant à l'infini, son image A_1B_1 est localisée dans le plan focal de \mathcal{M}_1 , en conséquence de quoi A_1 est confondu avec F_1 :

$$\overline{F_1 A_1} = 0 \quad (44)$$

Quant au miroir \mathcal{M}_2 , sa relation de conjugaison impose :

$$\frac{1}{\overline{C_2 A'}} + \frac{1}{\overline{C_2 A_1}} = \frac{2}{R_2} \quad (45)$$

avec :

$$\overline{C_2 A_1} = \overline{C_2 S_2} + \overline{S_2 F_1} + \overline{F_1 A_1}$$

où le résultat (44) indique que $\overline{F_1 A_1} = 0$ et l'énoncé précise que :

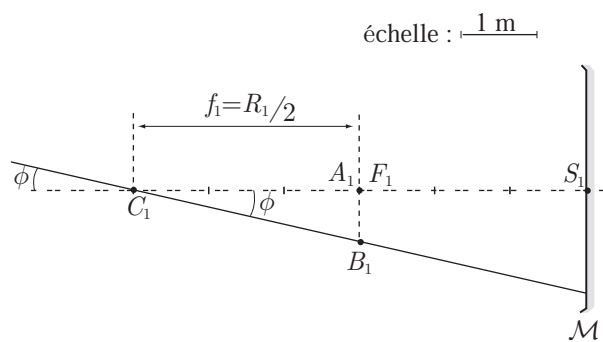
$$\begin{cases} \overline{C_2 S_2} = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m} \\ \overline{S_2 F_1} = 20 \text{ cm} = 0,2 \text{ m} \end{cases} \Rightarrow \overline{C_2 A_1} = 0,6 + 0,2 = 0,8 \text{ m} \quad (46)$$

L'équation (45) devient ainsi :

$$\frac{1}{\overline{C_2 A'}} + \frac{1}{0,8} = \frac{2}{0,6} \Rightarrow \frac{1}{\overline{C_2 A'}} = \frac{1}{0,3} - \frac{1}{0,8} = \frac{0,5}{0,24} \quad (47)$$

$$\Rightarrow \overline{C_2 A'} = \frac{0,24}{0,5} = 0,48 \text{ m} = 48 \text{ cm} \quad (48)$$

Parmi les rayons émis par le point B , celui passant par C_1 n'est pas dévié et son intersection avec le plan focal de \mathcal{M}_1 coïncide avec B_1 :



Ce schéma révèle que :

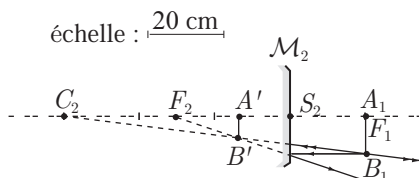
$$\tan \phi = \frac{A_1 B_1}{f_1} \Rightarrow A_1 B_1 = f_1 \tan \phi = \frac{R_1}{2} \tan \phi$$

où $\phi \ll 1 \Rightarrow \tan \phi \simeq \phi$ conduit à :

$$A_1 B_1 = \frac{R_1 \phi}{2} \quad (49)$$

De même, des rayons issus de B_1 , deux se réfléchissent de manière remarquable sur \mathcal{M}_2 pour former B' :

- le rayon incident, parallèle à l'axe optique, passe par le foyer F_2 de \mathcal{M}_2 ;
- le rayon incident se dirigeant vers C_2 n'est pas dévié.



Les droites $(A'B')$ et (A_1B_1) sont parallèles tandis que C_2 est le point d'intersection des droites (C_2B_1) et (C_2A_1) ; les conditions d'application du théorème de Thalès sont réunies :

$$\frac{A'B'}{C_2A'} = \frac{A_1B_1}{C_2A_1} \Rightarrow A'B' = A_1B_1 \times \frac{C_2A'}{C_2A_1}$$

où les résultats (48) et (46) fournissent :

$$\overline{C_2A'} = 0,48 \text{ m} \Rightarrow C_2A' = 0,48 \text{ m et } \overline{C_2A_1} = 0,8 \text{ m} \Rightarrow C_2A_1 = 0,8 \text{ m}$$

Il s'ensuit que :

$$A'B' = A_1B_1 \times \frac{0,48}{0,8} = 0,6 \times A_1B_1$$

Le résultat (49) indique, quant à lui, que :

$$A_1B_1 = \frac{R_1 \phi}{2} \Rightarrow A'B' = 0,3 \times R_1 \times \phi$$

où ϕ doit être exprimé en radian (180° représentant π radians, $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ radian) :

$$\begin{aligned} \phi = 0,5^\circ &= \frac{0,5 \times \pi}{180} \Rightarrow A'B' = 0,3 \times 6 \times \frac{0,5 \times \pi}{180} = 0,0157 \text{ m} \\ &\Rightarrow A'B' = 15,7 \text{ mm} \end{aligned}$$

● 94 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

1. Soit A_1B_1 l'image que l'objectif (de centre optique O_1) forme de AB et soit $A'B'$ l'image de A_1B_1 à travers l'oculaire (de centre optique O_2). La formule de Descartes s'applique à ces deux lentilles :

- pour l'objectif \mathcal{L}_1 :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

mais puisque AB se trouve à l'infini, $\overline{O_1A}$ tend vers l'infini, de sorte que :

$$\frac{1}{\overline{O_1A}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A_1}} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \overline{O_1A_1} = f'_1 \quad (50)$$

- Pour l'oculaire \mathcal{L}_2 :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

où $\frac{1}{O_2A'} = 0$ lorsque la distance $e = \overline{O_1O_2}$ séparant les deux lentilles est réglée de manière à assurer l'observation de $A'B'$ sans accommodation du cristallin : O_2A' tend vers l'infini, d'où il découle que :

$$-\frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \overline{O_2A_1} = -f_2' \Rightarrow \overline{A_1O_2} = f_2' \quad (51)$$

La distance e séparant les deux lentilles est définie par :

$$e = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1A_1} + \overline{A_1O_2}$$

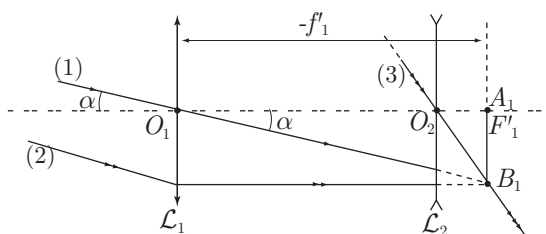
soit, compte tenu des expressions (50) et (51) :

$$e = f_1' + f_2'$$

2. Considérons séparément l'influence des deux lentilles :

- L'objectif \mathcal{L}_1 forme de B une image B_1 que l'on peut retrouver en traçant deux rayons remarquables :
 - le rayon (1) issu de B et traversant \mathcal{L}_1 en son centre optique O_1 n'est pas dévié par \mathcal{L}_1 .
 - le rayon (2) passant par le foyer objet F_1 de \mathcal{L}_1 ressort de \mathcal{L}_1 parallèlement à l'axe optique.

Ces deux rayons provenant du même point B situé à l'infini, ils arrivent parallèles sur \mathcal{L}_1 , sous un angle α par rapport à l'axe optique. En outre, le stigmatisme impose aux rayons réfractés de se rejoindre en B_1 . Cependant, la lentille \mathcal{L}_2 y fait obstacle, de sorte que seuls leurs prolongements (en pointillé) peuvent concourir en B_1 :



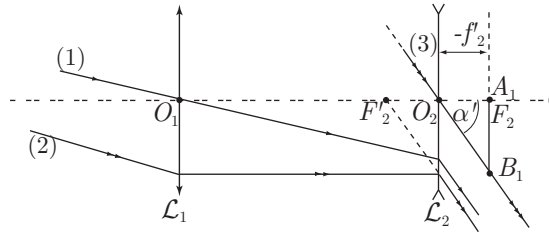
Remarquons dès à présent que B_1 se trouve dans le plan focal image de \mathcal{L}_1 , ce qui signifie que A_1 est confondu avec le foyer image F_1' de \mathcal{L}_1 et donc que :

$$O_1F_1' = f_1'$$

De plus, signalons que tout rayon incident parallèle à (1) et (2) arrivant sur \mathcal{L}_1 en ressort en convergeant vers B_1 , ce qui est le cas notamment du rayon (3) qui passe par le centre optique O_2 de \mathcal{L}_2 .

- L'oculaire \mathcal{L}_2 forme de B_1 une image à l'infini, ce qui signifie également que A_1B_1 est situé dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 et donc que A_1 est confondu avec le foyer objet F_2 de \mathcal{L}_2 .
Quant aux rayons (1), (2) et (3) déjà tracés sur la figure ci-dessus, leur trajet, à la sortie de \mathcal{L}_2 , se prévoit aisément :

- le rayon (2) arrive sur \mathcal{L}_2 parallèlement à l'axe optique et en émerge donc avec un prolongement qui intercepte le foyer image F'_2 de \mathcal{L}_2 ;
- le rayon (3) traverse \mathcal{L}_2 en son centre optique O_2 et n'est pas dévié par \mathcal{L}_2 ;
- le rayon (1) émerge de \mathcal{L}_2 parallèlement aux deux autres rayons.



À nouveau, remarquons que la coïncidence des points A_1 et F'_2 entraîne que :

$$\overline{O_2A_1} = \overline{O_2F'_2} = -f'_2$$

3. Les figures précédentes indiquent que :

- dans le triangle $(O_1A_1B_1)$: $\tan \alpha = \frac{A_1B_1}{O_1A_1} = \frac{A_1B_1}{f'_1} \Rightarrow \alpha \simeq \frac{A_1B_1}{f'_1}$
- dans le triangle $(O_2A_1B_1)$: $\tan \alpha' = \frac{A_1B_1}{O_2A_1} = \frac{A_1B_1}{-f'_2} \Rightarrow \alpha' \simeq -\frac{A_1B_1}{f'_2}$

Par conséquent, le grossissement de cette lentille vaut :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{A_1B_1}{f'_2} \times \frac{f'_1}{A_1B_1} \Rightarrow G = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

4. Application numérique :

$$\begin{cases} f'_1 = 20 \text{ cm} \\ f'_2 = -5 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow G = \frac{20}{5} = 4$$

5. Si $A'B'$ désigne l'image que la lunette forme de AB , le grandissement est défini par :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} \times \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}$$

où l'on reconnaît :

- la définition du grandissement de \mathcal{L}_1 : $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}$ avec :

$$\begin{cases} \overline{O_1A_1} > 0 \\ \overline{O_1A} < 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_1 < 0$$

- la définition du grandissement de \mathcal{L}_2 : $\gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{A_1B_1} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}$ avec :

$$\begin{cases} \overline{O_2A'} > 0 \\ \overline{O_2A_1} > 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma_2 > 0$$

Il s'ensuit que :

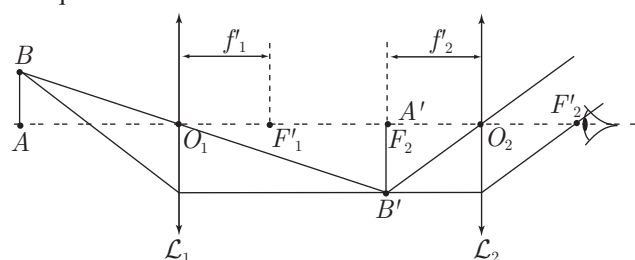
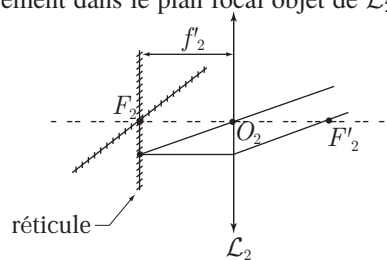
$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \gamma_1 \times \gamma_2 < 0$$

ce qui révèle que l'image $A'B'$ est renversée par rapport à l'objet AB , ce qui confirme, du reste, le schéma de la dernière figure. Cette figure indique, de surcroît, qu'un œil placé à droite de l'oculaire observerait une image dans le même sens que AB car, si les rayons arrivent sur \mathcal{L}_1 depuis le haut de l'axe optique (ce qui est le cas sur la figure), ils parviennent également dans l'œil depuis le haut de l'axe optique.

95 ————— Concours Icare

1. Caractéristiques de la lunette

- (a) Pour observer, sans effort, le réticule à travers l'oculaire, l'œil doit recevoir des rayons parallèles (l'œil normal voit nettement et sans effort des objets à l'infini), ce qui signifie également que l'oculaire (lentille convergente \mathcal{L}_2 , de centre optique O_2 et de distance focale image f'_2) forme du réticule une image à l'infini. Le réticule se trouve alors nécessairement dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 . Pour recevoir le maximum de rayons lumineux, l'œil de l'utilisateur doit être placé au cercle oculaire, image de \mathcal{L}_1 par \mathcal{L}_2 . Or, ce cercle oculaire étant très proche du foyer image F'_2 de \mathcal{L}_2 , l'œil devra se situer au voisinage de F'_2 . Dans ce cas, l'image observée par l'œil sera la plus lumineuse. Cependant, cette contrainte n'est pas impérative, à condition que l'observateur se satisfasse d'une image plus sombre.
- (b) Un objet AB forme, par \mathcal{L}_1 , une image $A'B'$ dans le plan focal objet de l'oculaire \mathcal{L}_2 , afin que l'œil effectue une observation sans effort :



Cette condition impose : $\overline{O_2A'} = -f'_2$, tandis que la relation de conjugaison entre A et A' suit la formule de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} \quad (52)$$

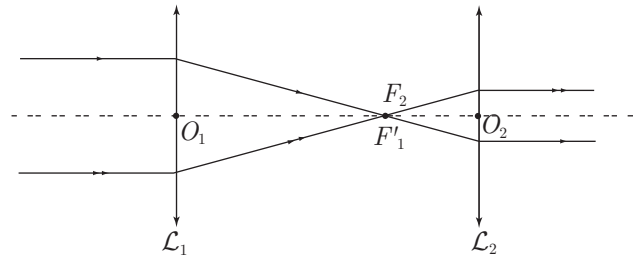
où $\frac{1}{\overline{O_1A}} = 0$ lorsque \overline{AB} est situé à grande distance de l'objectif (car $\overline{O_1A}$ tend alors vers l'infini). Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \overline{O_1A'} = f'_1$$

Par suite, la distance entre l'objectif et l'oculaire vaut :

$$L_0 = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1A'} + \overline{A'O_2} \Rightarrow L_0 = \overline{O_1O_2} = f'_1 + f'_2 \quad (53)$$

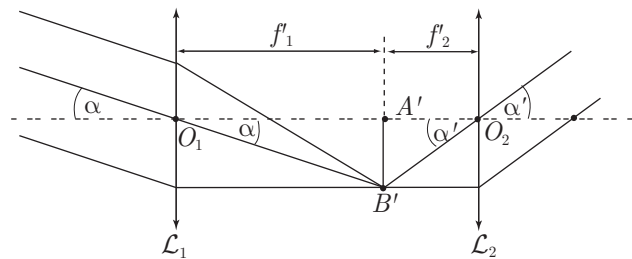
L'égalité $\overline{O_1A'} = f'_1 = \overline{OF'_1}$ montre que A' est confondu avec le foyer image de \mathcal{L}_1 et, puisque A' est aussi confondu avec le foyer objet F_2 de \mathcal{L}_2 , cela signifie que les foyers F'_1 et F_2 sont confondus :



L'image, par l'ensemble de la lunette, d'un point objet A situé à l'infini est également située à l'infini et c'est la raison pour laquelle :

la lunette est afocale

- (c) Soit \overline{AB} un objet situé à l'infini, dont \mathcal{L}_1 forme une image $\overline{A'B'}$ dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 :



L'objet \overline{AB} serait aperçu, sans lunette, sous un angle orienté α , tandis qu'avec la lunette l'observateur voit l'image $\overline{A'B'}$ sous un angle orienté α' . Les triangles $(O_1A'B')$ et $(O_2A'B')$ définissent :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1A'}} \simeq \alpha \quad \text{et} \quad \tan \alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2A'}} \simeq \alpha'$$

en conséquence de quoi le grossissement G de la lunette vérifie :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2A'}} \times \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{A'B'}} \Rightarrow G = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_2A'}}$$

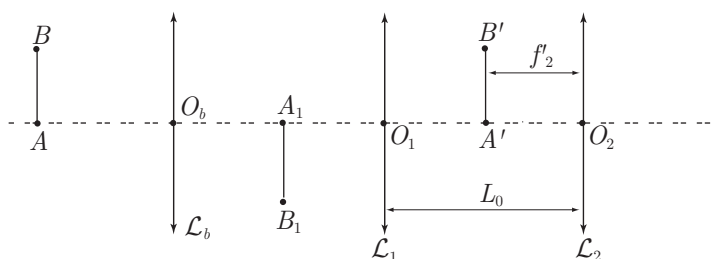
avec :

$$\begin{cases} \overline{O_2 A'} = -f'_2 \\ \overline{O_1 A'} = f'_1 \end{cases} \Rightarrow G = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

Les lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 étant convergentes, f'_1 et f'_2 sont positifs, de sorte que le grossissement G apparaît négatif, ce qui signifie également que la lunette inverse le sens des images par rapport à celui des objets correspondants. Une telle inversion ne peut cependant être satisfaisante si l'objet observé présente une dissymétrie (le haut de l'objet serait observé vers le bas), avec ou sans micromètre. En revanche, l'observation d'objets symétriques (par exemple des étoiles) demeure envisageable avec une telle lunette.

2. Transformation en frontale fixe par adjonction d'une bonnette

- (a) Assimilons la bonnette à une lentille convergente \mathcal{L}_b , de distance focale image f'_b et de centre optique O_b . Soit $A_1 B_1$ l'image que la bonnette donne d'un objet AB à une distance finie de O_b :



L'image $A' B'$ que \mathcal{L}_1 forme de $A_1 B_1$ se trouve dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 (ce qui permet à l'œil une observation sans effort), tandis que la distance entre l'oculaire et l'objectif est donnée par le résultat (53) : $L_0 = f'_1 + f'_2$. La relation de conjugaison entre les points A_1 et A' s'écrit aussi :

$$\frac{1}{\overline{O_1 A'}} - \frac{1}{\overline{O_1 A_1}} = \frac{1}{f'_1}$$

avec :

$$\begin{aligned} \overline{O_1 A'} &= \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 A'} \Rightarrow \overline{O_1 A'} = L_0 - f'_2 = f'_1 + f'_2 - f'_2 = f'_1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{f'_1} - \frac{1}{\overline{O_1 A_1}} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1 A_1}} = 0 \\ &\Rightarrow \overline{O_1 A_1} \rightarrow \pm\infty \end{aligned}$$

De même, la formule de Descartes décrit la conjugaison des points A et A_1 par \mathcal{L}_b :

$$\frac{1}{\overline{O_b A_1}} - \frac{1}{\overline{O_b A}} = \frac{1}{f'_b}$$

avec :

$$\overline{O_b A_1} = \overline{O_b O_1} + \underbrace{\overline{O_1 A_1}}_{\pm\infty} \Rightarrow \overline{O_b A_1} \rightarrow \pm\infty \quad (54)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_b A_1}} = 0 \quad (55)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\overline{O_b A}} = \frac{1}{f'_b} \quad (56)$$

c'est-à-dire :

$$\overline{O_b A} = -f'_b \quad (57)$$

Ce résultat montre que la distance entre AB et la bonnette vaut f'_b et est donc déterminée ; ce dispositif permet de viser des objets à la distance f'_b de la bonnette.

Remarque – Les calculs précédents ont utilisé l'équivalence :

$$\frac{1}{O_1 A_1} = 0 \Rightarrow \overline{O_1 A_1} \rightarrow \pm\infty$$

Il aurait aussi été possible de poser : $\frac{1}{O_1 A_1} = \varepsilon$ et faire tendre ε vers zéro.

Dans ce cas, l'équation (54) serait devenue :

$$\begin{aligned} \overline{O_b A_1} &= \overline{O_b O_1} + \frac{1}{\varepsilon} = \frac{\varepsilon \times \overline{O_b O_1} + 1}{\varepsilon} \\ \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_b A_1}} &= \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \times \overline{O_b O_1}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_b A}} &= \frac{1}{\overline{O_b A_1}} - \frac{1}{f'_b} = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \times \overline{O_b O_1}} - \frac{1}{f'_b} \end{aligned}$$

soit encore :

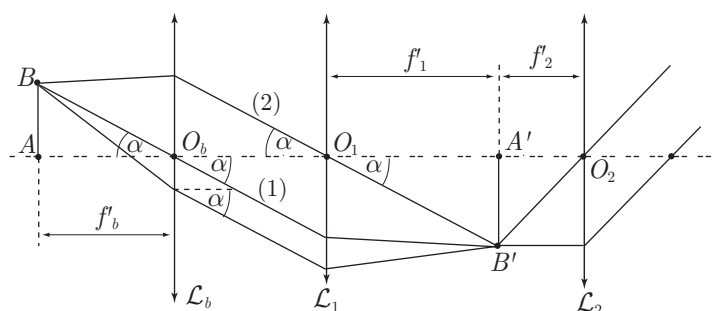
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\overline{O_b A}} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \times \overline{O_b O_1}} \right) - \frac{1}{f'_b} = -\frac{1}{f'_b}$$

ce qui permet, heureusement, de confirmer que $\overline{O_b A} = -f'_b$.

La remarque précédente a permis d'obtenir :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\overline{O_b A}} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon \times \overline{O_b O_1}} \right) - \frac{1}{f'_b} = -\frac{1}{f'_b}$$

ce qui signifie aussi que la distance $O_b A$ vaut f'_b indépendamment de la distance $O_b O_1$, c'est-à-dire quelle que soit la distance séparant la bonnette de l'objectif. Ce résultat peut être compris autrement : pour que l'objectif forme une image dans son plan focal image, les rayons incidents doivent être parallèles entre eux. Ceci est assuré par la présence de AB dans le plan focal objet de la bonnette \mathcal{L}_b , en conséquence de quoi les rayons lumineux entre \mathcal{L}_b et \mathcal{L}_1 demeurent parallèles entre eux quelle que soit la distance séparant les deux lentilles :



(b) Le schéma précédent montre qu'entre \mathcal{L}_b et \mathcal{L}_1 deux rayons remarquables sont parallèles :

- le rayon (1) qui, issu de B , traverse \mathcal{L}_b en O_b sans être dévié, et à partir duquel est défini l'angle α (non orienté) que fait BO_b avec l'axe optique. Dans le triangle (ABO_b) : $\tan \alpha = \frac{AB}{f'_b}$.
- le rayon (2) qui traverse \mathcal{L}_1 en O_1 sans être dévié et qui fait aussi un angle α par rapport à l'axe optique (les rayons (1) et (2) sont parallèles entre \mathcal{L}_b et \mathcal{L}_1). Dans le triangle $(A'B'O_1)$: $\tan \alpha = \frac{A'B'}{f'_1}$.

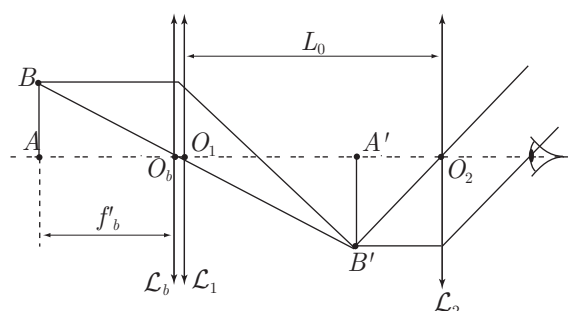
De ces définitions, il ressort que :

$$\tan \alpha = \frac{AB}{f'_b} = \frac{A'B'}{f'_1} \Rightarrow AB = A'B' \times \frac{f'_b}{f'_1}$$

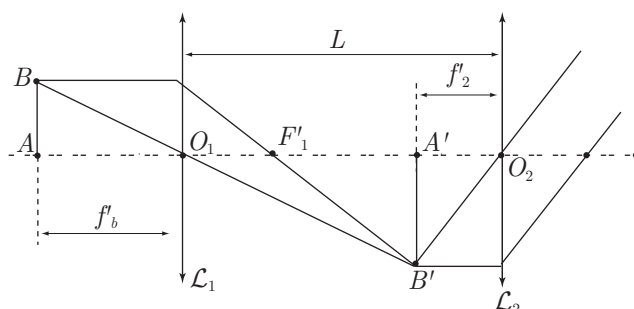
Cette relation montre l'intérêt de la lunette à frontale fixe : connaissant la taille de $A'B'$ qui se superpose au réticule (gradué), les distances focales f'_b et f'_1 étant également connues, on peut déterminer, la taille d'un objet AB éloigné.

3. Transformation en frontale fixe par déplacement de l'objectif

Si la bonnette était collée à l'objectif \mathcal{L}_1 , la distance entre O_1 et l'objet AB vaudrait f'_b (conformément aux questions précédentes) et la distance séparant l'objectif \mathcal{L}_1 de l'oculaire \mathcal{L}_2 vaudrait $L_0 = f'_1 + f'_2$, conformément au résultat (53) :



On convient, cependant, d'obtenir l'image $A'B'$ (dans le plan focal de \mathcal{L}_2 pour permettre à l'œil une observation sans accommodation) en remplaçant la bonnette par un allongement de la distance O_1O_2 qui sépare l'objectif de l'oculaire ; soit L cette nouvelle distance :



La relation de conjugaison de Descartes entre les points A et A' suit la loi (52) :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'}$$

avec : $\overline{O_1A} = -f_b'$ et $\overline{O_1A'} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A'} = L - f_2'$, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L - f_2'} + \frac{1}{f_b'} &= \frac{1}{f_1'} \Rightarrow \frac{1}{L - f_2'} = \frac{1}{f_1'} - \frac{1}{f_b'} = \frac{f_b' - f_1'}{f_1' f_b'} \\ &\Rightarrow L - f_2' = \frac{f_1' f_b'}{f_b' - f_1'} \\ &\Rightarrow L = f_2' + \frac{f_1' f_b'}{f_b' - f_1'} \end{aligned}$$

Par conséquent, il faut déplacer l'objectif d'une distance D telle que :

$$\begin{aligned} D = L - L_0 &= f_2' + \frac{f_1' f_b'}{f_b' - f_1'} - f_2' - f_1' \\ &= \frac{f_1' f_b' - f_1' f_b' + (f_1')^2}{f_b' - f_1'} \\ &\Rightarrow \boxed{D = \frac{(f_1')^2}{f_b' - f_1'}} \end{aligned}$$

● 96 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

1. L'image B_1 que forme la lentille \mathcal{L}_1 , de distance focale image f_1' , est située dans le plan focal image de \mathcal{L}_1 , soit à une distance f_1' de O_1 . En outre, la lentille \mathcal{L}_2 , de distance focale image f_2' , doit former une image B' de B_1 en l'infini (l'œil de l'observateur accommodé à l'infini). C'est pourquoi B_1 se trouve également dans le plan focal objet de \mathcal{L}_2 , c'est-à-dire à une distance f_2' de O_2 (voir figure 1). Il apparaît donc que :

$$\boxed{O_1O_2 = f_1' + f_2' = 12 \text{ cm}}$$

2. Grossissement

- (a) Parmi tous les rayons issus de l'objet B , situé à l'infini (ces rayons sont donc parallèles) deux sont remarquables :

- le rayon (1) passant par le foyer objet F_1 de \mathcal{L}_1 ressort de la lentille parallèlement à l'axe optique ;
- le rayon (2) passant par le centre optique O_1 de \mathcal{L}_1 n'est pas dévié.

L'intersection de ces rayons coïncide avec l'image B_1 de B par \mathcal{L}_1 .

De même, parmi tous les rayons issus de B_1 , deux sont remarquables :

- le rayon (1) arrivant sur \mathcal{L}_2 parallèlement à l'axe optique émerge de \mathcal{L}_2 en passant par son foyer image F'_2 ;
- le rayon (3) passant par le centre optique O_2 de \mathcal{L}_2 n'est pas dévié.

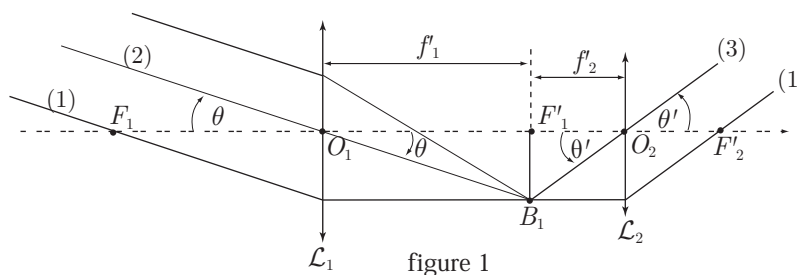


figure 1

- (b) Le schéma de la figure 1 indique que les angles orientés θ et θ' peuvent être définis par :

$$\tan \theta = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{\overline{O_1 F'_1}} \text{ et } \tan \theta' = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{\overline{O_2 F'_1}}$$

Or, dans l'approximation de Gauss, les angles θ et θ' sont suffisamment petits pour qu'il soit légitime de poser :

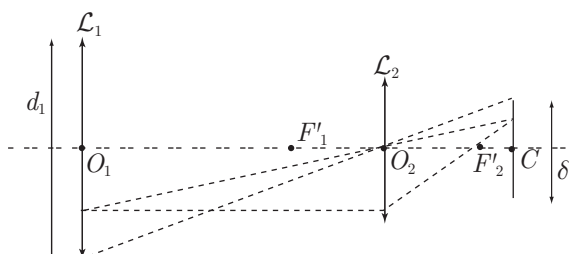
$$\begin{cases} \theta \simeq \tan \theta \\ \theta' \simeq \tan \theta' \end{cases} \Rightarrow \frac{\theta'}{\theta} \simeq \frac{\tan \theta'}{\tan \theta} = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{\overline{O_2 F'_1}} \times \frac{\overline{O_1 F'_1}}{\overline{F'_1 B_1}} = \frac{\overline{O_1 F'_1}}{\overline{O_2 F'_1}}$$

où $\overline{O_1 F'_1} = f'_1 = 10 \text{ cm}$ et $\overline{O_2 F'_1} = -f'_2 = -2 \text{ cm}$, de sorte que :

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -5$$

3. Cercle oculaire

- (a) Soit C la position du cercle oculaire sur l'axe optique :



Puisque C est l'image de O_1 par \mathcal{L}_2 , il convient d'écrire la relation de conjugaison relative à \mathcal{L}_2 :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{O_2C}} - \frac{1}{\overline{O_2O_1}} &= \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2C}} = \frac{1}{\overline{O_2O_1}} + \frac{1}{f'_2} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2C}} = \frac{-1}{f'_1 + f'_2} + \frac{1}{f'_2} \\ &\Rightarrow \overline{O_2C} = \frac{f'_2(f'_1 + f'_2)}{f'_1} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\overline{O_2C} = \frac{2 \times (10 + 2)}{10} \Rightarrow \overline{O_2C} = 2,4 \text{ cm}$$

- (b) Représentons la trajectoire d'un faisceau de lumière parallèle prenant appui sur les bords de l'oculaire (lentille \mathcal{L}_1) :

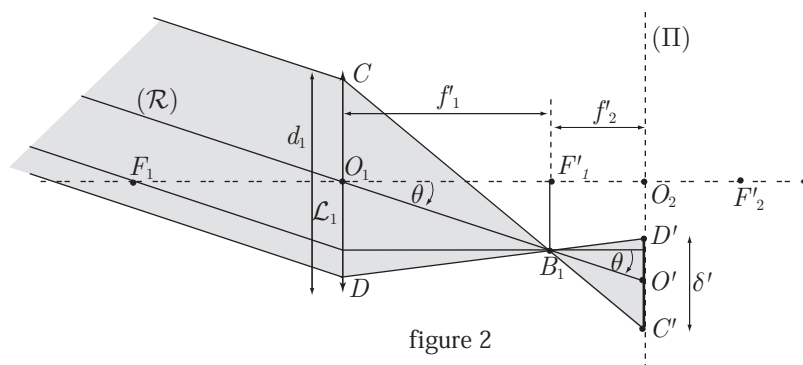


figure 2

Le rayon (\mathcal{R}) , passant par O_1 et n'étant donc pas dévié, arrive sur le plan (Π) de la lentille \mathcal{L}_2 en un point O' . Les rayons prenant appui sur les bords de l'objectif aux points C et D passent par B_1 (car ils sont parallèles à (\mathcal{R}) et B_1 est situé dans le plan focal image de \mathcal{L}_1) et arrivent sur (Π) aux points C' et D' respectivement. Le théorème de Thalès permet alors de poser :

$$\frac{CD}{O_1B_1} = \frac{C'D'}{O'B_1} \Rightarrow C'D' = CD \times \frac{O'B_1}{O_1B_1} \Rightarrow \delta' = d_1 \times \frac{O'B_1}{O_1B_1}$$

où l'on reconnaît sur la figure 2 :

$$\begin{cases} O_1B_1 \times \cos \theta = O_1F'_1 = f'_1 \\ O'B_1 \times \cos \theta = f'_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{O'B_1}{O_1B_1} = \frac{f'_2}{f'_1}$$

Par conséquent, il se forme sur le plan (Π) un cercle de diamètre :

$$\delta' = d_1 \times \frac{f'_2}{f'_1} \quad (58)$$

Application numérique :

$$\delta' = 3 \times \frac{2}{10} \Rightarrow \delta' = 0,6 \text{ cm}$$

Ce cercle est entièrement compris dans la monture de l'oculaire à condition que $O_2O' < \frac{d_2}{2}$ (d_2 représentant le diamètre de l'oculaire), c'est-à-dire, compte tenu du résultat (58) :

$$\begin{aligned} O_2O' + O'C' < \frac{d_2}{2} &\Rightarrow O_2O' < \frac{d_2}{2} - \frac{\delta'}{2} \Rightarrow O_2O' < \frac{d_2}{2} - \frac{d_1}{2} \times \frac{f_2'}{f_1} \\ &\Rightarrow O_2O' < \frac{d_2f_1' - d_1f_2'}{2f_1'} \end{aligned}$$

En outre, la figure 2 indique que :

$$\tan \theta = \frac{O_2O'}{f_1' + f_2'} \Rightarrow \tan \theta < \frac{d_2f_1' - d_1f_2'}{2f_1'(f_1' + f_2')}$$

Application numérique :

$$\tan \theta < \frac{1 \times 10 - 3 \times 2}{2 \times 10 \times (10 + 2)} = 0,016 \Rightarrow \theta < 57,3'$$

En revanche, tous les rayons entrant dans le système optique sont interceptés par l'oculaire lorsque : $O_2D' > \frac{d_2}{2}$, avec :

$$\begin{aligned} O_2D' = O_2O' - O'D' &\Rightarrow O_2O' > O'D' + \frac{d_2}{2} \\ &\Rightarrow O_2O' > \frac{\delta'}{2} + \frac{d_2}{2} = \frac{d_1}{2} \times \frac{f_2'}{f_1} + \frac{d_2}{2} \\ &\Rightarrow O_2O' > \frac{d_1f_2' + d_2f_1'}{2f_1'} \end{aligned}$$

où :

$$\tan \theta = \frac{O_2O'}{f_1' + f_2'} \Rightarrow \tan \theta > \frac{d_1f_2' + d_2f_1'}{2f_1'(f_1' + f_2')}$$

Application numérique :

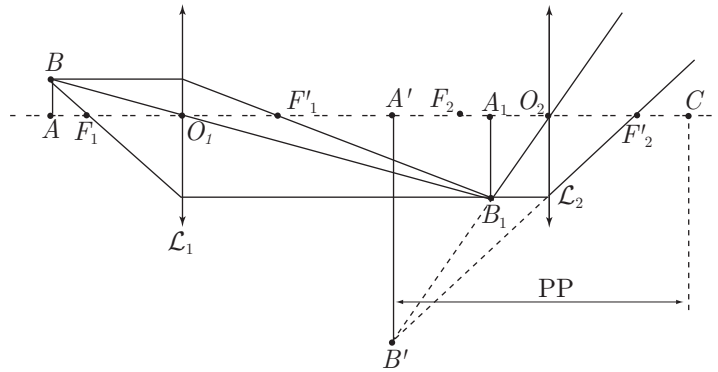
$$\tan \theta > \frac{3 \times 2 + 1 \times 10}{2 \times 10 \times (10 + 2)} = 0,066 \Rightarrow \theta > 3,8^\circ = 229'$$

- (c) Nous venons de montrer que pour $\theta < 57,3'$, tous les rayons qui traversent l'objectif traversent également l'oculaire. Ainsi, la zone centrale de l'objet paraît très lumineuse, tandis que ses bords ($3,8^\circ > \theta > 57'$) émettent des rayons dont certains sont arrêtés par la monture de l'oculaire. Cette perte d'énergie lumineuse se traduit par un amoindrissement de la luminosité apparente des bords de l'image.

La définition même du cercle oculaire C (image de \mathcal{L}_1 donnée par \mathcal{L}_2) suggère que tout rayon issu de \mathcal{L}_1 , et traversant \mathcal{L}_2 , doit passer par C . Le cercle oculaire constitue par conséquent une région où passent tous les rayons issus de \mathcal{L}_2 ; l'observateur a intérêt à y poser son œil pour percevoir le maximum de rayons.

4. Rôle de l'œil

- (a) Soit AB un objet dont l'image formée par \mathcal{L}_1 est A_1B_1 . Cette image est ensuite récupérée par \mathcal{L}_2 qui en forme une image $A'B'$.



L'œil peut encore voir nettement $A'B'$ lorsque ce dernier se trouve au PP, c'est-à-dire lorsque $\overline{A'C} = 25$ cm (l'œil se trouvant en C). La relation de conjugaison de \mathcal{L}_2 s'écrit alors :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{f_2'} \quad (59)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2C} + \overline{CA'}} - \frac{1}{f_2'} \quad (60)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\underbrace{2,4 - 25}_{\overline{O_2A'}}} - \frac{1}{2} = -0,544 \quad (61)$$

soit encore :

$$\overline{O_2A_1} = -1,84 \text{ cm} \quad (62)$$

Il en découle que :

$$\overline{O_1A_1} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_1} = 12 - 1,84 = 10,16 \text{ cm} \quad (63)$$

de sorte que la relation de conjugaison associée à \mathcal{L}_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} &= \frac{1}{f_1'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{f_1'} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{10,16} - \frac{1}{10} = -1,6 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

ce qui donne finalement :

$$\overline{O_1A} = -625 \text{ cm} = -6,25 \text{ m} \quad (64)$$

- (b) Les grandissements transversaux des deux lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 valent respectivement :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \text{ et } \gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}}$$

Ainsi, le grandissement transversal γ de la lunette vérifie-t-il :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \underbrace{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}}}_{\gamma_2} \times \underbrace{\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}}}_{\gamma_1} \Rightarrow \gamma = \frac{\overline{O_2A'}}{\overline{O_2A_1}} \times \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}$$

où les valeurs numériques du membre de droite ont déjà été obtenues avec les résultats (62), (63) et (64) :

$$\overline{O_2A_1} = -1,84 \text{ cm} \quad \overline{O_1A_1} = 10,16 \text{ cm} \quad \overline{O_1A} = -625 \text{ cm}$$

et où $\overline{O_2A'}$ est accessible à partir de l'équation 61 :

$$\overline{O_2A'} = 2,4 - 25 = -22,6 \text{ cm}$$

C'est pourquoi :

$$\gamma = \frac{-22,6}{-1,84} \times \frac{10,16}{-625} \Rightarrow \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -0,2 = -\frac{1}{5}$$

Partie 2

Physique

Seconde période

Chapitre 4

Électrocinétique

4.1 Régime sinusoïdal

4.1.1 Définition

Définition 1 Un dipôle est soumis à un signal périodique $i(t)$ s'il existe une durée minimum T permettant d'écrire :

$$i(t + T) = i(t) \forall t$$

T est alors appelé période du signal périodique.

Parmi tous les signaux périodiques envisageables, seuls les signaux sinusoïdaux seront étudiés dans cette partie :

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$$

où l'on introduit :

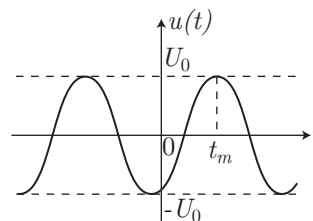
- l'amplitude U_0 de la fonction $u(t)$ (il s'agit de la plus grande valeur accessible à $u(t)$);
- la pulsation de ce signal :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

si $f = \frac{1}{T}$ désigne la fréquence de $u(t)$.

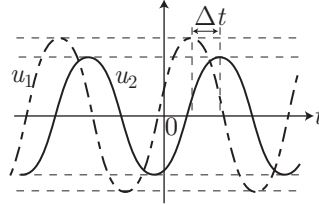
- la phase ϕ qui donne la date t_m minimale qui sépare le *maximum* (U_0) de $u(t)$, de l'axe correspondant à $t = 0$:

$$\phi = -\omega t_m$$



Remarque – Cette définition permet de trouver rapidement le déphasage $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$ entre deux signaux synchrones $u_1 = U_{10} \cos(\omega t + \phi_1)$ et $u_2 = U_{20} \cos(\omega t + \phi_2)$:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = -\omega \Delta t$$



4.1.2 Notations complexes

4.1.2.1 Rappel sur les nombres complexes

Pour éviter la confusion avec la notation i , dédiée en physique aux courants, on note j le nombre complexe tel que $(j)^2 = -1$.

Tout nombre complexe $z = a + jb$ admet également une représentation polaire :

$$z = a + jb = |z| e^{j\phi} = |z| \times (\cos \phi + j \sin \phi)$$

où :

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ désigne le *module* de z ;
- ϕ désigne son argument ($\arg \{z\}$), tel que :

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \tan \phi = \frac{b}{a}$$

- a et b sont respectivement les parties réelle ($a = \operatorname{Re} \{z\}$) et imaginaire ($b = \operatorname{Im} \{z\}$) de z .

Dans le cours de physique, seules quelques règles algébriques concernant les nombres complexes sont à retenir :

- le produit de deux nombres complexes :

$$z = z_1 \times z_2 \Rightarrow \begin{cases} |z| = |z_1| \times |z_2| \\ \phi = \phi_1 + \phi_2 \end{cases}$$

- le rapport de deux nombres complexes :

$$z = \frac{z_1}{z_2} \Rightarrow \begin{cases} |z| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \\ \phi = \phi_1 - \phi_2 \end{cases}$$

- le conjugué complexe z^* de z :

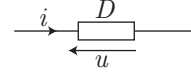
$$z^* \times z = |z|^2 \text{ avec } \begin{cases} |z^*| = |z| \\ \arg \{z^*\} = -\arg \{z\} \end{cases}$$

ou encore :

$$z = a + jb \Rightarrow z^* = a - jb$$

4.1.2.2 Impédances et admittances

Lorsqu'un dipôle (D) est traversé par un courant sinusoïdal $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$, il apparaît à ses bornes une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$. À ces grandeurs sont associées des images complexes \underline{i} et \underline{u} telles que :



$$\operatorname{Re}\{\underline{i}\} = i(t) \text{ et } \operatorname{Re}\{\underline{u}\} = u(t)$$

et c'est pourquoi \underline{i} et \underline{u} sont choisis sous la forme :

$$\underline{i} = I_0 e^{j\omega t} \text{ et } \underline{u} = U_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

Remarque – L'intérêt de cette représentation complexe repose sur la linéarisation qu'elle apporte aux équations différentielles, qui pourront toujours être remplacées par leurs images complexes :

$$a_0 + a_1 \frac{du}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n u}{dt^n} = f(t) \Rightarrow a_0 + a_1 \frac{d\underline{u}}{dt} + \dots + a_n \frac{d^n \underline{u}}{dt^n} = \underline{f}$$

où : $u = \operatorname{Re}\{\underline{u}\}$ et $f(t) = \operatorname{Re}\{\underline{f}\}$.

Définition 2 Soient \underline{u} et \underline{i} les images complexes de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle et celle du courant $i(t)$ qui le traverse. On définit l'impédance \underline{Z} et l'admittance \underline{Y} de ce dipôle par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} \text{ et } \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}}$$

La connaissance simultanée de $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et de l'impédance \underline{Z} du dipôle permet de trouver instantanément :

$$u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi) \text{ avec } \begin{cases} U_0 = |\underline{Z}| \\ \phi = \arg\{\underline{Z}\} \end{cases}$$

À chaque dipôle élémentaire sont associées une impédance \underline{Z} et une admittance \underline{Y} :

- pour la résistance : $\underline{Z} = R \Rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{R} = G$;
- pour la bobine idéale (sans résistance), d'inductance L :

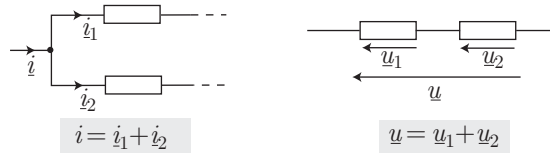
$$\underline{Z} = L\omega j \Rightarrow \underline{Y} = \frac{1}{L\omega j}$$

- pour le condensateur idéal (sans résistance de fuite), de capacité C :

$$\underline{Z} = \frac{1}{C\omega j} \Rightarrow \underline{Y} = C\omega j$$

4.1.2.3 Associations de dipôles

Les lois des mailles et des nœuds demeurent utilisables en notation complexe :



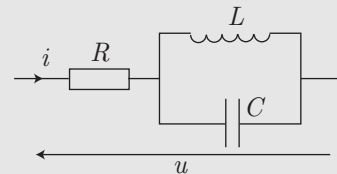
ce qui permet de déduire les lois d'association des dipôles :

- en série, les impédances s'additionnent : $\underline{Z}_{\text{série}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$;
- en parallèle les admittances s'additionnent :

$$\underline{Y}_{\parallel} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \Rightarrow \underline{Z}_{\parallel} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$



On s'intéresse au montage ci-contre, contenant des dipôles parfaits : une résistance R en série avec une bobine (d'inductance L) montée en parallèle avec un condensateur (de capacité C). L'ensemble est parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.



1. Exprimer l'impédance de cette association.
2. En déduire l'expression de la tension $u(t)$ à ses bornes.

RÉPONSE

1. L'association en parallèle de la bobine et du condensateur, d'impédances respectives $\underline{Z}_L = L\omega j$ et $\underline{Z}_C = \frac{1}{C\omega j}$, équivaut à un dipôle d'impédance $\underline{Z}_{\text{éq}}$:

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{\underline{Z}_L \times \underline{Z}_C}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{L\omega j \times \frac{1}{C\omega j}}{L\omega j + \frac{1}{C\omega j}} = \frac{L\omega j}{1 - LC\omega^2}$$

placé en série avec la résistance. Ce montage a donc pour impédance :

$$\underline{Z} = R + \underline{Z}_{\text{éq}} = R + j \frac{L\omega}{1 - LC\omega^2}$$

2. Traversé par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$, le dipôle considéré (d'impédance $\underline{Z} = Z e^{j\phi}$) présente à ses bornes une tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$, telle que :

$$U_0 = Z I_0 = I_0 \times \sqrt{R^2 + \left(\frac{L\omega}{1 - LC\omega^2} \right)^2}$$

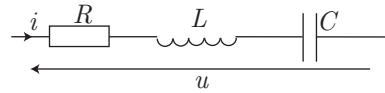
et :

$$\tan \phi = \frac{\text{Im}\{\underline{Z}\}}{\text{Re}\{\underline{Z}\}} = \frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}$$

4.2 Résonances

4.2.1 Résonance en intensité

Soit un circuit RLC série constitué d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur associés en série. Ce circuit est soumis à une tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$, où U_0 (fixe) et ω sont supposés connus. Le circuit est alors parcouru par un courant d'intensité $i(t)$ qu'il convient de déterminer.



Pour cela, associons à $u(t)$ et $i(t)$ leurs images complexes \underline{u} et \underline{i} telles que :

$$\underline{u} = U_0 e^{j\omega t} \Rightarrow u(t) = \operatorname{Re} \{ \underline{u} \} \text{ et } i(t) = \operatorname{Re} \{ \underline{i} \}$$

L'impédance \underline{Z} de ce circuit :

$$\underline{Z} = R + L\omega j + \frac{1}{C\omega j} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)$$

permet de relier \underline{i} à \underline{u} . On définit la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de ce circuit par :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

afin de présenter \underline{Z} sous la forme suivante :

$$\underline{Z} = R + jRQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = R + jRQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

qui admet également une expression polaire : $\underline{Z} = Z e^{j\phi}$, telle que :

$$Z = |\underline{Z}| = R \sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2} \text{ et } \tan \phi = \frac{\operatorname{Im} \{ \underline{Z} \}}{\operatorname{Re} \{ \underline{Z} \}} = Q \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

Il s'ensuit que \underline{i} s'écrit :

$$\underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{Z e^{j\phi}} = \frac{U_0}{Z} e^{j(\omega t - \phi)}$$

d'où découle l'expression de $i(t)$:

$$i(t) = \operatorname{Re} \{ \underline{i} \} = \frac{U_0}{Z} \cos(\omega t - \phi) \text{ avec } \tan \phi = Q \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

et où apparaît l'amplitude I_0 de $i(t)$:

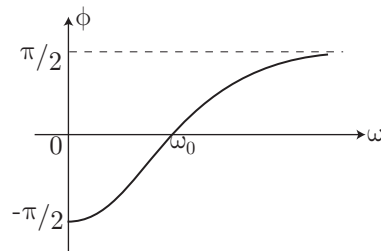
$$I_0 = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

4.2.1.1 Étude de ϕ

De l'obtention des limites :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} [\tan \phi] = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1} [\tan \phi] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [\tan \phi] = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} (\phi) = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} (\phi) = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\phi) = +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

se déduit la représentation graphique de la fonction $\phi(\omega)$:



4.2.1.2 Étude de l'amplitude I_0

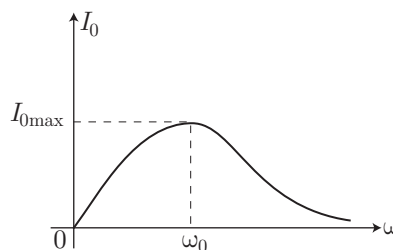
Les limites :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (I_0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} (I_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\omega \rightarrow 0} (I_0) = 0 \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} (I_0) = 0 \end{cases}$$

montrent qu'il existe une valeur x_m (ou ω_m) qui affecte à I_0 une valeur *maximum*. Or, étant donné que $Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) \geq 0$, ce *maximum* vaut :

$$I_{0 \max} = \frac{U_0}{R}$$

Lorsque $x = x_m = 1$, ou encore : $\omega = \omega_m = \omega_0$, un phénomène de résonance en intensité se produit à la pulsation ω_0 pour laquelle I_0 devient *maximum* :



4.2.1.3 Bande passante

Définition 3 On appelle bande passante l'intervalle $\mathcal{B} = [\omega_1, \omega_2]$ dans lequel ω assure à I_0 d'excéder $\frac{I_{0\max}}{\sqrt{2}}$:

$$\forall \omega \in [\omega_1, \omega_2], I_0(\omega) \geq \frac{I_{0\max}}{\sqrt{2}}$$

Les pulsations ω_1 et ω_2 sont alors les pulsations de coupure du circuit.

Pour déterminer les pulsations de coupure, il suffit de trouver les solutions x_1 et x_2 de l'équation :

$$I_0(x) = \frac{I_{0\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} Qx^2 - x - Q = 0 \\ \text{ou} \\ Qx^2 + x - Q = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Apparaissent alors seulement deux solutions positives :

$$x_1 = \frac{\sqrt{\Delta} - 1}{2Q} \text{ et } x_2 = \frac{\sqrt{\Delta} + 1}{2Q} \text{ avec } \Delta = 1 + 4Q^2$$

d'où sont déduits : $\omega_1 = x_1 \omega_0$ et $\omega_2 = x_2 \omega_0$:

$$\omega_1 = \omega_0 \times \frac{\sqrt{1 + 4Q^2} - 1}{2Q} \text{ et } \omega_2 = \omega_0 \times \frac{\sqrt{1 + 4Q^2} + 1}{2Q}$$

Définition 4 La largeur de la bande passante représente l'écart entre les pulsations de coupure :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$



L'équation (1) peut également s'écrire :

$$f(x) = 0 \text{ avec } f(x) = Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 1 \quad (2)$$

1. En supposant qu'il existe une solution $x_2 > 1$ à cette équation, montrer que $x_1 = \frac{1}{x_2}$ en est aussi solution.
2. En déduire directement l'expression de la largeur de la bande passante $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et de Q .

RÉPONSE

1. Si x_2 est solution de l'équation (2), cela signifie que :

$$f(x_2) = Q^2 \left(x_2 - \frac{1}{x_2} \right)^2 - 1 = 0 \quad (3)$$

Aussi, en posant $x_1 = \frac{1}{x_2}$:

$$f(x_1) = Q^2 \left(x_1 - \frac{1}{x_1} \right)^2 - 1 = Q^2 \left(\frac{1}{x_2} - x_2 \right)^2 - 1 = Q^2 \left(x_2 - \frac{1}{x_2} \right)^2 - 1$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'identité (3) :

$$f(x_1) = 0$$

ce qui suffit à montrer que x_1 est aussi solution de l'équation (2).

2. De ce qui précède, il découle que x_2 et $x_1 = \frac{1}{x_2}$ représentent les deux solutions de l'équation (3), auxquelles sont associées les pulsations de coupure $\omega_1 = \omega_0 x_1$ et $\omega_2 = \omega_0 x_2$. Ce faisant, l'identité (3) devient :

$$Q^2 \left(x_2 - \frac{1}{x_2} \right)^2 = 1 \Rightarrow Q^2 (x_2 - x_1)^2 = 1$$

avec :

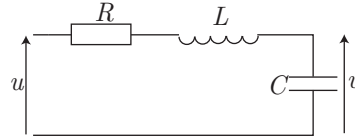
$$\begin{aligned} x_2 > 1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{x_2} < 1 &\Rightarrow x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \\ &\Rightarrow Q (x_2 - x_1) = 1 \Rightarrow x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_0 (x_2 - x_1) \Rightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

4.2.2 Résonance en tension

On s'intéresse dorénavant au circuit RLC série alimenté par une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$. L'objet de cette étude est la détermination de la tension $v(t)$ (amplitude et déphasage par rapport à u) aux bornes du condensateur.



En associant à ces tensions leurs images complexes $\underline{u} = U_0 e^{j\omega t}$ et \underline{v} , la loi du diviseur de tension conduit directement à :

$$\underline{v} = \underline{u} \times \frac{\frac{1}{C\omega j}}{\frac{1}{C\omega j} + L\omega j + R} = \frac{\underline{u}}{1 - LC\omega^2 + RC\omega j}$$

c'est-à-dire, en utilisant les paramètres :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

cette relation devient :

$$\underline{v} = \frac{\underline{u}}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

où apparaît, au dénominateur, le nombre complexe :

$$\underline{W} = W e^{j\phi} \text{ avec } W = \sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}$$

et :

$$\cos \phi = \frac{1-x^2}{W} \text{ et } \sin \phi = \frac{x}{QW} \quad (4)$$

Par suite :

$$\underline{v} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{W e^{j\phi}} = \frac{U_0}{W} e^{j(\omega t - \phi)} \Rightarrow v(t) = \operatorname{Re}\{\underline{v}\} = \frac{U_0}{W} \cos(\omega t - \phi)$$

ce qui introduit l'amplitude V_0 de $v(t)$:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t - \phi) \text{ avec } V_0 = \frac{U_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \quad (5)$$

4.2.2.1 Étude du déphasage ϕ

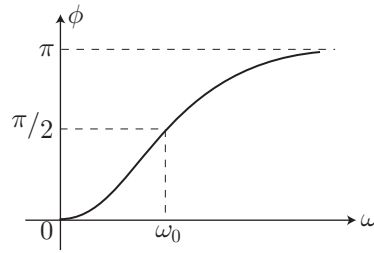
Les identités (4) montrent que :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} [\cos \phi] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \right] = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} [\sin \phi] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sqrt{Q^2(1-x^2)^2 + x^2}} \right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} (\phi) = 0$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1} [\cos \phi] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \right] = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1} [\sin \phi] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x}{\sqrt{Q^2(1-x^2)^2 + x^2}} \right] = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} (\phi) = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow \infty} [\cos \phi] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1-x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \right] = -1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} [\sin \phi] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x}{\sqrt{Q^2(1-x^2)^2 + x^2}} \right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\phi) = \pi$$

d'où se déduit la représentation graphique de $\phi(\omega)$:



4.2.2.2 Étude de l'amplitude V_0

Le résultat (5) peut aussi s'écrire :

$$V_0 = \frac{U_0}{\sqrt{f(x)}} \text{ avec } f(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

de sorte que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (V_0) = U_0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} (V_0) = 0$$

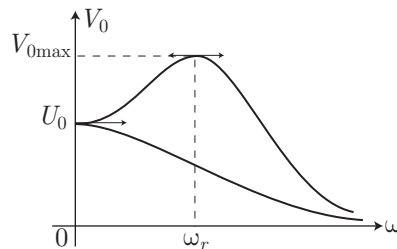
En outre, la fonction V_0 devient *extremum* lorsque $f(x)$ le devient aussi, c'est-à-dire pour une valeur x_r de x telle que :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_r} = 0 \Rightarrow 4x_r \left(x_r^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_r = 0 \\ \text{ou} \\ x_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \end{cases}$$

La première équation montre que la courbe $V_0(\omega)$ admet une tangente horizontale en $\omega = 0$, quant à la seconde équation, elle indique que V_0 admet une *maximum* $V_{0\max}$ si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour une pulsation de résonance ω_r définie par :

$$\omega_r = \omega_0 x_r \Rightarrow \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

C'est pourquoi la courbe représentative de $V_0(\omega)$ adopte l'allure suivante :



 On appelle *facteur de surtension* le rapport : $\eta = \frac{V_{0 \max}}{U_0}$.

1. En tenant compte de l'étude précédente, donner l'expression de η en fonction de Q .
2. Montrer que, pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, le facteur de surtension excède l'unité.

RÉPONSE

1. L'amplitude $V_0 = \frac{U_0}{\sqrt{f(x)}}$ devient maximale pour la valeur $x = x_r$ telle que :

$$x_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \Rightarrow 1 - x_r^2 = \frac{1}{2Q^2}$$

d'où l'on déduit que :

$$f(x_r) = (1 - x_r^2)^2 + \frac{1}{Q^2} \times x_r^2 = \frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) = \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}$$

de sorte que :

$$V_{0 \max} = \frac{U_0}{\sqrt{f(x_r)}} = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}} \Rightarrow \eta = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}}}$$

2. L'expression de $f(x)$ se présente aussi sous la forme :

$$f(x_r) = \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4} = -1 + 2 \times \frac{1}{2Q^2} - \left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1 = -\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 + 1$$

avec :

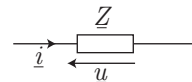
$$\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)^2 > 0 \Rightarrow f(x_r) < 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{f(x_r)}} > 1$$

Par conséquent :

$$\eta = \frac{V_{0 \max}}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{f(x_r)}} \Rightarrow \eta > 1$$

4.3 Puissance en régime sinusoïdal

On considère un dipôle d'impédance $\underline{Z} = Z e^{j\phi}$, traversé par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et aux bornes duquel apparaît une tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$.



Définition 5 On appelle *puissance moyenne* P reçue par un dipôle pendant une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ la grandeur :

$$P = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(t) dt \text{ avec } P(t) = u(t) \times i(t)$$

Définition 6 Soient $\langle u^2 \rangle$ et $\langle i^2 \rangle$ les valeurs moyennes de $[u(t)]^2$ et de $[i(t)]^2$ pendant la période T :

$$\langle u^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [u(t)]^2 dt \quad \langle i^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} [i(t)]^2 dt$$

La tension et le courant efficaces sont alors définis par :

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\langle u^2 \rangle} \text{ et } I_{\text{eff}} = \sqrt{\langle i^2 \rangle}$$

Ces définitions permettent non seulement le calcul de :

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \text{ et } I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

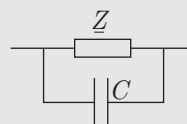
mais également l'expression de la puissance moyenne P :

$$P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi = Z I_{\text{eff}}^2 \cos \phi = \text{Re} \{ \underline{Z} \} I_{\text{eff}}^2$$

Le coefficient $\cos \phi$ est appelé *facteur de puissance*



Un dipôle d'impédance $\underline{Z} = Z e^{j\phi}$ reçoit une puissance moyenne $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi$. On lui adjoint un condensateur de capacité C , en parallèle. Exprimer le nouveau facteur de puissance $\cos \phi'$ de cette installation en fonction de Z , C , ϕ et ω (pulsation des signaux électriques sinusoïdaux).



RÉPONSE L'association en parallèle des deux dipôles précédents équivaut à un seul dipôle d'impédance $\underline{Z}' = Z' e^{j\phi'}$ tel que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}'} &= \frac{1}{\underline{Z}} + C\omega j \Rightarrow \frac{e^{-j\phi'}}{Z'} = \frac{e^{-j\phi}}{Z} + C\omega j \\ &\Rightarrow \frac{\cos \phi'}{Z'} - j \frac{\sin \phi'}{Z'} = \frac{\cos \phi}{Z} + j \left(C\omega - \frac{\sin \phi}{Z} \right) \end{aligned}$$

d'où il découle que :

$$\frac{\cos \phi'}{Z'} = \frac{\cos \phi}{Z} \text{ et } \frac{\sin \phi'}{Z'} = \frac{\sin \phi}{Z} - C\omega$$

Le rapport de ces deux relations conduit à :

$$\tan \phi' = \frac{\sin \phi'}{\cos \phi'} = \frac{Z}{\cos \phi} \left(\frac{\sin \phi}{Z} - C\omega \right) = \tan \phi - \frac{ZC\omega}{\cos \phi}$$

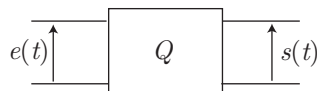
Aussi, le nouveau facteur de puissance $\cos \phi'$ vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2 \phi'} &= 1 + \tan^2 \phi' = 1 + \tan^2 \phi - \frac{2ZC\omega \sin \phi}{\cos^2 \phi} + \frac{(ZC\omega)^2}{\cos^2 \phi} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \phi} - \frac{2ZC\omega \sin \phi}{\cos^2 \phi} + \frac{(ZC\omega)^2}{\cos^2 \phi} \\ \Rightarrow \cos \phi' &= \frac{\cos \phi}{\sqrt{1 - 2ZC\omega \sin \phi + (ZC\omega)^2}} \end{aligned}$$

4.4 Les filtres

4.4.1 Fonction de transfert

Soit Q un quadripôle à l'entrée duquel apparaît une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$ et à la sortie duquel est observée une tension $s(t) = S \cos(\omega t + \phi)$.



À ces tensions sont associées des images complexes $\underline{e} = E e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = S e^{j(\omega t + \phi)}$.

Définition 7 On appelle fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = H(\omega) e^{j\phi}$ de Q le rapport :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

$H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ désigne le gain du quadripôle.

La connaissance simultanée de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = H(\omega) e^{j\phi}$ et de la tension d'entrée $e(t) = E \cos(\omega t)$ entraîne celle de la tension de sortie : $s(t) = S \cos(\omega t + \phi)$ car :

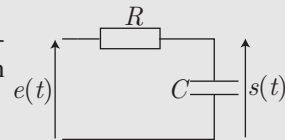
$$S = H(\omega) \times E \text{ et } \phi = \arg \{ \underline{H}(j\omega) \}$$

Définition 8 Parmi les quadripôles, on distingue :

- les filtres passe-bas, dont le gain $H(\omega)$ est monotone décroissant ;
- les filtres passe-haut, dont le gain est une fonction monotone croissante ;
- les filtres passe-bande, dont $H(\omega)$ admet une valeur maximale pour une pulsation donnée ;
- les filtres coupe-bande (ou réjecteurs de bande) dont le gain admet une valeur minimale pour une pulsation donnée.



On considère le quadripôle ci-contre, constitué d'une résistance et d'un condensateur. Il est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω .



1. Exprimer le gain $H(\omega)$ de ce quadripôle, en fonction de ω et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.
2. En déduire la nature du filtre ainsi réalisé.

RÉPONSE

1. La loi du diviseur de tension fournit directement la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$:

$$\underline{s} = \frac{\frac{1}{C\omega j}}{\frac{1}{C\omega j} + R} \times \underline{e} = \frac{\underline{e}}{1 + RC\omega j} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

d'où l'on déduit l'expression du gain :

$$H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$$

2. La fonction $H(\omega)$ étant décroissante, ce quadripôle réalise un filtre passe-bas.

4.4.2 Diagramme de Bode

Définition 9 Un quadripôle, de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$, est caractérisé par son gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log [H(\omega)] \text{ où } H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$$

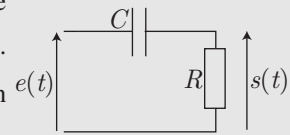
Définition 10 Le diagramme de Bode d'un circuit consiste en la représentation graphique de son gain en décibels G_{dB} en fonction de $\log \omega$.

La représentation asymptotique du diagramme de Bode s'obtient en linéarisant les expressions de G_{dB} en fonction de $\log \omega$: $G_{dB} = A + B \times \log \omega$, pour des valeurs élevées et pour des valeurs faibles de ω . Les droites ainsi obtenues constituent des asymptotes pour le diagramme de Bode.



Le quadripôle, représenté ci-contre, est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω . On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

1. Donner l'expression de son gain en décibels, en fonction de ω et ω_0
2. Tracer son diagramme de Bode asymptotique.



RÉPONSE

1. La loi du diviseur de tension fournit :

$$\underline{s} = \underline{e} \times \frac{R}{R + \frac{1}{C\omega j}} = \underline{e} \times \frac{1}{1 - j \frac{1}{RC\omega}} = \underline{e} \times \frac{1}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}}$$

d'où se déduit l'expression de sa fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_0}{\omega}} \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

et donc celle de son gain en décibels :

$$G_{dB} = 20 \log [H(\omega)] \Rightarrow G_{dB} = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \right]$$

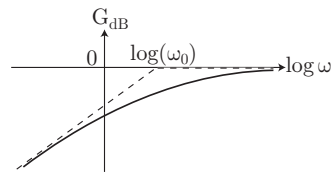
2. Lorsque $\omega \gg \omega_0$, c'est-à-dire lorsque $\log \omega \gg \log \omega_0$:

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \ll 1 \Rightarrow G_{dB} \simeq -10 \log(1) = 0$$

tandis que pour $\omega \ll \omega_0$, c'est-à-dire $\log \omega \ll \log \omega_0$:

$$\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \gg 1 \Rightarrow G_{dB} \simeq -10 \log \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 20 \log \omega - 20 \log \omega_0$$

Il s'agit alors d'une droite de pente +20 (décibels par décade). Ces deux asymptotes conduisent au tracé du diagramme de Bode asymptotique :

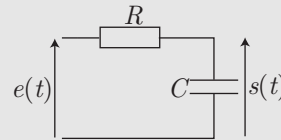


Définition 11 Soit G_{dB}^{max} la valeur maximale prise par le gain en décibels. On appelle bande passante l'intervalle \mathcal{B} dans lequel :

$$\forall \omega \in \mathcal{B}, G_{dB} \geq G_{dB}^{max} - 3 \text{ dB}$$



Le quadripôle schématisé ci-contre est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω . On posera $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.



1. Représenter son diagramme de Bode asymptotique.
2. En déduire sa bande passante.

RÉPONSE

1. La loi du diviseur de tension conduit à :

$$\begin{aligned} s &= \frac{\frac{1}{C\omega j}}{\frac{1}{C\omega j} + R} e \Rightarrow H = \frac{s}{e} = \frac{1}{1 + RC\omega j} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \\ \Rightarrow H(\omega) &= |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \end{aligned}$$

Aussi, le gain en décibels s'écrit :

$$G_{dB} = 20 \log [H(\omega)] = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]$$

Il est dès lors possible de distinguer deux cas :

- Lorsque $\omega \ll \omega_0$, c'est-à-dire lorsque $\log \omega \ll \log \omega_0$:

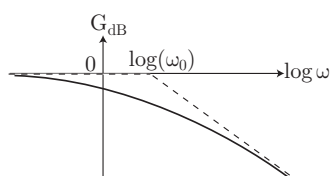
$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 1 \Rightarrow G_{dB} \simeq -10 \log(1) = 0$$

- Lorsque $\omega \gg \omega_0$, ou encore $\log \omega \gg \log \omega_0$:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \gg 1 \Rightarrow G_{dB} \simeq -10 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega$$

Cette asymptote est alors une droite de pente -20 (décibels par décade).

Ces deux asymptotes donnent finalement accès au diagramme de Bode attendu :



2. Ce diagramme indique que le *maximum* de G_{dB} vaut $G_{dB}^{\max} = 0$. Aussi, la définition de la bande passante impose :

$$G_{dB} \geq G_{dB}^{\max} - 3 \text{ dB} \Rightarrow -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right] \geq 0 - \underbrace{10 \log 2}_{=3 \text{ dB}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \leq 1 \Rightarrow \omega \leq \omega_0$$

Cette bande passante vaut, par conséquent : $\mathcal{B} =]0, \omega_0]$.

4.4.3 Autres applications de la fonction de transfert

Cette section s'adresse aux étudiants de PCSI et de PTSI, mais les autres étudiants pourront également la lire avec profit.

4.4.3.1 Équations différentielles

Considérons une fonction de transfert qui se présente sous la forme d'une fraction de polynômes en $(j\omega)$, à coefficients réels constants α_i et β_i :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 (j\omega) + \alpha_2 (j\omega)^2 + \dots}{\beta_0 + \beta_1 (j\omega) + \beta_2 (j\omega)^2 + \dots}$$

$$\Rightarrow \beta_0 \underline{s} + \beta_1 (j\omega) \underline{s} + \beta_2 (j\omega)^2 \underline{s} + \dots = \alpha_0 \underline{e} + \alpha_1 (j\omega) \underline{e} + \alpha_2 (j\omega)^2 \underline{e} + \dots$$

En remarquant que les images complexes : $\underline{e} = E e^{j\omega t}$ et $\underline{s} = S e^{j(\omega t + \phi)}$ vérifient :

$$\frac{d\underline{e}}{dt} = j\omega \underline{e}, \quad \frac{d^2 \underline{e}}{dt^2} = (j\omega)^2 \underline{e} \dots \quad \frac{d\underline{s}}{dt} = j\omega \underline{s}, \quad \frac{d^2 \underline{s}}{dt^2} = (j\omega)^2 \underline{s} \dots$$

l'équation linéaire en $j\omega$ se transforme en équation différentielle :

$$\beta_0 \underline{s} + \beta_1 \frac{d\underline{s}}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 \underline{s}}{dt^2} + \dots = \alpha_0 \underline{e} + \alpha_1 \frac{d\underline{e}}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2 \underline{e}}{dt^2} + \dots$$

dont la partie réelle procure l'équation différentielle du circuit :

$$\beta_0 s + \beta_1 \frac{ds}{dt} + \beta_2 \frac{d^2 s}{dt^2} + \dots = \alpha_0 e + \alpha_1 \frac{de}{dt} + \alpha_2 \frac{d^2 e}{dt^2} + \dots$$

4.4.3.2 Conditions initiales

Considérons un quadripôle Q alimenté par une tension $e(t)$ en échelon :

$$\begin{cases} e(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ e(t) = E \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$



Cette tension peut être assimilée à une tension sinusoïdale de pulsation infinie à $t = 0$ et nulle lorsque t devient infini. C'est pourquoi, de la définition de la fonction de transfert : $\underline{s} = \underline{H}(j\omega) \times \underline{e}$, on tire aisément les conditions initiales portant sur $s(t)$:

- à $t = 0$: $s(0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\underline{H}(j\omega)] \times E$

- à $t = 0$, la dérivée $\frac{ds}{dt} = j\omega s \Rightarrow \frac{ds}{dt} = j\omega \underline{H}(j\omega) \times E$ fournit :

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [j\omega \underline{H}(j\omega)] \times E$$

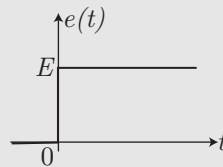
de même pour les dérivées d'ordre supérieur :

$$\left. \frac{d^n s}{dt^n} \right|_{t=0} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [(j\omega)^n \underline{H}(j\omega)] \times E$$

- Lorsque t devient infini :

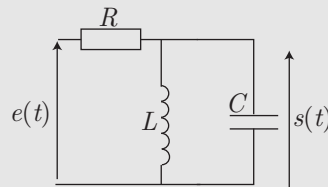
$$\lim_{t \rightarrow \infty} [s(t)] = \lim_{\omega \rightarrow 0} [\underline{H}(j\omega)] \times E$$

⚠ La méthode décrite précédemment n'est justifiée que lorsque $e(t)$ est un échelon de tension de la forme ci-dessous.



Le circuit schématisé sur la figure ci-contre est alimenté par un échelon de tension (e) d'amplitude E :

$$\begin{cases} e(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ e(t) = E \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

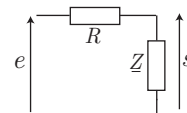


1. Donner l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$ de ce circuit, et la représenter sous la forme d'une fraction de polynômes en $j\omega$.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$; on introduira les coefficients : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = RC\omega_0$.
3. En supposant $Q > \frac{1}{2}$, donner l'expression de la solution générale de cette équation différentielle pour $t \geq 0$. Combien de conditions initiales est-il nécessaire de connaître pour en extraire la solution particulière souhaitée ?
4. À l'aide de la fonction de transfert, chercher ces conditions initiales et en déduire l'expression de $s(t)$.

RÉPONSE

1. Soit Z l'impédance équivalente à l'association en parallèle de la bobine et du condensateur :

$$Z = \frac{L\omega j \times \frac{1}{C\omega j}}{\frac{1}{C\omega j} + L\omega j} = \frac{L\omega j}{1 + LC(j\omega)^2}$$



La loi du diviseur de tension fournit directement :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \frac{Z}{Z + R} \underline{e} = \frac{L\omega j}{L\omega j + R + RLC(\omega j)^2} \underline{e} \\ \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{L\omega j}{RLC(\omega j)^2 + L\omega j + R} \end{aligned}$$

2. De la loi précédente, il découle que :

$$RLC(\omega j)^2 \underline{s} + L\omega j \underline{s} + R \underline{s} = L\omega j \underline{e} \Rightarrow RLC \frac{d^2 \underline{s}}{dt^2} + L \frac{d\underline{s}}{dt} + R \underline{s} = L \frac{d\underline{e}}{dt}$$

dont la partie réelle s'écrit :

$$RLC \frac{d^2 s}{dt^2} + L \frac{ds}{dt} + R s = L \frac{de}{dt} \Rightarrow \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{ds}{dt} + \frac{1}{LC} s = \frac{1}{RC} \frac{de}{dt}$$

soit encore :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = \frac{\omega_0}{Q} \frac{de}{dt}$$

3. Pour $t \geq 0$, $e = E$ demeure constant, de sorte que l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

est associée à l'équation caractéristique :

$$X^2 + \frac{\omega_0}{Q} X + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) < 0 \text{ car } Q^2 > \frac{1}{4} \\ \Rightarrow \Delta &= \left(j \frac{\omega_0}{Q} \right)^2 \times (4Q^2 - 1) \end{aligned}$$

gène deux solutions complexes :

$$\begin{cases} X_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = -\alpha + j\Omega \\ X_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = -\alpha - j\Omega \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \alpha = \frac{\omega_0}{2Q} \\ \Omega = \alpha \sqrt{4Q^2 - 1} \end{cases}$$

Par suite, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$s(t) = \mu_1 e^{X_1 t} + \mu_2 e^{X_2 t} = e^{-\alpha t} (\mu_1 e^{j\Omega t} + \mu_2 e^{-j\Omega t})$$

que l'on peut également présenter sous la forme suivante :

$$s(t) = e^{-\alpha t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

où $A = \mu_1 + \mu_2$ et $B = j(\mu_1 - \mu_2)$ sont deux constantes qu'il convient de déterminer avec autant de conditions initiales, par exemple : $s(t=0)$ et $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0}$.

4. L'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{L\omega j}{RCL(\omega j)^2 + L\omega j + R}$$

fournit directement les valeurs initiales cherchées :

$$s(t=0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\underline{H}(j\omega) \times E] \Rightarrow s(t=0) = 0$$

et :

$$\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [j\omega \underline{H}(j\omega)] \times E \Rightarrow \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = \frac{LE}{RLC} = \frac{E}{RC}$$

Aussi, l'expression générale de $s(t)$ doit non seulement vérifier $s(t=0) = 0$:

$$A = 0 \Rightarrow s(t) = B e^{-\alpha t} \sin(\Omega t)$$

mais également : $\left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = \frac{E}{RC}$, avec :

$$\frac{ds}{dt} = B e^{-\alpha t} [\Omega \cos(\Omega t) - \alpha \sin(\Omega t)] \Rightarrow \frac{E}{RC} = B\Omega \Rightarrow B = \frac{E}{RC\Omega}$$

c'est-à-dire, compte tenu des expressions de $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$ et de $RC\omega_0 = Q$:

$$B = \frac{2E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Finalement :

$$s(t) = \frac{2E}{\sqrt{4Q^2 - 1}} e^{-\alpha t} \sin(\Omega t)$$

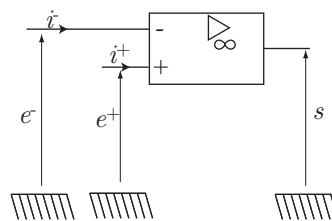
4.5 Introduction à l'amplificateur opérationnel

Ce composant, d'une grande utilité en électronique, ne fait pas l'objet d'une étude détaillée en cours. Cependant, sa mise en œuvre, ainsi que son principe de fonctionnement doivent être abordés en travaux pratiques.

4.5.1 Présentation

L'amplificateur opérationnel (A.O.) est caractérisé par deux tensions d'entrée (e^+ et e^-) aux entrées respectives non inverseuse (+) et inverseuse (-). En outre, une tension de sortie s dépend de la différence de potentiel $e^+ - e^-$.

En première année de CPGE, l'A.O. est supposé, pour toute fréquence :



- *idéal*, ce qui signifie que les courants i^- et i^+ à l'entrée du composant ont des intensités nulles (les résistances d'entrée du composant sont considérées infinies, sauf indication contraire explicite) ;
- en fonctionnement non saturé (*régime linéaire*), c'est-à-dire que les potentiels e^+ et e^- sont toujours identiques.

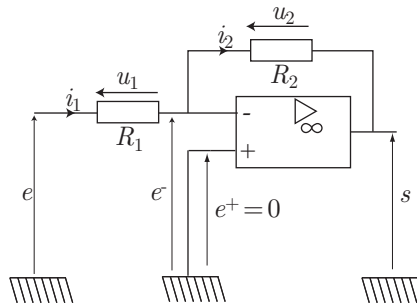
$$i^+ = i^- = 0 \text{ et } e^+ = e^-$$

⚠ De ces hypothèses, il ne faut surtout pas conclure qu'aucun courant ne sort de l'A.O. Des alimentations externes fournissent à ce circuit intégré l'énergie électrique nécessaire à son fonctionnement. Bien qu'elles ne soient pas représentées, ces sources pourvoient le circuit en courant électrique que l'on peut retrouver en sortie de l'A.O. Or, ce courant n'étant pas connu à l'avance, il invalide en général l'usage de la loi des nœuds sur la borne de sortie.

4.5.2 Montages amplificateurs

4.5.2.1 Amplificateur inverseur

Le montage de base est schématisé ci-dessous :



La relation entre les tensions e et s peut s'obtenir de deux manières différentes :

- **Application des lois de Kirchoff**

Les tensions $u_1 = e - e^-$ et $u_2 = e^- - s$ vérifient la loi d'Ohm :

$$u_1 = R_1 i_1 \text{ et } u_2 = R_2 i_2$$

Or, l'hypothèse selon laquelle l'A.O. est idéal suffit à admettre que $i_1 = i_2$, de sorte que :

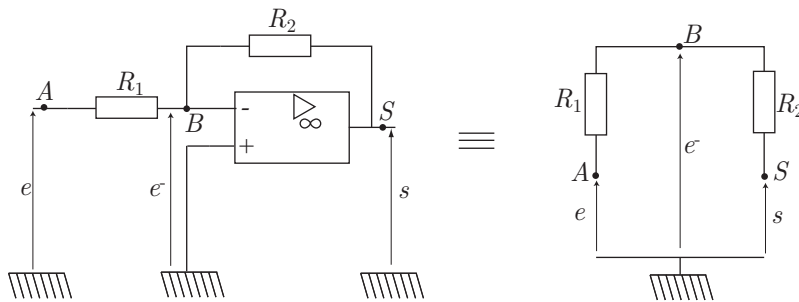
$$\frac{u_1}{R_1} = \frac{u_2}{R_2} \Rightarrow \frac{e - e^-}{R_1} = \frac{e^- - s}{R_2}$$

En outre, le fonctionnement linéaire de l'A.O. impose l'identité de e^- et de $e^+ = 0$. C'est pourquoi :

$$e^- = 0 \Rightarrow \frac{e}{R_1} = \frac{-s}{R_2} \Rightarrow s = -\frac{R_2}{R_1} e$$

- **Application du théorème de Millman**

Il convient de représenter le schéma équivalent au montage amplificateur inverseur :

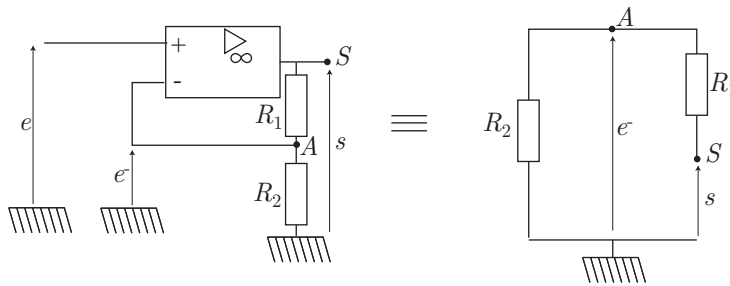


Le théorème de Millman fournit alors directement :

$$\frac{\frac{e}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = e^- = 0 \Rightarrow \frac{s}{R_2} + \frac{e}{R_1} = 0 \Rightarrow s = -\frac{R_2}{R_1} \times e$$

4.5.2.2 Amplificateur non inverseur

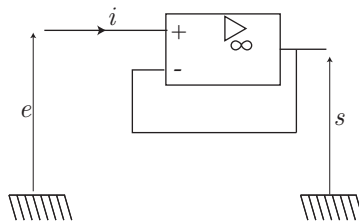
Le montage de base, ainsi que son équivalent, sont les suivants :



En appliquant l'une des deux méthodes développées précédemment, on trouve aisément la loi :

$$s = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \times e$$

Il existe une variante à ce montage, équivalent à $R_1 = 0$ et $R_2 \rightarrow \infty$:

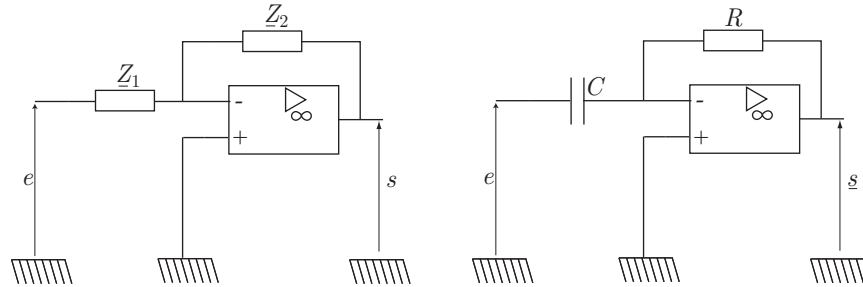


Ce montage, appelé *suiveur*, permet d'obtenir la tension de sortie $s = e$ tout en prélevant un courant i d'intensité nulle. Son intérêt se manifeste particulièrement lorsque le circuit qui délivre la tension e présente une résistance interne très forte, rendant la valeur de e très sensible à celle de i .

4.5.3 Filtres actifs

4.5.3.1 Filtre passe-haut ou montage dérivateur

Le schéma de ce filtre est représenté ci-dessous :



où les impédances Z_1 et Z_2 valent respectivement $\frac{1}{C\omega j}$ et R . L'analogie avec le montage amplificateur inverseur permet de déduire la forme générique de la fonction de transfert du filtre :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{Z_2}{Z_1} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = -RC\omega j = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

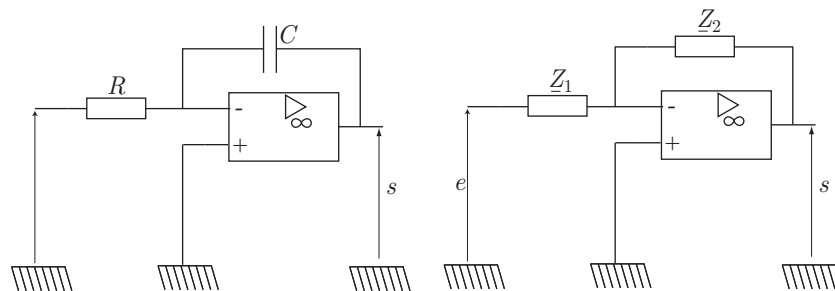
Le module $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)| = RC\omega$ est une fonction croissante de ω , ce qui justifie le rôle de filtre passe-haut joué par ce montage. En outre :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -RC\omega j &\Rightarrow \underline{s} = -RC\omega j \underline{e} = -RC \frac{d\underline{e}}{dt} \\ &\Rightarrow \underline{s}(t) = -RC \frac{d\underline{e}}{dt} \end{aligned}$$

Cette relation met en évidence le rôle dérivateur de ce filtre.

4.5.3.2 Filtre passe-bas ou montage intégrateur

Le montage théorique du circuit est schématisé ci-dessous :



où les impédances Z_1 et Z_2 valent : $Z_1 = R$ et $Z_2 = \frac{1}{C\omega j}$. Par suite, la fonction de transfert théorique de ce montage s'écrit :

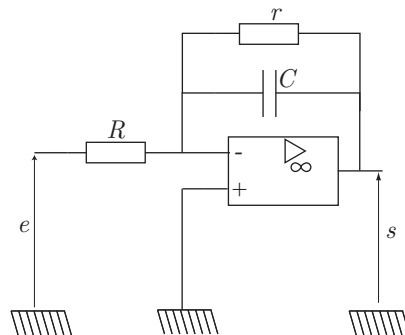
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{Z_2}{Z_1} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = -\frac{1}{RC\omega j}$$

dont le module $H(\omega) = \frac{1}{RC\omega}$ est une fonction décroissante de ω ; ce montage est un filtre passe-bas.

Dans la pratique, cependant, un tel montage ne peut pas fonctionner pour diverses raisons :

- les courants d'entrée dans l'A.O. ne sont pas rigoureusement nuls ;
- les potentiels d'entrée e^+ et e^- ne sont pas rigoureusement identiques ;
- la tension d'entrée $e(t)$ peut présenter une composante continue, auquel cas $\omega = 0$.

Ces différents facteurs provoquent rapidement la saturation de l'A.O., qui ne peut par conséquent fonctionner en régime linéaire. Pour réduire l'influence de ces phénomènes, on introduit une résistance r en parallèle avec le condensateur :



On considère le montage amélioré précédent, alimenté par une tension sinusoïdale $e(t)$ de fréquence $f = 1\,000$ Hz, et dans lequel :

$$C = 10\ \mu\text{F} \text{ et } R = r = 10\ \text{k}\Omega$$

On posera : $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$ de ce montage, en fonction de ω et de ω_0 .
2. Représenter son diagramme de Bode asymptotique et en déduire la nature du filtre ainsi réalisé.
La présence d'une faible composante continue e_0 pour $e(t)$ peut-elle provoquer la saturation de l'A.O. ?
3. Compte tenu des valeurs adoptées, montrer que ce filtre réalise l'intégration de la tension $e(t)$, dépourvue de composante continue.

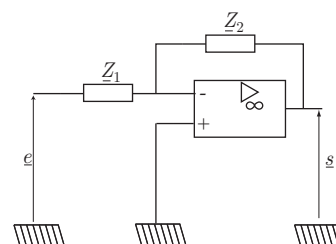
RÉPONSE

1. Soit $\underline{Z}_1 = R$ l'impédance de la résistance R et soit \underline{Z}_2 celle équivalente à l'association en parallèle de r et de C :

$$\begin{aligned}\frac{1}{Z_2} &= C\omega j + \frac{1}{r} = \frac{1 + rC\omega j}{r} \\ \Rightarrow Z_2 &= \frac{r}{1 + rC\omega j} \text{ avec } r = R \\ \Rightarrow Z_2 &= \frac{R}{1 + RC\omega j}\end{aligned}$$

La fonction de transfert est alors fournie par :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{1}{1 + RC\omega j} = -\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$



2. Le module $H(\omega)$ de la fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

conduit à l'expression du gain en décibels de ce montage :

$$G_{dB} = 20 \log [H(\omega)] = -10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right]$$

où l'on peut distinguer deux cas :

- lorsque $\omega \ll \omega_0$, c'est-à-dire $\log \omega \ll \log \omega_0$:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \ll 1 \Rightarrow G_{dB} \simeq -10 \log(1) = 0$$

- lorsque $\omega \gg \omega_0$, ou encore $\log \omega \gg \log \omega_0$:

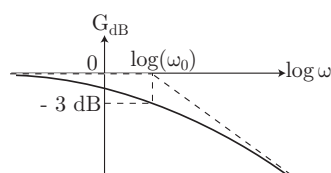
$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \gg 1 \Rightarrow G_{dB} = -10 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega$$

Cette expression révèle que lorsque $\omega \gg \omega_0$, la courbe $G_{dB}(\omega)$ admet pour asymptote une droite de pente -20 (décibels par décade).

Le point d'abscisse $\log \omega = \log \omega_0$ a, en outre, pour ordonnée :

$$G_{dB}(\omega = \omega_0) = -10 \log 2 = -3 \text{ dB}$$

ce qui conduit à l'allure du diagramme de Bode :



Ce diagramme est caractéristique d'un filtre passe-bas.

Une composante continue e_0 présente une pulsation nulle, auquel cas la fonction de transfert indique que :

$$s_0(t) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \right] \times e_0 \Rightarrow s_0(t) \simeq -e_0$$

Notamment, si e_0 est faible, la tension $s_0(t)$ ne peut atteindre une valeur de nature à saturer l'A.O.

3. De la fonction de transfert, il découle que :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-1}{1 + RC\omega j} \Rightarrow \underline{s} + RC\omega j \underline{s} = -\underline{e}$$

où :

$$RC\omega = 10^4 \times 10^{-5} \times 2\pi \times 10^3 = 628 \gg 1$$

autorise une simplification :

$$RC\omega j \underline{s} \simeq -\underline{e} \Rightarrow RC \frac{ds}{dt} = -\underline{e} \Rightarrow RC \frac{ds}{dt} = -e(t)$$

Aussi, en notant S_0 la valeur de $s(t)$ à la date $t = 0$, cette équation différentielle devient :

$$\int_{S_0}^{s(t)} ds = -\frac{1}{RC} \int_0^t e(t) dt \Rightarrow s(t) = S_0 - \frac{1}{RC} \int_0^t e(t) dt$$

ce qui montre que ce montage réalise l'intégration de la tension $e(t)$.

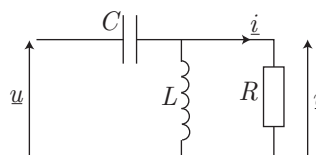
● **97** **Lycée Hoche, Versailles**

5 min.

Impédances

MPSI-PCSI-PTSI

Un condensateur de capacité C est monté en série avec une inductance L en parallèle avec une résistance R . Montrer que l'intensité \underline{i} qui circule dans R est indépendante de R si $LC\omega^2 = 1$ (ω est la pulsation de la tension d'entrée u).



Quelle est la valeur correspondante de \underline{i} ?

● **98** **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

5 min.

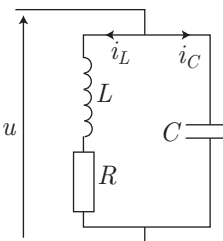
Impédances

MPSI-PCSI-PTSI

Le circuit ci-contre est alimenté par une tension u d'amplitude $U_0 = 127$ V et de fréquence $f = 500$ Hz.

On prendra : $L = 0,5$ H $R = 500$ Ω $C = 0,1$ μ F.

- Déterminer l'amplitude I_{0L} et le déphasage ϕ_L du courant $i_L(t) = I_{0L} \cos(\omega t + \phi_L)$.
- Déterminer l'amplitude I_{0C} et le déphasage ϕ_C du courant $i_C(t) = I_{0C} \cos(\omega t + \phi_C)$.



● **99** **Lycée Fabert, Metz**

10 min.

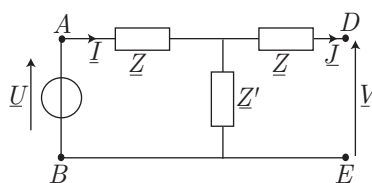
Impédances

MPSI-PCSI-PTSI

Une cellule en T est formée de trois dipôles d'impédances \underline{Z} , \underline{Z}' et \underline{Z} . Entre les bornes A et B est branchée une source de tension délivrant une tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$.

La source débite un courant \underline{I} .

L'ensemble {source + cellule} débite un courant \underline{J} sous une tension $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$.



- Déterminer \underline{I} et \underline{J} en fonction de \underline{Z} , \underline{Z}' et des images complexes \underline{U} et \underline{V} associées aux tensions respectives $u(t)$ et $v(t)$.
- On branche, entre D et E, bornes de sortie de la cellule, un voltmètre d'impédance interne infinie (aucun courant ne le traverse). Donner l'expression de \underline{V} en fonction de \underline{U} , \underline{Z} et \underline{Z}' .
- Le « dipôle \underline{Z} » est un *resistor* de résistance R , le « dipôle \underline{Z}' » est un condensateur de capacité C . Exprimer l'amplitude V_0 et le déphasage ϕ en fonction de U_0 , R , C et ω .

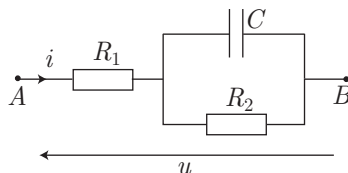
● **100** ————— **Lycée Hoche, Versailles**

10 min.

Impédances

MPSI-PCSI-PTSI

Le circuit schématisé ci-dessous est alimenté par une tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$.



- Déterminer l'impédance complexe entre A et B en fonction de R_1 , R_2 , C et ω .
- Dans la branche AB circule un courant $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Déterminer I_0 et φ en fonction de R_1 , R_2 , C , ω et U_0 .

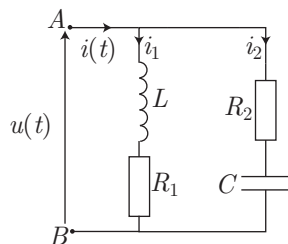
● **101** ————— **Lycée Fabert, Metz**

20 min.

Impédances

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le circuit suivant alimenté sous une tension sinusoïdale $u(t) = U \sin(\omega t)$.



- À quelles conditions, portant sur les valeurs de R_1 , R_2 , L et C , la tension $u(t)$ est-elle simplement proportionnelle à $i(t)$, quelle que soit la valeur de ω ?
- Dans ces conditions, calculer $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction de U , L , C et ω ?

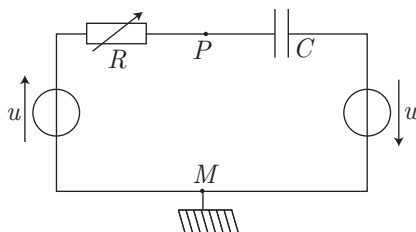
● **102** ————— **Lycée Pissarro, Pontoise**

20 min.

Impédances

MPSI-PCSI-PTSI

Déterminer le générateur de Thévenin équivalent au circuit suivant, entre les bornes P et M ; la tension u est sinusoïdale, de pulsation ω .



Quelle peut être l'utilité d'un tel dispositif ?

● 103

Q.C.M.

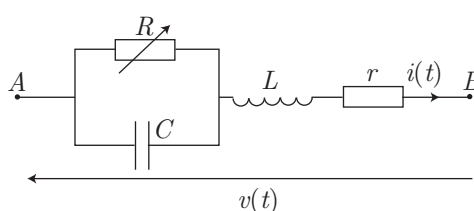
30 min.

Impédances

MPSI-PCSI-PTSI

Le dipôle, de bornes A et B , représenté sur la figure suivante, comporte les deux éléments suivants :

- une bobine réelle (L, r)
- un rhéostat, de résistance variable R , en parallèle sur un condensateur de capacité C .



Il est alimenté par une tension sinusoïdale $v(t)$, d'amplitude V_0 et de pulsation ω réglable.

On a : $L = 10 \text{ mH}$, $C = 10^{-2} \text{ }\mu\text{F}$, $r = 293 \text{ }\Omega$ et $V_0 = 20 \text{ V}$.

1. Calculer l'impédance \underline{Z} de ce dipôle.

(a) $\underline{Z} = R + \frac{r}{1 + R^2 C^2 \omega^2} + j\omega \left[L - \frac{r^2 C}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \right]$

(b) $\underline{Z} = r + \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega^2} + j\omega \left[L - \frac{R^2 C}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \right]$

(c) $\underline{Z} = \frac{r R^2}{R^2 + L^2 \omega^2} + j\omega \left[\frac{1}{C \omega^2} + \frac{r^2 R}{R^2 + L^2 \omega^2} \right]$

(d) $\underline{Z} = R + \frac{r^3}{r^2 + L^2 \omega^2} + j\omega \left[-\frac{1}{C \omega} + \frac{R^2 L}{r^2 + L^2 \omega^2} \right]$

2. Déterminer la résistance R du rhéostat pour que $i(t)$ et $u(t)$ soient en phase, condition remplie dans la suite de l'exercice.

(a) $R = \frac{r^2}{C \omega (r^2 + L^2 \omega^2)}$

(b) $R = \frac{L \omega}{1 + r^2 C^2 \omega^2}$

(c) $R = \left[\frac{L}{C (1 - LC \omega^2)} \right]^{1/2}$

(d) $R = L \omega \left(1 - \frac{1}{2} LC \omega^2 \right)^{1/2}$

3. Donner une expression de \underline{Z} indépendante de ω .

(a) $\underline{Z} = R + \frac{L}{r C}$

- (b) $\underline{Z} = \frac{r}{R^2} \times \frac{L}{C}$
- (c) $\underline{Z} = r + \frac{L}{RC}$
- (d) $\underline{Z} = R + \frac{C}{L} r^3$
4. Calculer la valeur maximale ω_{\max} de la pulsation et la valeur minimale R_{\min} de R qui permettent d'assurer le fonctionnement du dispositif.
- (a) $\omega_{\max} = 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- (b) $\omega_{\max} = 7 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
- (c) $R_{\min} = 500 \Omega$
- (d) $R_{\min} = 10^3 \Omega$
5. Lorsque $\omega = \omega_{\max}$, donner l'expression de \underline{Z} et indiquer la constitution du dipôle.
- (a) \underline{Z} infini
- (b) $\underline{Z} = r$
- (c) Le dipôle est un circuit ouvert.
- (d) Le dipôle est un circuit rLC série.

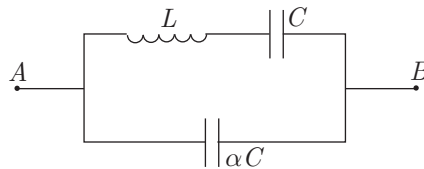
● **104** **Lycée Carnot, Dijon**

40 min.

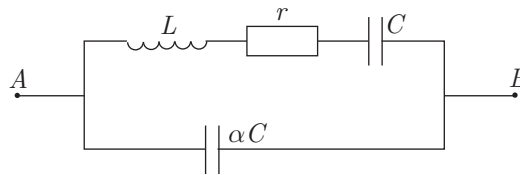
Impédances et admittances

MPSI-PCSI-PTSI

1. Au moins au voisinage du point de fonctionnement effectif, un quartz se comporte comme un dipôle AB de la figure suivante :

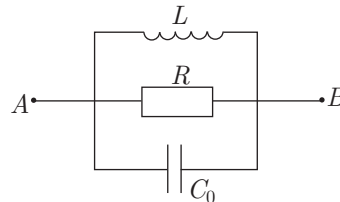


- (a) Calculer l'admittance complexe \underline{Y} du dipôle AB en fonction de la pulsation ω d'un signal sinusoïdale appliqué à ses bornes.
- (b) Exprimer \underline{Y} quand la pulsation ω tend vers zéro, puis quand elle tend vers l'infini.
Établir, dans les deux cas, un système simple équivalent.
- (c) Préciser, hormis les cas particuliers précédents, les pulsations :
- ω_1 , pour laquelle l'admittance a un module infini ;
 - ω_2 , pour laquelle l'admittance est nulle.
- (d) Donner l'allure des courbes traduisant les variations du module Y de \underline{Y} et du module Z de l'impédance \underline{Z} , en fonction de ω .
2. Aux alentours de la pulsation $\omega = \omega_2$, l'admittance complexe \underline{Y} ne peut pas être rigoureusement nulle ; on tiendra alors compte d'un terme résistif dans la bobine ; le dipôle équivalent est représenté sur la figure suivante :



La résistance r est cependant beaucoup plus petite que l'impédance $L\omega_2$ de la bobine ; le rapport $\frac{L\omega_2}{r}$ est appelé Q .

- Calculer l'admittance complexe $\underline{Y}(\omega_2)$ obtenue pour la pulsation ω_2 , en fonction de α , r , C et ω_2 .
 - Exprimer $\underline{Y}(\omega_2)$ en fonction de α , r et Q . Sachant que $Q \gg \alpha > 1$, donner une valeur approchée de \underline{Y}_2 et de $\underline{Z}(\omega_2)$. Quelle est la nature (résistive, capacitive, inductive) de l'impédance équivalente ?
3. On considère maintenant le dipôle schématisé ci-dessous :



On désigne respectivement par \underline{Y}' et \underline{Z}' l'admittance et l'impédance complexes de ce montage.

- Quelle valeur convient-il de donner à C_0 pour que le module Y' de l'admittance \underline{Y}' soit minimale à $\omega = \omega_2$?
- Pour quelles valeurs de la pulsation ω , le module Z' de \underline{Z}' est-il égal à $\frac{Z'_{\max}}{\sqrt{2}}$?

On définit une bande passante de largeur $\Delta\omega$; évaluer $\frac{\omega_2}{\Delta\omega}$.

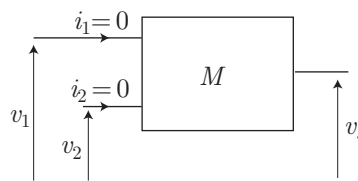
● 105 ————— Concours E.N.S.T.I.M.

45 min.

Impédances

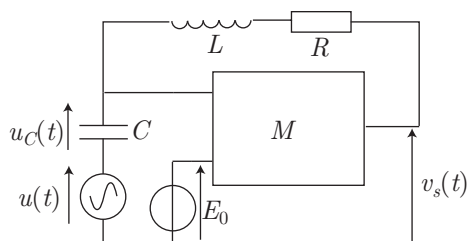
MPSI-PCSI-PTSI

Un multiplieur est représenté par un circuit intégré qui réalise le produit des tensions d'entrée v_1 , v_2 et donne une tension de sortie $v_s = k v_1 v_2$ (k est une constante positive).



Les courants d'entrée sont toujours nuls.

La figure suivante montre les différents éléments du circuit oscillant; M désigne le multiplieur.



$u(t)$ est la tension d'un générateur sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude U_0 . E_0 est la force électromotrice d'un générateur de tension continue.

1. Montrer que la tension $v_s(t)$ est telle que :

$$v_s(t) = k \times [u(t) + u_C(t)] \times E_0$$

où $u_C(t)$ représente la tension aux bornes du condensateur.

2. En déduire l'équation vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ sous la forme :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 A \cos(\omega t)$$

Déterminer ω_0 , A et τ en fonction des caractéristiques du circuit : U_0 , E_0 , R , L , C , k .

3. En utilisant la notation complexe, déterminer l'amplitude $U_C(\omega)$ de $u_C(t)$ en fonction de τ , A , ω et ω_0 .
4. On donne $R = 310 \Omega$, $L = 0,5 \text{ H}$, $C = 47 \text{ nF}$, $E_0 = 0 \text{ V}$.
Calculer le facteur de qualité et tracer l'allure de la courbe $U_C(\omega)$.
5. On trouve expérimentalement :

E_0 (V)	0	1	2	3	4	5	6	7
$10^{-3} \omega_0$ ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)	6,52	6,18	5,83	5,46	5,05	4,61	4,13	3,57

Vérifier que ω_0^2 est une fonction affine de E_0 . En déduire la valeur de k .

● 106 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

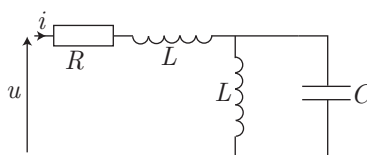
10 min.

Résonance

MPSI-PCSI-PTSI

Le circuit ci-dessous est alimenté par une tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ et est traversé par un courant d'intensité $i(t) = I \cos(\omega t + \phi)$.

On note $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $\omega_1^2 = 2\omega_0^2$.



1. Exprimer l'impédance \underline{Z} du circuit et en déduire l'expression de I en fonction de U , ω , ω_0 , ω_1 , R et L .
2. Quelles sont les pulsations qui assurent à I une valeur *minimum* ou *maximum* ; que valent ces *extrema* ?
3. En déduire une représentation graphique de $I(\omega)$. Pourquoi parle-t-on d'antirésonance ?

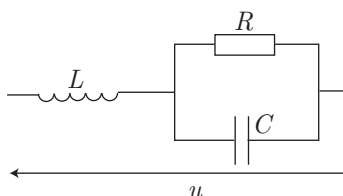
● **107** **Concours ENSI**

10 min.

Résonance en tension

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le circuit suivant, alimenté par la tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$.



Déterminer la condition sur R , L et C pour qu'une résonance se produise aux bornes du condensateur. Que vaut alors la pulsation de résonance ω_r ?

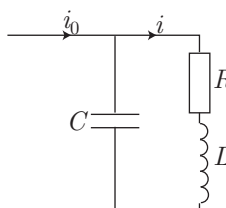
● **108** **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

15 min.

Résonance en intensité

MPSI-PCSI-PTSI

Le circuit schématisé ci-dessous est traversé par un courant d'intensité $i_0(t) = I_0 \cos(\omega t)$.



On pose : $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

1. En utilisant la loi du diviseur de courant, déterminer la relation entre i_0 et i en fonction de x et de Q . En déduire l'expression de l'amplitude I du courant $i(t)$.
2. On suppose $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Exprimer, en fonction de Q , le coefficient de surintensité défini par : $\sigma = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$, où I_{\max} désigne la valeur maximale de I .

3. Montrer que, pour toute valeur de $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $I_{\max} > I_0$.

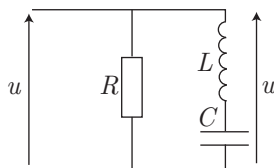
● **109** ————— **Lycée Hoche, Versailles**

15 min.

Résonance en intensité

MPSI-PCSI-PTSI

On réalise le montage suivant, dans lequel les dipôles sont considérés comme idéaux.



La tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ est imposé par une source idéale. Il apparaît alors, dans le dipôle RLC , un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$; on s'intéresse ici à l'influence de la pulsation ω sur l'amplitude I_0 de ce courant.

1. Exprimer cette amplitude en fonction de $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R}$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, U_0 et R exclusivement.
2. Tracer l'allure de la courbe $I_0 = f(x)$ en fonction de x .
3. Trouver les deux pulsations de coupure ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$, telles que :

$$I_0(\omega_{1,2}) = \frac{U_0}{R} \sqrt{2}$$

4. En déduire l'expression de la largeur de la bande : $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$.

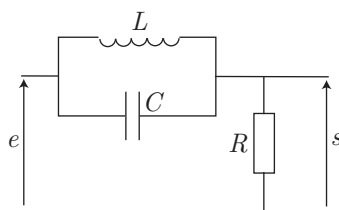
● **110** ————— **Lycée Roosevelt, Reims**

25 min.

Résonance

MPSI-PCSI-PTSI

Le circuit suivant est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$ et sa tension de « sortie » vaut $s(t) = S \cos(\omega t + \phi)$.



On pose $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

1. Exprimer S en fonction de x .
2. Représenter graphiquement la courbe donnant $\phi(x)$.
3. Quelles sont les pulsations qui affectent à S des valeurs maximales et minimales ? que valent ces valeurs ?

4. En déduire une représentation graphique de $S(\omega)$ montrant le phénomène d'antirésonance.
5. Exprimer les pulsations de coupure ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$, définies par :

$$S(\omega_{1,2}) = \frac{S_{\max}}{\sqrt{2}}$$

puis calculer la largeur de bande $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ en fonction de ω_0 et Q .

● **111** ————— **Lycée Hoche, Versailles**

15 min.

Puissance en régime sinusoïdal

MPSI-PCSI-PTSI

Une installation électrique est alimentée sous une tension efficace $U = 200$ V. Elle consomme une puissance moyenne $P = 12$ kW. La fréquence est $f = 50$ Hz, l'intensité efficace 80 A.

1. Sachant que cette installation électrique est de type inductif, calculer la résistance R et l'inductance propre L qui, placées en série avec la même alimentation, seraient équivalentes à l'installation.
2. Quelle capacité C faut-il placer en parallèle sur l'installation pour relever le facteur de puissance à la valeur 0,9 ?

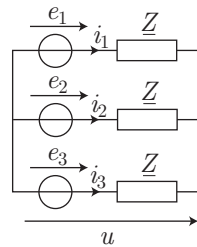
● **112** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

20 min.

Puissance en régime sinusoïdal

MPSI-PCSI-PTSI

Le montage ci-dessous illustre le principe d'une alimentation triphasée :



dans lequel les sources délivrent des tensions :

$$e_1(t) = E \cos(\omega t) \quad e_2(t) = E \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad e_3(t) = E \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

1. Que vaut la somme $s(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t)$?
En déduire la valeur de l'image complexe \underline{u} associée à la tension $u(t)$.
2. Les tensions e_i ont pour amplitude $E = 220$ V et leur pulsation vaut $\omega = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On posera $I_0 = 400$ A et on admettra que \underline{Z} est l'impédance d'une association en série d'une bobine d'inductance $L = 1,52$ mH et d'une résistance $R = 0,275 \Omega$. En admettant que $\arctan(1,735) \simeq \frac{\pi}{3}$, trouver les expressions des courants $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$.

3. Calculer les puissances moyennes \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 et \mathcal{P}_3 absorbées par chacun des trois dipôles d'impédance \underline{Z} , pendant une période T .

● **113** **Lycée Carnot, Dijon**

30 min.

Puissance en régime sinusoïdal

MPSI-PCSI-PTSI

Une source de tension $v(t) = V\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$ alimente un dipôle (d) traversé par un courant d'intensité $i(t) = I\sqrt{2} \cos(\omega t)$ de fréquence $f = 50$ Hz.

- Exprimer la puissance active P (puissance moyenne mise en jeu) en fonction de V , I et ϕ .
- On définit une grandeur Q (unité VAR), appelée *puissance réactive*, par la relation :

$$Q = \frac{1}{T} \int_0^T v_q i \, dt \text{ avec } v_q = V\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Exprimer Q en fonction de V , I et ϕ .

- Un dipôle série est constitué d'une résistance R et d'une *réactance* X ; son impédance s'écrit :

$$\underline{Z} = R + jX$$

Exprimer les puissances active P et réactive Q en fonction de R , X et I .

- Soit un dipôle constitué par l'association en parallèle de deux éléments dont l'un est purement résistif. Son admittance complexe est de la forme :

$$\underline{Y} = G + jB$$

Exprimer les puissances P et Q en fonction de G , B et V .

- Un dipôle (d_s) série, caractérisé par R et X , est énergiquement équivalent à un dipôle parallèle (d_p), caractérisé par G et B , s'ils échangent les mêmes puissances actives et réactives, lorsqu'ils sont soumis à la même tension sinusoïdale.

Comparer leurs impédances \underline{Z}_s et \underline{Z}_p .

- Applications numériques.

Pour un dipôle (d), on donne :

$$V = 231 \text{ V} \quad P = 3\,465 \text{ W} \quad Q = 6\,000 \text{ VAR}$$

- Calculer les valeurs G et B du dipôle (d_p) équivalent.
- Calculer les valeurs R et X du dipôle (d_s) équivalent.
- Calculer ϕ .

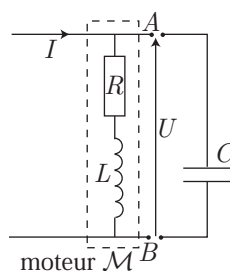
● **114** **Lycée Poincaré, Nancy**

30 min.

Puissance en régime sinusoïdal

MPSI-PCSI-PTSI

Un moteur \mathcal{M} , équivalent à un *resistor* R associé en série à une bobine de coefficient d'auto-inductance L , est alimenté en courant alternatif sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz par un fil de résistance négligeable. Le moteur consomme une puissance moyenne $\mathcal{P} = 4,4$ kW et son facteur de puissance est égal à 0,6. On mesure, entre ses bornes A et B , une tension de valeur efficace $U = 220$ V.



- Calculer le courant efficace I circulant dans la ligne.
a. $I = 12,5 \text{ A}$ **b.** $I = 27,2 \text{ A}$ **c.** $I = 42,6 \text{ A}$ **d.** $I = 33,3 \text{ A}$
- Calculer R .
a. $R = 4 \Omega$ **b.** $R = 8 \Omega$ **c.** $R = 2 \Omega$ **b.** $R = 12 \Omega$
- Calculer L .
a. $L = 7 \text{ mH}$ **b.** $L = 12 \text{ mH}$ **c.** $L = 17 \text{ mH}$ **d.** $L = 52 \text{ mH}$
- Pour relever le facteur de puissance de l'installation, on connecte entre les bornes A et B un condensateur de capacité C . La tension mesurée aux bornes du moteur a toujours la valeur $U = 22 \text{ V}$.
 Calculer la valeur de C pour que le facteur de puissance soit égal à $0,9$.
a. $C = 246 \mu\text{F}$ **b.** $C = 354 \mu\text{F}$ **c.** $C = 192 \mu\text{F}$ **d.** $C = 53 \mu\text{F}$
- Calculer la puissance moyenne \mathcal{P}' absorbée par le moteur.
a. $\mathcal{P}' = 2,3 \text{ kW}$ **b.** $\mathcal{P}' = 4,4 \text{ kW}$ **c.** $\mathcal{P}' = 7,8 \text{ kW}$ **d.** $\mathcal{P}' = 5,3 \text{ kW}$
- Calculer le courant I' circulant dans la ligne.
a. $I' = 12,4 \text{ A}$ **b.** $I' = 53,4 \text{ A}$ **c.** $I' = 33,3 \text{ A}$ **d.** $I' = 22,2 \text{ A}$

● 115 ————— Lycée Hoche, Versailles

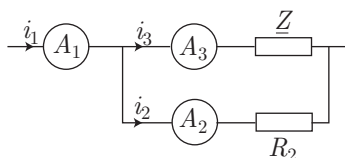
45 min.

Puissance en régime sinusoïdal

MPSI-PCSI-PTSI

1. Méthode des trois ampèremètres

Dans le circuit de la figure suivante, A_1 , A_2 et A_3 sont des ampèremètres de résistance négligeable.

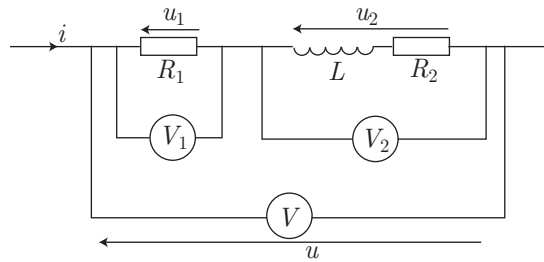


- (a) Une fonction $\psi(t) = \psi_0 \cos(\omega t + \phi)$ est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Montrer que la valeur moyenne $\langle \psi^2 \rangle$ de ψ^2 sur une période T s'exprime de manière simple en fonction de la grandeur efficace $\psi_{\text{eff}} = \frac{\psi_0}{\sqrt{2}}$.

- (b) Montrer que la mesure des trois valeurs efficaces I_1, I_2, I_3 des intensités respectives i_1, i_2, i_3 permet de calculer la puissance moyenne $\langle P \rangle$ consommée dans l'impédance Z inconnue, connaissant R_2 (on exprimera $\langle P \rangle$ en fonction de R_2, I_1^2, I_2^2 et I_3^2 exclusivement).

2. Méthode des trois voltmètres

Dans le circuit suivant, les trois voltmètres V_1, V_2 et V ont une impédance infinie. Ils indiquent les tensions efficaces U_1, U_2, U de u_1, u_2, u , à la fréquence ν .



- (a) Exprimer la valeur moyenne $\langle P \rangle$ consommée par la bobine $\{L, R_2\}$, pendant une période $T = \frac{1}{\nu}$, en fonction de R_1, U^2, U_1^2 et U_2^2 .
- (b) Application numérique.

$$R_1 = 5 \, \Omega \quad \nu = 50 \, \text{Hz} \quad U_1 = 50 \, \text{V} \quad U_2 = 60 \, \text{V} \quad U = 105 \, \text{V}$$

Montrer que $\langle P \rangle = 492,5 \, \text{W}$.

- (c) On note Z l'impédance complexe de la bobine $\{L, R_2\}$. Montrer que :

$$\langle P \rangle = \text{Re} \{Z\} \times \frac{U_1^2}{R_1^2}$$

et en déduire l'expression de R_2 en fonction de U^2, U_1^2, U_2^2 et R_1 .

- (d) Montrer que l'inductance L est donnée par la relation :

$$L = \frac{R_1}{4\pi\nu U_1^2} \sqrt{[(U_1 + U_2)^2 - U^2] \times [U^2 - (U_1 - U_2)^2]}$$

- (e) U, U_1 et U_2 sont mesurés avec une incertitude absolue $\varepsilon = 1 \, \text{V}$. Montrer que l'incertitude relative sur $\langle P \rangle$ vaut :

$$\frac{\Delta \langle P \rangle}{\langle P \rangle} \simeq 8,7\%$$

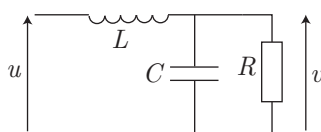
● 116 ————— Lycée Champollion, Grenoble

5 min.

Fonction de transfert

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le montage suivant, pour lequel $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ et $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$.



1. Trouver la fonction de transfert de ce montage.
2. En déduire l'expression de $\tan \phi$ en fonction de R, L, C et ω .

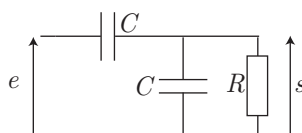
● **117** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

5 min.

Fonction de transfert

MPSI-PCSI-PTSI

Le montage schématisé ci-dessous est alimenté par une tension $e(t) = E \cos(\omega t)$.



1. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce montage.
2. En déduire l'expression du déphasage φ de $s(t) = S \cos(\omega t + \varphi)$, en fonction de ω et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.
3. Tracer graphiquement l'allure de la fonction $\varphi(\omega)$.

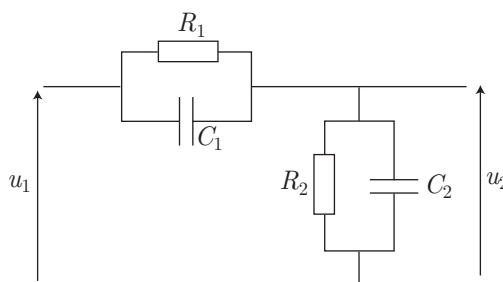
● **118** ————— **Concours ENSI**

10 min.

Fonction de transfert

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le montage ci-dessous :



1. Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce montage.
2. À quelle condition portant sur R_1, C_1, R_2, C_2 les tensions u_1 et u_2 sont-elles proportionnelles ?

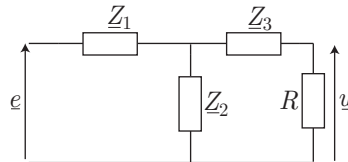
● **119** ————— **Lycée Hoche, Versailles**

15 min.

Fonction de transfert

MPSI-PCSI-PTSI

Dans le montage ci-dessous, \underline{e} est l'image complexe d'une force électromotrice délivrée par une source idéale de tension, \underline{Z}_i sont des impédances complexes et R est une résistance.



Montrer qu'il est possible de choisir \underline{Z}_3 pour que la tension \underline{u} ne dépende pas de R . Exprimer, dans ce cas, \underline{u} en fonction de \underline{e} , \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 .

● **120** ————— **Concours ENGEES**

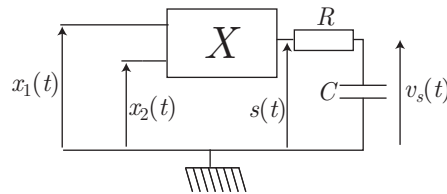
20 min.

Fonction de transfert

MPSI-PCSI-PTSI

On dispose d'un multiplieur analogique, qui transforme les signaux analogiques $x_1(t) = V_1 \cos(\omega t)$ et $x_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \phi)$ en un signal de sortie $s(t)$:

$$s(t) = k \times x_1(t) \times x_2(t) \text{ où } k = 0,1 \text{ V}^{-1}$$



- Que vaut la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre RC ?
 - En déduire la fonction du « dipôle » RC .
 - On choisit $f = \frac{\omega}{2\pi} = 608 \text{ Hz}$, $R = 1 \text{ M}\Omega$ et $C = 1 \mu\text{F}$; quelle conclusion peut-on en déduire quant à la tension $v_s(t)$?
- Les tensions x_1 et x_2 présentent la même fréquence $f = 608 \text{ Hz}$; on réalise successivement les conditions suivantes :
 - $x_1(t) = x_2(t) = V_{01} \cos(\omega t) \Rightarrow v_s(t) = V_{sa} = 21,2 \text{ mV}$;
 - $x_1(t) = x_2(t) = V_{02} \cos(\omega t) \Rightarrow v_s(t) = V_{sb} = 21,1 \text{ mV}$;
 - $x_1(t) = V_{01} \cos(\omega t)$ et $x_2(t) = V_{02} \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow v_s(t) = V_{sc} = 6,4 \text{ mV}$.
 Montrer qu'on peut en déduire le déphasage ϕ ; que vaut-il ?

● **121** ————— **Lycée Roosevelt, Reims**

10 min.

Application de la fonction de transfert

PCSI-PTSI

Un quadripôle, de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\alpha + \beta j\omega}{\gamma + \varepsilon j\omega}$ ($\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ sont des constantes réelles positives, et ω est la pulsation des signaux électriques) est alimenté

par un échelon de tension $e(t)$ d'amplitude E :

$$e(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } e(t) = E \text{ pour } t \geq 0$$

On désigne par $s(t)$ la tension de sortie du quadripôle.

1. Trouver l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$. Discuter la continuité de la fonction $s(t)$ à l'instant $t = 0$.
2. Déterminer l'expression de $s(t = 0)$.

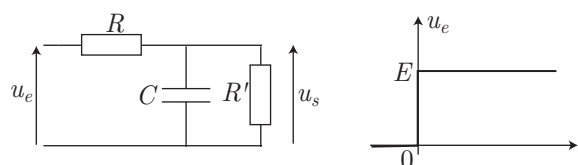
● 122 ————— ESIGETEL

15 min.

Application de la fonction de transfert

PCSI-PTSI

Le circuit ci-dessous est alimenté par un échelon de tension $e(t)$ d'amplitude E .



1. En utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds, déterminer l'équation différentielle vérifiée par u_s .
2. (a) Trouver l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce circuit et en déduire l'équation différentielle vérifiée par u_s ; comparer avec l'expression obtenue à la question précédente.
 (b) À l'aide de l'expression de $\underline{H}(j\omega)$, déterminer la valeur initiale de u_s : $u_s(t = 0)$.
 (c) Résoudre l'équation différentielle et représenter $u_s(t)$.

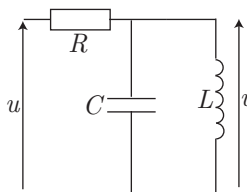
● 123 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

20 min.

Application de la fonction de transfert

PCSI-PTSI

On considère le montage ci-dessous, dans lequel R , L , C désignent respectivement une résistance, une bobine et un condensateur.



On utilisera, par la suite, les notations suivantes :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q_0 = RC\omega_0 = \frac{1}{2}$$

La tension $u(t)$ est un échelon de tension défini par :

$$\begin{cases} u(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \\ u(t) = U_0 \text{ pour } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Donner l'expression de la fonction de transfert du montage et en déduire l'équation différentielle satisfaite par la tension v :

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0 \text{ pour } t > 0$$

2. À l'aide de la fonction de transfert, déterminer les conditions initiales $v(t=0)$ et $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0}$.
3. En déduire la solution de l'équation différentielle précédente.
4. Représenter graphiquement l'allure de la courbe $v(t)$ en précisant les points singuliers.

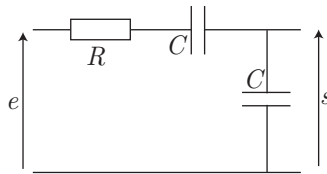
● **124** ————— **Lycée Livet, Nantes**

10 min.

Diagramme de Bode

MPSI-PCSI-PTSI

On s'intéresse au montage suivant, alimenté par une tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω .



1. Exprimer la fonction de transfert de ce montage en fonction de ω et de $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.
2. En déduire l'expression de son gain en décibels $G(\omega)$.
3. Que vaut la pulsation de coupure ω_c ?
4. Établir l'expression des asymptotes de la courbe $G(\log \omega)$.
5. Tracer le diagramme de Bode de ce circuit.

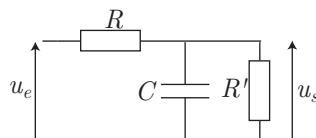
● **125** ————— **Concours ESIGETEL**

10 min.

Diagramme de Bode

MPSI-PCSI-PTSI

Le circuit schématisé ci-dessous est composé d'une résistance R et d'un condensateur de capacité C ; il alimente une résistance de charge R' . On note $u_e = E \cos(\omega t)$ la tension d'entrée et u_s la tension de sortie.



- Déterminer la fonction de transfert de ce circuit.
- Calculer la pulsation de coupure et représenter le diagramme de Bode, après avoir exprimé les équations des asymptotes.

● **126** **Concours ESIM**

25 min.

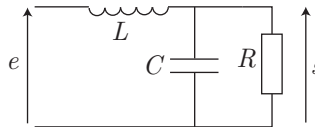
Diagramme de Bode

MPSI-PCSI-PTSI

On établit, à l'entrée du filtre suivant, une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$. On adopte la notation complexe.

On posera :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$



- Sans calcul, prévoir le comportement de ce filtre.
- Déterminer la fonction de transfert du montage.
- On note G le gain en décibels du montage et H le module de sa fonction de transfert.
 - Quelle inégalité doit vérifier Q_0 pour que la courbe représentative de $H(\omega)$ présente un *maximum* ?
 - Quelles sont alors, en fonction de ω_0 et Q_0 , la pulsation ω_1 de l'*extremum* H_{\max} et la valeur de H_{\max} ?
 - Représenter deux allures possibles (suivant la valeur de Q_0) de la courbe représentative de G en fonction de $\log \omega$, en faisant apparaître clairement les points de pulsations remarquables, ainsi que les asymptotes de la courbe.

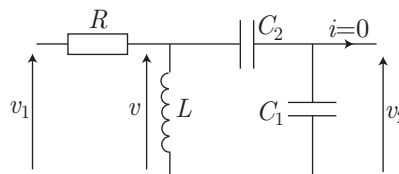
● **127** **Concours ENSI**

25 min.

Diagramme de Bode

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le quadripôle représenté ci-dessous :



- Faire l'analyse physique du filtre et en déduire sa nature (aucun calcul n'est demandé, mais on justifiera les raisonnements).

2. Établir sa fonction de transfert $\underline{T}(\omega j)$, que l'on mettra sous la forme :

$$\underline{T}(\omega j) = \frac{1}{a + \frac{1}{b\omega j} + d\omega j}$$

Expliciter les constantes a , b et d en fonction de R , L , C_1 et C_2 .

3. Quelle est la nature du filtre ? Quelle est sa fonction de transfert réduite :

$$\underline{T}(\omega j) = \frac{G_{\max}}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_r}$$

où l'on explicitera les constantes G_{\max} , Q et ω_r en fonction de a , b et d ?

4. En admettant que $G_{\max} = \frac{1}{2}$ et $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, représenter l'allure du diagramme de Bode de ce filtre : $G_{\text{dB}} = f(\log x)$.

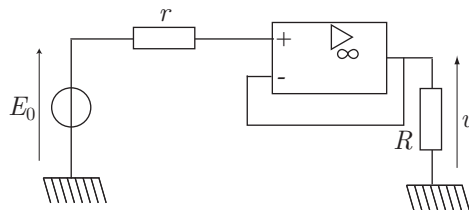
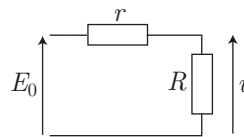
● 128 ————— Lycée Jacques Decourt, Paris

5 min.

Amplificateur opérationnel

MPSI-PCSI-PTSI

- Dans le montage ci-contre, R représente une résistance finie. Montrer que $u \neq E_0$
- On insère alors dans le circuit un amplificateur opérationnel idéal :



Quelle relation lie u et E_0 ? Trouver un intérêt au montage suiveur.

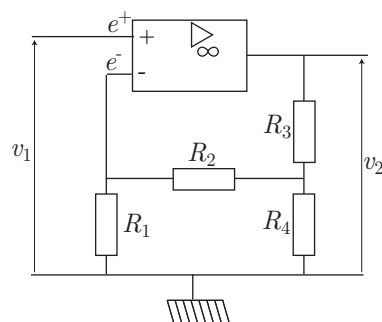
● 129 ————— Lycée Jeanne d'Albret, Saint-Germain-en-Laye

10 min.

Amplificateur opérationnel

MPSI-PCSI-PTSI

Le montage amplificateur schématisé ci-dessous est un amplificateur non inverseur qui permet d'obtenir une grande amplification en tension.



On donne :

$$R_1 = 10 \text{ k}\Omega \quad R_2 = 100 \text{ k}\Omega \quad R_3 = 10 \text{ k}\Omega \quad R_4 = 1 \text{ k}\Omega$$

Calculer l'amplification en tension : $A_v = \frac{v_2}{v_1}$.

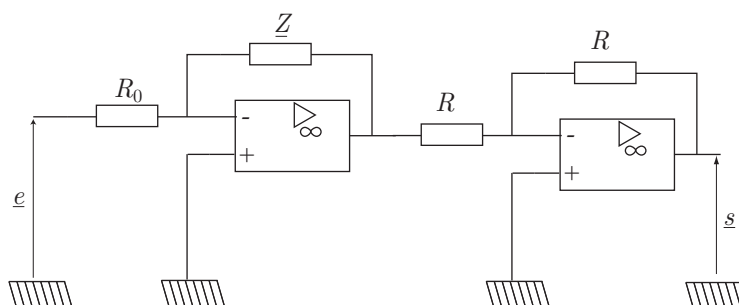
● 130 ————— Concours de la filière PT

10 min.

Amplificateur opérationnel

MPSI-PCSI-PTSI

On réalise le circuit suivant, dans lequel les A.O. sont supposés parfaits.



Déterminer l'impédance \underline{Z} pour que ce montage permette de réaliser un circuit de fonctions de transfert respectives :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{H_0}{j\omega} \text{ et } \underline{H}_2(j\omega) = H_0 \times \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega}$$

On précisera les caractéristiques des dipôles à associer, à la place de \underline{Z} pour parvenir à ces résultats.

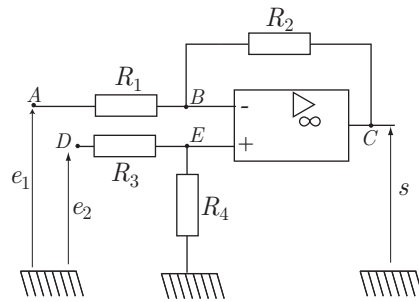
● 131 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

10 min.

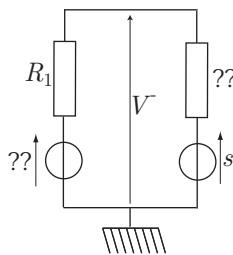
Amplificateur opérationnel

MPSI-PCSI-PTSI

Dans le montage ci-dessous, l'A.O. fonctionne dans son régime linéaire.



1. Compléter le schéma ci-dessous, équivalent à la branche (ABC) :



En déduire une relation entre V^- , e_1 , s , R_1 et R_2 .

2. Quelle relation lie e_2 au potentiel V^+ de l'entrée non inverseuse de l'A.O. ?
3. Trouver l'expression de s en fonction de e_1 , e_2 et des résistances R_i qui composent le montage.
4. Quelle relation doit-on imposer aux produits $R_1 \times R_4$ et $R_2 \times R_3$ pour que :

$$s = \alpha \times (e_2 - e_1), \alpha \in \mathbb{R} ?$$

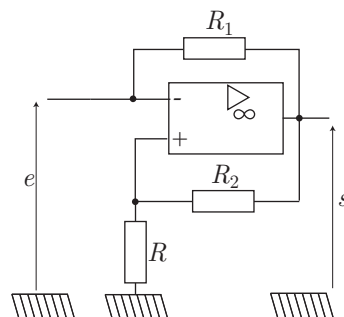
5. Comment doit-on alors choisir R_1 , R_2 , R_3 et R_4 pour obtenir $\alpha = 1$? quel nom porte un tel montage ?

● **132** **Lycée Hoche, Versailles**
15 min.

Amplificateur opérationnel

MPSI-PCSI-PTSI

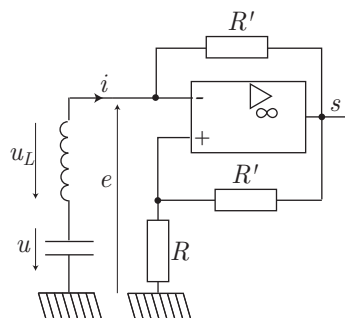
1. L'A.O. du montage ci-dessous est idéal et fonctionne en régime linéaire.



Établir que ce montage équivaut à une résistance négative, c'est-à-dire qu'il existe une grandeur r positive, que l'on déterminera en fonction de R_1 , R_2 et R , telle que :

$$e = -r \times i$$

2. Une bobine (d'inductance L et de résistance r_0) et un condensateur idéal de capacité C sont associés au montage :



- (a) Trouver l'équation différentielle satisfaite par la tension u aux bornes du condensateur.
 (b) Montrer que ce circuit réalise un oscillateur dont on donnera la pulsation lorsque $R = r_0$

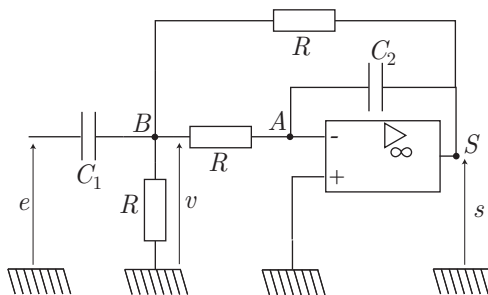
● 133 Lycée Saint-Louis, Paris

25 min.

Amplificateur opérationnel

MPSI-PCSI-PTSI

Dans le montage ci-dessous, l'A.O. idéal fonctionne de manière linéaire.



- En utilisant la branche (BAS), trouver une relation entre les tensions complexes \underline{v} et \underline{s} .
- Déduire de la loi des nœuds, appliquée en B , une autre relation entre \underline{v} , \underline{s} et \underline{e} .
- Montrer que la fonction de transfert de ce montage peut s'écrire :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = -\frac{H_0}{3 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

où l'on exprimera les grandeurs H_0 , Q et ω_0 en fonction de R , C_1 et C_2 .

4. Représenter le diagramme de Bode de ce filtre ; quelle est sa nature ?
5. Donner, en fonction de ω_0 et Q , la largeur de la bande passante $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ (ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$ sont les pulsations de coupure).

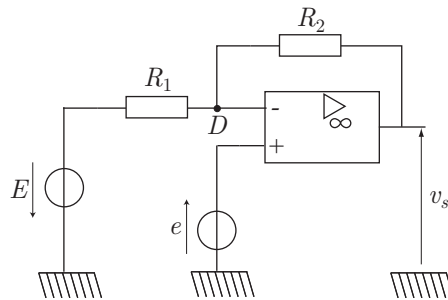
● **134** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

25 min.

Amplificateur opérationnel

MPSI-PCSI-PTSI

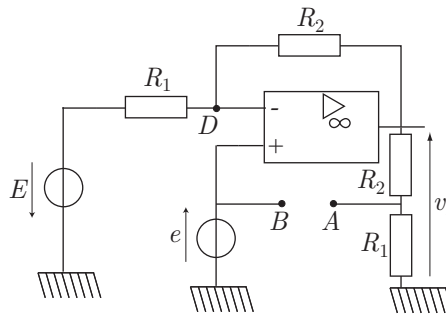
Un A.O. idéal et linéaire est branché conformément au schéma de la figure suivante.



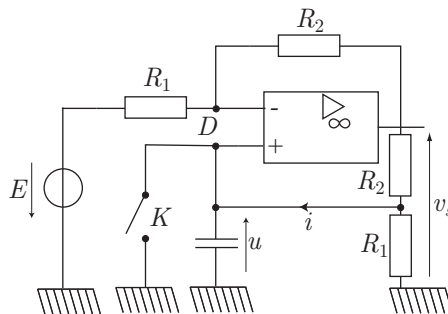
1. Exprimer v_s en fonction de e , E , R_1 et R_2 .

2. On connecte un pont diviseur $\{R_1, R_2\}$ entre la sortie et la masse (figure ci-contre).

- (a) Calculer la tension u_{AB} entre les points A et B .
- (b) On court-circuite les points A et B . Quelle est l'expression du courant circulant dans le court-circuit ?



3. On remplace la source de tension par un condensateur de capacité C . À l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K .



- (a) Exprimer l'intensité du courant i en fonction de R et R_1 .
- (b) Quelle est la loi de variation de la tension $u(t)$?

- (c) En déduire les expressions de la tension $v_s(t)$ et de sa dérivée $\frac{dv_s}{dt}$. Que remarque-t-on ?

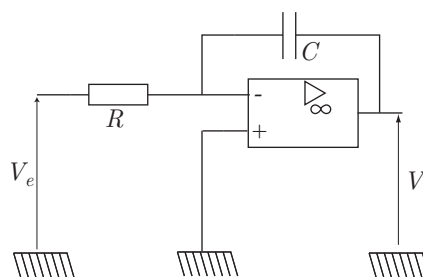
● **135** **Lycée Henri IV, Paris**

30 min.

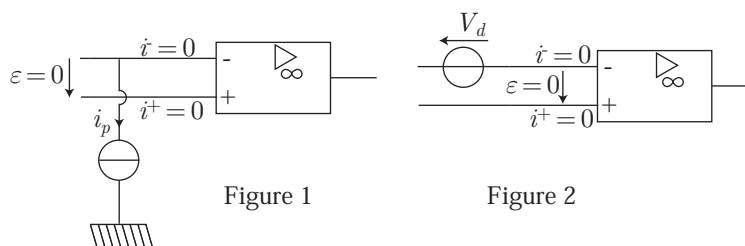
Amplificateur opérationnel

MPSI-PCSI-PTSI

Soit le montage intégrateur à A.O. le plus simple :



1. (a) En utilisant les lois des nœuds et des mailles, et en considérant l'A.O. idéal et en régime linéaire, trouver l'équation différentielle liant V_s et V_e .
- (b) Que se passe-t-il si V_e possède une composante continue ?
2. L'expérience montre que, pour $V_e = 0$, la tension de sortie V_s passe de 0 à 10 V en 2,5 s lorsque $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,1 \mu\text{F}$. Pour expliquer cette dérive, on peut envisager certains défauts de l'A.O. pouvant charger C :
 - soit l'existence d'un courant de polarisation i_p modélisé par une source de courant (figure 1) ;
 - soit l'existence d'une tension de décalage V_d modélisée par une source de tension (figure 2).



- (a) On suppose que la dérive observée est due à la seule présence de i_p . Calculer i_p lorsque $V_e = 0$.
- (b) On suppose que la dérive observée est due à la seule présence de V_d . Calculer V_d lorsque $v_e = 0$.
- (c) Le constructeur garantit les caractéristiques suivantes :

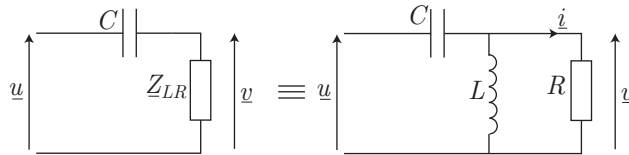
$$|i_p| < 200 \text{ pA} \quad |V_d| < 10 \text{ mV}$$

Quel défaut est véritablement responsable de cette dérive ?

● **97** ————— **Lycée Hoche, Versailles**

Soit \underline{Z}_{LR} l'impédance de l'association en parallèle de L et R :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{LR}} = \frac{1}{L\omega j} + \frac{1}{R}$$



La loi du diviseur de tension permet de poser :

$$\begin{aligned} \underline{v} &= \underline{u} \times \frac{\underline{Z}_{LR}}{\underline{Z}_{LR} + \frac{1}{C\omega j}} = \underline{u} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{C\omega j} \times \frac{1}{\underline{Z}_{LR}}} \\ &= \underline{u} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{C\omega j} \left(\frac{1}{L\omega j} + \frac{1}{R} \right)} = \underline{u} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{LC\omega^2} + \frac{1}{RC\omega j}} \end{aligned}$$

En outre, la tension \underline{v} est aussi celle aux bornes de la résistance R , parcourue par le courant \underline{i} , en conséquence de quoi :

$$\underline{v} = R\underline{i} \Rightarrow \underline{i} = \frac{1}{R} \underline{v} = \frac{\underline{u}}{R \left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} \right) + \frac{1}{C\omega j}}$$

Par suite, \underline{i} devient indépendant de R si le coefficient qui accompagne R est nul, c'est-à-dire :

$$LC\omega^2 = 1$$

Dans ces conditions, \underline{i} devient simplement :

$$\underline{i} = C\omega j \underline{u}$$

● **98** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

1. Soit $\omega = 2\pi f$ la fréquence de la tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ à laquelle est associée l'image complexe $\underline{u} = U_0 e^{j\omega t}$. Le courant i_L , d'image complexe $\underline{i}_L = I_{0L} e^{j(\omega t + \phi_L)}$, alimente l'association RL série, d'impédance \underline{Z}_L :

$$\underline{Z}_L = R + L\omega j = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} e^{j\varphi_L} \text{ avec } \tan \varphi_L = \frac{L\omega}{R}$$

Cette impédance est du reste définie par :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_L = \frac{\underline{u}}{\underline{i}_L} &\Rightarrow \underline{i}_L = \frac{1}{\underline{Z}_L} \underline{u} = \frac{e^{-j\varphi_L}}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} U_0 e^{j\omega t} \\ &\Rightarrow I_{0L} e^{j(\omega t + \phi_L)} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} e^{j(\omega t - \varphi_L)} \end{aligned}$$

L'identification de ces deux nombres complexes conduit à :

$$I_{0L} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \Rightarrow I_{0L} = \frac{127}{\sqrt{(500)^2 + (0,5 \times 2\pi \times 500)^2}}$$

$$\Rightarrow I_{0L} = 77 \text{ mA}$$

et fournit également :

$$\phi_L = -\varphi_L \Rightarrow \tan \phi_L = -\tan \varphi_L = -\frac{L\omega}{R}$$

$$\Rightarrow \tan \phi_L = -\frac{0,5 \times 2\pi \times 500}{500} = -\pi$$

$$\Rightarrow \phi_L \simeq -1,26 \text{ rad}$$

2. Le condensateur d'impédance $Z_C = \frac{1}{C\omega j} = \frac{1}{C\omega e^{j\pi/2}}$ étant parcouru par un courant i_C sous une tension u , il s'ensuit que :

$$u = Z_C i \Rightarrow i = \frac{1}{Z_C} u = C\omega e^{j\pi/2} \times U_0 e^{j\omega t}$$

$$\Rightarrow I_{0C} e^{j(\omega t + \phi_C)} = C\omega U_0 e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

À nouveau, l'identification des modules et arguments des deux membres de cette équation fournit directement :

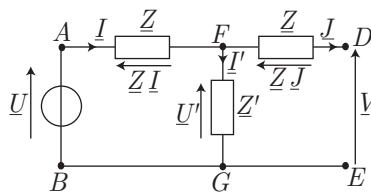
$$I_{0C} = C\omega U_0 = 0,1 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 500 \times 127 \Rightarrow I_{0C} \simeq 40 \text{ mA}$$

et :

$$\phi_C = \frac{\pi}{2}$$

● 99 ————— Lycée Fabert, Metz

1. Au nœud F , le courant I se sépare en un courant J et un courant $I' = I - J$, responsable de l'apparition d'une tension $U' = Z'I' = Z'(I - J)$.



La loi des mailles appliquée à $(BAFGB)$ conduit à :

$$\underline{U} - \underline{Z}I - \underline{U}' = 0 \Rightarrow \underline{U} = \underline{Z}I + \underline{Z}'(I - J) \Rightarrow \underline{U} = (\underline{Z} + \underline{Z}')I - \underline{Z}'J \quad (6)$$

de même qu'en $(ADEBA)$, cette loi fournit :

$$\underline{U} - \underline{Z}I - \underline{Z}J - \underline{V} = 0 \Rightarrow \underline{U} - \underline{V} = \underline{Z}I + \underline{Z}J \quad (7)$$

Les équations (6) et (7) deviennent, après multiplication par \underline{Z} et par \underline{Z}' respectivement :

$$\begin{cases} \underline{Z}\underline{U} = \underline{Z}(\underline{Z} + \underline{Z}')\underline{I} - \underline{Z}\underline{Z}'\underline{J} \\ \underline{Z}'(\underline{U} - \underline{V}) = \underline{Z}'\underline{Z}\underline{I} + \underline{Z}\underline{Z}'\underline{J} \end{cases} \Rightarrow \underline{Z}\underline{U} + \underline{Z}'(\underline{U} - \underline{V}) = \underline{Z}(\underline{Z} + 2\underline{Z}')\underline{I}$$

$$\Rightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}(\underline{Z} + \underline{Z}') - \underline{Z}'\underline{V}}{\underline{Z}(\underline{Z} + 2\underline{Z}')}$$

De la même manière, la multiplication par \underline{Z} et par $(\underline{Z} + \underline{Z}')$ des équations (6) et (7) conduit à :

$$\begin{cases} \underline{Z}\underline{U} = \underline{Z}(\underline{Z} + \underline{Z}')\underline{I} - \underline{Z}\underline{Z}'\underline{J} \\ (\underline{Z} + \underline{Z}')(\underline{U} - \underline{V}) = \underline{Z}(\underline{Z} + \underline{Z}')\underline{I} + \underline{Z}(\underline{Z} + \underline{Z}')\underline{J} \end{cases}$$

d'où l'on déduit, après soustraction de ces deux dernières équations :

$$(\underline{Z} + \underline{Z}')(\underline{U} - \underline{V}) - \underline{Z}\underline{U} = [\underline{Z}(\underline{Z} + \underline{Z}') + \underline{Z}\underline{Z}']\underline{J}$$

soit encore :

$$\underline{J} = \frac{\underline{Z}'\underline{U} - (\underline{Z} + \underline{Z}')\underline{V}}{\underline{Z}(\underline{Z} + 2\underline{Z}')}$$

2. Si aucun courant ne circule entre D et E , $\underline{J} = 0$ se traduit par :

$$(\underline{Z} + \underline{Z}')\underline{V} = \underline{Z}'\underline{U} \Rightarrow \underline{V} = \frac{\underline{Z}'}{\underline{Z} + \underline{Z}'}\underline{U}$$

3. En choisissant $\underline{Z} = R$ et $\underline{Z}' = \frac{1}{C\omega j}$, l'équation précédente devient :

$$\underline{V} = \frac{\frac{1}{C\omega j}}{R + \frac{1}{C\omega j}}\underline{U} = \frac{1}{1 + RC\omega j}\underline{U}$$

Les images complexes $\underline{V} = V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ et $\underline{U} = U_0 e^{j\omega t}$ sont associées aux tensions réelles $V(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ et $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$. En outre, le nombre complexe $1 + RC\omega j$ s'écrit aussi :

$$1 + RC\omega j = \sqrt{1 + (RC\omega)^2} e^{j\varphi} \text{ avec } \tan \varphi = RC\omega$$

C'est pourquoi :

$$V_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2} e^{j\varphi}} = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} e^{j(\omega t - \varphi)}$$

L'identification des deux membres fournit finalement :

$$V_0 = \frac{U_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$

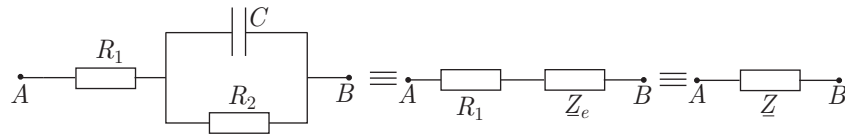
et :

$$\phi = -\varphi \Rightarrow \tan \phi = -\tan \varphi \Rightarrow \tan \phi = -RC\omega$$

● 100 Lycée Hoche, Versailles

1. L'association en parallèle du condensateur de capacité C et de la résistance R_2 équivaut à un dipôle d'impédance \underline{Z}_e telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}_e} = \frac{1}{R_2} + C\omega j = \frac{1 + R_2 C\omega j}{R_2} \Rightarrow \underline{Z}_e = \frac{R_2}{1 + R_2 C\omega j}$$



L'impédance équivalente entre A et B vaut par conséquent :

$$\underline{Z} = R_1 + \underline{Z}_e = R_1 + \frac{R_2}{1 + R_2 C\omega j} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{(R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C\omega}{1 + jR_2 C\omega} \quad (8)$$

2. Les images complexes $\underline{u} = U_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = I_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ sont liées par l'impédance $\underline{Z} = Z e^{j\phi}$:

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} \Rightarrow I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \frac{U_0}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} \Rightarrow \begin{cases} I_0 = \frac{U_0}{Z} \\ \varphi = -\phi \end{cases}$$

Le résultat (8) donne directement :

$$Z = \sqrt{\frac{(R_1 + R_2)^2 + R_1^2 R_2^2 C^2 \omega^2}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}}$$

d'où l'on déduit que :

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}{(R_1 + R_2)^2 + R_1^2 R_2^2 C^2 \omega^2}}$$

Quant à la détermination de $\varphi = -\phi$, elle impose la détermination préalable de l'argument ϕ de \underline{Z} , qui peut être menée de deux manières différentes :

Première méthode

L'impédance \underline{Z} se présente comme le rapport de deux nombres complexes :

$$\underline{Z}_1 = (R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C\omega = Z_1 e^{j\phi_1} \text{ avec } \tan \phi_1 = \frac{R_1 R_2 C\omega}{R_1 + R_2}$$

et :

$$\underline{Z}_2 = 1 + jR_2 C\omega = Z_2 e^{j\phi_2} \text{ avec } \tan \phi_2 = R_2 C\omega$$

Ce faisant, \underline{Z} se présente sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{Z_1 e^{j\phi_1}}{Z_2 e^{j\phi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)} \\ \Rightarrow Z e^{j\phi} &= \frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\phi_1 - \phi_2)} \\ \Rightarrow \phi &= \phi_1 - \phi_2 \\ \Rightarrow \tan \phi &= \tan(\phi_1 - \phi_2) = \frac{\tan \phi_1 - \tan \phi_2}{1 + \tan \phi_1 \tan \phi_2}\end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$\tan \phi = \frac{\frac{R_1 R_2 C \omega}{R_1 + R_2} - R_2 C \omega}{1 + \frac{R_1 R_2 C \omega}{R_1 + R_2} \times R_2 C \omega} = -\frac{R_2^2 C \omega}{R_1 + R_2 + R_1 R_2^2 C^2 \omega^2}$$

d'où il découle que :

$$\varphi = -\phi = \arctan \left(\frac{R_2^2 C \omega}{R_1 + R_2 + R_1 R_2^2 C^2 \omega^2} \right)$$

Deuxième méthode

L'expression (8) de l'impédance :

$$\begin{aligned}\underline{Z} &= \frac{R_1 + R_2 + jR_1 R_2 C \omega}{1 + jR_2 C \omega} = \frac{[(R_1 + R_2) + jR_1 R_2 C \omega] [1 - jR_2 C \omega]}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2} \\ &= \frac{R_1 + R_2 + R_1 R_2^2 C^2 \omega^2}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2} - j \frac{R_2^2 C \omega}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}\end{aligned}$$

fait apparaître clairement les parties réelle et imaginaire de $\underline{Z} = Z e^{j\phi}$, d'où il ressort que :

$$\tan \phi = \frac{\text{Im} \{ \underline{Z} \}}{\text{Re} \{ \underline{Z} \}} = -\frac{R_2^2 C \omega}{R_1 + R_2 + R_1 R_2^2 C^2 \omega^2} = \tan(-\varphi)$$

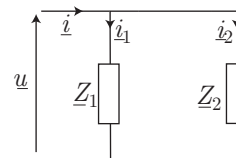
Finalement, ce résultat confirme l'expression de φ :

$$\varphi = \arctan \left(\frac{R_2^2 C \omega}{R_1 + R_2 + R_1 R_2^2 C^2 \omega^2} \right)$$

● 101 ————— Lycée Fabert, Metz

1. Les associations en série $\{L, R_1\}$ et $\{C, R_2\}$ sont équivalentes à des dipôles d'impédances respectives :

$$\underline{Z}_1 = R_1 + L\omega j \text{ et } \underline{Z}_2 = R_2 + \frac{1}{C\omega j} = \frac{1 + R_2 C \omega j}{C\omega j}$$



Ainsi, l'impédance équivalente à l'association en parallèle de \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 vaut \underline{Z} telle que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_1 + L\omega j} + \frac{C\omega j}{1 + R_2 C\omega j} \\ &= \frac{1 + j\omega(R_1 + R_2)C - LC\omega^2}{R_1 + j\omega(L + R_1 R_2 C) - R_2 LC\omega^2}\end{aligned}$$

Or, par définition :

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \Rightarrow \underline{i} = \frac{1}{\underline{Z}} \underline{u}$$

ce qui signifie que $i(t)$ et $u(t)$ sont proportionnels s'il existe un nombre réel α , indépendant de ω , tel que :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \alpha \Rightarrow 1 + j\omega(R_1 + R_2)C - LC\omega^2 = \alpha R_1 + j\omega(L + R_1 R_2 C)\alpha - R_2 LC\omega^2 \alpha$$

sans quoi il existerait un déphasage entre $i(t)$ et $u(t)$.

Or, cette équation devant être vérifiée pour toute valeur de ω , elle impose l'identité :

- des termes d'ordre 0 en ω :

$$1 = \alpha R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{1}{\alpha}$$

- des termes d'ordre 2 en ω :

$$LC\omega^2 = R_2 LC\omega^2 \alpha \Rightarrow 1 = R_2 \alpha \Rightarrow R_2 = \frac{1}{\alpha}$$

soit encore :

$$R_1 = R_2 = \frac{1}{\alpha}$$

On notera dorénavant R_i cette valeur commune à R_1 et R_2 .

- des termes d'ordre 1 en ω :

$$\omega(R_1 + R_2)C = \omega(L + R_1 R_2 C)\alpha \Rightarrow 2R_i C = \frac{L}{R_i} + R_i C \Rightarrow L = R_i^2 C$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme :

$$R_i = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

2. De ces résultats découlent les expressions polaires de \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 :

$$\underline{Z}_1 = R_i + L\omega j = \sqrt{\frac{L}{C}} + L\omega j = \sqrt{\frac{L}{C} + L^2\omega^2} \times e^{j\phi}$$

avec :

$$\tan \phi = L\omega \times \sqrt{\frac{C}{L}} = \omega \sqrt{LC}$$

et :

$$\underline{Z}_2 = \frac{1 + R_i C \omega j}{C \omega j} = \frac{\sqrt{1 + R_i^2 C^2 \omega^2} e^{j\phi_2}}{C \omega e^{j\pi/2}} = \frac{\sqrt{1 + LC\omega^2} e^{j\phi_2}}{C \omega e^{j\pi/2}}$$

où :

$$\begin{aligned} \tan \phi_2 &= R_i C \omega = \sqrt{\frac{L}{C}} \times C \omega = \sqrt{LC} \omega = \tan \phi \\ \Rightarrow \underline{Z}_2 &= \frac{\sqrt{1 + LC\omega^2}}{C \omega} \times \frac{1}{e^{j(\frac{\pi}{2} - \phi)}} \end{aligned}$$

En choisissant pour $u(t) = U \sin(\omega t)$ une image complexe $\underline{u} = U e^{j\omega t}$, on impose :

$$u(t) = \text{Im} \{ \underline{u} \} \text{ et } i(t) = \text{Im} \{ \underline{i} \}$$

et c'est pourquoi l'impédance \underline{Z}_1 est traversée par un courant i_1 tel que :

$$\underline{u} = \underline{Z}_1 i_1 \Rightarrow i_1 = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_1} = \frac{U e^{j\omega t}}{\sqrt{\frac{L}{C} + L^2 \omega^2} e^{j\phi}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{L}{C} + L^2 \omega^2}} \times e^{j(\omega t - \phi)}$$

d'où il s'ensuit que :

$$i_1(t) = \text{Im} \{ \underline{i}_1 \} = \frac{U}{\sqrt{\frac{L}{C} + L^2 \omega^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

De même :

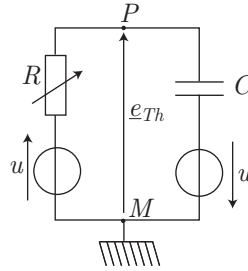
$$i_2 = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}_2} = \frac{C \omega U}{\sqrt{1 + LC\omega^2}} e^{j\omega t} \times e^{j(\frac{\pi}{2} - \phi)}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \text{Im} \{ \underline{i}_2 \} = \frac{C \omega U}{\sqrt{1 + LC\omega^2}} \sin\left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow i_2(t) &= \frac{C \omega U}{\sqrt{1 + LC\omega^2}} \cos(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

● 102 ————— Lycée Pissarro, Pontoise

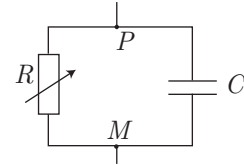
La force électromotrice e_{Th} du générateur équivalent s'identifie à la tension entre les bornes P et M lorsqu'aucun courant ne circule entre ces points. Une nouvelle présentation du schéma du montage :



permet l'emploi direct du théorème de Millman :

$$\underline{e}_{Th} = \frac{\frac{u}{R} - C\omega j u}{\frac{1}{R} + C\omega j} \Rightarrow \underline{e}_{Th} = \frac{1 - RC\omega j}{1 + RC\omega j} u \quad (9)$$

Quant à l'impédance interne \underline{Z}_{Th} , elle équivaut à l'impédance entre P et M lorsque les sources de tension sont remplacées par des fils électriques. La résistance et le condensateur étant alors montés en parallèle, il s'ensuit que :



$$\underline{Z}_{Th} = \frac{R \times \frac{1}{C\omega j}}{R + \frac{1}{C\omega j}} \Rightarrow \underline{Z}_{Th} = \frac{R}{1 + RC\omega j}$$

Soit $\underline{u} = U_0 e^{j\omega t}$ l'image complexe associée à la tension $u(t)$. Le résultat (9) s'écrit :

$$\underline{e}_{Th} = \frac{1 - RC\omega j}{1 + RC\omega j} U_0 e^{j\omega t} = H e^{j\phi} \times U_0 e^{j\omega t}$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{H} = H e^{j\phi} &= \frac{1 - RC\omega j}{1 + RC\omega j} = \frac{(1 - RC\omega j)(1 - RC\omega j)}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \\ &= \frac{1 - R^2 C^2 \omega^2}{1 + R^2 C^2 \omega^2} - j \times \frac{2RC\omega}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \\ &\Rightarrow \tan \phi = -\frac{2RC\omega}{1 - R^2 C^2 \omega^2} \end{aligned}$$

et :

$$H = \left| \frac{1 - RC\omega j}{1 + RC\omega j} \right| = \frac{1 + R^2 C^2 \omega^2}{1 + R^2 C^2 \omega^2} = 1$$

Par suite :

$$\underline{e}_{Th} = U_0 e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow e_{Th} = U_0 \cos(\omega t + \phi)$$

Ce montage sert ainsi à créer un déphasage sur une tension, sans en modifier l'amplitude.

● **103** **Q.C.M.**

1. L'association en parallèle de R et C , d'impédance :

$$\underline{Z}_1 = \frac{R \times \frac{1}{C\omega j}}{R + \frac{1}{C\omega j}} = \frac{R}{1 + RC\omega j},$$

est branchée en série avec L et r ; l'impédance équivalente vaut :

$$\underline{Z} = r + L\omega j + \underline{Z}_1 = r + L\omega j + \frac{R}{1 + RC\omega j} \quad (10)$$

$$= r + L\omega j + \frac{R(1 - RC\omega j)}{1 + R^2C^2\omega^2} \quad (11)$$

$$\Rightarrow \underline{Z} = r + \frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2} + \omega j \left[L - \frac{R^2C}{1 + R^2C^2\omega^2} \right] \text{ (réponse b) } \quad (12)$$

2. Soient $\underline{i} = I_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{v} = V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ les images complexes associées à $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et à $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$. Ces deux grandeurs sont en phase lorsque $\phi = 0$, auquel cas :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{v}}{\underline{i}} = \frac{V_0}{I_0} e^{j\phi} = \frac{V_0}{I_0} \in \mathbb{R}$$

ce qui signifie aussi que la partie imaginaire de \underline{Z} est nulle :

$$L - \frac{R^2C}{1 + R^2C^2\omega^2} = 0 \Rightarrow L + R^2LC^2\omega^2 = R^2C \Rightarrow R^2C(1 - LC\omega^2) = L$$

d'où il s'ensuit que :

$$R = \left[\frac{L}{C(1 - LC\omega^2)} \right]^{1/2} \text{ (réponse c) } \quad (13)$$

3. La réponse précédente équivaut à :

$$L = \frac{R^2C}{1 + R^2C^2\omega^2} \Rightarrow 1 + R^2C^2\omega^2 = \frac{R^2C}{L} \quad (14)$$

En outre, lorsque $\text{Im}\{\underline{Z}\} = 0$, l'expression (12) devient :

$$\underline{Z} = r + \frac{R}{1 + R^2C^2\omega^2} = r + R \times \frac{L}{R^2C} \Rightarrow \underline{Z} = r + \frac{L}{RC} \text{ (réponse c) } \quad (15)$$

4. Pour que l'identité (13) attribue à R une valeur réelle, il est nécessaire que :

$$1 - LC\omega^2 > 0 \Rightarrow LC\omega^2 < 1 \Rightarrow \omega < \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Il existe donc une valeur $\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ pour ω :

$$\omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{(10 \times 10^{-3}) \times (10^{-2} \times 10^{-6})}} \Rightarrow \omega_{\max} = 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (réponse a)}$$

En outre, l'équation (14) montre que :

$$\frac{R^2 C}{L} = 1 + R^2 C^2 \omega^2 \geq 1 \text{ car } R^2 C^2 \omega^2 \geq 0$$

Il existe par conséquent une valeur *minimum* :

$$R_{\min} = \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow R \geq R_{\min}$$

Application numérique :

$$R_{\min} = \sqrt{\frac{10 \times 10^{-3}}{10^{-2} \times 10^{-6}}} \Rightarrow R_{\min} = 10^3 \Omega \text{ (réponse d)}$$

5. Lorsque $\omega = \omega_{\max} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, l'expression (13) montre que R tend vers l'infini, ce qui, compte tenu du résultat (15), conduit à :

$$\underline{Z}_{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[r + \frac{L}{RC} \right] \Rightarrow \underline{Z}_{\infty} = r \text{ (réponse b)}$$

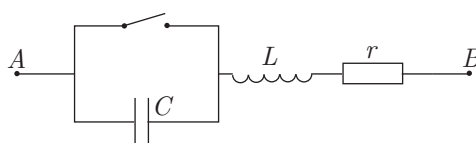
En outre, l'identité (12) fournit :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\infty} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[r + \frac{R}{1 + R^2 C^2 \omega^2} + \omega j \left(L - \frac{R^2 C}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \right) \right] \\ &= r + \omega j \left(L - \frac{1}{C \omega^2} \right) \Rightarrow \underline{Z}_{\infty} = r + L \omega j + \frac{1}{C \omega j} \end{aligned}$$

ce qui suffit à montrer que :

le dipôle est un circuit rLC série (réponse d).

Du reste, ce résultat est confirmé par le schéma dans lequel la résistance R serait remplacée par un interrupteur ouvert ($R \rightarrow \infty$) :



● 104 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. (a) L'admittance \underline{Y}_{LC} équivalente à l'association en série vérifie :

$$\frac{1}{\underline{Y}_{LC}} = \underline{Z}_{LC} = L \omega j + \frac{1}{C \omega j} = \frac{1 - LC \omega^2}{C \omega j} \Rightarrow \underline{Y}_{LC} = \frac{C \omega j}{1 - LC \omega^2}$$

C'est pourquoi l'admittance totale du montage proposé vaut :

$$\underline{Y} = \alpha C\omega j + \underline{Y}_{LC} = \alpha C\omega j + \frac{C\omega j}{1 - LC\omega^2} = C\omega j \times \frac{(1 + \alpha) - \alpha LC\omega^2}{1 - LC\omega^2}$$

(b) De cette expression, il découle que :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (\underline{Y}) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\alpha C\omega j + \frac{C\omega j}{1 - LC\omega^2} \right] \quad (16)$$

$$\Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\underline{Y}) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\alpha C\omega j) = +\infty \quad (17)$$

et :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (\underline{Y}) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left[\alpha C\omega j + \frac{C\omega j}{1 - LC\omega^2} \right] \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} (\underline{Y}) = 0$$

Par définition, l'admittance \underline{Y} est liée à la tension \underline{u} aux bornes du dipôle AB et au courant \underline{i} circulant dans AB :

$$\underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} \Rightarrow \underline{i} = \underline{Y} \underline{u} \text{ et } \underline{u} = \frac{\underline{i}}{\underline{Y}}$$

Lorsque \underline{Y} tend vers l'infini, \underline{u} tend vers zéro (il s'agit de la tension aux bornes d'un fil électrique idéal), tandis que pour $\underline{Y} = 0$, \underline{i} devient nul, ce qui correspond à l'absence de courant circulant à travers un interrupteur ouvert. Par suite, le montage proposé équivaut aux systèmes simples suivants :



(c) Le module de l'admittance :

$$Y = C\omega \left| \frac{(1 + \alpha) - \alpha LC\omega^2}{1 - LC\omega^2} \right|$$

est infini lorsque son dénominateur s'annule, ce qui se produit lorsque :

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En revanche, ce module s'annule pour $\omega = 0$ (cas déjà étudié dans la question précédente) et pour une pulsation ω_2 telle que :

$$1 + \alpha - \alpha LC\omega_2^2 = 0 \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{1 + \alpha}{\alpha LC} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{1 + \alpha}{\alpha LC}} \quad (18)$$

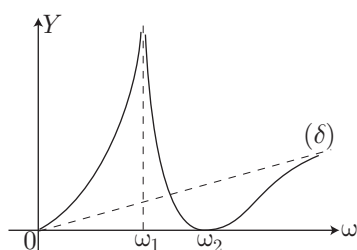
(d) Le résultat (17) peut également s'écrire :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Y = \lim_{\omega \rightarrow \infty} (\alpha C\omega) = +\infty$$

ce qui montre que la courbe $Y(\omega)$ admet, à l'infini, une asymptote linéaire (δ) de coefficient directeur αC . En outre, les limites :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Y = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} Y = +\infty \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_2} Y = 0$$

complètent le tracé asymptotique de la courbe $Y(\omega)$:



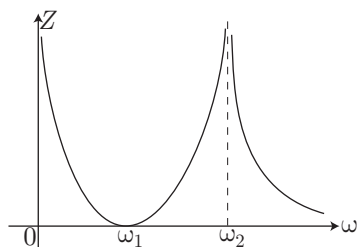
Quant au module Z de \underline{Z} , sa définition :

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} \Rightarrow Z = \frac{1}{Y}$$

conduit directement à :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Z = +\infty \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_1} Z = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_2} Z = +\infty \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} Z = 0$$

d'où découle sa représentation graphique :



2. (a) L'association en série de r , L et C a pour impédance complexe :

$$\underline{Z}_1 = r + L\omega j + \frac{1}{C\omega j} = \frac{1 - LC\omega^2 + rC\omega j}{C\omega j}$$

en raison de quoi le montage proposé par l'énoncé a pour admittance :

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \alpha C\omega j + \frac{1}{\underline{Z}_1} = \alpha C\omega j + \frac{C\omega j}{1 - LC\omega^2 + rC\omega j} \\ &= C\omega j \times \frac{\alpha + 1 - \alpha LC\omega^2 + \alpha rC\omega j}{1 - LC\omega^2 + rC\omega j} \end{aligned}$$

or, lorsque $\omega = \omega_2$, les équations (18) révèlent que :

$$\alpha + 1 - \alpha LC\omega_2^2 = 0$$

et :

$$LC\omega_2^2 = \frac{1 + \alpha}{\alpha} \Rightarrow 1 - LC\omega_2^2 = 1 - \frac{1 + \alpha}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha}$$

d'où ressort l'expression de $\underline{Y}(\omega_2)$:

$$\underline{Y}(\omega_2) = C\omega_2 j \times \frac{\alpha r C \omega_2 j}{-\frac{1}{\alpha} + r C \omega_2 j} \Rightarrow \underline{Y}(\omega_2) = \frac{\alpha^2 r C^2 \omega_2^2}{1 - \alpha r C \omega_2 j}$$

- (b) La définition du coefficient $Q = \frac{L\omega_2}{r}$, associée à la définition de ω_2 , conduit à :

$$LC\omega_2^2 = \frac{1+\alpha}{\alpha} \Rightarrow L\omega_2 = \frac{1+\alpha}{\alpha C\omega_2} \Rightarrow rQ = \frac{1+\alpha}{\alpha C\omega_2} \Rightarrow C\omega_2 = \frac{1+\alpha}{\alpha r Q}$$

Il s'ensuit que :

$$\underline{Y}(\omega_2) = \frac{\alpha^2 r \times \left(\frac{1+\alpha}{\alpha r Q}\right)^2}{1 - \alpha r j \times \frac{1+\alpha}{\alpha r Q}} = \frac{1}{rQ^2} \times \frac{(1+\alpha)^2}{1 - j \frac{1+\alpha}{Q}}$$

Étant donné que $Q \gg \alpha$ et $Q \gg 1$, le rapport $\frac{1+\alpha}{Q}$ est négligeable par rapport à 1, ce qui simplifie l'expression de $\underline{Y}(\omega_2)$:

$$\underline{Y}(\omega_2) \simeq \frac{(1+\alpha)^2}{rQ^2} \Rightarrow \underline{Z}(\omega_2) \simeq \frac{rQ^2}{(1+\alpha)^2}$$

La nature purement réelle de $\underline{Z}(\omega_2)$ indique que le dipôle AB se comporte autour de ω_2 comme un *resistor* de résistance $\frac{rQ^2}{(1+\alpha)^2}$.

3. (a) La bobine, le condensateur et la résistance se trouvant associés en parallèle, leurs admittances s'additionnent pour donner l'admittance \underline{Y}' du dipôle AB :

$$\begin{aligned} \underline{Y}' &= \frac{1}{R} + C_0 \omega j + \frac{1}{L\omega j} \Rightarrow \underline{Y}' = \frac{1}{R} + j \left(C_0 \omega - \frac{1}{L\omega} \right) \\ &\Rightarrow \underline{Z}' = \frac{R}{1 + jR \left(C_0 \omega - \frac{1}{L\omega} \right)} \end{aligned}$$

Le module Y' de \underline{Y}' : $Y' = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C_0 \omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2}$ est *minimum* pour une pulsation $\omega = \omega_2$ qui rend aussi *minimum* le terme $\left(C_0 \omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2$ qui, comme tout carré, devient alors nul :

$$C_0 \omega_2 = \frac{1}{L\omega_2} \Rightarrow C_0 = \frac{1}{L\omega_2^2}$$

Le résultat (18) conduit finalement à :

$$L\omega_2^2 = \frac{1+\alpha}{\alpha C} \Rightarrow C_0 = \frac{\alpha}{1+\alpha} C$$

Pour cette valeur de C_0 , et à la pulsation ω_2 , $Y' = \frac{1}{R}$ affecte au module Z' de l'impédance \underline{Z}' sa valeur *maximum* :

$$Z'_{\max} = R$$

(b) Les pulsations de coupure sont les pulsations ω_3 et ω_4 solutions de l'équation :

$$\begin{aligned} Z' = \frac{Z'_{\max}}{\sqrt{2}} &\Rightarrow \frac{R}{\sqrt{1 + R^2 \left(C_0 \omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow R^2 \left(C_0 \omega - \frac{1}{L\omega} \right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$RC_0\omega - \frac{R}{L\omega} = 1 \text{ ou } RC_0\omega - \frac{R}{L\omega} = -1$$

procurent deux équations du second degré :

$$RLC_0\omega^2 - L\omega - R = 0 \text{ et } RLC_0\omega^2 + L\omega - R = 0$$

de même discriminant :

$$\Delta = L^2 + 4R^2LC_0 > L^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} > L$$

Quatre solutions mathématiques s'en déduisent :

$$\omega = \frac{L \pm \sqrt{\Delta}}{2RLC_0} \text{ et } \omega = \frac{-L \pm \sqrt{\Delta}}{2RLC_0}$$

dont seules les positives présentent un sens physique :

$$\omega_3 = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 4R^2LC_0}}{2RLC_0} \text{ et } \omega_4 = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4R^2LC_0}}{2RLC_0}$$

La bande passante a pour largeur :

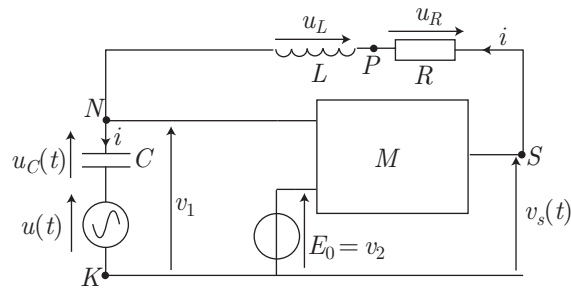
$$\Delta\omega = \omega_4 - \omega_3 = \frac{L}{LRC_0} = \frac{1}{RC_0}$$

à la suite de quoi :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_2}{\Delta\omega} &= \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha LC}} \times RC_0 = \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha LC}} \times R \frac{\alpha C}{1+\alpha} \\ &\Rightarrow \frac{\omega_2}{\Delta\omega} = R \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha} \frac{C}{L}} \end{aligned}$$

● 105 **Concours E.N.S.T.I.M.**

1. Soient v_1 et $v_2 = E_0$ les tensions d'entrée du multiplieur.



La tension v_1 étant égale à $u + u_C$, la tension de sortie du multiplieur vaut :

$$v_s = k v_1 v_2 \Rightarrow v_s = k \times (u + u_C) \times E_0 \quad (19)$$

2. Aucun courant ne pénétrant dans les entrées du multiplieur, le courant i qui circule dans la résistance et dans la bobine est aussi celui qui circule dans le condensateur ; les tensions aux bornes de ces dipôles valent respectivement :

$$u_R = R i \quad u_L = L \frac{di}{dt} \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

d'où il s'ensuit que :

$$u_R = RC \frac{du_C}{dt} \text{ et } u_L = LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$$

Quant à la loi des mailles appliquée à $(SPNK S)$, elle impose :

$$v_s - u_R - u_L - u_C - u = 0$$

où $v_s = k E_0 u + k E_0 u_C$, compte tenu du résultat (19), à l'aide duquel on obtient : $k E_0 u + k E_0 u_C - u - u_C - u_R - u_L = 0 \Rightarrow u_L + u_R + (1 - k E_0) u_C = (k E_0 - 1) u$

soit encore :

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + (1 - k E_0) u_C = (k E_0 - 1) u$$

c'est-à-dire, après simplification par LC et en tenant compte de l'expression de $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$:

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1 - k E_0}{LC} u_C = -\frac{1 - k E_0}{LC} U_0 \cos(\omega t)$$

En posant :

$$\tau = \frac{2L}{R}, \omega_0 = \sqrt{\frac{1 - k E_0}{LC}} \text{ et } A = -U_0 \quad (20)$$

cette équation se présente aussi sous la forme :

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 A \cos(\omega t)$$

3. En notation complexe u_C est associé à son image :

$$\underline{u}_C = U_C e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \frac{d\underline{u}_C}{dt} = j\omega U_C e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \frac{d^2 \underline{u}_C}{dt^2} = -\omega^2 U_C e^{j(\omega t + \phi)}$$

et $\cos(\omega t)$ peut être remplacé par $e^{j\omega t}$:

$$\frac{d^2 \underline{u}_C}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\underline{u}_C}{dt} + \omega_0^2 \underline{u}_C = \omega_0^2 A e^{j\omega t}$$

d'où il découle que :

$$\left(-\omega^2 + j \times \frac{2\omega}{\tau} + \omega_0^2 \right) U_C e^{j(\omega t + \phi)} = \omega_0^2 A e^{j\omega t}$$

dont l'identité des modules conduit à :

$$\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}} U_C = \omega_0^2 |A| \Rightarrow U_C = \frac{\omega_0^2 |A|}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}$$

4. En choisissant $E_0 = 0$, on obtient $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, de sorte que le facteur de qualité prend la valeur :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{310} \times \sqrt{\frac{0,5}{47.10^{-9}}} \Rightarrow Q = 10,5$$

L'inégalité : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ suggère que la courbe représentative de $u_C(t)$ admet un *maximum* pour une pulsation ω_m que l'on peut trouver en posant :

$$f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2} \Rightarrow U_C = \frac{\omega_0^2 |A|}{\sqrt{f(\omega)}}$$

ω_m apparaît ainsi comme la valeur de ω qui affecte à $f(\omega)$ une valeur *minimum* :

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{d\omega} \right|_{\omega_m} = 0 &\Rightarrow -4\omega_m (\omega_0^2 - \omega_m^2) + \frac{8\omega_m}{\tau^2} = 0 \\ &\Rightarrow 4\omega_m \left(\omega_m^2 - \omega_0^2 + \frac{2}{\tau^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

La solution $\omega_m = 0$ révèle que la courbe $U_C(\omega)$ admet une tangente de pente nulle à l'origine, tandis que $U_C(\omega_m)$ est un *maximum* pour :

$$\omega_m^2 = \omega_0^2 - \frac{2}{\tau^2} \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{2}{\tau^2}}$$

Remarque – La définition du facteur de qualité :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} > \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ avec } \tau = \frac{2L}{R} \Rightarrow \frac{L}{R} = \frac{\tau}{2}$$

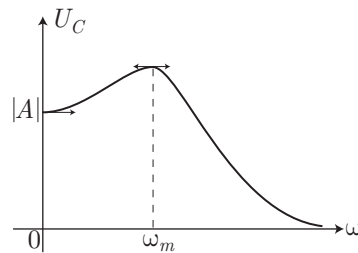
confirme l'existence de ω_m , étant donné que :

$$\frac{\omega_0 \tau}{2} > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \omega_0^2 > \frac{2}{\tau^2}$$

Enfin, l'expression de $U_C(\omega)$ fournit les limites suivantes :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (U_C) = |A| \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \infty} (U_C) = 0$$

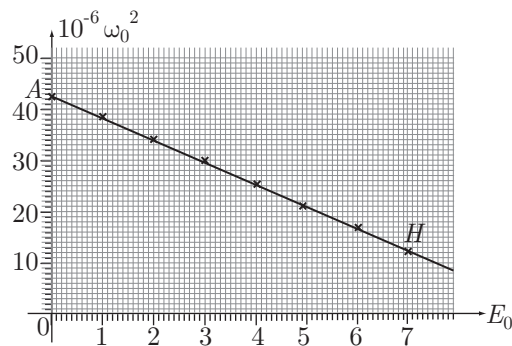
d'où découle la représentation graphique :



5. Les valeurs expérimentales :

E_0	0	1	2	3	4	5	6	7
$10^{-3} \omega_0$	6,52	6,18	5,83	5,46	5,05	4,61	4,13	3,57
$10^{-6} \omega_0^2$	42,5	38,2	34	29,8	25,5	21,2	17	12,7

permettent d'obtenir la courbe suivante :



qui confirme que ω_0^2 est une fonction affine de E_0 , comme le suggère le résultat (20) :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} - \frac{k}{LC} \times E_0$$

La pente a de cette courbe s'obtient, du reste, à l'aide de deux points, par exemple

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 42,5 \cdot 10^6 \end{pmatrix} \text{ et } H \begin{pmatrix} 7 \\ 12,7 \cdot 10^6 \end{pmatrix} :$$

$$a = \frac{12,7 \cdot 10^6 - 42,5 \cdot 10^6}{7} = -\frac{29,8 \cdot 10^6}{7}$$

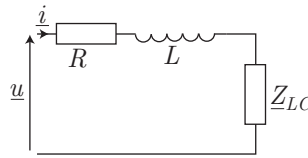
et s'identifie alors à $-\frac{k}{LC}$:

$$-\frac{k}{LC} = a \Rightarrow k = -LCa = 0,5 \times 47.10^{-9} \times \frac{29,8.10^6}{7} \Rightarrow k = 0,1 \text{ V}^{-1}$$

● 106 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. L'association en parallèle de la bobine et du condensateur équivaut à un dipôle d'impédance \underline{Z}_{LC} telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{LC}} = \frac{1}{L\omega j} + C\omega j = \frac{1 - LC\omega^2}{L\omega j} \Rightarrow \underline{Z}_{LC} = \frac{L\omega j}{1 - LC\omega^2}$$



C'est pourquoi l'impédance du montage proposé vaut :

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R + L\omega j + \frac{L\omega j}{1 - LC\omega^2} = R + L\omega j \times \frac{2 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2} \\ &= R + L\omega j \times \frac{2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\underline{Z} = R + L\omega j \times \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Les images complexes \underline{i} et \underline{u} associées à $u(t) = U \cos(\omega t)$ et $i(t) = I \cos(\omega t + \phi)$:

$$\underline{u} = U e^{j\omega t} \quad \underline{i} = I e^{j(\omega t + \phi)}$$

sont à l'origine de la définition de l'impédance \underline{Z} :

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} \Rightarrow I = \frac{U}{|\underline{Z}|} \Rightarrow I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega \times \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^2}}$$

2. Cette expression révèle que :

$$\left(L\omega \times \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow I \leq \frac{U}{R}$$

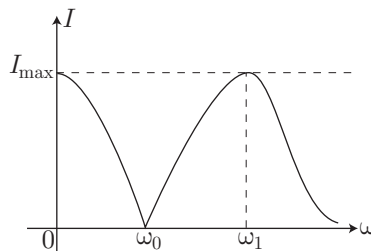
et c'est pourquoi I prend sa valeur *maximum* I_{\max} pour deux valeurs de ω qui annulent $L\omega \times \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$:

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \omega_1 \end{cases} \Rightarrow I = I_{\max} = \frac{U}{R}$$

Quant à la pulsation ω_0 , son influence se révèle à partir du calcul :

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} I = \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left[\frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega \times \frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \right)^2}} \right] \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} I = 0$$

3. Ces calculs mènent à la représentation graphique de $I(\omega)$:



qui indique qu'à la pulsation ω_0 , aucun courant ne circule à travers le circuit ; I prend donc une valeur *minimum* pour $\omega = \omega_0$ (tandis que pour une résonance, I prendrait une valeur *maximum*) ; il s'agit d'une antirésonance.

● 107 ————— ENSI

L'association en parallèle de R et C équivaut à un dipôle d'impédance \underline{Z} telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + C\omega j = \frac{1 + RC\omega j}{R} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{R}{1 + RC\omega j}$$

La tension v aux bornes du condensateur est aussi celle aux bornes de \underline{Z} et s'obtient à l'aide de la loi du diviseur de tension :

$$\begin{aligned} v &= e \times \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + L\omega j} = e \times \frac{\frac{R}{1 + RC\omega j}}{\frac{R}{1 + RC\omega j} + L\omega j} \\ &= e \times \frac{R}{R(1 - LC\omega^2) + L\omega j} \end{aligned}$$

On notera dorénavant : $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, de sorte que :

$$LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = x^2 \text{ et } L\omega = RQ \frac{\omega}{\omega_0} = RQ x$$

afin d'obtenir :

$$\underline{v} = \underline{e} \times \frac{1}{1 - x^2 + jQx} \Rightarrow |\underline{v}| = \frac{|\underline{e}|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + Q^2x^2}}$$

Aussi, en désignant par V et E les amplitudes des tensions $v(t)$ et $e(t)$:

$$V = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + Q^2x^2}} = \frac{E}{\sqrt{f(x)}} \text{ avec } f(x) = (1 - x^2)^2 + Q^2x^2$$

C'est pourquoi V admet un *maximum* pour une valeur x_m non nulle de x qui rend $f(x)$ *minimum*, c'est-à-dire telle que :

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_m} = 0 &\Rightarrow -4x_m(1 - x_m^2) + 2Q^2x_m = 0 \Rightarrow 4x_m \left(x_m^2 - 1 + \frac{Q^2}{2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow x_m^2 = 1 - \frac{Q^2}{2} \end{aligned}$$

Or, cette équation n'admet de solution réelle qu'à condition d'observer :

$$1 > \frac{Q^2}{2} \Rightarrow Q < \sqrt{2}$$

soit encore :

$$Q = \frac{L}{R} \omega_0 = \frac{L}{R} \times \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} < \sqrt{2} \Rightarrow R > \sqrt{\frac{L}{2C}}$$

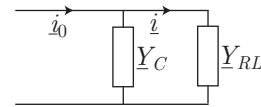
Dans ces conditions :

$$x_m^2 = 1 - \frac{Q^2}{2} = 1 - \frac{L}{2RC^2} \Rightarrow \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{L}{2RC^2}}$$

● 108 ————— Lycé Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Soient $\underline{Y}_C = C\omega j$ et $\underline{Y}_{RL} = \frac{1}{R + L\omega j}$ les admittances complexes des deux branches du circuit. La loi du diviseur de courant révèle que :

$$\begin{aligned} \underline{i} &= \underline{i}_0 \times \frac{\underline{Y}_{RL}}{\underline{Y}_C + \underline{Y}_{RL}} = \underline{i}_0 \frac{\frac{1}{R + L\omega j}}{C\omega j + \frac{1}{R + L\omega j}} \\ &= \frac{\underline{i}_0}{1 - LC\omega^2 + RC\omega j} \end{aligned}$$



D'une part :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = x^2$$

et d'autre part :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{1}{RC\omega_0} \Rightarrow RC\omega = \frac{\omega}{Q\omega_0} = \frac{x}{Q}$$

ce qui permet de présenter \dot{i} sous la forme suivante :

$$\dot{i} = \frac{\dot{i}_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$

De cette expression, il découle que :

$$|\dot{i}| = \frac{|\dot{i}_0|}{\left|1 - x^2 + j \frac{x}{Q}\right|} \Rightarrow I = \frac{I_0}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

soit encore :

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{f(x)}} \text{ avec } f(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

2. Ce dernier résultat montre que I admet une valeur *maximum* I_{\max} pour une valeur x_m de x qui rend *minimum* $f(x)$, c'est-à-dire telle que :

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_m} = 0 &\Rightarrow 4x_m (x_m^2 - 1) + \frac{2x_m}{Q^2} = 0 \\ &\Rightarrow 4x_m \left(x_m^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right) = 0 \\ &\Rightarrow x_m^2 - 1 = -\frac{1}{2Q^2} \Rightarrow x_m^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \end{aligned}$$

On s'assurera aisément que cette équation admet une solution réelle, étant donné que :

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2Q^2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{2Q^2} < 1 \Rightarrow 1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$$

Ce faisant, la valeur *maximum* de I vaut : $I_{\max} = \frac{1}{\sqrt{f(x_m)}}$, avec :

$$\begin{aligned} f(x_m) &= (1 - x_m^2)^2 + \frac{1}{Q^2} x_m^2 = \left(\frac{1}{2Q^2} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \\ &= \frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4} \\ &= \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4} = \frac{4Q^2 - 1}{4Q^4} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{I_{\max}}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{f(x_m)}} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{4Q^4}{4Q^2 - 1}} = \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

3. Pour toute valeur de $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, on constate que :

$$\begin{aligned} (2Q^2 - 1)^2 > 0 &\Rightarrow 4Q^4 - 4Q^2 + 1 > 0 \Rightarrow 4Q^4 > 4Q^2 - 1 \\ &\Rightarrow \frac{4Q^4}{4Q^2 - 1} > 1 \Rightarrow \sigma > 1 \end{aligned}$$

ce qui confirme que :

$$I_{\max} = \sigma I_0 > I_0$$

● 109 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. L'association en série de la bobine et du condensateur possède une impédance :

$$\underline{Z}_{LC} = L\omega j + \frac{1}{C\omega j} = \frac{1 - LC\omega^2}{C\omega j}$$

auquel cas l'impédance \underline{Z} de l'ensemble du montage vérifie :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\underline{Z}_{LC}} = \frac{1}{R} + \frac{C\omega j}{1 - LC\omega^2} = \frac{1 - LC\omega^2 + RC\omega j}{R(1 - LC\omega^2)}$$

soit, avec :

$$\begin{aligned} \frac{1}{LC} = \omega_0^2 &\Rightarrow L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} = RQ \Rightarrow RC = \frac{1}{Q\omega_0} \\ &\Rightarrow LC\omega^2 = x^2 \text{ et } RC\omega = \frac{x}{Q} \end{aligned}$$

de sorte que :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}{R(1 - x^2)} = \frac{1}{R} \left[1 + j\frac{x}{Q(1 - x^2)} \right]$$

Aussi, les images complexes $\underline{u} = U_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ sont liées à \underline{Z} :

$$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i} \Rightarrow \underline{i} = \underline{u} \times \frac{1}{\underline{Z}} \Rightarrow |\underline{i}| = |\underline{u}| \times \frac{1}{|\underline{Z}|}$$

d'où l'on tire l'expression de l'amplitude I_0 :

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{Q^2(1 - x^2)^2}}$$

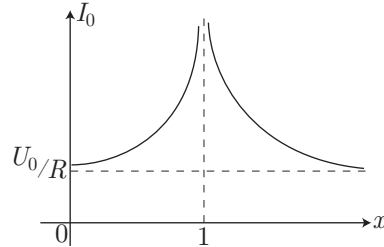
2. Cette relation montre que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (I_0) = \frac{U_0}{R} \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} (I_0) = \frac{U_0}{R}$$

En outre :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (I_0) = +\infty$$

montre que la courbe $I_0(x)$ présente une asymptote verticale en $x = 1$:



3. Les pulsations de coupure ω_1 , associées à $x_i = \frac{\omega_i}{\omega_0}$, sont solutions de l'équation :

$$\begin{aligned} I_0(x_i) = \frac{U_0}{R} \sqrt{2} &\Rightarrow \frac{U_0}{R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{Q^2(1-x^2)^2}} = \frac{U_0}{R} \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \frac{x^2}{Q^2(1-x^2)^2} = 1 \Rightarrow x^2 = Q^2(1-x^2)^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = Q(1-x^2) \\ \text{ou} \\ x = -Q(1-x^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Qx^2 + x - Q = 0 \\ \text{ou} \\ Qx^2 - x - Q = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Le discriminant commun à ces deux équations du second degré :

$$\Delta = 1 + 4Q^2 > 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} > 1$$

génère deux couples de solutions :

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{\Delta}}{2Q} \text{ ou } x = \frac{1 \pm \sqrt{\Delta}}{2Q}$$

dont on ne retient que les positives (car $x = \frac{\omega}{\omega_0} > 0$) :

$$x_1 = \frac{\sqrt{\Delta} - 1}{2Q} \text{ et } x_2 = \frac{\sqrt{\Delta} + 1}{2Q}$$

d'où il ressort que :

$$\omega_1 = x_1 \omega_0 = \omega_0 \frac{\sqrt{1+4Q^2} - 1}{2Q} \text{ et } \omega_2 = x_2 \omega_0 = \omega_0 \frac{\sqrt{1+4Q^2} + 1}{2Q}$$

4. Ces résultats conduisent à l'expression de la largeur de la bande passante, définie par :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

● 110 ————— Lycée Roosevelt, Reims

1. Soit \underline{Z} l'impédance de l'association en parallèle de la bobine et du condensateur :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = C\omega j + \frac{1}{L\omega j} = \frac{1 - LC\omega^2}{L\omega j} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{L\omega j}{1 - LC\omega^2}$$

où :

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = x^2$$

et :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} \Rightarrow L = \frac{RQ}{\omega_0} \Rightarrow L\omega = RQ \frac{\omega}{\omega_0} = RQx$$

permettent de poser :

$$\underline{Z} = j \frac{RQx}{1 - x^2}$$

De fait, la loi du diviseur de tension impose :

$$\underline{s} = \underline{e} \times \frac{R}{R + \underline{Z}} = \frac{\underline{e}}{1 + j \frac{Qx}{1 - x^2}} = \frac{E e^{j\omega t}}{\sqrt{1 + \left(\frac{Qx}{1 - x^2}\right)^2}} \times e^{j\psi}$$

avec :

$$\tan \phi = \frac{Qx}{1 - x^2}$$

Par suite, l'image complexe \underline{s} de $s(t)$ vérifie la relation complexe :

$$\underline{s} = S e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{E}{\sqrt{1 + \left(\frac{Qx}{1 - x^2}\right)^2}} e^{j(\omega t - \psi)}$$

dont l'identification des modules et des arguments fournit :

$$S = \frac{E}{\sqrt{1 + \left(\frac{Qx}{1 - x^2}\right)^2}}$$

et :

$$\phi = -\psi \Rightarrow \tan \phi = -\tan \psi \Rightarrow \tan \phi = \frac{Qx}{x^2 - 1}$$

2. L'expression de $\tan \phi$ présente une singularité au voisinage de la valeur $x = 1$ ($\tan \phi$ tend vers $\pm\infty$ selon la valeur relative de x par rapport à 1). Or, cette singularité disparaît avec :

$$\frac{1}{\tan \phi} = \frac{x^2 - 1}{Qx} = \frac{1}{Q} \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

et c'est pourquoi l'étude des limites sera menée sur :

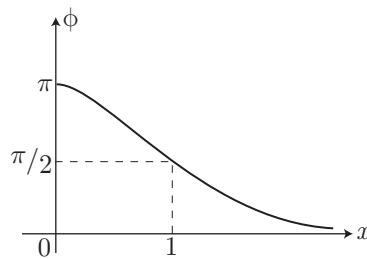
$$\frac{1}{\tan \phi} = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = \frac{1}{Q} \left(x - \frac{1}{x} \right)$$

C'est ainsi que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \right] = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \phi = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \right] = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\tan \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \right] = \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \phi = 0$$



3. L'expression de S :

$$S = \frac{E}{\sqrt{f(x)}} \text{ avec } f(x) = 1 + \left(\frac{Qx}{1-x^2} \right)^2$$

montre que S prend une valeur *maximum* lorsque la fonction $f(x)$ est *minimum*, c'est-à-dire pour une valeur x_1 de x telle que :

$$\frac{Qx_1}{1-x_1^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 x_1 = 0$$

La valeur de S vaut alors :

$$S_{\max} = S(\omega_1) = E$$

En outre, lorsque $x = 1$, la fonction $f(x)$ présente une singularité :

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} S = 0$$

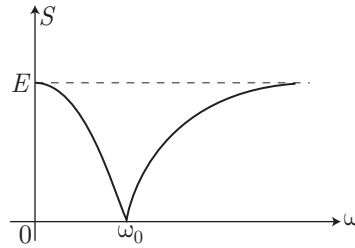
avec :

$$x = 1 \Rightarrow \omega = x \omega_0 = \omega_0 \Rightarrow S(\omega_0) = S_{\min} = 0$$

Enfin :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} S = E \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} [S(\omega)] = E$$

4. De ces limites ressort la représentation graphique de $S(\omega)$:



5. Soient x_1 et x_2 les solutions de l'équation :

$$S(x) = \frac{S_{\max}}{\sqrt{2}} \text{ avec } x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} \text{ et } x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$$

Les expressions obtenues dans les questions précédentes pour $S(x)$ et pour S_{\max} donnent à cette équation la forme suivante :

$$\frac{E}{\sqrt{1 + \left(\frac{Qx}{1-x^2}\right)^2}} = \frac{E}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left(\frac{Qx}{1-x^2}\right)^2 = 1$$

soit encore :

$$\begin{cases} Qx = 1 - x^2 \\ \text{ou} \\ Qx = -1 + x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + Qx - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ x^2 - Qx - 1 = 0 \end{cases}$$

Le discriminant commun à ces deux équations du second degré :

$$\Delta = Q^2 + 4 \Rightarrow \sqrt{\Delta} > Q$$

gènère les solutions mathématiques suivantes :

$$x = \frac{-Q \pm \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } x = \frac{Q \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

parmi lesquelles seules les positives ($x = \frac{\omega}{\omega_0} > 0$) ont un sens physique :

$$x_1 = \frac{\sqrt{\Delta} - Q}{2} = \frac{\omega_1}{\omega_0} \text{ et } x_2 = \frac{Q + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{\omega_2}{\omega_0}$$

d'où ressortent les expressions des pulsations de coupure :

$$\omega_1 = \omega_0 \times \frac{\sqrt{Q^2 + 4} - Q}{2} \text{ et } \omega_2 = \omega_0 \times \frac{\sqrt{Q^2 + 4} + Q}{2}$$

La largeur de la bande passante est par conséquent donnée par :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \Rightarrow \Delta\omega = \omega_0 \times Q$$

● **111** ————— **Lycée Hoche, Versailles**

1. L'impédance équivalente à l'association en série de la résistance et de l'inductance vaut :

$$\underline{Z} = R + L\omega j = Z e^{j\phi} \Rightarrow \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} = R$$

avec :

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \quad (21)$$

et :

$$\cos \phi = \frac{R}{Z} \quad \sin \phi = \frac{L\omega}{Z} \quad \tan \phi = \frac{L\omega}{R}$$

La puissance moyenne consommée par cette installation vaut alors :

$$P = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} I^2 = R I^2 \Rightarrow R = \frac{P}{I^2}$$

Application numérique :

$$R = \frac{12 \times 10^3}{(80)^2} \Rightarrow R = 1,875 \Omega$$

Quant à l'identité (21), dans laquelle $Z = \frac{U}{I}$, elle conduit à :

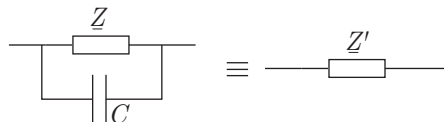
$$\begin{aligned} R^2 + L^2\omega^2 = Z^2 &\Rightarrow L = \frac{1}{\omega} \sqrt{Z^2 - R^2} \\ &\Rightarrow L = \frac{1}{2\pi f} \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$L = \frac{1}{2\pi \times 50} \times \sqrt{\left(\frac{200}{80}\right)^2 - (1,875)^2} \Rightarrow L = 5,3 \text{ mH}$$

2. En associant à ce montage un condensateur en parallèle, on obtient un nouveau dipôle d'impédance \underline{Z}' telle que :

$$\underline{Z}' = Z' e^{j\phi'} \text{ avec } \cos \phi' = 0,9$$



L'additivité des admittances des dipôles en parallèle impose ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\underline{Z}'} &= \frac{1}{\underline{Z}} + C\omega j \Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}' e^{j\phi'}} = \frac{1}{\underline{Z} e^{j\phi}} + C\omega j \\ &\Rightarrow \frac{e^{-j\phi'}}{\underline{Z}'} = \frac{e^{-j\phi}}{\underline{Z}} + C\omega j \\ &\Rightarrow \frac{\cos \phi'}{\underline{Z}'} - j \frac{\sin \phi'}{\underline{Z}'} = \frac{\cos \phi}{\underline{Z}} + j \left(C\omega - \frac{\sin \phi}{\underline{Z}} \right)\end{aligned}$$

L'identification des parties réelles et imaginaires de cette équation génère les équations suivantes :

$$\frac{\sin \phi'}{\underline{Z}'} = \frac{\sin \phi}{\underline{Z}} - C\omega \text{ et } \frac{\cos \phi'}{\underline{Z}'} = \frac{\cos \phi}{\underline{Z}}$$

dont le rapport fournit :

$$\begin{aligned}\frac{\sin \phi'}{\cos \phi'} &= \frac{\underline{Z}}{\cos \phi} \left(\frac{\sin \phi}{\underline{Z}} - C\omega \right) = \tan \phi - \frac{ZC\omega}{\cos \phi} \\ &\Rightarrow \frac{ZC\omega}{\cos \phi} = \tan \phi - \frac{\sin \phi'}{\cos \phi'} \\ &\Rightarrow C = \frac{1}{Z\omega} \left(\sin \phi - \cos \phi \times \frac{\sin \phi'}{\cos \phi'} \right)\end{aligned}$$

où, d'une part : $Z = \frac{U}{I}$, et d'autre part :

$$P = UI \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{P}{UI}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}C &= \frac{I}{U\omega} \left(\sqrt{1 - \cos^2 \phi} - \frac{P}{UI} \times \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \phi'}}{\cos \phi'} \right) \\ &\Rightarrow C = \frac{1}{U \times 2\pi f} \left(\sqrt{I^2 - \frac{P^2}{U^2}} - \frac{P}{U} \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \phi'}}{\cos \phi'} \right)\end{aligned}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned}C &= \frac{1}{200 \times 2\pi \times 50} \times \left[\sqrt{(80)^2 - \left(\frac{12 \cdot 10^3}{200} \right)^2} - \frac{12 \cdot 10^3}{200} \times \frac{\sqrt{1 - (0,9)^2}}{0,9} \right] \\ &\Rightarrow C = 380 \mu\text{F}\end{aligned}$$

● 112 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. En notation complexe, les tensions e_1 , e_2 et e_3 sont associées à :

$$e_1 = E e^{j\omega t} \quad e_2 = E e^{j(\omega t - 2\pi/3)} \quad e_3 = E e^{j(\omega t - 4\pi/3)}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned}\underline{s} &= \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 = E e^{j\omega t} \left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}} + e^{-j\frac{4\pi}{3}} \right) \\ &= E e^{j\omega t} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - j \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]\end{aligned}$$

avec :

$$\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

d'où il découle que :

$$\underline{s} = 0 \Rightarrow s(t) = \operatorname{Re}\{\underline{s}\} = 0$$

Le théorème de Millman permet alors d'exprimer la tension \underline{u} en fonction de l'admittance $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ des dipôles :

$$\underline{u} = \frac{\underline{Y} (\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3)}{3\underline{Y}} = \frac{\underline{s}}{3} \Rightarrow \underline{u} = 0$$

2. Ce résultat montre que $u = 0$, tandis que pour $k \in \{1, 2, 3\}$:

$$\underline{u} = \underline{e}_k - \underline{Z} \underline{i}_k = 0 \Rightarrow \underline{i}_k = \frac{\underline{e}_k}{\underline{Z}}$$

Les images complexes $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ et \underline{e}_3 adoptent la forme générale :

$$\underline{e}_k = E e^{j(\omega t - \theta_k)} \text{ avec } \theta_0 = 0, \theta_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ et } \theta_3 = \frac{4\pi}{3}$$

tandis que \underline{Z} désigne l'impédance d'une association en série d'une bobine et d'une résistance :

$$\underline{Z} = R + L\omega j = Z e^{j\phi} \text{ avec } Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$

et :

$$\tan \phi = \frac{L\omega}{R} = \frac{1,52 \cdot 10^{-3} \times 314}{0,275} \simeq 1,735 \Rightarrow \phi \simeq \frac{\pi}{3}$$

C'est pourquoi :

$$\underline{i}_k = \frac{E e^{j(\omega t - \theta_k)}}{Z e^{j\phi}} = \frac{E}{Z} e^{j(\omega t - \theta_k - \frac{\pi}{3})}$$

où l'on remarque que :

$$\frac{E}{Z} = \frac{220}{\sqrt{(0,275)^2 + (1,52 \cdot 10^{-3} \times 314)^2}} \simeq 400 \text{ A} \Rightarrow \frac{E}{Z} = I_0 \quad (22)$$

$$\Rightarrow \underline{i}_k = I_0 e^{j(\omega t - \theta_k - \frac{\pi}{3})} \quad (23)$$

ce qui équivaut, en notation réelle, à :

$$i_k = \operatorname{Re}\{\underline{i}_k\} = I_0 \cos\left(\omega t - \theta_k - \frac{\pi}{3}\right)$$

soit, en tenant compte des valeurs de θ_k :

$$\begin{aligned}i_1(t) &= I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) \\i_2(t) &= I_0 \cos(\omega t - \pi) = -I_0 \cos(\omega t) \\i_3(t) &= I_0 \cos\left(\omega t - \frac{5\pi}{3}\right) = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

3. La puissance moyenne \mathcal{P} absorbée par un dipôle d'impédance $\underline{Z} = Z e^{j\phi}$ s'écrit :

$$\mathcal{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \phi$$

Dans le cas présent, tous les dipôles ont la même impédance $\underline{Z} = Z e^{j\pi/3}$, la même intensité efficace $I_{\text{eff}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$, tandis que leurs tensions $\underline{u}_k = \underline{Z} \underline{i}_k$ ont pour amplitude commune :

$$U_k = |\underline{u}_k| = |\underline{Z}| \times |\underline{i}_k| = Z I_0$$

où le résultat (22) révèle que :

$$Z I_0 = E \Rightarrow U_k = E$$

Aussi, tous ces dipôles présentent la même tension efficace :

$$U_{\text{eff}} = \frac{U_k}{\sqrt{2}} = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

C'est pour cette raison que :

$$\mathcal{P} = \frac{E I_0}{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{E I_0}{4}$$

Application numérique :

$$\mathcal{P} = \frac{220 \times 400}{4} \Rightarrow \mathcal{P} = 22 \text{ kW}$$

● 113 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. La puissance moyenne P est définie par :

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{T} \int_0^T v i \, dt = \frac{2VI}{T} \int_0^T \cos(\omega t + \phi) \times \cos(\omega t) \, dt \\&= \frac{2VI}{2T} \int_0^T [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)] \, dt \\&= \frac{VI}{T} \left\{ \cos \phi \int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t + \phi) \, dt \right\} \\&= \frac{VI}{T} \left\{ \cos \phi \times T + \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t + \phi)]_0^T \right\}\end{aligned}$$

En remarquant que $\omega T = 2\pi$, on obtient :

$$\sin(2\omega t + 2\omega T + \phi) = \sin(2\omega t + 4\pi + \phi) = \sin(2\omega t + \phi)$$

ce qui simplifie l'expression de P :

$$P = VI \cos \phi$$

2. L'expression de $v_q(t)$:

$$v_q(t) = V\sqrt{2} \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right) = V\sqrt{2} \sin(\omega t + \phi)$$

conduit à :

$$Q = \frac{2VI}{T} \int_0^T \sin(\omega t + \phi) \times \cos(\omega t) dt$$

où l'identité trigonométrique :

$$\sin a \times \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

se traduit par :

$$\begin{aligned} Q &= \frac{VI}{T} \int_0^T [\sin \phi + \sin(2\omega t + \phi)] dt \\ &= \frac{VI}{T} \left\{ \sin \phi \int_0^T dt + \int_0^T \sin(2\omega t + \phi) dt \right\} \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin(2\omega t + \phi) dt &= -\frac{1}{2\omega} [\cos(2\omega t + \phi)]_0^T \\ &= -\frac{1}{2\omega} \left[\cos(2\omega T + \underbrace{2\omega T}_{4\pi} + \phi) - \cos(2\omega t + \phi) \right] = 0 \end{aligned}$$

simplifie l'expression de Q :

$$Q = VI \sin \phi$$

3. L'impédance $\underline{Z} = R + jX$ est définie à partir des images complexes $\underline{v} = V\sqrt{2} e^{j(\omega t + \phi)}$ et $\underline{i} = I\sqrt{2} e^{j\omega t}$:

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{V}{I} e^{j\phi} = Z e^{j\phi} = Z \cos \phi + jZ \sin \phi \\ \Rightarrow &\begin{cases} Z \cos \phi = R \\ Z \sin \phi = X \end{cases} \text{ avec } Z = \frac{V}{I} \\ \Rightarrow &\begin{cases} V \cos \phi = RI \\ V \sin \phi = XI \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} P = VI \cos \phi \\ Q = VI \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = RI^2 \\ Q = XI^2 \end{cases} \quad (24)$$

4. L'admittance complexe $\underline{Y} = G + jB$, associée à l'impédance $\underline{Z} = Z e^{j\phi}$, est définie par :

$$\begin{aligned} \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} &\Rightarrow G + jB = \frac{1}{Z} e^{-j\phi} = \frac{\cos \phi}{Z} - j \frac{\sin \phi}{Z} \\ &\Rightarrow \begin{cases} G = \frac{I \cos \phi}{V} \\ B = -\frac{I \sin \phi}{V} \end{cases} \text{ car } \frac{1}{Z} = \frac{I}{V} \\ &\Rightarrow \begin{cases} I \cos \phi = GV \\ I \sin \phi = -BV \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} P = VI \cos \phi \\ Q = VI \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P = GV^2 \\ Q = -BV^2 \end{cases} \quad (25)$$

5. Le dipôle (d_s) est caractérisé par son impédance $\underline{Z}_s = R_s + jX_s$, tandis que le dipôle (d_p) est caractérisé par son impédance $\underline{Z}_p = R_p + jX_p$, à laquelle est associée une admittance $\underline{Y}_p = G_p + jB_p$. Compte tenu des résultats (24), les puissances P_s et Q_s de (d_s) valent :

$$P_s = R_s I_s^2 \text{ et } Q_s = X_s I_s^2$$

où $I_s = \frac{V}{Z_s}$ désigne le courant efficace circulant dans (d_s) :

$$P_s = R_s \frac{V^2}{Z_s^2} \text{ et } Q_s = X_s \frac{V^2}{Z_s^2}$$

De même, le résultat (25) donne les puissances P_p et Q_p du dipôle (d_p) aux bornes duquel règne la même tension efficace V que celle aux bornes du dipôle (D_s) :

$$P_p = G_p V^2 \text{ et } Q_p = -B_p V^2$$

Ces deux dipôles sont alors énergiquement équivalents à condition que :

$$P_p = P_s \text{ et } Q_p = Q_s$$

c'est-à-dire si :

$$G_p = \frac{R_s}{Z_s^2} \text{ et } B_p = -\frac{X_s}{Z_s^2} \quad (26)$$

Dans ces conditions, l'impédance \underline{Z}_p est donnée par :

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \underline{Y}_p = G_p + jB_p = \frac{R_s - jX_s}{Z_s^2}$$

où :

$$\underline{Z}_s = R_s + jX_s = Z_s \cos \phi_s + jZ_s \sin \phi_s = Z_s e^{j\phi_s} \Rightarrow \begin{cases} R_s = Z_s \cos \phi_s \\ X_s = Z_s \sin \phi_s \end{cases}$$

C'est pourquoi :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\underline{Z}_p} &= \frac{Z_s \cos \phi_s - j Z_s \sin \phi_s}{Z_s^2} = \frac{\cos \phi_s - j \sin \phi_s}{Z_s} \\ &= \frac{e^{-j\phi_s}}{Z_s} = \frac{1}{Z_s e^{j\phi_s}} = \frac{1}{\underline{Z}_s} \\ &\Rightarrow \underline{Z}_p = \underline{Z}_s\end{aligned}$$

En conclusion, deux dipôles énergiquement équivalents ont la même impédance.

6. Applications numériques

(a) Compte tenu du résultat (25) :

$$\begin{cases} P = GV^2 \\ Q = -BV^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = \frac{P}{V^2} = \frac{3465}{(231)^2} \\ B = -\frac{Q}{V^2} = -\frac{6000}{(231)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} G = 0,065 \text{ S} \\ B = -0,112 \text{ S} \end{cases}$$

(b) Les deux dipôles ayant la même impédance $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}}$, les identités (26) deviennent :

$$\begin{cases} G = \frac{R}{Z^2} = RY^2 \\ B = -\frac{X}{Z^2} = -XY^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \frac{G}{Y^2} \\ X = -\frac{B}{Y^2} \end{cases}$$

avec :

$$\begin{aligned}\underline{Y} = G + jB &\Rightarrow Y^2 = G^2 + B^2 \simeq 0,017 \Omega^{-2} \\ &\Rightarrow \begin{cases} R = \frac{0,065}{0,017} \\ X = \frac{0,112}{0,017} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = 3,82 \Omega \\ X = 6,59 \Omega \end{cases}\end{aligned}$$

(c) À nouveau, les résultats (24) conduisent à :

$$\begin{cases} VI \cos \phi = RI^2 \\ VI \sin \phi = XI^2 \end{cases} \Rightarrow \tan \phi = \frac{X}{R} = \frac{6,59}{3,82} = 1,725 \Rightarrow \phi = 1,04 \text{ rad}$$

● 114 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. Le facteur de puissance valant $\cos \phi = 0,6$, la puissance moyenne consommée par le moteur est donnée par :

$$\mathcal{P} = UI \cos \phi \Rightarrow I = \frac{\mathcal{P}}{U \cos \phi} = \frac{4400}{220 \times 0,6} \Rightarrow I = 33,3 \text{ A (réponse d)}$$

2. L'impédance $\underline{Z} = R + L\omega j$ du moteur a pour partie réelle :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} = R &\Rightarrow \mathcal{P} = \operatorname{Re}\{\underline{Z}\} I^2 = R I^2 \\ &\Rightarrow R = \frac{\mathcal{P}}{I^2} = \frac{4400}{(33,3)^2} \\ &\Rightarrow R = 4 \Omega \text{ (réponse a)} \end{aligned}$$

3. L'expression de l'impédance complexe du moteur :

$$\underline{Z} = R + L\omega j = Z e^{j\phi}$$

conduit à celle de son argument :

$$\begin{aligned} \tan \phi = \frac{L\omega}{R} &\Rightarrow L = \frac{R \sin \phi}{\omega \cos \phi} = \frac{R}{2\pi f} \times \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}}{\cos \phi} \\ &\Rightarrow L = \frac{4}{2\pi \times 50} \times \frac{\sqrt{1 - (0,6)^2}}{0,6} \\ &\Rightarrow L = 17 \text{ mH (réponse c)} \end{aligned}$$

4. Soit $\underline{Z} = R + L\omega j = Z e^{j\phi}$ l'impédance du moteur et soit $\underline{Z}' = Z' e^{j\phi'}$ l'impédance de l'association en parallèle du moteur avec le condensateur :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}'} = \frac{1}{\underline{Z}} + C\omega j &\Rightarrow \frac{e^{-j\phi'}}{Z'} = \frac{e^{-j\phi}}{Z} + C\omega j \\ &\Rightarrow \frac{\cos \phi'}{Z'} - j \frac{\sin \phi'}{Z'} = \frac{\cos \phi}{Z} + j \left(C\omega - \frac{\sin \phi}{Z} \right) \end{aligned}$$

L'identification des parties réelles donne :

$$\frac{\cos \phi'}{Z'} = \frac{\cos \phi}{Z} \Rightarrow \frac{Z}{Z'} = \frac{\cos \phi}{\cos \phi'} \quad (27)$$

où $\cos \phi' = 0,9$ est le nouveau facteur de puissance, tandis que l'identification des parties imaginaires conduit à :

$$\begin{aligned} -\frac{\sin \phi'}{Z'} = C\omega - \frac{\sin \phi}{Z} &\Rightarrow -\frac{Z}{Z'} \sin \phi' = ZC\omega - \sin \phi \\ &\Rightarrow ZC\omega = \sin \phi - \frac{Z}{Z'} \sin \phi' \end{aligned}$$

Or, le rapport $\frac{Z}{Z'}$ est fourni par le résultat (27), en conséquence de quoi :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{Z\omega} \left(\sin \phi - \frac{\cos \phi}{\cos \phi'} \sin \phi' \right) \text{ avec } Z = \frac{U}{I} \\ &= \frac{I}{U\omega} \left(\sqrt{1 - \cos^2 \phi} - \frac{\cos \phi}{\cos \phi'} \sqrt{1 - \cos^2 \phi'} \right) \\ &= \frac{33,3}{220 \times 2\pi \times 50} \times \left(\sqrt{1 - (0,6)^2} - \frac{0,6}{0,9} \sqrt{1 - (0,9)^2} \right) \end{aligned}$$

Finalement :

$$C = 246 \mu\text{F} \text{ (réponse a)}$$

5. Le moteur, d'impédance $\underline{Z} = Z e^{j\phi}$, est parcouru par un courant d'intensité efficace I'_m , tandis qu'à ses bornes règne une tension efficace U telle que :

$$U = Z I'_m \Rightarrow I'_m = \frac{U}{Z} = I$$

La puissance moyenne alors consommée par le moteur vaut :

$$\mathcal{P}' = U I'_m \cos \phi = U I \cos \phi = \mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{P}' = 4,4 \text{ kW} \text{ (réponse (b))}$$

6. L'association du moteur et du condensateur équivaut à un dipôle d'impédance $\underline{Z}' = Z' e^{j\phi'}$ parcouru par un courant d'intensité efficace I' , sous une tension efficace U :

$$U = Z' I' = Z I \Rightarrow I' = \frac{Z}{Z'} I$$

soit, compte tenu du résultat (27) :

$$\frac{Z}{Z'} = \frac{\cos \phi}{\cos \phi'} \Rightarrow I' = \frac{\cos \phi}{\cos \phi'} I = \frac{0,6}{0,9} \times 33,3 \Rightarrow I' = 22,2 \text{ A} \text{ (réponse d)}$$

● 115 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. Méthode des trois ampèremètres

- (a) Soit $\psi(t) = \psi_0 \cos(\omega t + \phi)$ une fonction telle que :

$$\psi^2 = \psi_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{\psi_0^2}{2} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)]$$

La valeur moyenne, sur une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, de ψ^2 est alors définie par :

$$\begin{aligned} \langle \psi^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \psi^2 dt = \frac{\psi_0^2}{2T} \left\{ \int_t^{t+T} dt + \int_t^{t+T} \cos(2\omega t + 2\phi) dt \right\} \\ &= \frac{\psi_0^2}{2T} \left\{ T + \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t + 2\phi)]_t^{t+2\pi/\omega} \right\} \\ &= \frac{\psi_0^2}{2} + \frac{\psi_0^2}{4T\omega} \underbrace{[\sin(2\omega t + 4\pi + 2\phi) - \sin(2\omega t + 2\phi)]}_{=0} \end{aligned}$$

Aussi, la grandeur efficace étant définie par $\psi_{\text{eff}} = \frac{\psi_0}{\sqrt{2}}$, il s'ensuit que :

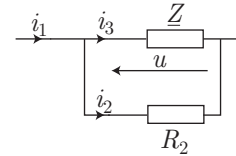
$$\psi = \psi_0 \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow \langle \psi^2 \rangle = \psi_{\text{eff}}^2 \quad (28)$$

- (b) Considérons le montage proposé par l'énoncé dans lequel la tension u est commune à \underline{Z} et à R_2 :

$$u = R_2 i_2$$

La puissance instantanée consommée par \underline{Z} est définie par :

$$P = u \times i_3 = R_2 \times i_2 i_3$$



où la loi des nœuds stipule que :

$$\begin{aligned} i_1 = i_2 + i_3 &\Rightarrow i_1^2 = i_2^2 + i_3^2 + 2 i_2 i_3 \Rightarrow i_2 i_3 = \frac{i_1^2 - i_2^2 - i_3^2}{2} \\ \Rightarrow P &= \frac{R_2}{2} (i_1^2 - i_2^2 - i_3^2) \end{aligned}$$

À cette grandeur est associée la valeur moyenne :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P dt = \frac{R_2}{2T} \int_t^{t+T} (i_1^2 - i_2^2 - i_3^2) dt$$

où l'on reconnaît les définitions des valeurs moyennes de i_1^2 , i_2^2 et i_3^2 :

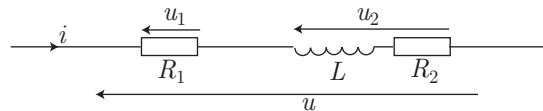
$$\langle i_j^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} i_j^2 dt \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{R_2}{2} [\langle i_1^2 \rangle - \langle i_2^2 \rangle - \langle i_3^2 \rangle]$$

Or, les courants i_j adoptent la forme : $i_j = I_{0j} \cos(\omega t + \phi_j)$, auquel cas le résultat (28) permet l'identification de $\langle i_j^2 \rangle$ avec la grandeur efficace I_j^2 , et c'est pourquoi :

$$\langle P \rangle = \frac{R_2}{2} (I_1^2 - I_2^2 - I_3^2)$$

2. Méthode des trois voltmètres

(a) Dans le circuit proposé par l'énoncé :



les dipôles R_1 et $\{L + R_2\}$ sont montés en série, en conséquence de quoi :

$$u = u_1 + u_2 \Rightarrow u^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2 u_1 u_2 \Rightarrow u_1 u_2 = \frac{u^2 - u_1^2 - u_2^2}{2} \quad (29)$$

et le courant i est commun aux deux dipôles, et notamment traverse R_1 :

$$u_1 = R_1 i \Rightarrow i = \frac{u_1}{R_1}$$

Quant au dipôle $\{L + R_2\}$, la puissance instantanée qu'il absorbe est définie par :

$$P = u_2 i = \frac{u_1 u_2}{R_1}$$

c'est-à-dire, d'après l'identité (29) :

$$P = \frac{1}{2R_1} (u^2 - u_1^2 - u_2^2)$$

Sa valeur moyenne sur une période vaut alors :

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P \, dt = \frac{1}{2R_1} \times \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (u^2 - u_1^2 - u_2^2) \, dt \\ &= \frac{1}{2R_1} \left[\frac{1}{T} \int_t^{t+T} u^2 \, dt - \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_1^2 \, dt - \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_2^2 \, dt \right] \\ &= \frac{1}{2R_1} (\langle u^2 \rangle - \langle u_1^2 \rangle - \langle u_2^2 \rangle)\end{aligned}$$

Or, les tensions u , u_1 et u_2 adoptent des formes analogues à celle de la fonction $\psi = \psi_0 \cos(\omega t + \phi)$, en raison de quoi le résultat (28) est à nouveau applicable :

$$\langle P \rangle = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R_1} \quad (30)$$

(b) Application numérique :

$$\langle P \rangle = \frac{(105)^2 - (50)^2 - (60)^2}{2 \times 5} \Rightarrow \langle P \rangle = 492,5 \text{ W}$$

(c) Soit $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ l'impédance du dipôle $\{L, R_2\}$, qui absorbe une puissance moyenne :

$$\langle P \rangle = U_2 I \cos \varphi$$

si I représente l'intensité efficace associée à i , d'amplitude I_0 . En notation complexe, on pose :

$$\begin{cases} u_2 = U_{20} e^{j(\omega t + \varphi)} \\ i = I_0 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow u_2 = \underline{Z} i = Z e^{j\varphi} \times I_0 e^{j\omega t} \quad (31)$$

$$\Rightarrow U_{20} e^{j(\omega t + \varphi)} = Z I_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \quad (32)$$

$$\Rightarrow U_{20} = Z I_0 \Rightarrow \frac{U_{20}}{\sqrt{2}} = Z \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (33)$$

$$\Rightarrow U_2 = Z I \quad (34)$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = Z I^2 \cos \varphi \quad (35)$$

Quant à l'impédance \underline{Z} , elle admet des parties réelle et imaginaire : $X = \text{Re}\{\underline{Z}\}$ et $Y = \text{Im}\{\underline{Z}\}$ telle que :

$$\begin{aligned}\underline{Z} = X + jY &\Rightarrow Z e^{j\varphi} = X + jY \\ &\Rightarrow Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = X + jY \\ &\Rightarrow \begin{cases} Z \cos \varphi = X = \text{Re}\{\underline{Z}\} \\ Z \sin \varphi = Y = \text{Im}\{\underline{Z}\} \end{cases}\end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$\langle P \rangle = Z \cos \varphi \times I^2 = \text{Re}\{\underline{Z}\} \times I^2 \quad (36)$$

En outre, la résistance R_1 est parcourue par le courant i tel que :

$$u_1 = R_1 i = R_1 I_0 \cos(\omega t) \Rightarrow U_{10} = R_1 I_0 \Rightarrow \frac{U_{10}}{\sqrt{2}} = R_1 \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad (37)$$

$$\Rightarrow U_1 = R_1 I \Rightarrow I = \frac{U_1}{R_1} \quad (38)$$

Finalement, la puissance moyenne s'écrit :

$$\langle P \rangle = \operatorname{Re} \{ \underline{Z} \} \times \left(\frac{U_1}{R_1} \right)^2$$

où l'on remarque que :

$$\underline{Z} = R_2 + L\omega j \Rightarrow \operatorname{Re} \{ \underline{Z} \} = R_2 \Rightarrow \langle P \rangle = R_2 \left(\frac{U_1}{R_1} \right)^2 \Rightarrow R_2 = \left(\frac{R_1}{U_1} \right)^2 \langle P \rangle$$

Or, le résultat (30) fournit :

$$\begin{aligned} \langle P \rangle &= \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R_1} \Rightarrow R_2 = \frac{R_1^2}{2R_1} \times \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{U_1^2} \\ &\Rightarrow R_2 = R_1 \times \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1^2} \end{aligned}$$

(d) L'expression de $\underline{Z} = R_1 + L\omega j = Z e^{j\varphi}$ permet de poser :

$$|\underline{Z}| = Z = \sqrt{R_2^2 + (L\omega)^2} \Rightarrow (L\omega)^2 = Z^2 - R_2^2 \text{ avec } Z = \frac{U_2}{I} \text{ d'après (34)}$$

et où l'équation (38) fournit :

$$\begin{aligned} I = \frac{U_1}{R_1} \Rightarrow Z &= R_1 \frac{U_2}{U_1} \\ \Rightarrow (L\omega)^2 &= \left(R_1 \frac{U_2}{U_1} \right)^2 - R_2^2 = \left(R_1 \frac{U_2}{U_1} - R_2 \right) \left(R_1 \frac{U_2}{U_1} + R_2 \right) \end{aligned}$$

Quant à l'expression de R_2 , elle conduit à :

$$\begin{aligned} R_1 \frac{U_2}{U_1} - R_2 &= R_1 \frac{U_2}{U_1} - R_1 \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1^2} = R_1 \frac{2U_1 U_2 - U^2 + U_1^2 + U_2^2}{2U_1^2} \\ &= R_1 \times \frac{(U_1 + U_2)^2 - U^2}{2U_1^2} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}
 R_1 \frac{U_2}{U_1} + R_2 &= R_1 \frac{U_2}{U_1} + R_1 \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1^2} \\
 &= R_1 \times \frac{2U_1U_2 + U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2U_1^2} \\
 &= R_1 \times \frac{U^2 - (U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2)}{2U_1^2} \\
 &= R_1 \times \frac{U^2 - (U_1 - U_2)^2}{2U_1^2}
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 (L\omega)^2 &= \left(R_1 \frac{U_2}{U_1} - R_2 \right) \left(R_1 \frac{U_2}{U_1} + R_2 \right) \\
 &= \left(\frac{R_1}{2U_1^2} \right)^2 \left[(U_1 + U_2)^2 - U^2 \right] \left[U^2 - (U_1 - U_2)^2 \right] \\
 \Rightarrow L\omega &= \frac{R_1}{2U_1^2} \sqrt{\left[(U_1 + U_2)^2 - U^2 \right] \left[U^2 - (U_1 - U_2)^2 \right]}
 \end{aligned}$$

où $\omega = 2\pi\nu$ conduit finalement à :

$$L = \frac{R_1}{4\pi\nu U_1^2} \sqrt{\left[(U_1 + U_2)^2 - U^2 \right] \left[U^2 - (U_1 - U_2)^2 \right]}$$

(e) Compte tenu du résultat (30) :

$$\langle P \rangle = \frac{U^2 - U_1^2 - U_2^2}{2R_1}$$

des variations ΔU , ΔU_2 et ΔU_3 se traduisent par une variation $\Delta \langle P \rangle$ de $\langle P \rangle$ telle que :

$$\Delta \langle P \rangle = \frac{2U \Delta U - 2U_1 \Delta U_1 - 2U_2 \Delta U_2}{2R_1}$$

Aussi, l'incertitude $\varepsilon = 1$ V sur les tensions U , U_1 et U_2 provoque une incertitude sur $\langle P \rangle$, donnée par :

$$\begin{aligned}
 \Delta \langle P \rangle &= \frac{U \varepsilon + U_1 \varepsilon + U_2 \varepsilon}{R_1} = \frac{U + U_1 + U_2}{R_1} \times \varepsilon \\
 &= \frac{105 + 50 + 60}{5} \times 1 = 43 \text{ V}
 \end{aligned}$$

et c'est pour cette raison que :

$$\frac{\Delta \langle P \rangle}{\langle P \rangle} = \frac{43}{492,5} \Rightarrow \frac{\Delta \langle P \rangle}{\langle P \rangle} = 0,087 = 8,7\%$$

● 116 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Soient $\underline{u} = U_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{v} = V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ les images complexes associées aux tensions $u(t)$ et $v(t)$. L'association en parallèle de la résistance et du condensateur équivaut

à un dipôle d'impédance \underline{Z} telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = C\omega j + \frac{1}{R} = \frac{1 + RC\omega j}{R}$$

Par conséquent, la fonction de transfert, qui s'obtient directement à partir de la loi du diviseur de tension, s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{v}}{\underline{u}} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + L\omega j} = \frac{1}{1 + L\omega j \times \frac{1}{\underline{Z}}} \\ &= \frac{1}{1 + L\omega j \times \frac{1 + RC\omega j}{R}} \\ \Rightarrow \underline{H}(j\omega) &= \frac{R}{R(1 - LC\omega^2) + L\omega j} \end{aligned}$$

2. Le dénominateur de la fonction de transfert peut aussi se présenter sous la forme :

$$R(1 - LC\omega^2) + L\omega j = \underline{D} = D e^{j\varphi}$$

avec :

$$D = \sqrt{R^2(1 - LC\omega^2)^2 + L^2\omega^2} \text{ et } \tan \varphi = \frac{L\omega}{R(1 - LC\omega^2)}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{v}}{\underline{u}} = \underline{H}(j\omega) &\Rightarrow \underline{v} = \frac{R}{D e^{j\varphi}} \times \underline{u} \\ &\Rightarrow V_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{R U_0}{D} e^{j(\omega t - \varphi)} \end{aligned}$$

L'identification des arguments de part et d'autre de cette équation fournit alors :

$$\phi = -\varphi \Rightarrow \tan \phi = -\tan \varphi \Rightarrow \tan \phi = \frac{L\omega}{R(LC\omega^2 - 1)}$$

● 117 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. L'association en parallèle de la résistance et du condensateur a pour impédance \underline{Z} , telle que :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + C\omega j = \frac{1 + RC\omega j}{R}$$

Aussi, la loi du diviseur de tension fournit :

$$\begin{aligned} \underline{s} = \underline{e} \times \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \frac{1}{C\omega j}} &\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{C\omega j} \times \frac{1}{\underline{Z}}} \\ &\Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1 + RC\omega j}{RC\omega j}} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{RC\omega j}{1 + 2RC\omega j}$$

2. Soit ϕ l'argument du nombre complexe $1 + 2RC\omega j$, tel que $\tan \phi = 2RC\omega$; la fonction de transfert se présente alors sous la forme :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{RC\omega e^{j\pi/2}}{\sqrt{1 + 4R^2C^2\omega^2} e^{j\phi}} \\ &= H e^{j(\pi/2 - \phi)} \text{ où } H = \frac{RC\omega}{\sqrt{1 + 4R^2C^2\omega^2}} \end{aligned}$$

C'est pourquoi, en notant $\underline{e} = E e^{j\omega t}$ l'image complexe associée à $e(t)$, la définition de $\underline{H}(j\omega)$ conduit à :

$$\underline{s} = \underline{H}(j\omega) \times \underline{e} = H E e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2} - \phi)} \Rightarrow s(t) = \underbrace{H E}_S \cos(\omega t + \varphi)$$

avec :

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{\pi}{2} - \phi &\Rightarrow \tan \varphi = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) = \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right)} \\ &\Rightarrow \tan \varphi = \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = \frac{1}{\tan \phi} \end{aligned}$$

ou encore :

$$\tan \varphi = \frac{1}{2RC\omega} = \frac{\omega_0}{2\omega}$$

3. Cette expression a pour limites :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [\tan \varphi] = +\infty \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi = \frac{\pi}{2}$$

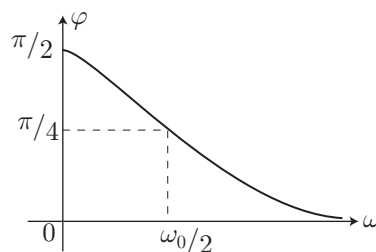
et :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [\tan \varphi] = 0 \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi = 0$$

puis :

$$\omega = \frac{\omega_0}{2} \Rightarrow \tan \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ pour } \omega = \frac{\omega_0}{2}$$

De ces expressions découle la représentation graphique de $\varphi(\omega)$:



● 118 Concours ENSI

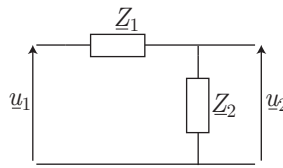
1. Soit \underline{Z}_1 l'impédance de l'association en parallèle de R_1 et C_1 :

$$\frac{1}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{R_1} + C_1 \omega j = \frac{1 + R_1 C_1 \omega j}{R_1} \Rightarrow \underline{Z}_1 = \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 \omega j}$$

et soit \underline{Z}_2 celle de l'association de R_2, C_2 en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1 + R_2 C_2 \omega j}{R_2}$$

Le montage présente une structure de diviseur de tension :



dont la loi fournit directement la fonction de transfert :

$$u_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} u_1 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \times \frac{1}{\underline{Z}_2}}$$

où :

$$1 + \underline{Z}_1 \times \frac{1}{\underline{Z}_2} = 1 + \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 \omega j} \times \frac{1 + R_2 C_2 \omega j}{R_2} = \frac{R_1 + R_2 + R_1 R_2 (C_1 + C_2) \omega j}{R_2 + R_2 R_1 C_1 \omega j}$$

Il s'ensuit que :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{R_2 + R_1 R_2 C_1 \omega j}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 (C_1 + C_2) \omega j}$$

2. Si les tensions u_1 et u_2 sont proportionnelles, il existe un nombre réel α tel que :

$$\begin{aligned} u_2 = \alpha u_1 &\Rightarrow \underline{u}_2 = \alpha \underline{u}_1 \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \alpha \\ &\Rightarrow \frac{R_2 + R_1 R_2 C_1 \omega j}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 (C_1 + C_2) \omega j} = \alpha \\ &\Rightarrow R_2 + R_1 R_2 C_1 \omega j = \alpha (R_1 + R_2) + \alpha R_1 R_2 (C_1 + C_2) \omega j \end{aligned}$$

L'identification des parties réelles et imaginaires de cette équation fournit alors :

$$R_2 = \alpha (R_1 + R_2) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} + 1$$

et :

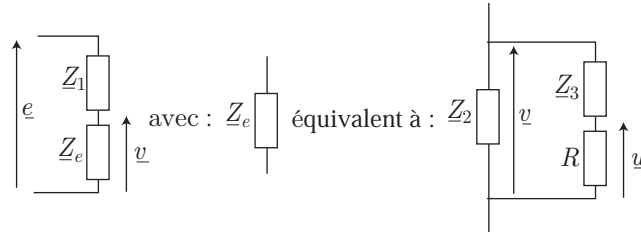
$$R_1 R_2 C_1 = \alpha R_1 R_2 (C_1 + C_2) \Rightarrow \frac{1}{\alpha} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} = 1 + \frac{C_2}{C_1}$$

Par conséquent :

$$1 + \frac{R_1}{R_2} = 1 + \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{C_2}{C_1} \Rightarrow R_1 C_1 = R_2 C_2$$

● 119 ————— Lycée Hoche, Versailles

Soit \underline{v} l'image complexe de la tension aux bornes de \underline{Z}_2 et soit \underline{Z}_e l'impédance qui équivaut à l'association de \underline{Z}_2 en parallèle avec $\{R, \underline{Z}_3\}$.



La fonction de transfert du premier montage représenté ci-dessus vaut :

$$\frac{\underline{v}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_e}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_e} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \times \frac{1}{\underline{Z}_e}}$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}_e} &= \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{R + \underline{Z}_3} = \frac{R + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 (R + \underline{Z}_3)} \\ \Rightarrow \frac{\underline{v}}{\underline{e}} &= \frac{1}{1 + \underline{Z}_1 \times \frac{R + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 (R + \underline{Z}_3)}} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\frac{\underline{v}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_2 (R + \underline{Z}_3)}{R (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \quad (39)$$

De même, la fonction de transfert du deuxième montage s'écrit :

$$\frac{\underline{u}}{\underline{v}} = \frac{R}{\underline{Z}_3 + R}$$

C'est pourquoi, la fonction de transfert globale du circuit est donnée par :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{\underline{u}}{\underline{v}} \times \frac{\underline{v}}{\underline{e}} \\ &= \frac{R}{\underline{Z}_3 + R} \times \frac{\underline{Z}_2 (R + \underline{Z}_3)}{R (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \\ &= \frac{R \underline{Z}_2}{R (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) + \underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)} \end{aligned}$$

En outre, l'indépendance de \underline{u} à l'égard de R entraîne celle de $\underline{H}(j\omega)$ (ou de $\frac{1}{\underline{H}(j\omega)}$) par rapport à R , ce qui signifie également que :

$$\frac{1}{\underline{H}(j\omega)} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)}{R \underline{Z}_2} \quad (40)$$

ne doit pas dépendre de R . Ceci n'est possible qu'à condition de poser :

$$\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\underline{Z}_3 = -\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

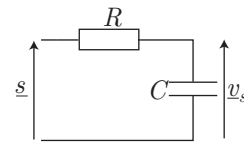
Dans ce cas, l'équation (40) devient :

$$\frac{1}{\underline{H}(j\omega)} = \frac{\underline{e}}{\underline{u}} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_2} \Rightarrow \underline{u} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{e}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

● 120 ————— Concours ENGEES

1. (a) En notant $\underline{Z}_1 = \frac{1}{C\omega j}$ et $\underline{Z}_2 = R$ les impédances du diviseur de tension, \underline{v}_s et \underline{s} sont liées par :

$$\underline{v}_s = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{s} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}_s}{\underline{s}} = \frac{\frac{1}{C\omega j}}{\frac{1}{C\omega j} + R}$$



c'est-à-dire :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + RC\omega j}$$

- (b) Le module de $\underline{H}(j\omega)$: $H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$ montre que le « dipôle » RC joue le rôle de filtre passe-bas ($H(\omega)$ est une fonction décroissante).
- (c) Le multiplicateur agit sur les tensions $x_1 = V_1 \cos(\omega t)$ et $x_2 = V_2 \cos(\omega t + \phi)$ afin de produire, en sortie, la tension :

$$\begin{aligned} s(t) = k x_1 x_2 &= k V_1 V_2 \cos(\omega t) \times \cos(\omega t + \phi) \\ &= k \frac{V_1 V_2}{2} [\cos \phi + \cos(2\omega t + \phi)] \end{aligned}$$

Cette tension possède par conséquent deux composantes :

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = S_1 \cos \phi + S_2 \cos(2\omega t + \phi) \text{ avec } S_1 = S_2 = \frac{k V_1 V_2}{2}$$

Chacune de ces composantes est traitée par le filtre passe-bas, qui leur associe des tensions $v_{s1}(t)$ et $v_{s2}(t)$ d'amplitudes respectives :

$$V_{s1} = H(0) \times S_1 \cos \phi \text{ car } \omega = 0 \text{ pour } s_1(t) = S_1 \cos \phi$$

et

$$V_{s2} = H(2\omega) \times S_2 = \frac{S_2}{\sqrt{1 + (2RC\omega)^2}}$$

Notamment, avec les valeurs numériques proposées :

$$H(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (10^6 \times 10^{-6} \times 2 \times 2\pi \times 608)^2}} \simeq 1,3 \cdot 10^{-4} \Rightarrow V_{s2} = 1,3 \cdot 10^{-4} S_2$$

Ces calculs confirment le rôle passe-bas du filtre : $V_{s2} \ll V_{s1}$, qui supprime la composante v_{s2} . C'est pourquoi :

$$v_s(t) \simeq v_{s1}(t) = S_1 \cos \phi = k \frac{V_1 V_2}{2} \cos \phi \quad (41)$$

2. Au cours des expériences proposées :

- $x_1(t) = x_2(t) = V_{01} \cos(\omega t)$, les tensions x_1 et x_2 ne présentent pas de déphasage ($\phi = 0$) tandis que leurs amplitudes sont identiques ($V_1 = V_{01}$ et $V_2 = V_{01}$). Le résultat (41) fournit alors :

$$V_{sa} = k \frac{V_{01}^2}{2} \Rightarrow V_{01} = \sqrt{\frac{2V_{sa}}{k}} \quad (42)$$

- $x_1(t) = x_2(t) = V_{02} \cos(\omega t)$, les tensions ne présentent toujours pas de déphasage ($\phi = 0$) et leurs amplitudes sont identiques ($V_1 = V_2 = V_{02}$). De la relation (41), il découle que :

$$V_{sb} = k \frac{V_{02}^2}{2} \Rightarrow V_{02} = \sqrt{\frac{2V_{sb}}{k}} \quad (43)$$

- $x_1 = V_{01} \cos(\omega t)$ et $x_2 = V_{02} \cos(\omega t + \phi)$ donnent à l'identité (41) la forme suivante :

$$V_{sc} = k \frac{V_{01} V_{02}}{2} \cos \phi$$

soit, en tenant compte des résultats (42) et (43) :

$$V_{sc} = \frac{k}{2} \times \frac{2}{k} \sqrt{V_{sa} V_{sb}} \cos \phi \Rightarrow \cos \phi = \frac{V_{sc}}{\sqrt{V_{sa} V_{sb}}}$$

Application numérique :

$$\cos \phi = \frac{6,4 \times 10^{-3}}{\sqrt{(21,2 \cdot 10^{-3}) \times (21,1 \cdot 10^{-3})}} \simeq 0,30 \Rightarrow \phi \simeq 1,26 \text{ rad}$$

● 121 ————— Lycée Roosevelt, Reims

1. La définition de la fonction de transfert :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\alpha + \beta j\omega}{\gamma + \varepsilon j\omega} \Rightarrow \gamma \underline{s} + \varepsilon j\omega \underline{s} = \alpha \underline{e} + \beta j\omega \underline{e} \\ &\Rightarrow \gamma \underline{s} + \beta \frac{d\underline{s}}{dt} = \alpha \underline{e} + \beta \frac{d\underline{e}}{dt} \text{ car } j\omega \underline{s} = \frac{d\underline{s}}{dt} \text{ et } j\omega \underline{e} = \frac{d\underline{e}}{dt} \end{aligned}$$

permet de trouver l'équation différentielle reliant $s(t)$ et $e(t)$:

$$\gamma s + \beta \frac{ds}{dt} = \alpha e + \beta \frac{de}{dt}$$

À la date $t = 0$, la tension $e(t)$ subit une discontinuité qui l'amène instantanément de la valeur 0 à la valeur E , de sorte que :

$$\left. \frac{de}{dt} \right|_{t=0} = +\infty \Rightarrow \gamma \times s(t=0) + \beta \left. \frac{ds}{dt} \right|_{t=0} = +\infty$$

Or, puisque $s(t=0)$ ne peut tendre vers l'infini, il s'ensuit que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{ds}{dt} \right) = +\infty$$

ce qui suffit à montrer que la fonction $s(t)$ est discontinue à la date $t = 0$.

2. De la fonction de transfert :

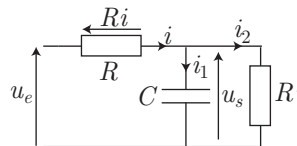
$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \underline{H}(j\omega) = \frac{\alpha + \beta j\omega}{\gamma + \varepsilon j\omega} \Rightarrow \underline{s} = \frac{\alpha + \beta j\omega}{\gamma + \varepsilon j\omega} \underline{e}$$

il ressort que :

$$s(t=0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{\alpha + \beta j\omega}{\gamma + \varepsilon j\omega} E \right] \Rightarrow s(t=0) = \frac{\beta}{\varepsilon} \times E$$

● 122 ————— Concours ESIGETEL

1. On note i , i_1 et i_2 les courants qui circulent respectivement dans R , C et R' .



La loi des mailles fournit :

$$u_e - Ri - u_s = 0 \Rightarrow u_e = Ri + u_s$$

tandis que la loi des nœuds impose :

$$i = i_1 + i_2$$

avec :

$$i_1 = C \frac{du_s}{dt} \text{ et } u_s = R' i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{u_s}{R'}$$

Par conséquent :

$$i = C \frac{du_s}{dt} + \frac{u_s}{R'} \Rightarrow RC \frac{du_s}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R'} \right) u_s = u_e = E \text{ pour } t \geq 0$$

2. (a) La fonction de transfert, dont l'expression (45) est établie à la page 370 :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\frac{R + R'}{R'} + RC\omega j} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$$

conduit à :

$$\left(1 + \frac{R}{R'}\right) \underline{u}_s + RC\omega j \underline{u}_s = \underline{u}_e \Rightarrow \left(1 + \frac{R}{R'}\right) \underline{u}_s + RC \frac{d\underline{u}_s}{dt} = \underline{u}_e$$

La partie réelle de cette équation :

$$\left(1 + \frac{R}{R'}\right) u_s + RC \frac{du_s}{dt} = u_e = E \text{ pour } t \geq 0$$

confirme de fait l'équation obtenue à la question précédente.

(b) La valeur initiale de $u_s(t)$ est donnée par :

$$u_s(t=0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\underline{H}(j\omega) \times E] = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{E}{\frac{R + R'}{R'} + RC\omega j} \right]$$

$$\Rightarrow u_s(t=0) = 0$$

(c) Pour $t \geq 0$, l'équation différentielle :

$$RC \frac{du_s}{dt} + \frac{R + R'}{R'} u_s = E$$

admet :

- une solution u'_s de l'équation différentielle dépourvue de son second membre :

$$RC \frac{du'_s}{dt} + \frac{R + R'}{R'} u'_s = 0$$

dont l'équation caractéristique (en X) :

$$RC X + \frac{R + R'}{R'} = 0 \Rightarrow X = -\frac{R + R'}{RR'C}$$

génère la solution :

$$u'_s = A e^{Xt} = A \exp\left(-\frac{R + R'}{RR'C} \times t\right)$$

où A est une constante.

- une solution u''_s , homogène au second membre de l'équation différentielle, c'est-à-dire constante (comme E) :

$$RC \underbrace{\frac{du''_s}{dt}}_{=0} + \frac{R + R'}{R'} u''_s = E \Rightarrow u''_s = \frac{R' E}{R + R'}$$

La solution générale :

$$u_s(t) = u_s'' + u_s' = \frac{R'E}{R + R'} + A \exp\left(-\frac{R + R'}{RR'C} \times t\right)$$

présente une constante A qui doit être adaptée à la condition initiale :

$$u_s(t = 0) = 0 \Rightarrow \frac{R'E}{R + R'} + A = 0 \Rightarrow A = -\frac{R'E}{R + R'}$$

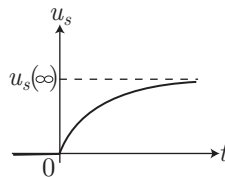
d'où il s'ensuit que :

$$u_s(t) = \frac{R'E}{R + R'} \left[1 - \exp\left(-\frac{R + R'}{RR'C} \times t\right) \right]$$

De cette expression, se dégagent les limites suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow 0} [u_s(t)] = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [u_s(t)] = \frac{R'E}{R + R'} = u_s(\infty)$$

d'où découle la représentation graphique de $u_s(t)$:

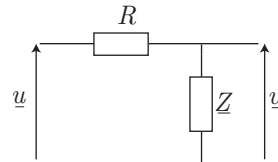


● 123 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Soit \underline{Z} l'impédance de l'association en parallèle de la bobine et du condensateur :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{L\omega j} + C\omega j$$

Le montage présente une structure de diviseur de tension, pour lequel :



$$\begin{aligned} \underline{v} &= \underline{u} \times \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{v}}{\underline{u}} = \frac{1}{1 + R \times \frac{1}{\underline{Z}}} \\ &= \frac{1}{1 + R \left(\frac{1}{L\omega j} + C\omega j \right)} \\ &= \frac{L\omega j}{L\omega j + R + RLC(j\omega)^2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, après simplification par $RLC = \frac{L}{2\omega_0}$:

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{2\omega_0 \times \omega j}{(\omega j)^2 + 2\omega_0 \times \omega j + \omega_0^2}$$

La définition de cette fonction de transfert conduit directement à :

$$\begin{aligned}\frac{\underline{v}}{\underline{u}} &= \frac{2\omega_0 \times \omega_j}{(\omega_j)^2 + 2\omega_0 \times \omega_j + \omega_0^2} \\ \Rightarrow (\omega_j)^2 \underline{v} + 2\omega_0 \times \omega_j \underline{v} + \omega_0^2 \underline{v} &= 2\omega_0 \times \omega_j \underline{u} \\ \Rightarrow \frac{d^2 \underline{v}}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{d\underline{v}}{dt} + \omega_0^2 \underline{v} &= 2\omega_0 \frac{d\underline{u}}{dt} \\ \text{car } \omega_j \underline{v} &= \frac{d\underline{v}}{dt} \text{ et } (\omega_j)^2 \underline{v} = \frac{d^2 \underline{v}}{dt^2}\end{aligned}$$

La partie réelle de cette équation fournit finalement :

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 2\omega_0 \frac{du}{dt}$$

c'est-à-dire lorsque $t > 0$, $u = U_0 = \text{cte}$:

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 2\omega_0 \frac{dv}{dt} + \omega_0^2 v = 0 \quad (44)$$

2. D'une part la fonction de transfert révèle que :

$$\begin{aligned}\underline{v} = \underline{H}(\omega_j) \times \underline{u} \Rightarrow v(t=0) &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{2\omega_0 \times \omega_j}{(\omega_j)^2 + 2\omega_0 \times \omega_j + \omega_0^2} \times U_0 \right] \\ \Rightarrow v(t=0) &= 0\end{aligned}$$

et d'autre part, la dérivée de \underline{v} s'écrit :

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{v}}{dt} &= j\omega \underline{v} = j\omega \underline{H}(\omega_j) \times \underline{u} \\ &= \frac{2\omega_0 \times (\omega_j)^2}{(\omega_j)^2 + 2\omega_0 \times \omega_j + \omega_0^2} \times \underline{u} \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} &= \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\frac{2\omega_0 \times (\omega_j)^2}{(\omega_j)^2 + 2\omega_0 \times \omega_j + \omega_0^2} \times U_0 \right] \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} \Big|_{t=0} &= 2\omega_0 \times U_0 = \frac{U_0}{RC}\end{aligned}$$

3. À l'équation différentielle (44) est associée l'équation caractéristique (en X) :

$$X^2 + 2\omega_0 X + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow (X + \omega_0)^2 = 0$$

dont la solution double $X = -\omega_0$ révèle que v adopte la forme :

$$\begin{aligned}v(t) &= (A + Bt) e^{Xt} = (A + Bt) e^{-\omega_0 t} \\ \Rightarrow \frac{dv}{dt} &= e^{-\omega_0 t} (-\omega_0 A - \omega_0 B t + B)\end{aligned}$$

où les constantes A et B sont ajustées aux conditions initiales :

$$v(t=0) = 0 \Rightarrow A = 0$$

et :

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = 2\omega_0 U_0 \Rightarrow \underbrace{-\omega_0 A + B}_{=0} = 2\omega_0 U_0 \Rightarrow B = 2\omega_0 U_0$$

C'est pourquoi :

$$v(t) = 2\omega_0 U_0 \times t e^{-\omega_0 t}$$

4. De l'expression précédente, il ressort que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} [v(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} [v(t)] = 0$$

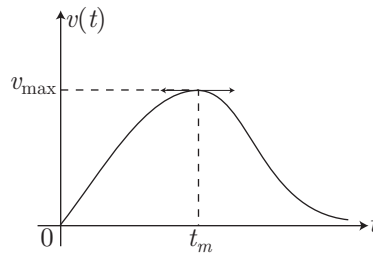
ce qui suggère que $v(t)$ admet un *maximum* à une date t_m telle que :

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t_m} = 0 \Rightarrow e^{-\omega_0 t_m} (B - B\omega_0 t_m) = 0 \Rightarrow t_m = \frac{1}{\omega_0}$$

Ce *maximum* vaut alors :

$$v_{\max} = v(t_m) = 2\omega_0 U_0 \times \frac{1}{\omega_0} \times e^{-\omega_0 \times \frac{1}{\omega_0}} \Rightarrow v_{\max} = \frac{2U_0}{e}$$

Enfin, la valeur initiale de $\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = 2\omega_0 U_0$ révèle que la courbe représentative de $v(t)$ admet, à la date $t = 0$, une tangente oblique :



● 124 ————— Lycée Livet, Nantes

1. Si \underline{Z} désigne l'impédance de l'association en série de la résistance et du condensateur horizontaux : $\underline{Z} = R + \frac{1}{C\omega j}$, la loi du diviseur de tension conduit directement à l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{s} = \underline{e} \times \frac{\frac{1}{C\omega j}}{\underline{Z} + \frac{1}{C\omega j}} \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\frac{1}{C\omega j}}{R + \frac{1}{C\omega j}} = \frac{1}{2 + RC\omega j}$$

c'est-à-dire :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{2 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

2. Le module de cette fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}} = \left(4 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1/2}$$

correspond à un gain en décibels :

$$G(\omega) = 20 \log [H(\omega)] \Rightarrow G(\omega) = -10 \log \left(4 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

3. La fonction $G(\omega)$ est décroissante, ce qui signifie qu'elle prend sa valeur maximale G_{\max} pour $\omega = 0$:

$$G_{\max} = -10 \log 4 = -6 \text{ dB}$$

Par suite, la pulsation de coupure ω_c est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} G(\omega_c) &= G_{\max} - 3 \text{ dB} = -10 \log 4 - 10 \log 2 \\ \Rightarrow -10 \log \left(4 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right) &= -10 \log 8 \Rightarrow \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2} = 4 \\ \Rightarrow \omega_c &= 2\omega_0 = \frac{2}{RC} \end{aligned}$$

4. Lorsque $\omega \ll \omega_0$, le terme $\frac{\omega}{\omega_0}$ devient négligeable devant 4, de sorte que :

$$\lim_{\omega \ll \omega_0} [G(\omega)] \simeq -10 \log 4 = -6 \text{ dB}$$

ce qui montre que pour $\omega \ll \omega_0$, la courbe $G(\omega)$ admet une asymptote horizontale.

En revanche, lorsque $\omega \gg \omega_0$:

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \gg 4 \Rightarrow 4 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \simeq \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

ce qui justifie que :

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow G(\omega) \simeq 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega$$

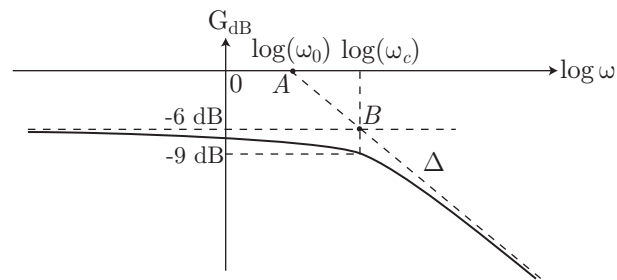
Dans ces conditions, la courbe $G(\omega)$ admet une asymptote oblique (Δ), de pente

-20 (décibels par décade) et passe par le point $A \left(\begin{array}{l} \log \omega = \log \omega_0 \\ G = 0 \end{array} \right)$.

5. À l'étude précédente, on peut également rajouter que la droite Δ passe par le point B d'abscisse $\log \omega_c = \log(2\omega_0)$ telle que :

$$\begin{aligned} G(\omega_c) &= 20 \log \omega_0 - 20 \log(2\omega_0) = 20 \log \omega_0 - 20 \log 2 - 20 \log \omega_0 \\ &= -6 \text{ dB} \Rightarrow B \left(\begin{array}{l} \log \omega_c \\ -6 \text{ dB} \end{array} \right) \end{aligned}$$

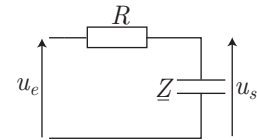
C'est pourquoi le diagramme de Bode adopte l'allure suivante :



● 125 **Concours ESIGETEL**

1. Soit \underline{Z} l'impédance équivalente à R' et C en parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R'} + C\omega j$$



Le circuit proposé présente la structure d'un pont diviseur de tension, pour lequel :

$$\begin{aligned} \underline{u}_s &= \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} \underline{u}_e \Rightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R} = \frac{1}{1 + R \times \frac{1}{\underline{Z}}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{R}{R'} + RC\omega j} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\frac{R + R'}{R'} + RC\omega j} \quad (45)$$

2. De l'expression du module $H(\omega)$ associé à cette fonction de transfert :

$$H(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R + R'}{R'}\right)^2 + R^2 C^2 \omega^2}}$$

se dégage la définition de la pulsation de coupure ω_c :

$$H(\omega_c) = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

où H_{\max} désigne la valeur maximale de $H(\omega)$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} H_{\max} &= \frac{1}{\frac{R+R'}{R'}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{R+R'}{R'}\right)^2 + R^2 C^2 \omega_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2 \left(\frac{R+R'}{R'}\right)^2}} \\ &\Rightarrow RC\omega_c = \frac{R+R'}{R'} \\ &\Rightarrow \omega_c = \frac{R+R'}{RR'C} \end{aligned}$$

Ce faisant, le module :

$$H(\omega) = \frac{R'}{R+R'} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} = H_{\max} \times \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]^{-1/2}$$

permet de définir le gain en décibels de ce circuit :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log [H(\omega)] = 20 \log [H_{\max}] - 10 \log \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]$$

soit, en posant :

$$G_{\max} = 20 \log [H_{\max}] = 20 \log \left(\frac{R'}{R+R'}\right) < 0$$

ce gain s'écrit aussi :

$$G_{\text{dB}} = G_{\max} - 10 \left[1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right]$$

Les expressions des asymptotes de $G_{\text{dB}} = f(\log \omega)$ s'obtiennent alors aisément :

- lorsque $\omega \ll \omega_c$:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 1 \simeq 1 \Rightarrow G_{\text{dB}} \simeq G_{\max}$$

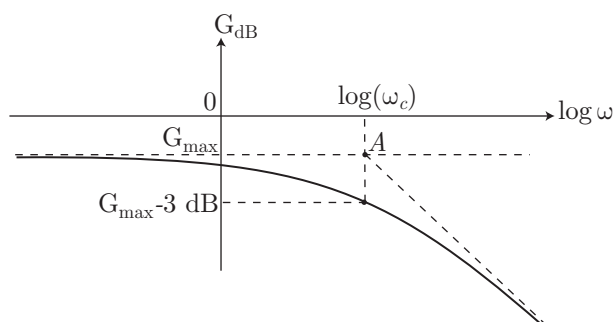
- lorsque $\omega \gg \omega_c$:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 1 \simeq \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \Rightarrow G_{\text{dB}} \simeq G_{\max} + 20 \log \omega_c - 20 \log \omega$$

Il s'agit d'une droite de pente -20 (décibels par décade) et qui passe le point

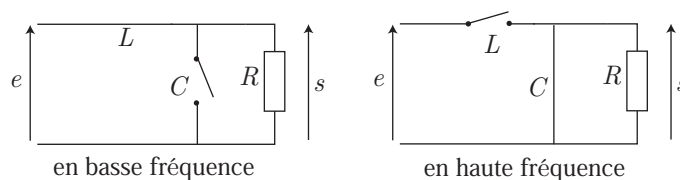
$$A \begin{pmatrix} \log \omega = \log \omega_c \\ G_{\text{dB}} = G_{\max} \end{pmatrix}$$

Enfin, la définition de la pulsation de coupure : $G(\omega_c) = G_{\max} - 3 \text{ dB}$ permet la représentation graphique du diagramme de Bode :



● 126 ————— Concours ESIM

1. En basse fréquence, la bobine se comporte comme un fil électrique et le condensateur comme un interrupteur ouvert, tandis que ces comportements s'inversent en haute fréquence.



Ainsi :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [s(t)] = e(t) \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \infty} [s(t)] = 0$$

ce qui montre que ce filtre peut jouer le rôle d'un filtre passe-bas.

2. Soit \underline{Z}_{RC} l'impédance équivalente à la résistance en parallèle avec le condensateur :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{RC}} = C\omega j + \frac{1}{R}$$

La loi du diviseur de tension permet d'obtenir directement l'expression de la fonction de transfert de ce filtre :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} &= \frac{\underline{Z}_{RC}}{\underline{Z}_{RC} + L\omega j} = \frac{1}{1 + L\omega j \times \frac{1}{\underline{Z}_{RC}}} \\ &= \frac{1}{1 + L\omega j \times \left(C\omega j + \frac{1}{R}\right)} \\ &= \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j \frac{L\omega}{R}} \end{aligned}$$

Or, d'une part l'énoncé définit le coefficient ω_0 par :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Rightarrow LC\omega^2 = \frac{\omega^2}{\omega_0^2} = x^2$$

et d'autre part :

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} \Rightarrow \frac{L}{R} = \frac{Q_0}{\omega_0} \Rightarrow \frac{L\omega}{R} = Q_0 \frac{\omega}{\omega_0} = Q_0 x$$

et c'est pourquoi :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - x^2 + j Q_0 x}$$

3. (a) Le module de $\underline{H}(j\omega)$:

$$H = \frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + Q_0^2 x^2}} = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$$

présente un *maximum* lorsque la fonction $f(x) = (1 - x^2)^2 + Q_0^2 x^2$ présente un *minimum*, c'est-à-dire pour une valeur x_1 non nulle (car, en régime sinusoïdal, $\omega \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$) telle que :

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_1} = 0 \Rightarrow -4x_1 (1 - x_1^2) + 2Q_0^2 x_1 = 0 \Rightarrow 4x_1 \left(x_1^2 - 1 + \frac{Q_0^2}{2} \right) = 0$$

c'est-à-dire :

$$x_1^2 = 1 - \frac{Q_0^2}{2} \quad (46)$$

Or, cette équation n'admet de solution réelle qu'à condition que :

$$1 - \frac{Q_0^2}{2} > 0 \Rightarrow Q_0^2 < 2 \Rightarrow Q_0 < \sqrt{2}$$

à défaut de quoi la courbe représentative de $H(x)$ n'admet d'*extremum* que pour $x_1 = 0$.

(b) De ce qui précède, il ressort que H peut admettre un *maximum* H_{\max} pour une pulsation ω_1 telle que :

$$x_1^2 = \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} \right)^2 = 1 - \frac{Q_0^2}{2} \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{Q_0^2}{2}}$$

Dans ce cas, le résultat (46) : $x_1^2 = 1 - \frac{Q_0^2}{2} \Rightarrow 1 - x_1^2 = \frac{Q_0^2}{2}$ montre que :

$$f(x_1) = (1 - x_1^2)^2 + Q_0^2 x_1^2 = \frac{Q_0^4}{4} + Q_0^2 \left(1 - \frac{Q_0^2}{2} \right) = Q_0^2 - \frac{Q_0^4}{4}$$

et c'est pourquoi H_{\max} vaut :

$$H_{\max} = \frac{1}{\sqrt{f(x_1)}} = \left(Q_0^2 - \frac{Q_0^4}{4} \right)^{-1/2}$$

(c) En remarquant que :

$$f(x_1) = Q_0^2 - \frac{Q_0^4}{4} = 1 - 1 + 2 \times \frac{Q_0^2}{2} - \left(\frac{Q_0^2}{2} \right)^2 = 1 - \left(1 - \frac{Q_0^2}{2} \right)^2 \leq 1$$

on obtient tout de suite que :

$$H_{\max} = \frac{1}{\sqrt{f(x_1)}} \geq 1 \Rightarrow G_{\max} = 20 \log(H_{\max}) \geq 0$$

(d) La définition du gain en décibels :

$$\begin{aligned} G &= 20 \log H = -10 \log \left[(1 - x^2)^2 + Q_0^2 x^2 \right] \\ &= -10 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + Q_0^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right] \end{aligned}$$

conduit à : $\lim_{\omega \ll \omega_0} [G(\omega)] = 0$ et :

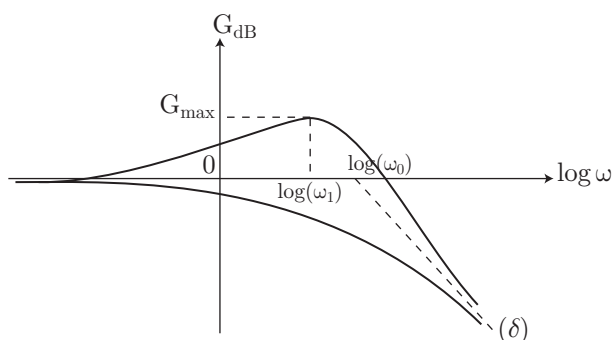
$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow H(\omega) \simeq -10 \log \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 \Rightarrow G(\omega) \simeq 40 \log \omega_0 - 40 \log \omega$$

Aussi, la courbe décrivant $G(\omega)$ admet une asymptote horizontale pour $\log \omega \ll \log \omega_0$, et une asymptote oblique (δ) pour $\log \omega \gg \log \omega_0$, qui passe par le point $G \begin{pmatrix} \log \omega_0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quant à la valeur de Q_0 , elle détermine l'existence d'un *maximum* pour $G(\omega)$:

- lorsque $Q_0 > \sqrt{2}$, ce *maximum* n'existe pas ;
- lorsque $Q_0 < \sqrt{2}$, ce *maximum* existe pour :

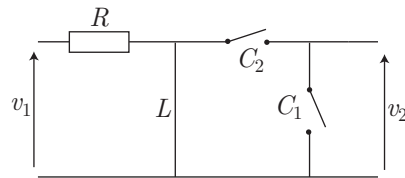
$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{Q_0^2}{2}} < \omega_0 \Rightarrow \log \omega_1 < \log \omega_0$$

et il prend la valeur G_{\max} dont on a démontré précédemment qu'elle est positive.



● 127 ————— Concours ENSI

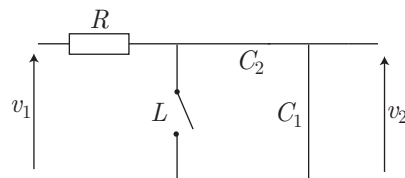
1. Lorsque la pulsation ω tend vers zéro, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts et la bobine comme un fil électrique ; le montage équivaut à :



Il s'ensuit que :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [v_2(t)] = 0$$

En revanche, lorsque ω devient infini, les condensateurs équivalent à des fils électriques et la bobine à un interrupteur ouvert ; le montage s'apparente à :

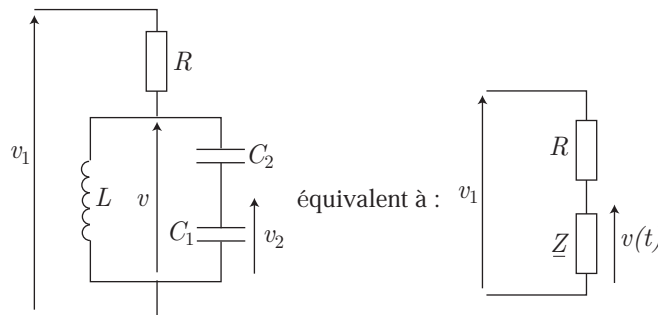


ce qui signifie que :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} [v_2(t)] = 0$$

Les valeurs de ces deux limites suggèrent que le filtre se comporte comme un filtre passe-bande.

2. Décomposons le schéma du montage de la manière suivante :



à condition de poser :

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{L\omega j} + \frac{1}{\frac{1}{C_1\omega j} + \frac{1}{C_2\omega j}}$$

Deux diviseurs de tension apparaissent ainsi, tels que :

$$v_2 = \frac{\frac{1}{C_1\omega j}}{\frac{1}{C_1\omega j} + \frac{1}{C_2\omega j}} v \Rightarrow \frac{v_2}{v} = \frac{1}{C_1\omega j \left(\frac{1}{C_1\omega j} + \frac{1}{C_2\omega j} \right)}$$

et :

$$\underline{v} = \frac{Z}{Z + R} v_1 \Rightarrow \frac{v}{v_1} = \frac{1}{1 + R \times \frac{1}{Z}}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \underline{T}(\omega j) &= \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2}{v} \times \frac{v}{v_1} \\ &= \frac{1}{C_1 \omega j \left(\frac{1}{C_1 \omega j} + \frac{1}{C_2 \omega j} \right)} \times \frac{1}{1 + \frac{R}{L \omega j} + \frac{R}{\frac{1}{C_1 \omega j} + \frac{1}{C_2 \omega j}}} \\ &= \frac{1}{C_1 \omega j} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{C_1 \omega j} + \frac{1}{C_2 \omega j} \right) \left(1 + \frac{R}{L \omega j} \right) + R} \\ &= \frac{1}{\left(1 + \frac{C_1}{C_2} \right) \left(1 + \frac{R}{L \omega j} \right) + RC_1 \omega j} \end{aligned}$$

soit, en posant :

$$a = 1 + \frac{C_1}{C_2} \quad b = \frac{LC_2}{R(C_1 + C_2)} \quad d = RC_1$$

la fonction de transfert du montage se présente sous la forme :

$$\underline{T}(\omega j) = \frac{1}{a + \frac{1}{b \omega j} + d \omega j}$$

3. L'expression de $\underline{T}(\omega j)$ révèle que :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [\underline{T}(\omega j)] = \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\underline{T}(\omega j)] = 0$$

ce qui confirme le résultat de la première question : ce circuit se comporte comme un filtre passe-bande.

En outre :

$$\underline{T}(\omega j) = \frac{1}{a + \frac{1}{b \omega j} + d \omega j} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + j \left(\frac{d}{a} \omega - \frac{1}{ab \omega} \right)}$$

c'est-à-dire, avec :

$$G_{\max} = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_r} \Rightarrow \omega = x \omega_r$$

cette expression devient :

$$\underline{T}(\omega j) = \frac{G_{\max}}{1 + j \left(x \frac{\omega_r d}{a} - \frac{1}{x} \times \frac{1}{ab\omega_r} \right)}$$

On cherche alors ω_r et Q tels que :

$$\begin{cases} Q = \frac{\omega_r d}{a} \\ Q = \frac{1}{ab\omega_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = \omega_r \times \frac{d}{a} \\ \frac{\omega_r d}{a} = \frac{1}{ab\omega_r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Q = \omega_r \times \frac{d}{a} \\ \omega_r^2 = \frac{1}{bd} \end{cases}$$

de sorte que :

$$\begin{cases} \omega_r = \frac{1}{\sqrt{bd}} \\ Q = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{d}{b}} \end{cases} \Rightarrow \underline{T}(\omega j) = \frac{G_{\max}}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$$

4. De l'expression de $\underline{T}(\omega j)$ découle celle du gain en décibels :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{T}(\omega j)| = 20 \log \left[\frac{G_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}} \right]$$

$$\Rightarrow G_{\text{dB}} = 20 \log G_{\max} - 10 \log \left[1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$$

Plusieurs cas peuvent ainsi être distingués :

- Si $x = 1$, c'est-à-dire lorsque $\log x = 0$:

$$G_{\text{dB}} = 10 \log G_{\max} = 20 \log \left(\frac{1}{2} \right) \Rightarrow G_{\max} = -6 \text{ dB}$$

- Si x tend vers l'infini (ou encore $\log x \rightarrow \infty$) :

$$\begin{aligned} x \gg \frac{1}{x} &\Rightarrow G_{\text{dB}} \simeq 20 \log G_{\max} - 10 \log (Q^2 x^2) \\ &= 20 \log \left(\frac{G_{\max}}{Q} \right) - 20 \log x \\ &= 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 20 \log x \\ &= -3 \text{ dB} - 20 \log x \end{aligned}$$

La courbe représentative de $G_{\text{dB}} = f(x)$ est une droite de pente -20 (décibels par décade), et qui passe par le point $\begin{pmatrix} \log x = 0 \\ G_{\text{dB}} = -3 \text{ dB} \end{pmatrix}$.

- Si x tend vers zéro (ce qui signifie aussi que $\log x$ tend vers $-\infty$) :

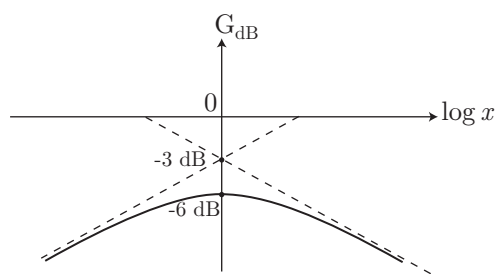
$$\frac{1}{x} \gg x \Rightarrow \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \simeq \frac{1}{x^2} \Rightarrow 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \simeq 1 + \frac{Q^2}{x^2} \simeq Q^2 \times \frac{1}{x^2}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} G_{\text{dB}} &\simeq 20 \log G_{\text{max}} - 10 \log \left(Q^2 \times \frac{1}{x^2}\right) = 20 \log \left(\frac{G_{\text{max}}}{Q}\right) - 10 \log \left(\frac{1}{x^2}\right) \\ &= G_{\text{dB}} = -3 \text{ dB} + 20 \log x \end{aligned}$$

Cette relation représente l'équation d'une droite de pente +20 (décibels par décade) et qui passe par le point $\left(\begin{array}{l} \log x = 0 \\ G_{\text{dB}} = -3 \text{ dB} \end{array}\right)$.

De cette étude ressort le diagramme de Bode asymptotique du montage :

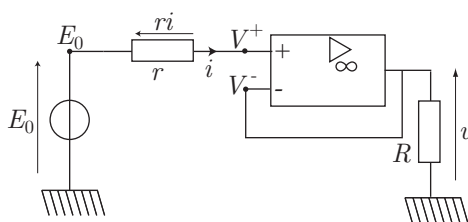


● 128 ————— Lycée Jacques Decourt, Paris

1. Dans le montage proposé, la loi du diviseur de tension révèle que :

$$u = \frac{R}{r+R} E_0 \Rightarrow u < E_0$$

2. Soient V^+ et V^- les potentiels des entrées de l'amplificateur opérationnel.



Le courant i qui circule à travers la résistance r vérifie : $E_0 - V^+ = r i$, mais ce courant est aussi celui qui entre dans l'A.O. ; il est par conséquent nul :

$$i = 0 \Rightarrow V^+ = E_0$$

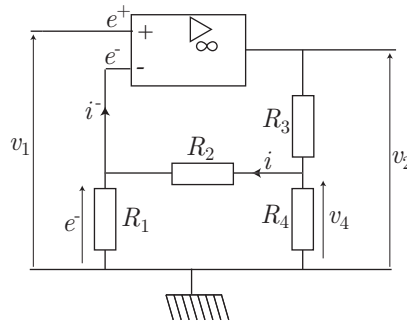
Quant à la linéarité de l'A.O., elle impose : $V^- = V^+ = E_0$ en raison de quoi :

$$u = V^- \Rightarrow u = E_0$$

Ce montage suiveur permet ainsi de stabiliser la tension u d'un générateur (de résistance interne r) à une valeur E_0 (force électromotrice) indépendante de la charge R ; finalement, ce montage transforme un générateur en une source de tension.

● 129 ———— Lycée Jeanne d'Albret, Saint-Germain-en-Laye

Soient i le courant qui circule dans la résistance R_2 , v_4 la tension aux bornes de la résistance R_4 et $i^- = 0$ le courant qui pénètre dans l'entrée inverseuse de l'A.O.



L'association des résistances R_3 , R_4 équivaut à un diviseur de tension dont la loi de fonctionnement s'écrit :

$$v_4 = \frac{R_4 v_2}{R_3 + R_4} - \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} i \Rightarrow v_2 = \frac{R_3 + R_4}{R_4} v_4 + R_3 i$$

Or, le courant i^- étant nul, il s'ensuit que le courant i est également celui qui traverse la résistance R_1 aux bornes de laquelle règne la tension :

$$e^- = R_1 i \Rightarrow i = \frac{e^-}{R_1} \Rightarrow v_2 = \frac{R_3 + R_4}{R_4} v_4 + \frac{R_3}{R_1} e^- \quad (47)$$

Enfin, non seulement les tensions e^- et $e^+ = v_1$ sont égales :

$$e^- = e^+ \Rightarrow e^- = v_1$$

mais de surcroît, l'association des résistances R_1 et R_2 constitue un deuxième pont diviseur de tension qui impose :

$$e^- = \frac{R_1 v_4}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i^- \Rightarrow v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_4 \Rightarrow v_4 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} v_1$$

Par suite, l'identité (47) devient :

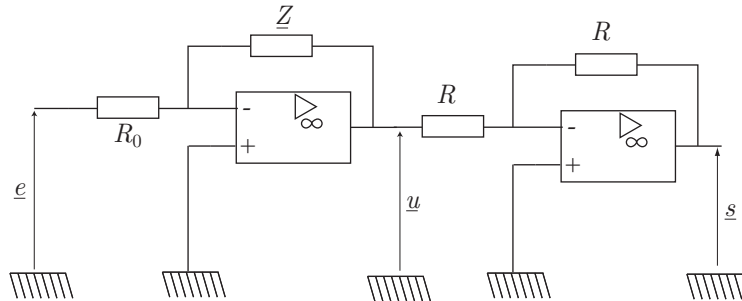
$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)}{R_1 R_4} v_1 + \frac{R_3}{R_1} v_1 \\ \Rightarrow A_v = \frac{v_2}{v_1} &= \frac{(R_3 + R_4)(R_1 + R_2)}{R_1 R_4} + \frac{R_3}{R_1} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$A_v = \frac{11 \cdot 10^3 \times 110 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3 \times 10^3} + \frac{10 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^3} \Rightarrow A_v = 122$$

● **130** ————— **Concours de la filière PT**

Soit u la tension intermédiaire entre les deux amplificateurs opérationnels :



Les deux montages apparaissent ainsi, avec pour fonctions de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{u} = -\frac{R}{R} = -1 \text{ et } \underline{H}'(j\omega) = \frac{u}{e} = -\frac{Z}{R_0}$$

Par suite, la fonction de transfert de la totalité du circuit vaut :

$$\underline{H}_i(j\omega) = \frac{s}{e} = \underline{H}(j\omega) \times \underline{H}'(j\omega) = \frac{Z}{R_0} \Rightarrow Z = R_0 \times \underline{H}_i(j\omega)$$

- Pour $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{H_0}{j\omega}$:

$$\underline{Z}_1 = \frac{R_0 H_0}{j\omega}$$

ce qui correspond à l'impédance d'un condensateur de capacité :

$$C = \frac{1}{R_0 H_0} \Rightarrow \underline{Z}_1 = \frac{1}{C\omega j}$$

- Pour $\underline{H}_2(j\omega) = H_0 \times \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega}$:

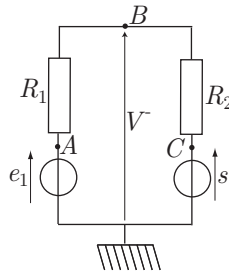
$$\underline{Z}_2 = R_0 H_0 \times \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega} = \frac{R_0 H_0}{j\omega} + R_0 H_0 \tau$$

Une telle impédance peut être réalisée en associant en série un condensateur de capacité $C = \frac{1}{R_0 H_0}$ avec une résistance $r = R_0 H_0 \tau$:

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{C\omega j} + r \text{ pour } C = \frac{1}{R_0 H_0} \text{ et } r = R_0 H_0 \tau$$

● **131** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

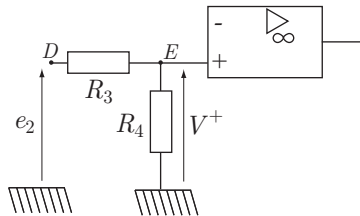
1. Pour distinguer, dans le montage équivalent, les différents dipôles, il convient d'y faire apparaître les points A, B, C, D, E . On remarque ainsi qu'entre la masse et le point A se trouve la source de tension e_1 et qu'entre les points B et C se situe une résistance R_2 :



Le théorème de Millman fournit alors directement :

$$V^- = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{s}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \Rightarrow V^- = \frac{R_2 e_1 + R_1 s}{R_1 + R_2} \quad (48)$$

2. À l'entrée non inverseuse de l'A.O. se trouve un diviseur de tension :



dont la loi donne immédiatement :

$$V^+ = \frac{R_4}{R_3 + R_4} e_2 \quad (49)$$

3. La linéarité du fonctionnement de l'A.O. est conditionnée par l'identité des potentiels V^+ et V^- , au demeurant exprimés par les résultats (48) et (49) :

$$V^- = V^+ \Rightarrow \frac{R_2 e_1 + R_1 s}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} e_2 \Rightarrow s = \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \times \frac{R_4}{R_1} e_2 - \frac{R_2}{R_1} e_1$$

4. Pour que s s'écrive : $s = \alpha (e_2 - e_1)$, il suffit de choisir :

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \times \frac{R_4}{R_1} \Rightarrow R_2 R_3 + R_2 R_4 = R_1 R_4 + R_2 R_4$$

c'est-à-dire :

$$R_2 R_3 = R_1 R_4$$

5. En outre, la condition $\alpha = 1$ se traduit par :

$$\alpha = \frac{R_2}{R_1} = 1 \Rightarrow R_2 = R_1$$

de sorte que :

$$R_2 R_3 = R_1 R_4 \Rightarrow R_3 = R_4$$

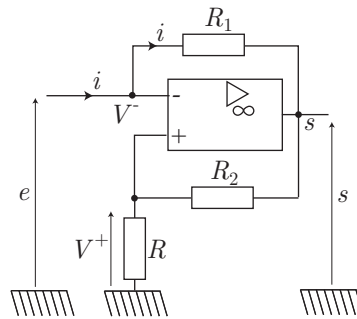
On peut dès lors s'assurer que :

$$\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_3 + R_4} \times \frac{R_4}{R_1} = \frac{2R_1}{2R_4} \times \frac{R_4}{R_1} = 1$$

Un montage qui réalise la différence de e_1 et e_2 : $s = e_1 - e_2$ est appelé *différenciateur*.

● 132 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. Soient $V^- = e$ et V^+ les potentiels des entrées de l'A.O., à travers lesquelles ne circule aucun courant.



La différence de potentiel aux bornes de la résistance R_1 vérifie la loi d'Ohm :

$$V^- - s = R_1 i \Rightarrow e - s = R_1 i \quad (50)$$

tandis que le potentiel V^+ est donné par la loi du diviseur de tension associé aux résistances R et R_2 :

$$V^+ = s \times \frac{R}{R + R_2} \Rightarrow s = \frac{R + R_2}{R} V^+ = \left(1 + \frac{R_2}{R}\right) V^+$$

Enfin, la linéarité du fonctionnement de l'A.O. a pour conséquence l'identité de ses potentiels d'entrée :

$$V^+ = V^- \Rightarrow V^+ = e \Rightarrow s = \left(1 + \frac{R_2}{R}\right) e$$

de sorte que l'équation (50) devient :

$$e - \left(1 + \frac{R_2}{R}\right) e = R_1 i \Rightarrow -\frac{R_2}{R} e = R_1 i \Rightarrow e = -r \times i \text{ avec } r = R \times \frac{R_1}{R_2}$$

2. (a) Dans le montage proposé, les résistances R_1 et R_2 prennent la même valeur R' , si bien que :

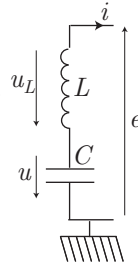
$$e = -r \times i \text{ avec } r = R \Rightarrow e = -R \times i$$

Quant à la loi des mailles appliquée à l'entrée de l'A.O., elle révèle que :

$$u_L + u + e = 0$$

avec $u_L = L \frac{di}{dt}$ et $i = C \frac{du}{dt}$. Il s'ensuit que :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + r_0C \frac{du}{dt} + u + e = 0 \text{ où } e = -Ri = -RC \frac{du}{dt}$$



Finalement, u vérifie l'équation différentielle :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + C(r_0 - R) \frac{du}{dt} + u = 0$$

(b) Lorsque $R = r_0$, cette équation devient :

$$LC \frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \Rightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{LC} u = 0$$

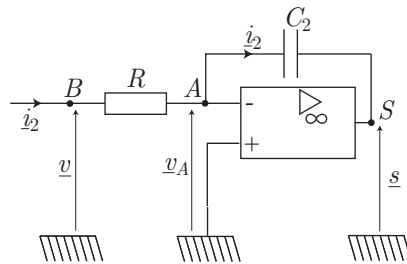
dont la solution générale :

$$u = A \cos(\omega t + \phi) \text{ avec } \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

montre que ce circuit réalise un oscillateur sinusoïdal, de pulsation ω .

● **133** ————— **Lycée Saint-Louis, Paris**

1. Aucun courant ne traversant l'entrée de l'A.O., dans la branche (BAS), le courant i_2 à travers R est également le courant qui traverse C_2 .



Si v_A désigne le potentiel de l'entrée inverseuse de l'A.O., la remarque précédente permet de poser :

$$v_{BA} = R i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{v - v_A}{R}$$

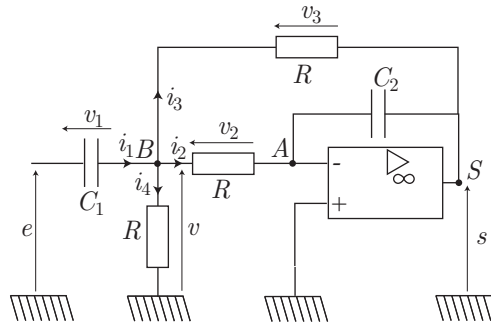
et :

$$v_{AS} = \frac{1}{C_2 \omega j} i_2 \Rightarrow v_A - s = \frac{1}{RC_2 \omega j} (v - v_A)$$

Or, la linéarité de l'A.O. impose l'identité des potentiels d'entrée sur l'A.O., et l'entrée non inverseuse étant reliée à la masse du montage, cette identité implique que :

$$\underline{v}_A = 0 \Rightarrow -\underline{s} = \frac{1}{RC_2\omega j} \underline{v} \Rightarrow \underline{v} = -RC_2\omega j \underline{s} \quad (51)$$

2. Soit i_1 le courant qui traverse le condensateur C_1 et soient i_2, i_3, i_4 ceux qui traversent les trois résistances R :



Les trois tensions $v_1 = e - v$, $v_2 = v - v_A = v$, $v_3 = v - s$ et v s'expriment en fonction des impédances des dipôles traversés par les courants i_1, i_2, i_3 et i_4 :

$$v_1 = \frac{1}{C_1\omega j} i_1 \Rightarrow i_1 = C_1\omega j (e - v)$$

$$v_2 = R i_2 \Rightarrow i_2 = \frac{v}{R}$$

$$v_3 = R i_3 \Rightarrow i_3 = \frac{v - s}{R}$$

$$v = R i_4 \Rightarrow i_4 = \frac{v}{R}$$

tandis que la loi des nœuds appliquée en B impose :

$$\begin{aligned} i_1 = i_2 + i_3 + i_4 &\Rightarrow C_1\omega j (e - v) = \frac{3v}{R} - \frac{s}{R} \\ &\Rightarrow RC_1\omega j (e - v) = 3v - s \end{aligned}$$

3. L'identité (51) transforme cette équation :

$$\begin{aligned} RC_1\omega j e &= (3 + RC_1\omega j) v - s \text{ où } v = -RC_2\omega j s \\ &= -\left[3RC_2\omega j + R^2C_1C_2 (\omega j)^2 + 1\right] s \end{aligned}$$

d'où découle l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = -\frac{RC_1\omega j}{3RC_2\omega j + R^2C_1C_2 (\omega j)^2 + 1}$$

soit, après simplification par $RC_2\omega j$:

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{\frac{C_1}{C_2}}{3 + RC_1\omega j + \frac{1}{RC_2\omega j}}$$

On notera dorénavant : $H_0 = \frac{C_1}{C_2}$, tandis que :

$$\begin{cases} RC_1 = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{1}{RC_2} = Q\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{R^2 C_1 C_2} \\ Q = \omega_0 RC_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \\ Q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} \end{cases}$$

de manière à présenter cette fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(j\omega) = -\frac{H_0}{3 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

4. Le module H de $\underline{H}(j\omega)$:

$$H = H_0 \left[9 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

permet d'exprimer le gain en décibels de ce montage :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log H = 20 \log H_0 - 10 \log \left[9 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]$$

dont la valeur *maximum* G_{max} est obtenue lorsque le dernier terme est *minimum*, c'est-à-dire lorsque :

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_0}{\omega} \Rightarrow \omega = \omega_0 \Rightarrow G_{\text{max}} = 20 \log H_0 - 10 \log 9$$

En outre :

- lorsque $\omega \gg \omega_0$:

$$\begin{aligned} 9 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 &\simeq Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \\ \Rightarrow G_{\text{dB}} &\simeq 20 \log H_0 + 20 \log \omega_0 - 20 \log \omega - 20 \log Q \end{aligned}$$

La représentation graphique de $G_{\text{dB}} = f(\log \omega)$ s'identifie alors à une droite Δ_1 de pente -20 dB par décade et passant par le point

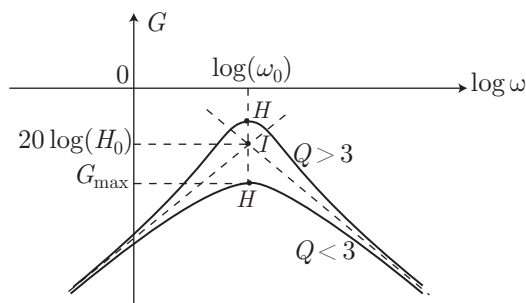
$$I \left(\begin{array}{c} \log \omega_0 \\ 20 \log H_0 - 20 \log Q \end{array} \right).$$

- lorsque $\omega \ll \omega_0$:

$$9 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \simeq Q^2 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2$$

$$\Rightarrow G_{\text{dB}} \simeq 20 \log H_0 - 20 \log \omega_0 + 20 \log \omega - 20 \log Q$$

Cette loi montre que la courbe $G_{\text{dB}} = f(\log \omega)$ admet alors pour asymptote la droite Δ_2 de pente $+20$ dB par décade et qui passe également par le point I . Enfin, lorsque $\omega = \omega_0$, $G_{\text{dB}} = G_{\text{max}}$, ce qui signifie aussi que la courbe $G_{\text{dB}} = f(\log \omega)$ passe par le point $H \left(\begin{matrix} \log \omega_0 \\ 20 \log H_0 - 10 \log 9 \end{matrix} \right)$ situé en dessous du point I si $Q < 3$ ou situé au dessus pour $Q > 3$. Par conséquent, le diagramme de Bode présente l'allure suivante :



Ce diagramme révèle la nature du montage ; il s'agit d'un filtre passe-bande.

5. Notons $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, de manière à présenter G_{dB} sous la forme :

$$G_{\text{dB}} = 20 \log H_0 - 10 \log \left[9 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$$

Les pulsations de coupure ω_1 et ω_2 , auxquelles sont associés $x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ et $x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$, sont solutions de l'équation :

$$G_{\text{dB}} = G_{\text{max}} - 20 \text{ dB} \Rightarrow 20 \log H_0 - 10 \log \left[9 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right]$$

$$= 20 \log H_0 - 10 \log 9 - 10 \log 2$$

$$\Rightarrow 10 \log \left[9 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 \right] = 10 \log (2 \times 9)$$

ou encore :

$$Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 9$$

Définissons alors une fonction : $f(x) = Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 - 9$, dont x_1 et x_2 sont solutions des équations $f(x_1) = 0$ et $f(x_2) = 0$. Notamment, puisque x_2 est solution

de cette équation :

$$f(x_2) = 0 \Rightarrow Q^2 \left(x_2 - \frac{1}{x_2} \right)^2 - 9 = 0$$

on constate que $\frac{1}{x_2}$ l'est aussi :

$$f\left(\frac{1}{x_2}\right) = Q^2 \left(\frac{1}{x_2} - x_2 \right)^2 - 9 = 0$$

C'est pourquoi $f\left(\frac{1}{x_2}\right) = 0$ et $f(x_2) = 0$ permettent d'affirmer que $x_1 = \frac{1}{x_2}$ est la deuxième solution cherchée pour l'équation :

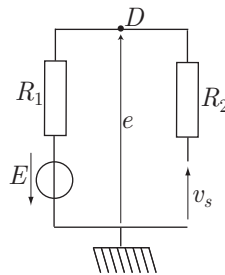
$$Q^2 \left(x_2 - \frac{1}{x_2} \right)^2 = 9 \Rightarrow (x_2 - x_1)^2 = \frac{9}{Q^2}$$

et, notamment, si $x_2 > x_1$:

$$x_2 - x_1 = \frac{3}{Q} \Rightarrow \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{3}{Q} \Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{3\omega_0}{Q}$$

● 134 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. La linéarité de l'A.O. met le point D au même potentiel e que l'entrée non inverseuse, auquel cas le montage proposé par l'énoncé équivaut à :



Le théorème de Millman fournit alors directement :

$$e = \frac{\frac{v_s}{R_2} - \frac{E}{R_1}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}} = \frac{R_1 v_s - R_2 E}{R_1 + R_2} \Rightarrow (R_1 + R_2) e = R_1 v_s - R_2 E \quad (52)$$

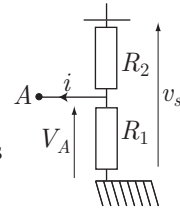
$$\Rightarrow v_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) e + \frac{R_2}{R_1} E \quad (53)$$

2. (a) Le point B est porté au potentiel $V_B = e$, tandis que le point A présente un potentiel V_A qui s'identifie à la tension aux bornes de la résistance R_1 verticale.

La loi du diviseur de tension impose :

$$V_A = \frac{R_1 v_s}{R_1 + R_2} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i$$

Notamment, $i = 0$ lorsque les points A et B ne sont pas connectés :



$$V_A = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left[\frac{R_1 + R_2}{R_1} e + \frac{R_2}{R_1} E \right] \Rightarrow V_A = e + \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

Par suite, la tension $u_{AB} = V_A - V_B$ vaut :

$$u_{AB} = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2}$$

(b) D'une manière générale, lorsqu'un courant i circule entre les points A et B :

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1} e + \frac{R_2}{R_1} E \right) - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i \\ &= e + \frac{R_2 E - R_1 R_2 i}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

et, plus particulièrement, lorsque les points A et B sont reliés par un fil électrique :

$$V_B = V_A \Rightarrow e = e + \frac{R_2 E - R_1 R_2 i}{R_1 + R_2} \Rightarrow i = \frac{E}{R_1}$$

3. (a) Le nouveau montage proposé présente des similitudes avec le précédent (les points A et B sont reliés par un fil électrique) à condition de remplacer la tension e par la tension u . C'est pourquoi :

$$i = \frac{E}{R_1}$$

(b) Le courant i ne pouvant pénétrer dans l'entrée non inverseuse de l'A.O., il traverse intégralement le condensateur dont la tension u vérifie par conséquent :

$$i = C \frac{du}{dt} \Rightarrow du = \frac{i}{C} dt = \frac{E}{R_1 C} dt$$

Or, l'interrupteur K est ouvert à la date $t = 0$, à laquelle le condensateur est alors déchargé ($u = 0$) :

$$\int_0^{u(t)} du = \frac{E}{R_1 C} \int_0^t dt \Rightarrow u(t) = \frac{E}{R_1 C} \times t$$

(c) Compte tenu de ce qui précède, et de l'identité (53), la tension v_s est donnée

par :

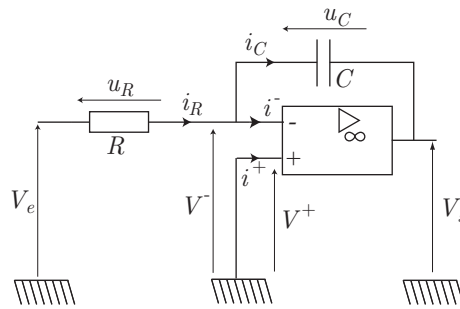
$$v_s(t) = \frac{R_2 E}{R_1} + \frac{R_1 + R_2}{R_1} \times u(t) \Rightarrow v_s(t) = \frac{R_2 E}{R_1} + \frac{(R_1 + R_2) E}{R_1^2 C} \times t$$

$$\Rightarrow \frac{dv_s}{dt} = \frac{R_1 + R_2}{R_1^2 C} \times E$$

On constate alors que $\frac{dv_s}{dt}$ est constant et proportionnel à E : cette tension commande alors la rapidité avec laquelle la tension $v_s(t)$ s'accroît.

● 135 ————— Lycée Henri IV, Paris

1. (a) Le fonctionnement de l'A.O. idéal en régime linéaire impose l'identité des potentiels V^+ et V^- aux bornes de l'A.O. ainsi que l'annulation des courants i^- et i^+ d'entrée.



Soient i_R et i_C les courants qui traversent la résistance et le condensateur, aux bornes desquels apparaissent les tensions u_R et u_C telles que :

$$u_R = V_e - V^- = R i_R \text{ et } i_C = C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(V^- - V_s)}{dt}$$

L'hypothèse du régime linéaire impose, du reste :

$$V^- = V^+ = 0 \Rightarrow \begin{cases} V_e = R i_R \\ i_C = -C \frac{dV_s}{dt} \end{cases}$$

Enfin, les courants i^- et i^+ étant nuls :

$$i_R = i^- + i_C = i_C \Rightarrow \frac{V_e}{R} = -C \frac{dV_s}{dt} \Rightarrow \frac{dV_s}{dt} = -\frac{1}{RC} V_e$$

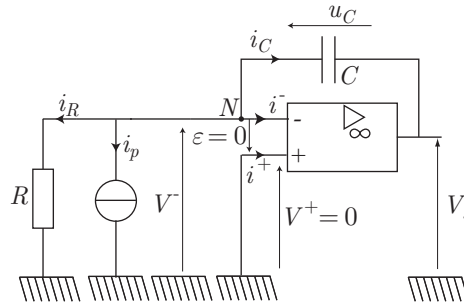
- (b) Supposons que V_e possède une composante continue V_0 et une composante $V_1(t)$ variable dans le temps. En notant V_{s0} la valeur de V_s à la date $t = 0$,

l'équation différentielle précédente devient :

$$\begin{aligned} dV_s &= -\frac{1}{RC} V_e(t) dt \Rightarrow V_s(t) - V_{s0} = -\frac{1}{RC} \int_0^t V_e(t) dt \\ &\Rightarrow V_s(t) = V_{s0} - \frac{1}{RC} \left[\int_0^t V_0 dt + \int_0^t V_1(t) dt \right] \\ &\Rightarrow V_s(t) = V_{s0} - \frac{V_0}{RC} t - \frac{1}{RC} \int_0^t V_1(t) dt \end{aligned}$$

Cette relation montre que $V_s(t)$ est amené à atteindre une de ses tensions de saturation tôt ou tard car $V_{s0} - \frac{V_0}{RC} t$ varie linéairement dans le temps ; l'A.O. cesse vite de fonctionner en régime linéaire pour atteindre la saturation.

2. (a) Considérons le montage dans lequel existe un courant de polarisation i_p et où $V_e = 0$ revient à connecter la résistance R directement à la masse :



La source de courant i_p et la résistance R se trouvant en parallèle, leur tension V^- est commune : $V^- = R i_R$. Quant à la relation $\varepsilon = V^- - V^+ = 0$, elle révèle que :

$$V^- = V^+ = 0 \Rightarrow i_R = \frac{V^-}{R} = 0$$

Ce faisant, la loi des nœuds, appliquée en N , s'écrit :

$$i^- + i_C + i_p + i_R = 0 \Rightarrow i_C + i_p = 0 \text{ car } i^- = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} i_C &= C \frac{du_C}{dt} = C \frac{d(V^- - V_s)}{dt} = -C \frac{dV_s}{dt} \\ &\Rightarrow i_p = -i_C = C \frac{dV_s}{dt} \end{aligned}$$

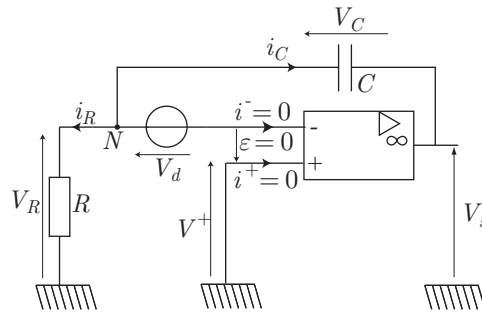
En considérant i_p constant dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$, au cours duquel V_s passe de $V_s(t)$ à $V_s(t + \Delta t) = V_s(t) + \Delta V_s$, cette équation différentielle conduit à :

$$\begin{aligned} C dV_s = i_p dt &\Rightarrow C \int_{V_s(t)}^{V_s(t)+\Delta V_s} dV_s = i_p \int_t^{t+\Delta t} dt \Rightarrow C \Delta V_s = i_p \Delta t \\ &\Rightarrow i_p = C \frac{\Delta V_s}{\Delta t} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$i_p = 0,1 \times 10^{-6} \times \frac{10}{2,5} \Rightarrow i_p = 4 \times 10^{-7} \text{ A} = 400 \text{ nA}$$

- (b) En considérant la seule présence d'une tension de décalage V_d , le montage intégrateur équivaut à :



La loi des mailles impliquant la résistance R , la source V_d et l'A.O. impose :

$$\begin{aligned} V_R - V_d + \varepsilon - V^+ &= 0 \Rightarrow V_R = V_d + V^+ - \varepsilon \\ &\Rightarrow V_R = V_d \text{ car } V^+ = 0 \text{ et } \varepsilon = 0 \end{aligned}$$

avec :

$$V_R = R i_R \Rightarrow R i_R = V_d \quad (54)$$

En outre, au nœud N :

$$i_R + i^- + i_C = 0 \Rightarrow i_R = -i_C \text{ car } i^- = 0$$

ce qui donne à l'équation (54) la forme suivante :

$$-R i_C = V_d$$

où : $V_C = V_R - V_s = V_d - V_s \Rightarrow \frac{dV_C}{dt} = -\frac{dV_s}{dt}$ si V_s est constant. Par suite :

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt} \Rightarrow -RC \frac{dV_C}{dt} = V_d \Rightarrow RC \frac{dV_s}{dt} = V_d$$

À nouveau, en considérant que V_d demeure constant pendant la période Δt , cette équation devient :

$$\begin{aligned} RC dV_s = V_d dt &\Rightarrow RC \int_{V_s(t)}^{V_s(t)+\Delta t} dV_s = V_d \int_t^{t+\Delta t} dt \\ &\Rightarrow RC \Delta V_s = V_d \Delta t \Rightarrow V_d = RC \frac{\Delta V_s}{\Delta t} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$V_d = (10 \times 10^3) \times (0,1 \times 10^{-6}) \times \frac{10}{2,5} \Rightarrow V_d = 4 \times 10^{-3} \text{ V} = 4 \text{ mV}$$

- (c) Pour que V_s s'accroisse de 10 V pendant 2,5 s sous le simple effet du courant de dérive, il faudrait que i_p atteigne la valeur de $400 \text{ nA} = 400 \cdot 10^3 \text{ pA}$. Or, le constructeur garantit que $|i_p|$ demeure inférieur à 200 pA, en conséquence de quoi le courant de décalage ne peut être responsable, à lui seul, de la saturation de l'A.O. En revanche, une tension de dérive de 4 mV suffit à provoquer cette saturation et c'est essentiellement ce défaut qui interprète les observations effectuées, car le constructeur tolère que V_d atteigne, voire excède, 4 mV ($|V_d| < 10 \text{ mV}$).

Chapitre 5

Mécanique

5.1 Changements de référentiels

5.1.1 Cinématique

5.1.1.1 Rappels sur les produits vectoriels

Soient deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} , définis dans une base cartésienne $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par leurs coordonnées respectives (A_x, A_y, A_z) et (B_x, B_y, B_z) .

Définition 1 Le produit vectoriel \vec{C} des vecteurs \vec{A} et \vec{B} :

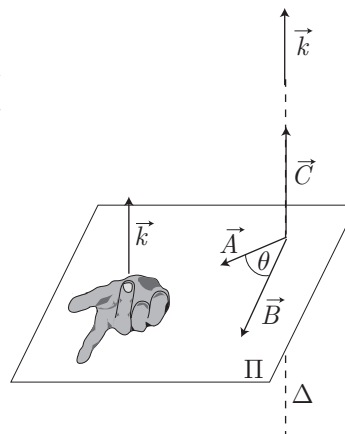
$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$$

s'obtient par :

$$\vec{C} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

On peut montrer que l'algorithme présenté précédemment pour trouver \vec{C} équivaut au suivant :

- Repérer un plan (Π) contenant les vecteurs \vec{A} et \vec{B} , et définir une direction (Δ) perpendiculaire à (Π).
- Positionner les doigts de la main droite : le pouce orienté comme \vec{A} (premier vecteur de $\vec{A} \wedge \vec{B}$) et l'index orienté comme \vec{B} ; le majeur, perpendiculaire à ces deux doigts, définit un sens (\vec{k}) d'orientation de Δ .
- Repérer le plus petit angle θ entre \vec{A} et \vec{B} , puis poser, finalement :



$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| \times \|B\| \times \sin \theta \times \vec{k}$$

△ N'utilisez que la main droite pour réaliser cette opération et remarquez que le produit vectoriel génère toujours un vecteur (perpendiculaire à \vec{A} et \vec{B} simultanément), ce qui impose de définir le vecteur directeur unitaire \vec{k} .

Ces définitions conduisent aux propriétés importantes suivantes :

- $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$ si \vec{A} et \vec{B} sont colinéaires.
- $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$
- Double produit vectoriel :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \times (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \times (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

- Invariance par permutation circulaire des vecteurs dans un produit mixte :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \wedge \vec{A})$$

- Pour les trois vecteurs de la base directe ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$) :

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{e}_2 = \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1$$

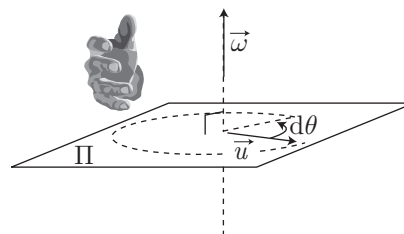
5.1.1.2 Le vecteur rotation

Définition 2

Soit \vec{u} un vecteur de norme constante, qui tourne dans un plan (Π) d'un angle $d\theta$ pendant dt . Le vecteur rotation $\vec{\omega}$ associé à ce mouvement vérifie :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

où $\|\omega\| = \omega = \frac{d\theta}{dt}$ définit la vitesse angulaire de rotation de \vec{u}



La direction de $\vec{\omega}$ est la perpendiculaire à Π , tandis que son sens est fourni par la « règle de la main droite » : faire tourner les doigts de la main droite dans le sens de rotation de \vec{u} ; le pouce tendu impose le sens de $\vec{\omega}$.

5.1.1.3 Rotation d'un référentiel

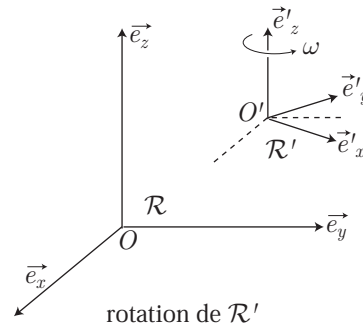
Soit \mathcal{R} un référentiel dont la base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ conserve des directions fixes, et soit \mathcal{R}' un référentiel, de base $(O', \vec{e}'_x, \vec{e}'_y, \vec{e}'_z)$, en mouvement par rapport à \mathcal{R} .

Définition 3 Le référentiel \mathcal{R}' est en rotation par rapport à \mathcal{R} si au moins un de ses trois vecteurs de base effectue un mouvement de rotation.

Remarque – Il n'est pas nécessaire que O' tourne par rapport à \mathcal{R} pour que \mathcal{R}' effectue un mouvement de rotation.

Dans le cas d'une rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} , le mouvement des vecteurs de base $\{\vec{e}'_i\}$ de \mathcal{R}' est caractérisé par un vecteur rotation :

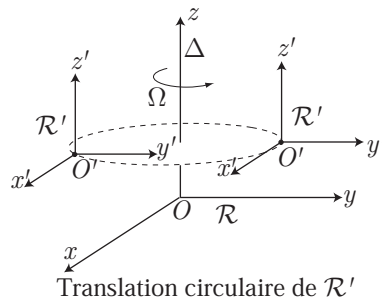
$$\frac{d\vec{e}'_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{e}'_i$$



Définition 4 La rotation est uniforme si la vitesse angulaire demeure constante :

$$\omega = \|\vec{\omega}\| = cte \Leftrightarrow \text{rotation uniforme.}$$

Définition 5 Le référentiel \mathcal{R}' est en translation circulaire autour d'un axe Δ de \mathcal{R} si son origine O' tourne autour de Δ tandis que les axes de \mathcal{R}' conservent une orientation constante par rapport à ceux de \mathcal{R} .

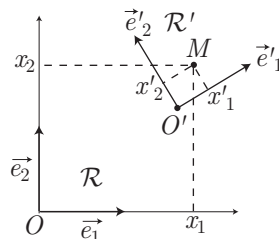


Pour distinguer ces deux types de rotations, on conviendra d'utiliser les notations suivantes :

- la rotation de \mathcal{R}' (donc de ses axes) est caractérisée par un vecteur rotation $\vec{\omega}$;
- la rotation de O' est caractérisée par le vecteur rotation $\vec{\Omega}$.

5.1.1.4 Composition des vitesses

Soit \mathcal{R} un référentiel (supposé fixe) de base $\mathcal{B}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et soit \mathcal{R}' un référentiel en éventuel mouvement par rapport à \mathcal{R} . On note $\mathcal{B}'(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ une base de \mathcal{R}' .



Définition 6 On appelle vitesse absolue \vec{v}_a d'un point M sa vitesse mesurée dans le référentiel \mathcal{R} :

$$\vec{v}_a = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{dx_\alpha}{dt} \vec{e}_\alpha$$

si $\{x_\alpha\}$ désignent les coordonnées de M dans la base \mathcal{B} .

Définition 7 La vitesse relative \vec{v}_r du point M est sa vitesse mesurée par un observateur placé dans le référentiel \mathcal{R}' :

$$\vec{v}_r = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{dx'_\alpha}{dt} \vec{e}'_\alpha$$

où $\{x'_\alpha\}$ sont les coordonnées de M dans la base \mathcal{B}' .

Soit $\vec{\omega}$ le vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} et soit $\vec{r} = \overrightarrow{O'M} = \sum_{\alpha=1}^3 x'_\alpha \vec{e}'_\alpha$ le vecteur position de M , mesuré dans la base \mathcal{B}' ; les vitesses \vec{v}_a et \vec{v}_r sont liées par la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

où \vec{v}_e désigne la vitesse d'entraînement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} :

$$\vec{v}_e = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

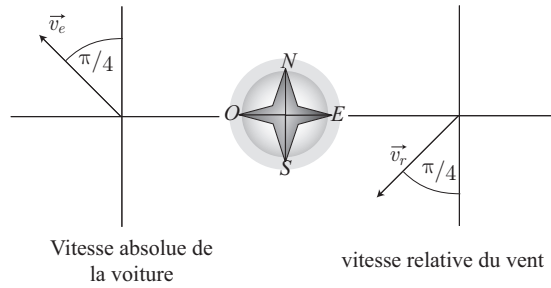
Remarque – La vitesse d'entraînement prend en compte les deux composantes du mouvement de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} : la rotation de ses axes (avec $\vec{\omega}$) et le mouvement du centre O' de \mathcal{B}' .



Un automobiliste roulant vers le N.O. à $52 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ remarque que le vent semble venir du N.E. Quand il roule vers le S.O. à $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, le vent semble venir du N.O. sous un angle de 60° à partir de la direction nord-sud. Trouver la vitesse \vec{v} du vent par rapport au sol.

RÉPONSE Appelons \vec{v} le vecteur vitesse du vent par rapport au sol, \vec{v}_e celui du véhicule par rapport au sol et \vec{v}_r le vecteur vitesse du vent par rapport au véhicule. Les deux situations décrites dans l'énoncé donnent accès aux composantes de ces vecteurs.

- Première situation :



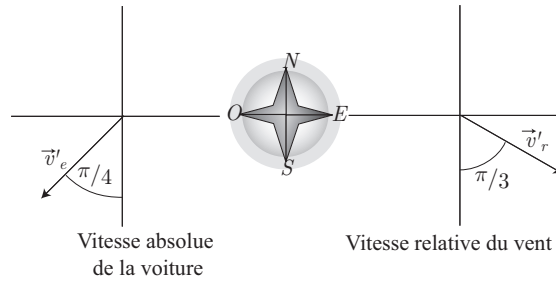
Ainsi :

$$\vec{v}_e = v_e \begin{pmatrix} -\sin(\pi/4) \\ \cos(\pi/4) \end{pmatrix} = v_e \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \text{ avec } v_e = 52 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

et :

$$\vec{v}_r = v_r \begin{pmatrix} -\sin(\pi/4) \\ -\cos(\pi/4) \end{pmatrix} = v_r \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

• Seconde situation :



où :

$$\vec{v}'_e = v'_e \begin{pmatrix} -\sin(\pi/4) \\ -\cos(\pi/4) \end{pmatrix} = v'_e \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \text{ avec : } v'_e = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

et :

$$\vec{v}'_r = v'_r \begin{pmatrix} \sin(\pi/3) \\ -\cos(\pi/3) \end{pmatrix} = v'_r \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

La loi de composition des vitesses impose, dans ces deux cas :

$$\vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r \text{ et } \vec{v} = \vec{v}'_e + \vec{v}'_r$$

à partir de quoi il est possible d'introduire les composantes v_x et v_y de \vec{v} dans les équations :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{v}_e + \vec{v}_r &\Rightarrow \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v_e \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + v_r \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} v_x = -v_e - v_r \\ \sqrt{2} v_y = v_e - v_r \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2} (v_y - v_x) = 2v_e \quad (1) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{v}'_e + \vec{v}'_r &\Rightarrow \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = v'_e \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} + v'_r \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2v_x = -\sqrt{2} v'_e + \sqrt{3} v'_r \\ 2v_y = -\sqrt{2} v'_e - v'_r \end{cases} \Rightarrow 2 (v_x + \sqrt{3} v_y) = -\sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) v'_e \quad (2) \end{aligned}$$

Des relations (1) et (2) découle un système de deux équations :

$$\begin{cases} v_y - v_x = \frac{2v_e}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{3}v_y + v_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})v'_e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1 + \sqrt{3})v_y = \frac{1}{\sqrt{2}}[2v_e - (1 + \sqrt{3})v'_e] \\ v_x = v_y - \frac{2v_e}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v_y = \frac{2v_e - (1 + \sqrt{3})v'_e}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}$$

et :

$$v_x = \frac{2v_e - (1 + \sqrt{3})v'_e - 2v_e(1 + \sqrt{3})}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} = -\frac{2\sqrt{3}v_e + (1 + \sqrt{3})v'_e}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}$$

Application numérique :

$$v_y = \frac{2 \times 52 - (1 + \sqrt{3}) \times 60}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} = -15,5 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

$$v_x = -\frac{2\sqrt{3} \times 52 + (1 + \sqrt{3}) \times 60}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} = -89 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

5.1.1.5 Composition des accélérations

Définition 8 On appelle accélération absolue ($\vec{\gamma}_a$) celle du point M mesurée dans le référentiel « fixe » \mathcal{R} :

$$\vec{\gamma}_a = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{dv_\alpha}{dt} \vec{e}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{d^2x_\alpha}{dt^2} \vec{e}_\alpha$$

où $\vec{v}_a = \sum_{\alpha=1}^3 v_\alpha \vec{e}_\alpha$ et $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \vec{e}_\alpha$ sont respectivement la vitesse absolue et la position de M repérées dans \mathcal{R} .

Définition 9 L'accélération relative ($\vec{\gamma}_r$) est celle du point M mesurée par un observateur immobile dans \mathcal{R}' :

$$\vec{\gamma}_r = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{dv'_\alpha}{dt} \vec{e}'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{d^2x'_\alpha}{dt^2} \vec{e}'_\alpha$$

où $\vec{v}_r = \sum_{\alpha=1}^3 v'_\alpha \vec{e}'_\alpha$ et $\vec{r}' = \sum_{\alpha=1}^3 x'_\alpha \vec{e}'_\alpha$ désignent respectivement la vitesse relative de M et sa position, repérées dans \mathcal{R}' .

La loi de composition des accélérations relie $\vec{\gamma}_a$ et $\vec{\gamma}_r$:

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

Dans cette expression interviennent :

- l'accélération d'entraînement :

$$\vec{\gamma}_e = \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}')$$

- l'accélération de Coriolis (ou accélération complémentaire) :

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

5.1.1.6 Cas particuliers

Mouvement de translation

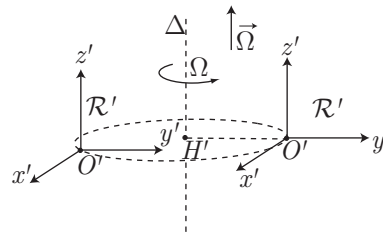
Par définition, $\vec{\omega} = \vec{0}$ conduit à :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \text{ et } \vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2}$$

Mouvement de translation circulaire

Le centre O' du référentiel \mathcal{R}' tourne autour d'un axe Δ passant par O , tandis que sa base conserve une direction constante. Si on note H' le projeté orthogonal de O' sur Δ , on observe que :

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{H'O'}$$



où $\vec{\Omega}$ désigne le vecteur rotation de O' autour de Δ : $\frac{d\overrightarrow{H'O'}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{H'O'}$. De même :

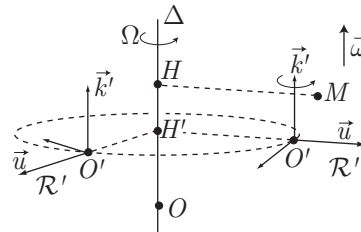
$$\frac{d^2 \overrightarrow{OO'}}{dt^2} = -\Omega^2 \times \overrightarrow{H'O'} \text{ avec } \Omega = \|\vec{\Omega}\|$$

Par suite, étant donné que $\vec{\omega} = \vec{0}$:

$$\vec{v}_a = \vec{r}' + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{H'O'} \text{ et } \vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r - \Omega^2 \times \overrightarrow{H'O'}$$

Composition de rotations uniformes

Le point O' tourne à la vitesse angulaire Ω constante autour d'un axe Δ de \mathcal{R} tandis que la base \mathcal{B}' effectue une rotation caractérisée par un vecteur rotation $\vec{\omega}$ constant. D'une manière générale la vitesse et l'accélération d'entraînement valent :



$$\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{H'O'} + \omega \wedge \overrightarrow{O'M} \text{ et } \vec{\gamma}_e = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}') - \Omega^2 \times \overrightarrow{H'O'}$$

Dans le cas particulier où $\vec{\Omega} = \vec{\omega}$, c'est-à-dire lorsque l'ensemble (O', \vec{u}) tourne autour de Δ de manière synchrone (ce qui est représenté sur la figure précédente), on utilisera plutôt :

$$\vec{v}_e = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{HM} \text{ et } \vec{\gamma}_e = -\omega^2 \times \overrightarrow{HM} \quad (3)$$

où H est le projeté orthogonal de M sur Δ .

5.1.2 Dynamique en référentiel non galiléen

Définition 10 Soit \mathcal{R} un référentiel galiléen. Un autre référentiel, \mathcal{R}' , est aussi galiléen si et seulement s'il est en mouvement de translation uniforme par rapport à \mathcal{R} .

$$\mathcal{R}' \text{ galiléen} \Leftrightarrow \vec{\omega} = \vec{0} \text{ et } \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} = \vec{c}\vec{e}$$

On considère un référentiel \mathcal{R}' non galiléen par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} . Un point M , de masse m , est soumis à des forces \vec{f} d'interaction (ou forces « vraies ») et adopte, dans \mathcal{R}' , une accélération $\vec{\gamma}_r$, qui suit la loi fondamentale de la dynamique généralisée aux référentiels non galiléens :

$$m \vec{\gamma}_r = \vec{f} + \vec{f}_e + \vec{f}_c$$

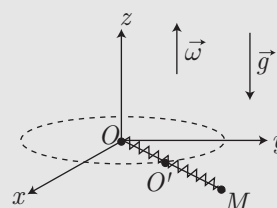
où sont introduites :

- la « force » d'entraînement : $\vec{f}_e = -m \vec{\gamma}_e$;
- la « force » de Coriolis : $\vec{f}_c = -m \vec{\gamma}_c$.

Ces deux termes (appelés « forces » par abus de langage) sont également désignées comme « forces » d'inertie.



Soit (O, x, y, z) un repère associé à un référentiel \mathcal{R} immobile, dans lequel une tige OO' tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de Oz . Cette tige supporte un ressort, de raideur k et de longueur à vide l_v , fixé en O à l'une de ses extrémités, tandis qu'à l'autre extrémité est accroché un point matériel mobile M de masse m



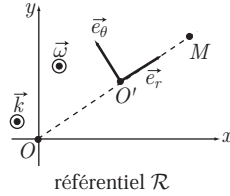
On définit le référentiel \mathcal{R}' tournant autour de (Oz) avec la même vitesse angulaire que M , de base $(0, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, où $\overrightarrow{OO'} = \omega \times \vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta \perp \vec{e}_r$.

1. Dans le référentiel \mathcal{R}' , faire le bilan des forces d'interaction et des « forces » d'inertie.
2. Le point M étant écarté de sa position d'équilibre relatif dans \mathcal{R}' , il effectue des oscillations de faible amplitude. Déterminer la pulsation Ω de ces oscillations en fonction de k , m et ω .

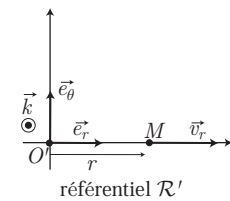
RÉPONSE

1. Pour opérer les changements de référentiels, il est fortement recommandé de procéder à deux représentations différentes du même phénomène :

- la situation vécue dans le référentiel \mathcal{R} , et notamment le comportement de O' et de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$; c'est de ce comportement que dépendent les accélérations d'entraînement ($\vec{\gamma}_e$) et de Coriolis ($\vec{\gamma}_c$).



- la situation vécue dans le référentiel \mathcal{R}' ; on prend soin d'y représenter la position relative (ici $\vec{r} = \vec{O'M} = r \vec{e}_r$) et le vecteur vitesse relative ($\vec{v}_r = \dot{r} \vec{e}_r$) ; les vecteurs $\vec{\gamma}_e$ et $\vec{\gamma}_c$ en dépendent aussi.



Dans ce référentiel, le point M est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{k}$;
- la tension du ressort : $\vec{T} = -k (r - l_v) \vec{e}_r$;
- la réaction \vec{R} de la tige ; en l'absence de frottements, cette force est perpendiculaire à la tige et ne comporte donc pas de composante selon \vec{e}_r :

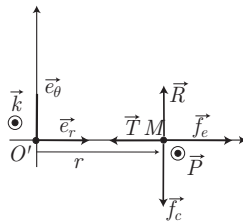
$$\vec{R} = R_\theta \vec{e}_\theta + R_k \vec{k}$$

- la « force » d'entraînement : $\vec{f}_e = -m \vec{\gamma}_e$, où l'accélération d'entraînement est donnée par la relation (3) de la page 400, pour un référentiel \mathcal{R}' tournant à la vitesse angulaire ω autour de l'axe $(O \vec{k})$:

$$\vec{\gamma}_e = -\omega^2 \times \vec{OM} = -\omega^2 (\vec{OO'} + \vec{O'M}) = -\omega^2 (OO' + r) \vec{e}_r \Rightarrow \vec{f}_e = m\omega^2 (OO' + r) \vec{e}_r$$

- la « force » de Coriolis : $\vec{f}_c = -m \vec{\gamma}_c$, colinéaire à l'accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2\omega \dot{r} \vec{k} \wedge \vec{e}_r = 2\omega \dot{r} \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{f}_c = -2m\omega \dot{r} \vec{e}_\theta$$



2. L'introduction de « forces » d'inertie généralise la loi fondamentale de la dynamique au référentiel \mathcal{R}' non galiléen ; l'accélération relative $\vec{\gamma}_r = \ddot{r} \vec{e}_r$ de M vérifie :

$$m \vec{\gamma}_r = \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f}_e + \vec{f}_c \Rightarrow m \ddot{r} \vec{e}_r = [-k (r - l_v) + m\omega^2 (OO' + r)] \vec{e}_r + (R_\theta - 2m\omega \dot{r}) \vec{e}_\theta + (R_k - mg) \vec{k}$$

Le membre de gauche de cette équation ne comportant que la composante non nulle selon \vec{e}_r , il en va de même du membre de droite, d'où il s'ensuit que :

$$\begin{cases} R_\theta - 2m\omega \dot{r} = 0 \\ R_k - mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_\theta = 2m\omega \dot{r} \\ R_k = mg \end{cases}$$

et :

$$m \ddot{r} = -k (r - l_v) + m\omega^2 (OO' + r) = (m\omega^2 - k) r + m\omega^2 OO' + kl_v$$

Il existe donc une position d'équilibre relatif, r_e , qui annule \ddot{r} :

$$0 = (m\omega^2 - k) r_e + m\omega^2 OO' + kl_v \Rightarrow m\omega^2 OO' + kl_v = -(m\omega^2 - k) r_e$$

en raison de quoi l'équation du mouvement de M s'écrit :

$$m \ddot{r} = (m\omega^2 - k) r - (m\omega^2 - k) r_e = (m\omega^2 - k) (r - r_e)$$



À l'instar des équations du mouvement obtenues dans les référentiels galiléens, celles qui apparaissent en référentiels non galiléens admettent des solutions très simples lorsqu'elles mettent en jeu l'écart par rapport à l'équilibre : $\varepsilon = r - r_e$

L'introduction de ε conduit à : $r = r_e + \varepsilon \Rightarrow \dot{r} = \dot{\varepsilon} \Rightarrow \ddot{r} = \ddot{\varepsilon}$ et l'équation du mouvement devient :

$$m \ddot{\varepsilon} = (m\omega^2 - k) \varepsilon \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2 \right) \varepsilon = 0$$

Si $\frac{k}{m} > \omega^2$, cette équation différentielle admet une solution harmonique :

$$\varepsilon = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$$

qui montre que M oscille autour de sa position d'équilibre avec une pulsation :

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2}$$

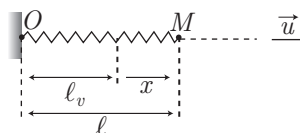
Remarque – Si ω^2 devait excéder $\frac{k}{m}$, la solution de l'équation différentielle :

$$\varepsilon = A e^{\kappa t} + B e^{-\kappa t} \text{ où } \kappa^2 = \omega^2 - \frac{k}{m}$$

révélerait que M s'éloigne sans cesse de sa position d'équilibre. Une telle situation est cependant peu réaliste car, lorsque le ressort est complètement étiré, il exerce une tension \vec{T} qui ne dépend plus de son allongement, auquel cas la loi : $\vec{T} = -k (l - l_v) \vec{e}_r$ perd toute légitimité.

5.2 Oscillations forcées

Soit un ressort horizontal dont l'extrémité O est fixée à un support immobile et dont l'autre extrémité est accrochée à un point mobile M , de masse m . On note ℓ la longueur du ressort, ℓ_v sa longueur à vide et k sa raideur. Outre son poids et la réaction du support qui le compense, le point M est soumis à :



- la tension du ressort : $\vec{T} = -k (\ell - \ell_v) \vec{u} = -kx \vec{u}$;
- une force de frottement : $\vec{F}_f = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x} \vec{u}$;
- une force d'excitation sinusoïdale de pulsation ω : $\vec{F}_e = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}$.

L'application de la loi fondamentale de la dynamique génère l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

que l'on écrit aussi :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} \quad (4)$$

La solution x_s de l'équation différentielle dépourvue de son second membre :

$$\ddot{x}_s + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_s + \omega_0^2 x_s = 0$$

a déjà été déterminée en première partie du cours de mécanique. C'est pourquoi on ne s'intéressera ici qu'à la solution homogène au second membre : $x = X_0 \cos(\omega t + \phi)$, encore appelé *régime permanent* (qui, ajouté à la solution x_s , fournit le *régime transitoire*).

5.2.1 Résonance en élongation

En notation complexe : $\underline{x} = X_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \underline{x}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d \underline{x}}{dt} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \Rightarrow X_0 \underbrace{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q} \right)}_{\underline{X}} e^{j\phi} = \frac{F_0}{m}$$

Apparaît alors un nombre complexe :

$$\underline{X} = X e^{j\varphi} \text{ avec } X = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \omega_0}{Q}\right)^2} \text{ et } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{X} \\ \sin \varphi = \frac{\omega \omega_0}{Q X} \end{cases}$$

L'équation qui s'ensuit :

$$X_0 \times X e^{j(\varphi + \phi)} = \frac{F_0}{m} \tag{5}$$

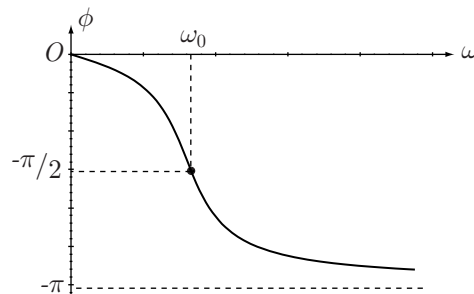
impose alors :

$$\phi = -\varphi \Rightarrow \begin{cases} \cos \phi = Q \times \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{Q^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \omega_0^2}} \\ \sin \phi = \frac{-\omega \omega_0}{\sqrt{Q^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \omega_0^2}} \end{cases}$$

Les limites :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \phi = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \phi = -\frac{\pi}{2} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi = -\pi$$

conduisent à la représentation graphique de $\phi(\omega)$:



De même, l'équation : $X_0 = \frac{F_0}{mX}$ fournit :

$$X_0 = \frac{F_0}{m\sqrt{f(\omega)}} \text{ avec } f(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega_0^2}{Q^2}\omega^2$$

Les éventuels *extrema* de l'amplitude X_0 correspondent à ceux de la fonction $f(\omega)$, aux pulsations ω_r qui assurent :

$$\left. \frac{df}{d\omega} \right|_{\omega_r} = 0 \Rightarrow 4\omega_r \times \left(\omega_r^2 - \omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{2Q^2} \right) = 0$$

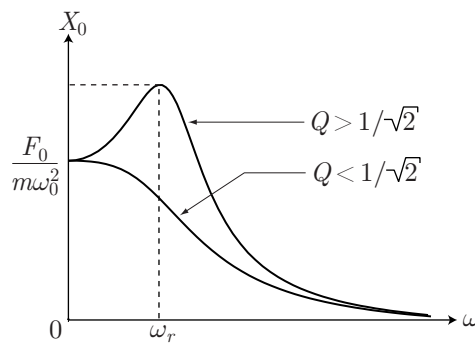
La solution $\omega_r = 0$, bien que dépourvue de sens physique (en régime sinusoïdal !), indique néanmoins que la courbe $X_0(\omega)$ admet une tangente horizontale pour $\omega = 0$. En revanche, un *extremum* peut être obtenu pour une pulsation :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \text{ à condition que } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Dans le cas où $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, la courbe $X_0(\omega)$ n'admet pas d'autre *extremum* qu'en $\omega = 0$. Enfin, les limites :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [X_0(\omega)] = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \infty} [X_0(\omega)] = 0$$

complètent l'étude qui mène à la représentation graphique de la courbe de résonance :



5.2.2 Résonance en vitesse

5.2.2.1 Courbes de résonance

Soit \underline{v} l'image complexe de la vitesse de M :

$$\underline{x} = X_0 e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \underline{v} = \dot{\underline{x}} = j\omega \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = \frac{1}{j\omega} \underline{v}$$

que l'on choisit alors sous la forme :

$$\underline{v} = V_0 e^{j(\omega t + \psi)} \Rightarrow \underline{\ddot{x}} = \underline{\dot{v}} = j\omega \underline{v}$$

L'équation complexe associée à l'équation différentielle (4) :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

devient de fait :

$$V_0 \times \left[\frac{\omega_0}{Q} + j \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) \right] e^{j\psi} = \frac{F_0}{m}$$

où apparaît à nouveau un nombre complexe :

$$\underline{V} = \frac{\omega_0}{Q} + j \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) = V e^{j\theta}$$

$$\text{avec } V = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)^2} \text{ et } \tan \theta = Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Ainsi :

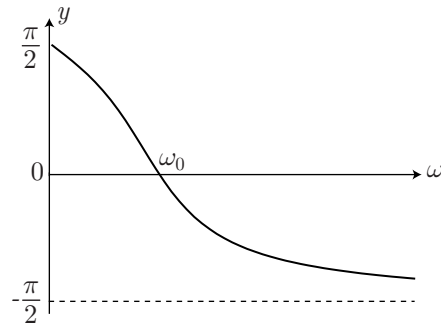
$$V_0 \times V e^{j(\theta+\psi)} = \frac{F_0}{m} \tag{6}$$

impose l'identité des arguments :

$$\theta + \psi = 0 \Rightarrow \psi = -\theta \Rightarrow \tan \psi = Q \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

d'où ressortent les limites suivantes :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \psi = \frac{\pi}{2} \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \psi = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \psi = -\frac{\pi}{2}$$



En outre, l'équation (6) révèle également que :

$$V_0 \times V = \frac{F_0}{m} \Rightarrow V_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} + \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)^2}}$$

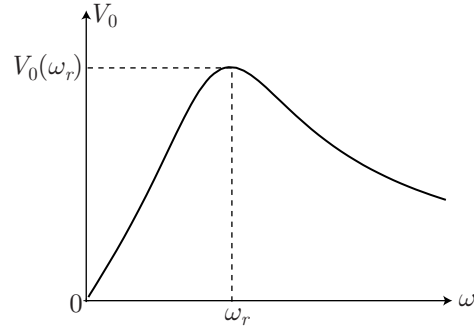
Non seulement la fonction $V(\omega)$ devient *maximum* pour une pulsation de résonance $\omega_r = \omega_0$, et prend la valeur :

$$V_0(\omega_r) = \frac{QF_0}{m\omega_0}$$

mais, de plus, les limites :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} (V_0) = 0 \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \infty} (V_0) = 0$$

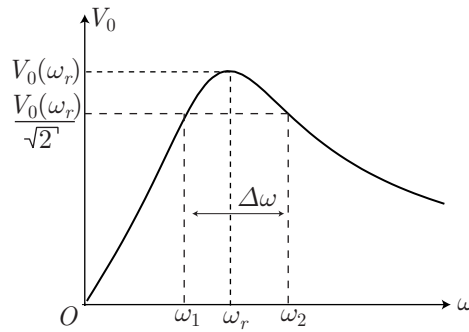
conduisent à la courbe de résonance suivante :



5.2.2.2 Bande passante

Définition 11 On appelle pulsations de coupures les pulsations solutions de l'équation :

$$V_0(\omega) = \frac{V_0(\omega_r)}{\sqrt{2}}$$



La résolution de cette équation :

$$\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} \Rightarrow \begin{cases} \omega^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega_0^2 = 0 \\ \omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega_0^2 = 0 \end{cases}$$

génère deux équations du second degré, de même discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} \sqrt{1 + 4Q^2}$, à l'origine des deux seules solutions positives :

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q_0} \left(1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right) \text{ et } \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\sqrt{1 + 4Q^2} - 1 \right)$$

Définition 12 Si ω_1 et $\omega_2 > \omega_1$ désignent les deux pulsations de coupure, on appelle bande passante l'intervalle dans lequel :

$$V(\omega) \geq \frac{V_0(\omega_r)}{\sqrt{2}}$$

Dans le cas étudié ci-avant, la bande passante a pour largeur :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

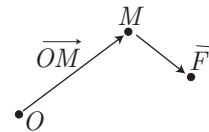
5.3 Théorème du moment cinétique

5.3.1 Moment d'une force

5.3.1.1 Moment d'une force en un point

Définition 13

Soit O un point fixe d'un référentiel (galiléen ou non), dans lequel un point matériel M est soumis à une force résultante \vec{F} (qui peut inclure des « forces » d'inertie). On appelle moment de la force \vec{F} en O , le produit vectoriel :

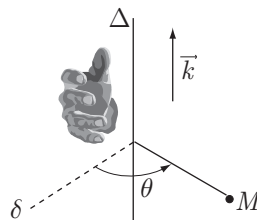


$$\vec{M}_0 = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

Orientation d'un moment

Si M tourne autour d'un axe Δ de vecteur directeur unitaire \vec{k} , l'orientation de cet axe s'opère de la manière suivante :

- définir un axe de référence δ perpendiculaire à Δ , à partir duquel la rotation de M est repérée par un angle θ ;
- faire tourner les doigts de la main droite dans le sens de l'augmentation de θ ;
- le pouce levé indique le sens de \vec{k} , dont la direction est celle de Δ .



5.3.1.2 Moment d'une force par rapport à un axe

Définition 14 Soit Δ un axe et soit O un point fixe de Δ . Un point M est soumis à une force résultante \vec{F} , dont le moment par rapport à Δ est défini par :

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{k} = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{k}$$

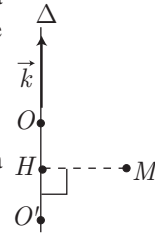


Le moment d'une force par rapport à un axe ne dépend pas de la position du point O (de cet axe) par rapport auquel est calculé ce moment :

$$\vec{\mathcal{M}}_O \neq \vec{\mathcal{M}}_{O'} \text{ mais } \mathcal{M}_\Delta = \mathcal{M}_{\Delta'}$$

C'est aussi pour cette raison que \mathcal{M}_Δ est souvent déterminé à partir du point H projeté orthogonal de M sur Δ :

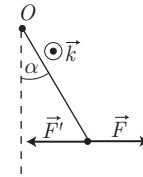
$$\vec{\mathcal{M}}_H = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{F} \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_H \cdot \vec{k}$$



Remarque –

Le signe de \mathcal{M}_Δ indique l'influence de la force sur la rotation du point où elle s'exerce. Dans l'exemple illustré sur la figure ci-contre (où \vec{k} est orienté dans le sens de l'augmentation de α) :

- $\mathcal{M}_\Delta > 0$ pour \vec{F} , ce qui signifie que \vec{F} a tendance à augmenter l'angle α ;
- $\mathcal{M}_\Delta < 0$ pour \vec{F}' , ce qui traduit la tendance qu'a \vec{F}' à diminuer α .



5.3.2 Moment cinétique

Définition 15 Soit M un point matériel, de masse m et de vitesse \vec{v} repérée dans un référentiel où est défini un point fixe O . On appelle moment cinétique de M en O la grandeur :

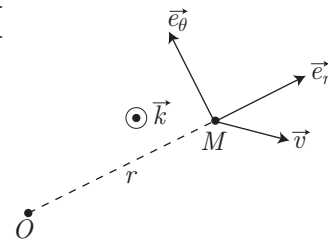
$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

Si, de surcroît, le point M tourne dans un plan contenant O , sa position et sa vitesse s'expriment en coordonnées polaires par :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Le moment de M en O s'écrit alors :

$$\vec{\sigma}_O = mr^2 \dot{\theta} \vec{k}$$

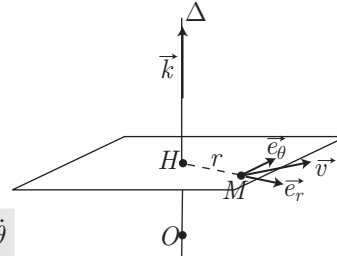


Définition 16 Soit Δ un axe orienté par un vecteur unitaire \vec{k} et soit O un point fixe de Δ , par rapport auquel est défini le moment cinétique d'un point M (de masse m et de vitesse \vec{v}) en O . Le moment cinétique de M par rapport à Δ est défini par :

$$\sigma_{\Delta} = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{k}$$



Le moment cinétique σ_{Δ} d'un point en rotation autour d'un axe ne dépend pas du point de l'axe qui a permis de le définir et c'est pourquoi on choisit souvent le projeté orthogonal H de M sur l'axe Δ .



$$\vec{\sigma}_H = \overrightarrow{HM} \wedge m\vec{v} = mr^2 \dot{\theta} \vec{k} \Rightarrow \sigma_{\Delta} = mr^2 \dot{\theta}$$



Un point matériel M de masse m est repéré par son vecteur position dans la base $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ \alpha t \end{pmatrix}$$

Déterminer l'expression de son moment cinétique par rapport à l'axe $\Delta = (O, \vec{k})$, en fonction des constantes réelles a , m et α .

RÉPONSE



Étant donné que l'énoncé ne précise pas le point par rapport auquel le moment cinétique doit être mesuré, et étant donné que le résultat ne dépendra pas de ce point, il est préférable de l'évaluer par rapport au point H , projeté orthogonal de M sur Δ .

Le vecteur \overrightarrow{HM} a pour composantes :

$$\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HO} + \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ \alpha t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que le moment cinétique de M en H s'écrit :

$$\vec{\sigma}_H = \overrightarrow{HM} \wedge m\vec{v} = \begin{pmatrix} a \cos(\omega t) \\ a \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -m\alpha \omega \sin(\omega t) \\ m\alpha \omega \cos(\omega t) \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \sin(\omega t) \\ -\alpha a \cos(\omega t) \\ ma^2 \omega \end{pmatrix}$$

Le moment cinétique de M par rapport à Δ est alors défini par :

$$\sigma_{\Delta} = \vec{\sigma}_H \cdot \vec{k} = ma^2 \omega$$

5.3.3 Théorème du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de $\vec{\sigma}_O$ s'identifie au moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ de la résultante des forces \vec{F} en O :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Remarque – Dans un référentiel non galiléen, la loi fondamentale de la dynamique peut être généralisée à condition d'adjoindre à \vec{F} des « forces » d'inertie \vec{F}_i :

$$m \vec{\gamma} = \vec{F} + \vec{F}_i \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O + \vec{M}_{O_i} \text{ avec } \vec{M}_{O_i} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}_i$$

Soit un axe orienté Δ , fixe, de vecteur directeur unitaire \vec{k} , et passant par le point O ; le théorème du moment cinétique devient :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \vec{k} \cdot \vec{M}_O \Rightarrow \frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta$$

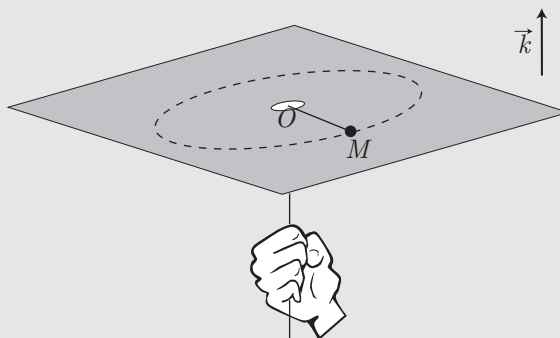
Notamment, si le point M est en rotation autour de Δ , sa distance $HM = r$ à Δ ne varie pas dans le temps, de sorte qu'à l'identité précédente se substitue la suivante :

$$mr^2 \ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta = (\overrightarrow{HM} \wedge \vec{F}) \cdot \vec{k} \quad (7)$$



Un point matériel M , de masse m , est assujéti à se déplacer sans frottements sur un plan horizontal percé en O . À travers O passe un fil souple inextensible, dont une extrémité est tenue par un opérateur.

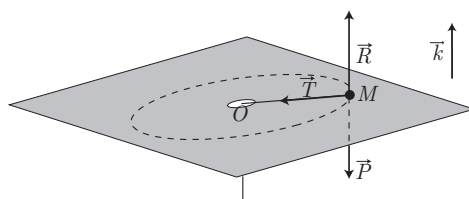
Le point M décrit des cercles de rayons $r = OM$ autour de O , à la vitesse angulaire ω .



1. Dresser le bilan des forces subies par M et calculer le moment \vec{M}_O de leur résultante en O .
2. En utilisant le théorème du moment cinétique, montrer que le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ de M en O demeure constant.
3. Dans une base cylindro-polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$, déterminer les composantes de $\vec{\sigma}_O$.
4. L'opérateur agit sur le fil de manière à faire passer la longueur OM de r_0 à $\frac{r_0}{2}$; la vitesse angulaire passe concomitamment de ω_0 à ω_1 . Déterminer ω_1 en fonction de ω_0 .

RÉPONSE

1. Le point M est soumis à son poids \vec{P} vertical, à la réaction \vec{R} du plan horizontal (\vec{R} est ainsi vertical en l'absence de frottements) et à la tension \vec{T} du fil, auquel cas une force résultante $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}$ s'exerce sur M .



Or, le mouvement de M s'effectuant dans le plan horizontal, les forces \vec{P} et \vec{R} se composent vectoriellement : $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \vec{T}$, ce qui signifie que la force résultante \vec{F} a pour moment en O :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{OM} \parallel \vec{T}$$

2. Le théorème du moment cinétique relie $\vec{\mathcal{M}}_O$ à la variation du moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ de M en O :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_O = \text{cte} \quad (8)$$

3. Le mouvement plan de M incite à travailler avec les coordonnées polaires de M :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \text{ et } \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta$$

Le moment cinétique de M en O est alors défini par :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = r \vec{e}_r \wedge \underbrace{m\dot{r} \vec{e}_r}_{=\vec{0}} + (r \vec{e}_r) \wedge (mr\omega \vec{e}_\theta) = mr^2\omega \vec{k} \text{ car } \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{k}$$

4. Le vecteur $\vec{\sigma}_O$ étant constant, conformément au résultat (8), sa norme l'est également. :

$$\sigma_0 = \|\vec{\sigma}_O\| = mr^2\omega = \text{cte}$$

même lorsque r et ω passent des valeurs r_0 à $r_1 = \frac{r_0}{2}$ et de ω_0 à ω_1 respectivement :

$$\begin{cases} \sigma_0 = mr_0^2\omega_0 \\ \sigma_0 = mr_1^2\omega_1 \end{cases} \Rightarrow \omega_1 = \omega_0 \times \left(\frac{r_0}{r_1}\right)^2 = 4\omega_0 \text{ car } r_0 = 2r_1$$

Ce résultat révèle que le rapprochement du point M vers son centre de rotation O s'accompagne d'une « accélération » de sa rotation.

L'identité (7) : $mr^2\ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta$ suffit à montrer qu'un point en équilibre est caractérisé par un moment \mathcal{M}_Δ nul (de même que $\vec{\mathcal{M}}_O$) :

$$\text{équilibre} \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta = 0 \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$$

5.4 Forces centrales conservatives

5.4.1 Énergie potentielle

Définition 17 Soit O un point fixe d'un référentiel galiléen dans lequel un point M est repéré par $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$. Une force \vec{F} qui s'exerce sur M est dite centrale (et conservative) si elle peut s'écrire :

$$\vec{F} = F(r) \times \vec{e}_r$$

Une force centrale est attractive lorsque $F(r) < 0$ et répulsive si $F(r) > 0$. Parmi les forces centrales, on peut citer :

- la force gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2 : $F_g = -\frac{G m_1 m_2}{r^2} \vec{e}_r$;
- la force coulombienne entre deux charges q_1 et q_2 : $F_c = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

que l'on notera dorénavant sous la forme générique :

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$$

où la constante α sera adaptée à la nature gravitationnelle ($\alpha = -G m_1 m_2$) ou coulombienne ($\alpha = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$) de la force \vec{F} .

La définition de l'énergie potentielle E_p , associée à \vec{F} : $F(r) = -\frac{dE_p}{dr}$ permet d'écrire :

$$E_p(r) = E_p(r_0) - \int_{r_0}^r F(r) dr$$

Pour les forces gravitationnelles et électrostatiques, E_p est choisi nul pour r infini, ce qui fournit :

$$\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow E_p(r) = \frac{\alpha}{r}$$

5.4.2 Moment cinétique

5.4.2.1 Expression du moment

Le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \text{ avec } \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

appliqué à une force centrale montre que :

$$\vec{\sigma}_O = \text{cte si } \vec{F} \parallel \overrightarrow{OM}$$

Si M désigne un point de masse m soumis à une force centrale, la trajectoire de M est plane ; on note \vec{k} un vecteur unitaire perpendiculaire à ce plan, tel que $\vec{k} = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$ et $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta$:

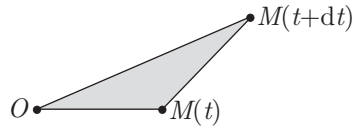
$$\vec{\sigma}_O = mr^2\omega \vec{k}$$

Si le point M décrit une trajectoire linéaire passant par O , son moment cinétique est nul ; la réciproque de cette proposition est aussi vérifiée :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{0} \Leftrightarrow M \text{ parcourt une droite passant par } O$$

5.4.2.2 Loi des aires

Définition 18 Un point M est repéré dans un repère de centre O . Pendant une durée dt , le rayon vecteur \vec{OM} balaye une surface dS , définissant la vitesse aréolaire : $\frac{dS}{dt}$.

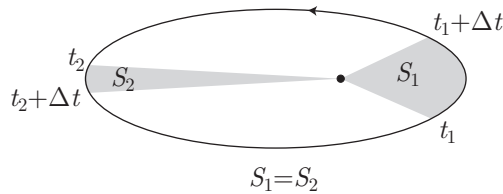


La vitesse aréolaire d'un point M , de masse m , est proportionnelle à σ_0 :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\sigma_0}{2m} \text{ où } \sigma_0 = \|\vec{\sigma}_0\|$$

En l'occurrence, si M est soumis à une force centrale, la surface S balayée par le rayon vecteur ne dépend pas de la date à laquelle est elle mesurée, mais seulement de la durée pendant laquelle elle est balayée :

$$S = \frac{\sigma_0}{2m} \times \Delta t \text{ (loi des aires)}$$



Un point matériel M , de masse m , est repéré par sa distance $r = OM$ à un point fixe O d'un référentiel galiléen. Les coordonnées polaires de son mouvement plan sont r et θ . Dans chacun des cas suivants, dire si M est soumis à une force centrale dirigée vers O :

1. $r = r_0 e^{\omega_0 t/2}$ et $\theta = \theta_0 e^{-\omega_0 t}$ où r_0, θ_0 et ω_0 sont des constantes positives ;
2. $r = r_0 + A \cos(\omega_0 t)$ et $\theta = \omega_0 t$ où r_0, ω_0 et A sont des constantes positives.

RÉPONSE

Dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, l'accélération du point M est donnée par :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

et cette base, étant affectée à un référentiel galiléen, la loi fondamentale de la dynamique y lie la force \vec{F} à $\vec{\gamma}$:

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Or, pour que la force \vec{F} soit centrale, elle ne doit posséder qu'une composante non nulle selon \vec{e}_r , ce qui se traduit par :

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

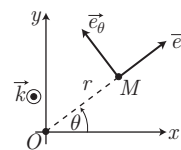
et c'est la validité de cette équation qu'il s'agit d'examiner dans les deux cas proposés par l'énoncé.

1. Avec les composantes polaires :

$$r = r_0 e^{\omega_0 t/2} \Rightarrow \dot{r} = \frac{r_0 \omega_0}{2} e^{\omega_0 t/2}$$

et :

$$\theta = \theta_0 e^{-\omega_0 t} \Rightarrow \dot{\theta} = -\omega_0 \theta_0 e^{-\omega_0 t} \Rightarrow \ddot{\theta} = \omega_0^2 \theta_0 e^{-\omega_0 t}$$



on obtient :

$$2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} = r_0 \omega_0 e^{\omega_0 t/2} \times (-\omega_0 \theta_0 e^{-\omega_0 t}) + r_0 e^{\omega_0 t/2} \times (\omega_0^2 \theta_0 e^{-\omega_0 t}) - r_0 \omega_0^2 \theta_0 e^{-\omega_0 t/2} + r_0 \omega_0^2 \theta_0 e^{-\omega_0 t/2} = 0$$

ce qui suffit à prouver que le point M est soumis à une force centrale.

2. Les coordonnées polaires du point M vérifiant :

$$r = r_0 + A \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{r} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) \text{ et } \theta = \omega_0 t \Rightarrow \dot{\theta} = \omega_0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

il s'ensuit que :

$$2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta} = -2A\omega_0 \sin(\omega_0 t) \times \omega_0 = -2A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

Ainsi : $2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}$ n'étant pas nul pour toute date t , le point M n'est pas soumis à une force centrale.

5.4.3 Conservation de l'énergie

5.4.3.1 Énergie potentielle effective

Si le problème était purement radial, la vitesse d'un point matériel s'écrirait : $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r$, à l'origine d'une énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$. Son énergie mécanique serait alors :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_p \quad (9)$$

Cependant, dans le cas général, la vitesse $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ donne à l'énergie cinétique la forme :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

d'où découle l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + E_p$$

Afin de se ramener au cas d'un problème purement radial, décrit par l'équation (9), on définit une *énergie potentielle effective* $E_{p \text{ eff}}$ telle que :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p \text{ eff}} \text{ avec } E_{p \text{ eff}} = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + E_p \quad (10)$$

Dans le cas d'une force gravitationnelle ou électrostatique : $E_p = \frac{\alpha}{r}$ tandis que la nature centrale des forces a permis d'établir que :

$$\sigma_0 = \text{cte} \Rightarrow m r^2 \dot{\theta} = \text{cte} \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = C = \text{cte} \quad (11)$$

où la constante C est appelée *constante de la loi des aires*. Par suite :

$$E_{p \text{ eff}} = \frac{m C^2}{2 r^2} + \frac{\alpha}{r} \quad (12)$$

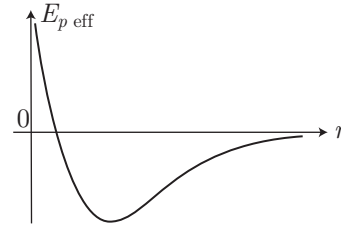
Quant à la loi (10), elle indique que le mouvement du point est assujéti à :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{p \text{ eff}} \Rightarrow E_m \geq E_{p \text{ eff}} \quad (13)$$

5.4.3.2 Force attractive

Lorsque la force centrale est attractive : $\alpha < 0 \Rightarrow \alpha = -|\alpha|$ donne à $E_{p\text{ eff}}$ la forme :

$$E_{p\text{ eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{|\alpha|}{r}$$



dont la représentation graphique est fournie ci-contre.

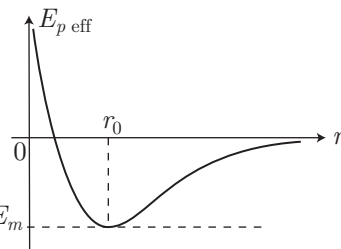
Selon la valeur de E_m , on peut distinguer plusieurs cas :

- Si $E_m < 0$ et $E_m = E_{p\text{ eff}}$ n'admet qu'une solution, la résolution de cette équation :

$$2E_m r^2 + 2|\alpha| r - mC^2 = 0$$

fournit :

$$r = r_0 = \frac{\alpha}{2E_m} \Rightarrow E_m = \frac{\alpha}{2r_0}$$



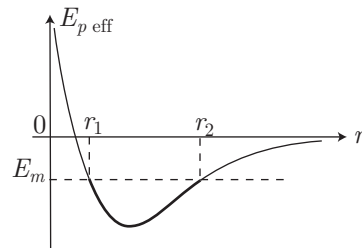
Aussi, l'unité de cette solution montre que M décrit un cercle de rayon r_0 autour du pôle attracteur O .

- Si $E_m < 0$ et $E_m = E_{p\text{ eff}}$ présente deux solutions r_1 et r_2 , la résolution de cette équation :

$$2E_m r^2 + 2|\alpha| r - mC^2 = 0$$

fournit :

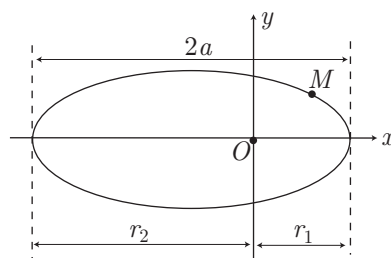
$$r_1 = \frac{|\alpha| - \sqrt{\Delta'}}{2|E_m|} \text{ et } r_2 = \frac{|\alpha| + \sqrt{\Delta'}}{2|E_m|}$$



avec : $\Delta' = |\alpha|^2 - 2mC^2 |E_m|$.

Par suite, le point M décrit une trajectoire elliptique de demi-grand axe horizontal a tel que :

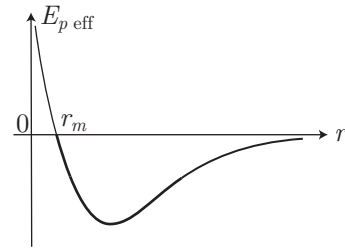
$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{|\alpha|}{2|E_m|} \Rightarrow E_m = \frac{\alpha}{2a}$$



- Si $E_m = 0$, la courbe ci-dessous, associée à la condition $E_m \geq E_{p\text{ eff}}$, montre qu'il existe une valeur minimale r_m en dessous de laquelle r ne peut descendre ; il s'agit de la solution de l'équation :

$$E_{p \text{ eff}} = E_m = 0 \Rightarrow \frac{mC^2}{2r_m^2} - \frac{|\alpha|}{r_m} = 0$$

$$\Rightarrow r_m = \frac{mC^2}{2|\alpha|}$$



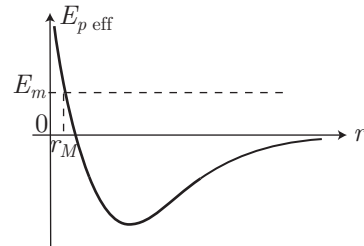
Une trajectoire parabolique est associée à cette situation.

- Si $E_m > 0$, la condition $E_m \geq E_{p \text{ eff}}$ n'est satisfaite qu'à condition que r excède une valeur minimale r_M , unique solution positive de l'équation :

$$E_{p \text{ eff}} = E_m \Rightarrow \frac{mC^2}{2r_M^2} - \frac{|\alpha|}{r_M} = E_m$$

Il s'agit de la solution :

$$r_M = \frac{|\alpha|}{2E_m} \times \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2mC^2 E_m}{\alpha^2}} \right)$$



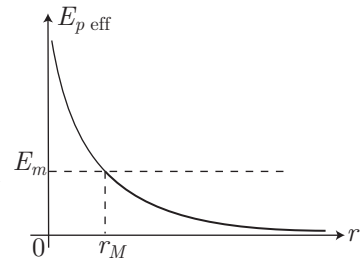
et la trajectoire correspondante est une hyperbole.

5.4.3.3 Force répulsive

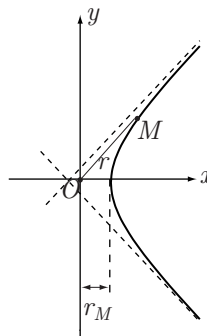
Lorsque la force est répulsive, $\alpha > 0 \Rightarrow \alpha = |\alpha|$ donne à $E_{p \text{ eff}}$ la forme :

$$E_{p \text{ eff}} = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{|\alpha|}{r}$$

dont la représentation graphique révèle que la condition $E_m \geq E_{p \text{ eff}}$ ne peut être satisfaite que si $E_m > 0$ et pour $r \geq r_M$.



Seules les trajectoires hyperboliques sont alors attendues.



Définition 19 On appelle état lié le cas correspondant à $E_m < 0$ et état de diffusion celui pour lequel $E_m \geq 0$, avec :

état	énergie	trajectoires
lié	$E_m < 0$	cercles ou ellipses
diffusion	$E_m \geq 0$	paraboles ou hyperboles

5.5 Mouvement d'un point dans un champ de force centrale

5.5.1 Lois de Kepler

Les trois lois de Kepler stipulent que :

- les astres du système solaire décrivent des ellipses (de grand axe a) dont un des foyers est occupé par le Soleil.
- la surface balayée par le rayon-vecteur, qui lie le Soleil à une planète, est proportionnelle à la durée de ce balayage.
- le rapport $\frac{a^3}{T^2}$ (où T est la période de révolution d'une planète) ne dépend pas de la planète du système solaire ; il vaut $\frac{GM}{4\pi^2}$ (M étant la masse du Soleil et G la constante de gravitation universelle).

5.5.2 Énergie et trajectoires

5.5.2.1 Formules de Binet

Bien que la connaissance de ces formules ne soit pas exigible d'un étudiant en CPGE, rappelons rapidement le moyen de les retrouver.

À partir du résultat (11) de la page 414 :

$$r^2 \dot{\theta} = C \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$$

on montre que :

$$\dot{r} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \text{ et } \ddot{r} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

résultats que l'on présente souvent sous les formes suivantes, en posant $u = \frac{1}{r}$:

$$\dot{r} = -C \frac{du}{d\theta} \text{ et } \ddot{r} = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} \quad (14)$$

Ce faisant, les expressions de la vitesse et de l'accélération :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \text{ et } \vec{\gamma} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

deviennent, avec ces notations :

$$\vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + \frac{C}{r} \vec{e}_\theta \text{ et } \vec{\gamma} = -\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{C^2}{r^2} u \right) \vec{e}_r$$

d'où l'on tire l'expression de l'énergie cinétique d'un point de masse m :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{mC^2}{2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] \quad (\text{première formule de Binet})$$

et l'expression de la loi fondamentale de la dynamique relative à une force $\vec{F} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$:

$$m \vec{\gamma} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -\frac{\alpha}{mC^2} \quad (\text{seconde formule de Binet})$$

5.5.2.2 Trajectoires

La résolution de la seconde formule de Binet suffit à montrer que les trajectoires d'un tel point sont des coniques :

$$\frac{1}{r} = u = -\frac{\alpha}{mC^2} + A \cos \theta \quad \text{où } A \text{ est une constante}$$

ou encore :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \text{avec } p = -\frac{mC^2}{\alpha} \text{ et } e = -\frac{AmC^2}{\alpha} \quad (15)$$

Si la force \vec{F} est attractive, $p = \frac{mC^2}{|\alpha|} > 0$ autorise toute valeur pour e . En revanche, si la force \vec{F} est répulsive : $p = \frac{-mC^2}{|\alpha|} < 0 \Rightarrow p = -|p|$. Aussi, pour que r demeure positif :

$$\begin{aligned} r = \frac{-|p|}{1 + e \cos \theta} > 0 &\Rightarrow 1 + e \cos \theta < 0 \Rightarrow e \cos \theta < -1 \\ &\Rightarrow |e| \times |\cos \theta| > 1 \Rightarrow |e| > \frac{1}{|\cos \theta|} > 1 \end{aligned}$$

Cette inégalité montre clairement que si la force \vec{F} est répulsive, le point matériel décrit nécessairement une hyperbole.

5.5.2.3 Énergie mécanique

L'énergie potentielle : $E_p = \frac{\alpha}{r} = \alpha u$, associée à la première formule de Binet, fournit :

$$E_m = \frac{mC^2}{2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] + \alpha u$$

où $\alpha = -\frac{mC^2}{p}$, conformément au résultat (15), qui révèle aussi que :

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \theta \Rightarrow E_m = \frac{mC^2}{2p^2} (e^2 - 1) = \frac{\alpha}{2p} (1 - e^2) \quad (16)$$

Cette relation permet de confirmer les résultats concernant les forces attractives ($\alpha = -|\alpha|$) :

- Les états liés, caractérisés par $E_m < 0$, sont associés à des trajectoires décrites par :

$$\frac{mC^2}{2p^2} (e^2 - 1) < 0 \Rightarrow |e| < 1$$

Il s'agit soit de cercles ($e = 0$) soit d'ellipses ($0 < |e| < 1$).

- Les états de diffusion correspondent, quant à eux, à $E_m \geq 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{mC^2}{2p^2} (e^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow |e| \geq 1$$

Les trajectoires associées à ces états sont soit des paraboles ($|e| = 1$), soit des hyperboles ($|e| > 1$).

5.5.2.4 Vitesse de libération

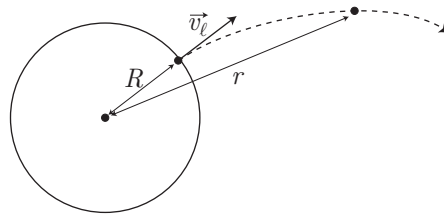
Définition 20 On appelle vitesse de libération la vitesse v_ℓ qu'il faut communiquer à un point matériel, à la surface d'un astre (de masse M et de rayon R) pour qu'il arrive à une distance infinie de l'astre avec une vitesse nulle.

La conservation de l'énergie mécanique conduit immédiatement à :

$$\frac{1}{2}mv_\ell^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - \frac{GMm}{r_\infty}$$

avec $r_\infty \rightarrow \infty$ et $v_\infty = 0$, c'est-à-dire :

$$v_\ell = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

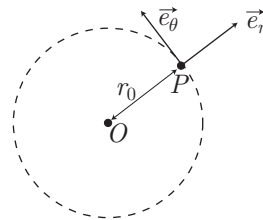


5.5.3 Étude de cas particuliers

5.5.3.1 Mouvement circulaire

En coordonnées polaires, la vitesse d'un point matériel P qui décrit une trajectoire circulaire de rayon r_0 , s'écrit :

$$\vec{v} = \underbrace{\dot{r}}_0 \vec{e}_r + r_0 \omega \vec{e}_\theta = r_0 \omega \vec{e}_\theta \Rightarrow \omega = \frac{v}{r_0}$$



tandis que son accélération :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r_0 \omega^2) \vec{e}_r = -r_0 \omega^2 \vec{e}_r$$

suit la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \vec{\gamma} = -\frac{GMm}{r_0^2} \vec{e}_r \Rightarrow r_0 \omega^2 = \frac{GM}{r_0^2}$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$ (T désignant la période de rotation du point P , de masse m). Ce faisant, la troisième loi de Kepler se trouve confirmée :

$$\frac{r_0^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

En outre, $\omega = \frac{v}{r_0}$ donne à la loi fondamentale de la dynamique la forme suivante :

$$v^2 = \frac{GM}{r_0} \Rightarrow E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r_0} = -\frac{E_p}{2} \text{ car } E_p = -\frac{GMm}{r_0}$$

d'où se déduit directement l'expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_m = -\frac{GMm}{2r_0} = -E_c$$

5.5.3.2 Mouvement elliptique

Les relations entre les paramètres des coniques :

$$a = \frac{p}{1 - e^2} \Rightarrow \frac{1 - e^2}{p} = \frac{1}{a} \text{ et } E_m = \frac{\alpha}{2p} (1 - e^2) = \frac{\alpha}{2a}$$

fournissent directement l'expression de l'énergie mécanique d'un point soumis à une force gravitationnelle ($\alpha = -GMm$) :

$$E_m = -\frac{GMm}{2a}$$

Les identités entre les paramètres de l'ellipse : $a^2 = b^2 + c^2$ et : $c = a \times e$ conduisent à :

$$b^2 = a^2 (1 - e^2)$$

de sorte que la surface $S = \pi ab$ de l'ellipse, balayée pendant une période T devient :

$$S = \pi ab \Rightarrow S^2 = \pi^2 a^2 \times a^2 (1 - e^2)$$

En outre, la loi des aires :

$$S = \frac{\|\vec{\sigma}_0\|}{2m} \Delta t = \frac{C}{2} \times T \Rightarrow S^2 = \frac{C^2}{4} T^2$$

permet de poser :


$$\pi^2 a^4 (1 - e^2) = \frac{C^2}{4} T^2$$

où la constante C est déterminée par les lois (15) : $p = -\frac{mC^2}{\alpha}$ et où le demi-grand axe de l'ellipse est lié à son paramètres p et à son excentricité e : $a = \frac{p}{1 - e^2}$:

$$\begin{aligned} a (1 - e^2) &= -\frac{mC^2}{\alpha} \Rightarrow C^2 = -\frac{a\alpha}{m} (1 - e^2) \\ &\Rightarrow \pi^2 a^4 = -\frac{a\alpha}{4m} T^2 \text{ avec } \alpha = -GMm \end{aligned}$$

Finalement, la troisième loi de Kepler est également confirmée dans le cas d'un mouvement elliptique :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

 La période de la comète de Halley est $T = 76$ ans ; la distance du périhélie au Soleil est $r_0 = 0,59$ UA (l'unité astronomique correspond au demi-grand axe de l'orbite terrestre).

1. Calculer, en unités astronomiques, le demi-grand axe de l'orbite de la comète, son excentricité, et la plus grande distance de la comète au Soleil (aphélie).

On rappelle que la distance du centre O de l'ellipse aux foyers F et F' ($c = OF = OF'$) dépend de l'excentricité et du demi-grand axe : $c = a \times e$.

2. Déterminer les vitesses maximale et minimale de la comète dans le référentiel de Copernic (héliocentrique).

RÉPONSE

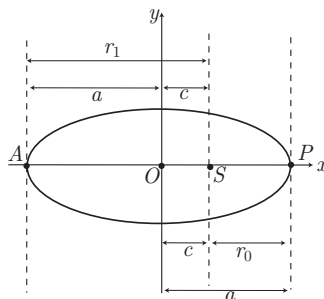
1. Conformément à la troisième loi de Kepler, la comète de Halley décrit, pendant une période $T = 76$ ans, une ellipse de demi-grand axe a , tel que : $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$ où M est la masse du Soleil (non précisée dans l'énoncé). Il en va de même pour la Terre (avec $a_0 = 1$ UA et $T_0 = 1$ an) :

$$\frac{a_0^3}{T_0^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{a_0^3}{T_0^2} \Rightarrow a = a_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{2/3}$$

Application numérique :

$$a = 1 \times (76)^{2/3} \Rightarrow a \simeq 17,9 \text{ UA}$$

Soit O le centre de l'ellipse décrite par la comète et S la position du Soleil, confondue avec un des foyers de l'ellipse :



Le périhélie P se trouve à une distance $r_0 = SP = 0,59$ UA du Soleil, tandis que $OS = c = a \times e$. C'est pourquoi :

$$a = c + r_0 = a e + r_0 \Rightarrow a e = a - r_0 \Rightarrow e = 1 - \frac{r_0}{a}$$

Application numérique :

$$e = 1 - \frac{0,59}{17,9} \Rightarrow e \simeq 0,97$$

De même, l'aphélie A se trouve à une distance $r_1 = AS$ du Soleil, telle que :

$$r_1 = a + c = a + a e \Rightarrow r_1 = a(1 + e)$$

Application numérique :

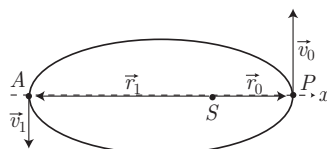
$$r_1 = 17,9 \times (1 + 0,97) \Rightarrow r_1 \simeq 35,26 \text{ UA}$$

2. La vitesse maximale v_0 est atteinte au périhélie P tandis que la vitesse minimale v_1 l'est à l'aphélie A . Or, le moment cinétique de la comète en S est constant :

$$\vec{\sigma}_S = \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 = \vec{r}_1 \wedge \vec{v}_1$$

où :

$$\begin{cases} \vec{r}_0 \perp \vec{v}_0 \\ \vec{r}_1 \perp \vec{v}_1 \end{cases} \Rightarrow r_0 v_0 = r_1 v_1 \Rightarrow v_1 = \frac{r_0}{r_1} v_0 \quad (17)$$



Quant à l'énergie mécanique, elle s'exprime de deux manières différentes :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} \text{ et } E_m = -\frac{GMm}{2a} = -\frac{GMm}{r_0 + r_1}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_0^2 &= GMm \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0 + r_1} \right) = GMm \times \frac{r_1}{r_0 (r_0 + r_1)} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2GM \times \frac{r_1}{r_0 (r_0 + r_1)}} \\ \Rightarrow v_0 &= \sqrt{\frac{8\pi^2 a_0^3}{T_0^2} \times \frac{r_1}{r_0 (r_0 + r_1)}} \text{ car } \frac{a_0^3}{T_0^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$v_0 = \sqrt{\frac{8\pi^2 \times (1)^3}{(1)^2} \times \frac{35,26}{0,59 \times (35,26 + 0,59)}} \Rightarrow v_0 \simeq 11,5 \text{ UA} \cdot \text{an}^{-1}$$

et

$$v_1 = \frac{r_0}{r_1} v_0 = \frac{0,59}{35,26} \times 11,5 \Rightarrow v_1 \simeq 0,19 \text{ UA} \cdot \text{an}^{-1}$$

5.6 Systèmes de deux points matériels

Cette section ne concerne pas les étudiants de PTSI

5.6.1 Éléments cinématiques

5.6.1.1 Définitions

Définition 21 Soient deux points matériels M_1 et M_2 , de masses respectives m_1 et m_2 . Le centre d'inertie G de ce système est défini comme son barycentre :

$$m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2 = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM}_1 + m_2 \overrightarrow{OM}_2}{m_1 + m_2}$$

Définition 22 Soient \vec{v}_1 et \vec{v}_2 les vitesses des points M_1 et M_2 . On appelle quantité de mouvement de ce système la grandeur :

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

En notant $m = m_1 + m_2$ la masse du système $\{M_1, M_2\}$ et \vec{v}_G la vitesse du centre d'inertie, on montre que :

$$\vec{p} = m \vec{v}_G$$

Définition 23 L'énergie cinétique de ce système de points est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Définition 24 Le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ de $\{M_1, M_2\}$ en un point O vaut :

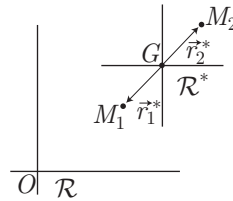
$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2$$

d'où se déduit le moment cinétique σ_Δ de $\{M_1, M_2\}$ par rapport à un axe (Δ) orienté (par un vecteur unitaire \vec{k}) :

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{k}$$

On notera dorénavant \mathcal{R} un référentiel galiléen de repère \mathcal{B} centré sur un point O et \mathcal{R}^* le référentiel barycentrique caractérisé par un repère :

- dont les axes conservent la même direction que ceux de \mathcal{B} (absence de rotation des axes) ;
- de centre G .



Dans le référentiel barycentrique, les positions de M_1 et M_2 sont repérées par les vecteurs $\vec{r}_1^* = \overrightarrow{GM_1}$ et $\vec{r}_2^* = \overrightarrow{GM_2}$, tandis que leurs vitesses sont notées : $\vec{v}_1^* = \frac{d\vec{r}_1^*}{dt}$ et $\vec{v}_2^* = \frac{d\vec{r}_2^*}{dt}$. Ce faisant, on démontre que, dans le référentiel barycentrique :

$$\vec{p}^* = m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = \vec{0}$$

et :

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_1 (v_1^*)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_2^*)^2$$

et le moment cinétique de $\{M_1, M_2\}$ en un point A , dans le référentiel barycentrique, ne dépend pas du point A :

$$\vec{\sigma}_A^* = \overrightarrow{AM_1} \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{AM_2} \wedge m_2 \vec{v}_2^* = \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge m_2 \vec{v}_2^* = \overrightarrow{M_2 M_1} \wedge m_1 \vec{v}_1^*$$

5.6.1.2 Théorèmes de Kœnig

Ces théorèmes ne sont pas au programme de MPSI.

Soit $E_c(G) = \frac{1}{2} m v_G^2$ l'énergie cinétique de G dans un référentiel \mathcal{R} de centre O tel que $\vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt}$, et soit E_c l'énergie cinétique du système de deux points $\{M_1, M_2\}$ dans ce même référentiel. Le premier théorème de Kœnig stipule que :

$$E_c = E_c(G) + E_c^*$$

De même, on note $\vec{\sigma}_O$ le moment cinétique de ce système en O dans \mathcal{R} :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{OM}_1 \wedge m_1 \frac{d\vec{OM}_1}{dt} + \vec{OM}_2 \wedge m_2 \frac{d\vec{OM}_2}{dt}$$

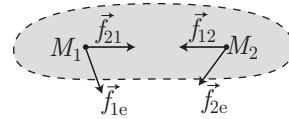
et $\vec{\sigma}_{G/O} = \vec{OG} \wedge (m_1 + m_2) \vec{v}_G$ celui de G en O (toujours dans \mathcal{R}). Le second théorème de Kœnig précise que :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}_{G/O} + \vec{\sigma}_O^*$$

5.6.2 Dynamique du système

5.6.2.1 Théorème de la quantité de mouvement

Les points M_1 et M_2 sont soumis aux forces internes (\vec{f}_{12} que M_1 exerce sur M_2 et \vec{f}_{21} que M_2 exerce sur M_1), ainsi qu'à des forces \vec{f}_{1e} et \vec{f}_{2e} provenant de l'extérieur du système. La variation de la quantité de mouvement $\vec{p} = (m_1 + m_2) \vec{v}_G$ de ce système ne dépend que de la résultante $\vec{f}_{\text{ext}} = \vec{f}_{1e} + \vec{f}_{2e}$:



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}_{\text{ext}}$$

5.6.2.2 Théorème du moment cinétique

On note $\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}$ le moment en O des forces extérieures \vec{f}_{1e} et \vec{f}_{2e} qui s'exercent en M_1 et M_2 respectivement :

$$\vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}} = \vec{OM}_1 \wedge \vec{f}_{1e} + \vec{OM}_2 \wedge \vec{f}_{2e}$$

en conséquence de quoi :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{OM}_1 \wedge m_1 \vec{v}_1 + \vec{OM}_2 \wedge m_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}$$

5.6.2.3 Théorème de l'énergie cinétique

Le travail des forces internes au système (δW_{int}) ne dépend que du déplacement relatif de M_1 et M_2 :

$$\delta W_{\text{int}} = \vec{f}_{12} \cdot d\vec{M}_1 M_2 = \vec{f}_{21} \cdot d\vec{M}_2 M_1$$

Définition 25 Les puissances \mathcal{P}_{ext} et \mathcal{P}_{int} des forces $\vec{f}_{\text{ext}} = \vec{f}_{1e} + \vec{f}_{2e}$ et $\vec{f}_{\text{int}} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{21}$, qui exercent les travaux respectifs δW_{ext} et δW_{int} pendant une durée dt , sont définies par :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = \frac{\delta W_{\text{ext}}}{dt} \text{ et } \mathcal{P}_{\text{int}} = \frac{\delta W_{\text{int}}}{dt}$$

La variation d'énergie cinétique E_c du système dépend simultanément des travaux de \vec{f}_{ext} et \vec{f}_{int} :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{int}} + \mathcal{P}_{\text{ext}} \Leftrightarrow dE_c = \delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}}$$

5.6.2.4 Énergies potentielle et mécanique

Définition 26 Une force est dite conservative s'il existe une fonction E_p , appelée énergie potentielle, dont la variation est liée au travail élémentaire $\delta W^{(c)}$ de cette force :

$$dE_p = \delta W^{(c)}$$

Par exemple, si les forces internes au système sont gravitationnelles ou électrostatiques : $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$, le travail :

$$\delta W_{\text{int}} = \vec{f}_{12} \cdot d\overrightarrow{M_1 M_2} = \left(\frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r \right) \cdot (dr \vec{e}_r) = -\alpha \frac{dr}{r^2}$$

est associée à une énergie potentielle :

$$E_{p_{\text{int}}} = \frac{\alpha}{r}$$

D'une manière générale, les forces \vec{f}_{ext} et \vec{f}_{int} présentent des composantes conservatives (c) et dissipatives (d) :

$$\vec{f}_{\text{ext}} = \vec{f}_{\text{ext}}^{(c)} + \vec{f}_{\text{ext}}^{(d)} \text{ et } \vec{f}_{\text{int}} = \vec{f}_{\text{int}}^{(c)} + \vec{f}_{\text{int}}^{(d)}$$

auxquelles sont associés les travaux élémentaires :

$$\delta W_{\text{ext}}^{(c)} + \delta W_{\text{int}}^{(c)} = dE_p \text{ et } \delta W_{\text{ext}}^{(d)} + \delta W_{\text{int}}^{(d)} = dE_m$$

où E_p et $E_m = E_c + E_p$ désignent respectivement l'énergie potentielle du système et son énergie mécanique.

Remarque – Si le système est indéformable, le travail des forces internes :

$$\delta W_{\text{int}} = \vec{f}_{12} \cdot d\overrightarrow{M_1 M_2}$$

est nul. Aussi, $\delta W_{\text{int}} = 0$, quelle que soit la nature (conservative ou dissipative) des forces internes.

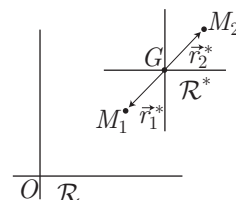
5.6.3 Système de points isolés

5.6.3.1 Lois de conservation

Le système de points $\{M_1, M_2\}$ est supposé isolé de l'extérieur : $\vec{f}_{\text{ext}} = \vec{f}_{1e} + \vec{f}_{2e} = \vec{0}$, de sorte que le théorème de la quantité de mouvement conduit à :

$$m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{f}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

ce qui suffit à montrer que :



le référentiel \mathcal{R}^* est galiléen

en conséquence de quoi la loi fondamentale de la dynamique s'y applique :

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2^*}{dt^2} = \vec{f}_{12}$$

Dans le cas où la force d'interaction entre M_1 et M_2 se réduit à la force gravitationnelle (conservative) :

$$\delta W_{\text{ext}}^{(d)} + \delta W_{\text{int}}^{(d)} = 0 \Rightarrow dE_m = 0 \Rightarrow E_m = \text{cte}$$

Quant au moment cinétique barycentrique de $\{M_1, M_2\}$ en G :

$$\vec{\sigma}_G^* = \vec{r}_1^* \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \vec{r}_2^* \wedge m_2 \vec{v}_2^*$$

sa variation vaut :

$$\frac{d\vec{\sigma}_G^*}{dt} = \vec{r}_1^* \wedge \vec{f}_{21} + \vec{r}_2^* \wedge \vec{f}_{12} = \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge \vec{f}_{12} \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_G^*}{dt} = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{M_1 M_2} \parallel \vec{f}_{12}$$

5.6.3.2 Réduction canonique

La définition de G permet d'écrire :

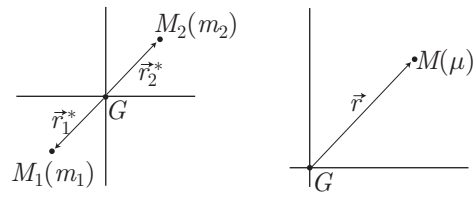
$$m_1 \vec{r}_1^* + m_2 \vec{r}_2^* = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}_1^* = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2^*$$

de sorte qu'en définissant : $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2} = \vec{r}_2^* - \vec{r}_1^*$, il apparaît que :

$$m_2 \vec{r}_2^* = -m_1 \vec{r}_1^* = \mu \vec{r} \quad (18)$$

où $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ est appelé *masse réduite* de $\{M_1, M_2\}$.

On peut alors décrire le système $\{M_1, M_2\}$ de deux manières différentes : les points M_1 et M_2 , repérés dans \mathcal{R}^* par $\vec{r}_1^* = \overrightarrow{GM}_1$ et $\vec{r}_2^* = \overrightarrow{GM}_2$, ou un point fictif M , de masse μ , repéré par $\vec{r}^* = \overrightarrow{GM}$.



Cette dernière représentation simplifie l'étude des mouvements simultanés de M_1 et M_2 car, en vertu de la relation (39), elle se réduit à l'étude du mouvement du seul point M , à partir duquel se déduisent :

$$\vec{r}_1^* = -\frac{\mu}{m_1} \vec{r} \text{ et } \vec{r}_2^* = \frac{\mu}{m_2} \vec{r}$$

En outre, on montre qu'en posant : $\vec{v}^* = \frac{d\vec{r}}{dt}$:

$$\mu \frac{d\vec{v}^*}{dt} = \vec{f}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{e}_r \quad E_c^* = \frac{1}{2} \mu (v^*)^2 \quad \vec{\sigma}_G^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^*$$

● **136** **Lycée Rabelais, Saint-Brieuc**

10 min.

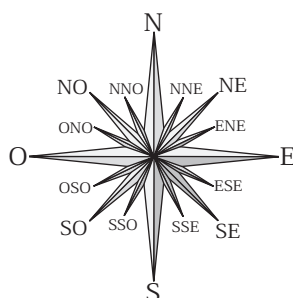
Changements de référentiels

MPSI-PCSI-PTSI

Un bateau se déplace vers l'est sur un plan d'eau immobile. Il est animé d'une vitesse constante égale à $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Une girouette, placée sur le bateau et qui indique d'où vient le vent, marque le nord-nord-est (NNE).

Quand le bateau s'arrête, la girouette indique nord-ouest (NO). Quelle est la vitesse réelle du vent ?

La figure suivante rappelle les points cardinaux :



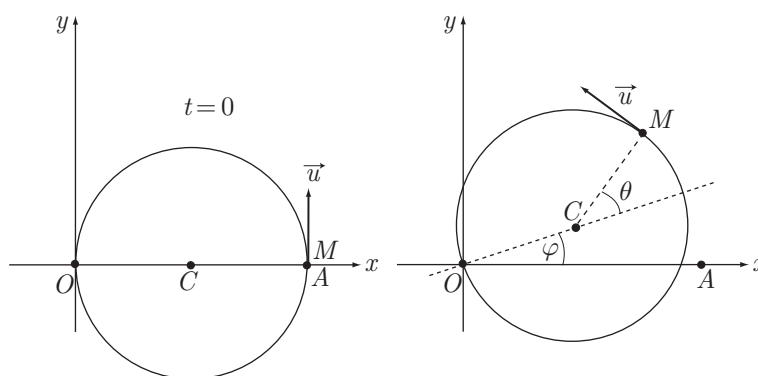
● **137** **Lycée Clémenceau, Nantes**

10 min.

Changements de référentiels

MPSI-PCSI-PTSI

Un disque circulaire, de centre C et de rayon R , tourne à vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\varphi}$ autour d'un axe perpendiculaire à son plan et passant par un point O de sa circonférence.



Un point M glisse sur la circonférence, à la vitesse relative \vec{u} , de norme u constante. À la date $t = 0$, M est en A , diamétralement opposé à O . On note :

$$\theta = (\vec{OC}, \vec{CM}) \quad \varphi = (\vec{Ox}, \vec{OC})$$

Le référentiel (Oxy) étant supposé galiléen, calculer les composantes de l'accélération de M dans ce référentiel, en fonction de u , R , ω et t .

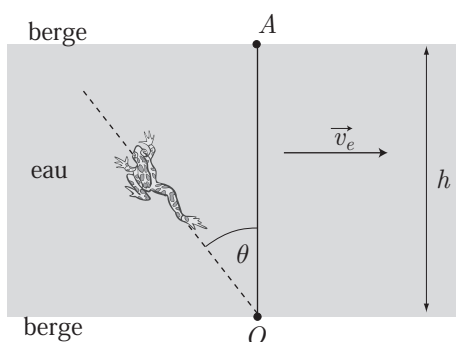
● **138** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

Changements de référentiels

MPSI-PCSI-PTSI

Une grenouille tente de traverser une rivière, dont le cours d'eau possède une vitesse \vec{v}_e (parallèle aux berges et constante) et est dépourvu de tourbillons. L'animal (remarquablement perspicace) a déjà remarqué que, dans un lac immobile, il peut atteindre une vitesse v constante. Son objectif est de réaliser la traversée de la rivière, de largeur h , en empruntant le chemin le plus court OA .



Pour parvenir à ses fins, la grenouille doit orienter son corps de manière à compenser le courant de la rivière ; on appelle θ l'angle que fait l'axe de son corps par rapport à OA .

1. Exprimer l'angle θ en fonction de v et de $v_e = \|\vec{v}_e\|$.
2. Quelle est, en fonction de h , v et v_e , la durée Δt de cette traversée.
3. Interpréter le cas où $v = v_e$.

● **139** ————— **Lycée Clémenceau, Nantes**

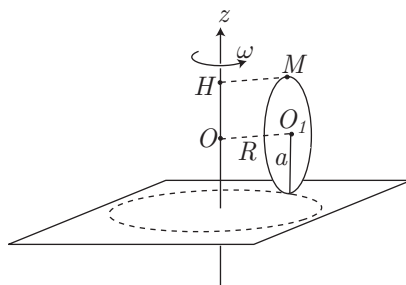
25 min.

Changements de référentiels

MPSI-PCSI-PTSI

Une roue de rayon a , de centre O_1 et d'axe OO_1 horizontal, roule sans glisser sur un plan horizontal fixe. O est fixé et OO_1 tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'un axe vertical Oz . On considère, à l'instant t , le point M le plus haut de la roue.

On pose $OO_1 = R$.



1. Exprimer, en fonction de R , ω et a , la vitesse angulaire de rotation Ω de la roue autour de l'axe OO_1 .
2. Donner, en fonction des mêmes paramètres, la norme du vecteur vitesse de M par rapport au référentiel fixe.
3. Trouver, de même, l'expression de la norme du vecteur accélération $\vec{\gamma}$ de M dans le référentiel fixe.
4. Calculer l'angle que fait le vecteur accélération $\vec{\gamma}$ avec le plan fixe.

● **140** ————— **Lycée Poincaré, Nancy**

30 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Changements de référentiels

Soit OAB un triangle rectangle en O . L'hypoténuse AB a pour longueur $2a$, l'angle $(OBA) = \theta$ est constant et le côté OA est confondu avec l'axe vertical Oz . Ce triangle tourne dans le sens positif autour de Oz à la vitesse angulaire constante Ω .

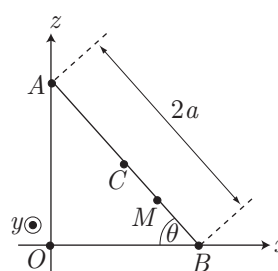
Simultanément, un point M oscille le long de l'hypoténuse AB de part et d'autre du point C , milieu de AB . L'élongation de M , comptée positivement de C vers B , est donnée par $u(t) = \overline{CM}(t)$. Par la suite, on considérera les deux référentiels suivants :

- (\mathcal{R}_0) , lié à la Terre, et auquel on attache le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$;
- (\mathcal{R}_1) , lié au triangle OAB et auquel on attache la base $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$.

On exprimera toutes les grandeurs demandées dans la base $(\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$.

Calculer la vitesse \vec{v} du point M à l'instant t par rapport au référentiel \mathcal{R}_0 :

1. à partir de l'expression de \overrightarrow{OM} , que l'on déterminera ;
2. en utilisant la loi de composition des vitesses.



● **141** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

10 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Dynamique en référentiel non galiléen

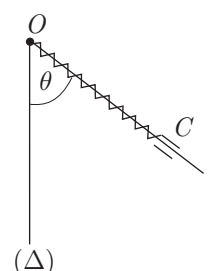
On dispose d'un ressort à spires non jointives, de longueur au repos l_0 et de raideur k . On négligera la masse du ressort dans tout l'exercice proposé.

On enfle ce ressort sur une tige Ot , soudée en O à un axe vertical (Δ) et inclinée obliquement par rapport à la verticale descendante d'un angle θ ($\theta < 90^\circ$).

Une des extrémités du ressort est fixée en O tandis qu'à l'autre on accroche un corps C , de masse m , coulissant sans frottements sur Ot .

L'ensemble tourne autour de Δ à la vitesse angulaire constante ω ; le ressort n'oscille pas et a une longueur constante l .

1. Préciser la trajectoire décrite par C .
2. Exprimer la longueur l du ressort.



- Exprimer, littéralement, l'intensité R de la force exercée par la tige sur C en fonction de m, g, θ, ω et l que l'on considérera comme un paramètre commode pour ne pas surcharger l'expression littérale de R .

● **142** ————— **Lycée Clémenceau, Nantes**

10 min.

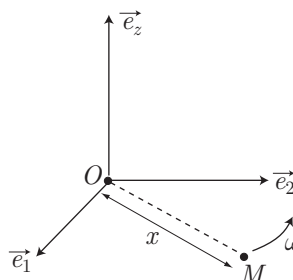
Dynamique en référentiel non galiléen

MPSI-PCSI-PTSI

Un axe horizontal tourne à vitesse angulaire ω constante autour d'un axe Oz vertical. Un point matériel M , de masse m , est mobile sur l'axe Ox , sans frottements.

À la date $t = 0$, on abandonne M en M_0 sur Ox , tel que $\overline{OM_0} = x_0 > 0$, avec une vitesse nulle par rapport à Ox .

- Étudier le mouvement relatif de M sur Ox .
- Déterminer la réaction de Ox sur M



● **143** ————— **Concours ENSTIM**

15 min.

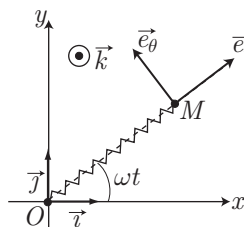
Dynamique en référentiel non galiléen

MPSI-PCSI-PTSI

On considère une particule M , de masse m , pouvant se mouvoir sans frottements le long d'un axe (O, \vec{e}_r) . Le champ de pesanteur est dirigé selon la verticale Oz : $\vec{g} = -g \vec{k}$, tandis que le mouvement de M se fait dans un plan horizontal Oxy .

Le mouvement de M est étudié dans le référentiel \mathcal{R}' , en rotation uniforme autour de l'axe Oz d'un référentiel galiléen $(Oxyz)$, de vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$, et associé au repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.

La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide l_0 , de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée en O . La position de M est repérée, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, par $\overline{OM} = r \vec{e}_r$.



- Préciser les expressions vectorielles des « forces » d'inertie dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$.
- Montrer que la « force » d'entraînement dérive d'une énergie potentielle E_{pe} que l'on précisera.
- On peut montrer que la « force » de Coriolis ne dérive pas d'une énergie potentielle, mais on admettra ici ce résultat.
Déterminer l'énergie potentielle totale $E_p(r)$. Tracer l'allure de $E_p(r)$ en distinguant trois cas possibles, selon la valeur de ω .
- Déterminer la longueur l_2 du ressort correspondant à la position d'équilibre dans le référentiel \mathcal{R}' .
- À quelle condition le résultat précédent est-il possible ? Cet équilibre est-il stable ?

● **144** **Lycée Poincaré, Nancy**

30 min.

Dynamique en référentiel non galiléen

MPSI-PCSI-PTSI

Un anneau M , de masse m et de dimensions très petites, peut glisser sans frottements sur une circonférence de rayon R , tournant à la vitesse angulaire ω_0 constante autour de son diamètre vertical, relativement au référentiel terrestre supposé galiléen.

On appelle \vec{g} le champ de pesanteur.

- Déterminer les positions d'équilibre relatif en fonction de ω_0 et de $\omega_p = \sqrt{\frac{g}{R}}$.
- Déterminer les équations des petites oscillations autour des éventuels équilibres relatifs stables.
- En déduire la stabilité de ces équilibres relatifs en fonction de ω_0 et ω_p .

● **145** **Concours ENSTIM**

15 min.

Oscillateurs

MPSI-PCSI-PTSI

Un point matériel M , de masse m , est soumis à la tension d'un ressort de raideur k , à une force de frottement fluide de coefficient λ et à une force extérieure $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. La position horizontale de cet oscillateur vérifie :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$$

On notera, par la suite : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\alpha = \frac{\lambda}{2m}$.

- On cherche une solution homogène au second membre de la forme :

$$x = a \cos(\omega t - \phi)$$

Déterminer les expressions de a et de ϕ en fonction de F_0 , m , α et ω_0 .

- On rappelle que, pendant une période T , la valeur moyenne d'une fonction $\psi(T)$ est définie par :

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \psi(t) dt$$

- Quelle est la puissance $P(t)$ fournie par la force $F(t)$?
 - Donner l'expression de sa valeur moyenne sur une période T , en fonction de m , α , ω et a .
 - Montrer que cette puissance compense exactement, sur une période, celle de la force de frottement fluide.
- Donner l'expression de la valeur moyenne de l'énergie mécanique de l'oscillateur, sur une période.

● **146** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

15 min.

Oscillateurs

MPSI-PCSI-PTSI

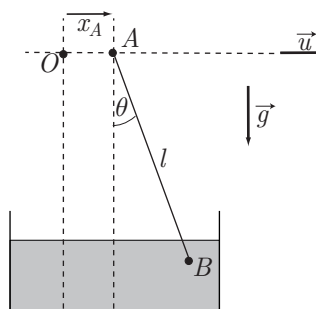
Un pendule simple est constitué d'une tige de longueur l , dont l'extrémité supérieure A est animée d'un mouvement sinusoïdal horizontal :

$$\vec{OA} = x_A \vec{u} = X_0 \cos(\omega t) \vec{u}$$

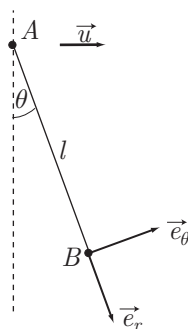
et dont l'extrémité inférieure B est accrochée à un point matériel de masse m , plongé dans un liquide qui exerce sur lui une force de frottement fluide linéaire \vec{F}_f de coefficient λ .

L'ensemble est soumis au champ de pesanteur \vec{g} .

Le référentiel \mathcal{R} auquel est associé l'axe $(O\vec{u})$ est supposé galiléen et on note θ l'angle que fait AB par rapport à la verticale.



1. Soit \mathcal{R}' le référentiel attaché à la base (A, \vec{u}) . On associe, à ce référentiel, la base polaire $\mathcal{B}(A, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ telle que $\vec{e}_r = \frac{\vec{AB}}{l}$ désigne le vecteur radial unitaire et \vec{e}_θ le vecteur orthoradial unitaire.



Exprimer, dans la base \mathcal{B} , les composantes des forces d'interaction et des « forces » d'inertie.

2. Les oscillations de B sont supposées d'amplitude assez faibles pour qu'on puisse se satisfaire des approximations suivantes :

$$\cos \theta \simeq 1 \text{ et } \sin \theta \simeq \theta$$

On définit les coefficients constants : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ et $\alpha = \frac{\lambda}{m\omega_0}$.

Montrer que l'équation du mouvement en θ se présente sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \alpha\omega_0 \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega^2 \frac{X_0}{l} \cos(\omega t)$$

3. Le régime permanent du mouvement de B est la solution de l'équation différentielle précédente, homogène au second membre ; elle est décrite par la fonction :

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

où θ_0 est l'amplitude des oscillations et ϕ leur déphasage.

À cette solution est associée une image complexe $\underline{\theta}$ telle que :

$$\underline{\theta} = \theta_0 e^{i(\omega t + \phi)} \Rightarrow \theta = \text{Re} \{ \underline{\theta} \}$$

Établir l'équation complexe faisant intervenir les paramètres $u = \frac{\omega_0}{\omega}$, θ_0 , ϕ , α , l et X_0 .

4. En déduire les expressions de θ_0 et ϕ en fonction de X_0 , u , l et α .
5. Donner une représentation graphique du déphasage ϕ en fonction de ω .
6. Lorsque $\phi = -\frac{\pi}{2}$, quelle est l'expression de θ_0 en fonction de X_0 , l et α ?

● 147 ————— Lycée Poincaré, Nancy

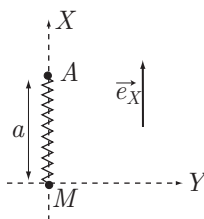
15 min.

Oscillateurs

MPSI-PCSI-PTSI

On considère, dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, X, Y, Z)$, une particule de masse m soumise à l'action d'un ressort vertical et parallèle à OX , de raideur k , et à l'action d'un amortisseur vertical exerçant un frottement fluide proportionnel à la vitesse (de coefficient f).

À l'équilibre, A est en $(a, 0, 0)$ et M est en $(0, 0, 0)$.



À l'instant $t = 0$, on donne à A un mouvement sinusoïdal vertical suivant OX :

$$X_A = \frac{a}{2} [1 + \cos(\omega t)]$$

On pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{f}{2m}$.

1. On note Ω le point tel que $\overrightarrow{\Omega A} = a \vec{e}_X$, \mathcal{R}' un référentiel lié à Ω , et x l'abscisse de M par rapport à Ω : $\overrightarrow{\Omega M} = x \vec{e}_x$.
Déterminer l'équation différentielle relative à l'abscisse x .
2. Déterminer l'amplitude des oscillations forcées, en fonction de ω_0 , λ , ω et a .
3. Déterminer l'expression de la pulsation ω à la résonance d'élongation.

● 148 ————— Concours de la banque « Agro »

20 min.

Oscillateurs

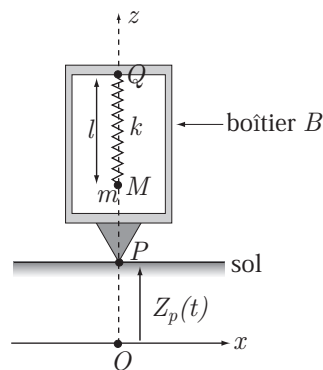
MPSI-PCSI-PTSI

On considère le dispositif représenté sur la figure ci-dessous.

Un boîtier (B), muni d'une pointe P , est posé sur le sol de telle sorte que la pointe suive les déplacements verticaux du sol, repérés dans un référentiel galiléen (\mathcal{R}) par leur cote $Z_p(t)$ sur la verticale ascendante \vec{u}_z . L'axe Ox est lié à ce référentiel (\mathcal{R}).

Les extrémités Q et M d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 sont fixées respectivement au boîtier et à un point matériel de masse m . La position de M par rapport au boîtier est repérée par la longueur $l(t)$ du ressort.

Le mouvement de la masse m est amorti par une force $\vec{F} = f \frac{dl}{dt} \vec{u}_z$ où f est une constante positive.



1. (a) Exprimer la longueur l_1 du ressort lorsque la masse m est à l'équilibre, en fonction de l_0 , m , g et k .
 (b) Dans toute la suite, on pose $l(t) = l_1 - z(t)$ et on suppose que l'électronique du sismographe permet d'obtenir directement $z(t)$. Exprimer l'accélération du point M en fonction de $\frac{d^2 Z_p}{dt^2} = \ddot{Z}_p$ et $\frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}$.
2. En présence d'une onde sismique, la pointe P est animée d'un mouvement modélisé par $Z_p(t) = a \cos(\omega t)$. En traduisant les lois de la mécanique dans le référentiel (\mathcal{R}), montrer que l'équation du mouvement de M se met sous la forme :

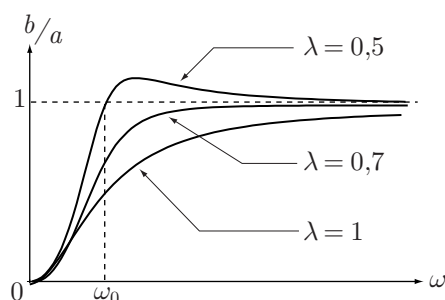
$$\ddot{z} + 2\lambda\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega^2 a \cos(\omega t)$$

et exprimer les constantes λ et ω_0 en fonction des données.

3. La réponse $z(t)$ du sismographe à l'excitation $Z_p(t) = a \cos(\omega t)$ est égale à la somme du régime transitoire $z_t(t)$ et d'un régime sinusoïdal forcé $z_s(t)$. Pour quelle valeur de λ le régime transitoire est-il apériodique critique ? Quelle est alors la forme générale de $z_t(t)$ (on ne cherchera pas à déterminer les constantes d'intégration) ?
4. Dans la suite, on s'intéressera au régime sinusoïdal forcé pour lequel la solution est de la forme : $z(t) = b \cos(\omega t - \phi)$. On introduit l'amplitude complexe associée $\underline{z} = b e^{j(\omega t - \phi)}$ qui est alors solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{\underline{z}} + 2\lambda\omega_0 \dot{\underline{z}} + \omega_0^2 \underline{z} = \omega^2 a e^{j\omega t}$$

- (a) Établir l'expression du rapport $\frac{b}{a}$ en fonction de ω , ω_0 et λ .
- (b) La figure ci-dessous donne l'allure du graphe de $\frac{b}{a}$ en fonction de ω pour différentes valeurs de λ :



Vérifier la cohérence de ce graphe avec l'expression obtenue en 4. (a) en examinant les limites de $\frac{b}{a}$ pour ω tendant vers zéro ou vers l'infini.

(c) À quelle condition sur ω le sismographe restitue-t-il fidèlement l'amplitude du mouvement de la pointe P ?

Quel est l'intérêt de choisir pour λ une valeur proche de celle calculée en 3. ?

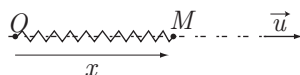
● 149 ————— Lycée Poincaré, Nancy

40 min.

Oscillateurs

MPSI-PCSI

Un oscillateur harmonique à une dimension est composé d'un ressort horizontal (de raideur k et de longueur à vide nulle) dont l'extrémité O est immobile tandis qu'à l'autre extrémité est fixé un point M de masse m . On repérera la position de M par le vecteur $\overrightarrow{OM} = x \vec{u}$.



Le point M est également soumis à une force de frottement $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ (τ est un coefficient constant positif et \vec{v} le vecteur vitesse de M) et à la force $\vec{F}' = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}$.

1. Soient deux fonctions $f(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ et $g(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$; on appelle valeur moyenne, pendant une période T , de $f \times g$, la grandeur :

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) \times g(t) dt$$

Soient \underline{f} et \underline{g} les images complexes associées à $f(t)$, $g(t)$ et \underline{g}^* le conjugué complexe de \underline{g} . Montrer que :

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{f} \times \underline{g}^* \}$$

2. Établir l'équation différentielle satisfaite par x .

3. Soit $\langle P \rangle$ la valeur moyenne de la puissance délivrée par la force \vec{F}' . Exprimer cette

puissance en fonction de m , τ , $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Quelle est sa valeur maximale $\langle P \rangle_{\max}$?

4. On définit la bande passante par :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \text{ avec } \langle P(\omega_1) \rangle = \langle P(\omega_2) \rangle = \frac{\langle P \rangle_{\max}}{2}$$

Déterminer la relation liant τ et $\Delta\omega$.

● **150** **Concours ENS Lyon et Cachan**

30 min.

Oscillateurs

MPSI-PCSI-PTSI

La surface du sol est considérée comme plane.

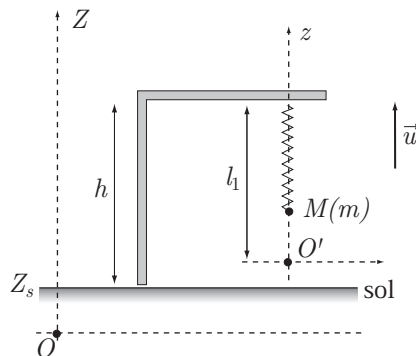
Le sismographe est un appareil destiné à enregistrer les vibrations du sol sous l'action d'un séisme. Nous envisageons un mouvement du sol décrit par une vibration verticale :

$$Z_s = Z_0 \cos(\omega t)$$

par rapport à un niveau de référence $Z = 0$ dans un référentiel galiléen.

Le sismographe est constitué d'un support rigide de hauteur h auquel on suspend une masse m par l'intermédiaire d'un ressort sans masse, de raideur k et de longueur à vide l_v . Le ressort prend alors une longueur l_1 .

La position de la masse est repérée par rapport à sa position d'équilibre dans le référentiel terrestre ; son mouvement est vertical, amorti par un frottement fluide $\vec{f} = -\lambda \dot{z} \vec{u}$, λ étant le coefficient de frottement et $\dot{z} \vec{u}$ la vitesse de la masse par rapport au sol.



1. Expliquer pourquoi le référentiel d'étude n'est pas galiléen.
2. Déterminer l'équation différentielle donnant le mouvement de la masse m , repérée par la cote $z(t)$.
3. Déterminer l'amplitude A du mouvement de la masse m en régime sinusoïdal forcé et tracer la courbe donnant A en fonction de ω , dans le cas où le coefficient d'amortissement vérifie :

$$\lambda^2 < 2km$$

4. L'utilisateur souhaite observer un mouvement dont l'amplitude soit, dans la mesure du possible, égale à l'amplitude du mouvement du sol. Comment doit-il choisir m et k , la pulsation ω étant fixée. Justifier physiquement ce résultat.

Les fréquences de vibration enregistrées étant dans la gamme de 1 à 10 Hz, quelle relation sur m et k obtient-on ? Que dire, à l'équilibre, de l'allongement du ressort soumis au seul poids de la masse m ?

● 151 Concours des Mines-Ponts

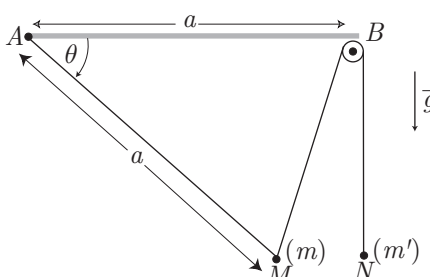
10 min.

Théorème du moment cinétique

MPSI-PCSI-PTSI

Soit un fil inextensible et sans masse, fixé en A à un socle horizontal AB (de longueur a) et passant en B sur une poulie parfaite, de très petites dimensions.

En un point M , tel que $AM = a$, est fixée une masse ponctuelle m et, au bout du fil, est aussi accrochée une masse m' en N . Le dispositif est placé verticalement dans le champ de pesanteur \vec{g} .



- Établir le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et exprimer leurs moments en A ; le seul angle devant intervenir dans ces expressions sera $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.
- Trouver une condition sur m et m' pour qu'une position d'équilibre existe. Exprimer, quand il existe, l'angle d'équilibre θ_e , en fonction de m et m' .

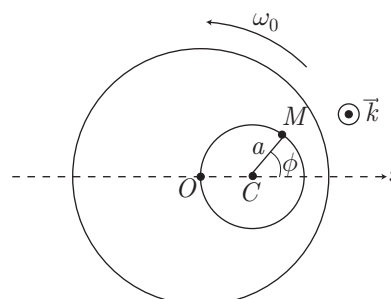
● 152 Concours Centrale

10 min.

Théorème du moment cinétique

MPSI-PCSI-PTSI

Un point matériel M , de masse m , peut se déplacer sur une trajectoire circulaire de centre C et de rayon a passant par le centre O d'un disque D . La trajectoire est contenue dans le plan du disque et l'expérience est réalisée en l'absence de champ de gravitation; on suppose négligeables les frottements. Le disque est animé d'un mouvement de rotation uniforme, à la vitesse angulaire constante ω_0 , autour de son axe (O, \vec{k}) . On note $\phi = (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CM})$.



- Définir un référentiel d'étude (\mathcal{R}) pour le mouvement de M . Dans ce référentiel, faire le bilan des forces d'interaction et des « forces » d'inertie qui s'exercent sur M .
- Exprimer le moment, en C , des « forces » précédemment recensées. Exprimer, de même, le moment cinétique $\vec{\sigma}_C$ de M en C par rapport au référentiel (\mathcal{R}) .
- En déduire l'équation du mouvement en ϕ dans (\mathcal{R}) .
- Caractériser les positions d'équilibre relativement à (\mathcal{R}) et étudier leur stabilité.

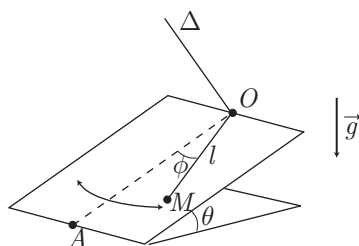
● 153 Concours de l'ENS

15 min.

Théorème du moment cinétique

MPSI-PCSI-PTSI

Un pendule simple, de longueur l , a son extrémité O fixée sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale.



À l'autre extrémité, M , on a disposé une masse ponctuelle m . Le contact avec le plan incliné se fait sans frottements.

1. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur M et exprimer le moment \mathcal{M}_Δ de leur résultante par rapport à l'axe Δ passant par O perpendiculairement au plan du mouvement.
2. Pour θ fixé, déterminer la pulsation Ω des petites oscillations, en fonction de θ , g et l , en appliquant le théorème du moment cinétique.

● 154 ————— Lycée Poincaré, Nancy

15 min.

Théorème du moment cinétique

MPSI-PCSI-PTSI

Dans le plan (xOy) d'un référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, un mobile ponctuel P décrit la parabole d'équation cartésienne :

$$y^2 = 2px \quad (p \text{ est une constante positive}).$$

Sa vitesse \vec{v} , de composantes v_x, v_y est telle que :

$$v_x^2 = 2q v_y \quad (q \text{ est une constante positive}).$$

1. Exprimer v_x et v_y en fonction de p, q et y .
2. Déterminer, en fonction de p, q, m (masse de P), le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ de P en O .
3. (a) Montrer que la résultante des forces qui s'exerce sur P s'écrit :

$$\vec{F} = \alpha \vec{OP}$$

où α est une grandeur que l'on exprimera en fonction de m, p, q et y .

(b) Que vaut le moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ de \vec{F} en O ?

(c) Montrer que le résultat de la question 2. confirme l'expression de $\vec{\mathcal{M}}_O$.

● 155 ————— Lycée Bellevue, Toulouse

20 min.

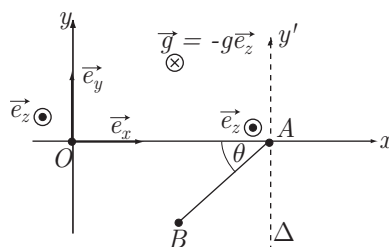
Théorème du moment cinétique

MPSI-PCSI-PTSI

Un axe Δ , vertical et de vecteur directeur \vec{e}_z , est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré, d'accélération constante $\vec{a} = a_0 \vec{e}_x$. On désigne par \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z les vecteurs unitaires d'une base orthonormée associée à un repère galiléen $\mathcal{R}(Oxyz)$ dont le plan xOy est horizontal.

En un point A de Δ est attachée une tige, de masse négligeable et de longueur L , dont l'autre extrémité est assimilée à un point matériel B de masse m . Le mouvement de B se fait dans le plan horizontal xOy , sans frottements. La tige AB fait un angle θ par rapport à la direction de \vec{e}_x et, à l'instant $t = 0$ où commence l'expérience, $\theta(0) = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$ tandis que B est immobile.

On se place dans le référentiel $\mathcal{R}'(A, x', y', z')$ lié à Δ , d'origine A et dont les axes Ax' , Ay' et Az' sont respectivement parallèles aux axes Ox , Oy et Oz de \mathcal{R} .



1. Calculer le moment \mathcal{M}_Δ , par rapport à Δ , des forces qui s'exercent sur B .
2. En appliquant le théorème du moment cinétique, écrire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ .
3. En déduire la vitesse angulaire de rotation ω de B dans \mathcal{R}' en fonction de a_0 , L et θ .
4. On pose :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}}$$

Exprimer, en fonction de L , I et a_0 , le temps τ nécessaire pour que θ devienne nul.

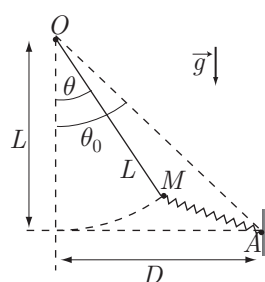
● 156 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

20 min.

Théorème du moment cinétique

MPSI-PCSI-PTSI

Un pendule pesant est constitué d'un point M , de masse m , suspendu par une tige rigide, de longueur L et de masse négligeable, dont l'autre extrémité peut tourner autour d'un point O immobile. Le point M est également soumis à l'action d'un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle. Lorsque la tige est verticale, le triangle OMA représente un triangle rectangle tel que $(MOA) = \theta_0$, avec $\tan \theta_0 = \frac{D}{L}$. Le dispositif est plongé dans le champ de pesanteur \vec{g} vertical et descendant.



1. Lorsque la tige fait un angle θ avec la verticale :
 - (a) exprimer le moment $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})$ du poids \vec{P} de M , par rapport à l'axe Δ passant par O perpendiculairement à la tige ;
 - (b) exprimer, en fonction de k , L , D et θ , le moment $\mathcal{M}_\Delta(\vec{T})$ par rapport à Δ , de la tension \vec{T} du ressort.

2. Trouver l'expression de l'angle θ_e d'équilibre de M , en fonction de k , D , m , g et L .
3. La tige est écartée de sa position d'équilibre d'un angle $\varepsilon = \theta - \theta_e$ d'amplitude petite devant θ_e .
 - (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par ε .
 - (b) En déduire que des oscillations prennent naissance, avec une pulsation :

$$\omega = \left[\frac{(mg + kL)^2 + k^2 D^2}{m^2 L^2} \right]^{1/4}$$

● **157** ————— **Lycée Camille Guérin, Poitiers**

5 min.

Forces centrales

MPSI-PCSI-PTSI

Un point matériel M de masse m est soumis à une force centrale, de centre O :

$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r \text{ avec } \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

Déterminer l'expression de $F(r)$ en fonction de la valeur initiale r_0 de r et de la valeur initiale v_0 de la vitesse, pour que ce point décrive une trajectoire circulaire.

● **158** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

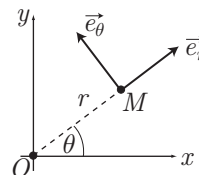
Forces centrales

MPSI-PCSI-PTSI

Soit O un point fixe d'un référentiel galiléen dans lequel se déplace, sur un plan (xOy) , un point matériel M de masse m . En coordonnées polaires (r, θ) , la position de M est donnée par :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \text{ avec } r = r_0 e^{-a\theta}$$

où r_0 et a sont des constantes réelles positives. On suppose, en outre, qu'à la date $t = 0$, $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = \omega_0$.



1. Trouver l'expression $\theta(t)$ pour que M soit soumis à une force centrale de pôle O .
2. En déduire l'expression de $r(t)$.
3. Quelle est la valeur algébrique $F(r)$ de la force centrale \vec{F} qui s'exerce sur M ?
4. Donner l'expression de l'énergie potentielle $E_p(r)$ du point M soumis à cette force.

● **159** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

15 min.

Forces centrales

MPSI-PCSI-PTSI

Dans un référentiel galiléen, une particule M de masse m est soumise à une force centrale unique \vec{f} de la part d'un point fixe O .

1. Montrer que son mouvement est plan.

2. L'expression de la force est :

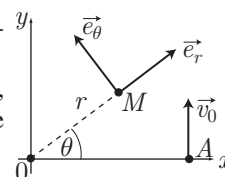
$$\vec{f} = -k \frac{m}{r^5} \vec{e}_r$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $r = OM$, $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ et où k est une constante positive.

Quelle est l'énergie potentielle de la particule ? (on prendra l'énergie potentielle nulle lorsque la particule est infiniment éloignée de O).

3. À l'instant initial, la particule est au point A , situé à la distance a du point O et sa vitesse est \vec{v}_0 , perpendiculaire à \overrightarrow{OA} .

La particule est repérée, à chaque instant, par ses coordonnées polaires r et θ , comme l'indique la figure ci-contre. Justifier, puis traduire, en utilisant les conditions initiales, la conservation du moment cinétique en O de la particule et la conservation de son énergie mécanique.



4. En déduire une équation différentielle du premier ordre liant r et la dérivée première de r par rapport à θ , ainsi que a , k et la norme v_0 de la vitesse initiale \vec{v}_0 .

5. On souhaite que la trajectoire de la particule soit un cercle de diamètre OA .

Quelle doit être la relation liant r et θ ?

6. Utiliser cette relation et l'équation différentielle de la question 4. pour déterminer la norme v_0 de la vitesse initiale.

Vérifier l'homogénéité du résultat obtenu.

● 160 ————— Concours Polytechnique

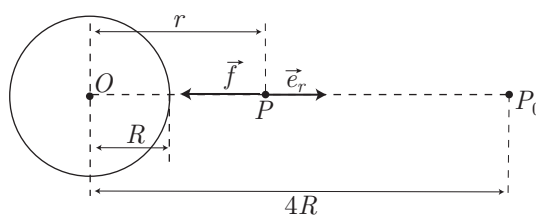
15 min.

Forces centrales

MPSI-PCSI-PTSI

Un point matériel P , de masse m , est soumis à l'attraction gravitationnelle d'une planète, de centre O et de masse $M \gg m$:

$$\vec{f} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \text{ avec } \overrightarrow{OP} = r \vec{e}_r$$



Si R désigne le rayon de la planète, le point P occupe initialement la position d'un point P_0 tel que $OP_0 = 4R$.

1. Exprimer l'énergie mécanique E_m du point P , à tout instant, en fonction de G , M , m , r et $\frac{dr}{dt}$, en admettant que P soit immobile en P_0 .

2. En déduire une équation différentielle en $r(t)$.

3. Exprimer, en fonction de R , G et M , le temps τ mis par P pour tomber sur la planète.

On pourra éventuellement effectuer le changement de variable : $r = 4R \cos^2 x$.

● **161** **Concours ENSTIM**

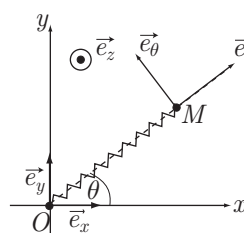
30 min.

Forces centrales

MPSI-PCSI-PTSI

Un palet M , de masse m , peut se mouvoir sans frottements dans le plan (O, x, y) horizontal (table à coussins d'air par exemple).

Le champ de pesanteur est suivant la verticale Oz : $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ et le mouvement de M est étudié dans le référentiel du laboratoire assimilé à un référentiel galiléen associé à un repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. La masse m est accrochée à l'extrémité d'un ressort (point M) de longueur à vide l_0 , de raideur k , dont l'autre extrémité est fixée en O . La position de M est repérée dans la base (\vec{e}_x, \vec{e}_y) par $\vec{OM} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$ ou dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ par $\vec{OM} = r \vec{e}_r$.



1. Faire un bilan des forces et montrer qu'il y a conservation du moment cinétique \vec{L}_O en O .
2. On lance la particule d'un point M_0 tel que $\vec{OM}_0 = \vec{OM}(t=0) = l_1 \vec{e}_x$, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = l_1 \omega \vec{e}_y$ orthogonale à \vec{OM}_0 . Dans la suite, on travaillera en coordonnées polaires dans le plan (O, x, y) .
 - (a) Préciser \vec{L}_O en fonction de r et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$, puis en fonction des conditions initiales et des vecteurs de base. On notera L la norme de \vec{L}_O .
 - (b) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle élastique. Doit-on tenir compte de l'énergie potentielle de pesanteur pour étudier le mouvement ?
 - (c) Montrer qu'il y a conservation de l'énergie mécanique E_m puis préciser l'expression de E_m :
 - en fonction des conditions initiales ;
 - en fonction de $r, \dot{r} = \frac{dr}{dt}, m, k, l_0$ et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.
 - (d) Montrer que l'énergie mécanique peut s'écrire :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{\text{eff}}(r)$$

Préciser l'expression de $E_{\text{eff}}(r)$ et tracer son allure.

3. La masse peut-elle s'éloigner indéfiniment du pôle attracteur ?
4. La particule peut-elle passer par le centre attracteur au cours de son mouvement ?
5. On cherche à déterminer une condition entre l_1 et ω pour avoir un mouvement circulaire.
 - (a) Montrer que, dans ce cas, le mouvement est uniforme.
 - (b) Déterminer l_1 en fonction de k, l_0 et ω . Cette expression est-elle valable pour tout ω ?

● 162 Lycée Hoche, Versailles

60 min.

Forces centrales

MPSI-PCSI-PTSI

Le problème a pour but l'étude de certains mouvements d'un point matériel soumis à une force centrale inversement proportionnelle au cube de la distance.

1. Un point matériel M , de masse m , est soumis à une force dont le support passe constamment par un point fixe O . L'intensité de cette force est inversement proportionnelle au cube de la distance $r = OM$. On posera : $F = \frac{Km}{r^3}$, en convenant que K et F sont des nombres positifs si la force est répulsive, négatifs pour une force attractive.

Démontrer que :

- (a) le mouvement de M est plan ;
 - (b) le mouvement de M a lieu suivant la loi des aires.
2. Dans le plan de la trajectoire, on repérera la position du point M à l'aide des coordonnées polaires (r, θ) d'origine O . On posera $r^2 \dot{\theta} = C$.
En appliquant à M le principe fondamental de la dynamique et en tenant compte de la loi des aires, montrer que r (considéré comme une fonction du temps t) est solution d'une équation différentielle que l'on appellera équation (I).
 3. En appliquant la loi de conservation de l'énergie mécanique, montrer que r est solution d'une équation différentielle du premier ordre, ou équation (II).
 4. Les équations (I) et (II) sont-elles équivalentes ?

Pour les questions de 5. à 9. on supposera que les conditions initiales sont telles que :

- à l'instant initial, pour lequel on prendra $t = 0$, le point M se trouve en A , de coordonnées $r_0 = a$ et $\theta_0 = 0$;
- la vitesse initiale \vec{V}_0 est perpendiculaire à \overrightarrow{OA} .

On orientera le plan de telle sorte que C soit positif.

5. On suppose que la force est répulsive ($K > 0$). Exprimer r en fonction de a , t et $\tau = \frac{a^2}{\sqrt{K + C^2}}$.

Indiquer l'allure de la trajectoire décrite par M lorsque t varie de 0 à $+\infty$.

6. Les conditions initiales étant choisies comme indiqué ci-dessus, quelle valeur particulière C_0 faut-il donner à C pour que la trajectoire soit un cercle de centre O ?
Quelle doit être la nature de la force ?
Quelle est, en fonction de K et de a , la période du mouvement ?
7. Les conditions initiales étant choisies comme indiqué ci-dessus, la vitesse initiale est modifiée de telle sorte que $C = \alpha C_0$, avec $\alpha > 1$. Exprimer r en fonction de K , a , α et t .
8. Construire l'allure de la trajectoire.
9. Si, de même, $C = \beta C_0$, avec $0 < \beta < 1$, exprimer r en fonction de K , a , β et t .
En se limitant aux deux conditions : $t \geq 0$ et $r > 0$, indiquer sommairement l'allure de la trajectoire.

10. On ne suppose plus, maintenant, la vitesse initiale perpendiculaire à \overrightarrow{OA} , mais on se limite au cas particulier $C = C_0$. Montrer qu'il y a deux types de mouvements possibles et donner l'allure de la trajectoire dans ces deux cas, en supposant $t \geq 0$ et $r > 0$.

● 163 Concours ATS

10 min.

Trajectoires dans le champ de gravitation

MPSI-PCSI-PTSI

La Terre, de masse M , tourne sur elle-même autour de sa ligne des pôles, à la vitesse angulaire Ω . On ne considère pas son mouvement de révolution autour du Soleil.

Un satellite, de masse m , évolue de façon géostationnaire (c'est-à-dire immobile pour un observateur terrestre) ; il tourne de façon synchrone avec la Terre sur une orbite circulaire, de rayon a , située dans le plan équatorial.

- En appliquant la loi fondamentale de la dynamique au satellite, déterminer l'expression du rayon a de l'orbite géostationnaire, en fonction de Ω , M et G (constante de gravitation).
- Donner l'expression de l'énergie potentielle de gravitation $U(r)$ du satellite lorsqu'il se situe à une distance r , quelconque, du centre de la Terre.
On exprimera $U(r)$ en fonction de G , m , M et r , en retenant la condition : $U = 0$ à l'infini.
- Exprimer l'énergie mécanique totale E_T du satellite sur son orbite géostationnaire, en fonction de G , M , m et a .
- Le satellite a été lancé à partir d'une base terrestre située sur l'équateur (Kourou, en Guyane). Déterminer l'énergie minimale, W_L , qu'il a fallu dépenser pour le placer sur son orbite géostationnaire. On ne tient pas compte ici des frottements dans l'atmosphère, pas plus que de l'énergie dépensée pour propulser la fusée porteuse, hors satellite.
- Exprimer la différence ΔW_L entre l'énergie minimale de lancement sur orbite géostationnaire à partir d'une base équatoriale et à partir d'une base située à une latitude géographique $\lambda \neq 0$.
Est-il, sur le plan énergétique, préférable d'effectuer les lancements depuis la base de Kourou ($\lambda = 0$) ou du Cap Canaveral, en Floride ($\lambda \simeq 25^\circ\text{N}$) ?

● 164 Lycée Saint-Louis, Paris

10 min.

Trajectoires dans le champ de gravitation

MPSI-PCSI-PTSI

Un satellite décrit, autour de la Terre de rayon R , une orbite circulaire de rayon r_0 . On exerce sur le satellite une force \vec{F} supposée constante et tangente à l'orbite circulaire pendant un temps très court τ (brusque variation de vitesse sans déplacement). On observe que le satellite vient s'écraser sur la Terre, son rayon-vecteur ayant tourné d'un angle $\frac{\pi}{2}$ entre l'instant où l'on exerce la force et celui où le satellite s'écrase au sol.

On rappelle qu'en coordonnées polaires une ellipse a pour équation :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où p est le paramètre de l'ellipse et e son excentricité ; son demi-grand axe a pour valeur :

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

1. Le satellite ayant une masse m , déterminer la norme v de sa vitesse, après lui avoir appliqué la force \vec{F} , en fonction de R , r_0 et g_0 (intensité de la pesanteur au niveau du sol).
2. En déduire $\|\vec{F}\|$ en fonction m , r_0 , R , τ et g_0 .

● 165 Lycée Livet, Nantes

20 min.

Trajectoires dans le champ de gravitation

MPSI-PCSI-PTSI

Un satellite artificiel A , de masse m , est placé sur une orbite circulaire d'attente, de rayon $r_0 = R + h$, autour de la Terre.

Lorsque le satellite atteint un point B de cette trajectoire, on lui communique un excédent de vitesse ; la nouvelle vitesse est tangente à l'orbite circulaire et vaut $v_1 = 10 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Données :

- masse du satellite : $m = 2\,000 \text{ kg}$;
- altitude de B : 180 km ;
- constante de gravitation universelle : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ USI}$;
- masse de la Terre : $M \simeq 6 \times 10^{24} \text{ kg}$;
- Rayon de la Terre : $R = 6\,400 \text{ km}$.

1. Exprimer, en fonction de r_0 , G et M , la valeur v_0 de la vitesse lorsque le satellite est sur son orbite d'attente.

Calculer numériquement v_0 ainsi que l'énergie mécanique du satellite.

2. La nouvelle trajectoire vérifie la deuxième loi de Binet :

$$\vec{\gamma} = -\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u^2 \right) \vec{e}_r \text{ avec } u = \frac{1}{r}$$

où $\vec{\gamma}$ est l'accélération du satellite et C est la constante de la loi de aires ($C = \|\vec{r} \wedge \vec{v}\|$, \vec{r} étant le rayon-vecteur du satellite et \vec{v} sa vitesse).

- (a) Montrer que $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, e et p étant des constantes dont on donnera la signification.

r est la coordonnée radiale, et θ l'angle que fait le rayon vecteur avec le rayon-vecteur initial.

Exprimer p en fonction de r_0 , v , G et M , puis calculer sa valeur numérique.

- (b) En déduire la valeur de e .

● 166 Concours Centrale-Supélec

20 min.

Trajectoires dans le champ de gravitation

MPSI-PCSI-PTSI

On considère un vaisseau, supposé ponctuel, de masse m , mobile par rapport à un astre de masse M et de centre O . La constante de gravitation est notée G . La distance entre le

vaisseau et le centre de l'astre est r . On se placera dans le référentiel (supposé galiléen) lié à l'astre.

1. Le vaisseau est initialement sur une orbite circulaire de rayon r_0 décrite à la vitesse V_0 .
 - (a) Exprimer la relation existant entre r_0 , G , M et V_0 .
 - (b) On allume le moteur pendant un temps bref, de sorte que la vitesse varie, mais pas la distance au centre de l'astre.
Évaluer la vitesse V_1 qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre, en fonction de V_0 .
2. Le commandant de bord dispose, en fait, d'un « budget vitesse » ΔV égal à $4V_0$; cela signifie que la quantité de carburant disponible lui permet de faire varier la vitesse du vaisseau, en une ou plusieurs fois, pourvu que la somme des valeurs absolues des variations de vitesse n'excède pas $4V_0$.
 - (a) **Option 1** – Le commandant utilise tout son budget d'un seul coup en amenant sa vitesse initiale à $5V_0$. Évaluer sa vitesse finale (« à l'infini »), en fonction de V_0 .
 - (b) **Option 2** – On utilise un huitième du budget pour ralentir le vaisseau de V_0 à $\frac{V_0}{2}$ en un temps très court devant la période, le vecteur vitesse gardant la même direction. Décrire la nouvelle trajectoire : le demi-grand axe a , la distance r_P du centre O au périhélie (r_0 désignant la distance de O à l'apogée), les normes des vitesses V_A et V_P à l'apogée et au périhélie.
 - (c) On utilise ensuite le reste du « budget vitesse » au passage au périhélie pour augmenter au *maximum* la vitesse du vaisseau. Justifier la nature de la nouvelle trajectoire et déterminer la nouvelle vitesse finale (« à l'infini ») en fonction de V_0 .
 - (d) Comparer les deux options, et commenter.

● 167 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

30 min.

Trajectoires dans le champ de gravitation

MPSI-PCSI-PTSI

On considère le référentiel géocentrique de travail (\mathcal{R}) comme galiléen, où la Terre occupe la position d'un point O , autour duquel tourne un satellite artificiel de masse m , assimilé à un point S , soumis à la force d'attraction de la Terre :

$$\vec{f} = -\frac{\mu m}{r^3} \times \overrightarrow{OS} \text{ avec } \overrightarrow{OS} = \vec{r}$$

1. Dans le cas général, la position de S dans le plan de sa trajectoire est repérée par les coordonnées polaires $r = OS$ et θ , angle que fait \overrightarrow{OS} avec une direction fixe du plan de la trajectoire.
On note $C = r^2 \dot{\theta} = r^2 \omega$. Montrer que C est une constante et que l'équation de la trajectoire est :

$$u = \frac{1}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{\mu}{C^2}$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme :

$$u = \frac{1}{p} \times [1 + e \cos(\theta - \varphi)]$$

qui montre que la trajectoire est une conique de foyer O , d'excentricité e et de paramètre p .

2. Montrer que :

$$e^2 = p^2 (A^2 + B^2)$$

3. S est lancé d'un point S_0 ($r = r_0, \theta = 0$) avec une vitesse $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$ perpendiculaire à \vec{OS}_0 .

(a) Calculer C et les constantes d'intégration A et B . En déduire l'expression :

$$r = \frac{\eta r_0}{1 + (\eta - 1) \cos \theta} \text{ avec } \eta = \frac{r_0 v_0^2}{\mu}$$

(b) Lorsque la trajectoire est une ellipse, calculer le demi-grand axe a , le demi-petit axe b , la distance c entre le centre de l'ellipse et un foyer, en fonction de r_0 et η .

On rappelle que :

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \text{ et } c = a \times e$$

(c) Exprimer la période T en fonction de a et μ . On rappelle que l'aire de l'ellipse vaut : $\mathcal{A} = \pi ab$.

● 168 ————— Lycée Carnot, Dijon

40 min.

Troisième loi de Kepler

MPSI-PCSI-PTSI

I- Généralités

On considère un point P , de masse m , en mouvement dans un champ de force centrale, dont on prend le centre O comme origine du référentiel dans lequel s'effectue l'étude.

On note : A la norme de tout vecteur \vec{A} , \vec{r} le vecteur \vec{OP} , \vec{v} la vitesse de P , $\vec{\sigma}$ son moment cinétique en O , \mathcal{E}_p son énergie potentielle, \mathcal{E}_m son énergie mécanique.

- Exprimer, en fonction de \mathcal{E}_p , la force \vec{f} subie par le point P .
- Écrire l'expression de \mathcal{E}_m et montrer que cette énergie est conservée au cours du mouvement.
- Montrer que $\vec{\sigma}$ est aussi conservé et en déduire que le mouvement de P est plan.
- On repère, dans ce plan, la position de P par ses coordonnées polaires r, θ et on note $\dot{r}, \dot{\theta}$ leur dérivée temporelle.

(a) Exprimer σ à l'aide de ces variables, et en déduire la loi des aires de Kepler, qu'on traduira en posant : $\Gamma = \frac{\sigma}{m}$.

(b) Exprimer l'énergie cinétique de P en fonction de m, σ et des variables $u = \frac{1}{r}$ et $\frac{du}{d\theta}$.

II- Cas de la gravitation

Dans cette partie, on considère le mouvement d'une planète assimilée à un point matériel P , de masse m , dans le champ de gravitation du Soleil, de centre O et de masse $M \gg m$. On pose $g = GM$ et on utilise la variable $u = \frac{1}{r}$.

1. Exprimer l'énergie potentielle newtonienne, \mathcal{E}_p , de cette planète.
2. Montrer que la trajectoire de P vérifie l'équation différentielle :

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 - \alpha u = \beta \quad (19)$$

où α et β sont des constantes que l'on exprimera en fonction de g , de la masse m , de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m et du moment cinétique σ de la planète.

3. Résoudre l'équation (19). Montrer que la trajectoire de P est une conique dont on calculera l'excentricité e , d'abord en fonction de α et β , puis en fonction de g , m , \mathcal{E}_m et σ .
4. Dans le cas d'une trajectoire elliptique, calculer le demi-grand axe a et le demi-petit axe b en fonction de g , m , \mathcal{E}_m et σ .

On rappelle que $b = a\sqrt{1 - e^2}$ avec $a = \frac{p}{1 - e^2}$.

5. Retrouver la loi de Kepler reliant a et la période T du mouvement.

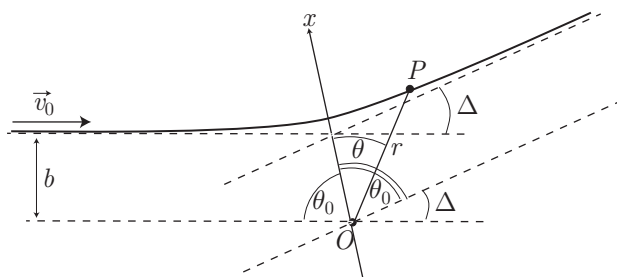
● 169 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

30 min.

Diffusion coulombienne des protons

MPSI-PCSI

Un noyau, de charge électrique positive, est supposé immobile dans un référentiel galiléen, dont l'origine coïncide avec le centre O du noyau. Un proton P , de masse m et de charge q ($q > 0$), est envoyé en direction du noyau, à une distance b appelée *paramètre d'impact*; P présente une vitesse \vec{v}_0 lorsque la distance $r = OP$ est suffisamment grande pour considérer que P n'est pas soumis au champ électrique du noyau.



Le but de cet exercice est la détermination de la déviation Δ en fonction de $v_0 = \|\vec{v}_0\|$ et de b .

1. On travaille en coordonnées polaires, système dans lequel $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OP}}{OP}$ désigne le vecteur radial et $\vec{e}_\theta \perp \vec{e}_r$ le vecteur orthoradial.
 - (a) Rappeler l'expression de la force électrostatique \vec{f} que le noyau, de charge $Q > 0$, exerce sur le proton.

(b) En coordonnées polaires, la trajectoire du proton est une hyperbole d'équation :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où p est le paramètre de la conique et e son excentricité, telle que $|e| > 1$.

Exprimer, en fonction de e , l'angle θ_0 correspondant aux directions vers lesquelles le proton est infiniment éloigné du noyau.

Compte tenu du schéma proposé ci-dessus, donner les signes de e et de p .

(c) Quelle relation peut-on établir entre Δ et θ_0 ?

En déduire que :

$$\sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{1}{|e|}$$

2. On définit le vecteur $\vec{C} = \vec{r}' \wedge \vec{v}$, où \vec{v} est le vecteur vitesse de P .

(a) Montrer que $C = \|\vec{C}\|$ est constant.

(b) En déduire l'expression de C en fonction de b et v_0 .

3. On rappelle qu'en coordonnées polaires, la vitesse \vec{v} et l'accélération $\vec{\gamma}$ de P sont données par :

$$\vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + Cu \vec{e}_\theta \text{ et } \vec{\gamma} = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r \text{ avec } u = \frac{1}{r}$$

(a) Montrer que :

$$v_0 = \left| \frac{Ce}{p} \right| \times \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right)$$

(b) En déduire l'expression de $\tan\left(\frac{\Delta}{2}\right)$ en fonction de q , Q , m , v_0 et b .

(c) Commenter le cas $b = 0$; représenter schématiquement l'allure de la trajectoire de P dans ce cas.

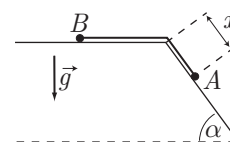
● 170 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

15 min.

Systemes de deux points matériels

MPSI-PCSI

Deux points A et B , de masses respectives m_A et m_B ($m_B < m_A$), sont liés par un fil de masse négligeable et de longueur L . Le point B se déplace sur un plan horizontal et le point A sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale, et qui fait suite au plan horizontal. L'ensemble peut se déplacer sur les plans, sans frottements, dans le champ de pesanteur d'intensité g .



On désigne par x l'abscisse de A sur le plan incliné. L'ensemble est lâché au repos à $t = 0$ lorsque l'abscisse de A vaut a .

Exprimer, en fonction de m_A , m_B , g , α , L et a , la vitesse de B quand $x = L$ (le point B quitte le plan horizontal).

● **171** _____ **Lycée Poincaré, Nancy**

15 min.

Systèmes de deux points matériels

MPSI-PCSI

Deux personnes, A et B , de masses m_A et $m_B < m_A$, se trouvent sur un canot de masse négligeable, à une distance L l'une de l'autre. Le tout est au repos initialement. On néglige les frottements.

Déterminer le déplacement d et le sens de ce déplacement lorsque A et B ont changé de place dans le canot.

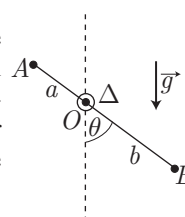
● **172** _____ **Lycée Fabert, Metz**

15 min.

Systèmes de deux points matériels

MPSI-PCSI

Soient deux points A et B , de masses m_A et m_B , liés par une tige de masse négligeable. La tige est percée, en O , d'un trou par lequel passe un axe Δ horizontal autour duquel elle peut tourner librement. On note $a = OA$, $b = OB$ et g l'intensité de la pesanteur (verticale). La position de la tige est repérée par l'angle θ qu'elle fait par rapport à la verticale.



- Exprimer, en fonction de m_A , m_B , a , b et θ , le moment cinétique du système $\{A, B\}$ en O .
- Déterminer, en fonction de m_A , m_B , g , a , b et θ le moment du poids de ce système en O .
En déduire qu'il existe deux positions d'équilibre.
- (a) Déterminer l'équation différentielle en θ puis linéariser cette équation au voisinage des positions d'équilibre.
(b) Montrer qu'une de ces positions correspond à un équilibre stable et déterminer la pulsation des oscillations qui se produisent lorsque la tige est un peu écartée de cette position. On supposera que $am_A < bm_B$.
(c) Discuter le cas : $am_A = bm_B$.

● **173** _____ **Lycée Poincaré, Nancy**

30 min.

Systèmes de deux points matériels

MPSI-PCSI

On assimile la Terre et la Lune à deux points matériels de masses m_T et m_L ; la distance Terre-Lune est supposée fixe et égale à d .

On admet que ces deux points décrivent des orbites circulaires autour de leur barycentre G à la vitesse angulaire constante ω (vitesse définie par rapport à des directions fixes). Ce barycentre G décrit autour du Soleil – supposé fixe à l'origine O des coordonnées – une orbite circulaire de rayon a , à la vitesse angulaire constante Ω . Ces deux mouvements sont supposés coplanaires et les rotations ont lieu dans le même sens.

Calculer, pour le système Terre-Lune ainsi schématisé :

- l'énergie cinétique dans le référentiel « fixe » lié au Soleil ;
- le moment cinétique en O dans ce même référentiel.

● 174 **Concours Centrale-Supélec**

30 min.

MPSI-PCSI

Systèmes de deux points matériels

Soit un système, isolé dans l'espace, de deux astres A_1 et A_2 , de masses m_1 et m_2 . On étudie leur mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ supposé galiléen. Les deux astres pourront être considérés comme ponctuels.

1. Soient $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{a}_1, \vec{a}_2$ les positions, vitesses et accélérations des deux astres dans \mathcal{R} . Exprimer la relation fondamentale de la dynamique en désignant par \vec{f}_{12} la force gravitationnelle agissant sur l'astre A_2 , par g la constante de gravitation universelle et par \vec{r} le vecteur $\overrightarrow{A_1 A_2}$.
2. Que peut-on dire du centre de masse G des deux astres ?
3. On étudie le mouvement relatif de A_2 par rapport à A_1 . Écrire une équation liant $\vec{f}_{12}, \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ et la masse réduite μ de l'ensemble des deux astres.
4. Définir l'énergie potentielle E_p , l'énergie cinétique E_c^* et l'énergie totale E^* dans le repère barycentrique. Exprimer E_c^* en fonction de μ et $\vec{v}^* = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Établir la loi de conservation de E^* .
5. Donner l'expression du moment cinétique barycentrique $\vec{\sigma}^*$ en fonction de \vec{r}, \vec{v}^* et μ .
Que peut-on dire de $\vec{\sigma}^*$? on posera : $\|\vec{\sigma}^*\| = \mu C$.
6. Montrer que l'étude du mouvement des deux astres dans le référentiel barycentrique se ramène à celle du mouvement d'une particule fictive, dont on précisera la masse. Quelles sont les propriétés générales de ce mouvement ?

Établir la relation :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr^*}{dt} \right)^2 = E^* - E_{\text{eff}}(r)$$

où $E_{\text{eff}}(r)$ est l'énergie potentielle effective dont on donnera l'expression et la représentation graphique. Examiner les différents cas possibles, selon la valeur de E^* . Rappeler (sans démonstration) dans chaque cas, la nature de la trajectoire.

7. Dans le cas d'une trajectoire elliptique, on désigne par r_{max} et r_{min} les distances maximale et minimale des deux astres. Établir une équation du second degré en r dont r_{max} et r_{min} sont solutions. En déduire d'une part l'expression de l'énergie E^* en fonction de g, m_1, m_2 et du demi-grand axe de l'ellipse a , d'autre part une relation entre a, e (excentricité de l'ellipse), E^*, C (constante des aires) et μ .

Établir la relation :

$$C^2 = ag (m_1 + m_2) (1 - e^2)$$

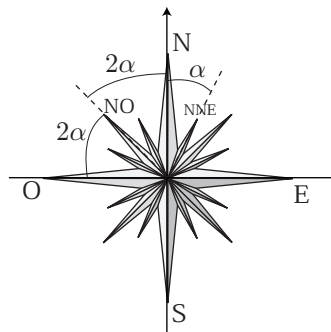
Retrouve-t-on la troisième loi de Kepler ?

● 136 ————— Lycée Rabelais, Saint-Brieuc

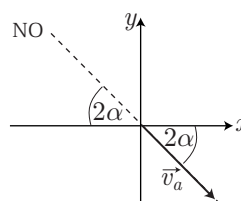
Chaque quart de plan étant divisé en quatre portions égales, les directions données par les points cardinaux font entre elles un angle :

$$\alpha = \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$$

Dans un repère, dont les axes Ox et Oy coïncident avec les directions ouest-est et sud-nord, il devient alors possible de repérer les composantes des diverses vitesses impliquées dans l'énoncé.

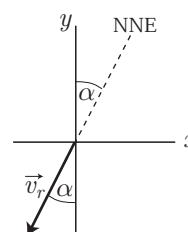


- Lorsque le bateau s'arrête, son référentiel coïncide avec le référentiel terrestre, auquel cas la vitesse \vec{v}_a du vent correspond à sa vitesse « absolue ». Ce vecteur a donc pour composantes : $\vec{v}_a \begin{pmatrix} v_a \cos(2\alpha) \\ -v_a \sin(2\alpha) \end{pmatrix}$.



- Le bateau se déplace vers l'est avec une vitesse $\vec{v}_e \begin{pmatrix} v_e \\ 0 \end{pmatrix}$. Or, la girouette étant solidaire du bateau, la vitesse de celui-ci est assimilable à la vitesse d'entraînement du bateau par rapport au référentiel terrestre.
- Lorsque le bateau avance, la vitesse du vent que la girouette mesure représente la vitesse du vent relativement à un référentiel en mouvement. Cette vitesse relative s'écrit aussi :

$$\vec{v}_r \begin{pmatrix} -v_r \sin \alpha \\ -v_r \cos \alpha \end{pmatrix}$$



La loi de composition des vitesses impose une relation entre ces trois vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{v}_a &= \vec{v}_r + \vec{v}_e \Rightarrow \begin{pmatrix} v_a \cos(2\alpha) \\ -v_a \sin(2\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_r \sin \alpha \\ -v_r \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_e \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{cases} v_a \cos(2\alpha) = -v_r \sin \alpha + v_e \\ v_a \sin(2\alpha) = v_r \cos \alpha \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} v_r \sin \alpha = v_e - v_a \cos(2\alpha) \\ v_r \cos \alpha = v_a \sin(2\alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

Le rapport de ces deux équations fournit :

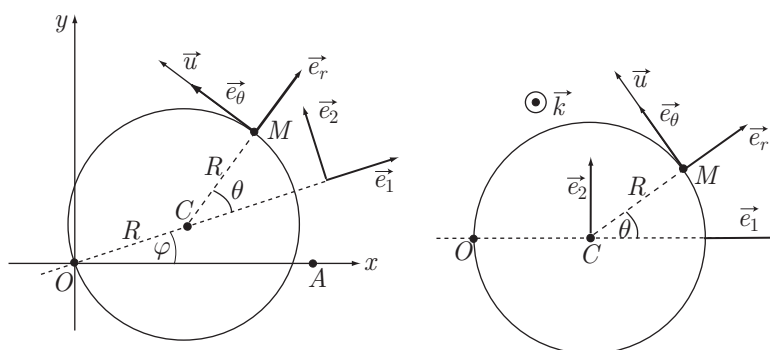
$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{v_e - v_a \cos(2\alpha)}{v_a \sin(2\alpha)} \Rightarrow v_a \sin(2\alpha) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = v_e - v_a \cos(2\alpha) \\ \Rightarrow v_a \sin(2\alpha) \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + v_a \cos(2\alpha) &= v_e \\ \Rightarrow \frac{v_a}{\cos \alpha} \underbrace{[\sin(2\alpha) \sin \alpha + \cos(2\alpha) \cos \alpha]}_{=\cos(2\alpha-\alpha)=\cos \alpha} &= v_e \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$v_a = v_e = 15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

● 137 ————— Lycée Clémenceau, Nantes

Soient \vec{e}_1 et \vec{e}_2 les vecteurs de la base associée au référentiel tournant autour de O avec le disque :



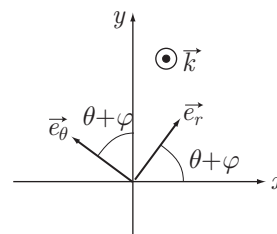
Dans ce référentiel, le point M tourne autour du point C , auquel cas il est recommandé d'utiliser les coordonnées polaires pour décrire ses éléments cinétiques :

$$\overrightarrow{CM} = R \vec{e}_r \text{ et } \vec{v}_r = u \vec{e}_\theta$$

De plus, les composantes de \vec{e}_r et de \vec{e}_θ s'obtiennent aisément dans le référentiel fixe (Oxy) :

$$\vec{e}_r \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{e}_\theta \begin{pmatrix} -\sin(\theta + \varphi) \\ \cos(\theta + \varphi) \end{pmatrix}$$

Aussi l'accélération (absolue) $\vec{\gamma}_r$ de M dans (Oxy) se calcule en appliquant la loi de composition des accélérations :



$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

où :

- $\vec{\gamma}_r$ désigne l'accélération (relative) de M dans le référentiel $(C, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{k})$, en coordonnées polaires :

$$\vec{\gamma}_r = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{R}\dot{\theta} + R\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r \text{ car } R = \text{cte et } \ddot{\theta} = 0$$

et :

$$\vec{v}_r = \dot{R} \vec{e}_r + R\dot{\theta} \vec{e}_\theta = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta = u \vec{e}_\theta \Rightarrow R\dot{\theta} = u \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{u}{R} = \text{cte} \quad (20)$$

Aussi :

$$\dot{\theta} = \frac{u}{R} \Rightarrow \vec{\gamma}_r = -R \times \left(\frac{u}{R}\right)^2 \vec{e}_r = -\frac{u^2}{R} \vec{e}_r$$

- $\vec{\gamma}_c$ représente l'accélération de Coriolis :

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = 2(\omega \vec{k}) \wedge (u \vec{e}_\theta) = 2\omega u \vec{k} \wedge \vec{e}_\theta$$

c'est-à-dire :

$$\vec{k} \wedge \vec{e}_\theta = -\vec{e}_r \Rightarrow \vec{\gamma}_c = -2\omega u \vec{e}_r$$

- $\vec{\gamma}_e$ est l'accélération d'entraînement du point M , dans le référentiel tournant autour de O à la vitesse angulaire ω constante :

$$\vec{\gamma}_e = -\omega^2 \overrightarrow{OM} = -\omega^2 (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM})$$

Les vecteurs qui apparaissent dans le membre de droite s'expriment aisément :

$$\overrightarrow{OC} = R \vec{e}_1 \text{ et } \overrightarrow{CM} = R \vec{e}_r$$

et conduisent à l'expression de $\vec{\gamma}_e$:

$$\vec{\gamma}_e = -\omega^2 R \vec{e}_1 - \omega^2 R \vec{e}_r$$

où les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_r ont pour composantes, dans la base (Oxy) :

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \text{ et } \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) \end{pmatrix}$$

De ce recensement, il ressort que :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_a &= \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c \\ &= -\frac{u^2}{R} \vec{e}_r - \omega^2 R \vec{e}_1 - \omega^2 R \vec{e}_r - 2\omega u \vec{e}_r \\ &= -\left(\frac{u^2}{R} + R\omega^2 + 2\omega u\right) \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) \end{pmatrix} - R\omega^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En outre, à la date $t = 0$, M est confondu avec le point A , ce qui signifie aussi que $\varphi = 0$ et $\theta = 0$ lorsque $t = 0$. Or, l'équation (20) révèle que :

$$\dot{\theta} = \frac{u}{R} = \text{cte} \Rightarrow \theta = \frac{ut}{R} + \alpha$$

où α est une constante ajustée à la valeur $\theta = 0$ pour $t = 0$:

$$0 = \frac{u \times 0}{R} + \alpha \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \theta = \frac{ut}{R}$$

et, puisque le rayon OC du disque tourne à la vitesse angulaire ω autour de O , il s'ensuit que : $\varphi = \omega t$.

Les composantes γ_x et γ_y de $\vec{\gamma}_a$ vérifient ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_a \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{pmatrix} &= - \left(\frac{u^2}{R} + R\omega^2 + 2\omega u \right) \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi) \\ \sin(\theta + \varphi) \end{pmatrix} - R\omega^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \gamma_x = - \left(\frac{u^2}{R} + R\omega^2 + 2\omega u \right) \times \cos(\theta + \varphi) - R\omega^2 \cos \varphi \\ \gamma_y = - \left(\frac{u^2}{R} + R\omega^2 + 2\omega u \right) \times \sin(\theta + \varphi) - R\omega^2 \sin \varphi \end{cases} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\gamma_x = - \left(\frac{u^2}{R} + R\omega^2 + 2\omega u \right) \times \cos \left[\left(\frac{u}{R} + \omega \right) t \right] - R\omega^2 \cos(\omega t)$$

et :

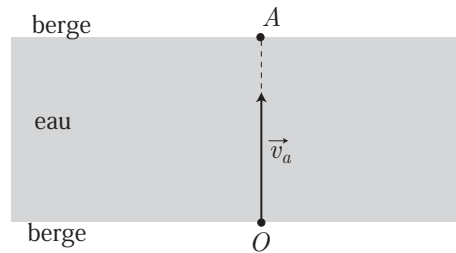
$$\gamma_y = - \left(\frac{u^2}{R} + R\omega^2 + 2\omega u \right) \times \sin \left[\left(\frac{u}{R} + \omega \right) t \right] - R\omega^2 \sin(\omega t)$$

● 138 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

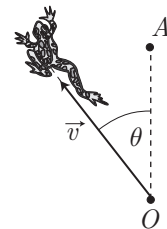


Pour mener à son terme cet exercice, il convient de distinguer très clairement les référentiels d'étude.

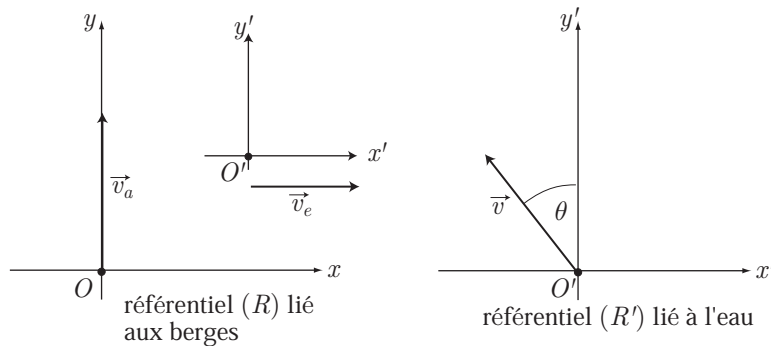
Dans le référentiel immobile, lié aux berges, la grenouille se déplace de O vers A , auquel cas sa vitesse (absolue) \vec{v}_a est dirigée selon \overrightarrow{OA} :



En revanche, dans le référentiel lié à l'eau, le corps de la grenouille fait un angle θ par rapport à (OA) ; il en va donc de même de sa vitesse relative \vec{v} .



1. Le conseil méthodologique précédent suggère l'existence de deux référentiels d'étude :



Dans le référentiel (R) , la grenouille possède pour vecteur vitesse : $\vec{v}_a \begin{pmatrix} 0 \\ v_a \end{pmatrix}$, tandis que dans le référentiel (R') , son vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} \begin{pmatrix} -v \sin \theta \\ v \cos \theta \end{pmatrix}$.

Ces deux vecteurs sont liés par la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}$$

où, en l'absence de tourbillon (le vecteur rotation $\vec{\omega}$ de (R') est nul), la vitesse d'entraînement s'écrit simplement :

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{OO'}}{dt} = \begin{pmatrix} v_e \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par suite :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_e \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v \sin \theta \\ v \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_e = v \sin \theta \\ v_a = v \cos \theta \end{cases} \quad (21)$$

La première équation de ce système fournit alors :

$$\sin \theta = \frac{v_e}{v} \Rightarrow \theta = \arcsin \left(\frac{v_e}{v} \right)$$

2. Dans le référentiel (R) , la grenouille parcourt la distance $OA = h$ avec une vitesse constante v_a , pendant un temps Δt tel que :

$$v_a = \frac{h}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{h}{v_a}$$

Quant au système (21), il fournit :

$$\begin{cases} v_e^2 = v^2 \sin^2 \theta \\ v_a^2 = v^2 \cos^2 \theta \end{cases} \Rightarrow v_e^2 + v_a^2 = v^2 \Rightarrow v_a = \sqrt{v^2 - v_e^2}$$

C'est pourquoi :

$$\Delta t = \frac{h}{\sqrt{v^2 - v_e^2}} \quad (22)$$

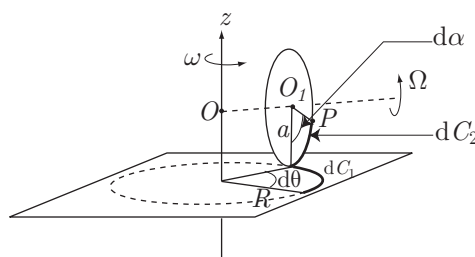
3. L'identité $v = v_e$ signifie que, par rapport à l'eau, la vitesse de la grenouille n'excède pas celle du courant par rapport aux berges ; ses chances d'atteindre le point A sont assez faibles. D'ailleurs, la relation (22) confirme ce résultat car $\Delta t = \frac{h}{\sqrt{v^2 - v_e^2}}$ tend vers l'infini lorsque $v = v_e$ (la grenouille n'est pas près d'atteindre le point A). Toujours est-il que son corps doit prendre la direction donnée par :

$$\theta = \arcsin\left(\frac{v_e}{v}\right) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

ce qui signifie qu'elle nage à contre-courant ... mais reste en O .

● 139 ————— Lycée Clémenceau, Nantes

1. En l'absence de glissement, lorsque la roue décrit un arc $dC_1 = R d\theta$ autour de Oz , pendant dt , un point P de cette roue décrit le même arc $dC_2 = dC_1$ autour de l'axe OO_1 :

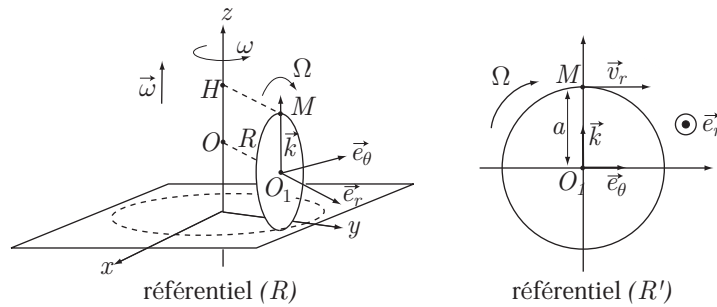


Le point P ainsi défini tourne d'un angle $d\alpha$ tel que : $dC_2 = a d\alpha$, en conséquence de quoi :

$$dC_2 = dC_1 \Rightarrow a d\alpha = R d\theta \text{ avec } \begin{cases} d\alpha = \Omega dt \\ d\theta = \omega dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Omega a = R\omega \Rightarrow \Omega = \frac{R\omega}{a}$$

2. La roue est animée d'un double mouvement de rotation : autour de l'axe Oz d'une part et autour de l'axe OO_1 d'autre part. C'est pourquoi il convient de définir un référentiel $R(Oxyz)$ fixe par rapport au plan, et un référentiel R' de centre O_1 et dont les vecteurs de la base \vec{e}_r et \vec{e}_θ tournent autour de l'axe Oz avec un vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ (\vec{k} est un vecteur unitaire directeur de l'axe Oz) :



Dans le référentiel R' , le point M est affecté d'une vitesse relative $\vec{v}_r = v_r \vec{e}_\theta$ et, puisque ce point tourne autour de O_1 avec une vitesse angulaire $\Omega = \frac{R\omega}{a}$, il s'ensuit que :

$$v_r = a\Omega = R\omega \Rightarrow \vec{v}_r = R\omega \vec{e}_\theta$$

tandis que le vecteur position relative vaut : $\vec{r}^j = a \vec{k}$. Aussi, le vecteur vitesse \vec{v} (absolue) que M présente dans le référentiel (R) s'obtient grâce à la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

où le vecteur vitesse \vec{v}_e d'entraînement de (R') est donné par :

$$\vec{v}_e = \frac{d\vec{OO}_1}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}^j$$

Par suite, la connaissance de :

$$\frac{d\vec{OO}_1}{dt} = \frac{d(R\vec{e}_r)}{dt} = R \frac{d\vec{e}_r}{dt} = R\vec{\omega} \wedge \vec{e}_r = R\omega \vec{e}_\theta$$

et de : $\vec{\omega} \wedge \vec{r}^j = (\omega \vec{k}) \wedge (a \vec{k}) = \vec{0}$ conduit à l'expression de \vec{v} :

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \frac{d\vec{OO}_1}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}^j = R\omega \vec{e}_\theta + R\omega \vec{e}_\theta$$

c'est-à-dire :

$$\vec{v} = 2R\omega \vec{e}_\theta \Rightarrow \|\vec{v}\| = 2R\omega$$

3. L'accélération (absolue) $\vec{\gamma}$ de M , dans le référentiel fixe, suit la loi de composition des accélérations : $\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$ où :

- $\vec{\gamma}_r$ représente l'accélération de M dans le référentiel (R') . Notamment, dans ce référentiel le point M tourne autour de O_1 avec une vitesse angulaire Ω constante :

$$\vec{\gamma}_r = -a\Omega^2 \vec{k} = -a \left(\frac{R\omega}{a} \right)^2 \vec{k} \Rightarrow \vec{\gamma}_r = -\frac{R^2\omega^2}{a} \vec{k}$$

- $\vec{\gamma}_c$ désigne l'accélération de Coriolis : $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$.

Δ Dans l'expression précédente, $\vec{\omega}$ représente le vecteur rotation de \vec{e}_r et \vec{e}_θ par rapport au référentiel fixe (R).

Il aurait été erroné d'écrire : $\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$ car $\vec{\Omega}$ désigne le vecteur rotation de M dans (R').

Ainsi :

$$\vec{\gamma}_c = 2 \left(\omega \vec{k} \right) \wedge (R\omega \vec{e}_\theta) = 2R\omega^2 \underbrace{\vec{k} \wedge \vec{e}_\theta}_{-\vec{e}_r} = -2R\omega^2 \vec{e}_r$$

- $\vec{\gamma}_e$ est l'accélération d'entraînement du référentiel (R') qui contient le point M , dont la projection sur l'axe de rotation Oz est H :

$$\vec{\gamma}_e = -\omega^2 \overrightarrow{HM} = -\omega^2 R \vec{e}_r$$

De cette analyse, il ressort que :

$$\vec{\gamma} = -\frac{R^2\omega^2}{a} \vec{k} - 2R\omega^2 \vec{e}_r - \omega^2 R \vec{e}_r = -\frac{R^2\omega^2}{a} \vec{k} - 3R\omega^2 \vec{e}_r \quad (23)$$

Les vecteurs \vec{e}_r et \vec{k} étant perpendiculaires, il s'ensuit que :

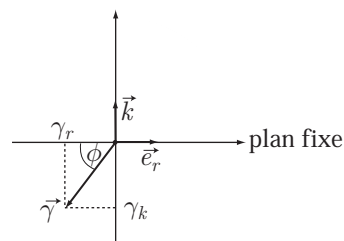
$$\|\vec{\gamma}\| = \sqrt{\left(-\frac{R^2\omega^2}{a}\right)^2 + (-3R\omega^2)^2} \Rightarrow \|\vec{\gamma}\| = R\omega^2 \times \sqrt{\frac{R^2}{a^2} + 9}$$

4. Le vecteur $\vec{\gamma}$ possède les composantes γ_r et γ_k associées aux vecteurs unitaires \vec{e}_r et \vec{e}_k . C'est pourquoi le vecteur $\vec{\gamma}$ fait, avec le plan fixe, un angle ϕ tel que :

$$\tan \phi = \frac{|\gamma_k|}{|\gamma_r|}$$

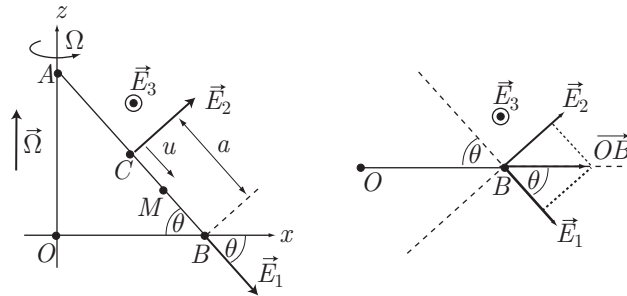
avec :

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} = \gamma_k \vec{k} + \gamma_r \vec{e}_r &\Rightarrow \begin{cases} \gamma_k = -\frac{R^2\omega^2}{a} \\ \gamma_r = -3R\omega^2 \end{cases} \Rightarrow \tan \theta = \frac{R^2\omega^2}{a} \times \frac{1}{3R\omega^2} = \frac{R}{3a} \\ &\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{R}{3a}\right) \end{aligned}$$



● 140 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. Soit \vec{E}_2 le vecteur perpendiculaire à \vec{E}_1 et à \vec{e}_3 :



Le vecteur \vec{OB} a pour composantes, dans la base $(O, \vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3)$:

$$\vec{OB} = OB \cos \theta \vec{E}_1 + OB \sin \theta \vec{E}_2$$

où la norme $OB = \|\vec{OB}\|$ vaut :

$$OB = 2a \cos \theta \Rightarrow \vec{OB} = 2a \cos^2 \theta \vec{E}_1 + 2a \cos \theta \sin \theta \vec{E}_2$$

C'est pourquoi le vecteur position \vec{OM} s'écrit :

$$\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BC} + \vec{CM} = \vec{OB} - a \vec{E}_1 + u \vec{E}_1 \quad (24)$$

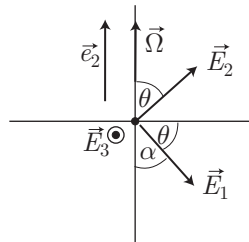
$$\Rightarrow \vec{OM} = (2a \cos^2 \theta - a + u) \vec{E}_1 + 2a \cos \theta \sin \theta \vec{E}_2 \quad (25)$$

La vitesse \vec{v} de M , dans le référentiel \mathcal{R}_0 , est alors définie par :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{u} \vec{E}_1 + (2a \cos^2 \theta - a + u) \frac{d\vec{E}_1}{dt} + 2a \cos \theta \sin \theta \frac{d\vec{E}_2}{dt}$$

où $\dot{u} = \frac{du}{dt}$

Or, les vecteurs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 tournent autour de l'axe Oz avec un vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_2$:



C'est pourquoi leurs dérivées temporelles s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{E}_1}{dt} &= \vec{\Omega} \wedge \vec{E}_1 = -\Omega \sin \alpha \vec{E}_3 \\ &= -\Omega \cos \theta \vec{E}_3 \text{ car } \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \sin \alpha = \cos \theta \end{aligned}$$

et :

$$\frac{d\vec{E}_2}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \vec{E}_2 = -\Omega \sin \theta \vec{E}_3$$

Ce faisant :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \dot{u} \vec{E}_1 - \Omega \cos \theta (2a \cos^2 \theta - a + u) \vec{E}_3 - \Omega \sin \theta (2a \cos \theta \sin \theta) \vec{E}_3 \\ &= \dot{u} \vec{E}_1 - \Omega \cos \theta (2a \cos^2 \theta - a + u + 2a \sin^2 \theta) \vec{E}_3\end{aligned}$$

où l'identité $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ apporte une simplification :

$$\vec{v} = \dot{u} \vec{E}_1 - \Omega \cos \theta (a + u) \vec{E}_3$$

2. La loi de composition des vitesses fournit une relation entre la vitesse \vec{v} de M dans \mathcal{R}_0 , sa vitesse relative \vec{v}_r dans \mathcal{R}_1 et la vitesse d'entraînement \vec{v}_e de \mathcal{R}_1 par rapport à \mathcal{R}_0 :

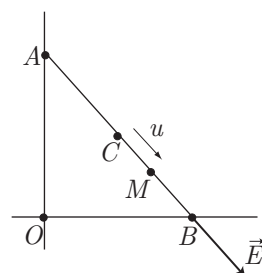
$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

Il convient alors de définir méthodiquement \vec{v}_r et \vec{v}_e .

- La vitesse \vec{v}_r est celle du point M dans le référentiel \mathcal{R}_1 .

Dans ce référentiel, \vec{OC} est immobile, de même que \vec{E}_1 , en raison de quoi :

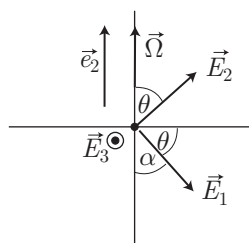
$$\begin{aligned}\vec{OM} &= \vec{OC} + \vec{CM} = \vec{OC} + u \vec{E}_1 \\ \Rightarrow \vec{v}_r &= \dot{u} \vec{E}_1\end{aligned}$$



- La vitesse \vec{v}_e est donnée par : $\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \vec{r}'$, où $\vec{r}' = \vec{OM}$ représente la position de M dans \mathcal{R}_1 , donnée par le résultat (25) :

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= (2a \cos^2 \theta - a + u) \vec{E}_1 + 2a \cos \theta \sin \theta \vec{E}_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2a \cos^2 \theta - a + u \\ 2a \cos \theta \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Quant au vecteur $\vec{\Omega}$, il s'obtient par projection sur les vecteurs \vec{E}_1 , \vec{E}_2 et \vec{E}_3 :



En remarquant que $\vec{\Omega} \perp \vec{E}_3$, le vecteur $\vec{\Omega}$ peut s'écrire :

$$\vec{\Omega} = a\vec{E}_1 + b\vec{E}_2 \Rightarrow \begin{cases} \vec{\Omega} \cdot \vec{E}_1 = a \\ \vec{\Omega} \cdot \vec{E}_2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\Omega \times \cos \alpha = a \\ \Omega \times \cos \theta = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\Omega \sin \theta = a \\ \Omega \cos \theta = b \end{cases}$$

car $\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$

Aussi :

$$\vec{\Omega} = -\Omega \sin \theta \vec{E}_1 + \Omega \cos \theta \vec{E}_2 = \begin{pmatrix} -\Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où se déduit le vecteur \vec{v}_e :

$$\vec{v}_e = \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = \begin{pmatrix} -\Omega \sin \theta \\ \Omega \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2a \cos^2 \theta - a + u \\ 2a \cos \theta \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Omega \sin \theta \times 2a \cos \theta \sin \theta - \Omega \cos \theta \times (2a \cos^2 \theta - a + u) \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire :

$$\vec{v}_e = -\Omega \cos \theta (2a \sin^2 \theta + 2a \cos^2 \theta - a + u) \vec{E}_3 = -\Omega \cos \theta (a + u) \vec{E}_3$$

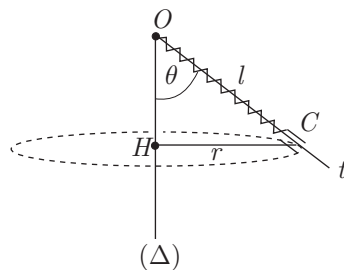
De la loi de composition des vitesses est alors issue l'expression de \vec{v} :

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \dot{u} \vec{E}_1 - \Omega \cos \theta (a + u) \vec{E}_3$$

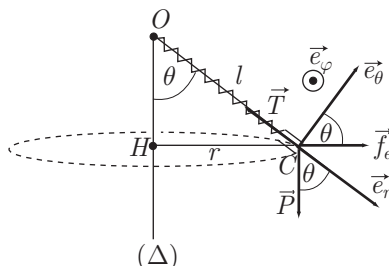
On s'assurera, heureusement, de la compatibilité des deux résultats obtenus par les deux méthodes pourtant différentes.

● 141 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. En l'absence d'oscillations du ressort, le corps C n'est animé que d'un mouvement de rotation autour de l'axe Δ ; la trajectoire de C est un cercle de centre H (projeté orthogonal de C sur Δ) et de rayon $r = CH = l \sin \theta$:



2. Le point C est immobile dans le référentiel (R') solide de la tige, tournant à la vitesse angulaire ω de l'axe (Δ).



Ce référentiel est associé à la base $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ telle que $\overrightarrow{OC} = OC \vec{e}_r$ et sa nature non galiléenne fait apparaître des « forces » d'inertie :

- la « force » de Coriolis : $\vec{f}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = \vec{0}$ car la vitesse relative \vec{v}_r est nulle pour le corps C immobile relativement à (R').
- la « force » d'entraînement $\vec{f}_e = m\omega^2 \overrightarrow{HC}$, d'intensité :

$$f_e = m\omega^2 HC = m\omega^2 l \sin \theta$$

et de composantes :

$$\vec{f}_e = f_e \sin \theta \vec{e}_r + f_e \cos \theta \vec{e}_\theta + 0 \times \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} f_e \sin \theta \\ f_e \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{f}_e = \begin{pmatrix} m\omega^2 l \sin^2 \theta \\ m\omega^2 l \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

En outre, des forces « vraies » s'exercent également sur le corps C ; il s'agit :

- du poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta + 0 \times \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

- de la réaction \vec{R} de la tige ; cette réaction étant perpendiculaire à la tige (de vecteur directeur \vec{e}_r), elle ne peut posséder une composante selon \vec{e}_r . C'est pourquoi \vec{R} peut s'écrire :

$$\vec{R} = R_\theta \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ R_\theta \\ R_\varphi \end{pmatrix}$$

- la tension $\vec{T} = -T \vec{e}_r$ du ressort, avec pour intensité :

$$T = k(l - l_0) \Rightarrow \vec{T} = \begin{pmatrix} -k(l - l_0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'immobilité relative de C dans (R') trahit la compensation des « forces » citées précédemment : $\vec{f}_e + \vec{P} + \vec{R} + \vec{T}$, soit encore :

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 l \sin^2 \theta \\ m\omega^2 l \sin \theta \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_\theta \\ R_\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k(l_0 - l) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où découlent trois équations :

$$m\omega^2 l \sin^2 \theta + mg \cos \theta + k(l_0 - l) = 0 \quad (26)$$

$$m\omega^2 l \sin \theta \cos \theta - mg \sin \theta + R_\theta = 0 \quad (27)$$

$$R_\varphi = 0 \quad (28)$$

La première de ces équations s'écrit aussi :

$$m\omega^2 l \sin^2 \theta + mg \cos \theta + kl_0 - kl = 0 \Rightarrow l(k - m\omega^2 \sin^2 \theta) = mg \cos \theta + kl_0$$

en raison de quoi :

$$l = \frac{mg \cos \theta + kl_0}{k - m\omega^2 \sin^2 \theta} \text{ si } k > m\omega^2 \sin^2 \theta$$

Remarque – La condition $k > m\omega^2 \sin^2 \theta$ s'écrit aussi :

$$\omega < \sqrt{\frac{k}{m \sin^2 \theta}}$$

et signifie que la vitesse angulaire ne doit pas excéder une valeur limite, faute de quoi l tendrait vers l'infini. Évidemment, un tel phénomène ne se produira pas car, si la rotation est trop rapide, le ressort s'étirera jusqu'à devenir un simple fil métallique, sans propriété élastique, dont la tension ne suivra plus la loi : $\vec{T} = -k(l - l_0) \vec{e}_r$; les équations du mouvement devraient alors être modifiées.

3. L'équation (28) montre que la composante R_φ est nulle, en conséquence de quoi :

$$\vec{R} = R_\theta \vec{e}_\theta \Rightarrow R = \|\vec{R}\| = |R_\theta|$$

Quant à l'équation (27), elle fournit :

$$R_\theta = mg \sin \theta - m\omega^2 l \sin \theta \cos \theta = m \sin \theta \times (g - l\omega^2 \cos \theta)$$

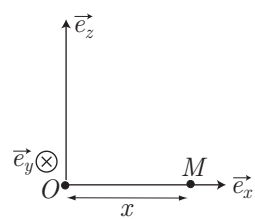
en raison de quoi :

$$R = m \sin \theta \times |g - l\omega^2 \cos \theta|$$

● **142** ————— **Lycée Clémenceau, Nantes**

1. On note (\mathcal{R}') le référentiel tournant (donc non galiléen) autour de Oz , associé à la base $\mathcal{B}(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

Dans ce référentiel, le point M est assujéti à se déplacer selon (O, \vec{e}_x) en conséquence de quoi ses vecteurs position \overrightarrow{OM} , vitesse relative \vec{v}_r et accélération relative $\vec{\gamma}_r$ s'écrivent :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x \vec{e}_x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_r = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\gamma}_r = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$




L'étude du mouvement d'un point M dans un référentiel non galiléen procède de la même manière que celle effectuée en référentiel galiléen : l'usage de la loi fondamentale de la dynamique exige le recensement et l'expression des diverses forces qui s'exercent sur M , auxquelles sont adjointes les « forces » d'inertie spécifiques aux référentiels non galiléens.

Le point M est soumis à des forces vraies :

- son poids \vec{P} vertical descendant : $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ dans \mathcal{B} .
- la réaction \vec{R} que l'axe Ox exerce sur M ; l'absence de frottements interdit à \vec{R} la possession d'une composante selon \vec{e}_x :

$$\vec{R} = 0 \times \vec{e}_x + R_y \vec{e}_y + R_z \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{B}.$$

et à des « forces » d'inertie :

- la « force » d'entraînement \vec{f}_e qui s'exerce sur le point M en rotation autour du point O , avec un vecteur rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ constant :

$$\vec{f}_e = m\omega^2 \overrightarrow{OM} = m\omega^2 x \vec{e}_x = \begin{pmatrix} m\omega^2 x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{B}.$$

- la « force » de Coriolis :

$$\vec{f}_c = -2m \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ x\omega \\ 0 \end{pmatrix} \text{ dans } \mathcal{B}.$$

Sous l'influence de ces « forces », le point M acquiert une accélération $\vec{\gamma}_r$, relativement à (R') , qui obéit à la loi fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{\gamma}_r &= \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_e + \vec{f}_c \\ \Rightarrow m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ R_y \\ R_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2 x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2m\omega \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où sont issues trois équations :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 x \\ 0 = R_y - 2m\omega\dot{x} \\ 0 = -mg + R_z \end{cases} \quad (29)$$

La première équation de ce système : $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ admet pour équation caractéristique (en X) :

$$X^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow X = X_1 = \omega \text{ ou } X = X_2 = -\omega$$

et donc, pour solution générale :

$$\begin{aligned} x &= \mu_1 e^{X_1 t} + \mu_2 e^{X_2 t} \Rightarrow x = \mu_1 e^{\omega t} + \mu_2 e^{-\omega t} \\ &\Rightarrow \dot{x} = \omega (\mu_1 e^{\omega t} - \mu_2 e^{-\omega t}) \end{aligned}$$

Les constantes μ_1 et μ_2 sont alors ajustées aux conditions initiales imposées par l'énoncé : à la date $t = 0$, x prend la valeur x_0 et $\dot{x} = 0$ (la vitesse initiale est nulle), ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} x = \mu_1 e^{\omega t} + \mu_2 e^{-\omega t} \\ \dot{x} = \omega (\mu_1 e^{\omega t} - \mu_2 e^{-\omega t}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = \mu_1 + \mu_2 \\ 0 = \omega (\mu_1 - \mu_2) \end{cases} \text{ à } t = 0$$

La seconde équation révèle que $\mu_1 = \mu_2$ (si $\omega \neq 0$), à la suite de quoi la première équation devient :

$$x_0 = 2\mu_1 \Rightarrow \mu_1 = \frac{x_0}{2} = \mu_2$$

Finalement, le mouvement de M est décrit par :

$$x = x_0 \times \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$$

Remarque – L'expression précédente révèle que $x(t)$ augmente dans le temps, ce qui signifie que M s'éloigne de plus en plus de son point de départ M_0 . La seule valeur de x_0 qui assurerait à M un équilibre serait $x_0 = 0$ (M_0 est alors confondu avec O), encore que cet équilibre soit instable.

2. Le système d'équations (29) donne directement les composantes non nulles de la réaction \vec{R} que l'axe Ox exerce sur M :

$$R_y = 2m\omega\dot{x} \text{ et } R_z = mg$$

et, compte tenu de l'expression de x :

$$x = x_0 \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} \Rightarrow \dot{x} = \frac{\omega x_0}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t})$$

d'où finalement :

$$R_x = 0; R_y = m\omega^2 x_0 (e^{\omega t} - e^{-\omega t}); R_z = mg$$

● 143 ————— Concours ENSTIM

1. La particule est soumise à deux « forces » d'inertie :

- La « force » de Coriolis : $\vec{f}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$, où \vec{v}_r désigne la vitesse relative de M dans le référentiel tournant ; dans ce référentiel, le mouvement ne se produit que dans la direction de \vec{e}_r , auquel cas :

$$\vec{v}_r = \dot{r} \vec{e}_r \Rightarrow \vec{f}_c = -2m\omega \dot{r} \vec{k} \wedge \vec{e}_r \Rightarrow \vec{f}_c = -2m\omega \dot{r} \vec{e}_\theta$$

- La « force » d'entraînement \vec{f}_e qui s'exerce sur la particule M en rotation uniforme autour de O :

$$\vec{f}_e = m\omega^2 \overrightarrow{OM} \Rightarrow \vec{f}_e = m\omega^2 r \vec{e}_r$$

2. Si la « force » d'entraînement dérive d'une énergie potentielle E_{pe} , celle-ci doit vérifier :

$$\frac{dE_{pe}}{dr} = -f_e = -m\omega^2 r \Rightarrow E_{pe} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \text{cte}$$

En l'occurrence, on peut choisir (arbitrairement) l'origine de cette énergie potentielle au point O , ce qui revient à imposer :

$$E_{pe}(r=0) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{1}{2} m\omega^2 \times (0)^2 + \text{cte} \Rightarrow \text{cte} = 0$$

Il s'ensuit que :

$$E_{pe} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2$$

3. Dans le référentiel non galiléen \mathcal{R}' , le point M est donc soumis :

- à une « force » de Coriolis, à laquelle on ne peut affecter aucune énergie potentielle ;
- à la « force » d'entraînement \vec{f}_e associée à l'énergie potentielle E_{pe} ;
- à la tension du ressort, de longueur à vide l_0 , de raideur k et de longueur r . Cette force dérive de l'énergie potentielle :

$$E_{pr} = \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$$

- au poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dont l'énergie potentielle E_{pp} ne dépend que de l'altitude de M . Or, puisque \vec{g} est colinéaire à \vec{k} , cela signifie également que le mouvement de M a lieu dans un plan horizontal, où E_{pp} demeure constant ; on peut choisir arbitrairement nulle cette valeur constante : $E_{pp} = 0$;
- la tension \vec{R} de l'axe. Or, cette force étant perpendiculaire au déplacement $d\vec{r}$ de M , le travail élémentaire qu'elle exerce sur M vaut :

$$\delta W(\vec{R}) = \vec{R} \cdot d\vec{r} = 0 \text{ car } \vec{R} \perp d\vec{r}$$

Par suite, si \vec{R} devait d'ailleurs dériver d'une énergie potentielle E_{pR} , celle-ci demeurerait constante au cours du mouvement de M car :

$$\delta W(\vec{R}) = -dE_{pR} = 0 \Rightarrow E_{pR} = \text{cte}$$

À l'instar de l'énergie potentielle de pesanteur, cette énergie potentielle peut être définie arbitrairement nulle sur l'axe ($O\vec{e}_r$) :

$$E_{pR} = 0$$

Finalement, l'énergie potentielle totale du point M vaut :

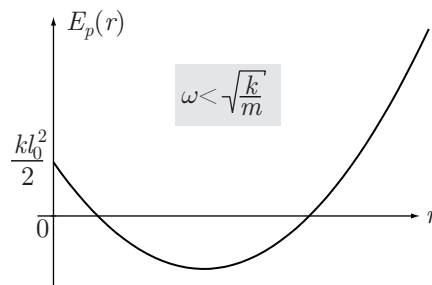
$$E_p(r) = E_{pe} + E_{pr} + E_{pp} + E_{pR} \Rightarrow E_p(r) = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \frac{1}{2} k(r - l_0)^2$$

Cette énergie potentielle peut également se présenter sous la forme d'un polynôme en r :

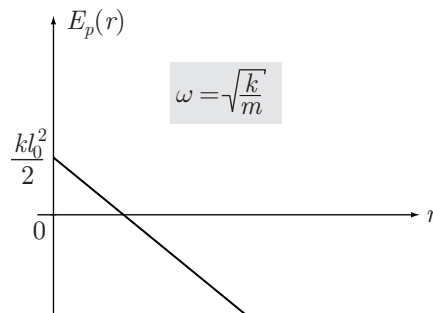
$$E_p(r) = \frac{1}{2} (k - m\omega^2) r^2 - kl_0 r + \frac{kl_0^2}{2} \tag{30}$$

Plusieurs cas doivent être distingués :

- Si $k > m\omega^2$, c'est-à-dire $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$, l'équation (30) est l'équation cartésienne d'une parabole dont la courbure est dirigée vers le haut, car le coefficient qui précède r^2 est positif (donc $\lim_{r \rightarrow \infty} E_p(r) = +\infty$) :



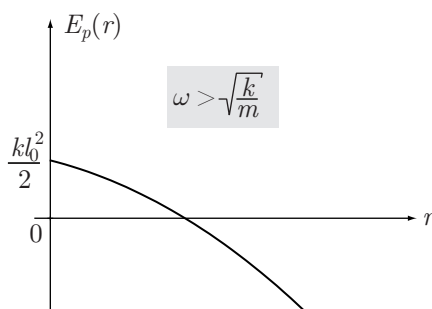
- Si $k = m\omega^2$, l'équation (30) devient : $E_p(r) = -kl_0 r + \frac{kl_0^2}{2}$, dont la représentation graphique est une droite de pente $-kl_0$ et d'ordonnée à l'origine $\frac{kl_0^2}{2}$:



- Si $k < m\omega^2$, l'équation (30) : $E_p(r) = \frac{1}{2} (k - m\omega^2) r^2 - kl_0 r + \frac{kl_0^2}{2}$ est à nouveau l'équation d'une parabole, telle que :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} E_p(r) = -\infty \text{ car } k - m\omega^2 < 0$$

Aussi, la courbure de cette parabole est-elle dirigée vers le bas :



4. S'il existe une position d'équilibre dans \mathcal{R}' , elle se trouve à une distance $r = l_2$ qui affecte à l'énergie potentielle une valeur *extremum*, c'est-à-dire qui annule $\frac{dE_p}{dr}$.

Or :

$$E_p(r) = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \frac{1}{2} k(r - l_0)^2 \Rightarrow \frac{dE_p}{dr} = -m\omega^2 r + k(r - l_0)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_p}{dr} = (k - m\omega^2)r - kl_0$$

Aussi, la valeur $r = l_2$ doit être cherchée telle que :

$$\left. \frac{dE_p}{dr} \right|_{l_2} = 0 \Rightarrow (k - m\omega^2)l_2 = kl_0 \Rightarrow l_2 = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}$$

5. Étant donné que l_2 doit être positif comme l'est kl_0 , l'identité précédente n'a de sens que si :

$$k - m\omega^2 > 0 \Rightarrow k > m\omega^2 \Rightarrow \omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Du reste, les trois figures de la question 3. confirme ce résultat : seul le cas

$\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$ offre à E_p un *extremum* qui est de surcroît un *minimum*. C'est pourquoi :

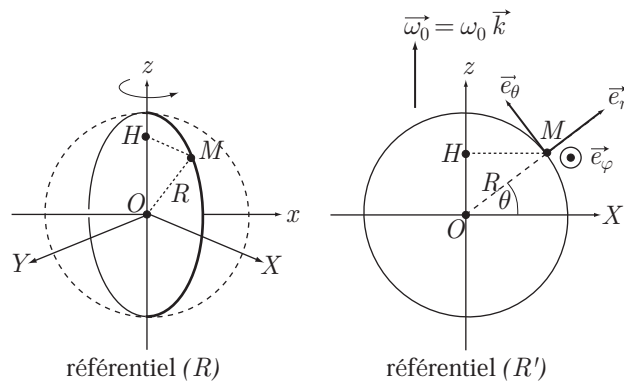
$$\text{pour } \omega < \sqrt{\frac{k}{m}}, \text{ en } r = l_2 = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}, \text{ l'équilibre est stable.}$$

● 144 ————— Lycée Poincaré, Nancy



L'utilisation de la loi fondamentale de la dynamique en référentiel non galiléen impose une définition rigoureuse des référentiels (galiléen et non galiléen) d'étude. Il est impensable de s'affranchir de schémas clairs et exhaustifs, où figurent tous les vecteurs nécessaires à cette étude.

1. Soit (R) le référentiel terrestre, supposé galiléen, dont les axes Ox et Oz sont fixes (O désignant le centre de la circonférence tournante). La circonférence étant en rotation autour de l'axe Oz , on lui associe un repère (O, X, Y, z) qui lui est solidaire, et dont les axes tournent autour de Oz avec un vecteur rotation $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{k}$ constant.

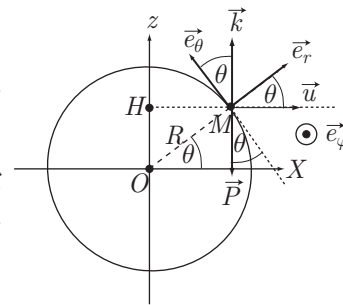


On note H le projeté orthogonal de M sur l'axe Oz , et le point M (contraint à se déplacer sur la circonférence) est repéré par l'angle $\theta = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OM})$. Le mouvement de rotation de M autour de O , dans le référentiel R' , suggère l'emploi d'une base cylindro-polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, le vecteur unitaire \vec{e}_φ étant dirigé selon OY .

Dans ce référentiel, il convient de représenter les différents vecteurs qui interviendront dans les calculs.

L'anneau M est alors soumis à des forces vraies :

- son poids $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{k}$ où le vecteur \vec{k} possède, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, les composantes suivantes :



$$\vec{k} = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta + 0 \times \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{P} = \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

- La réaction \vec{R}_1 exercée par la circonférence et qui ne possède pas de composante selon \vec{e}_θ , sans quoi des frottements seraient observés. En revanche, deux composantes R_r et R_φ permettent de décomposer cette force sur la base cylindro-polaire :

$$\vec{R}_1 = R_r \vec{e}_r + 0 \times \vec{e}_\theta + R_\varphi \vec{e}_\varphi \Rightarrow \vec{R} = \begin{pmatrix} R_r \\ 0 \\ R_\varphi \end{pmatrix}$$

À ces forces s'ajoutent également des « forces » d'inertie :

- la « force » d'entraînement qui s'exerce sur M , en rotation uniforme autour de H :

$$\vec{f}_e = m\omega_0^2 \overrightarrow{HM} = m\omega_0^2 HM \vec{u}$$

où, d'une part, $HM = R \cos \theta$ et d'autre part :

$$\begin{aligned}\vec{u} &= \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta + 0 \times \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{f}_e &= m\omega_0^2 R \cos \theta \begin{pmatrix} \cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\omega_0^2 R \cos^2 \theta \\ -m\omega_0^2 R \cos \theta \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- la « force » de Coriolis : $\vec{f}_C = -2m\vec{\omega}_0 \wedge \vec{v}_r$, où \vec{v}_r désigne le vecteur vitesse relative de M dans le référentiel (R'). Or, en coordonnées cylindro-polaires, un point en rotation possède pour vecteur vitesse :

$$\begin{cases} \vec{v}_r = R\dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{f}_C = -2m\omega_0 R\dot{\theta} \times \vec{k} \wedge \vec{e}_\theta = -2m\omega_0 R\dot{\theta} \times \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \Leftrightarrow \vec{f}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2m\omega_0 R\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}$$

Sous l'influence de ces « forces », l'anneau M présente une accélération $\vec{\gamma}_r$, relativement à (R'), soumise à la loi fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{\gamma}_r = \vec{P} + \vec{R} + \vec{f}_e + \vec{f}_C$$

Or, le mouvement de l'anneau dans (R') étant circulaire, dans le plan de la circonférence, cette accélération s'écrit, en coordonnées polaires :

$$\vec{\gamma}_r = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}m \begin{pmatrix} -R\dot{\theta}^2 \\ R\ddot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -mg \sin \theta \\ -mg \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_r \\ 0 \\ R_\varphi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega_0^2 R \cos^2 \theta \\ -m\omega_0^2 R \cos \theta \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2m\omega_0 R\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Seule la composante selon \vec{e}_θ ne fait pas intervenir les composantes inconnues de \vec{R}_1 et c'est pourquoi il est préférable d'utiliser cette composante afin d'obtenir l'équation différentielle du mouvement :

$$mR\ddot{\theta} = -mg \cos \theta - m\omega_0^2 R \cos \theta \sin \theta = -m \cos \theta (g + R\omega_0^2 \sin \theta)$$

Notamment, en utilisant la notation :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow g = R\omega_p^2$$

cette équation devient :

$$\ddot{\theta} = -\cos \theta (\omega_p^2 + \omega_0^2 \sin \theta) \quad (31)$$

Lorsque l'anneau est en équilibre, $\ddot{\theta}$ s'annule :

$$0 = \cos \theta \times (\omega_p^2 + \omega_0^2 \sin \theta)$$

Trois solutions sont alors disponibles :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta_2 = -\frac{\pi}{2} \text{ ou encore : } \sin \theta_3 = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \Rightarrow \theta_3 = -\arcsin\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2$$

2. Étudions le mouvement de l'anneau au voisinage de ces positions d'équilibre.

- Autour de θ_3 : soit ε le petit écart par rapport à l'équilibre, tel que :

$$\theta = \theta_3 + \varepsilon \text{ avec } |\varepsilon| \ll |\theta_3|$$

Un développement limité au premier ordre fournit alors :

$$\sin \theta = \sin(\theta_3 + \varepsilon) \simeq \sin \theta_3 + \varepsilon \times \cos \theta_3 = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \varepsilon \cos \theta_3$$

et :

$$\cos \theta = \cos(\theta_3 + \varepsilon) \simeq \cos \theta_3 \text{ à l'ordre 1}$$

Ainsi, l'équation différentielle du mouvement (31) devient :

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\cos \theta_3 \times \left[\omega_p^2 + \omega_0^2 \left(-\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} + \varepsilon \cos \theta_3 \right) \right] \\ &= -\cos \theta_3 \times (\omega_p^2 - \omega_p^2 + \omega_0^2 \varepsilon \cos \theta_3) = -\omega_0^2 \cos^2 \theta_3 \varepsilon \end{aligned}$$

Enfin, la définition :

$$\theta = \theta_3 + \varepsilon \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$$

se traduit par :

$$\ddot{\varepsilon} = -\omega_0^2 \cos^2 \theta_3 \times \varepsilon \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \cos^2 \theta_3 \times \varepsilon = 0$$

avec :

$$\Omega^2 = \omega_0^2 \cos^2 \theta_3 = \omega_0^2 \times (1 - \sin^2 \theta_3) = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\omega_p^4}{\omega_0^4} \right) = \frac{\omega_0^4 - \omega_p^4}{\omega_0^2}$$

soit encore :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\omega_0^4 - \omega_p^4}{\omega_0^2} \varepsilon = 0$$

- Autour de $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$, l'angle θ s'écrit :

$$\theta = -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \text{ avec } |\varepsilon| \ll \frac{\pi}{2}$$

de sorte qu'un nouveau développement limité¹ fournit :

$$\begin{aligned} \sin \theta = \sin \left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) &\simeq \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \varepsilon \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \frac{\varepsilon^2}{2} \times \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \dots \\ &= -1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \cos \theta = \cos \left(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) &\simeq \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \varepsilon \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \dots \\ &= \varepsilon + \dots \end{aligned}$$

En ne conservant que les termes d'ordre 1 en ε : $\sin \theta \simeq -1$ et $\cos \theta \simeq \varepsilon$, l'équation différentielle (31) adopte la forme suivante :

$$\ddot{\theta} = -\cos \theta \times (\omega_p^2 + \omega_0^2 \sin \theta) \Rightarrow \ddot{\theta} = -\varepsilon (\omega_p^2 - \omega_0^2)$$

c'est-à-dire, en tenant compte de $\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$:

$$\ddot{\varepsilon} + (\omega_p^2 - \omega_0^2) \varepsilon = 0$$

- Autour de $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ (avec $|\varepsilon| \ll \frac{\pi}{2}$) justifie l'emploi d'un développement limité d'ordre 1 :

$$\sin \theta = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) \simeq \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) + \varepsilon \times \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) \simeq 1$$

et :

$$\cos \theta = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon \right) = \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) - \varepsilon \times \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \simeq -\varepsilon$$

qui confère, à l'équation (31) la forme suivante :

$$\ddot{\theta} = -\cos \theta \times (\omega_p^2 + \omega_0^2 \sin \theta) \Rightarrow \ddot{\theta} = \varepsilon \times (\omega_p^2 + \omega_0^2)$$

soit encore :

$$\ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon} \Rightarrow \ddot{\varepsilon} - (\omega_p^2 + \omega_0^2) \varepsilon = 0$$

¹On rappelle qu'à l'ordre 2, une fonction $f(x)$ peut être identifiée à :

$$f(x_0 + \varepsilon) \simeq f(x_0) + \varepsilon f'(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} f''(x_0)$$

ce qui est notamment le cas des fonctions trigonométriques :

$$\cos(\theta_0 + \varepsilon) \simeq \cos \theta_0 - \varepsilon \times \sin \theta_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} \cos \theta_0$$

et :

$$\sin(\theta_0 + \varepsilon) \simeq \sin \theta_0 + \varepsilon \times \cos \theta_0 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin \theta_0$$

On remarque alors qu'il n'existe pas de nombre réel Ω'' qui permettrait à ε d'adopter la forme :

$$\varepsilon = A \cos(\Omega''t) + B \sin(\Omega''t)$$

ce qui révèle l'absence d'oscillations autour de l'angle $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.

3. De l'étude précédente, il ressort que l'écart à l'équilibre vérifie des équations différentielles du type :

$$\ddot{\varepsilon} + \alpha \varepsilon = 0$$

Deux cas se sont présentés :

- Si $\alpha > 0$, il existe un nombre réel positif ω tel que $\alpha = \omega^2$:

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = 0$$

La solution de cette équation différentielle est sinusoïdale, de pulsation ω :

$$\varepsilon = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

et c'est pourquoi, au voisinage de la position d'équilibre θ_e , l'angle θ varie comme :

$$\theta = \theta_e + \varepsilon_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

c'est-à-dire que θ oscille autour de θ_e ; un tel équilibre est stable.

- Si $\alpha < 0$, il existe un réel positif κ tel que $\alpha = -\kappa^2$:

$$\ddot{\varepsilon} - \kappa^2 \varepsilon = 0$$

L'équation caractéristique (en X) associée à cette équation différentielle :

$$X^2 - \kappa^2 = 0$$

admet pour solutions $X_1 = \kappa$ et $X_2 = -\kappa$ de sorte que ε s'écrit :

$$\varepsilon = \mu_1 e^{X_1 t} + \mu_2 e^{X_2 t} = \mu_1 e^{\kappa t} + \mu_2 e^{-\kappa t}$$

Aussi, au voisinage de la position d'équilibre θ_e , les variations de θ sont décrites par :

$$\theta = \theta_e + \mu_1 e^{\kappa t} + \mu_2 e^{-\kappa t}$$

Non seulement aucune oscillation n'est observée autour de θ_e , mais surtout la fonction $e^{\kappa t}$ croît rapidement avec le temps, ce qui signifie que θ s'écarte rapidement de la valeur θ_e ; l'équilibre est instable.

Cet examen de la stabilité des équilibres permet de conclure quant à la stabilité des équilibres au voisinage de $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ et $\theta_3 = -\arcsin\left(\frac{\omega_p}{\omega_0}\right)^2$:

θ	conditions	équation différentielle	équilibre
θ_1	aucune	$\ddot{\varepsilon} - (\omega_p^2 + \omega_0^2) \varepsilon = 0$	instable
θ_2	$\omega_p > \omega_0$	$\ddot{\varepsilon} + (\omega_p^2 - \omega_0^2) \varepsilon = 0$	stable
	$\omega_p < \omega_0$		instable
θ_3	$\omega_0 > \omega_p$	$\ddot{\varepsilon} + \frac{\omega_0^4 - \omega_p^4}{\omega_0^2} \varepsilon = 0$	stable
	$\omega_p < \omega_0$		instable

● **145** ————— **Concours ENSTIM**

1. À la grandeur $x = a \cos(\omega t - \phi)$ est associée une image complexe \underline{x} telle que :

$$\underline{x} = a e^{j(\omega t - \phi)} \Rightarrow x = \operatorname{Re}\{\underline{x}\} = a \cos(\omega t - \phi) \quad (32)$$

et :

$$\dot{\underline{x}} = j\omega a e^{j(\omega t - \phi)} \quad \ddot{\underline{x}} = -\omega^2 a e^{j(\omega t - \phi)} \quad (33)$$

de même qu'à la force $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$ correspond une image complexe :

$$\underline{F} = F_0 e^{j\omega t} \Rightarrow F(t) = \operatorname{Re}\{\underline{F}\} = F_0 \cos(\omega t) \quad (34)$$

À l'aide de ces notations, l'équation différentielle en x :

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$$

admet une représentation complexe :

$$m\ddot{\underline{x}} + \lambda\dot{\underline{x}} + k\underline{x} = \underline{F} \Rightarrow \underline{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{\underline{x}} + \frac{k}{m}\underline{x} = \frac{\underline{F}}{m}$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme suivante :

$$\ddot{\underline{x}} + 2\alpha\dot{\underline{x}} + \omega_0^2\underline{x} = \frac{\underline{F}}{m} \text{ avec } \alpha = \frac{\lambda}{2m} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Compte tenu des relations (32), (33) et (34), cette équation s'écrit aussi :

$$(-\omega^2 + 2\alpha j\omega + \omega_0^2) a e^{j(\omega t - \phi)} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

soit, après simplification par $e^{j\omega t}$:

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + j \times 2\alpha\omega) a e^{-j\phi} = \frac{F_0}{m} \quad (35)$$

À gauche de cette équation apparaît un nombre complexe :

$$\underline{X} = \omega_0^2 - \omega^2 + j \times 2\alpha\omega = X e^{j\varphi}$$

de module :

$$|\underline{X}| = X = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}$$

et d'argument $\varphi = \arg \{\underline{X}\}$ tel que :

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re} \{\underline{X}\}}{|\underline{X}|} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

et :

$$\sin \varphi = \frac{\operatorname{Im} \{\underline{X}\}}{|\underline{X}|} = \frac{2\alpha\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

Ce faisant, l'équation (35) se présente sous la forme suivante :

$$Xa e^{j(\varphi-\phi)} = \frac{F_0}{m}$$

et impose l'identification :

- des modules des deux nombres complexes de part et d'autre de l'égalité :

$$Xa = \frac{F_0}{m} \Rightarrow a = \frac{F_0}{mX}$$

d'où est issue l'expression de a :

$$a = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \quad (36)$$

- des arguments des deux nombres complexes de l'équation :

$$\varphi - \phi = 0 \Rightarrow \phi = \varphi$$

de sorte que :

$$\cos \phi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \quad \text{et} \quad \sin \phi = \frac{2\alpha\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \quad (37)$$

2. (a) Soit \vec{u} un vecteur unitaire horizontal permettant la description du mouvement de M , et notamment sa vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}$ et la force $\vec{F} = F(t)\vec{u}$. La puissance instantanée $P(t)$ fournie par la force \vec{F} est alors définie par :

$$P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v} = F(t) \times v$$

où $F(t)$ est donné par l'énoncé :

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

et où $v = \dot{x}$ s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} v &= \frac{d \operatorname{Re}\{\underline{x}\}}{dt} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{d\underline{x}}{dt} \right\} = \operatorname{Re} \{\dot{\underline{x}}\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ j\omega a e^{j(\omega t - \phi)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ a\omega e^{j(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2})} \right\} \\ &= a\omega \cos \left(\omega t - \phi + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

qui s'exprime également par :

$$v = -a\omega \sin(\omega t - \phi)$$

C'est pourquoi la puissance instantanée est donnée par :

$$P(t) = -F_0 a \omega \cos(\omega t) \times \sin(\omega t - \phi)$$

(b) En tenant compte de l'identité trigonométrique :

$$\cos a \times \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

l'expression précédente de $P(t)$ se présente aussi sous la forme suivante :

$$P(t) = -\frac{F_0 a \omega}{2} [\sin(2\omega t - \phi) - \sin \phi] = \frac{F_0 a \omega}{2} [\sin \phi - \sin(2\omega t - \phi)]$$

dont la valeur moyenne est définie par :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} P(t) dt = \frac{F_0 a \omega}{2T} \left\{ \int_t^{t+T} \sin \phi dt - \int_t^{t+T} \sin(2\omega t - \phi) dt \right\}$$

Apparaissent alors deux intégrales qu'il convient de calculer :

$$\int_t^{t+T} \sin \phi dt = \sin \phi \int_t^{t+T} dt = \sin \phi \times T$$

et :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \sin(2\omega t - \phi) dt &= -\frac{1}{2\omega} [\cos(2\omega t - \phi)]_t^{t+T} \text{ avec } \omega T = 2\pi \\ &= -\frac{1}{2\omega} \left[\cos \left(2\omega t + \underbrace{2\omega T}_{4\pi} - \phi \right) - \cos(2\omega t - \phi) \right] \\ &= -\frac{1}{2\omega} [\cos(2\omega t - \phi) - \cos(2\omega t - \phi)] = 0 \end{aligned}$$

Finalement, il reste :

$$\langle P \rangle = \frac{F_0 a \omega}{2} \sin \phi$$

où $\sin \phi$ est donné par l'expression (37) :

$$\sin \phi = \frac{2\alpha\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}$$

et où l'amplitude a est fournie par le résultat (36) :

$$\begin{aligned} a = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} &\Rightarrow F_0 = ma\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \\ &\Rightarrow F_0 \sin \phi = 2m\alpha\omega \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\langle P \rangle = ma^2\omega^2\alpha$$

- (c) Quant à la force de frottement : $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x} \vec{u}$, sa puissance instantanée est définie par :

$$\mathcal{P}(t) = \vec{f} \cdot \vec{v} = -\lambda v^2 = -\lambda (\dot{x})^2$$

et l'expression de $x = a \cos(\omega t - \phi)$ donne celle de \dot{x} :

$$\dot{x} = -\omega a \sin(\omega t - \phi) \Rightarrow \mathcal{P} = -\lambda \omega^2 a^2 \sin^2(\omega t - \phi)$$

La puissance $\mathcal{P}(t)$ peut aussi se présenter sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}(t) = -\frac{\lambda \omega^2 a^2}{2} [1 - \cos(2\omega t - 2\phi)]$$

mieux adaptée au calcul de sa valeur moyenne sur une période :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \mathcal{P}(t) dt = -\frac{\lambda \omega^2 a^2}{2T} \left[\int_t^{t+T} dt - \int_t^{t+T} \cos(2\omega t - 2\phi) dt \right]$$

Outre l'intégrale $\int_t^{t+T} dt = T$, le second membre de cette équation contient également le terme :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \cos(2\omega t - 2\phi) dt &= \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t - 2\phi)]_t^{t+T} \text{ avec } \omega T = 2\pi \\ &= \frac{1}{2\omega} \left[\sin(2\omega t + \underbrace{2\omega T}_{4\pi} - 2\phi) - \sin(2\omega t - 2\phi) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

De ces calculs ressort alors l'expression de $\langle \mathcal{P} \rangle$: $\langle \mathcal{P} \rangle = -\frac{\lambda \omega^2 a^2}{2}$, où la définition de α :

$$\alpha = \frac{\lambda}{2m} \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = m\alpha$$

permet de conclure que :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = -m\alpha\omega^2 a^2 = -\langle P \rangle$$

Cette relation confirme que :

la puissance $\langle P \rangle$ de la force d'excitation compense exactement la puissance $\langle \mathcal{P} \rangle$ de la force de frottement.

3. Avec une vitesse $v = \dot{x} = -\omega a \sin(\omega t - \phi)$, le point M présente une énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{m\omega^2 a^2}{2} \sin^2(\omega t - \phi)$$

tandis que son énergie potentielle provient de la force de rappel élastique :

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{k a^2}{2} \cos^2(\omega t - \phi)$$

C'est pourquoi l'énergie mécanique instantanée de M vaut :

$$E(t) = E_c + E_p = \frac{a^2}{2} [m\omega^2 \sin^2(\omega t - \phi) + k \cos^2(\omega t - \phi)]$$

et sa valeur moyenne, sur une période, est donnée par :

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} E(t) dt \\ &= \frac{a^2}{2T} \left\{ m\omega^2 \int_t^{t+T} \sin^2(\omega t - \phi) dt + k \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t - \phi) dt \right\} \end{aligned}$$

Les intégrales qui apparaissent dans le membre de droite valent :

$$\int_t^{t+T} \sin^2(\omega t - \phi) dt = \frac{T}{2}$$

conformément à la question précédente, et :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \cos^2(\omega t - \phi) dt &= \int_t^{t+T} \frac{1 + \cos(2\omega t - 2\phi)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_t^{t+T} dt + \int_t^{t+T} \cos(2\omega t - 2\phi) dt \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ T + \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t - 2\phi)]_t^{t+T} \right\} \\ &= \frac{T}{2} + \frac{1}{4\omega} \left[\sin(2\omega t + \underbrace{2\omega T}_{4\pi} - 2\phi) - \sin(2\omega t - 2\phi) \right] \\ &= \frac{T}{2} \end{aligned}$$

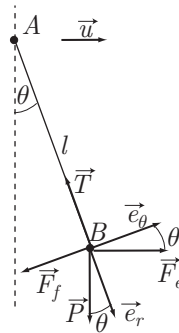
En conclusion :

$$\langle E \rangle = \frac{a^2}{4} (m\omega^2 + k)$$

● 146 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Le référentiel \mathcal{R}' dans lequel est définie la base polaire $\mathcal{B}(A, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, n'est pas galiléen puisque son origine A se déplace (par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R}) avec une accélération :

$$\vec{\gamma}_A = \ddot{x}_A \vec{u} = -\omega^2 X_0 \cos(\omega t) \vec{u}$$



Aussi, le point B est non seulement soumis à :

- son poids :

$$\vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{P} = \begin{pmatrix} mg \cos \theta \\ -mg \sin \theta \end{pmatrix}$$

- la tension \vec{T} du fil :

$$\vec{T} = -T \vec{e}_r = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$$

- la force de frottement \vec{F}_f colinéaire à la vitesse \vec{v}_r de B dans \mathcal{R}' , mais de sens opposé :

$$\vec{F}_f = -\lambda \vec{v}_r = -\lambda \times l \dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{F}_f = \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda l \dot{\theta} \end{pmatrix}$$

mais également à la « force » d'entraînement \vec{F}_e :

$$\vec{F}_e = -m \vec{\gamma}_A = m \omega^2 X_0 \cos(\omega t) \vec{u}$$

où :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}_e = \begin{pmatrix} m \omega^2 X_0 \sin \theta \cos(\omega t) \\ m \omega^2 X_0 \cos \theta \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

Remarque – Le référentiel \mathcal{R}' étant dépourvu d'un mouvement de rotation par rapport au référentiel \mathcal{R} , il n'y a pas lieu de tenir compte d'une éventuelle « force » de Coriolis nulle.

2. Sous l'influence des « forces » précédemment mentionnées, le point B acquiert une accélération $\vec{\gamma}_r$ (relativement à \mathcal{R}') soumise à la loi de fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{\gamma}_r &= \vec{F}_f + \vec{P} + \vec{F}_e + \vec{T} \\ \Rightarrow m \begin{pmatrix} l \ddot{\theta}^2 \\ l \ddot{\theta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} mg \cos \theta + m \omega^2 X_0 \sin \theta \cos(\omega t) - T \\ -\lambda l \dot{\theta} - mg \sin \theta + m \omega^2 X_0 \cos \theta \cos(\omega t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La composante, selon \vec{e}_θ , de cette équation fournit alors :

$$\begin{aligned} ml\ddot{\theta} &= -\lambda l\dot{\theta} - mg \sin \theta + m\omega^2 X_0 \cos \theta \cos(\omega t) \\ \Rightarrow ml\ddot{\theta} + \lambda l\dot{\theta} + mg \sin \theta &= m\omega^2 X_0 \cos \theta \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Après simplification par ml et après utilisation des approximations suggérées par l'énoncé : $\cos \theta \simeq 1$ et $\sin \theta \simeq \theta$, cette équation différentielle devient :

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m} \dot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = \omega^2 \frac{X_0}{l} \cos(\omega t)$$

soit, en introduisant les paramètres $\frac{\lambda}{m} = \alpha\omega_0$ avec $\frac{g}{l} = \omega_0^2$:

$$\ddot{\theta} + \alpha\omega_0 \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = \omega^2 \frac{X_0}{l} \cos(\omega t)$$

3. L'image complexe $\underline{\theta}$ associée à θ est définie par :

$$\underline{\theta} = \theta_0 e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \dot{\underline{\theta}} = j\omega\theta_0 e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \ddot{\underline{\theta}} = -\omega^2\theta_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

de sorte que l'équation complexe correspondant à l'équation du mouvement :

$$\ddot{\underline{\theta}} + \alpha\omega_0 \dot{\underline{\theta}} + \omega_0^2 \underline{\theta} = \omega^2 \frac{X_0}{l} e^{j\omega t}$$

devient :

$$(-\omega^2 + \alpha j\omega_0\omega + \omega_0^2) \theta_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \omega^2 \frac{X_0}{l} e^{j\omega t}$$

ou encore, après simplification par $\omega^2 e^{j\omega t}$:

$$\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j\alpha \frac{\omega_0}{\omega} \right) \theta_0 e^{j\phi} = \frac{X_0}{l}$$

Cette équation se présente alors sous la forme suivante :

$$(u^2 - 1 + j\alpha u) \theta_0 e^{j\phi} = \frac{X_0}{l} \quad (38)$$

4. Dans cette équation, apparaît le nombre complexe :

$$\underline{Z} = u^2 - 1 + j\alpha u = Z e^{j\varphi}$$

où le module $Z = |\underline{Z}|$ se calcule directement :

$$Z = \sqrt{(u^2 - 1)^2 + \alpha^2 u^2}$$

et dont l'argument φ vérifie :

$$\cos \varphi = \frac{\operatorname{Re}\{\underline{Z}\}}{|\underline{Z}|} = \frac{u^2 - 1}{Z} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{\operatorname{Im}\{\underline{Z}\}}{|\underline{Z}|} = \frac{\alpha u}{Z}$$

Ce faisant, l'équation (38) devient :

$$Z\theta_0 e^{j(\phi + \varphi)} = \frac{X_0}{l}$$

L'identification des modules de part et d'autre de l'égalité fournit alors :

$$Z\theta_0 = \frac{X_0}{l} \Rightarrow \theta_0 = \frac{X_0}{lZ} = \frac{X_0}{l\sqrt{(u^2 - 1)^2 + \alpha^2 u^2}} \quad (39)$$

et l'identification des arguments conduit à :

$$\phi + \varphi = 0 \Rightarrow \phi = -\varphi \Rightarrow \begin{cases} \cos \phi = \cos \varphi \\ \sin \phi = -\sin \varphi \end{cases}$$

soit encore :

$$\cos \phi = \frac{u^2 - 1}{\sqrt{(u^2 - 1)^2 + \alpha^2 u^2}} \text{ et } \sin \phi = \frac{-\alpha u}{\sqrt{(u^2 - 1)^2 + \alpha^2 u^2}}$$

5. Les expressions précédentes montrent que :

$$\begin{cases} \lim_{u \rightarrow \infty} [\cos \phi] = 1 \\ \lim_{u \rightarrow \infty} [\sin \phi] = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow \infty} \phi = 0$$

Remarque – La solution $\phi = 2\pi$ aurait également convenu. Cependant, l'expression de $\sin \phi$ montre que $\sin \phi$ est négatif et c'est pourquoi la solution $\sin \phi = 0$ est préférable à la solution $\phi = 2\pi$ car ϕ peut varier continûment depuis cette valeur nulle pour atteindre des valeurs négatives.

Pour les mêmes raisons :

$$\begin{cases} \lim_{u \rightarrow 0} [\cos \phi] = -1 \\ \lim_{u \rightarrow 0} [\sin \phi] = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \phi = -\pi$$

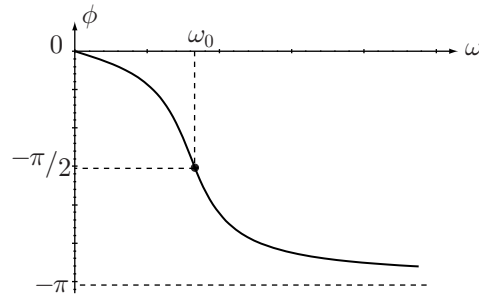
et :

$$\begin{cases} \lim_{u \rightarrow 1} [\cos \phi] = 0 \\ \lim_{u \rightarrow 1} [\sin \phi] = -1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 1} \phi = -\frac{\pi}{2}$$

Or, d'après la définition de $u = \frac{\omega_0}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{u}$, les limites calculées ci-dessus équivalent à :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \phi = 0 \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi = -\pi \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \phi = -\frac{\pi}{2}$$

ce qui permet le tracé de la courbe décrivant ϕ en fonction de ω :

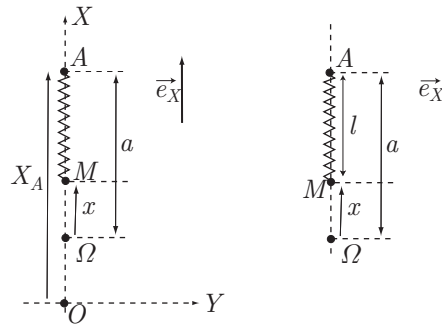


6. Cette représentation graphique révèle que $\phi = -\frac{\pi}{2}$ pour $\omega = \omega_0$, ou encore pour $u = 1$. L'expression (39) devient alors :

$$\theta_0 = \frac{X_0}{l\sqrt{(u^2 - 1)^2 + \alpha^2 u^2}} \Rightarrow \theta_0 = \frac{X_0}{l\alpha} \text{ pour } u = 1$$

● **147** ————— **Lycée Poincaré, Nancy**

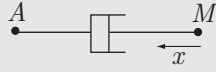
1. Le référentiel \mathcal{R}' lié à Ω , tel que $\Omega A = a$, n'est pas galiléen et c'est la raison pour laquelle il est recommandé de représenter la situation physique dans les deux référentiels :



Dans le référentiel \mathcal{R}' , M est soumis aux forces suivantes :

- son poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_X$;
- la force de frottement fluide : $\vec{F}_f = -f \dot{x} \vec{e}_X$;

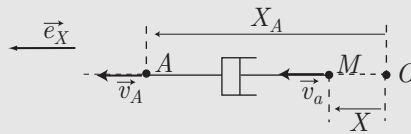
⚠ Dans le référentiel où A est immobile, seul le mouvement de M provoque le mouvement de l'amortisseur :



C'est pourquoi la force de frottement exercée par l'amortisseur sur M ne dépend que de la vitesse \vec{v} de M :

$$\vec{F}_f = -f \vec{v} = -f \dot{x} \vec{e}_X \tag{40}$$

En revanche, dans un référentiel où A présente aussi une vitesse \vec{v}_A , la force de frottement dépend simultanément des mouvements de A et de M :



Dans un tel référentiel, dont l'origine O est immobile, la vitesse $\vec{v}_a = \dot{X} \vec{e}_X$ de M est une vitesse « absolue », tandis que dans le premier référentiel, la vitesse (relative) $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x$ de M est liée à la vitesse d'entraînement du point A : $\vec{v}_a = \dot{X}_A \vec{e}_X$ par la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_A + \vec{v} \Rightarrow \dot{X} \vec{e}_X = \dot{X}_A \vec{e}_X + \dot{x} \vec{e}_X \Rightarrow \dot{x} \vec{e}_X = (\dot{X} - \dot{X}_A) \vec{e}_X$$

Dans ces conditions, la force de frottement (40) devient :

$$\vec{F}_f = -f (\dot{X} - \dot{X}_A) \vec{e}_X \text{ lorsque } A \text{ est mobile}$$

- la tension \vec{T} du ressort, qui s'allonge dans le sens de $-\vec{e}_X$; si l et l_v désignent respectivement la longueur du ressort et sa longueur à vide, cette tension s'écrit :

$$\vec{T} = -k (l - l_v) \times (-\vec{e}_X) = k (l - l_v) \vec{e}_X$$

avec :

$$l + x = a \Rightarrow l = a - x \Rightarrow \vec{T} = k (a - l_v - x) \vec{e}_X$$

À ces forces s'ajoute également la « force » d'inertie d'entraînement liée au caractère non galiléen de \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{ie} &= -m \ddot{X}_A \vec{e}_X = -m \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos(\omega t) \right] \vec{e}_X \\ \Rightarrow \vec{F}_{ie} &= \frac{m a \omega^2}{2} \cos(\omega t) \vec{e}_X \end{aligned}$$

La loi fondamentale de la dynamique généralisée au référentiel \mathcal{R}' permet d'exprimer l'accélération relative $\vec{\gamma}_r = \ddot{x} \vec{e}_X$:

$$\begin{aligned} m \vec{\gamma}_r &= \vec{F}_f + \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} \\ \Rightarrow m \ddot{x} \vec{e}_X &= -f \dot{x} \vec{e}_X + \vec{P} + k (a - l_v - x) \vec{e}_X + \frac{m a \omega^2}{2} \cos(\omega t) \vec{e}_X \end{aligned}$$

Or, à l'équilibre, \ddot{x} , \dot{x} et x sont simultanément nuls :

$$\vec{0} = \vec{P} + k(a - l_v) \vec{e}_X \Rightarrow \vec{P} = -k(a - l_v) \vec{e}_X$$

d'où il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} m \ddot{x} &= -f \dot{x} - k(a - l_v) + k(a - l_v - x) + \frac{ma\omega^2}{2} \cos(\omega t) \\ &= -f \dot{x} - kx + \frac{ma\omega^2}{2} \cos(\omega t) \\ \Rightarrow m \ddot{x} + f \dot{x} + kx &= \frac{ma\omega^2}{2} \cos(\omega t) \\ \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{f}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x &= \frac{a\omega^2}{2} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

En adoptant les notations suggérées par l'énoncé : $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ et $\frac{f}{m} = 2\lambda$, cette équation devient finalement :

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{a\omega^2}{2} \cos(\omega t)$$

2. Soit \underline{x} l'image complexe associée à $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$, telle que :

$$x(t) = \text{Re} \{ \underline{x} \} \Rightarrow \underline{x} = X_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

où X_0 désigne l'amplitude des oscillations forcées et ϕ le déphasage entre $x(t)$ et le déplacement de A . En adoptant la notation complexe, il convient de résoudre l'équation différentielle :

$$\ddot{\underline{x}} + 2\lambda \dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{a\omega^2}{2} e^{j\omega t}$$

avec :

$$\underline{x} = X_0 e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \dot{\underline{x}} = j\omega X_0 e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \ddot{\underline{x}} = -\omega^2 X_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

c'est-à-dire :

$$(-\omega^2 + 2\lambda j\omega + \omega_0^2) X_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{a\omega^2}{2} e^{j\omega t}$$

Après simplification par $\omega^2 e^{j\omega t}$, cette équation devient :

$$\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j \frac{2\lambda}{\omega} \right) X_0 e^{j\phi} = \frac{a}{2}$$

Cette identité complexe impose l'identité des modules des termes de part et d'autre de l'égalité, ce qui se traduit par :

$$X_0 \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega^2}} = \frac{a}{2}$$

soit encore :

$$X_0 = \frac{a}{2\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega^2}}}$$

3. En définissant le paramètre sans dimension $u = \frac{\omega_0}{\omega}$ et la fonction :

$$f(u) = (u^2 - 1)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega_0^2} u^2$$

l'amplitude des oscillations forcées se présente sous la forme : $X_0 = \frac{a}{2\sqrt{f(u)}}$ et devient *extremum* lorsque $f(u)$ le devient aussi, c'est-à-dire pour une valeur u_r de u telle que $\left.\frac{df}{du}\right|_{u_r} = 0$, avec :

$$\begin{aligned} f(u) = (u^2 - 1)^2 + \frac{4\lambda^2}{\omega_0^2} u^2 &\Rightarrow \frac{df}{du} = 4u(u^2 - 1) + \frac{8\lambda^2}{\omega_0^2} u \\ &\Rightarrow \left.\frac{df}{du}\right|_{u_r} = 4u_r \left(u_r^2 - 1 + \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Outre la solution $u_r = 0$ (physiquement inacceptable car correspondant à une pulsation $\omega_r = \frac{1}{u_r}$ infinie), cette équation admet pour solution :

$$u_r^2 = 1 - \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}$$

Ainsi, pour $1 > \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}$, la pulsation de résonance ω_r vérifie :

$$u_r = \frac{\omega_0}{\omega_r} = \sqrt{1 - \frac{2\lambda^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

d'où il découle que :

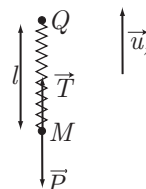
$$\omega_r = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}} \text{ si } \omega_0 > \sqrt{2}\lambda$$

● **148** ————— **Concours de la Banque « Agro »**

1. (a) Soit \vec{u}_z le vecteur unitaire vertical ascendant, à partir duquel peut s'exprimer la position du point M .

Le point M est soumis à :

- son poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$;
- la tension \vec{T} du ressort, de longueur l , de longueur à vide l_0 , et qui s'allonge dans le sens de $-\vec{u}_z$:



$$\vec{T} = -k(l - l_0) \times (-\vec{u}_z) = k(l - l_0) \vec{u}_z \quad (41)$$

En l'absence d'onde sismique, le ressort adopte une longueur l_1 , tandis que l'équilibre de M se traduit par :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -k(l_1 - l_0) \vec{u}_z \Rightarrow mg = k(l_1 - l_0) \quad (42)$$

ce qui fournit immédiatement :

$$l_1 = l_0 + \frac{mg}{k}$$

- (b) On repère la position du point M à partir du point Q , tel que la longueur du ressort vaut $QM = l$:

$$\vec{QM} = -l \vec{u}_z$$

Or, la position du point P , par rapport à un référentiel galiléen fixe, est repérée depuis un point O fixe tel que $\vec{OP} = Z_p(t) \vec{u}_z$, et on suppose le boîtier B assez rigide pour que le vecteur \vec{PQ} ne varie pas dans le temps. De ces définitions, ressort l'expression de la position \vec{OM} de M repérée depuis le point fixe O :

$$\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PQ} + \vec{QM} = Z_p \vec{u}_z + \vec{PQ} - l \vec{u}_z$$

c'est-à-dire, en notant $l(t) = l_1 - z(t)$:

$$\vec{OM} = Z_p \vec{u}_z + z \vec{u}_z + \vec{PQ} - l_1 \vec{u}_z$$

Or, \vec{PQ} , l_1 et \vec{u}_z étant constants, il s'ensuit que :

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{Z}_p \vec{u}_z + \dot{z} \vec{u}_z = (\dot{Z}_p + \dot{z}) \vec{u}_z$$

et, pour les mêmes raisons, l'accélération du point M dans un référentiel galiléen de centre O , est donnée par :

$$\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = (\ddot{Z}_p + \ddot{z}) \vec{u}_z$$

2. En présence d'une onde sismique, le point M est soumis à :

- son poids \vec{P} , dont l'équation (42) a montré qu'il pouvait s'écrire :

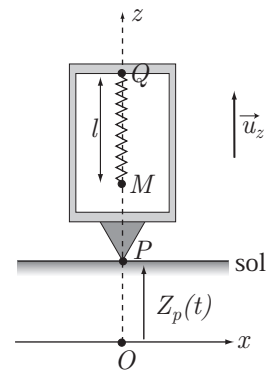
$$\vec{P} = -k(l_1 - l_0) \vec{u}_z$$

- la tension \vec{T} du ressort qui adopte la forme de l'identité (41) :

$$\vec{T} = k(l - l_0) \vec{u}_z$$

- une force d'amortissement : $\vec{F} = f \frac{dl}{dt} \vec{u}_z$, avec :

$$l = l_1 - z \Rightarrow \frac{dl}{dt} = -\dot{z} \Rightarrow \vec{F} = -f \dot{z} \vec{u}_z$$



qui composent la résultante :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F} + \vec{T} + \vec{P} = -f \dot{z} \vec{u}_z + k(l - l_0) \vec{u}_z - k(l_1 - l_0) \vec{u}_z \\ &= -f \dot{z} \vec{u}_z + k(l - l_1) \vec{u}_z \text{ avec } l = l_1 - z \\ \Rightarrow \vec{F} &= (-f \dot{z} - kz) \vec{u}_z\end{aligned}$$

Or, dans le référentiel galiléen de centre O , la loi fondamentale de la dynamique impose :

$$\begin{aligned}m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \vec{F} &\Rightarrow m(\ddot{Z}_p + \ddot{z}) \vec{u}_z = (-f \dot{z} - kz) \vec{u}_z \\ \Rightarrow \ddot{z} &= -\frac{f}{m} \dot{z} - \frac{k}{m} z - \ddot{Z}_p \\ \Rightarrow \ddot{z} + \frac{f}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z &= -\ddot{Z}_p\end{aligned}$$

D'une part l'énoncé fournit l'expression de $Z_p(t)$:

$$Z_p = a \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{Z}_p = -a\omega^2 \cos(\omega t)$$

et d'autre part, en posant :

$$\omega_0 = \frac{k}{m}$$

il apparaît que :

$$2\lambda\omega_0 = \frac{f}{m} \Rightarrow \lambda = \frac{f}{2m\omega_0} = \frac{f}{2m} \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow \lambda = \frac{f}{2\sqrt{km}}$$

Ce faisant le mouvement de M est décrit par l'équation différentielle :

$$\ddot{z} + 2\lambda\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = a\omega^2 \cos(\omega t)$$

3. La réponse $z(t)$ du sismographe est la solution de cette équation différentielle et se décompose ainsi en :

- une solution $z_s(t)$ homogène au second membre, c'est-à-dire qui se présente sous la forme :

$$z_s(t) = b \cos(\omega t - \phi)$$

où b et ϕ sont des constantes. Cette solution correspond au régime permanent (encore appelé « régime sinusoïdal forcé » par l'énoncé) ;

- une solution, $z_t(t)$, de l'équation différentielle dépourvue de son second membre :

$$\ddot{z}_t + 2\lambda\omega_0 \dot{z}_t + \omega_0^2 z_t = 0$$

L'équation caractéristique (en X) associée à cette équation différentielle :

$$X^2 + 2\lambda\omega_0 X + \omega_0^2 = 0 \tag{43}$$

admet pour discriminant réduit :

$$\Delta' = \lambda^2 \omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2 (\lambda^2 - 1)$$

Or, le régime critique aperiodique est atteint lorsque l'équation caractéristique (43) admet une racine double X_0 , auquel cas Δ' s'annule :

$$\Delta' = 0 \Rightarrow \omega_0^2 (\lambda^2 - 1) \Rightarrow \lambda = 1$$

Dans ce cas, le régime transitoire critique, décrit par $z_t(t)$, s'écrit :

$$z_t(t) = (A + Bt) e^{X_0 t}$$

où A et B sont des constantes d'intégration, et où :

$$X_0 = -\lambda\omega_0 = -\omega_0 \Rightarrow z_t(t) = (A + Bt) e^{-\omega_0 t}$$

4. (a) Le régime sinusoïdal forcé $z = z_s = b \cos(\omega t - \phi)$ désigne la solution homogène au second membre de l'équation différentielle :

$$\ddot{z} + 2\lambda\omega_0 \dot{z} + \omega_0^2 z = a\omega^2 \cos(\omega t)$$

et admet une image complexe \underline{z} telle que :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{\underline{z}\} = z_s = b \cos(\omega t - \phi) &\Rightarrow \underline{z} = b e^{j(\omega t - \phi)} \\ &\Rightarrow \dot{\underline{z}} = j\omega b e^{j(\omega t - \phi)} \\ &\Rightarrow \ddot{\underline{z}} = -\omega^2 b e^{j(\omega t - \phi)} \end{aligned}$$

Aussi, dans l'équation complexe : $\ddot{\underline{z}} + 2\lambda\omega_0 \dot{\underline{z}} + \omega_0^2 \underline{z} = \omega^2 a e^{j\omega t}$, il est possible de substituer les termes \underline{z} , $\dot{\underline{z}}$ et $\ddot{\underline{z}}$:

$$(-\omega^2 + 2\lambda j\omega\omega_0 + \omega_0^2) b e^{j(\omega t - \phi)} = a\omega^2 e^{j\omega t}$$

c'est-à-dire :

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + j 2\lambda\omega\omega_0) b e^{-j\phi} = a\omega^2$$

ou encore, après simplification par ω^2 :

$$\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + j 2\lambda \frac{\omega_0}{\omega} \right) b e^{-j\phi} = a$$

Cette identité complexe impose l'identité des modules des deux membres :

$$\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^2 + 4\lambda^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} \times b = a$$

ce qui fournit alors :

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^2 + 4\lambda^2 \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}}$$

- (b) Quelles que soient les valeurs de λ , ce rapport admet pour limites :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{b}{a} \right) = 0 \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left(\frac{b}{a} \right) = 1$$

En outre, si l'on définit la fonction :

$$f(u) = (u^2 - 1)^2 + 4\lambda^2 u^2 \text{ avec } u = \frac{\omega_0}{\omega}$$

le rapport $\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{f(u)}}$ devient *extremum* en même temps que $f(u)$ et ceci se produit pour une valeur u_r de u qui annule $\frac{df}{du}$:

$$\left. \frac{df}{du} \right|_{u_r} = 4u_r(u_r^2 - 1) + 8\lambda^2 u_r = 0 \Rightarrow 4u_r(u_r^2 - 1 + 2\lambda^2) = 0$$

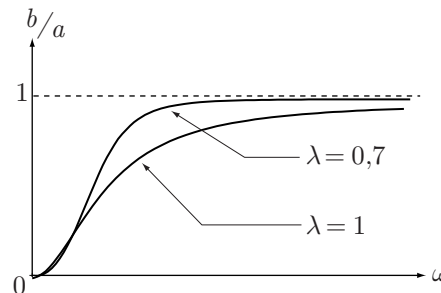
Deux solutions apparaissent, dont $u_r = 0$ qui ne peut être retenue car elle correspond à une pulsation $\omega_r = \frac{\omega_0}{u_r}$ qui tend vers l'infini. En revanche, l'autre solution vérifie :

$$u_r^2 = 1 - 2\lambda^2$$

et ne peut exister que pour :

$$1 - 2\lambda^2 > 0 \Rightarrow \lambda^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda < \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,7$$

Ces calculs confirment l'absence d'*extremum* pour les courbes décrivant $\frac{b}{a}$ pour $\lambda = 1$ et pour $\lambda = 0,7$:



Au contraire, lorsque $\lambda < 0,7$ (ce qui convient pour la valeur $\lambda = 0,5$), un *extremum* apparaît pour :

$$u_r = \sqrt{1 - 2\lambda^2} \Rightarrow \frac{\omega_0}{\omega_r} = \sqrt{1 - 2\lambda^2} \Rightarrow \omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - 2\lambda^2}}$$

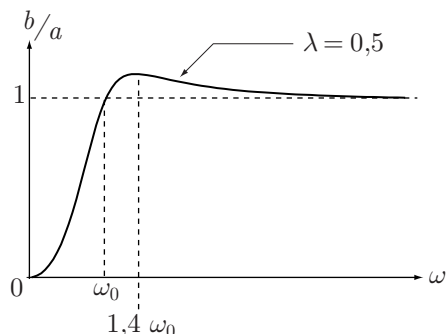
En l'occurrence, pour $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\lambda^2 = \frac{1}{2} = 0,5$:

$$\omega_r = \frac{\omega_0}{\sqrt{0,5}} \simeq 1,4\omega_0$$

et, lorsque $\omega = \omega_0$:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}}} = 1$$

Ces deux derniers résultats confirment finalement la courbe fournie pour $\lambda = 0,5$:



- (c) Le sismographe restitue fidèlement l'amplitude du mouvement de la pointe P lorsque $b = a$, c'est-à-dire $\frac{b}{a} = 1$. Or, les réseaux de courbes obtenus précédemment montrent que, pour toute valeur de λ , ce résultat est obtenu pour :

$$\omega \gg \omega_0$$

En outre, lorsque le sol commence à vibrer, le sismographe retranscrit le mouvement du point M : $z(t) = z_t(t) + z_s(t)$, dont le régime transitoire retarde le moment où $b \simeq a$. D'où l'intérêt de choisir le régime transitoire qui disparaît le plus vite, c'est-à-dire le régime critique pour lequel :

$$\lambda = 1$$

● 149 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. Soit $\psi(t)$ la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= f(t) \times g(t) = AB \cos(\omega t + \phi) \times \cos(\omega t + \varphi) \\ &= \frac{AB}{2} [\cos(\phi - \varphi) + \cos(2\omega t + \phi + \varphi)] \end{aligned}$$

dont la valeur moyenne vaut :

$$\begin{aligned} \langle \psi \rangle &= \langle fg \rangle = \frac{AB}{2T} \left\{ \int_t^{t+T} \cos(\phi - \varphi) dt + \int_t^{t+T} \cos(2\omega t + \phi + \varphi) dt \right\} \\ &= \frac{AB}{2T} \left\{ \cos(\phi - \varphi) \times T + \frac{1}{2\omega} [\sin(2\omega t + \phi + \varphi)]_t^{t+T} \right\} \end{aligned}$$

où la définition de la période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ conduit à :

$$[\sin(2\omega t + \phi + \varphi)]_t^{t+T} = \sin(2\omega t + 4\pi + \phi + \varphi) - \sin(2\omega t + \phi + \varphi) = 0$$

Par conséquent :

$$\langle fg \rangle = \langle \psi \rangle = \frac{AB}{2} \cos(\phi - \varphi) \quad (44)$$

Quant aux images complexes \underline{f} et \underline{g} associées aux fonctions $f(t)$ et $g(t)$, elles doivent satisfaire aux conditions suivantes :

$$\operatorname{Re}\{\underline{f}\} = f(t) = A \cos(\omega t + \phi) \text{ et } \operatorname{Re}\{\underline{g}\} = g(t) = B \cos(\omega t + \varphi)$$

C'est pour cette raison que ces grandeurs sont choisies sous la forme :

$$\underline{f} = A e^{j(\omega t + \phi)} \text{ et } \underline{g} = B e^{j(\omega t + \varphi)} \Rightarrow \underline{g}^* = B e^{-j(\omega t + \varphi)}$$

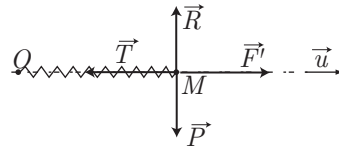
Aussi,

$$\underline{f} \times \underline{g}^* = AB e^{j(\phi - \varphi)} \Rightarrow \operatorname{Re}\{\underline{f} \times \underline{g}^*\} = AB \cos(\phi - \varphi)$$

ce qui, à l'aide du résultat (44), justifie que :

$$\langle fg \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\{\underline{f} \times \underline{g}^*\} \quad (45)$$

2. Le point M se déplace selon la direction de \vec{u} :



et est soumis à :

- son poids \vec{P} et la réaction \vec{R} du support qui le maintient ;
- la tension du ressort : $\vec{T} = -kx \vec{u}$;
- la force de frottement : $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} = -\frac{m}{\tau} \dot{x} \vec{u}$;
- la force d'excitation : $\vec{F}' = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}$.

Sous l'influence de ces forces, M acquiert une accélération $\vec{\gamma} = \ddot{x} \vec{u}$ vérifiant la loi fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{\gamma} &= \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F} + \vec{F}' \\ \Rightarrow m \ddot{x} \vec{u} &= \vec{P} + \vec{R} - kx \vec{u} - \frac{m}{\tau} \dot{x} \vec{u} + F_0 \cos(\omega t) \vec{u} \end{aligned}$$

que l'on peut projeter sur \vec{u} :

$$m \ddot{x} = -kx - \frac{m}{\tau} \dot{x} + F_0 \cos(\omega t) \Rightarrow \ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

soit encore :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

3. En notation complexe, cette équation différentielle s'écrit aussi :

$$\ddot{\underline{x}} + \frac{1}{\tau} \dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t} \quad (46)$$

où $\underline{x} = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ est l'image complexe associée à $x(t)$:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\underline{x}\} = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

On note également $v = \dot{x} = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ la vitesse de M , dont l'image complexe $\underline{v} = V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ est liée à \underline{x} :

$$\underline{v} = \dot{\underline{x}} \Rightarrow \underline{v} = j\omega X_0 e^{j(\omega t + \phi)} = j\omega \underline{x} \Rightarrow \underline{x} = \frac{\underline{v}}{j\omega} \Rightarrow \ddot{\underline{x}} = \dot{\underline{v}} = j\omega V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

Ce faisant, l'équation (46) devient :

$$\left(j\omega + \frac{1}{\tau} + \frac{\omega_0^2}{j\omega} \right) V_0 e^{j(\omega t + \phi)} = \frac{F_0}{m} e^{j\omega t}$$

c'est-à-dire :

$$\left[\frac{1}{\tau} + j \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) \right] V_0 e^{j\phi} = \frac{F_0}{m}$$

où le membre de gauche contient un nombre complexe, de module :

$$Z = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)^2}$$

et d'argument ψ tel que : $\tan \psi = \tau \left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right)$ Par suite :

$$V_0 Z e^{j(\psi + \phi)} = \frac{F_0}{m} \Rightarrow \begin{cases} \phi = -\psi \\ V_0 = \frac{F_0}{Zm} \end{cases}$$

Dorénavant, on utilisera le paramètre sans dimension $u = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \omega = u \omega_0$, de manière à poser :

$$V_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 \left(u - \frac{1}{u} \right)^2}} \text{ et } \tan \phi = \omega_0 \tau \left(\frac{1}{u} - u \right)$$

de sorte que : $\underline{v} = V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$. Or, par définition, la puissance P que la force $\vec{F}' = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}$ exerce sur le point M , animé d'une vitesse \vec{v} , est donnée par :

$$P = \vec{F}' \cdot \vec{v} = F' \times v \Rightarrow \langle P \rangle = \langle F' v \rangle$$

et, d'après le résultat (45) :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \underline{F}' \times \underline{v}^* \} \text{ où : } \underline{F}' = F_0 e^{j\omega t} \text{ et } \underline{v}^* = V_0 e^{-j(\omega t + \phi)}$$

C'est pourquoi :

$$\underline{F}' \times \underline{v}^* = F_0 V_0 e^{-j\phi} \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{F_0 V_0}{2} \cos \phi$$

avec :

$$V_0 = \frac{F_0}{m \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 \left(u - \frac{1}{u} \right)^2}} \text{ et } \cos \phi = \frac{1}{\tau \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 \left(u - \frac{1}{u} \right)^2}}$$

Finalement, ces calculs montrent que :

$$\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{2m\tau \left[\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 \right]}$$

En posant :

$$f(u) = \frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 \left(u - \frac{1}{u} \right)^2$$

la puissance moyenne : $\langle P \rangle = \frac{F_0^2}{2m\tau f(u)}$ devient *extremum* lorsque $f(u)$ le devient également. Il suffit dès lors de remarquer que :

$$\left(u - \frac{1}{u} \right)^2 \geq 0 \Rightarrow f(u) \geq \frac{1}{\tau^2} \Rightarrow \langle P \rangle \leq \frac{\tau F_0^2}{2m}$$

afin d'obtenir :

$$\langle P \rangle \leq \langle P \rangle_{\max} = \frac{\tau F_0^2}{2m}$$

4. Soient ω_1 et ω_2 les pulsations telles que $\langle P(\omega_1) \rangle = \langle P(\omega_2) \rangle = \frac{\langle P \rangle_{\max}}{2}$ auxquelles sont associées les valeurs $u_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0}$ et $u_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0}$, solutions de l'équation :

$$\begin{aligned} \langle P(u) \rangle = \frac{\langle P \rangle_{\max}}{2} &\Rightarrow \frac{F_0^2}{m\tau \left[\frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 \right]} = \frac{F_0^2}{2 \frac{m}{\tau}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\tau^2} + \omega_0^2 \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 = \frac{2}{\tau^2} \\ &\Rightarrow \omega_0^2 \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 - \frac{1}{\tau^2} = 0 \end{aligned}$$



Il serait possible de chercher les solutions positives u_1 et u_2 de cette équation, puis d'en déduire la bande passante. Cependant, l'énoncé n'impose pas la détermination explicite de u_1 et u_2 et c'est pourquoi il est aussi possible d'utiliser une méthode plus élégante qui s'affranchit de cette détermination.

On définit une fonction $\psi(u)$ par :

$$\psi(u) = \omega_0^2 \left(u - \frac{1}{u} \right)^2 - \frac{1}{\tau^2}$$

dont on cherche les racines (solutions de l'équation $\psi(u) = 0$).

Supposons que l'on possède une de ces racines, par exemple $u_2 > 1$, solution de l'équation :

$$\psi(u_2) = \omega_0^2 \left(u_2 - \frac{1}{u_2} \right)^2 - \frac{1}{\tau^2} = 0 \quad (47)$$

Il apparaît alors que :

$$\psi\left(\frac{1}{u_2}\right) = \omega_0^2 \left(\frac{1}{u_2} - u_2\right)^2 - \frac{1}{\tau^2} = 0$$

c'est-à-dire que $\frac{1}{u_2}$ est également une racine de $\psi(u)$. Or, puisqu'il n'existe que deux racines positives, $\frac{1}{u_2}$ s'identifie nécessairement à u_1 : $u_1 = \frac{1}{u_2} < 1$. Il est dès lors possible de remplacer $\frac{1}{u_2}$ par u_1 dans l'équation (47) :

$$\omega_0^2 (u_2 - u_1)^2 - \frac{1}{\tau^2} = 0 \Rightarrow (u_2 - u_1)^2 = \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}$$

Or, le choix adopté pour $u_2 > 1 \Rightarrow u_1 < 1$ suffit à assurer que :

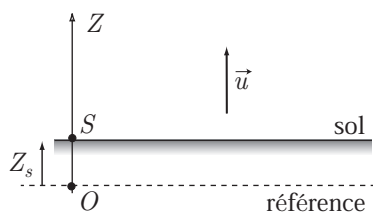
$$\begin{aligned} u_2 - u_1 > 0 &\Rightarrow u_2 - u_1 = \frac{1}{\omega_0 \tau} \Rightarrow \frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0 \tau} \\ &\Rightarrow \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

Cette identité est fréquemment présentée sous la forme suivante :

$$\Delta\omega \times \tau = 1$$

● 150 ————— Concours ENS Lyon et Cachan

1. Le référentiel d'étude est le sol, animé d'une vibration verticale $Z_s = Z_0 \cos(\omega t)$ par rapport au niveau de référence $Z = 0$ d'un référentiel galiléen.

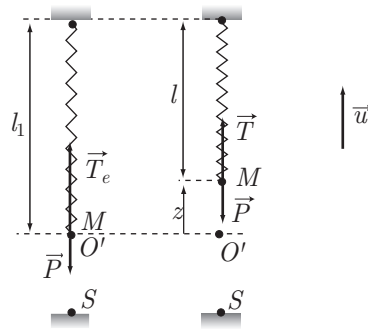


Par suite, le référentiel d'étude possède une accélération :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{OS}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} [Z_0 \cos(\omega t) \vec{u}] = -\omega^2 Z_0 \cos(\omega t) \vec{u}$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire orienté selon la verticale ascendante. Un tel référentiel, accéléré par rapport à un référentiel galiléen, ne peut donc pas être également galiléen.

2. Soit M le point de masse m fixé au ressort du sismographe, dont le mouvement est étudié dans le référentiel terrestre lié au sol.



En l'absence de vibration, ce point M est soumis :

- à son poids $\vec{P} = -mg \vec{u}$;
- à la tension \vec{T} du ressort, dont l'allongement se fait dans le sens de $-\vec{u}$:

$$\vec{T} = -k(l - l_v) \times (-\vec{u}) = k(l - l_v) \vec{u}$$

où :

$$l + z = l_1 \Rightarrow l = l_1 - z \Rightarrow \vec{T} = k(l_1 - z - l_v) \vec{u} \quad (48)$$

Notamment, lorsque M occupe sa position d'équilibre ($z = 0$), la résultante de ces forces s'annule :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} = -k(l_1 - l_v) \vec{u} \quad (49)$$

Cependant, lorsque le sol vibre, le point M est également soumis à :

- la « force » d'entraînement :

$$\vec{f}_e = -m \frac{d^2 \vec{OS}}{dt^2} = m\omega^2 Z_0 \cos(\omega t) \vec{u}$$

- à la force de frottement fluide : $\vec{f} = -\lambda \dot{z} \vec{u}$.

auquel cas son accélération (relativement au sol) $\vec{\gamma}_r = \ddot{z} \vec{u}$ vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \vec{\gamma} = \vec{f} + \vec{T} + \vec{P} + \vec{f}_e \Rightarrow m \ddot{z} \vec{u} = -\lambda \dot{z} \vec{u} + \vec{T} + \vec{P} + m\omega^2 Z_0 \cos(\omega t) \vec{u}$$

où, d'après les relations (48) et (49) :

$$\vec{T} + \vec{P} = k(l_1 - z - l_v) \vec{u} - k(l_1 - l_v) \vec{u} = -kz \vec{u}$$

C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} m \ddot{z} &= -\lambda \dot{z} - kz + m\omega^2 Z_0 \cos(\omega t) \Rightarrow m \ddot{z} + \lambda \dot{z} + kz = m\omega^2 Z_0 \cos(\omega t) \\ &\Rightarrow \ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t) \end{aligned}$$

On posera dorénavant :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \frac{\lambda}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$$

de manière à présenter cette équation sous la forme suivante :

$$\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega^2 Z_0 \cos(\omega t) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$$

3. En régime permanent, z est la solution homogène au second membre de cette équation, et présente donc la forme :

$$z = A \cos(\omega t + \phi)$$

à laquelle on associe une image complexe :

$$\underline{z} = A e^{j(\omega t + \phi)} \text{ telle que } z = \text{Re} \{ \underline{z} \}$$

Par suite :

$$\dot{\underline{z}} = j\omega \times A e^{j(\omega t + \phi)} \Rightarrow \ddot{\underline{z}} = -\omega^2 \times A e^{j(\omega t + \phi)}$$

peuvent être remplacés dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \ddot{\underline{z}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{z}} + \omega_0^2 \underline{z} &= \omega^2 Z_0 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \left(-\omega^2 + j \frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2 \right) A e^{j(\omega t + \phi)} &= \omega^2 Z_0 e^{j\omega t} \\ \Rightarrow \left[(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega\omega_0}{Q} \right] A e^{j\phi} &= \omega^2 Z_0 \end{aligned}$$

Les modules des deux membres de cette équation s'identifient alors :

$$A \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}} = \omega^2 Z_0 \Rightarrow A \sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 \right)^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 Q^2}} = Z_0$$

soit encore :

$$A = \frac{Z_0}{\sqrt{(u^2 - 1)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} \text{ où } u = \frac{\omega_0}{\omega} \quad (50)$$

En notant $f(u)$ la fonction :

$$f(u) = (u^2 - 1)^2 + \frac{u^2}{Q^2} \Rightarrow A = \frac{Z_0}{\sqrt{f(u)}}$$

on constate que les variations de l'amplitude A sont liées à celles de $f(u)$, et notamment à sa dérivée :

$$\frac{df}{du} = 2 \times 2u(u^2 - 1) + \frac{2u}{Q^2} = 4u \left(u^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right)$$

qui s'annule pour une valeur u_0 de u telle que :

$$4u_0 \left(u_0^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right) = 0$$

Deux solutions se présentent alors :

- soit $u_0 = 0$, c'est-à-dire $\frac{\omega_0}{\omega} = 0$ ce qui signifie que ω tend vers l'infini ;
- soit :

$$u_0^2 - 1 = -\frac{1}{2Q^2} \Rightarrow u_0^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \quad (51)$$

qui n'admet de solution réelle qu'à condition que $1 > \frac{1}{2Q^2}$, c'est-à-dire, compte tenu de la définition de Q :

$$Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} \Rightarrow Q^2 = \frac{m^2}{\lambda^2} \times \frac{k}{m} = \frac{km}{\lambda^2} \Rightarrow \frac{1}{2Q^2} = \frac{\lambda^2}{2km}$$

Or, l'énoncé précise que $\lambda^2 < 2km$, ce qui a pour conséquence :

$$\frac{\lambda^2}{2km} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2Q^2} < 1$$

Ce faisant, l'énoncé assure l'existence de la solution :

$$u_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} = \frac{\sqrt{2Q^2 - 1}}{\sqrt{2}Q}$$

qui confère à $f(u)$ sa valeur *maximum* $f(u_0) = (u_0^2 - 1)^2 + \frac{u_0^2}{Q^2}$, que l'on exprime aisément en utilisant les résultats (51) :

$$\begin{aligned} f(u_0) &= \frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) = \frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4} \\ &= \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4} = \frac{1}{4Q^4} (4Q^2 - 1) \end{aligned}$$

L'amplitude *maximum* des oscillations de M vaut par conséquent :

$$A_{\max} = \frac{Z_0}{\sqrt{f(u_0)}} \Rightarrow A_{\max} = \frac{2Q^2 Z_0}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \text{ pour } \omega_{\max} = \frac{\sqrt{2} Q \omega_0}{\sqrt{2Q^2 - 1}}$$

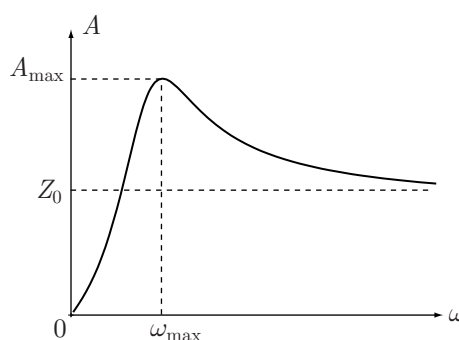
En outre, l'expression (50) de A :

$$A = \frac{Z_0}{\sqrt{(u^2 - 1)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}} = \frac{Z_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 Q^2}}}$$

révèle que :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} A = 0 \text{ et } \lim_{\omega \rightarrow \infty} A = Z_0$$

La représentation graphique de A en fonction de ω découle directement de ces calculs :



4. L'amplitude est donnée par le résultat (50) :

$$A = \frac{Z_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2 Q^2}}}$$

Aussi, pour que l'amplitude A du mouvement de M soit voisine de celle, Z_0 , du mouvement du sol, il suffit de choisir ω tel que : $\frac{\omega_0}{\omega} \ll 1$, de sorte que $A \simeq Z_0$. Cette inégalité s'écrit :

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \ll \omega \Rightarrow k \ll m\omega^2$$

Physiquement, ce résultat signifie que le ressort est assez élastique pour ne pas mettre en mouvement M ; ce point reste immobile par rapport au niveau de référence $Z = 0$, de telle manière que $z \simeq Z_s$.

L'inégalité précédente peut être considérée comme satisfaite dès que :

$$m\omega^2 = 10 \times k$$

où ω et la fréquence f des oscillations sont liés par :

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow 4\pi^2 m f^2 = 10 k$$

Quant à l'équation (49), elle révèle que :

$$\begin{aligned} \vec{P} = -k(l_1 - l_v)\vec{u} &\Rightarrow mg = k(l_1 - l_v) \\ &\Rightarrow l_1 - l_v = \frac{mg}{k} \end{aligned}$$

avec :

$$k = \frac{4\pi^2 m f^2}{10} \Rightarrow l_1 - l_v = \frac{5g}{2\pi^2 f^2}$$

Dans la gamme des fréquences qui s'étend de 1 à 10 Hz, et en choisissant $g \simeq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $l_1 - l_v$ doit être choisi tel que :

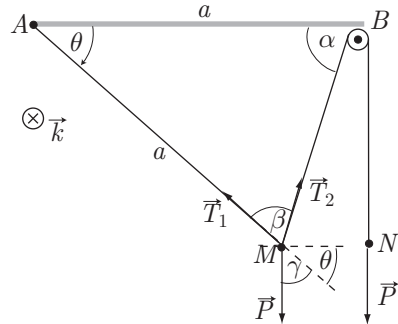
$$25 \text{ cm} \leq l_1 - l_v \leq 2,5 \text{ m}$$

Notamment, pour les basses fréquences ($f \simeq 1 \text{ Hz}$), $l_1 - l_v$ devra prendre une valeur proche de 2,5 m, ce qui rend un tel dispositif pour le moins encombrant.

● 151 ————— Concours des Mines-Ponts

1. Le point M est soumis :

- à son poids $\vec{P} = m \vec{g}$ vertical ;
- à la tension \vec{T}_1 de la portion AM du fil ;
 \vec{T}_1 est orienté selon \vec{MA} .
- à la tension \vec{T}_2 de la portion MB du fil ;
 \vec{T}_2 est orienté selon \vec{MB} et présente la même intensité que le poids $\vec{P}' = m' \vec{g}$ qui s'exerce sur la masse ponctuelle située en N .



Chacune de ces forces présente, en A , un moment calculable dès que l'on s'est fixé un vecteur unitaire \vec{k} , perpendiculaire au plan de la figure et orienté dans le sens de l'augmentation de l'angle θ .

- Pour le poids \vec{P} , ce moment vaut :

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \vec{AM} \wedge \vec{P} = AM \times P \times \sin \gamma \vec{k} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = mga \cos \theta \vec{k}$$

car $\gamma = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \sin \gamma = \cos \theta$.

- Pour la tension \vec{T}_1 , colinéaire à \vec{MA} :

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}_1) = \vec{AM} \wedge \vec{T}_1 \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}_1) = \vec{0}$$

- Le moment de \vec{T}_2 en A est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}_2) = \vec{AM} \wedge \vec{T}_2 = - \|\vec{AM}\| \times \|\vec{T}_2\| \times \sin \beta \vec{k}$$

où : $\|\vec{T}_2\| = \|\vec{P}'\| = m'g$. En outre, le triangle (ABM) est isocèle (car $AB = AM = a$), auquel cas $\alpha = \beta$ a pour conséquence :

$$\alpha + \beta + \theta = \pi \Rightarrow 2\beta + \theta = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin \beta = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

C'est pourquoi :

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}_2) = -m'ga \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \vec{k}$$

2. Le point M est soumis à une force résultante : $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$, dont le moment en A vaut :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_A &= \vec{AM} \wedge \vec{F} = \vec{AM} \wedge \vec{P} + \vec{AM} \wedge \vec{T}_1 + \vec{AM} \wedge \vec{T}_2 \\ &= \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}_1) + \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}_2) \\ &= \left[mga \cos \theta - m'ga \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \vec{k} \end{aligned}$$

Aussi, le point M est à l'équilibre si $\vec{M}_A = \vec{0}$ (ce qui conditionne l'absence de rotation de M autour de A), c'est-à-dire :

$$m \cos \theta - m' \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = 0$$

avec :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \Rightarrow \cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos \theta = 2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - 1$$

Par conséquent, l'équilibre de M impose l'équation :

$$2m \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) - m' \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) - m = 0$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme d'une équation du second degré :

$$2m X^2 - m' X - m = 0 \text{ avec } X = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

dont le discriminant :

$$\Delta = m'^2 + 8m^2 > m'^2 \quad (52)$$

génère deux solutions :

$$X_1 = \frac{m' + \sqrt{\Delta}}{4m} \text{ et } X_2 = \frac{m' - \sqrt{\Delta}}{4m}$$

Or, l'inégalité (52) : $\Delta > m'^2$ révèle que $X_1 > 0$ tandis que $X_2 < 0$. Et puisque θ est nécessairement compris entre 0 et π , cela impose :

$$\frac{\theta}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow X = \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \geq 0$$

Ce résultat a pour conséquence le rejet de la solution X_2 au profit de la seule solution :

$$X_1 = \frac{m' + \sqrt{\Delta}}{4m} \Rightarrow \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) = \frac{m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2}}{4m}$$

Enfin, $\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)$ étant majoré par 1, cette solution n'a de sens que si :

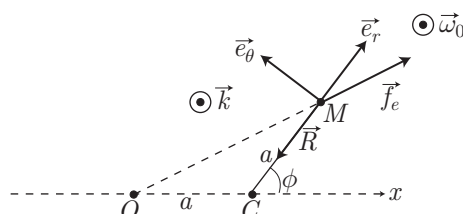
$$\begin{aligned} \frac{m' + \sqrt{m'^2 + 8m^2}}{4m} \leq 1 &\Rightarrow \sqrt{m'^2 + 8m^2} \leq 4m - m' \\ &\Rightarrow m'^2 + 8m^2 \leq 16m^2 - 8mm' + m'^2 \\ &\Rightarrow 8m^2 - 8mm' \geq 0 \Rightarrow 8m(m - m') \geq 0 \end{aligned}$$

soit encore :

$$m \geq m'$$

● 152 ————— Concours Centrale

1. L'axe OC tournant autour de O avec une vitesse angulaire ω_0 , il convient de travailler dans le référentiel (\mathcal{R}) tournant avec une vitesse angulaire ω_0 autour de O , et auquel on peut attacher une base polaire $(C, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{k})$ telle que $\vec{CM} = a \vec{e}_r$.



On note alors $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{k}$ le vecteur rotation de (\mathcal{R}) par rapport au référentiel galiléen de départ. Dans (\mathcal{R}) , le point M est soumis à :

- la réaction : $\vec{R} = -R \vec{e}_r$ du support circulaire, de rayon a et de centre C ;
- la « force » d'entraînement liée à la rotation de (\mathcal{R}) :

$$\vec{f}_e = m\omega_0^2 \vec{OM} = m\omega_0^2 (\vec{OC} + \vec{CM}) \Rightarrow \vec{f}_e = m\omega_0^2 (\vec{OC} + a \vec{e}_r)$$

- la « force » de Coriolis liée à la vitesse relative : $\vec{v}_r = a \dot{\phi} \vec{e}_\theta$ de M dans (\mathcal{R}) et au vecteur rotation $\vec{\omega}_0 = \omega_0 \vec{k}$:

$$\vec{f}_c = -2m \vec{\omega}_0 \wedge \vec{v}_r = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ a\dot{\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f}_c = 2m\omega_0 a \dot{\phi} \vec{e}_r$$

2. Les moments de ces « forces » en C sont définis par :

$$\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{R}) = \vec{CM} \wedge \vec{R} = \vec{0} \text{ car } \vec{CM} \parallel \vec{R}$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_C(\vec{f}_e) &= \vec{CM} \wedge \vec{f}_e = m\omega_0^2 \left(\vec{CM} \wedge \vec{OC} + \underbrace{\vec{CM} \wedge \vec{CM}}_{=\vec{0}} \right) \\ &= -m\omega_0^2 \|\vec{CM}\| \times \|\vec{OC}\| \times \sin(\vec{CM}, \vec{OC}) \vec{k} \\ &= -m\omega_0^2 a^2 \sin \phi \vec{k} \end{aligned}$$

et :

$$\vec{\mathcal{M}}_C(\vec{f}_c) = \vec{CM} \wedge \vec{f}_c = (a \vec{e}_r) \wedge (2m\omega_0 a \dot{\phi} \vec{e}_r) = 2m a^2 \omega_0 \dot{\phi} \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r}_{=\vec{0}}$$

Aussi, la résultante $\vec{F} = \vec{R} + \vec{f}_e + \vec{f}_c$ de ces « forces » a pour moment, en C :

$$\vec{\mathcal{M}}_C = \vec{CM} \wedge \vec{F} = \vec{CM} \wedge \vec{R} + \vec{CM} \wedge \vec{f}_e + \vec{CM} \wedge \vec{f}_c \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_C = -m\omega_0^2 a^2 \sin \phi \vec{k}$$

Quant au moment cinétique de M en C , dans (\mathcal{R}) , il est défini par :

$$\vec{\sigma}_C = \overrightarrow{CM} \wedge (m \vec{v}_r) = a \vec{e}_r \wedge (ma \dot{\phi} \vec{e}_\theta) = ma^2 \dot{\phi} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$$

soit, en remarquant que $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{k}$:

$$\vec{\sigma}_C = ma^2 \dot{\phi} \vec{k}$$

3. D'après le théorème du moment cinétique, la variation de $\vec{\sigma}_C$ est liée à \vec{M}_C :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} = \vec{M}_C &\Rightarrow \frac{d}{dt} (ma^2 \dot{\phi} \vec{k}) = -m\omega_0^2 a^2 \sin \phi \vec{k} \\ &\Rightarrow ma^2 \ddot{\phi} \vec{k} = -m\omega_0^2 a^2 \sin \phi \vec{k} \end{aligned}$$

Aussi, ce théorème fournit-il l'équation du mouvement en ϕ :

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \sin \phi = 0 \quad (53)$$

4. Les positions d'équilibre de M relativement à (\mathcal{R}) sont repérées par les valeurs de ϕ qui assurent l'immobilité de M dans (\mathcal{R}) , c'est-à-dire les valeurs de ϕ qui annulent $\ddot{\phi}$. Compte tenu de l'équation précédemment établie, ces angles sont solutions de l'équation :

$$\omega_0^2 \sin \phi = 0 \Rightarrow \sin \phi = 0$$

- En $\phi_1 = 0$ apparaît ainsi une position d'équilibre. Soit ε l'écart par rapport à cette position d'équilibre : $\phi = \phi_1 + \varepsilon = \varepsilon$, où ε est suffisamment petit pour que $\sin \varepsilon$ s'identifie à ε :

$$\sin \phi = \sin \varepsilon \simeq \varepsilon \text{ et } \phi = \varepsilon \Rightarrow \ddot{\phi} = \ddot{\varepsilon}$$

Aussi, l'équation du mouvement (53) :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$$

admet des solutions sinusoïdales de pulsation ω_0 et c'est pour cette raison que :

$$\phi_1 = 0 \text{ coïncide avec une position d'équilibre stable}$$

- $\phi_2 = \pi$ est également une position d'équilibre car $\sin \phi_2 = 0$. En notant ε l'écart par rapport à cet équilibre : $\phi = \phi_2 + \varepsilon$ avec $|\varepsilon| \ll \phi_2 = \pi$, un développement limité de $\sin \phi$ fournit :

$$\sin \phi = \sin(\pi + \varepsilon) = \underbrace{\sin \pi}_{=0} + \varepsilon \underbrace{\cos \pi}_{=-1} = -\varepsilon$$

et l'égalité $\phi = \phi_2 + \varepsilon \Rightarrow \ddot{\phi} = \ddot{\varepsilon}$ transforme l'équation (53) :

$$\ddot{\phi} + \omega_0^2 \sin \phi = 0 \Rightarrow \ddot{\varepsilon} - \omega_0^2 \varepsilon = 0$$

Cette équation différentielle admet une solution générale :

$$\varepsilon = \mu_1 e^{\omega_0 t} + \mu_2 e^{-\omega_0 t} \quad (\mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ sont des constantes})$$

qui révèle que ϕ s'écarte rapidement de ϕ_2 , ce qui signifie aussi que :

$$\phi_2 = \pi \text{ correspond à une position d'équilibre instable.}$$

● 153 **Concours de l'E.N.S.**

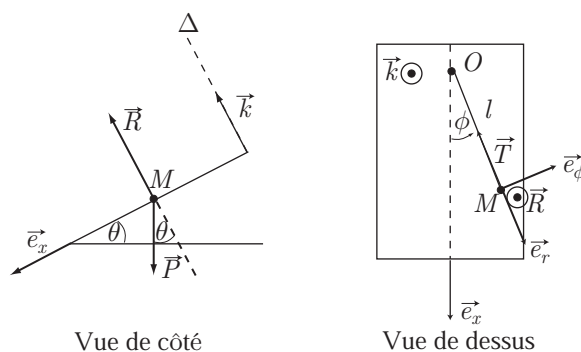
1. Le point M est soumis à :

- la tension \vec{T} de la ficelle, orientée selon \overrightarrow{MO} ;
- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ dirigé selon la verticale descendante ;
- à la réaction \vec{R} du plan incliné, telle que :

$$\vec{R} = R\vec{k} \text{ avec } R = \|\vec{R}\|$$

et où \vec{k} est le vecteur unitaire directeur de l'axe Δ , dans le sens de l'augmentation de ϕ .

Ces forces peuvent être représentées sous deux vues :



qui permettent d'en dégager les caractéristiques.

- La tension \vec{T} est colinéaire à $\overrightarrow{OM} = l\vec{e}_r$: $\vec{T} = -T\vec{e}_r$, de sorte que son moment en O vaut :

$$\vec{M}_O(\vec{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = \vec{M}_O(\vec{T}) \cdot \vec{k} = 0 \quad (54)$$

- La réaction \vec{R} est colinéaire à \vec{k} , ce qui a pour conséquence d'annuler le produit vectoriel : $\vec{R} \wedge \vec{k} = \vec{0}$. Or, le moment de \vec{R} par rapport à l'axe Δ est défini par :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = (\overrightarrow{OM} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{k}$$

c'est-à-dire, après permutation circulaire des vecteurs :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = \underbrace{(\vec{R} \wedge \vec{k})}_{\vec{0}} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \quad (55)$$

- Soit \vec{e}_x le vecteur unitaire directeur de la ligne de plus grande pente du plan incliné, le poids \vec{P} a pour composantes (voir le schéma représentant la situation vue de côté) :

$$\vec{P} = P \sin \theta \vec{e}_x - P \cos \theta \vec{k} = mg \sin \theta \vec{e}_x - mg \cos \theta \vec{k}$$

Quant au vecteur position de M : $\overrightarrow{OM} = l \vec{e}_r$, il conduit à la définition du moment de \vec{P} en O :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} = (l \vec{e}_r) \wedge (mg \sin \theta \vec{e}_x - mg \cos \theta \vec{k}) \\ &= mgl \sin \theta \vec{e}_r \wedge \vec{e}_x - mgl \cos \theta \vec{e}_r \wedge \vec{k} \\ &= -mgl \sin \theta \sin \phi \vec{k} - mgl \cos \theta \vec{e}_r \wedge \vec{k}\end{aligned}$$

d'où est issue l'expression du moment de \vec{P} par rapport à Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) \cdot \vec{k} = -mgl \sin \theta \sin \phi \vec{k} \cdot \vec{k} - mgl \cos \theta (\vec{e}_r \wedge \vec{k}) \cdot \vec{k}$$

D'une part le vecteur \vec{k} est normé : $\vec{k} \cdot \vec{k} = \|\vec{k}\|^2 = 1$ et d'autre part :

$$(\vec{e}_r \wedge \vec{k}) \perp \vec{k} \Rightarrow (\vec{e}_r \wedge \vec{k}) \cdot \vec{k} = 0$$

Il reste finalement :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgl \sin \theta \sin \phi \quad (56)$$

Le point M est ainsi soumis à une force résultante :

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{R} + \vec{P}$$

dont le moment en O est défini par :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_O &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P} \\ &= \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P})\end{aligned}$$

et celui par rapport à Δ vaut :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\Delta &= \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{k} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) \cdot \vec{k} + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{R}) \cdot \vec{k} + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) \cdot \vec{k} \\ &= \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{P})\end{aligned}$$

où les termes du membre de droite sont fournis par les résultats (54), (55) et (56) :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = 0 \\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0 \\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgl \sin \theta \sin \phi \end{cases} \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta = -mgl \sin \theta \sin \phi$$

2. En outre, si \vec{e}_ϕ désigne le vecteur unitaire orthoradial de la base $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{k})$, la vitesse du point M , en rotation autour de O , s'exprime par :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = l \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

et définit le moment cinétique de M en O :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} = (l \vec{e}_r) \wedge (ml \dot{\phi}) \vec{e}_\phi = ml^2 \dot{\phi} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\phi = ml^2 \dot{\phi} \vec{k}$$

C'est pourquoi le moment cinétique de M par rapport à l'axe Δ vaut :

$$\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_O \cdot \vec{k} = ml^2 \dot{\phi}$$

En outre, le théorème du moment cinétique relie \mathcal{M}_Δ à la variation de σ_Δ :

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta &\Rightarrow ml^2 \ddot{\phi} = -mgl \sin \theta \sin \phi \\ &\Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \theta \times \sin \phi = 0\end{aligned}$$

Les oscillations étant de faible amplitude, la fonction $\sin \phi$ peut être assimilée à son développement limité d'ordre 1 :

$$\sin \phi \simeq \phi \Rightarrow \ddot{\phi} + \frac{g}{l} \sin \theta \times \phi = 0$$

Cette équation différentielle peut aussi se présenter sous la forme suivante :

$$\ddot{\phi} + \Omega^2 \times \phi = 0$$

et admet une solution sinusoïdale de pulsation :

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} \sin \theta}$$

● 154 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. L'équation cartésienne de la trajectoire de P fournit :

$$y^2 = 2px \Rightarrow 2y \frac{dy}{dt} = 2p \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{y}{p} \frac{dy}{dt}$$

où la définition des composantes $v_x = \dot{x}$ et $v_y = \dot{y}$ conduit à :

$$v_x = \frac{y}{p} v_y \quad (57)$$

Aussi, la contrainte imposée à v_x et v_y par l'énoncé : $v_x^2 = 2q v_y$ s'écrit :

$$\frac{y^2}{p^2} v_y^2 = 2q v_y \Rightarrow v_y = \frac{2qp^2}{y^2}$$

de même que le résultat (57) devient :

$$v_x = \frac{y}{p} v_y = \frac{y}{p} \times \frac{2qp^2}{y^2} \Rightarrow v_x = \frac{2pq}{y}$$

2. Dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, le point P a pour vecteur position :

$$\overrightarrow{OP} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

et pour vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est pourquoi son moment cinétique en O vaut :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \overrightarrow{OP} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} m v_x \\ m v_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m(x v_y - y v_x) \end{pmatrix} \\ &= m(x v_y - y v_x) \vec{e}_z\end{aligned}$$

où v_x et v_y ont été déterminés dans la question précédente :

$$\vec{\sigma}_O = m \left(x \times \frac{2qp^2}{y^2} - y \times \frac{2qp}{y} \right) \vec{e}_z$$

et où $y^2 = 2px$, conformément à l'énoncé :

$$\vec{\sigma}_O = m \left(x \times \frac{2qp^2}{2px} - y \times \frac{2qp}{y} \right) \vec{e}_z = m(qp - 2qp) \vec{e}_z \quad (58)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_O = -mpq \vec{e}_z \quad (59)$$

3. (a) Les composantes v_x et v_y de la vitesse de P conduisent à celles de son vecteur accélération $\vec{\gamma}(\gamma_x, \gamma_y, 0)$:

$$\begin{aligned}\gamma_x &= \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2pq}{y} \right) = -\frac{2pq}{y^2} \times \frac{dy}{dt} \\ &= -\frac{2pq}{y^2} \times v_y = -\frac{2pq}{y^2} \times \frac{2p^2q}{y^2} \\ &= -\frac{4p^3q^2}{y^4} = -\frac{4p^3q^2}{y^6} \times y^2\end{aligned}$$

Or, la parabole décrite par P a pour équation cartésienne :

$$y^2 = 2px \Rightarrow \gamma_x = -\frac{8p^4q^2}{y^6} \times x \quad (60)$$

De même, la composante γ_y est définie par :

$$\begin{aligned}\gamma_y &= \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2p^2q}{y^2} \right) = -\frac{4p^2q}{y^3} \times \frac{dy}{dt} \\ &= -\frac{4p^2q}{y^3} v_y = -\frac{4p^2q}{y^3} \times \frac{2qp^2}{y^2} = -\frac{8p^4q^2}{y^5}\end{aligned}$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme :

$$\gamma_y = -\frac{8p^4q^2}{y^6} \times y \quad (61)$$

Ce faisant, les expressions (60) et (61) conduisent à celle de $\vec{\gamma}$:

$$\begin{aligned}\vec{\gamma} &= -\frac{8p^4q^2}{y^6} \times x \vec{e}_x - \frac{8p^4q^2}{y^6} \times y \vec{e}_y = -\frac{8p^4q^2}{y^6} \times (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) \\ &= -\frac{8p^4q^2}{y^6} \times \overrightarrow{OP}\end{aligned}$$

De plus, le référentiel \mathcal{R} étant galiléen, l'accélération $\vec{\gamma}$ tire son origine d'une force \vec{F} soumise à la loi fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{8mp^4q^2}{y^6} \times \overrightarrow{OP}$$

(b) Par définition, le moment de \vec{F} en O vaut :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O &= \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F} = -\frac{8mp^4q^2}{y^6} \times \overrightarrow{OP} \wedge \overrightarrow{OP} \\ &\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0} \end{aligned}$$

(c) Le théorème du moment cinétique précise que :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}$$

où le moment cinétique est exprimé par le résultat (59) :

$$\vec{\sigma}_O = -mpq \vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$$

Finalement, le théorème du moment cinétique confirme la valeur de $\vec{\mathcal{M}}_O$ trouvée à la question précédente.

● **155** **Lycée Bellevue, Toulouse**

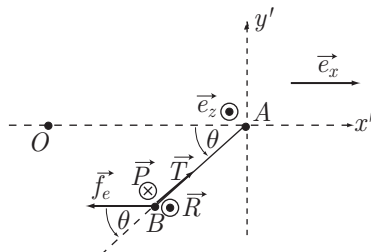
1. Le point B est soumis, dans le référentiel non galiléen \mathcal{R}' , à :

- son poids \vec{P} ;
- la réaction \vec{R} du plan ; étant donné que le mouvement de B s'effectue dans le plan $O'x'y'$, \vec{R} et \vec{P} se compensent :

$$\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$$

- la tension \vec{T} de la tige, orientée comme \overrightarrow{BA} ;
- la « force » d'entraînement \vec{f}_e liée au caractère non galiléen de \mathcal{R}' , dont l'origine A a pour accélération constante $\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} = \vec{a} = a_0 \vec{e}_x$. Cette « force » est définie par :

$$\vec{f}_e = -m \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} = -ma_0 \vec{e}_x \Rightarrow f_e = \|\vec{f}_e\| = ma_0 \quad (62)$$



Remarque – L'absence de rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} justifie l'absence de force de Coriolis.

Sous l'influence de la résultante $\vec{F} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f}_e$, le point B tourne autour du point A , par rapport auquel on peut calculer le moment $\vec{\mathcal{M}}_A$:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_A &= \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{AB} \wedge \underbrace{(\vec{P} + \vec{R})}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{f}_e \\ &= \overrightarrow{AB} \wedge \vec{f}_e \text{ car } \overrightarrow{AB} \parallel \vec{T} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T} = \vec{0}\end{aligned}$$

Le vecteur unitaire \vec{e}_z est orienté dans le sens de l'augmentation de θ et est directeur de l'axe Δ . C'est pourquoi ce vecteur unitaire (perpendiculaire à \overrightarrow{AB} et à \vec{f}_e simultanément) peut être utilisé pour calculer :

$$\vec{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{f}_e = -AB \times f_e \times \sin \theta \vec{e}_z$$

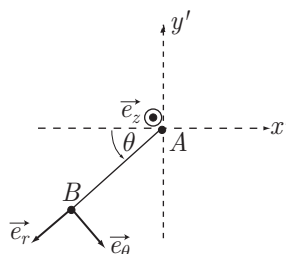
soit, en utilisant le résultat (62) :

$$\begin{cases} f_e = ma_0 \\ AB = L \end{cases} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_A = -mLa_0 \sin \theta \vec{e}_z$$

De ce moment vectoriel se déduit celui, \mathcal{M}_Δ , des forces par rapport à Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{\mathcal{M}}_A \cdot \vec{e}_z \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta = -mLa_0 \sin \theta$$

2. Soit $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base cylindro-polaire dans laquelle $\overrightarrow{AB} = L \vec{e}_r$.



Dans cette base, le vecteur vitesse de B a pour expression :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = L \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

d'où est issue celle du moment cinétique de B (de masse m), en A :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_A &= \overrightarrow{AB} \wedge m \vec{v} = (L \vec{e}_r) \wedge (mL \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= mL^2 \dot{\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = mL^2 \dot{\theta} \vec{e}_z\end{aligned}$$

Le moment cinétique de B par rapport à Δ : $\sigma_\Delta = \vec{\sigma}_A \cdot \vec{k} = mL^2 \dot{\theta}$ est lié au moment de \vec{F} par rapport à Δ , conformément au théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\sigma_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta \Rightarrow mL^2 \ddot{\theta} = -mLa_0 \sin \theta \Rightarrow L \ddot{\theta} = -a_0 \sin \theta$$

3. En désignant par $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire de B dans \mathcal{R}' , l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$L \frac{d\omega}{dt} = -a_0 \sin \theta$$

que l'on peut multiplier de part et d'autre de l'égalité par ω (ou $\frac{d\theta}{dt}$, ce qui est équivalent) :

$$L\omega \frac{d\omega}{dt} = -a_0 \sin \theta \times \frac{d\theta}{dt}$$

De cette manière apparaissent, dans l'équation différentielle, les dérivées :

$$\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d\omega^2}{dt} \text{ et } -\sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{d(\cos \theta)}{dt}$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \frac{d\omega^2}{dt} &= a_0 \frac{d(\cos \theta)}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{L}{2} \omega^2 \right) = \frac{d}{dt} (a_0 \cos \theta) \\ &\Rightarrow \frac{L}{2} \omega^2 = a_0 \cos \theta + K \end{aligned}$$

où K est une constante déterminée par les conditions initiales : à la date $t = 0$, l'angle θ prend la valeur $\frac{\pi}{2}$ tandis que $\omega = 0$ (B est immobile) :

$$\frac{L}{2} \times (0)^2 = a_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} \right) + K \Rightarrow K = 0$$

Finalement, la vitesse angulaire ω vérifie :

$$\frac{L}{2} \omega^2 = a_0 \cos \theta \Rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{2a_0}{L} \cos \theta}$$

4. La définition de la vitesse angulaire : $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, associée au résultat précédent, conduit à :

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2a_0}{L} \cos \theta}$$

et, puisque l'angle θ est amené à décroître, $\frac{d\theta}{dt}$ est négatif, de sorte que :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2a_0}{L} \cos \theta} \Rightarrow \sqrt{\frac{2a_0}{L}} dt = -\frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}}$$

À la date $t = 0$, θ vaut $\frac{\pi}{2}$, tandis qu'à la date τ , θ devient nul, en conséquence de

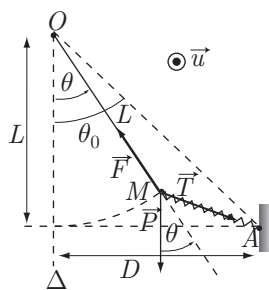
quoi :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2a_0}{L}} \int_0^\tau dt &= - \int_{\pi/2}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} = I \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{2a_0}{L}} \times \tau &= I \Rightarrow \tau = I \sqrt{\frac{L}{2a_0}} \end{aligned}$$

● 156 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Lorsque la tige est écartée d'un angle θ par rapport à la verticale, le point M est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$;
- la tension \vec{F} de la tige ;
- la tension $\vec{T} = -k\vec{AM}$ du ressort.



(a) L'axe Δ est orienté à l'aide d'un vecteur unitaire \vec{u} directeur, grâce à la règle de la main droite : les doigts tournant dans le sens de l'augmentation de θ , le pouce est orienté comme \vec{u} .

En outre, l'angle entre les vecteurs \vec{OM} et \vec{P} valant θ , il s'ensuit que :

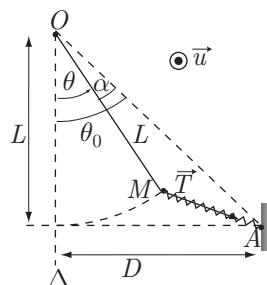
$$\vec{M}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = -L \times mg \times \sin \theta \vec{u}$$

Le signe négatif qui apparaît dans cette expression rend compte de la tendance que présente le poids à faire décroître θ .

Par suite :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \vec{u} \cdot \vec{M}_O(\vec{P}) = -mgL \sin \theta$$

(b) Le ressort exerce sur M une tension $\vec{T} = -k\vec{AM}$.



dont le moment $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})$ est défini par :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) &= \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{OM} \wedge (-k \vec{AM}) = -k \vec{OM} \wedge \vec{AM} \\ &= -k \vec{OM} \wedge (\vec{AO} + \vec{OM}) = -k \vec{OM} \wedge \vec{AO} - k \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{OM}}_{=\vec{0}} \\ &= -k \vec{OM} \wedge \vec{AO} = k \vec{OM} \wedge \vec{OA}\end{aligned}$$

Aussi, en appelant $\alpha = \theta_0 - \theta$ l'angle entre les vecteurs \vec{OM} et \vec{OA} :

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = k OM \times OA \times \sin \alpha \vec{u} = kL \times OA \sin(\theta_0 - \theta) \times \vec{u}$$

Or, le schéma précédent révèle que :

$$\begin{aligned}OA \times \sin \theta_0 = D &\Rightarrow OA = \frac{D}{\sin \theta_0} \\ \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) &= \frac{kLD}{\sin \theta_0} \sin(\theta_0 - \theta) \vec{u} \\ \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) &= kLD \frac{\sin \theta_0 \cos \theta - \sin \theta \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \vec{u} \\ \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) &= kLD \left(\cos \theta - \frac{\sin \theta}{\tan \theta_0} \right) \vec{u}\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\tan \theta_0 = \frac{D}{L} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) &= kLD \left(\cos \theta - \frac{L}{D} \sin \theta \right) \vec{u} \\ &= (kLD \cos \theta - kL^2 \sin \theta) \vec{u}\end{aligned}$$

ce qui conduit à l'expression du moment de \vec{T} par rapport à l'axe Δ :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) = \vec{u} \cdot \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = kLD \cos \theta - kL^2 \sin \theta$$

2. Le point M étant soumis à la tension \vec{T} du ressort, à son poids \vec{P} et à la tension \vec{F} de la tige, la force résultante $\vec{f} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{F}$ a pour moment :

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O &= \vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{OM} \wedge (\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}) \\ &= \vec{OM} \wedge \vec{P} + \vec{OM} \wedge \vec{T} + \underbrace{\vec{OM} \wedge \vec{F}}_{=\vec{0}} \text{ car } \vec{OM} \parallel \vec{F} \\ &= \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) + \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T})\end{aligned}$$

Par conséquent, le moment résultant des forces par rapport à Δ s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\Delta &= \vec{\mathcal{M}}_O \cdot \vec{k} = \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) + \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}) \\ &= -mgL \sin \theta + kLD \cos \theta - kL^2 \sin \theta\end{aligned}$$

expression dans laquelle peuvent être regroupés les termes $\sin \theta$ et $\cos \theta$:

$$\mathcal{M}_\Delta = kLD \cos \theta - L(mg + kL) \sin \theta \quad (63)$$

Lorsque le point M est en équilibre, l'angle θ prend la valeur θ_e qui annule \mathcal{M}_Δ :

$$kLD \cos \theta_e - L(mg + kL) \sin \theta_e = 0 \Rightarrow kD \cos \theta_e = (mg + kL) \sin \theta_e \quad (64)$$

ce qui fournit l'angle θ_e :

$$\tan \theta_e = \frac{kD}{mg + kL} \quad (65)$$

3. (a) Lorsque M n'occupe pas la position d'équilibre, l'équation (63) prévaut :

$$\mathcal{M}_\Delta = LkD \cos \theta - L(mg + kL) \sin \theta$$

tandis que l'identité (64) fournit :

$$\begin{aligned} kD \cos \theta_e &= (mg + kL) \sin \theta_e \\ \Rightarrow kD &= (mg + kL) \frac{\sin \theta_e}{\cos \theta_e} \\ \Rightarrow \mathcal{M}_\Delta &= L(mg + kL) \frac{\sin \theta_e \cos \theta}{\cos \theta_e} - L(mg + kL) \sin \theta \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta &= L \frac{mg + kL}{\cos \theta_e} (\sin \theta_e \cos \theta - \cos \theta_e \sin \theta) \\ &= L \times \frac{mg + kL}{\cos \theta_e} \sin(\theta_e - \theta) \end{aligned}$$

En outre, le point M étant susceptible de tourner autour de Δ , le théorème du moment cinétique indique que :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta = mL^2 \ddot{\theta} &\Rightarrow mL^2 \ddot{\theta} = L \frac{mg + kL}{\cos \theta_e} \sin(\theta_e - \theta) \\ \Rightarrow mL \ddot{\theta} + \frac{mg + kL}{\cos \theta_e} \sin(\theta - \theta_e) &= 0 \\ \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mg + kL}{mL \cos \theta_e} \sin(\theta - \theta_e) &= 0 \end{aligned}$$

soit, en notant $\varepsilon = \theta - \theta_e$ l'écart par rapport à l'angle d'équilibre :

$$\theta = \theta_e + \varepsilon \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon} \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{mg + kL}{mL \cos \theta_e} \sin \varepsilon = 0$$

et notamment, si cet écart est assez petit, $\sin \varepsilon \simeq \varepsilon$ autorise à linéariser cette équation différentielle :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{mg + kL}{mL \cos \theta_e} \varepsilon = 0$$

(b) L'équation précédente admet une solution sinusoïdale qui montre que $\theta = \theta_e + \varepsilon$ oscille autour de sa valeur à l'équilibre, avec une pulsation ω telle que :

$$\omega^2 = \frac{mg + kL}{mL \cos \theta_e} = \frac{mg + kL}{mL} \times \frac{1}{\cos \theta_e}$$

Or : $\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta_e$ où $\tan \theta_e$ est établi grâce au résultat (65) :

$$\begin{aligned}\tan \theta_e &= \frac{kD}{mg + kL} \\ \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \theta_e} &= 1 + \frac{k^2 D^2}{(mg + kL)^2} = \frac{(mg + kL)^2 + k^2 D^2}{(mg + kL)^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{\cos \theta_e} &= \frac{\sqrt{(mg + kL)^2 + k^2 D^2}}{mg + kL}\end{aligned}$$

Ce faisant, la pulsation ω vérifie :

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{mg + kL}{mL} \times \frac{\sqrt{(mg + kL)^2 + k^2 D^2}}{mg + kL} \\ &= \frac{\sqrt{(mg + kL)^2 + k^2 D^2}}{\sqrt{m^2 L^2}} \\ \Rightarrow \omega &= \left[\frac{(mg + kL)^2 + k^2 D^2}{m^2 L^2} \right]^{1/4}\end{aligned}$$

● 157 ————— Lycée Camille Guérin, Poitiers

En coordonnées polaires, le vecteur vitesse du point M s'écrit : $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et, notamment, si M décrit une trajectoire circulaire, r prend la valeur constante r_0 :

$$\vec{v} = r_0 \dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow v = r_0 |\dot{\theta}| \quad (66)$$

De plus, en vertu du théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \text{ avec } \vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$$

Or, \overrightarrow{OM} et \vec{F} étant colinéaires :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}_O = \vec{c}t\vec{e}$$

Aussi, le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ de M en O demeure constant au cours du mouvement :

$$\vec{\sigma}_O = m \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 \Rightarrow \left\| \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \right\| = \left\| \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 \right\|$$

et, dans le cas d'un mouvement circulaire, le vecteur vitesse (tangent à la trajectoire) est toujours perpendiculaire au vecteur position \overrightarrow{OM} et c'est pourquoi :

$$\begin{cases} \left\| \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} \right\| = OM \times v & \Rightarrow r_0 v = r_0 v_0 \Rightarrow v = v_0 \\ \left\| \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 \right\| = r_0 \times v_0 \end{cases}$$

ce qui donne à l'équation (66) la forme suivante :

$$v_0 = r_0 |\dot{\theta}| \Rightarrow |\dot{\theta}| = \frac{v_0}{r_0} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{r_0^2} \quad (67)$$

Enfin, l'accélération du point M , purement radiale :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \text{ pour } r = r_0 = \text{cte}$$

est soumise à la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \vec{\gamma} = \vec{F} \Rightarrow -mr_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = F(r) \vec{e}_r \Rightarrow F(r) = -mr_0 \dot{\theta}^2$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'identité (67) :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{r_0^2} \Rightarrow F(r) = -m \frac{v_0^2}{r_0}$$

● 158 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. En coordonnées polaires, l'accélération de M est donnée par :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

et cette accélération est proportionnelle à la force \vec{F} qui s'exerce sur M , en vertu de la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \vec{\gamma} = \vec{F} \Rightarrow m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + m (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta = \vec{F}$$

Or, si \vec{F} est une force centrale, elle est colinéaire au vecteur radial \vec{e}_r :

$$\vec{F} = F \vec{e}_r \Rightarrow m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + m (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta = F \vec{e}_r$$

d'où découlent deux équations :

$$m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) = F \text{ et } m (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \quad (68)$$

La seconde de ces équations s'écrit aussi :

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \text{ avec } r = r_0 e^{-a\theta} \Rightarrow \dot{r} = -ar_0 e^{-a\theta} \times \dot{\theta}$$

soit encore :

$$2 \times (-ar_0 e^{-a\theta} \times \dot{\theta}) \times \dot{\theta} + r_0 e^{-a\theta} \times \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow -2a \times \dot{\theta}^2 + \ddot{\theta} = 0 \quad (69)$$

En posant $\omega = \dot{\theta}$, cette équation devient :

$$\begin{aligned} -2a\omega^2 + \frac{d\omega}{dt} &= 0 \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = 2a\omega^2 \Rightarrow \frac{1}{\omega^2} \frac{d\omega}{dt} = 2a \\ &\Rightarrow -\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega} \right) = 2a \Rightarrow \frac{1}{\omega} = -2at + b \end{aligned}$$

où b est une constante que l'on ajuste à la valeur initiale de $\dot{\theta} = \omega$: à $t = 0$, $\omega = \omega_0$, ce qui se traduit par :

$$\frac{1}{\omega} = -2at + \frac{1}{\omega_0} \Rightarrow \omega = \frac{\omega_0}{1 - 2a\omega_0 t} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{\omega_0}{1 - 2a\omega_0 t} \quad (70)$$

Une nouvelle intégration fournit alors la fonction $\theta(t)$:

$$\theta(t) = -\frac{1}{2a} \ln(1 - 2a\omega_0 t) + c$$

où la constante c est également accessible à partir de la connaissance de la valeur $\theta = 0$ à la date $t = 0$:

$$0 = -\frac{1}{2a} \ln(1) + c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \theta(t) = -\frac{1}{2a} \ln(1 - 2a\omega_0 t)$$

2. Étant donné que $r = r_0 e^{-a\theta}$, et compte tenu de l'expression précédente de θ , on obtient :

$$r = r_0 \exp\left[\frac{1}{2} \ln(1 - 2a\omega_0 t)\right] = r_0 \exp\left[\ln(1 - 2a\omega_0 t)^{1/2}\right]$$

soit encore :

$$r = r_0 (1 - 2a\omega_0 t)^{1/2} = r_0 \sqrt{1 - 2a\omega_0 t}$$

3. La force centrale $\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$ présente une valeur algébrique vérifiant la première des deux équations (68) :

$$F = m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)$$

où :

$$r = r_0 (1 - 2a\omega_0 t)^{1/2} \Rightarrow \dot{r} = -r_0 a \omega_0 (1 - 2a\omega_0 t)^{-1/2} \Rightarrow \ddot{r} = \frac{-r_0 a^2 \omega_0^2}{(1 - 2a\omega_0 t)^{3/2}}$$

et, conformément au résultat (70) :

$$\dot{\theta} = \frac{\omega_0}{1 - 2a\omega_0 t}$$

En tenant compte de l'expression de r :

$$1 - 2a\omega_0 t = \frac{r^2}{r_0^2}$$

ces relations deviennent :

$$\ddot{r} = -\frac{r_0^4 a^2 \omega_0^2}{r^3} \text{ et } \dot{\theta} = \frac{\omega_0 r_0^2}{r^2} \Rightarrow r \dot{\theta}^2 = \frac{\omega_0 r_0^4}{r^3}$$

De la loi fondamentale de la dynamique, il ressort alors que :

$$F(r) = m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \Rightarrow F(r) = -\frac{m (1 + a^2) \omega_0^2 r_0^4}{r^3}$$

4. Compte tenu du résultat de cours : $\frac{dE_p}{dr} = -F(r)$, l'énergie potentielle E_p associée à F vérifie :

$$\frac{dE_p}{dr} = \frac{m (1 + a^2) \omega_0^2 r_0^4}{r^3} \Rightarrow E_p = -\frac{m (1 + a^2) \omega_0^2 r_0^4}{4r^4} + \text{cte}$$

● **159** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

1. La force \vec{f} étant centrale, elle est colinéaire à \overrightarrow{OM} , ce qui annule son moment en O :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{OM} \parallel \vec{f}$$

Or, le théorème du moment cinétique prédit que :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0} \text{ où } \vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \text{ et } \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ce qui signifie que $\vec{\sigma}_O$ est constant. Ainsi :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{OM} \perp \vec{\sigma}_O \Rightarrow \overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{ct\vec{e}}$$

ce qui révèle que tous les rayons-vecteurs \overrightarrow{OM} sont perpendiculaires à une même direction (celle de $\vec{\sigma}_O$) ; le mouvement est plan.

2. À la force $\vec{f} = f \vec{e}_r$, où $f = -\frac{km}{r^5}$, est associée une énergie potentielle E_p telle que :

$$\frac{dE_p}{dr} = -f = \frac{km}{r^5} \Rightarrow E_p = -\frac{km}{4r^4} + K$$

où K est une constante déterminée par la valeur supposée nulle de E_p lorsque r devient infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (E_p) = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{km}{4r^4} + K \right) = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow E_p = -\frac{km}{4r^4}$$

3. La question 1. a établi que $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ est constant, où la position \overrightarrow{OM} et la vitesse \vec{v} ont pour composantes, en coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r \text{ et } \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= (r \vec{e}_r) \wedge (m\dot{r} \vec{e}_r + mr\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m\dot{r} \underbrace{\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r}_{=\vec{0}} + mr^2\dot{\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \\ &\Rightarrow \sigma_O = \|\vec{\sigma}_O\| = mr^2\dot{\theta} \text{ car } \|\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta\| = 1 \end{aligned}$$

En outre, à la date $t = 0$, \overrightarrow{OM} et \vec{v}_0 étant perpendiculaires :

$$\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_0 = a \times mv_0 \vec{k} \Rightarrow \sigma_O = mav_0 \text{ où } \vec{k} = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$$

de telle manière que :

$$mr^2 \dot{\theta} = mav_0 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{av_0}{r^2} \quad (71)$$

Quant à l'énergie mécanique de la particule, sa conservation dans le temps est une conséquence immédiate du caractère conservatif de la force \vec{f} . De plus, l'énergie

cinétique de la particule vaut :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

C'est pourquoi :

$$E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \frac{km}{4r^4} = \text{cte}$$

4. Du résultat (71), il ressort que :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{dr}{d\theta} = \frac{av_0}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

de sorte que :

$$E_c = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \frac{1}{2} m \left[\frac{a^2 v_0^2}{r^4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \times \frac{a^2 v_0^2}{r^4} \right]$$

ce qui conduit à une nouvelle expression de l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{ma^2 v_0^2}{2r^2} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + 1 \right] - \frac{km}{4r^4}$$

Or, cette énergie mécanique étant constante, elle conserve en permanence la valeur qu'elle prend à la date $t = 0$:

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{km}{4a^4}$$

ce qui signifie aussi que :

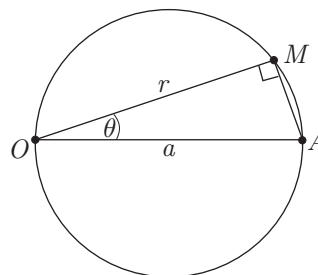
$$\frac{ma^2 v_0^2}{2r^2} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + 1 \right] - \frac{km}{4r^4} = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{km}{4a^4}$$

soit aussi :

$$\frac{a^2 v_0^2}{r^2} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + 1 \right] - \frac{k}{2r^4} = v_0^2 - \frac{k}{2a^4} \quad (72)$$

5. Le point M appartient à un cercle de diamètre $OA = a$, auquel cas le triangle (OMA) est rectangle en M . Par conséquent, ce triangle définit :

$$\cos \theta = \frac{OM}{OA} = \frac{r}{a} \Rightarrow r = a \cos \theta$$



6. L'expression précédente a aussi pour corollaire : $\frac{dr}{d\theta} = -a \sin \theta$, ce qui affecte à l'équation (72) la forme suivante :

$$\frac{a^2 v_0^2}{a^2 \cos^2 \theta} \left[\frac{1}{a^2 \cos^2 \theta} \times a^2 \sin^2 \theta + 1 \right] - \frac{k}{2a^4 \cos^4 \theta} = v_0^2 - \frac{k}{2a^4}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{v_0^2}{\cos^2 \theta} (\tan^2 \theta + 1) - \frac{k}{2a^4 \cos^4 \theta} = v_0^2 - \frac{k}{2a^4}$$

où l'identité : $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ conduit à :

$$\frac{v_0^2}{\cos^4 \theta} - \frac{k}{2a^4 \cos^4 \theta} = v_0^2 - \frac{k}{2a^4} \Rightarrow v_0^2 \left(\frac{1}{\cos^4 \theta} - 1 \right) = \frac{k}{2a^4} \left(\frac{1}{\cos^4 \theta} - 1 \right)$$

soit, finalement :

$$v_0^2 = \frac{k}{2a^4} \Rightarrow v_0 = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{k}{2}}$$

L'homogénéité de ce résultat se vérifie aisément à partir des expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle initiales :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_0^2 \text{ et } E_p = -\frac{km}{4a^4}$$

qui présentent, évidemment les mêmes unités :

$$\begin{aligned} [E_c] = [E_p] &\Rightarrow \left[\frac{m v_0^2}{2} \right] = \left[\frac{km}{4a^4} \right] \\ &\Rightarrow [m] \times [v_0]^2 = [m] \times \left[\frac{k}{a^4} \right] \\ &\Rightarrow [v_0] = \left[\sqrt{\frac{k}{a^4}} \right] \end{aligned}$$

● 160 ————— Concours Polytechnique

1. Étant donné que la vitesse \vec{v}_0 de P en P_0 est nulle, le moment cinétique $\sigma = \overrightarrow{OP_0} \wedge m\vec{v}_0$ est également nul, ce qui signifie que le mouvement de P est purement radial ; son vecteur vitesse s'écrit simplement :

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r \Rightarrow v^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2$$

En outre, à la force gravitationnelle $\vec{f} = f \vec{e}_r$ (avec $f = -\frac{GMm}{r^2}$) est associée une énergie potentielle E_p telle que :

$$\frac{dE_p}{dr} = -f \Rightarrow \frac{dE_p}{dr} = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow E_p = -\frac{GMm}{r} + K$$

où la constante K est choisie nulle afin d'annuler arbitrairement E_p lorsque r devient infiniment grand.

Ce faisant, les expressions de E_c et de E_p conduisent à celle de l'énergie mécanique E_m de P :

$$E_m = E_c + E_p \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GMm}{r}$$

2. Sous l'influence de la seule force conservative \vec{f} , l'énergie mécanique du point matériel est constante et conserve ainsi sa valeur au point P_0 :

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{4R} \text{ car } r_0 = 4R \text{ et } v_0 = 0$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GMm}{r} &= -\frac{GMm}{4R} \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = 2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{4R} \right) \\ &\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{2GM} \sqrt{\frac{4R-r}{4Rr}} \end{aligned}$$

Enfin, la force \vec{f} est orientée de manière à faire décroître la distance $r = OP$, ce qui se traduit par :

$$\frac{dr}{dt} < 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\sqrt{2GM} \sqrt{\frac{4R-r}{4Rr}}$$

3. L'équation précédente s'écrit aussi :

$$\sqrt{2GM} dt = -\sqrt{\frac{4Rr}{4R-r}} dr$$

et, puisqu'à la date $t = 0$, r prend la valeur $r_0 = 4R$ tandis que $r = R$ à la date τ :

$$\sqrt{2GM} \int_0^\tau dt = -\int_{4R}^R \sqrt{\frac{4Rr}{4R-r}} dr \Rightarrow \sqrt{2GM} \tau = -\int_{4R}^R \sqrt{\frac{4Rr}{4R-r}} dr \quad (73)$$

L'intégrale du membre de droite peut se calculer aisément en effectuant le changement de variable suivant :

$$\begin{aligned} r &= 4R \cos^2 x \Rightarrow 4R - r = 4R (1 - \cos^2 x) = 4R \sin^2 x \\ &\Rightarrow dr = -8R \cos x \sin x dx \end{aligned}$$

En outre, lorsque $r = 4R$:

$$4R = 4R \cos^2 x \Rightarrow x = 0$$

alors que pour $r = R$:

$$R = 4R \cos^2 x \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

C'est pourquoi :

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2GM} \tau &= \int_0^{\pi/3} \sqrt{\frac{4R \times 4R \cos^2 x}{4R \sin^2 x}} \times 8R \cos x \sin x \, dx \\
 &= \sqrt{4R} \times 8R \int_0^{\pi/3} \cos^2 x \, dx = 16\sqrt{R^3} \int_0^{\pi/3} \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx \\
 &= 8\sqrt{R^3} \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} [\sin(2x)]_0^{\pi/3} \right\} = 8\sqrt{R^3} \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\
 &= 8\sqrt{R^3} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) \Rightarrow \tau = 8\sqrt{\frac{R^3}{2GM}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)
 \end{aligned}$$

● 161 ————— Concours ENSTIM

1. Le point M est soumis :

- à son poids $\vec{P} = -mg \vec{e}_z$;
- à la tension $\vec{T} = -k(r - l_0) \vec{e}_r$;
- à la réaction \vec{R} du plan horizontal ; le mouvement de M s'effectue dans ce plan, ce qui trahit la compensation de \vec{P} et \vec{R} : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

Finalement, le point M est soumis à la force résultante :

$$\vec{F} = \vec{T} + \underbrace{\vec{P} + \vec{R}}_{=\vec{0}} = \vec{T}$$

de sorte que la variation du moment cinétique \vec{L}_O de M en O est liée au moment $\vec{\mathcal{M}}_O$ de \vec{F} en O , conformément au théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{T} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{OM} \parallel \vec{T}$$

L'annulation de $\frac{d\vec{L}_O}{dt}$ montre que \vec{L}_O ne dépend pas du temps t , en d'autres termes \vec{L}_O est constant.

2. (a) Par définition, le moment cinétique \vec{L}_O s'écrit :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} \quad (74)$$

où la position \vec{r} et la vitesse \vec{v} de M s'expriment, en coordonnées polaires, par :

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \text{ et } \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Ce faisant :

$$\vec{L}_O = (r \vec{e}_r) \wedge (m \dot{r} \vec{e}_r + m r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m r \dot{r} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_r + m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$$

où :

$$\begin{cases} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0} \\ \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \quad (75)$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme suivante :

$$\vec{L}_O = L \vec{e}_z \text{ avec } L = mr^2 \dot{\theta}$$

Or, étant donné que \vec{L}_O est constant, l'expression (74) prévaut aussi à la date $t = 0$ à laquelle $\vec{r} = l_1 \vec{e}_x$ et $\vec{v} = \vec{v}_0 = l_1 \omega \vec{e}_y$:

$$\vec{L}_O = (l_1 \vec{e}_x) \wedge (ml_1 \omega \vec{e}_y) = ml_1^2 \omega \vec{e}_x \wedge \vec{e}_y$$

soit encore :

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \Rightarrow \vec{L}_O = ml_1^2 \omega \vec{e}_z \quad (76)$$

(b) La tension $\vec{T} = -k(r - l_0) \vec{e}_r$ est associée à une énergie potentielle élastique :

$$E_{p_e} = \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$$

De même, au poids $\vec{P} = m \vec{g}$ est associée une énergie potentielle de pesanteur E_{p_p} qui ne dépend que de l'altitude, au demeurant constante. C'est pourquoi E_{p_p} est constant et prend une valeur que l'on peut choisir arbitrairement nulle : $E_{p_p} = 0$. Aussi, l'énergie potentielle de M :

$$E_p = E_{p_e} + E_{p_p}$$

s'écrit simplement :

$$E_p = E_{p_e} = \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$$

(c) Le poids et la tension du ressort étant des forces conservatives auxquelles peuvent être affectées des énergies potentielles, si l'énergie mécanique E_m devait varier, cela ne pourrait provenir que du travail élémentaire δW_R de la réaction \vec{R} :

$$dE_m = \delta W_R$$

Or, $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = -\vec{P}$ révèle que \vec{R} est perpendiculaire au plan horizontal dans lequel s'effectue le mouvement de M , et c'est pour cette raison que :

$$\delta W_R = 0 \Rightarrow dE_m = 0$$

ce qui suffit à prouver que E_m est constant.

Quant à son expression :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$$

elle s'obtient :

- soit en fonction des conditions initiales, qui imposent :

$$\begin{cases} r = l_1 \\ v = v_0 = l_1 \omega \end{cases} \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} ml_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} k (l_1 - l_0)^2$$

- soit en fonction de $r, \dot{r}, m, k, \dot{\theta}$ et l_0 , car :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

entraîne que :

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$$

(d) Étant donné les résultats (75) et (76) :

$$\vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = m l_1^2 \omega \vec{e}_z \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{l_1^2 \omega}{r^2} \quad (77)$$

l'énergie mécanique s'écrit aussi :

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{m l_1^4 \omega^2}{2 r^2} + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$$

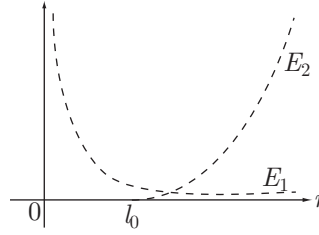
que l'on peut aussi présenter sous la forme suivante :

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + E_{\text{eff}}(r) \text{ avec } E_{\text{eff}}(r) = \frac{m l_1^4 \omega^2}{2 r^2} + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2 \quad (78)$$

L'énergie efficace E_{eff} contient deux termes :

$$E_{\text{eff}} = E_1(r) + E_2(r) \text{ avec } E_1(r) = \frac{m l_1^4 \omega^2}{2 r^2} \text{ et } E_2(r) = \frac{k}{2} (r - l_0)^2$$

que l'on peut représenter graphiquement, $E_1(r)$ étant une branche d'hyperbole et $E_2(r)$ une branche de parabole :



En outre :

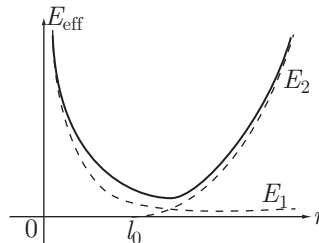
- $\lim_{r \rightarrow 0} [E_1(r)] \gg \lim_{r \rightarrow 0} [E_2(r)]$ permet de simplifier l'expression de E_{eff} :

$$\lim_{r \rightarrow 0} [E_{\text{eff}}] = \lim_{r \rightarrow 0} [E_1(r)]$$

- $\lim_{r \rightarrow \infty} [E_2(r)] \gg \lim_{r \rightarrow \infty} [E_1(r)]$ conduit à :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [E_{\text{eff}}] (r) = \lim_{r \rightarrow \infty} [E_2(r)]$$

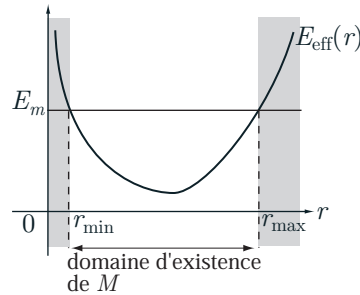
ce qui montre que les courbes représentatives de $E_1(r)$ et $E_2(r)$ sont également asymptotes de E_{eff} lorsque r tend vers 0 ou vers l'infini :



3. Le résultat (78) révèle que :

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = E_m - E_{\text{eff}}(r) \geq 0 \Rightarrow E_{\text{eff}}(r) \leq E_m$$

où E_m est un terme constant, ce qui signifie également que la masse ne peut exister qu'à des distances r qui assurent à E_m d'excéder $E_{\text{eff}}(r)$



La représentation graphique précédente révèle que la masse ne peut s'éloigner indéfiniment du pôle d'attraction car r est majoré par une valeur r_{max} finie. D'ailleurs, l'expression de $E_{\text{eff}}(r)$:

$$E_{\text{eff}}(r) = \frac{ml_1^4 \omega^2}{2r^2} + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$$

confirme ce résultat car, si r devenait infini, $E_{\text{eff}}(r)$ le deviendrait également, rendant de fait impossible l'inégalité $E_{\text{eff}}(r) \leq E_m$.

4. De même, la représentation graphique précédente montre que r est minoré par une valeur $r_{\text{min}} > 0$ en conséquence de quoi la particule ne peut pas passer par le centre d'attraction (située en $r = 0$). À nouveau, l'expression :

$$E_{\text{eff}}(r) = \frac{ml_1^2 \omega^2}{2r^2} + \frac{1}{2} k (r - l_0)^2$$

vient confirmer ce constat : en $r = 0$, $E_{\text{eff}}(r)$ devient infini, invalidant la condition d'existence de la masse : $E_{\text{eff}}(r) \leq E_m$.

5. (a) En coordonnées polaires, le vecteur vitesse de la particule s'écrit :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Aussi, dans le cas d'un mouvement circulaire :

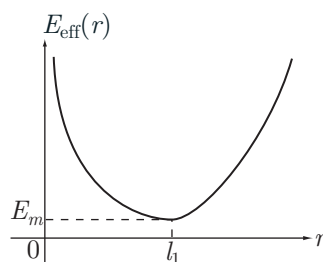
$$r = \text{cte} \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \vec{v} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow v = \|\vec{v}\| = |r \dot{\theta}|$$

où la relation (77) fournit :

$$\dot{\theta} = \frac{l_1^2 \omega}{r^2} \Rightarrow v = \frac{l_1^2 \omega}{r}$$

Finalement, cette identité suffit à conclure que v est constant, c'est-à-dire que le mouvement de la particule est uniforme.

(b) Pour que le mouvement de m soit circulaire, il est nécessaire que r ne puisse prendre qu'une seule valeur (en l'occurrence l_1) :



La représentation graphique de $E_{\text{eff}}(r)$ révèle que l'inégalité $E_m \geq E_{\text{eff}}(r)$ présente une solution unique $r = l_1$ lorsque $E_m = E_{\text{eff}}(l_1)$; dans ce cas $E_{\text{eff}}(r)$ est *minimum*, avec :

$$E_{\text{eff}}(r) = \frac{ml_1^4\omega^2}{2r^2} + \frac{1}{2}k(r-l_0)^2 \Rightarrow \frac{dE_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{ml_1^4\omega^2}{r^3} + k(r-l_0)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{dE_{\text{eff}}}{dr} \right|_{l_1} = -ml_1\omega^2 + k(l_1-l_0)$$

La présence d'un *minimum* pour $E_{\text{eff}}(r)$ en l_1 se traduit, de fait, par :

$$\left. \frac{dE_{\text{eff}}}{dr} \right|_{l_1} = 0 \Rightarrow -ml_1\omega^2 + kl_1 - kl_0 = 0$$

soit encore :

$$l_1 = \frac{kl_0}{k - m\omega^2}$$

Cette expression n'est cependant valable que pour $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$ car l_1 doit demeurer positif et fini. Si cette condition n'était pas observée, la vitesse angulaire ω serait trop importante et le ressort serait étiré jusqu'à perdre toute propriété élastique.

● 162 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. (a) Le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ de M en O suit le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0} \text{ car } \overrightarrow{OM} \perp \vec{F}$$

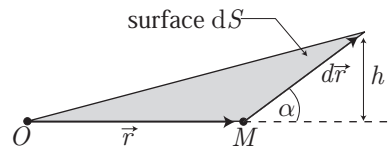
Il s'ensuit que $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$ est constant (\vec{v} désignant le vecteur vitesse de M dans le référentiel d'étude), ce qui suffit à montrer que : $\overrightarrow{OM} \perp \vec{\sigma}_O$. La trajectoire de M est donc contenue dans un plan perpendiculaire à la direction constante de $\vec{\sigma}_O$.

- (b) Lorsque le point matériel se déplace de $d\vec{r} = \vec{v} dt$, pendant une durée dt , son rayon-vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ balaie une surface dS telle que :

$$dS = \frac{1}{2} OM \times h$$

où : $OM = r$ et $h = dr \sin \alpha$ conduisent à :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{2} r dr \sin \alpha = \frac{1}{2} r v \sin \alpha dt \\ &= \frac{1}{2} \|\vec{r} \wedge \vec{v}\| dt \end{aligned}$$



Enfin, la définition du moment cinétique de M en O :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \sigma_O = \|\vec{\sigma}_O\| = m \|\vec{r} \wedge \vec{v}\| \Rightarrow \|\vec{r} \wedge \vec{v}\| = \frac{\sigma_O}{m}$$

suffit à montrer que :

$$dS = \frac{\sigma_O}{2m} dt$$

c'est-à-dire que la surface balayée par le rayon-vecteur est proportionnelle à la durée du balayage.

2. En coordonnées polaires, l'accélération du point M s'écrit :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

tandis que le moment cinétique de M en O vaut :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= \vec{r} \wedge m\vec{v} = (r \vec{e}_r) \wedge (m\dot{r} \vec{e}_r + mr\dot{\theta} \vec{e}_\theta) \\ &= mr^2\dot{\theta} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \Rightarrow \sigma_O = mr^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

Étant donné que σ_O est constant, la grandeur $C = \frac{\sigma_O}{m}$ l'est aussi :

$$C = r^2\dot{\theta} = \text{cte} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \tag{79}$$

et cela a aussi pour conséquence :

$$\frac{dC}{dt} = 0 \Rightarrow 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$$

ce qui amène une simplification dans l'expression de $\vec{\gamma}$:

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r = \left(\ddot{r} - r \times \frac{C^2}{r^4}\right) \vec{e}_r = \left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}\right) \vec{e}_r$$

Enfin, en vertu de la loi fondamentale de la dynamique, $\vec{\gamma}$ est lié à la force

$$\vec{F} = \frac{Km}{r^3} \vec{e}_r :$$

$$\begin{aligned} m\vec{\gamma} &= \frac{Km}{r^3} \vec{e}_r \Rightarrow m \left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}\right) = \frac{Km}{r^3} \\ &\Rightarrow \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{K + C^2}{r^3} \text{ (équation (I))} \end{aligned}$$

3. À la force radiale $\vec{F} = \frac{Km}{r^3} \vec{e}_r = F \vec{e}_r$ est associée une énergie potentielle \mathcal{E}_p telle que :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -F = -\frac{Km}{r^3} \Rightarrow \mathcal{E}_p = \frac{Km}{2r^2} + \text{cte}$$

qui tend, par convention, vers zéro lorsque r tend vers l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\mathcal{E}_p) = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{Km}{2r^2} + \text{cte} \right) = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_p = \frac{Km}{2r^2}$$

En outre, le vecteur vitesse $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ de M est à l'origine de l'expression de son énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$$

dans laquelle la relation (79) fournit :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{C^2}{r^4} \Rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{mC^2}{2r^2}$$

Aussi, l'énergie mécanique de M vaut :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \Rightarrow \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{Km}{2r^2} = \mathcal{E}_m$$

d'où l'on déduit que :

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{m(C^2 + K)}{2r^2} = \mathcal{E}_m \text{ (équation (II))}$$

où \mathcal{E}_m est constant, étant donné la nature conservative de la seule force \vec{F} qui s'exerce sur le point matériel.

4. Compte tenu du caractère stationnaire de \mathcal{E}_m , la dérivation temporelle de l'équation (II) conduit à :

$$\frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m(C^2 + K)}{2r^2} = \mathcal{E}_m \Rightarrow m \dot{r} \ddot{r} - \frac{m(C^2 + K)}{r^3} \dot{r} = 0$$

ce qui, après simplification par $m \dot{r}$, redonne l'équation (I) :

$$\ddot{r} = \frac{C^2 + K}{r^3}$$

En quelque sorte, la relation différentielle entre ces deux équations :

$$\frac{d(\text{II})}{dt} = (\text{I})$$

établit l'équivalence entre les équations (I) et (II).

5. Initialement, la vitesse \vec{V}_0 est perpendiculaire au rayon-vecteur \vec{r}_0 , avec :

$$\vec{r}_0 = a \vec{e}_r \text{ et } \vec{V}_0 = \dot{r} \vec{e}_r + a\dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

C'est pourquoi :

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{V}_0 = 0 \Rightarrow a \dot{r} = 0 \Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \vec{V}_0 = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

En outre, la loi (79) prévaut encore à la date $t = 0$:

$$\dot{\theta} = \frac{C}{a^2} \Rightarrow \vec{V}_0 = \frac{C}{a} \vec{e}_\theta \Rightarrow V_0^2 = \frac{C^2}{a^2}$$

Ce faisant, l'énergie cinétique de M vaut, initialement :

$$\mathcal{E}_{c0} = \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{m C^2}{2a^2}$$

et son énergie potentielle initiale : $\mathcal{E}_{p0} = \frac{K m}{2a^2}$ permet de retrouver l'expression de l'énergie mécanique de M à l'instant $t = 0$:

$$\mathcal{E}_{m0} = \mathcal{E}_{c0} + \mathcal{E}_{p0} = \frac{m (C^2 + K)}{2a^2}$$

Or, cette énergie mécanique demeurant constante dans le temps, la valeur \mathcal{E}_{m0} qu'elle prend à la date $t = 0$ est aussi celle, \mathcal{E}_m , donnée par l'équation (II), qui devient :

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{m (C^2 + K)}{2r^2} &= \mathcal{E}_{m0} = \frac{m (C^2 + K)}{2a^2} \\ \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 &= (C^2 + K) \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) \quad (80) \end{aligned}$$

soit encore :

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{C^2 + K}{a^2} \times \frac{r^2 - a^2}{r^2} \quad (81)$$

En supposant que la force soit répulsive, on admet également que $K + C^2$ soit positif (car $K > 0$), c'est-à-dire qu'il existe une constante τ positive telle que :

$$\begin{aligned} \tau = \frac{a^2}{\sqrt{K + C^2}} &\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \frac{\sqrt{K + C^2}}{a} \times \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} \\ &\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm \frac{a}{\tau} \times \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{r} \\ &\Rightarrow \frac{a}{\tau} dt = \pm \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} \end{aligned}$$

Sachant qu'à la date $t = 0$, r prend la valeur a , l'intégration de l'équation différentielle procure :

$$\frac{a}{\tau} \int_0^t dt = \pm \int_a^r \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - a^2}} \Rightarrow \frac{at}{\tau} = \pm \frac{1}{2} \left[\sqrt{r^2 - a^2} \right]_a^r$$

Cette relation : $\frac{2at}{\tau} = \pm \sqrt{r^2 - a^2}$ conduit à ne retenir que le signe positif, compte tenu du signe des deux expressions qui y figurent. Par conséquent :

$$\left(\frac{2at}{\tau} \right)^2 = r^2 - a^2 \Rightarrow r = a \sqrt{1 + \left(\frac{2t}{\tau} \right)^2} \text{ avec } \tau = \frac{a^2}{\sqrt{K + C^2}}$$

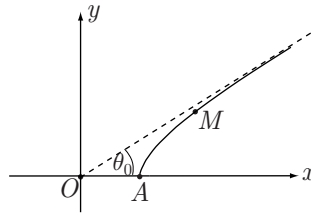
Cette expression révèle que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} r = a \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} r = \infty$$

De plus, la constante de la loi des aires, donnée par l'identité (79) : $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$, montre que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\dot{\theta}] = 0 \Rightarrow \theta = \text{cte pour } t \rightarrow \infty$$

Une telle courbe, qui adopte une direction constante (notée ici θ_0) lorsque r tend vers l'infini, est une branche d'hyperbole, dont la direction θ_0 est aussi celle d'une de ses asymptotes.



6. L'équation (I) établit que :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{K + C^2}{r^3}$$

Aussi, la trajectoire est circulaire lorsque r demeure constant, auquel cas :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = 0 \Rightarrow K + C_0^2 = 0 \Rightarrow C_0 = \sqrt{-K}$$

Cette condition ne peut cependant être observée que si K est négatif, c'est-à-dire si la force est attractive. En outre, la définition de la constante de la loi des aires introduit la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ du point matériel :

$$C_0 = r^2 \dot{\theta} = a^2 \omega \Rightarrow \omega = \frac{C_0}{a^2}$$

laquelle est aussi associée à la période T du mouvement de rotation :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{C_0}{a^2} \Rightarrow T = \frac{2\pi a^2}{C_0} \Rightarrow T = \frac{2\pi a^2}{\sqrt{-K}}$$

7. Compte tenu de ce qui précède, la définition de C_0 impose le signe de K :

$$K < 0 \Rightarrow K = -|K| \Rightarrow C = \alpha C_0 = \alpha \sqrt{|K|}$$

Il s'ensuit que :

$$K + C^2 = -|K| + \alpha^2 |K| = |K| (\alpha^2 - 1) > 0 \text{ pour } \alpha > 1$$

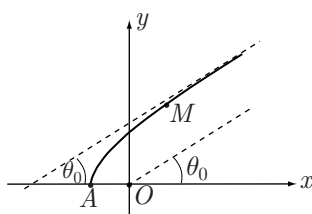
L'équation du mouvement (81) :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{K + C^2}{a^2} \times \frac{r^2 - a^2}{r^2} \text{ avec } K + C^2 > 0$$

admet, par conséquent, la même solution que celle obtenue à la question 5. :

$$r = a\sqrt{1 + \left(\frac{2t}{\tau}\right)^2} \text{ avec } \tau = \frac{a^2}{\sqrt{|K|(\alpha^2 - 1)}}$$

8. La trajectoire du point matériel est donc une branche d'hyperbole correspondant à une force attractive :



9. En revanche, si $C = \beta C_0$, avec $0 < \beta < 1$, la somme $K + C^2$ est négative :

$$K + C^2 = -|K| + \beta^2 |K| = |K|(\beta^2 - 1) < 0$$

et c'est pourquoi on pourra définir le paramètre réel :

$$\omega = \frac{\sqrt{-(K + C^2)}}{a^2} = \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)|K|}}{a^2} \Rightarrow K + C^2 = -\omega^2 a^4$$

de manière à présenter l'équation (81) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 &= \frac{K + C^2}{a^2} \times \frac{r^2 - a^2}{r^2} = -\omega^2 a^2 \times \frac{r^2 - a^2}{r^2} = \omega^2 a^2 \times \frac{a^2 - r^2}{r^2} \\ \Rightarrow \frac{dr}{dt} &= \pm \omega a \frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} \Rightarrow \omega a dt = \pm \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} \end{aligned}$$

En outre, la valeur initiale de $r = a$ (pour $t = 0$) facilite l'intégration de cette équation :

$$\pm \omega a \int_0^t dt = \int_a^r \frac{r dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = - \left[\frac{1}{2} \sqrt{a^2 - r^2} \right]_a^r \quad (82)$$

d'où découle que :

$$(2\omega a t)^2 = a^2 - r^2 \Rightarrow r = a\sqrt{1 - 4\omega^2 t^2} \text{ avec } \omega = \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)|K|}}{a}$$

En outre, la loi (79), établie à la page 527 :

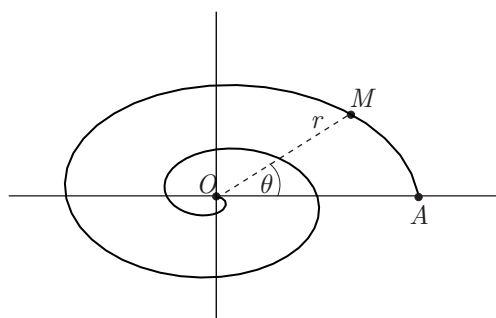
$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \beta \frac{C_0}{r^2} > 0$$

montre non seulement que θ augmente depuis sa valeur initiale $\theta_0 = 0$, mais également que, lorsque r tend vers zéro, $\dot{\theta}$ augmente indéfiniment, de même que² θ .

Ces informations conduisent à la représentation de l'allure de la trajectoire :

²On pourra montrer que l'expression de r , associée à la loi : $\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}$, fournit comme solution :

$$\theta = \frac{\beta C_0}{2a^2} \times \ln \left(\frac{1 + 2\omega t}{1 - 2\omega t} \right)$$



10. En maintenant la condition initiale au cas particulier $C = C_0 = \sqrt{-K}$, on impose :

$$K + C^2 = K - K = 0$$

de sorte que l'équation (I) devient :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{K + C^2}{r^3} = 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \alpha \Rightarrow r = \alpha t + \beta$$

où α et β sont deux constantes que l'on peut déterminer à partir de la connaissance de $\vec{r}_0 = r \vec{e}_r = a \vec{e}_r$ et de la vitesse initiale \vec{v}_0 :

$$t = 0 \Rightarrow r = a \Rightarrow \beta = a \Rightarrow r = \alpha t + a$$

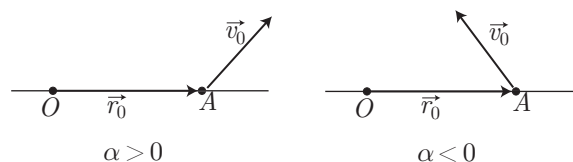
Le vecteur vitesse s'écrit, quant à lui :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{v} = (r \vec{e}_r) \cdot (\dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = r\dot{r} = (\alpha t + a) \alpha$$

soit, à la date $t = 0$:

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0 = b \times \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{v}_0}{b}$$

ce qui montre que le signe de α est conditionné par l'orientation initiale de \vec{v}_0 .



Enfin, l'expression de θ s'obtient par intégration directe de la loi (79) :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{C_0}{r^2} \Rightarrow d\theta = C_0 \frac{dt}{(\alpha t + a)^2} \\ &\Rightarrow \int_0^\theta d\theta = C_0 \int_0^t \frac{dt}{(\alpha t + a)^2} \text{ car } \theta = 0 \text{ à } t = 0 \\ &\Rightarrow \theta = \frac{C_0}{\alpha} \left[-\frac{1}{\alpha t + a} \right]_0^t = \frac{C_0}{\alpha} \left[\frac{-1}{\alpha t + a} + \frac{1}{a} \right] \end{aligned}$$

c'est-à-dire finalement :

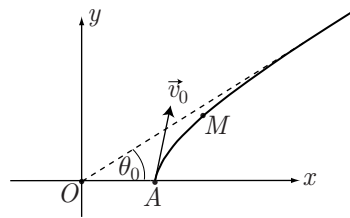
$$\theta = \frac{C_0 t}{a(\alpha t + a)} \text{ et } r = \alpha t + a$$

Deux cas doivent alors être distingués :

- si $\alpha > 0$, $r = \alpha t + a$ peut croître indéfiniment, de sorte que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r = \infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \theta = \frac{C_0}{\alpha a} = \theta_0 > 0$$

De telles limites sont caractéristiques d'une trajectoire hyperbolique :



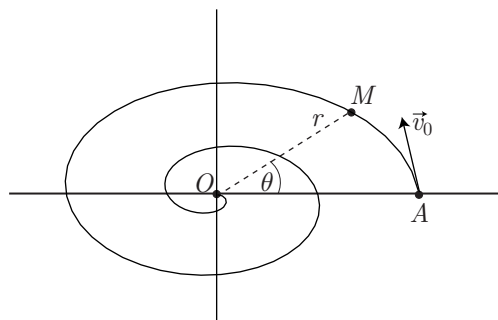
- si $\alpha < 0$, $r = \alpha t + a = -|\alpha|t + a$, de sorte qu'il existe une date t_∞ qui annule r :

$$|\alpha| t_\infty = a \Rightarrow t_\infty = \frac{a}{|\alpha|} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_\infty} r = 0$$

En outre, l'expression de θ révèle que :

$$\lim_{t \rightarrow t_\infty} \theta = \lim_{t \rightarrow t_\infty} \left[\frac{C_0 t}{a(a - |\alpha|t)} \right] \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_\infty} \theta = \infty$$

De ces calculs, il ressort que r décroît de a à 0, tandis que l'angle θ augmente sans cesse, ce qui suggère que la trajectoire de M doit présenter l'allure d'une spirale.



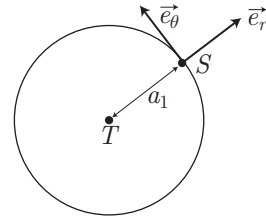
● 163 Concours ATS

1. Le satellite S géostationnaire, tourne autour du centre (T) de la Terre avec une vitesse angulaire Ω .

Dans un système de coordonnées polaires $(T, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, son vecteur accélération est donné par :

$$\vec{\gamma} = -a_1 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -a_1 \Omega^2 \vec{e}_r$$

et sa relation à la force gravitationnelle $\vec{f} = -\frac{GMm}{a_1^2} \vec{e}_r$ découle de la loi fondamentale de la dynamique :



$$m \vec{\gamma} = \vec{f} \Rightarrow -m a_1 \Omega^2 = -\frac{GMm}{a_1^2} \Rightarrow a_1 = \sqrt[3]{\frac{GM}{\Omega^2}} \quad (83)$$

2. La force de gravitation dérive de l'énergie potentielle $U(r)$, ce qui signifie que :

$$\frac{dU}{dr} = -f = \frac{GMm}{r^2} \Rightarrow U(r) = -\frac{GMm}{r} + K$$

où K est une constante dont la valeur est fixée par la condition :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [U(r)] = 0 \Rightarrow K = 0 \Rightarrow U(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (84)$$

3. Sur son orbite géostationnaire, le satellite possède donc l'énergie potentielle : $U = -\frac{GMm}{a_1}$ et l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m V^2$, où V désigne la norme du vecteur vitesse qui s'écrit, en coordonnées polaires :

$$\vec{V} = a_1 \Omega \vec{e}_\theta \Rightarrow V^2 = a_1^2 \Omega^2$$

où Ω^2 s'obtient aisément à l'aide de l'identité (83) :

$$\Omega^2 = \frac{GM}{a_1^3} \Rightarrow V^2 = \frac{GM}{a_1} \Rightarrow E_c = \frac{GMm}{2a_1}$$

C'est pourquoi l'énergie mécanique totale du satellite, sur son orbite circulaire, vaut :

$$E_T = E_c + U = \frac{GMm}{2a_1} - \frac{GMm}{a_1} \Rightarrow E_T = -\frac{GMm}{2a_1}$$

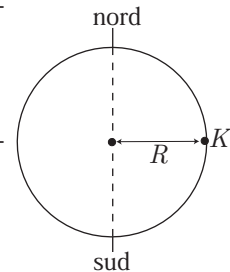
4. Lorsque le satellite se trouve à la surface de la Terre, sur l'équateur, il tourne autour de l'axe des pôles avec une vitesse angulaire Ω tandis qu'il se trouve à une distance R (rayon terrestre) du centre T de la Terre.

De fait, conformément au résultat (84), son énergie potentielle vaut :

$$U = -\frac{GMm}{R}$$

tandis que sa vitesse : $V_K = R\Omega$ lui affecte l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} m V_K^2 = \frac{m R^2 \Omega^2}{2}$$



À l'équateur, le satellite possède donc l'énergie mécanique :

$$E_K = \frac{mR^2\Omega^2}{2} - \frac{GMm}{R} \quad (85)$$

Pour placer ce satellite sur son orbite géostationnaire (où son énergie mécanique vaut E_T), il a donc fallu dépenser une énergie W_L telle que :

$$E_T = E_K + W_L \Rightarrow W_L = E_T - E_K = \frac{GMm}{R} - \frac{mR^2\Omega^2}{2} - \frac{GMm}{2a_1}$$

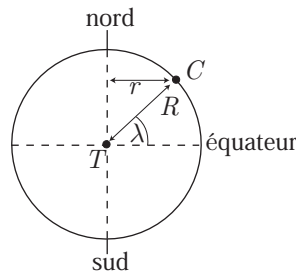
5. En revanche, lorsque le satellite se trouve à la surface de la Terre en un point C de latitude λ , il tourne autour de l'axe des pôles à une distance : $r = R \cos \lambda$, ce qui lui confère une vitesse :

$$V_C = r\Omega = R\Omega \cos \lambda$$

et, par voie de conséquence, une énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} mV_C^2 = \frac{mR^2\Omega^2}{2} \cos^2 \lambda$$

D'autre part, son énergie potentielle valant encore $U = -\frac{GMm}{R}$, il possède en C une énergie mécanique :



$$E_C = \frac{mR^2\Omega^2}{2} \cos^2 \lambda - \frac{GMm}{R} \quad (86)$$

Aussi, pour l'amener sur son orbite géostationnaire, il faut lui communiquer un surcroît d'énergie W'_L tel que :

$$E_T = E_C + W'_L \Rightarrow W'_L = E_T - E_C$$

Par rapport à l'équateur, cette énergie présente donc une différence :

$$\Delta W_L = W'_L - W_L = (E_T - E_C) - (E_T - E_K) = E_K - E_C$$

où E_C et E_K sont fournis par les résultats (85) et (86) :

$$\begin{aligned} \Delta W_L &= \left(\frac{mR^2\Omega^2}{2} - \frac{GMm}{R} \right) - \left(\frac{mR^2\Omega^2}{2} \cos^2 \lambda - \frac{GMm}{R} \right) \\ \Rightarrow \Delta W_L &= \frac{mR^2\Omega^2}{2} (1 - \cos^2 \lambda) \end{aligned}$$

Étant donné que $\cos^2 \lambda \leq 1$, ce résultat signifie aussi que :

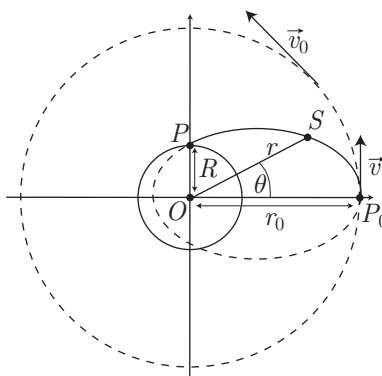
$$W'_L - W_L = \Delta W_L \geq 0 \Rightarrow W'_L \geq W_L$$

c'est-à-dire qu'un lancement depuis de point C est plus dispendieux en énergie qu'un lancement depuis l'équateur et c'est pour cette raison que :

les lancements effectués depuis la base de Kourou sont plus économiques, sur le plan énergétique, que ceux effectués depuis Cap Canaveral.

● **164** **Lycée Saint-Louis, Paris**

1. Soit M la masse de la Terre, de centre O et de rayon R , et soit S le satellite de masse m . On note $r = OS$ et on suppose que r prend la valeur r_0 lorsque S passe d'une orbite circulaire à une orbite elliptique en P_0 qui l'amène à s'écraser au sol en un point P .



L'orbite elliptique est décrite par l'équation :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

ce qui permet d'en déduire que $r = r_0$ lorsque $\theta = 0$:

$$r_0 = \frac{p}{1 + e} \Rightarrow 1 + e = \frac{p}{r_0} \Rightarrow e = \frac{p}{r_0} - 1$$

tandis que $r = R$ lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$:

$$R = p \Rightarrow e = \frac{R}{r_0} - 1 \quad (87)$$

Au point P_0 , lorsque le satellite adopte sa trajectoire elliptique, sa vitesse prend la valeur v ; son énergie cinétique E_c et son énergie potentielle valent alors :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \text{ et } E_p = -\frac{GMm}{r_0}$$

où G est la constante de gravitation. C'est pourquoi son énergie mécanique vaut :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r_0} \quad (88)$$

En outre, cette énergie mécanique, au demeurant constante, vaut :

$$E_m = -\frac{GMm}{2a}$$

où le demi-grand axe a s'obtient à partir de l'excentricité e :

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{R}{1 - e^2} \Rightarrow E_m = \frac{GMm}{2R} (e^2 - 1)$$

Le résultat (87) fournit alors :

$$e = \frac{R}{r_0} - 1 \Rightarrow e^2 - 1 = \frac{R^2}{r_0^2} - \frac{2R}{r_0} = \frac{R(R - 2r_0)}{r_0^2}$$

$$\Rightarrow E_m = GMm \times \frac{R - 2r_0}{2r_0^2}$$

Il s'ensuit que l'identité (88) devient :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_0} = GMm \frac{R - 2r_0}{2r_0^2} \Rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r_0} \left(1 + \frac{R - 2r_0}{2r_0}\right)$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{2GM}{r_0} \times \frac{R}{2r_0} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GMR}{r_0^2}}$$

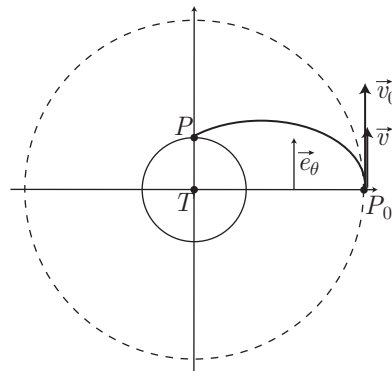
Enfin, l'intensité de la pesanteur au niveau du sol est définie par :

$$g_0 = \frac{GM}{R} \Rightarrow GM = g_0R$$

d'où découle l'expression de v :

$$v = \sqrt{g_0} \frac{R}{r_0}$$

2. Pendant la durée $dt = \tau$, la vitesse de S passe de \vec{v}_0 (pour le mouvement circulaire) à la vitesse \vec{v} , lesquels vecteurs sont tangents aux trajectoires au point P_0 .



Si \vec{e}_θ désigne le vecteur orthoradial en P_0 , la vitesse du satellite a varié de :

$$d\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0 = (v - v_0) \vec{e}_\theta$$

pendant la durée τ , sous l'influence d'une force \vec{F} qui vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{m(v - v_0)}{\tau} \vec{e}_\theta \Rightarrow \|\vec{F}\| = \frac{m}{\tau} |v - v_0| \quad (89)$$

En outre, sur sa trajectoire circulaire de rayon r_0 , le satellite possède une vitesse de norme v_0 constante, qui définit son accélération : $\vec{\gamma} = -\frac{v_0^2}{r_0} \vec{e}_r$ liée à la force

gravitationnelle :

$$m \vec{\gamma} = -\frac{GMm}{r_0^2} \vec{e}_r \Rightarrow -m \frac{v_0^2}{r_0} \vec{e}_r = -\frac{GMm}{r_0^2} \vec{e}_r \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{g_0} \sqrt{\frac{R}{r_0}} \text{ car } GM = g_0 R$$

Par suite :

$$v - v_0 = \sqrt{g_0} \left(\frac{R}{r_0} - \sqrt{\frac{R}{r_0}} \right) < 0 \text{ car } \frac{R}{r_0} < 1 \Rightarrow \frac{R}{r_0} < \sqrt{\frac{R}{r_0}}$$

$$\Rightarrow |v - v_0| = \sqrt{g_0} \left(\sqrt{\frac{R}{r_0}} - \frac{R}{r_0} \right)$$

et l'identité (89) donne finalement :

$$\|\vec{F}\| = \frac{m\sqrt{g_0}}{\tau} \left(\sqrt{\frac{R}{r_0}} - \frac{R}{r_0} \right)$$

● 165 ————— Lycée Livet, Nantes

1. Lorsque le satellite est sur son orbite circulaire de rayon r_0 , il possède l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{GMm}{2r_0}$$

et donc sa vitesse v_0 vérifie :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{GMm}{2r_0} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \text{ avec } r_0 = R + h$$

Application numérique :

$$v_0 = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}{(6\,400 + 180) \times 10^3}} \Rightarrow v_0 = 7\,800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Quant à son énergie mécanique, elle vaut :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{GMm}{2r_0} - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{GMm}{2r_0}$$

Application numérique :

$$\mathcal{E}_m = -\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24} \times 2\,000}{2 \times 6\,580 \cdot 10^3} \Rightarrow \mathcal{E}_m = -6,1 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

2. (a) La seconde formule de Binet fournit l'accélération du satellite :

$$\vec{\gamma} = -\frac{C^2}{r^2} \left[\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right] \vec{e}_r$$

au demeurant soumise à la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \vec{\gamma} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}$$

Cette équation admet pour solution générale :

$$u = \frac{GM}{C^2} + A \cos(\theta + \phi)$$

où les constantes A et ϕ sont fixées par les conditions initiales. Notamment, si on suppose que u devient *extremum* lorsque $\theta = 0$, la constante ϕ est nulle et :

$$\begin{aligned} u = \frac{GM}{C^2} + A \cos \theta &= \frac{GM}{C^2} (1 + e \cos \theta) \text{ avec } e = \frac{AC^2}{GM} \\ &= \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta) \text{ où } p = \frac{C^2}{GM} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$r = \frac{1}{u} \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \tag{90}$$

Dans cette expression apparaissent :

- le paramètre $p = \frac{C^2}{GM}$ de la trajectoire, où la constante de la loi des aires C est définie par : $C = \|\vec{r} \wedge \vec{v}\|$. Or, lorsque le satellite est en B , \vec{v} et \vec{r} sont perpendiculaires et leurs normes valent respectivement $v_1 = 10\,000 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $r_0 = R + h = 6\,580.10^3 \text{ m}$. C'est pourquoi :

$$p = \frac{v_1^2 r_0^2}{GM}$$

Application numérique :

$$p = \frac{(10^4)^2 \times (6\,580.10^3)^2}{6,67.10^{-11} \times 6.10^{24}} \Rightarrow p = 10,8.10^6 \text{ m}$$

- l'excentricité e dont la valeur numérique détermine la nature de la trajectoire du satellite :
 - lorsque $e = 0$, la trajectoire est circulaire ;
 - pour $0 < |e| < 1$, le satellite décrit une ellipse ;
 - lorsque $e = 1$, il s'échappe en suivant une trajectoire parabolique ;
 - pour $|e| > 1$, sa trajectoire est une hyperbole.

(b) Lorsque le satellite atteint le point B , l'angle θ est nul, tandis qu'il se trouve à une distance $r_0 = 6\,580.10^3 \text{ m}$ du centre de la Terre. Le résultat (90) devient ainsi :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow r_0 = \frac{p}{1 + e} \Rightarrow 1 + e = \frac{p}{r_0} \Rightarrow e = \frac{p}{r_0} - 1$$

Application numérique :

$$e = \frac{10,8.10^6}{6\,580.10^3} - 1 \Rightarrow e = 0,64$$

Une telle valeur révèle que le satellite gravite alors autour de la Terre sur une orbite elliptique.

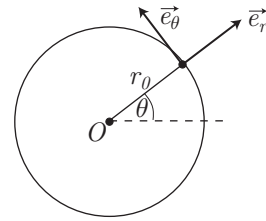
● 166 ————— Concours Centrale-Supélec

1. (a) En coordonnées polaires, les vecteurs vitesse et accélération du vaisseau, soumis à une force centrale, s'écrivent :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta \text{ et } \vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r$$

Notamment, pour un mouvement circulaire :

$$\begin{aligned} r = r_0 &\Rightarrow \dot{r} = 0 \Rightarrow \vec{v}_0 = r_0 \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \Rightarrow V_0 = \|\vec{v}_0\| = r_0 \dot{\theta} &\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{V_0}{r_0} \end{aligned}$$



et le vecteur accélération :

$$\vec{\gamma} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = -\frac{V_0^2}{r_0} \vec{e}_r$$

est lié à la force de gravitation : $\vec{f} = -\frac{GMm}{r_0^2} \vec{e}_r$ par la loi fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{\gamma} = \vec{f} \Rightarrow -m \frac{V_0^2}{r_0} \vec{e}_r = -\frac{GMm}{r_0^2} \vec{e}_r$$

d'où l'on déduit que :

$$V_0^2 = \frac{GM}{r_0} \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \quad (91)$$

- (b) Sous l'effet de la force de gravitation, le vaisseau acquiert l'énergie potentielle :

$$E_p = -\frac{GMm}{r}$$

Aussi, lorsque sa vitesse vaut V , son énergie mécanique prend la valeur :

$$E_m = \frac{1}{2} mV^2 - \frac{GMm}{r}$$

qui demeure constante tant que les moteurs du vaisseau restent éteints. C'est ce qui se produit entre les deux instants suivants :

- le vaisseau se trouve à la distance r_0 avec la vitesse V_1 :

$$E_m = \frac{1}{2} mV_1^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

où la relation (91) indique que :

$$\frac{GMm}{r_0} = mV_0^2 \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} mV_1^2 - mV_0^2$$

- le vaisseau se trouve à une distance r_∞ suffisamment grande pour échapper au champ gravitationnel de l'astre (r_∞ tend vers l'infini) et sa vitesse y est nulle :

$$E_m = \frac{1}{2} mV_\infty^2 - \frac{GMm}{r_\infty} = 0$$

L'énergie mécanique ne variant pas, il s'ensuit que :

$$\frac{1}{2} mV_1^2 - mV_0^2 = 0 \Rightarrow V_1^2 = 2V_0^2 \Rightarrow V_1 = V_0\sqrt{2}$$

2. (a) Option 1

Compte tenu de ce qui précède, il convient de distinguer deux situations :

- Lorsque le vaisseau se trouve à la distance r_0 , sa vitesse vaut $5V_0$, auquel cas son énergie mécanique prend la valeur :

$$\begin{aligned} E_m &= \frac{1}{2} m \times (5V_0)^2 - \frac{GMm}{r_0} \text{ avec } \frac{GMm}{r_0} = mV_0^2 \\ &= m \times \frac{25V_0^2}{2} - mV_0^2 \Rightarrow E_m = m \times \frac{23V_0^2}{2} \end{aligned}$$

- « à l'infini », tandis que la distance r_∞ tend vers l'infini, la vitesse du vaisseau prend la valeur V_∞ , de sorte que :

$$E_m = \frac{1}{2} mV_\infty^2 - \frac{GMm}{r_\infty} = \frac{1}{2} mV_\infty^2$$

C'est pourquoi :

$$\frac{1}{2} mV_\infty^2 = \frac{m}{2} \times 23V_0^2 \Rightarrow V_\infty^2 = 23V_0^2 \Rightarrow V_\infty = V_0\sqrt{23}$$

(b) Option 2

Sur une orbite elliptique, de demi-grand axe a , le vaisseau possède une énergie mécanique :

$$E_m = -\frac{GMm}{2a}$$

Or, à l'apogée A de cette trajectoire, située à la distance r_0 de O , sa vitesse vaut $V_A = \frac{V_0}{2}$, ce qui confère à son énergie mécanique la valeur :

$$E_m = \frac{1}{2} mV_A^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{1}{2} m \times \left(\frac{V_0}{2}\right)^2 - \frac{GMm}{r_0} = \frac{m}{8} V_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

soit, compte tenu du résultat (91) :

$$V_0^2 = \frac{GM}{r_0} \Rightarrow E_m = \frac{GMm}{8r_0} - \frac{GMm}{r_0} = -\frac{7GMm}{8r_0}$$

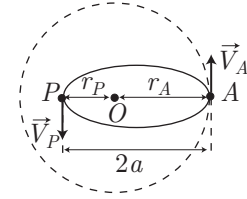
Ainsi :

$$-\frac{GMm}{2a} = -\frac{7GMm}{8r_0} \Rightarrow a = \frac{4}{7} r_0$$

r_P désignant la distance qui sépare le périhélie de O , le grand axe de l'ellipse s'écrit :

$$2a = r_P + r_0 \Rightarrow r_P = 2a - r_0 = \frac{8}{7}r_0 - r_0$$

$$\Rightarrow r_P = \frac{1}{7}r_0$$



Enfin, sous l'effet de la force gravitationnelle, centrale, le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ du vaisseau en O demeure constant, ce qui se traduit par :

$$\vec{OA} \wedge m\vec{v}_A = \vec{OP} \wedge m\vec{v}_P \Rightarrow \|\vec{OA} \wedge \vec{v}_A\| = \|\vec{OP} \wedge \vec{v}_P\|$$

$$\Rightarrow r_0 V_A \sin(\vec{OA}, \vec{v}_A) = r_P V_P \sin(\vec{OP}, \vec{v}_P)$$

Or, au périhélie et à l'apogée, les vecteurs vitesse et position sont perpendiculaires, ce qui simplifie cette dernière équation :

$$r_0 V_A = r_P V_P \Rightarrow r_0 \frac{V_0}{2} = \frac{r_0}{7} V_P \Rightarrow V_P = \frac{7}{2} V_0$$

- (c) Disposant d'un « budget initial » de $4V_0$, et ayant déjà utilisé $\frac{V_0}{2}$ de ce « capital », le commandant de ce vaisseau peut encore augmenter sa vitesse de :

$$\Delta V = 4V_0 - \frac{V_0}{2} = \frac{7V_0}{2}$$

Aussi, au périhélie P , le vaisseau peut acquérir une vitesse :

$$V'_P = V_P + \Delta V = \frac{7V_0}{2} + \frac{7V_0}{2} = 7V_0$$

tandis que ce périhélie se trouve à la distance $r_P = \frac{r_0}{7}$ du point O . C'est pourquoi son énergie mécanique vaut, en P :

$$E_m = \frac{1}{2} m V'_P{}^2 - \frac{GMm}{r_P} = \frac{1}{2} m \times (7V_0)^2 - GMm \times \frac{7}{r_0}$$

$$= mV_0^2 \times \frac{49}{2} - \frac{GMm}{r_0} \times 7$$

où, conformément au résultat (91) :

$$\frac{GM}{r_0} = V_0^2 \Rightarrow E_m = mV_0^2 \times \left(\frac{49}{2} - 7 \right) \Rightarrow E_m = mV_0^2 \times \frac{35}{2} > 0$$

Le signe positif de cette énergie mécanique révèle que le vaisseau adopte une trajectoire hyperbolique.

À l'aide de cette énergie mécanique, le vaisseau peut s'éloigner infiniment de O (il échappe ainsi à la gravité de l'astre lorsqu'il s'en éloigne d'une distance r_∞ qui tend vers l'infini), où il acquiert une vitesse V'_∞ ; l'énergie mécanique y est définie par :

$$E_m = \frac{1}{2} m (V'_\infty)^2 - \frac{GMm}{r_\infty} = \frac{1}{2} m (V'_\infty)^2$$

Par conséquent :

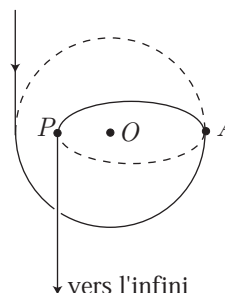
$$\frac{1}{2} m (V'_\infty)^2 = mV_0^2 \times \frac{35}{2} \Rightarrow V'_\infty = \sqrt{35} V_0$$

(d) La première option a permis d'obtenir une vitesse « à l'infini » :

$$V_\infty = \sqrt{23} V_0 \Rightarrow V_\infty < V'_\infty$$

ce qui met en lumière l'efficacité supérieure de la deuxième option et en justifie l'emploi. Par abus de langage, on affirmera que c'est au voisinage de l'astre que l'accélération du vaisseau est la plus efficace.

C'est, du reste, par ce moyen que les vaisseaux spatiaux opèrent leurs accélérations dans le système solaire : ils profitent de la proximité de certaines planètes pour accélérer à moindre coût.



● 167 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Le moment cinétique de S en O , défini par :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_O &= \vec{OS} \wedge m\vec{v} \quad (\vec{v} \text{ est la vitesse de } S) \\ &= (r \vec{e}_r) \wedge (m\dot{r} \vec{e}_r + mr\omega \vec{e}_\theta) = mr^2\omega \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

vérifie le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{OM} \wedge \vec{f}$$

où $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ et $\vec{f} = -\frac{\mu m}{r^2} \vec{e}_r$ sont des vecteurs colinéaires, en conséquence de quoi :

$$\vec{OM} \wedge \vec{f} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{0}$$

Cette dernière relation révèle que le vecteur $\vec{\sigma}_O$ est constant, ce qui implique que sa norme est également constante :

$$\sigma_O = mr^2\omega \|\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta\| = mr^2\omega = \text{cte}$$

Par suite, la grandeur $C = \frac{\sigma_O}{m}$ est une constante :

$$C = r^2\omega = \text{cte} \Rightarrow \omega = \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} \quad (92)$$

Ce résultat permet alors de calculer les composantes du vecteur vitesse de S :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta = \dot{r} \vec{e}_r + \frac{C}{r} \vec{e}_\theta$$

où :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{dr}{d\theta} = C \times \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \Rightarrow \dot{r} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

d'où l'on déduit que :

$$\vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + Cu \vec{e}_\theta \text{ avec } u = \frac{1}{r} \quad (93)$$

De même, l'accélération de S s'écrit :

$$\vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\omega^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}) \vec{e}_\theta$$

D'une part :

$$\begin{aligned} C = r^2\omega = \text{cte} &\Rightarrow \frac{dC}{dt} = 0 = 2r\dot{r}\omega + r^2\dot{\omega} \\ &\Rightarrow r(2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}) = 0 \Rightarrow 2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} = 0 \\ &\Rightarrow \vec{\gamma} = (\ddot{r} - r\omega^2) \vec{e}_r \end{aligned}$$

et d'autre part :

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = \frac{C}{r^2} \times \frac{d}{d\theta} \left(-C \frac{du}{d\theta} \right) = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2u}{d\theta^2} \text{ où } u = \frac{1}{r}$$

C'est pourquoi l'accélération du satellite est donnée par :

$$\vec{\gamma} = -\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r$$

et vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\vec{\gamma} = \vec{f} &\Rightarrow -m \frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r = -\frac{\mu m}{r^2} \vec{e}_r \text{ avec } \vec{r} = r \vec{e}_r \\ &\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\mu}{C^2} \end{aligned}$$

La solution de l'équation différentielle sans second membre :

$$\frac{d^2u_1}{d\theta^2} + u_1 = 0$$

est de la forme :

$$u_1 = A \cos \theta + B \sin \theta$$

tandis que le second membre, constant, est à l'origine d'une solution u_2 qui lui est homogène (constante) :

$$\underbrace{\frac{d^2u_2}{d\theta^2}}_{=0} + u_2 = \frac{\mu}{C^2} \Rightarrow u_2 = \frac{\mu}{C^2}$$

Ce faisant, on obtient la solution générale de l'équation différentielle :

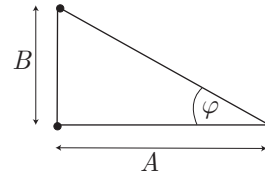
$$u = u_1 + u_2 \Rightarrow u = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{\mu}{C^2} \quad (94)$$

En remarquant que l'on peut écrire :

$$A \cos \theta + B \sin \theta = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos \theta + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin \theta \right)$$

il existe un angle φ tel que :

$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ et } \sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



De cette manière, il apparaît que :

$$\begin{aligned} A \cos \theta + B \sin \theta &= \sqrt{A^2 + B^2} (\cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta - \varphi) \\ \Rightarrow u &= \frac{\mu}{C^2} + \sqrt{A^2 + B^2} \cos(\theta - \varphi) \end{aligned}$$

expression que l'on peut aussi présenter sous la forme :

$$u = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\theta - \varphi)]$$

avec :

$$\frac{1}{p} = \frac{\mu}{C^2} \Rightarrow p = \frac{C^2}{\mu} \text{ et } \frac{e}{p} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

2. La dernière relation établit directement que :

$$e = p \sqrt{A^2 + B^2} \Rightarrow e^2 = p^2 (A^2 + B^2)$$

3. (a) Le moment cinétique $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ permet de définir un vecteur \vec{C} :

$$\vec{C} = \frac{\vec{\sigma}_O}{m} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}$$

dont la norme coïncide avec la constante C intervenant dans la relation (92) :

$$\|\vec{C}\| = \frac{\|\vec{\sigma}_O\|}{m} = C$$

Or, initialement, S est repéré par son rayon-vecteur \vec{r}_0 et sa vitesse \vec{v}_0 perpendiculaire à \vec{r}_0 , en conséquence de quoi :

$$\vec{C} = \vec{r}_0 \wedge \vec{v}_0 \Rightarrow C = \|\vec{C}\| = r_0 \times v_0$$

Quant au vecteur vitesse de S , il est donné par la relation (93) et, initialement, ce vecteur est perpendiculaire à $\vec{r}_0 = r_0 \vec{e}_r$ (lorsque $\theta = 0$), ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{r}_0 = 0 &\Rightarrow \left(-C \frac{du}{d\theta} \Big|_0 \vec{e}_r + Cu \vec{e}_\theta \right) \cdot (r_0 \vec{e}_r) = 0 \\ &\Rightarrow -Cr_0 \frac{du}{d\theta} \Big|_0 = 0 \Rightarrow \frac{du}{d\theta} \Big|_0 = 0 \end{aligned}$$

où l'expression de u est donnée par le résultat (94) :

$$u = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{\mu}{C^2} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} \Big|_0 = B \Rightarrow B = 0$$

Enfin, cette même expression devient, lorsque $\theta = 0$:

$$u_0 = A + \frac{\mu}{C^2} \Rightarrow \frac{1}{r_0} = A + \frac{\mu}{r_0^2 v_0^2} \Rightarrow A = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{\mu}{r_0 v_0^2} \right)$$

Aussi, en définissant la constante η par :

$$\eta = \frac{r_0 v_0^2}{\mu} \Rightarrow \frac{\mu}{r_0 v_0^2} = \frac{1}{\eta}$$

on obtient :

$$A = \frac{1}{r_0} \left(1 - \frac{1}{\eta} \right) = \frac{\eta - 1}{\eta r_0}$$

De cette manière, la grandeur u devient :

$$\begin{aligned} u = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{\mu}{C^2} &= \frac{\eta - 1}{\eta r_0} \cos \theta + \frac{\mu}{r_0^2 v_0^2} \text{ avec } \frac{\mu}{r_0 v_0^2} = \frac{1}{\eta} \\ &= \frac{(\eta - 1) \cos \theta + 1}{\eta r_0} \end{aligned}$$

soit encore :

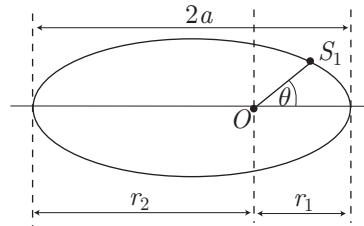
$$r = \frac{1}{u} = \frac{\eta r_0}{1 + (\eta - 1) \cos \theta} \text{ avec } \eta = \frac{r_0 v_0^2}{\mu}$$

- (b) Lorsque la trajectoire est une ellipse, $\eta - 1$ est compris entre 0 et 1, de sorte que r admet deux valeurs extrêmes :

$$r_1 = \frac{\eta r_0}{1 + (\eta - 1)} = r_0 \text{ pour } \theta = 0$$

et :

$$r_2 = \frac{\eta r_0}{1 - (\eta - 1)} = \frac{\eta}{2 - \eta} r_0 \text{ pour } \theta = \pi$$



Par conséquent, le demi-grand axe est donné par l'équation :

$$2a = r_1 + r_2 = r_0 \left(1 + \frac{\eta}{2 - \eta} \right) \Rightarrow 2a = r_0 \times \frac{2}{2 - \eta} \Rightarrow a = \frac{r_0}{2 - \eta}$$

En identifiant les deux expressions de r :

$$r = \frac{\eta r_0}{1 + (\eta - 1) \cos \theta} \text{ et } r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

on obtient les caractéristiques de l'ellipse :

$$p = \eta r_0 \text{ et } e = \eta - 1 \quad (95)$$

d'où l'on déduit que :

$$1 - e^2 = (1 - e)(1 + e) = (2 - \eta) \times \eta$$

À l'aide de l'expression de a , on trouve finalement celle du demi-petit axe :

$$b = a \sqrt{1 - e^2} = \frac{r_0}{2 - \eta} \times \sqrt{\eta(2 - \eta)} \Rightarrow b = r_0 \times \sqrt{\frac{\eta}{2 - \eta}}$$

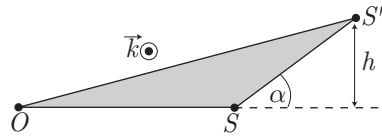
Quant à la valeur de c , elle découle directement de sa définition :

$$c = a \times e = \frac{r_0}{2 - \eta} \times (\eta - 1)$$

- (c) Pendant une durée dt , le satellite passe d'un point S à un point S' de l'ellipse ; le rayon-vecteur balaie ainsi une aire dA donnée par :

$$dA = \frac{1}{2} \times OS \times h$$

où h est la hauteur du triangle (OSS') .
En remarquant que la vitesse du satellite est définie par : $\vec{v} = \frac{dSS'}{dt}$, on peut également calculer le vecteur :



$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{OS} \wedge \vec{SS'} \times \frac{1}{dt} \\ &= OS \times \underbrace{SS' \sin \alpha}_h \times \vec{k} \times \frac{1}{dt} \Rightarrow C = \|\vec{C}\| = OS \times h \times \frac{1}{dt} \end{aligned}$$

En comparant avec la définition de A , il apparaît que :

$$OS \times h = C \times dt \Rightarrow dA = \frac{C}{2} \times dt$$

Pendant une période T , le rayon-vecteur balaie donc l'aire de l'ellipse :

$$\begin{aligned} A = \frac{C}{2} \times T &\Rightarrow \pi ab = \frac{C}{2} \times T \Rightarrow 2\pi ab = C \times T \\ &\Rightarrow 4\pi^2 a^2 b^2 = C^2 T^2 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} b = a\sqrt{1 - e^2} \Rightarrow a^2 b^2 &= a^3 \times a(1 - e^2) = a^3 \times \frac{r_0}{2 - \eta} \times \eta(2 - \eta) \\ &= a^3 \times \eta r_0 \text{ avec } \eta = \frac{r_0 v_0^2}{\mu} \\ &= a^3 \times \frac{r_0^2 v_0^2}{\mu} = a^3 \times \frac{C^2}{\mu} \text{ car } C = r_0 v_0 \end{aligned}$$

Par suite :

$$4\pi^2 \times a^3 \times \frac{C^2}{\mu} = C^2 T^2 \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Remarque – La validité de ce résultat est immédiatement confirmée par la troisième loi de Kepler :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$$

pour une force newtonnienne de la forme :

$$\vec{f} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r = -\frac{\mu m}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \mu = GM$$

● 168 ————— Lycée Carnot, Dijon

I- Généralités

1. Par définition, la force centrale (conservative) $\vec{f} = f \vec{e}_r$ est associée à une énergie potentielle \mathcal{E}_p telle que :

$$f = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \Rightarrow \vec{f} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{e}_r \quad (96)$$

2. L'énergie mécanique de M est définie par :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v^2 + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m (\vec{v})^2 + \mathcal{E}_p$$

La variation de cette énergie est donnée par :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = m \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_p}{dt}$$

et $\frac{d\vec{v}}{dt}$ s'identifie à l'accélération $\vec{\gamma}$ de M , au demeurant soumise à la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \vec{\gamma} = \vec{f} \Rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{f} + \frac{d\mathcal{E}_p}{dt} \quad (97)$$

Quant à l'expression (96), elle révèle que :

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \vec{e}_r \cdot \vec{v}$$

et, notamment, en coordonnées cylindro-polaires :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{k} &\Rightarrow \vec{e}_r \cdot \vec{v} = \dot{r} = \frac{dr}{dt} \\ &\Rightarrow \vec{f} \cdot \vec{v} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \times \frac{dr}{dt} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dt} \end{aligned}$$

En substituant ce terme dans l'équation (97), on obtient finalement :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_m = \text{cte}$$

3. D'après le théorème du moment cinétique, la variation du moment cinétique $\vec{\sigma}$ est liée au moment de \vec{f} en O :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{f}$$

et, puisque la force est supposée centrale :

$$\vec{f} \parallel \overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma} = c\vec{e}$$

En outre, la définition de $\vec{\sigma} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$ montre que \overrightarrow{OM} demeure perpendiculaire à la direction constante de $\vec{\sigma}$; le mouvement est plan.

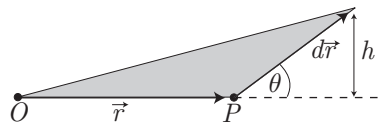
4. (a) En coordonnées polaires, la position $\vec{r} = r\vec{e}_r$ et la vitesse $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ sont à l'origine de la définition de $\vec{\sigma}$:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \vec{r} \wedge m\vec{v} = (r\vec{e}_r) \wedge (m\dot{r}\vec{e}_r + mr\dot{\theta}\vec{e}_\theta) \\ &= \underbrace{mr\dot{r}\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r}_{=\vec{0}} + mr^2\dot{\theta}\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \Rightarrow \sigma = mr^2\dot{\theta} \|\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta\| \end{aligned}$$

Les vecteurs de base \vec{e}_r et \vec{e}_θ étant unitaires et perpendiculaires, il s'ensuit que :

$$\|\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta\| = 1 \Rightarrow \sigma = mr^2\dot{\theta} \quad (98)$$

Pendant une durée dt , le point P se déplace de $d\vec{r} = \vec{v} dt$.



Dans le même temps, le rayon-vecteur \vec{r} balaie la surface :

$$dS = \frac{1}{2} OP \times h = \frac{1}{2} r \times dr \sin \theta = \frac{1}{2} r \times v \sin \theta dt$$

Or :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} = m\vec{r} \wedge \vec{v} &\Rightarrow \sigma = mrv \sin \theta \text{ car } \theta = (\vec{r}, \vec{v}) \\ &\Rightarrow \Gamma = \frac{\sigma}{m} = rv \sin \theta \Rightarrow dS = \frac{1}{2} \times \Gamma \times dt \end{aligned}$$

et, puisque σ est constant, Γ l'est également (il s'agit de la constante de la loi des aires). C'est pourquoi, pendant une période T , le rayon-vecteur balaie une aire :

$$S = \frac{\Gamma}{2} \times T \text{ avec } \Gamma = \frac{\sigma}{m} \quad (99)$$

- (b) L'expression de la vitesse \vec{v} , en coordonnées polaires, a pour conséquence :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$$

où :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \times \frac{dr}{d\theta} = \dot{\theta} \frac{dr}{d\theta}$$

et, conformément au résultat (98) :

$$\dot{\theta} = \frac{\sigma}{mr^2} \Rightarrow \dot{r} = \frac{\sigma}{m} \times \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \Rightarrow \dot{r} = -\frac{\sigma}{m} \times \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\sigma}{m} \frac{du}{d\theta}$$

De même, ce résultat fournit :

$$r^2 \dot{\theta} = r^2 \times \frac{\sigma^2}{m^2 r^4} = \frac{\sigma^2}{m^2 r^2} = \frac{\sigma^2}{m^2} \times u^2$$

et c'est pour cette raison que :

$$v^2 = \frac{\sigma^2}{m^2} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right]$$

d'où découle l'expression de l'énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \mathcal{E}_c = \frac{\sigma^2}{2m} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] \quad (100)$$

II- Cas de la gravitation

1. La planète, de masse m , étant attirée par le Soleil, de masse M , son énergie potentielle vaut : $\mathcal{E}_p = -\frac{GMm}{r}$, c'est-à-dire, en posant $GM = g$ et $\frac{1}{r} = u$:

$$\mathcal{E}_p = -mgu \quad (101)$$

2. L'énergie mécanique, au demeurant constante, est la somme des énergies cinétique et potentielle, dont les expressions sont explicitées dans les identités (100) et (101) :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_m &\Rightarrow \frac{\sigma^2}{2m} \left[\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \right] - mgu = \mathcal{E}_m \\ &\Rightarrow \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 - \frac{2m^2g}{\sigma^2} u = \frac{2m\mathcal{E}_m}{\sigma^2} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 - \alpha u = \beta \text{ avec } \alpha = \frac{2m^2g}{\sigma^2} \text{ et } \beta = \frac{2m\mathcal{E}_m}{\sigma^2} \quad (102)$$

3. La dérivation, par rapport à θ , de l'équation différentielle précédente se traduit par :

$$2 \frac{du}{d\theta} \frac{d^2u}{d\theta^2} + 2 \frac{du}{d\theta} \times u - \alpha \frac{du}{d\theta} = 0$$

c'est-à-dire, après simplification par $2 \frac{du}{d\theta}$:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{\alpha}{2}$$

La solution générale de cette équation différentielle :

$$u = \frac{\alpha}{2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

présente deux constantes (A et θ_0) adaptées aux conditions initiales. Communément, on adopte pour θ_0 la valeur nulle, de sorte que :

$$u = \frac{\alpha}{2} + A \cos \theta = \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{2A}{\alpha} \cos \theta \right)$$

En notant $e = \frac{2A}{\alpha}$ l'excentricité, une conique d'équation :

$$u = \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta) = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \theta$$

apparaît avec un paramètre :

$$p = \frac{2}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{p} \tag{103}$$

En outre, l'expression de p doit également être solution de l'équation (102) :

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 - \alpha u = \beta$$

avec :

$$u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \theta \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{p} \sin \theta$$

Ce faisant :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{e^2}{p^2} \sin^2 \theta + \frac{1}{p^2} + \frac{e^2}{p^2} \cos^2 \theta + \frac{2e}{p^2} \cos \theta - \frac{\alpha}{p} - \frac{\alpha e}{p} \cos \theta \\ &= \frac{e^2}{p^2} + \frac{1}{p^2} + \frac{2e}{p^2} \cos \theta - \frac{2}{p^2} - \frac{2e}{p^2} \cos \theta \text{ car } \alpha = \frac{2}{p} \\ &= \frac{e^2 - 1}{p^2} = \frac{\alpha^2}{4} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$e^2 - 1 = \frac{4\beta}{\alpha^2} \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{4\beta}{\alpha^2}}$$

et, compte tenu des expressions (102) de α et β :

$$\alpha = \frac{2m^2g}{\sigma^2} \text{ et } \beta = \frac{2m \mathcal{E}_m}{\sigma^2}$$

l'excentricité vérifie aussi :

$$e^2 - 1 = 4 \times \frac{2m \mathcal{E}_m}{\sigma^2} \times \frac{\sigma^4}{4m^4g^2} = \frac{2 \mathcal{E}_m \sigma^2}{m^3g^2} \Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{2 \mathcal{E}_m \sigma^2}{m^3g^2}}$$

4. Étant donné que :

$$1 - e^2 = -\frac{2\mathcal{E}_m\sigma^2}{m^3g^2} \text{ et } p = \frac{2}{\alpha} = \frac{\sigma^2}{m^2g}$$

le demi-grand axe est donné par :

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = -\frac{\sigma^2}{m^2g} \times \frac{m^3g^2}{2\mathcal{E}_m\sigma^2} \Rightarrow a = -\frac{mg}{2\mathcal{E}_m}$$

ce qui conduit à l'expression du demi-petit axe (avec $\mathcal{E}_m = -|\mathcal{E}_m| < 0$) :

$$b = a\sqrt{1 - e^2} = -\frac{mg}{2\mathcal{E}_m} \sqrt{-\frac{2\mathcal{E}_m\sigma^2}{m^3g^2}} \Rightarrow b = \sqrt{-\frac{\sigma^2}{2m\mathcal{E}_m}}$$

5. Pendant une période T , le rayon-vecteur balaie la surface $S = \pi ab$ de l'ellipse, de manière à satisfaire l'identité (99) :

$$\begin{aligned} S = \frac{\sigma}{2m} T &\Rightarrow \pi ab = \frac{\sigma}{2m} T \Rightarrow \sigma T = 2\pi mab \\ &\Rightarrow \sigma^2 T^2 = 4\pi^2 m^2 a^2 b^2 \\ &\Rightarrow \sigma^2 T^2 = 4\pi^2 m^2 a^4 (1 - e^2) \text{ car } b = a\sqrt{1 - e^2} \\ &\Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 \times a (1 - e^2) m^2} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} a(1 - e^2) &= -\frac{mg}{2\mathcal{E}_m} \times \frac{-2\mathcal{E}_m\sigma^2}{m^3g^2} = \frac{\sigma^2}{m^2g} \\ &\Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{\sigma^2}{4\pi^2 m^2} \times \frac{m^2g}{\sigma^2} \Rightarrow \frac{a^3}{T^2} = \frac{g}{4\pi^2} \end{aligned}$$

ce qui permet de confirmer la troisième loi de Kepler :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

● 169 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. (a) En notant $\vec{OP} = r\vec{e}_r$ le vecteur position de P , la force électrostatique exercée par le noyau sur le proton se présente sous la forme :

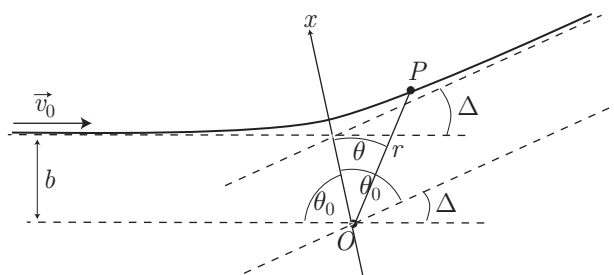
$$\vec{f} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

où ϵ_0 désigne la permittivité électrique du vide.

On remarque, par ailleurs, que le signe positif des charges q et Q rend compte du caractère répulsif de cette force.

(b) En coordonnées polaires, la distance $r = OP$ est donnée par la loi :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow 1 + e \cos \theta = \frac{p}{r}$$



Lorsque le proton est infiniment éloigné du noyau, r tend vers l'infini tandis que θ prend la valeur θ_0 ; l'équation polaire de la trajectoire du proton devient :

$$1 + \cos \theta_0 = 0 \Rightarrow \cos \theta_0 = -\frac{1}{e} \quad (104)$$

Or, le schéma ci-dessus révèle que $\theta < \frac{\pi}{2}$ ce qui impose :

$$\cos \theta_0 > 0 \Rightarrow e < 0$$

et qui conduit à écrire :

$$e = -|e| \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{1}{|e|}$$

En outre, ce même schéma suggère que la valeur minimale r_{\min} de $r = \frac{p}{1 - |e| \cos \theta}$ se situe en $\theta = 0$, ce qui revient à poser :

$$r_{\min} = \frac{p}{1 - |e|} \Rightarrow p = r_{\min} \times (1 - |e|)$$

où $|e| > 1$ pour une trajectoire hyperbolique et $r_{\min} > 0$ (il s'agit d'une distance). Il apparaît ainsi que :

$$p < 0$$

(c) Les angles θ_0 et Δ , repérés autour du point O , sont tels que :

$$2\theta_0 + \Delta = \pi \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2} - \frac{\Delta}{2}$$

d'où l'on déduit que :

$$\cos \theta_0 = \sin \left(\frac{\Delta}{2} \right) \text{ et } \sin \theta_0 = -\cos \left(\frac{\Delta}{2} \right) \quad (105)$$

Ce faisant, le résultat (104) s'écrit aussi :

$$\cos \theta_0 = -\frac{1}{e} = \frac{1}{|e|} \Rightarrow \sin \left(\frac{\Delta}{2} \right) = \frac{1}{|e|} \quad (106)$$

2. (a) Les vecteurs position \vec{r} et vitesse \vec{v} de P définissent le moment cinétique du proton en O :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{r} \wedge m\vec{v} = m\vec{C} \text{ avec } \vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v}$$

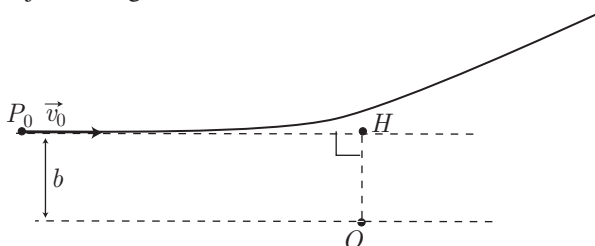
En outre, conformément au théorème du moment cinétique, la variation de $\vec{\sigma}_O$ est liée au moment de \vec{f} en O :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) = \vec{OP} \wedge \vec{f} = \vec{0} \text{ car } \vec{OP} \parallel \vec{f}$$

Aussi, l'identité $\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{0}$ suffit-elle à montrer que $\vec{\sigma}_O$ est un vecteur constant, en direction et en norme. C'est pourquoi :

$$\vec{C} = \frac{\vec{\sigma}_O}{m} \Rightarrow C = \|\vec{C}\| = \frac{\|\vec{\sigma}_O\|}{m} = \text{cte}$$

(b) Soit H le projeté orthogonal de O sur la droite directrice du vecteur \vec{v}_0 .



Lorsque le proton occupe une position P_0 très éloignée de O , le vecteur \vec{C} s'écrit :

$$\vec{C} = \vec{r} \wedge \vec{v} = \vec{OP}_0 \wedge \vec{v}_0 = (\vec{OH} + \vec{HP}_0) \wedge \vec{v}_0 = \vec{OH} \wedge \vec{v}_0 + \vec{HP}_0 \wedge \vec{v}_0$$

où :

$$\vec{HP}_0 \wedge \vec{v}_0 = \vec{0} \text{ car } \vec{HP}_0 \parallel \vec{v}_0$$

et :

$$\|\vec{OH} \wedge \vec{v}_0\| = \|\vec{OH}\| \times \|\vec{v}_0\| \times \sin(\vec{OH}, \vec{v}_0) = \|\vec{OH}\| \times \|\vec{v}_0\| \text{ car } \vec{OH} \perp \vec{v}_0$$

Il s'ensuit que :

$$\vec{C} = \vec{OH} \wedge \vec{v}_0 \Rightarrow C = \|\vec{OH} \wedge \vec{v}_0\| = \|\vec{OH}\| \times \|\vec{v}_0\|$$

soit, en remarquant que $\|\vec{OH}\| = b$ et $\|\vec{v}_0\| = v_0$:

$$C = b \times v_0 \quad (107)$$

3. (a) La première formule de Binet, rappelée par l'énoncé :

$$\vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + Cu \vec{e}_\theta \text{ avec } u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \theta$$

donne accès à la norme $v = \|\vec{v}\|$:

$$\begin{aligned} v^2 &= C^2 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + C^2 u^2 \text{ avec } \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{p} \sin \theta \\ &= \frac{C^2 e^2}{p^2} \sin^2 \theta + C^2 u^2 \end{aligned}$$

et notamment, lorsque P occupe la position du point P_0 , r tend vers l'infini tandis que θ prend la valeur θ_0 et v la valeur v_0 :

$$v_0^2 = \frac{C^2 e^2}{p^2} \sin^2 \theta_0 + C^2 \times \lim_{r \rightarrow \infty} [u^2]$$

où : $u = \frac{1}{r} \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} [u^2] = 0$ suffit à obtenir l'expression suivante :

$$v_0^2 = \frac{C^2 e^2}{p^2} \sin^2 \theta_0 \Rightarrow v_0 = \left| \frac{C e}{p} \right| \times |\sin \theta_0|$$

dans laquelle $\sin \theta_0$ peut être remplacé par $-\cos\left(\frac{\Delta}{2}\right)$, conformément au résultat (105) :

$$\sin \theta_0 = -\cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) \Rightarrow v_0 = \left| \frac{C e}{p} \right| \times \cos\left(\frac{\Delta}{2}\right)$$

(b) Cette relation : $\cos\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{v_0 |p|}{|C e|}$ permet d'obtenir :

$$\tan\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \sin\left(\frac{\Delta}{2}\right) \times \frac{1}{\cos\left(\frac{\Delta}{2}\right)} = \frac{1}{|e|} \times \frac{|C| |e|}{v_0 |p|}$$

soit encore :

$$\tan\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{|C|}{v_0 |p|} = \frac{C}{v_0 |p|} \tag{108}$$

Cependant, l'expression de p est jusqu'à présent inconnue, mais elle peut être obtenue à l'aide de la seconde relation de Binet (relative à l'accélération $\vec{\gamma}$ de P), également fournie par l'énoncé :

$$\vec{\gamma} = -C^2 u^2 \left(\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) \vec{e}_r$$

avec :

$$u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos \theta \Rightarrow \frac{d^2 u}{d\theta^2} = -\frac{e}{p} \cos \theta \Rightarrow \vec{\gamma} = -\frac{C^2}{p} u^2 \vec{e}_r$$

Ce vecteur accélération obéit, de surcroît, à la loi fondamentale de la dynamique :

$$\begin{aligned} m \vec{\gamma} = \vec{f} &\Rightarrow -\frac{m C^2}{p} u^2 \vec{e}_r = \frac{q Q}{4\pi \epsilon_0} u^2 \vec{e}_r \\ &\Rightarrow -\frac{m C^2}{p} = \frac{q Q}{4\pi \epsilon_0} \\ &\Rightarrow p = -\frac{4\pi \epsilon_0 m C^2}{q Q} \Rightarrow |p| = \frac{4\pi \epsilon_0 m C^2}{q Q} \end{aligned}$$

De cette manière, le résultat (108) devient :

$$\tan\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{C}{v_0} \times \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m C^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m C v_0}$$

où $C = b v_0$, conformément à l'égalité (107) :

$$\tan\left(\frac{\Delta}{2}\right) = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m b v_0^2}$$

(c) Dans le cas où $b = 0$ (le proton est dirigé directement vers le centre O du noyau) :

$$\lim_{b \rightarrow 0} \left[\tan\left(\frac{\Delta}{2}\right) \right] = +\infty$$

ce qui admet pour solution :

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \Delta = \pi$$

Une telle déviation signifie que le proton est alors envoyé dans sa direction de départ, ce qui paraît assez réaliste, compte tenu de la nature répulsive de la force électrostatique :



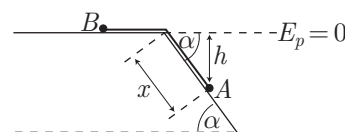
● 170 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

Soient v_A et v_B les vitesses instantanées des points A et B , permettant de définir l'énergie cinétique du système :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{m_A + m_B}{2} v_B^2$$

car $v_A = v_B$ tant que le fil reste inextensible.

On choisit arbitrairement le plan horizontal comme origine des énergies potentielles de pesanteur, de sorte que l'énergie potentielle du système vaut :



$$E_p = E_p(A) + E_p(B) = -m_A g h = -m_A g x \sin \alpha$$

Par définition, l'énergie mécanique du système vaut :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{m_A + m_B}{2} v_B^2 - m_A g x \sin \alpha$$

Or, l'absence de frottements annule toute force dissipative extérieure au système, tandis que le caractère inextensible du fil annule le travail des forces intérieures au système. C'est pourquoi l'énergie mécanique est constante et conserve sa valeur initiale (lorsque $x = a, v_B = 0$) :

$$E_m = -m_A g a \sin \alpha$$

Ce faisant :

$$\frac{m_A + m_B}{2} v_B^2 - m_A g x \sin \alpha = -m_A g a \sin \alpha \Rightarrow v_B^2 = \frac{2m_A g \sin \alpha}{m_A + m_B} (x - a)$$

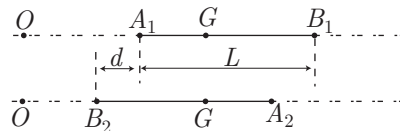
Notamment, lorsque B quitte le plan horizontal :

$$\begin{cases} v_B = v \\ x = L \end{cases} \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2m_A g \sin \alpha}{m_A + m_B} (L - a)}$$

● 171 Lycée Poincaré, Nancy

Soient :

- A_1, B_1 les positions initiales de A et B ;
- A_2, B_2 les positions finales de A et B ;
- G le centre d'inertie du système $[A, B]$
- O un point fixe d'un référentiel galiléen, servant à repérer les positions des divers points.



Compte tenu du théorème de la quantité de mouvement, la variation de la vitesse

$\vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt}$ est liée à la résultante des forces extérieures \vec{F}_{ext} :

$$(m_A + m_B) \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \text{ car } \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

Par suite, la vitesse \vec{v}_G de G est constante et conserve sa vitesse initiale nulle. Il s'ensuit que le point G est immobile, de sorte que le déplacement du canot est caractérisé par :

$$\overrightarrow{A_1 B_2} = \overrightarrow{A_1 G} + \overrightarrow{G B_2}$$

où la définition de G conduit à :

$$\begin{aligned} m_A \overrightarrow{G A_2} + m_B \overrightarrow{G B_2} = \vec{0} &\Rightarrow \overrightarrow{G B_2} = -\frac{m_A}{m_B} \overrightarrow{G A_2} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{A_1 B_2} = \overrightarrow{A_1 G} - \frac{m_A}{m_B} \overrightarrow{G A_2} \end{aligned}$$

En outre, la permutation des positions de A et B se traduit mathématiquement par :

$$\overrightarrow{A_1 B_1} = \overrightarrow{B_2 A_2} \Rightarrow \overrightarrow{A_1 G} + \overrightarrow{G B_1} = \overrightarrow{B_2 G} + \overrightarrow{G A_2}$$

avec :

$$\begin{cases} m_A \overrightarrow{G A_1} + m_B \overrightarrow{G B_1} = \vec{0} \\ m_A \overrightarrow{G A_2} + m_B \overrightarrow{G B_2} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{G B_1} = \frac{m_A}{m_B} \overrightarrow{A_1 G} \\ \overrightarrow{B_2 G} = \frac{m_A}{m_B} \overrightarrow{G A_2} \end{cases}$$

d'où il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1G} + \frac{m_A}{m_B} \overrightarrow{A_1G} &= \frac{m_A}{m_B} \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GA_2} \Rightarrow \left(1 + \frac{m_A}{m_B}\right) \overrightarrow{A_1G} = \left(\frac{m_A}{m_B} + 1\right) \overrightarrow{GA_2} \\ &\Rightarrow \overrightarrow{A_1G} = \overrightarrow{GA_2}\end{aligned}$$

en conséquence de quoi :

$$\overrightarrow{A_1B_2} = \overrightarrow{A_1G} - \frac{m_A}{m_B} \overrightarrow{GA_2} = \overrightarrow{A_1G} - \frac{m_A}{m_B} \overrightarrow{A_1G} = \frac{m_B - m_A}{m_B} \overrightarrow{A_1G}$$

Enfin, la définition du centre d'inertie G conduit à :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1G} = \overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{A_1O} + \frac{m_A \overrightarrow{OA_1} + m_B \overrightarrow{OB_1}}{m_A + m_B} \\ &= \frac{m_B (\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OB_1})}{m_A + m_B} = \frac{m_B}{m_A + m_B} \overrightarrow{A_1B_1}\end{aligned}$$

soit, finalement :

$$\overrightarrow{A_1B_2} = \frac{m_B - m_A}{m_B} \times \frac{m_B}{m_A + m_B} \overrightarrow{A_1B_1} \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_2} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \overrightarrow{B_1A_1}$$

Le déplacement $d = \|\overrightarrow{A_1B_2}\|$ s'exprime alors, de manière simple, en fonction de $L = \|\overrightarrow{B_1A_1}\|$:

$$d = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \times L \quad \text{car} \quad \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} > 0$$

et ce déplacement se fait dans le sens de $\overrightarrow{B_1A_1}$ (le canot recule par rapport à la personne dont la masse est la plus importante).

● 172 ————— Lycée Fabert, Metz

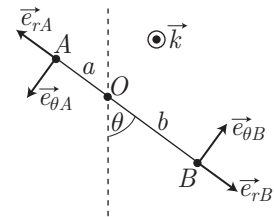
1. Soient $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$ les positions des points A et B , de vitesses respectives \vec{v}_A et \vec{v}_B .

En coordonnées polaires, ces vecteurs s'écrivent :

$$\vec{r}_A = a \vec{e}_{rA} \Rightarrow \vec{v}_A = a \dot{\theta} \vec{e}_{\theta A} \quad \text{avec} \quad \vec{e}_{rA} \wedge \vec{e}_{\theta A} = \vec{k}$$

et :

$$\vec{r}_B = b \vec{e}_{rB} \Rightarrow \vec{v}_B = b \dot{\theta} \vec{e}_{\theta B} \quad \text{avec} \quad \vec{e}_{rB} \wedge \vec{e}_{\theta B} = \vec{k}$$



Par conséquent, le moment cinétique du système $\{A, B\}$ en O est donné par :

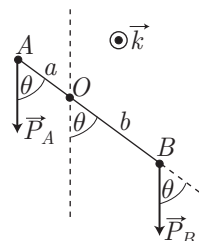
$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_0 &= \vec{r}_A \wedge m_A \vec{v}_A + \vec{r}_B \wedge m_B \vec{v}_B \\ &= (a \vec{e}_{rA}) \wedge (m_A a \dot{\theta} \vec{e}_{\theta A}) + (b \vec{e}_{rB}) \wedge (m_B b \dot{\theta} \vec{e}_{\theta B}) \\ &\Rightarrow \vec{\sigma}_0 = (a^2 m_A + b^2 m_B) \dot{\theta} \vec{k}\end{aligned}$$

2. Les points A et B étant soumis à leurs poids $\vec{P}_A = m_A \vec{g}$ et $\vec{P}_B = m_B \vec{g}$, le moment du poids du système en O est défini par :

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_O &= \vec{OA} \wedge \vec{P}_A + \vec{OB} \wedge \vec{P}_B \\ &= m_A g a \sin \theta \vec{k} - m_B g b \sin \theta \vec{k} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = (am_A - bm_B) g \sin \theta \vec{k}$$



Les positions d'équilibre, lorsqu'elles existent, sont caractérisées par $\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0}$. Le résultat précédent montre qu'il y en a deux, repérées par :

$$\theta_0 = 0 \text{ et } \theta_1 = \pi$$

3. (a) Le théorème du moment cinétique, appliqué au système $\{A, B\}$, conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O &\Rightarrow (a^2 m_A + b^2 m_B) \ddot{\theta} \vec{k} = (am_A - bm_B) \sin \theta \vec{k} \\ &\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{bm_B - am_A}{a^2 m_A + b^2 m_B} \sin \theta = 0 \end{aligned}$$

Au voisinage des positions d'équilibre θ_0 et θ_1 , l'angle θ est caractérisé par ses écarts ε et η , tels que : $\theta = \theta_0 + \varepsilon$ ou $\theta = \theta_1 + \eta$.

- Au voisinage de $\theta_0 = 0$, un développement limité fournit :

$$\sin \theta = \sin(\theta_0 + \varepsilon) \simeq \sin \theta_0 + \varepsilon \cos \theta_0 = \varepsilon \text{ et } \theta = \varepsilon \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$$

auquel cas l'équation différentielle du mouvement se simplifie :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{bm_B - am_A}{a^2 m_A + b^2 m_B} \varepsilon = 0 \tag{109}$$

- De même, au voisinage de $\theta_1 = \pi$, un développement limité montre que :

$$\sin \theta = \sin(\theta_1 + \eta) \simeq \sin \theta_1 + \eta \cos \theta_1 = -\eta \text{ et } \theta = \theta_1 + \eta \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\eta}$$

Dans ce cas, l'équation du mouvement devient :

$$\ddot{\eta} - \frac{bm_B - am_A}{a^2 m_A + b^2 m_B} \eta = 0 \tag{110}$$

- (b) En supposant que $bm_B > am_A$, on convient que : $\frac{bm_B - am_A}{a^2 m_A + b^2 m_B} > 0$, ce qui signifie qu'il existe un nombre réel ω tel que :

$$\omega^2 = \frac{bm_B - am_A}{a^2 m_A + b^2 m_B}$$

Ce faisant, l'équation différentielle (109) : $\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \varepsilon = 0$ admet une solution harmonique :

$$\varepsilon = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

De fait, la tige oscille autour de cette position, qui représente alors un équilibre stable, avec la pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{bm_B - am_A}{a^2m_A + b^2m_B}}$$

En revanche, l'équation (110) :

$$\ddot{\eta} - \omega^2 \eta = 0$$

admet une solution générale :

$$\eta = A' e^{\omega t} + B' e^{-\omega t}$$

monotone croissante avec t ; cet équilibre est instable.

- (c) Le cas $am_A = bm_B$ correspond à celui où le point O est confondu avec le centre d'inertie G du système de points $\{A_1, A_2\}$, car :

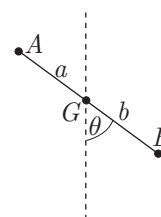
$$\vec{OG} = \frac{m_A \vec{OA} + m_B \vec{OB}}{m_A + m_B} = \vec{0}$$

L'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} = 0$$

révèle que $\dot{\theta}$ est constant.

Notamment, si la tige est abandonnée sans vitesse initiale, $\dot{\theta}$ demeure nul, ce qui signifie que le système reste immobile ; il s'agit d'un *équilibre indifférent*.



● 173 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. On note \vec{k} le vecteur unitaire perpendiculaire au plan des diverses rotations. Les vitesses de la Terre et de la Lune valent, dans le référentiel lié à O :

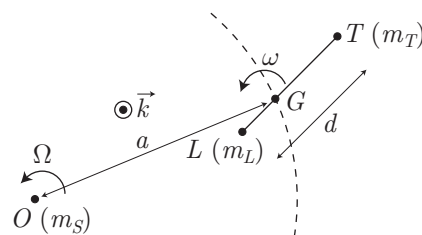
$$\vec{v}_T = \frac{d\vec{OT}}{dt} \text{ et } \vec{v}_L = \frac{d\vec{OL}}{dt}$$

et dans le référentiel barycentrique (lié à G) :

$$\vec{v}_T^* = \frac{d\vec{GT}}{dt} \text{ et } \vec{v}_L^* = \frac{d\vec{GL}}{dt}$$

Par suite :

$$\vec{v}_T = \frac{d\vec{OG}}{dt} + \frac{d\vec{GT}}{dt} = \vec{v}_G + \frac{d\vec{GT}}{dt} \text{ et } \vec{v}_L = \frac{d\vec{OG}}{dt} + \frac{d\vec{GL}}{dt} = \vec{v}_G + \frac{d\vec{GL}}{dt}$$



où $\vec{v}_G = \frac{d\vec{OG}}{dt}$ désigne la vitesse de G dans le référentiel lié à O . L'énergie cinétique du système, dans le référentiel lié au Soleil, est définie par :

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} m_T v_T^2 + \frac{1}{2} m_L v_L^2 \\ &= \frac{m_T}{2} \left(\vec{v}_G + \frac{d\vec{GT}}{dt} \right)^2 + \frac{m_L}{2} \left(\vec{v}_G + \frac{d\vec{GL}}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{m_T}{2} \left[v_G^2 + 2 \vec{v}_G \cdot \frac{d\vec{GT}}{dt} + (v_T^*)^2 \right] + \frac{m_L}{2} \left[v_G^2 + 2 \vec{v}_G \cdot \frac{d\vec{GL}}{dt} + (v_L^*)^2 \right] \\ &= \frac{m_T + m_L}{2} v_G^2 + \vec{v}_G \cdot \left(m_T \frac{d\vec{GT}}{dt} + m_L \frac{d\vec{GL}}{dt} \right) + \frac{1}{2} m_T (v_T^*)^2 + \frac{1}{2} m_L (v_L^*)^2 \end{aligned}$$

Dans cette expression, la définition du centre d'inertie G fournit :

$$m_T \frac{d\vec{GT}}{dt} + m_L \frac{d\vec{GL}}{dt} = \frac{d}{dt} (m_T \vec{GT} + m_L \vec{GL}) = \vec{0} \text{ car } m_T \vec{GT} + m_L \vec{GL} = \vec{0}$$

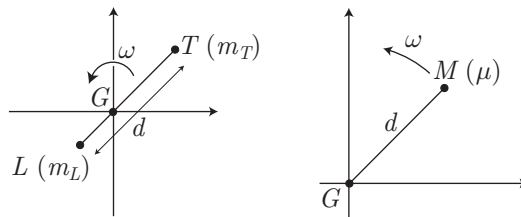
et d'autre part :

$$E_c^* = \frac{1}{2} m_T (v_T^*)^2 + \frac{1}{2} m_L (v_L^*)^2$$

définit l'énergie cinétique barycentrique du système. C'est pourquoi :

$$E_c = \frac{m_T + m_L}{2} v_G^2 + E_c^* \tag{111}$$

Le mouvement de rotation uniforme de G autour de O suggère que : $v_G = a \Omega$ et, d'autre part, le système $\{T, L\}$ peut être remplacé, dans le référentiel barycentrique, par un point fictif M , de masse réduite $\mu = \frac{m_T m_L}{m_T + m_L}$, et tel que $\vec{GM} = \vec{LT}$ à tout instant.



Ce point fictif étant alors animé d'un mouvement de rotation uniforme autour de G , à la vitesse angulaire ω , sa vitesse vaut $v_M^* = d \times \omega$ et son énergie cinétique est donnée par :

$$E_c^* = \frac{1}{2} \mu (v_M^*)^2 = \frac{m_T m_L}{2 (m_T + m_L)} d^2 \omega^2$$

Finalement, l'identité (111) fournit l'énergie cinétique du système :

$$E_c = \frac{m_T + m_L}{2} a^2 \Omega^2 + \frac{m_T m_L}{2 (m_T + m_L)} d^2 \omega^2$$

2. Dans le référentiel lié au Soleil, le moment cinétique du système $\{T, L\}$ en O est défini par :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \vec{OT} \wedge m_T \frac{d\vec{OT}}{dt} + \vec{OL} \wedge m_L \frac{d\vec{OL}}{dt} \\ &= (\vec{OG} + \vec{GT}) \wedge m_T \left(\vec{v}_G + \frac{d\vec{GT}}{dt} \right) + (\vec{OG} + \vec{GL}) \wedge m_L \left(\vec{v}_G + \frac{d\vec{GL}}{dt} \right) \\ \text{car } \frac{d\vec{OT}}{dt} &= \frac{d\vec{OG}}{dt} + \frac{d\vec{GT}}{dt} \text{ et } \frac{d\vec{OL}}{dt} = \frac{d\vec{OG}}{dt} + \frac{d\vec{GL}}{dt}\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en développant cette expression :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \vec{OG} \wedge m_T \vec{v}_G + m_T \vec{GT} \wedge \vec{v}_G + \vec{OG} \wedge m_T \frac{d\vec{GT}}{dt} + \vec{GT} \wedge m_T \frac{d\vec{GT}}{dt} \\ &\quad + \vec{OG} \wedge m_L \vec{v}_G + m_L \vec{GL} \wedge \vec{v}_G + \vec{OG} \wedge m_L \frac{d\vec{GL}}{dt} + \vec{GL} \wedge m_L \frac{d\vec{GL}}{dt}\end{aligned}$$

En remarquant que le moment cinétique du système dans le référentiel barycentrique est défini par :

$$\vec{\sigma}_G^* = \vec{GT} \wedge m_T \vec{v}_T^* + \vec{GL} \wedge m_L \vec{v}_L^*$$

on trouve ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}_O &= \vec{OG} \wedge (m_T + m_L) \vec{v}_G + (m_T \vec{GT} + m_L \vec{GL}) \wedge \vec{v}_G \\ &\quad + \vec{OG} \wedge \left(m_T \frac{d\vec{GT}}{dt} + m_L \frac{d\vec{GL}}{dt} \right) + \vec{\sigma}_G^*\end{aligned}$$

La définition du centre d'inertie G fournit directement : $m_T \vec{GT} + m_L \vec{GL} = \vec{0}$ et :

$$\frac{d}{dt} (m_T \vec{GT} + m_L \vec{GL}) = \vec{0} \Rightarrow m_T \frac{d\vec{GT}}{dt} + m_L \frac{d\vec{GL}}{dt} = \vec{0}$$

ce qui simplifie l'expression de $\vec{\sigma}_O$:

$$\vec{\sigma}_O = \vec{OG} \wedge m \vec{v}_G + \vec{\sigma}_G^* \text{ avec } m = m_T + m_L$$

Le premier terme de $\vec{\sigma}_O$ désigne le moment cinétique en O du point G affecté de la masse m ; compte tenu du mouvement de rotation de G , ce moment devient :

$$\vec{OG} \wedge m \vec{v}_G = m a^2 \Omega \vec{k} = (m_T + m_L) a^2 \Omega \vec{k}$$

En revanche, $\vec{\sigma}_G^*$ étant un moment cinétique barycentrique, il s'identifie au moment cinétique du point fictif M , de masse réduite μ , qui effectue une rotation uniforme autour de G (avec une vitesse angulaire ω et un rayon d). Il en résulte que :

$$\vec{v}_G^* = \mu d^2 \omega \vec{k} \text{ avec } \mu = \frac{m_T m_L}{m_T + m_L}$$

Finalement :

$$\vec{\sigma}_O = (m_T + m_L) a^2 \Omega \vec{k} + \frac{m_T m_L d^2}{m_T + m_L} \omega \vec{k}$$

● **174** ————— **Concours Centrale-Supélec**

1. La loi fondamentale de la dynamique peut être exprimée sur les points A_1 et A_2 :

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{f}_{12} \text{ et } m_1 \vec{a}_1 = \vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}$$

car, en vertu du principe des actions réciproques, la force \vec{f}_{21} que A_2 exerce sur A_1 est opposée à \vec{f}_{12} ; on pourra également exprimer \vec{f}_{12} en fonction de m_1, m_2, r, g

et le vecteur unitaire $\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{A_1 A_2}}{A_1 A_2}$:

$$\vec{f}_{12} = -\frac{m_1 m_2 g}{r^2} \vec{e}_r$$

2. La somme des deux relations précédentes donne :

$$\begin{aligned} m_2 \vec{a}_2 + m_1 \vec{a}_1 = \vec{0} &\Rightarrow m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OA_2}}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OA_1}}{dt^2} = \vec{0} \\ &\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} (m_2 \overrightarrow{OA_2} + m_1 \overrightarrow{OA_1}) = \vec{0} \\ &\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} [(m_1 + m_2) \overrightarrow{OG} + m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2}] = \vec{0} \end{aligned}$$

Or, puisque G est le centre d'inertie de $\{A_1, A_2\}$, alors : $m_1 \overrightarrow{GA_1} + m_2 \overrightarrow{GA_2} = \vec{0}$, ce qui simplifie l'expression précédente, en posant $m = m_1 + m_2$:

$$m \frac{d^2 \overrightarrow{OG}}{dt^2} = \vec{0} \Rightarrow \frac{d \overrightarrow{OG}}{dt} = \vec{cte}$$

Le centre de masse possède donc une vitesse constante (ce qui paraissait évident, puisque le système $\{A_1, A_2\}$ n'est soumis à aucune action extérieure).

3. Les deux relations de la première question peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \overrightarrow{OA_2}}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \vec{f}_{12} \\ \frac{d^2 \overrightarrow{OA_1}}{dt^2} = -\frac{1}{m_1} \vec{f}_{12} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} (\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{f}_{12}$$

En posant alors : $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, où μ désigne la *masse réduite* du système $\{A_1, A_2\}$, et :

$$\vec{r} = \overrightarrow{A_1 A_2} = \overrightarrow{A_1 O} + \overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1}$$

l'équation précédente devient :

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_{12} \tag{112}$$

4. La variation de l'énergie potentielle E_p du système est liée au travail de la seule force interne \vec{f}_{12} :

$$dE_p = -\delta W_{\text{int}} = -\vec{f}_{12} \cdot d\vec{A}_1 A_2$$

où, en coordonnées cylindriques :

$$d\vec{A}_1 A_2 = d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$$

en conséquence de quoi :

$$dE_p = \frac{m_1 m_2 g}{r^2} dr \Rightarrow \frac{dE_p}{dr} = \frac{m_1 m_2 g}{r^2}$$

Cette équation montre qu'il existe une constante K telle que :

$$E_p = -\frac{m_1 m_2 g}{r} + K$$

et dont la valeur tient compte de l'annulation de E_p lorsque r devient infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{m_1 m_2 g}{r} + K \right) = 0 \Rightarrow K = 0$$

De fait, il reste :

$$E_p = -\frac{m_1 m_2 g}{r}$$

De plus, compte tenu de la définition de G dans le référentiel barycentrique :

$$\begin{aligned} m_1 \vec{G}A_1 + m_2 \vec{G}A_2 = \vec{0} &\Rightarrow m_1 \frac{d\vec{G}A_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{G}A_2}{dt} = \vec{0} \\ &\Rightarrow m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_1^* = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_2^* \end{aligned} \quad (113)$$

et :

$$\vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* = \frac{d\vec{G}A_2}{dt} - \frac{d\vec{G}A_1}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{A}_1 G + \vec{G}A_2) = \frac{d\vec{r}}{dt} \Rightarrow \vec{v}_2^* - \vec{v}_1^* = \vec{v}^* \quad (114)$$

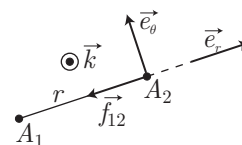
En utilisant la relation (113) pour remplacer \vec{v}_1^* qui intervient dans la relation (114), on trouve :

$$\vec{v}_2^* \left(1 + \frac{m_2}{m_1} \right) = \vec{v}^* \Rightarrow m_2 \vec{v}_2^* \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) = \vec{v}^* \Rightarrow \vec{v}_2^* = \frac{\mu}{m_2} \vec{v}^* \quad (115)$$

La relation (113) conduit alors à :

$$\vec{v}_1^* = -\frac{\mu}{m_1} \vec{v}^* \quad (116)$$

De plus, l'énergie cinétique barycentrique : $E_c^* = \frac{1}{2} (m_1 v_1^{*2} + m_2 v_2^{*2})$ devient,



compte tenu des résultats (115) et (116) :

$$E_c^* = \frac{1}{2} \left(m_1 \frac{\mu^2}{m_1^2} + m_2 \frac{\mu^2}{m_2^2} \right) v^{*2} = \frac{1}{2} \mu^2 v^{*2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$\Rightarrow E_c^* = \frac{1}{2} \mu v^{*2} \text{ puisque } \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} = \frac{1}{\mu}$$

L'énergie totale dans le référentiel barycentrique vaut par conséquent :

$$E^* = E_p(r) + E_c^* = \frac{1}{2} \mu v^{*2} - \frac{m_1 m_2 g}{r}$$

En remarquant que :

$$\vec{f}_{12} \cdot d\vec{r} = -\frac{m_1 m_2 g}{r^2} dr = d\left(\frac{m_1 m_2 g}{r}\right)$$

la différentielle de E^* prend la forme :

$$dE^* = \frac{1}{2} \mu d(v^*)^2 - d\left(\frac{m_1 m_2 g}{r}\right) = \mu \vec{v}^* \cdot d\vec{v}^* - \vec{f}_{12} \cdot d\vec{r}$$

si bien que :

$$\frac{dE^*}{dt} = \mu \vec{v}^* \cdot \frac{d\vec{v}^*}{dt} - \vec{f}_{12} \cdot \vec{v}^* = \vec{v}^* \cdot \left(\mu \frac{d\vec{v}^*}{dt} - \vec{f}_{12} \right) = 0$$

puisque la relation (112) a pour conséquence : $\mu \frac{d\vec{v}^*}{dt} = \vec{f}_{12}$. Aussi :

$$\frac{dE^*}{dt} = 0$$

suffit à prouver la conservation de l'énergie mécanique du système.

5. Par définition, le moment cinétique du système, dans le référentiel barycentrique, s'écrit :

$$\vec{\sigma}^* = \overrightarrow{GA_1} \wedge m_1 \vec{v}_1^* + \overrightarrow{GA_2} \wedge m_2 \vec{v}_2^*$$

où l'on peut utiliser les relations (115) et (116) :

$$\begin{cases} \vec{v}_2^* = \frac{\mu}{m_2} \vec{v}^* \\ \vec{v}_1^* = -\frac{\mu}{m_1} \vec{v}^* \end{cases} \Rightarrow \vec{\sigma}^* = -\overrightarrow{GA_1} \wedge \mu \vec{v}^* + \overrightarrow{GA_2} \wedge \mu \vec{v}^*$$

$$= \left(\overrightarrow{A_1 G} + \overrightarrow{GA_2} \right) \wedge \mu \vec{v}^* = \overrightarrow{A_1 A_2} \wedge \mu \vec{v}^*$$

soit, en utilisant la notation de l'énoncé :

$$\vec{\sigma}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^* \text{ car } \overrightarrow{A_1 A_2} = \vec{r}$$

Utilisons alors cette expression de $\vec{\sigma}^*$ pour calculer sa dérivée temporelle :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \mu \vec{v}^* + \vec{r} \wedge \mu \frac{d\vec{v}^*}{dt} = \vec{v}^* \wedge \mu \vec{v}^* + \vec{r} \wedge \vec{f}_{12}$$

Or, $\vec{f}_{12} = -\frac{m_1 m_2 g}{r^3} \vec{r}$ est nécessairement colinéaire à \vec{r} , en conséquence de quoi :

$$\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\sigma}^* = \vec{\text{cte}}$$

On pourra alors poser :

$$\|\vec{\sigma}^*\| = \mu \|\vec{r} \wedge \vec{v}^*\| = \mu C \Rightarrow \|\vec{r} \wedge \vec{v}^*\| = C = \text{cte} \quad (117)$$

6. Étant donné que :

$$\vec{r}_1 = \vec{OA}_1 = \vec{OG} + \vec{GA}_1 = \vec{OG} + \vec{r}_1^* \text{ et } \vec{r}_2 = \vec{OA}_2 = \vec{OG} + \vec{OA}_2 = \vec{OG} + \vec{r}_2^*$$

le mouvement du système binaire est totalement déterminé si \vec{OG} , \vec{r}_1^* et \vec{r}_2^* sont connus. Cependant, G étant le centre d'inertie :

$$m_1 \vec{r}_1^* + m_2 \vec{r}_2^* = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}_1^* = -\frac{m_2}{m_1} \vec{r}_2^*$$

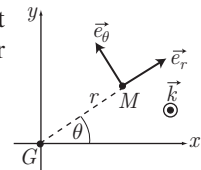
d'où il ressort que :

$$\begin{aligned} \vec{r} = \vec{r}_2^* - \vec{r}_1^* &= \vec{r}_2^* \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = \frac{m_2}{\mu} \vec{r}_2^* \\ \Rightarrow \vec{r}_2^* &= \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \Rightarrow \vec{r}_1^* = -\frac{\mu}{m_1} \vec{r} \\ \Rightarrow &\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{OG} - \frac{\mu}{m_1} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{OG} + \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, l'étude du seul paramètre \vec{r} suffit à déterminer les positions de A_1 et A_2 (on se souvient que G est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme, puisque $\vec{v}_G = \vec{0}$). De plus, la loi (112) : $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}_{12}$ suffit à montrer que l'étude du mouvement du système se ramène à celle du mouvement d'une particule, de masse μ , soumise à une force \vec{f}_{12} et de position \vec{r} .

Afin d'étudier ce mouvement, remarquons que la nature stationnaire de $\vec{\sigma}^*$ permet d'affirmer que ce mouvement est plan, et autorise de fait l'emploi des coordonnées polaires (r, θ) , pour lesquelles correspondent les vecteurs position et vitesse :

$$\vec{r} = r \vec{e}_r \text{ et } \vec{v}^* = \dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta \text{ avec } \omega = \dot{\theta}$$



Ainsi :

$$\vec{r} \wedge \vec{v}^* = (r \vec{e}_r) \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta) = r^2 \omega \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = r^2 \omega \vec{k}$$

et, d'après la relation (117) : $C = r^2 \omega = \text{cte}$.

Enfin, en coordonnées polaires, l'accélération s'écrit :

$$\vec{\gamma}^* = (\ddot{r} - r\omega^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}) \vec{e}_\theta$$

où :

$$C = r^2\omega \Rightarrow \frac{dC}{dt} = 2\dot{r}r\omega + r^2\dot{\omega} = 0 \Rightarrow 2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} = 0$$

simplifie l'expression de l'accélération : $\vec{\gamma}^* = (\ddot{r} - r\omega^2) \vec{e}_r$. De plus :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \text{ car } \omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

Il s'ensuit que :

$$\dot{r} = -C \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Un raisonnement analogue conduit à :

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d\dot{r}}{d\theta} = -\omega C \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

Enfin, étant donné que : $C = r^2\omega \Rightarrow \omega^2 = \frac{C^2}{r^4}$, l'accélération adopte la forme suivante :

$$\vec{\gamma}^* = \left[-\frac{C^2}{r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{C^2}{r^3} \right] \vec{e}_r = -\frac{C^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \vec{e}_r$$

c'est-à-dire, compte tenu de la relation (112) :

$$\begin{aligned} \mu \vec{\gamma}^* = \vec{f}_{12} &\Rightarrow -\frac{\mu C^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \vec{e}_r = -\frac{m_1 m_2 g}{r^2} \vec{e}_r \\ &\Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{m_1 m_2 g}{\mu C^2} \end{aligned}$$

La solution générale de cette équation différentielle :

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta + \frac{m_1 m_2 g}{\mu C^2}$$

se simplifie (à condition de choisir les conditions initiales idoines) :

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta + \frac{m_1 m_2 g}{\mu C^2}$$

qui représente l'équation polaire d'une conique.

Quant à l'énergie cinétique, dans le référentiel barycentrique, elle s'écrit :

$$E_c^* = \frac{1}{2} \mu v^{*2}, \text{ avec :}$$

$$\vec{v}^* = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta \Rightarrow v^{*2} = \dot{r}^2 + r^2\omega^2$$

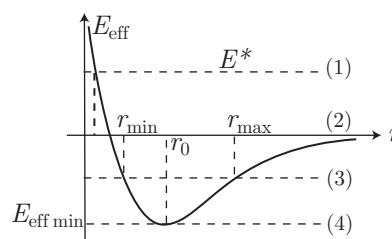
et, puisque $C = r^2\omega \Rightarrow \omega^2 = \frac{C^2}{r^4}$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} v^{*2} = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} &\Rightarrow E_c^* = \frac{1}{2} \mu v^{*2} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{\mu C^2}{2r^2} \\ &\Rightarrow E^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{\mu C^2}{2r^2} - \frac{m_1 m_2 g}{r} \end{aligned}$$

De cette équation, il ressort que :

$$\frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 = E^* - E_{\text{eff}}(r) \text{ avec } E_{\text{eff}} = \frac{\mu C^2}{2r^2} - \frac{m_1 m_2 g}{r} \quad (118)$$

La définition de E_{eff} montre que pour r tendant vers zéro, E_{eff} s'identifie à $\frac{\mu C^2}{2r^2}$, tandis que $E_{\text{eff}} \simeq \frac{-m_1 m_2 g}{r}$ lorsque r devient très grand, de sorte que la courbe représentative de $E_{\text{eff}}(r)$ admet deux courbes asymptotes, qui donnent l'allure représentée ci-contre.



Quatre cas se présentent alors, selon la valeur de E^* , étant donné que $\dot{r}^2 \geq 0$ impose la contrainte : $E^* \geq E_{\text{eff}}$.

- Lorsque $E^* > 0$ (cas 1), le mouvement est hyperbolique.
- Lorsque $E^* = 0$ (cas 2), la trajectoire est une parabole.
- Lorsque $E_{\text{eff min}} < E^* < 0$, (cas 3), la trajectoire est une ellipse qui confère à r deux valeurs extrémales r_{min} et r_{max} .
- Lorsque $E^* = E_{\text{eff min}}$, la trajectoire est circulaire, de rayon $r = r_0$, solution de l'équation : $E^* = E_{\text{eff}}(r_0) = E_{\text{eff min}}$.

7. D'après les conclusions précédentes, r_{max} et r_{min} doivent être solutions de l'équation $E_{\text{eff}} = E^*$, avec $E^* < 0$, c'est-à-dire, en vertu du résultat (118) :

$$\frac{\mu C^2}{2r^2} - \frac{m_1 m_2 g}{r} = E^* \Rightarrow 2E^* r^2 + 2m_1 m_2 g r - \mu C^2 = 0 \quad (119)$$

En notant $\Delta' = (m_1 m_2 g)^2 + 2E^* \mu C^2$, les solutions de cette équation sont :

$$r = \frac{-m_1 m_2 g \pm \sqrt{\Delta'}}{2E^*} = \frac{m_1 m_2 g \mp \sqrt{\Delta'}}{2|E^*|} \text{ car } E^* = -|E^*| < 0$$

Ainsi :

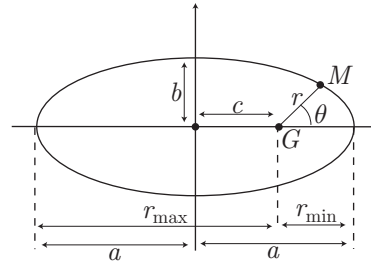
$$r_{\text{max}} = \frac{m_1 m_2 g + \sqrt{\Delta'}}{2|E^*|} \text{ et } r_{\text{min}} = \frac{m_1 m_2 g - \sqrt{\Delta'}}{2|E^*|} \quad (120)$$

La représentation graphique de la trajectoire elliptique montre, au demeurant, que $2a = r_{\max} + r_{\min}$, somme que l'on peut évaluer à partir des résultats (120) :

$$2a = \frac{2m_1m_2g}{2|E^*|} \Rightarrow |E^*| = \frac{m_1m_2g}{2a}$$

soit, compte tenu du signe de E^* :

$$E^* = -|E^*| \Rightarrow E^* = -\frac{m_1m_2g}{2a} \quad (121)$$



De surcroît, l'équation polaire de l'ellipse étant : $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$, il s'ensuit que :

$$\begin{cases} r_{\max} = \frac{p}{1 - e} \\ r_{\min} = \frac{p}{1 + e} \end{cases} \Rightarrow 2a = p \left(\frac{1}{1 - e} + \frac{1}{1 + e} \right) = \frac{2p}{1 - e^2} \Rightarrow p = a (1 - e^2)$$

d'où l'on tire que :

$$r_{\max} = \frac{p}{1 - e} = \frac{a (1 - e^2)}{1 - e} = a (1 + e)$$

Or, puisque r_{\max} est solution de l'équation du second degré (119), cela signifie que l'on peut y substituer r par $a (1 + e)$, ce qui conduit à :

$$2E^* a^2 (1 + e)^2 + 2m_1m_2ga (1 + e) - \mu C^2 = 0$$

avec $E^* = -\frac{m_1m_2g}{2a} \Rightarrow 2m_1m_2g = -4aE^*$

soit encore :

$$\begin{aligned} \mu C^2 &= 2E^* a^2 (1 + e)^2 - 4a^2 (1 + e) E^* \\ &= 2E^* a^2 [(1 + e)^2 - 2(1 + e)] \\ &= 2E^* a^2 [1 + 2e + e^2 - 2 - 2e] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, finalement :

$$\mu C^2 = 2E^* a^2 (e^2 - 1) \quad (122)$$

De cette relation, on tire que $C^2 = \frac{2E^* a^2}{\mu} (e^2 - 1)$, avec $E^* = -\frac{m_1m_2g}{2a}$. Ainsi,

en utilisant la définition de la masse réduite : $\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}$, la relation (122) s'écrit aussi :

$$C^2 = -\frac{2m_1m_2g}{2a} a^2 \times \frac{m_1 + m_2}{m_1m_2} \times (e^2 - 1) \Rightarrow C^2 = ag (m_1 + m_2) (1 - e^2) \quad (123)$$

Enfin, la vitesse aréolaire s'écrit : $\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \vec{r} \wedge \vec{v}^* \Rightarrow dS = \frac{C}{2} dt$ (où dS désigne la surface élémentaire balayée par le rayon-vecteur \overrightarrow{GM} pendant le temps dt). Aussi, en appelant T la période de révolution de la particule fictive M , $S = \frac{C}{2} T$ représente la surface de l'ellipse de demi-axes a et b , c'est-à-dire : $S = \pi ab$. Enfin, le demi-grand axe a est lié au demi-petit axe b par la relation : $b^2 = a^2 (1 - e^2)$, en conséquence de quoi :

$$S = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} \Rightarrow S^2 = \pi^2 a^4 (1 - e^2)$$

Or, puisque $S = \frac{C}{2} T$, cette identité devient, compte tenu du résultat (123) :

$$\frac{C^2 T^2}{4} = \pi^2 a^4 (1 - e^2) \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{C^2} = \frac{4\pi^2 a^4 (1 - e^2)}{ag (m_1 + m_2) (1 - e^2)}$$

ou encore :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{g (m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

Cette relation confirme la troisième loi de Kepler, à condition que $m_2 \ll m_1$ (l'une des composantes du système binaire doit être beaucoup plus massive que l'autre), car, dans ce cas : $\frac{a^3}{T^2} \simeq \frac{m_1 g}{4\pi^2}$, ce qui confirme l'indépendance de $\frac{a^3}{T^2}$ à l'égard de la masse de l'astre le plus léger.

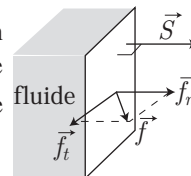
Chapitre 6

Thermodynamique

6.1 Le gaz parfait

6.1.1 Définitions

Un fluide exerce une force \vec{f} sur une surface S , orientée par un vecteur \vec{S} , normal à la surface (vers l'extérieur du fluide) et tel que $S = \|\vec{S}\|$. La force \vec{f} possède alors deux composantes : \vec{f}_n , normale et \vec{f}_t , tangente à S .



Définition 1 On appelle gaz parfait un gaz qui jouit des propriétés suivantes :

- les particules qui composent le gaz sont infiniment petites ; elles ne possèdent pas de volume propre ;
- ces particules n'interagissent pas les unes avec les autres ;
- $\vec{f}_t = \vec{0}$, quel que soit l'état de mouvement du gaz (absence de viscosité).



Sauf indication contraire, les gaz rencontrés en CPGE seront supposés parfaits. Dans le cas contraire, une mention explicite apparaîtrait dans l'énoncé.

Définition 2 On appelle pression exercée par le gaz sur S le coefficient de proportionnalité entre \vec{f}_n et \vec{S} . Dans le cas d'un gaz parfait ou d'un fluide immobile ($\vec{f} = \vec{f}_n$), cette définition devient :

$$\vec{f} = p \times \vec{S} \text{ (pour un gaz parfait ou un fluide immobile).}$$

Définition 3 Une variable d'état (ou paramètre d'état) est une grandeur physique sélectionnée pour décrire un système physique (par exemple la pression, le volume, la concentration ...)

Une telle sélection suppose que les autres paramètres susceptibles d'être choisis sont stationnaires ou sans conséquence (en thermodynamique, pour décrire un gaz, on préférera souvent étudier sa pression plutôt que son odeur).

Définition 4 Une variable extensive est une variable que l'on ne peut mesurer que dans un volume non nul du système (par exemple la quantité de matière, la masse, le volume...)

Les variables extensives sont généralement additives (la réunion de deux systèmes de masses m_1 et m_2 constitue un nouveau système de masse $m = m_1 + m_2$), sauf lorsque des interactions chimiques ou des changements d'état se produisent.

Définition 5 Une variable intensive est une variable qui décrit le système en chacun de ses points (dépourvu de volume, au sens mathématique du terme); par exemple la température, la pression, la concentration,...

Les variables intensives ne sont pas additives (le mélange de deux litres d'eau, portés chacun à 50°C, ne constitue pas un système de deux litres d'eau à 100°C).

Définition 6 On appelle équation d'état une relation entre les variables d'état d'un système.

Notamment, un gaz parfait composé de n moles de particules, à la température T (en Kelvin¹), occupant un volume V (en m³), sous une pression p (en Pa)² est décrit, à l'équilibre, par la fonction d'état :

$$pV = nRT$$

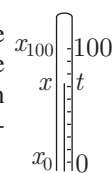
où $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ désigne la constante molaire des gaz parfaits. Il existe évidemment d'autres équations d'état. Par exemple, un fil élastique soumis à une force $\vec{F} = f \vec{u}$ s'allonge de $\Delta\ell$, tel que : $\vec{F} = k \Delta\ell \vec{u}$ (k est la constante de raideur).

6.1.2 La température

6.1.2.1 Définition phénoménologique

Définition 7 Une grandeur thermométrique est un paramètre choisi, pour un système physique, en raison de sa dépendance en fonction de la température (par exemple le volume d'un liquide ou la longueur d'une tige métallique).

Un thermomètre indique une température (t) à l'aide des variations d'une grandeur thermométrique (x). Une telle échelle est dite centésimale si, entre les valeurs $x_{100} = x_{(t=100)}$ et $x_0 = x_{(t=0)}$ se trouvent cent divisions. On admet qu'entre $t = 0$ et $t = 100$, x varie linéairement en fonction de la température :



$$x = \frac{x_{100} - x_0}{100} t + x_0 \Leftrightarrow t = \frac{100}{x_{100} - x_0} (x - x_0)$$

¹La relation entre la température T exprimée en kelvin et la température t exprimée en degrés Celsius est :

$$T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273,15^{\circ}\text{C}$$

²L'unité légale de la pression est le pascal, mais on trouve également d'autres unités, parfois plus aisées à manipuler : l'atmosphère (1 atm = 1,013.10⁵ Pa), le bar (1 bar = 10⁵ Pa), le millimètre de mercure (1 atm = 760 mmHg).

Ce faisant, la connaissance de x_0 , x_{100} permet d'associer à chaque valeur de x observée, une valeur de t . Dans la pratique, l'échelle Celsius a été définie en choisissant 0°C et 100°C respectivement aux points de congélation et d'ébullition de l'eau pure à pression *standard*.



Un thermomètre à mercure permet la mesure d'une température θ grâce aux variations du volume V de mercure, en fonction de la température t en $^\circ\text{C}$:

$$V = V_0 (1 + at + bt^2)$$

où V_0 est une constante, de même que a et $b = \alpha a$, avec $\alpha = 5.10^{-5} (\text{^\circ C})^{-1}$.

1. Pour quelle température t_0 ce thermomètre fournit-il une erreur maximale par rapport à l'échelle Celsius.
2. Quelle température θ_0 fournit-il alors ?

RÉPONSE

1. La grandeur thermométrique V permet la mesure d'une température θ conformément à la loi :

$$\theta = \frac{100}{V_{100} - V_0} (V - V_0)$$

avec :

$$V_{100} - V_0 = V_0 (100a + 10^4 b) = 100 V_0 \times (a + 100b)$$

et :

$$V - V_0 = V_0 \times (at + bt^2)$$

C'est pourquoi :

$$\theta = \frac{100 V_0 \times (at + bt^2)}{100 V_0 (a + 100b)} \Rightarrow \theta = \frac{at + bt^2}{a + 100b}$$

L'erreur commise par rapport à la température Celsius correspond à l'écart ε entre ces deux échelles :

$$\varepsilon = \theta - t = \frac{(at + bt^2) - (at + 100bt)}{a + 100b} = \frac{b \times (t^2 - 100t)}{a + 100b}$$

Cet écart devient *maximum* pour une valeur t_0 de t telle que :

$$\left. \frac{d\varepsilon}{dt} \right|_{t_0} = 0 \Rightarrow \frac{b \times (2t_0 - 100)}{a + 100b} = 0 \Rightarrow t_0 = 50^\circ\text{C}$$

2. Pour la température $t_0 = 50^\circ\text{C}$, ce thermomètre indique la valeur :

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{at_0 + bt_0^2}{a + 100b} = \frac{t_0 + \alpha t_0^2}{1 + 100\alpha} \text{ car } b = \alpha a \\ &= \frac{50 + 5.10^{-5} \times (50)^2}{1 + 100 \times 5.10^{-5}} \Rightarrow \theta_0 = 49,88 \text{ degrés} \end{aligned}$$

6.1.2.2 Définition cinétique

Définition 8 Soit v la norme de la vitesse des particules qui composent le gaz parfait et $\langle v^2 \rangle$ la valeur moyenne de v^2 étendue à l'ensemble des particules. On appelle vitesse quadratique moyenne des particules la grandeur :

$$v^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$$

En admettant que le gaz soit homogène (la vitesse \vec{v} ne dépend pas du point où elle est mesurée) et isotrope (\vec{v} peut être orienté dans toutes les directions de l'espace, avec la même probabilité), on montre que pour un gaz contenant N particules dans un volume V et sous la pression p :

$$pV = \frac{1}{3} Nm \langle v^2 \rangle = \frac{1}{3} Nm v^{*2}$$

où m désigne la masse de chaque particule. En notant n le nombre de moles associées à N , et M la masse molaire du gaz, cette loi équivaut à :

$$pV = \frac{1}{3} nM v^{*2}$$

d'où se déduit l'énergie cinétique moyenne $\langle e_c \rangle$ de chacune des particules :

$$\langle e_c \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (1)$$

dans laquelle la constante de Boltzmann k est définie à partir du nombre d'Avogadro ($\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$) :

$$k = \frac{R}{\mathcal{N}_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

6.1.3 Énergie interne

6.1.3.1 Introduction aux dérivées partielles

Définition 9 Soit $f(x, y)$ une fonction régulière de deux variables indépendantes x et y . On appelle dérivées partielles de f par rapport à x et par rapport à y les deux opérations respectives :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Dans la pratique, $\frac{\partial f}{\partial x}$ (resp. $\frac{\partial f}{\partial y}$) s'obtient en dérivant f , tout en assimilant y (resp. x) à une constante. Par exemple, pour la fonction $f(x, y) = 2x^2 + 3xy$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 3y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x$$

Au premier ordre en dx et dy , la différentielle de la fonction $f(x, y)$ est donnée par :

$$df = f(x + dx, y + dy) - f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

Par exemple, on pourra vérifier que, pour $f(x, y) = 2x^2 + 3xy$, et en négligeant les termes d'ordre 2 (dx^2 et $dx dy$), la différentielle df vaut :

$$df = (4x + 3y) dx + (3x) dy$$

Remarque – On distingue la différentielle df de f , d'une grandeur infinitésimale $\delta\psi$, non différentielle. Par exemple, il existe une fonction $f(x, y)$ telle que :

$$df = 4x \, dx + 3y \, dy + 3x \, dy$$

tandis qu'il n'existe pas de fonction $\psi(x, y)$ telle que :

$$d\psi = 4x \, dx + 3y \, dx + 4x \, dy$$

ce que l'on figure par la notation :

$$\delta\psi = 4x \, dx + 3y \, dx + 4x \, dy$$

On note \oint l'intégrale, dont le point de départ A est le même que le point d'arrivée :

$$\oint \equiv \int_A^A$$

ce qui permet de distinguer les différentielles des simples formes infinitésimales :

$$\oint df = 0 \text{ mais } \oint \delta\psi \neq 0$$

On démontre que :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V} \text{ et que : } \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \times \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \times \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1$$

6.1.3.2 Gaz parfait monoatomique

Si $E_c(G)$ désigne l'énergie cinétique du centre d'inertie G d'un gaz parfait, E_c^* l'énergie cinétique de ce gaz dans son référentiel barycentrique, le théorème de Kœnig permet d'exprimer l'énergie cinétique de ce gaz dans tout référentiel :

$$E_c = E_c(G) + E_c^*$$

Quant à l'énergie potentielle E_p de ce gaz, elle ne tient compte que des actions extérieures qui s'exercent sur ce gaz, dont les particules n'interagissent pas entre elles : $E_p = E_{p\text{ext}}$. C'est pourquoi l'énergie mécanique du gaz parfait vaut :

$$E = E_c(G) + E_{p\text{ext}} + E_c^*$$

Définition 10 On appelle énergie interne du gaz parfait la grandeur :

$$U = E_c^* \text{ (pour le gaz parfait)}$$

De cette manière :

$$E = E_c(G) + E_{p\text{ext}} + U \quad (2)$$

Remarque – Dans le cas général (hormis les gaz parfaits), des interactions internes aux système sont associées à une énergie potentielle $E_{p\text{int}}$, auquel cas l'énergie interne est définie par :

$$U = E_c^* + E_{p\text{int}}$$

Avec ces définitions, et compte tenu du résultat (1), n moles d'un gaz parfait monoatomique possèdent l'énergie interne :

$$U = n N_A \langle e_c \rangle \Rightarrow U = \frac{3}{2} nRT$$

On note ce résultat de plusieurs manières :

- Si C_V désigne la *capacité thermique à volume constant* du gaz :

$$U = C_V \times T \text{ avec } C_V = \frac{3}{2} nR$$

- Si C_{V_m} est sa *capacité thermique molaire à volume constant* :

$$U = n C_{V_m} \times T \text{ avec } C_{V_m} = \frac{3}{2} R$$

- Si c_V est sa *capacité thermique massique à volume constant*, m sa masse et M sa masse molaire :

$$U = m c_V \times T \text{ avec } c_V = \frac{3}{2} \frac{R}{M}$$

6.1.3.3 Gaz parfait polyatomique

À l'instar des gaz parfaits monoatomiques, l'énergie interne des gaz polyatomiques ne dépend que de leur température :

$$U = C_V(T) \times T$$

La différence de comportement provient de la dépendance de C_V avec T . Les valeurs de C_V sont associées à des phénomènes physiques qui contribuent à l'énergie interne :

	T faible	T ordinaire	T élevé
C_V	$\frac{3}{2} nR$	$\frac{5}{2} nR$	$\frac{7}{2} nR$
Phénomène	Translation des molécules	Rotation des molécules	Vibration des liaisons intramoléculaires

6.2 Fluides réels et phases condensées

Définition 11 Les coefficients thermoélastiques sont définis par :

- le coefficient de dilatation isobare α ;

- le coefficient de compressibilité isotherme χ_T
d'un corps de volume V par les relations :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad \text{et} \quad \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T$$



On considère un fluide, dont le coefficient de dilatation isobare est constant et vaut α_0 . On suppose que lorsque sa température T vaut T_0 , son volume V prend la valeur V_0 .

Montrer qu'en maintenant la pression constante et en supposant que $\alpha (T - T_0) \ll 1$, le volume V peut s'écrire :

$$V = V'_0 (1 + aT)$$

où l'on exprimera les paramètres V'_0 et a en fonction de V_0 , α_0 et T_0 .

RÉPONSE Si la pression p demeure constante, ($dp = 0$), la différentielle du volume se simplifie :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT$$

où la définition du coefficient de dilatation isobare conduit à :

$$\alpha_0 = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \alpha_0 V \Rightarrow dV = \alpha_0 V dT \Rightarrow \frac{dV}{V} = \alpha_0 dT$$

Notamment, puisque $V = V_0$ lorsque $T = T_0$:

$$\int_{V_0}^V \frac{dV}{V} = \alpha_0 \int_{T_0}^T dT \Rightarrow \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) = \alpha_0 (T - T_0) \Rightarrow V = V_0 e^{\alpha_0 (T - T_0)}$$

Enfin, l'hypothèse selon laquelle $\alpha_0 (T - T_0) \ll 1$ suggère l'emploi d'un développement limité :

$$\begin{aligned} V &\simeq V_0 [1 + \alpha_0 (T - T_0)] = V_0 [(1 - \alpha_0 T_0) + \alpha_0 T] \\ &= V_0 (1 - \alpha_0 T_0) \times \left[1 + \frac{\alpha_0}{V_0 (1 - \alpha_0 T_0)} T \right] \end{aligned}$$

C'est pourquoi il existe deux constantes :

$$V'_0 = V_0 (1 - \alpha_0 T_0) \quad \text{et} \quad a = \frac{\alpha_0}{V_0 (1 - \alpha_0 T_0)}$$

permettant d'écrire :

$$V = V'_0 (1 + aT)$$

6.3 Éléments de statique des fluides

6.3.1 Loi fondamentale

Soit un fluide, plongé dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g \vec{e}_z$, de masse volumique μ (éventuellement dépendante de l'altitude z). La variation de la pression p au sein de ce fluide est donnée par la loi fondamentale de la statique des fluides :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g$$

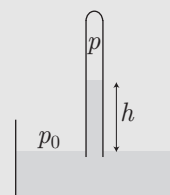
6.3.1.1 Cas des fluides incompressibles et indilatables

Ces fluides sont caractérisés par leur masse volumique $\mu = \mu_0$ indépendante de l'altitude où elle est mesurée. C'est pourquoi l'intégration de l'équation différentielle précédente conduit à :

$$p(z) = p_0 - \mu_0 g (z - z_0) \quad \text{où } p_0 = p(z_0) \quad (3)$$



On réalise un baromètre en remplissant un tube de 1 mètre de long avec du mercure de masse volumique $\mu = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (fluide supposé incompressible et indilatable). Ce tube est retourné sur une cuve contenant également du mercure, en contact avec l'air atmosphérique, à la pression ordinaire $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. La colonne de mercure s'abaisse dans le tube, jusqu'à atteindre une hauteur h , dans le champ de pesanteur d'intensité $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



1. Que vaut la pression p au sommet de la colonne de mercure ?
2. Calculer la hauteur h .
3. Quelle serait cette hauteur h si le mercure était remplacé par de l'eau (supposée indilatable et incompressible) ?

RÉPONSE

1. Compte tenu du mode opératoire, le haut du tube est vide (le mercure est « tombé » sous son propre poids), ce qui ne peut exercer de pression : $p = 0$.
2. Soit A un point de la surface libre du mercure dans la cuve et soit B un point, de même altitude que A , situé dans la colonne de mercure.
Ces deux points étant à la même altitude, la loi (3) assure que :

$$p_B = p_A - \underbrace{\mu g (z_B - z_A)}_{=0} = p_A = p_0$$

En revanche, un point C , situé sur la partie supérieure du mercure contenu dans la colonne, est soumis à la pression $p_C = 0$ telle que :

$$0 = p_C = p_B - \mu g (z_C - z_B) = p_0 - \mu g h \Rightarrow h = \frac{p_0}{\mu g}$$

Application numérique :

$$h = \frac{1,013 \cdot 10^5}{13,6 \cdot 10^3 \times 9,81} \Rightarrow h = 759 \text{ mm}$$

Remarque – C'est cette valeur qui justifie la conversion : $1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}$.

3. Si le mercure est remplacé par de l'eau, les calculs précédents demeurent corrects, à condition d'attribuer à μ la valeur de la masse volumique de l'eau : $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Ce faisant :

$$h = \frac{1,013 \cdot 10^5}{10^3 \times 9,81} = 10,3 \text{ m}$$

Ces deux valeurs justifient, pour des raisons évidentes d'encombrement, pourquoi le mercure est préféré à l'eau dans la réalisation des baromètres.

6.3.1.2 Cas du gaz parfait isotherme

Un gaz parfait, à la température T_0 uniforme, de masse molaire M , est caractérisé par son équation d'état :

$$pV = nRT_0 = \frac{mR}{M} T_0 \Rightarrow \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT_0} \Rightarrow \mu = \frac{Mp}{RT_0}$$

où m est la masse des n moles de gaz contenues dans un volume V .
La loi fondamentale de la statique des fluides stipule alors que :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g = -p \times \frac{Mg}{RT_0} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

Notamment, si à une altitude z (resp. z_0) règne une pression $p(z)$ (resp. p_0), l'intégration de cette équation conduit à :

$$\int_{p_0}^{p(z)} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT_0} \int_{z_0}^z dz \Rightarrow p(z) = p_0 \times \exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) \quad (4)$$

6.3.2 Poussée d'Archimède

La loi fondamentale de la statique des fluides permet d'énoncer la loi d'Archimède :

Tout corps plongé dans un fluide en équilibre mécanique subit une force \vec{A} , appelée *poussée d'Archimède*, dont les caractéristiques sont :

- sa direction : la verticale ;
- son sens : vers le haut ;
- son intensité : le poids qu'aurait le volume V de fluide qui occuperait la partie immergée du corps ;
- son point d'application : le centre d'inertie (centre de poussée) de la partie immergée du corps.



Quelle est la surface *minimum* d'un bloc de glace parallélépipédique dont l'épaisseur est égale à 30 cm, flottant sur l'eau, capable de supporter un homme dont la masse m_h est égale à 80 kg ?

Les masses volumiques de l'eau et de la glace valent respectivement $\mu_e = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\mu_g = 920 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

RÉPONSE

Soit \vec{k} le vecteur unitaire vertical ascendant, à partir duquel peuvent s'exprimer les diverses forces appliquées au bloc de glace :

- le poids de l'homme : $\vec{P}_h = -m_h g \vec{k}$;
- le poids du bloc de glace, de volume Sh : $\vec{P}_g = -\mu_g Sh g \vec{k}$;
- la poussée d'Archimède \vec{A} , dont l'intensité s'identifie au poids $m_e g$ d'une masse m_e d'eau qui occuperait le volume Sz de la partie immergée du bloc (en gris sur le schéma) :

$$\vec{A} = m_e g \vec{k} = \mu_e Sz g \vec{k}$$

L'équilibre du bloc est conditionné par :

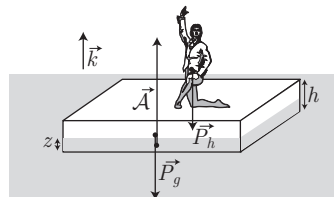
$$\vec{A} + \vec{P}_h + \vec{P}_g = \vec{0} \Rightarrow \mu_e Sz g = m_h g + \mu_g Sh g \Rightarrow z = \frac{m_h + \mu_g Sh}{\mu_e S}$$

Or, la hauteur z de la partie immergée ne peut excéder h , sans quoi l'ensemble coulerait :

$$z < h \Rightarrow \frac{m_h + \mu_g Sh}{\mu_e S} < h \Rightarrow m_h + \mu_g Sh < \mu_e Sh \Rightarrow S > \frac{m_h}{h(\mu_e - \mu_g)}$$

Application numérique :

$$S > \frac{80}{30 \cdot 10^{-2} \times (10^3 - 920)} \Rightarrow S > 3,3 \text{ m}^2$$



6.3.3 Introduction au facteur de Boltzmann

Étant donné que $M = m\mathcal{N}_A$ et que $R = k\mathcal{N}_A$, la loi (4) devient :

$$p = p_0 \times \exp\left(-\frac{mgz}{kT}\right) = p_0 \times \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)$$

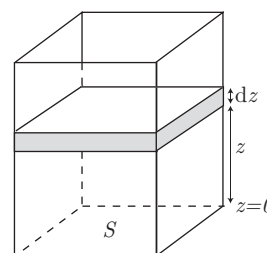
où $\varepsilon = mgz$ désigne l'énergie potentielle de pesanteur d'une particule de gaz, de masse m , à l'altitude z .

Considérons une colonne de gaz parfait, de section droite S , et un élément de cette colonne, à l'altitude z , de volume $\delta V = S dz$. Cet élément comporte un nombre de particules δN vérifiant l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p \delta V = \delta N kT \Rightarrow \delta N = \frac{pS}{kT} dz = \frac{p_0 S}{kT} e^{-\varepsilon/kT}$$

Aussi le nombre total de particules contenues dans cette colonne (T demeurant indépendant de z) vaut :

$$N_{\text{tot}} = \frac{p_0 S}{kT} \int_0^\infty e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = \frac{p_0 S}{mg}$$



Du reste, la probabilité de présence d'une particule dans cet élément de volume (où son énergie potentielle de pesanteur est comprise entre $\varepsilon = mgz$ et $\varepsilon + d\varepsilon = mg(z + dz)$) est définie par :

$$\delta\mathcal{P}(\varepsilon; d\varepsilon) = \frac{\delta N}{N_{\text{tot}}} = \frac{1}{Z} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon \text{ où } d\varepsilon = mg dz$$

relation que l'on présente généralement sous la forme :

$$\delta\mathcal{P}(\varepsilon; d\varepsilon) = \frac{1}{Z} e^{-\varepsilon/kT} d\varepsilon$$

On démontre (en dehors du programme de CPGE) que cette loi admet une généralisation appelée *facteur de Boltzmann* : si l'énergie d'une particule est une forme quadratique d'un paramètre u : $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} u^2$, la probabilité que son énergie soit comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ vaut :

$$\delta\mathcal{P}(\varepsilon; d\varepsilon) = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\alpha u^2}{2kT}\right) du$$

6.4 Premier principe de la thermodynamique

6.4.1 Les transformations

Définition 12 On appelle *transformation* toute opération physique visant à modifier les valeurs de certains paramètres d'état d'un système.

Définition 13 Une transformation est réversible si le système qui la subit demeure en équilibre avec l'extérieur tout au long de cette transformation. Cet équilibre comprend, notamment :

- l'équilibre mécanique. Par exemple, les pressions de part et d'autre d'un piston qui isole le système doivent rester identiques.
- l'équilibre thermique ; si le système peut échanger de la chaleur avec l'extérieur, sa température doit demeurer égale à celle de l'extérieur.

Dans le cas contraire, une transformation est irréversible.

Définition 14 De manière générale, la nature de la transformation est indiquée par un adjectif :

Transformation monotherme	≡	T est constant
Transformation monobare	≡	p est constant
Transformation adiabatique	≡	pas d'échange de chaleur

Si la transformation est, de surcroît, réversible, certains de ces adjectifs sont modifiés.

Transformation isotherme	≡	réversible à T constant
Transformation isobare	≡	réversible à p constant
Transformation isochore	≡	réversible à V constant

⚠ Veillez à ne pas confondre les transformations adiabatiques avec les transformations isothermes : la température d'un système peut varier sans transfert thermique (par exemple la compression de l'air dans une pompe à vélo) et un transfert thermique ne s'accompagne pas nécessairement d'une variation de la température (la cuisson des pâtes requiert de la chaleur qui maintient l'ébullition de l'eau à une température constante et voisine de 100°C).

6.4.2 Échanges thermiques

L'énergie d'un système est donnée par la relation (2) de la page 575 :

$$E = E_c + E_{p\text{ ext}} + U$$

où E_c désigne l'énergie cinétique de l'ensemble du système. Le premier principe de la thermodynamique stipule que :

la variation ΔE provient de l'énergie fournie au système ; il s'agit :

- du travail $W_{\text{ext}}^{(d)}$ des forces dissipatives extérieures au système ;
- du transfert thermique (ou chaleur) Q reçu par le système.

$$\Delta E = W_{\text{ext}}^{(d)} + Q$$

Conformément au cours de mécanique, $\Delta E_{p\text{ ext}}$ provient du travail des forces conservatives extérieures au système : $\Delta E_{p\text{ ext}} = -W_{\text{ext}}^{(c)}$ et c'est pourquoi :

$$\begin{aligned} \Delta E = \Delta E_c + \Delta E_{p\text{ ext}} + \Delta U &\Rightarrow \Delta E_c + \Delta U - W_{\text{ext}}^{(c)} = W_{\text{ext}}^{(d)} + Q \\ &\Rightarrow \Delta E_c + \Delta U = W_{\text{ext}}^{(c)} + W_{\text{ext}}^{(d)} + Q \\ &\Rightarrow \Delta E_c + \Delta U = W_{\text{ext}} + Q \end{aligned}$$

Si le système demeure globalement immobile, cette loi se simplifie :

$$\Delta U = W_{\text{ext}} + Q$$

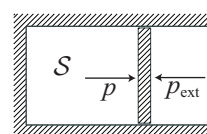
Remarque – Le travail d'une force ainsi que le transfert thermique ne sont pas des fonctions d'état et c'est pour cette raison que les notations ΔW_{ext} et ΔQ sont à proscrire impérativement.

Au cours d'une transformation infinitésimale, on utilisera la loi :

$$dU = \delta W_{\text{ext}} + \delta Q$$

6.4.3 Travail des forces de pression

Considérons un système physique \mathcal{S} contenu dans un cylindre fermé par un piston mobile. On notera p la pression exercée par \mathcal{S} sur ce piston et par p_{ext} celle exercée par l'extérieur. Lorsque le volume de \mathcal{S} varie de dV , le travail des forces de pression extérieures au système vaut :



$$\delta W_{\text{ext}} = -p_{\text{ext}} dV$$

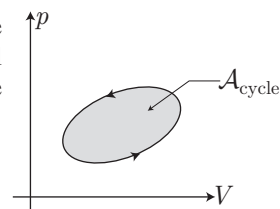
⚠ Veillez à conserver les indices, afin de ne pas confondre p et p_{ext} . Par exemple, il ne sera possible d'écrire :

$$\delta W_{\text{ext}} = -p dV$$

qu'à condition que $p_{\text{ext}} = p$, c'est-à-dire encore que l'équilibre mécanique du piston soit assuré (ce qui est évidemment le cas lors d'une transformation réversible).

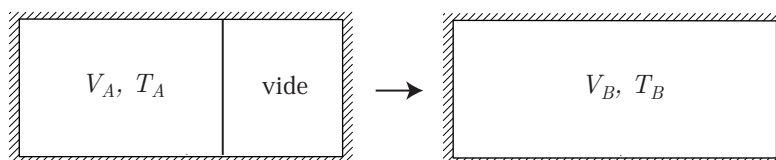
Dans un diagramme de Clapeyron (p, V), lorsqu'un cycle est décrit dans le sens positif trigonométrique, le travail reçu, de manière réversible, s'identifie à l'aire $\mathcal{A}_{\text{cycle}}$ de ce cycle :

$$W_{\text{ext}} = \mathcal{A}_{\text{cycle}}$$



6.4.4 Détente de Joule-Gay-Lussac

Cette détente est réalisée de la manière suivante : un gaz parfait occupe le volume V_A d'un récipient calorifugé de volume $V_B > V_A$ (le récipient est séparé en deux compartiments, l'un vide et l'autre contenant le gaz parfait), à la température T_A . La paroi séparant les deux compartiments cède, ce qui amène le gaz à occuper la totalité du volume V_B du récipient ; sa température vaut T_B .



Au cours de cette détente, le gaz parfait n'a reçu ni de travail de pression W_{ext} (le vide exerçant une pression nulle), ni de transfert thermique (les parois étant calorifugées). Conformément au premier principe de la thermodynamique, l'énergie interne du gaz a varié de la quantité :

$$\Delta U = Q + W_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow U = \text{cte}$$

Or, puisque l'énergie interne du gaz parfait ne dépend que de sa température, cela signifie aussi que :

$$T_A = T_B \text{ pour la détente de Joule-Gay-Lussac.}$$

6.4.5 L'enthalpie

Définition 15 Soit p la pression d'un fluide de volume V et d'énergie interne U . On appelle enthalpie de ce fluide la grandeur :

$$H = U + pV$$

Puisque H est une fonction d'état, au cours d'un cycle on observe que :

$$\oint dH = 0$$

Au cours d'une transformation réversible, pendant laquelle la pression du fluide varie de dp , le premier principe de la thermodynamique révèle que :

$$dH = \delta Q + V dp$$

En outre, lorsque le fluide est constitué de n moles de gaz parfait, U ne dépend que de T : $dU = nC_{V_m} dT$, tandis que $pV = nRT \Rightarrow d(pV) = nR dT$. Ce faisant :

$$dH = dU + d(pV) = n(C_{V_m} + R) dT$$

ce qui montre que l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépend que de sa température. C'est pourquoi on écrira :

$$dH = nC_{p_m} dT, C_{p_m} = R + C_{V_m} \text{ (pour un gaz parfait)}$$

où C_{p_m} est appelé *capacité thermique molaire à pression constante*. La *relation de Mayer* :

$$C_{p_m} - C_{V_m} = R$$

associée au rapport : $\gamma = \frac{C_{p_m}}{C_{V_m}}$ des capacités thermiques molaires, fournit les relations :

$$C_{V_m} = \frac{R}{\gamma - 1} \text{ et } C_{p_m} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

Pour les phases condensées, en revanche, les capacités thermiques C_p et C_V sont souvent confondues, auquel cas la variation d'enthalpie est donnée par :

$$dH = C \, dT \text{ (phases condensées)}$$

Remarque – Les relations : $dU = \delta Q - p_{\text{ext}} dV$ et $dH = \delta Q + V dp$, montrent qu'à volume ou à pression constants, un système reçoit respectivement les chaleurs :

$$Q_V = \Delta U \text{ et } Q_p = \Delta H$$



Un gaz parfait, de capacité thermique à pression constante C_p , subit les transformations réversibles suivantes :

- détente isobare, au cours de laquelle le gaz passe de l'état $A(p_0, V_0, T_0)$ à l'état $B(p_0, 2V_0, T_1)$;
- compression adiabatique qui fait passer le gaz de l'état B à l'état $C(p_2, V_0, T_2)$;
- refroidissement isochore de l'état C à l'état A .

1. Pour chacune de ces transformations, déterminer la variation d'enthalpie en fonction de C_p , T_0 et $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$.
2. En déduire la valeur de la variation d'enthalpie ΔH au cours de la totalité de ce processus, puis commenter.

RÉPONSE

1. Traitons isolément les trois transformations, en remarquant toutefois qu'au cours de chacune d'elles, la variation d'enthalpie du gaz parfait est simplement proportionnelle à la variation de température du gaz :

$$\Delta H = C_p \Delta T$$

Il convient alors d'exprimer ΔT pour chacune des transformations.

- Au cours de la transformation $A \rightarrow B$, l'équation d'état du gaz parfait s'applique aux états A et B :

$$\begin{cases} p_0 V_0 = nRT_0 \\ 2p_0 V_0 = nRT_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{T_0}{T_1} \Rightarrow T_1 = 2T_0$$

La variation d'enthalpie vaut par conséquent :

$$\Delta H_{AB} = C_p (2T_0 - T_0) = C_p T_0$$

- Au cours de la transformation $B \rightarrow C$, le gaz reçoit une chaleur δQ nulle, auquel cas le premier principe de la thermodynamique devient (pour n moles de gaz) :

$$\begin{aligned} dU = \delta Q + \delta W_{\text{ext}} &\Rightarrow nC_{V,m} dT = -p dV = -nRT \frac{dV}{V} \text{ car } pV = nRT \\ &\Rightarrow \frac{nR}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} = -nR \frac{dV}{V} \Rightarrow \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = -(\gamma - 1) \int_{2V_0}^{V_0} \frac{dV}{V} \\ &\Rightarrow \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = (\gamma - 1) \ln 2 = \ln (2^{\gamma-1}) \\ &\Rightarrow T_2 = T_1 \times 2^{\gamma-1} \text{ avec } T_1 = 2T_0 \Rightarrow T_2 = 2^\gamma T_0 \end{aligned}$$

C'est pourquoi l'enthalpie varie de la quantité :

$$\Delta H_{BC} = C_p (T_2 - T_1) \Rightarrow \Delta H_{BC} = C_p T_0 (2^\gamma - 2)$$

- La transformation $C \rightarrow A$ fait passer la température du gaz de $T_2 = 2^\gamma \times T_0$ à T_0 ; son enthalpie varie concomitamment de :

$$\Delta H_{CA} = C_p (T_0 - T_2) = C_p T_0 (1 - 2^\gamma)$$

2. Au cours de ce processus, l'enthalpie du gaz a varié de la quantité :

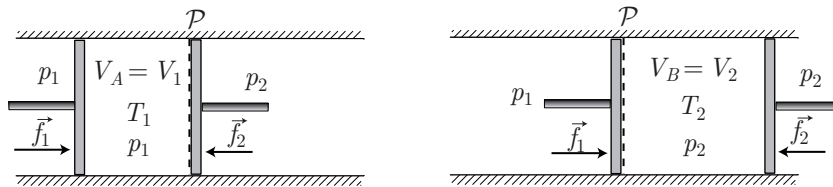
$$\Delta H = \Delta H_{AB} + \Delta H_{BC} + \Delta H_{CA} = C_p T_0 (1 + 2^\gamma - 2 + 1 - 2^\gamma) \Rightarrow \Delta H = 0$$

Ce résultat confirme le statut de fonction d'état pour l'enthalpie, qui ne varie pas au cours de la transformation cyclique $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$:

$$\oint dH = 0$$

6.4.5.1 Détente de Joule-Thomson

Un gaz parfait est enfermé dans un cylindre calorifugé, séparé en deux parties à l'aide d'une paroi poreuse \mathcal{P} . Initialement, ce gaz se trouve totalement dans une partie (A) de ce cylindre, de volume V_1 , à la température T_1 . Un piston exerce une pression p_1 constante, sous l'action de laquelle le gaz passe totalement dans l'autre partie (B) du cylindre, où un autre piston exerce une pression p_2 constante. En fin d'expérience, le gaz occupe un volume V_2 à la température T_2 .



Au cours de cette expérience, les forces de pression \vec{f}_1 et \vec{f}_2 exercent des travaux élémentaires :

$$\delta W_{1\text{ext}} = -p_1 dV_A \text{ et } \delta W_{2\text{ext}} = -p_2 dV_B$$

c'est-à-dire, puisque p_1 et p_2 sont constants :

$$W_{1\text{ext}} = -p_1 \Delta V_A = -p_1 (0 - V_1) = p_1 V_1$$

$$\text{et } W_{2\text{ext}} = -p_2 \Delta V_B = -p_2 (V_2 - 0) = -p_2 V_2$$

Ce faisant, le gaz a reçu un travail des forces de pression :

$$W_{\text{ext}} = W_{1\text{ext}} + W_{2\text{ext}} = p_1 V_1 - p_2 V_2$$

tandis que son énergie interne varie de $\Delta U = U_2 - U_1$, conformément au premier principe de la thermodynamique (où $Q = 0$ pour la transformation adiabatique) :

$$\Delta U = W_{\text{ext}} + Q \Rightarrow U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2 \Rightarrow U_2 + p_2 V_2 = U_1 + p_1 V_1$$

La définition de l'enthalpie : $H = U + pV$ conduit alors à :

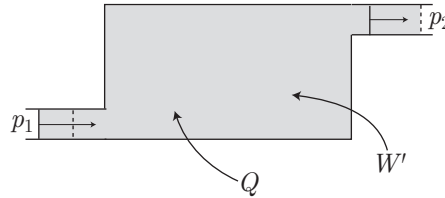
$$H_2 = H_1 \Rightarrow \Delta H = 0$$

Or, l'enthalpie d'un gaz parfait ne dépendant que de sa température, ce résultat signifie également que :

$$\Delta T = 0 \Rightarrow T_2 = T_1$$

6.4.5.2 Écoulement des fluides

Considérons un fluide s'écoulant dans un système à l'entrée duquel règne une pression p_1 et à la sortie duquel la pression vaut p_2 .



Au cours de cet écoulement, le fluide reçoit de l'extérieur, un travail $W = p_1 V_1 - p_2 V_2$ des forces de pression, et un travail W' des éventuelles autres forces (par exemple le poids), ainsi que la chaleur Q . Son énergie interne U et son énergie cinétique varient en respectant le premier principe de la thermodynamique :

$$\begin{aligned} \Delta U + \Delta E_c &= W + W' + Q \Rightarrow U_2 - U_1 + \Delta E_c = p_1 V_1 - p_2 V_2 + W' + Q \\ &\Rightarrow \underbrace{(U_2 + p_2 V_2)}_{H_2} - \underbrace{(U_1 + p_1 V_1)}_{H_1} + \Delta E_c = W' + Q \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$\Delta H + \Delta E_c = W' + Q$$



Lorsqu'un fluide subit un écoulement, même sans variation d'énergie cinétique, et en l'absence de forces autres que celles de pression (par exemple dans des tuyaux), il conviendra de remplacer l'expression mathématique du premier principe de la thermodynamique par :

$$\Delta H = Q$$

6.5 Bilans d'entropie

6.5.1 Deuxième principe de la thermodynamique

Énoncé de Clausius

Sans apport de travail extérieur, le transfert thermique (Q) ne peut s'effectuer d'un corps (dit froid) vers un corps plus chaud.

Énoncé de Kelvin

Un système effectuant un cycle, en contact thermique avec une unique source de chaleur, ne peut produire de travail mécanique.

Ces deux énoncés, au demeurant équivalents, prédisent qu'au cours d'un cycle, si un système reçoit la chaleur δQ de la part de sources aux températures T :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \text{ (inégalité de Clausius)} \quad (5)$$

Plus précisément, selon que cette chaleur soit échangée de manière réversible ou irréversible, les *relations de Clausius* s'écrivent :

$$\oint \frac{\delta Q_{\text{irr}}}{T} < 0 \text{ et } \oint \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = 0$$

6.5.2 La fonction entropie

6.5.2.1 Définition et propriétés

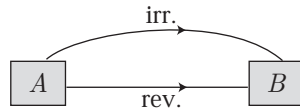
Définition 16 Soit un système en contact thermique avec un thermostat de température T , duquel il reçoit une chaleur δQ_{rev} de manière réversible. La variation d'entropie S de ce système est définie par :

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

La relation de Clausius : $\oint \frac{\delta Q_{\text{ref}}}{T} = 0$ révèle que :

l'entropie S est une fonction d'état

de sorte que la variation $\Delta S = S_B - S_A$ ne dépend pas de la nature de la transformation $A \rightarrow B$. Considérons un système susceptible de passer d'un état A à un état B par deux transformations, l'une réversible et l'autre irréversible.



La relation de Clausius : $\oint \frac{\delta Q_{\text{irr}}}{T} < 0$ permet d'établir que :

$$\int_A^B \frac{\delta Q_{\text{irr}}}{T} < \Delta S = S_B - S_A \tag{6}$$

Le corollaire de cette inégalité est que :

l'entropie d'un système isolé thermiquement de l'extérieur augmente nécessairement au cours d'une transformation irréversible.



Pour calculer la variation d'entropie d'un système qui passe d'un état A à un état B , deux situations peuvent se présenter :

- soit la transformation $A \rightarrow B$ est réversible, auquel cas la chaleur reçue, δQ_{AB} coïncide avec δQ_{rev} , et il est possible d'utiliser la définition :

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \text{ avec } \delta Q_{AB} = \delta Q_{\text{rev}}$$

- soit la transformation $A \rightarrow B$ est irréversible, ce qui signifie que $\delta Q_{AB} \neq \delta Q_{\text{rev}}$. Dans ce cas, il convient d'imaginer une transformation

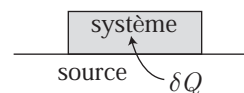
réversible permettant de relier les états A et B . Au cours de cette transformation, le système reçoit la chaleur δQ_{rev} à partir de laquelle il devient possible de calculer :

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \text{ avec } \delta Q_{\text{rev}} \neq \delta Q_{AB}$$

6.5.2.2 Création d'entropie

Considérons un système physique au contact d'une source de chaleur, à la température T , dont il reçoit la chaleur

$$Q_{AB} = \int_A^B \delta Q \text{ au cours d'une transformation } A \rightarrow B.$$



Définition 17 On appelle entropie d'échange thermique la grandeur :

$$S_e = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

quelle que soit la nature (réversible ou irréversible) de la transformation.

L'inégalité (6), qui devient une égalité dans le cas d'une transformation réversible, montre qu'il existe une grandeur S_c , positive ou nulle, telle que :


$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T} \leq \Delta S_{AB} \Rightarrow \Delta S_{AB} = S_e + S_c \Rightarrow S_c = \Delta S_{AB} - S_e$$

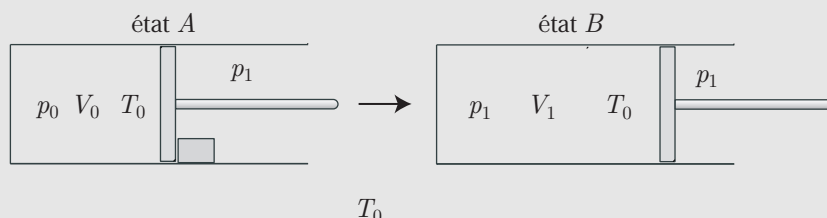
La grandeur S_c est l'entropie créée dans le système au cours de la transformation.

Remarque – L'égalité : $\Delta S_{AB} = S_e + S_c$ traduit un bilan d'entropie ; l'augmentation d'entropie d'un système provient de l'entropie « reçue » par transfert thermique et de celle créée au sein du système.

On retiendra, en outre que :

$$\begin{aligned} S_c &= 0 \text{ pour une transformation réversible ;} \\ S_c &> 0 \text{ pour une transformation irréversible.} \end{aligned}$$

 n moles d'un gaz parfait occupent initialement le volume V_0 d'un récipient fermé par un piston. La pression extérieure, constante, vaut $p_{\text{ext}} = p_1$, tandis que la pression initiale du gaz prend la valeur p_0 . On retire brusquement la contrainte qui maintient le piston en place ; celui-ci se déplace jusqu'à ce que le gaz occupe un volume V_1 , à la pression p_1 . Les parois du cylindre sont supposées suffisamment perméables à la chaleur pour que le système, en contact thermique avec un thermostat, demeure à la température T_0 .



1. Exprimer, en fonction de n , T_0 , V_0 , V_1 et R (constante molaire des gaz parfaits), la chaleur Q_{irr} reçue par le gaz au cours de cette transformation $A(p_0, V_0, T_0) \rightarrow B(p_1, V_1, T_0)$.
En déduire l'entropie qu'a reçu le gaz par transfert thermique.
2. Donner l'expression de la variation d'entropie ΔS_{AB} du gaz, en fonction de n , R , V_0 et V_1 .
3. Déterminer alors l'entropie créée (S_c) dans le gaz au cours de cette transformation. Quel est son signe ? conclure.

RÉPONSE

1. Au cours de la transformation, le gaz reçoit du travail W_{ext} des forces de pression extérieures :

$$\delta W_{\text{ext}} = -p_{\text{ext}} dV = -p_1 dV \Rightarrow W_{\text{ext}} = -p_1 \int_{V_0}^{V_1} dV = -p_1 V_1 + p_1 V_0 = -p_1 V_1 \left(1 - \frac{V_0}{V_1}\right)$$

ainsi qu'une chaleur Q_{irr} . Or, sa température restant invariante, son énergie interne demeure constante, ce que traduit le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{AB} = W_{\text{ext}} + Q_{\text{irr}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{irr}} = -W_{\text{ext}} = p_1 V_1 \left(1 - \frac{V_0}{V_1}\right)$$

où l'équation d'état du gaz parfait, en B , impose :

$$p_1 V_1 = nRT_0 \Rightarrow Q_{\text{irr}} = nRT_0 \left(1 - \frac{V_0}{V_1}\right)$$

Par définition, l'entropie reçue par le gaz, en raison des transferts thermiques, vaut :

$$S_e = \int_A^B \frac{\delta Q_{\text{irr}}}{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_A^B \delta Q_{\text{irr}} = \frac{Q_{\text{irr}}}{T_0} \Rightarrow S_e = nR \left(1 - \frac{V_0}{V_1}\right)$$

2. Au cours de la transformation $A \rightarrow B$, l'équilibre thermique du gaz est respecté (il établit un contact thermique permanent avec le thermostat), tandis que l'équilibre mécanique ne l'est pas (la pression du gaz, p , n'est pas en permanence identique à la pression extérieure $p_{\text{ext}} = p_1$). Cet écart à l'équilibre est source d'irréversibilité pour la transformation $A \rightarrow B$, dont la variation d'entropie ne peut être calculée qu'après avoir imaginé une transformation réversible reliant les mêmes états A et B . Ainsi, il suffirait d'exercer une pression extérieure $p_{\text{ext}} = p$ pour rendre réversible cette transformation, au cours de laquelle le gaz recevrait une chaleur Q_{rev} et un travail :

$$\begin{aligned} \delta W'_{\text{ext}} &= -p_{\text{ext}} dV = -p dV = -nRT_0 \frac{dV}{V} \text{ car } pV = nRT_0 \\ \Rightarrow W'_{\text{ext}} &= -nRT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = -nRT_0 \ln \left(\frac{V_1}{V_0}\right) \end{aligned}$$

Par suite, au cours d'une telle transformation isotherme, la variation de l'énergie interne du gaz parfait (qui ne dépend que de la température, constante) vaudrait :

$$\Delta U_{AB} = W'_{\text{ext}} + Q_{\text{rev}} = 0 \Rightarrow Q_{\text{rev}} = -W'_{\text{ext}} = nRT_0 \ln \left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

Ce faisant, son entropie varie, entre les états A et B , d'une quantité :

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T_0} = \frac{1}{T_0} \int_A^B \delta Q_{\text{rev}} = \frac{Q_{\text{rev}}}{T_0} \Rightarrow \Delta S_{AB} = nR \ln \left(\frac{V_1}{V_0}\right)$$

3. Le bilan d'entropie : $\Delta S_{AB} = S_e + S_c$ permet de trouver l'entropie créée dans le gaz au cours de cette transformation :

$$\begin{aligned} S_c &= \Delta S_{AB} - S_e = nR \left[\frac{V_0}{V_1} - 1 + \ln \left(\frac{V_1}{V_0}\right) \right] = nR \left[\frac{V_0}{V_1} - 1 - \ln \left(\frac{V_0}{V_1}\right) \right] \\ &= nR \times f \left(\frac{V_0}{V_1}\right) \text{ avec } f(x) = x - 1 - \ln x \end{aligned}$$

L'étude d'une telle fonction $f(x)$ montre qu'elle est toujours positive (si $x \neq 1$, c'est-à-dire pour $V_1 \neq V_0$), ce qui suffit à conclure que :

$$S_c > 0 \text{ tant que } p_1 \neq p_0$$

Cet exemple illustre la création systématique d'entropie au sein de tout système subissant une transformation irréversible.

6.5.2.3 Identités fondamentales

Au cours d'une transformation réversible d'un système, dont l'entropie varie de dS et le volume de dV , la variation d'énergie interne vaut :

$$dU_{\text{rev}} = \delta Q_{\text{rev}} - p dV = T dS - p dV \text{ car } dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

Or, puisque U est une fonction d'état, toute autre transformation (même irréversible), permettant d'obtenir les mêmes variations dS et dV de l'entropie et du volume, s'accompagnerait de la même variation d'énergie interne : $dU = dU_{\text{rev}}$:

$$dU = T dS - p dV \Rightarrow U \equiv U(T, S) \quad (7)$$

ce qui fournit une définition thermodynamique de la température :

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_V$$

Un même raisonnement conduit à :

$$dH = \delta Q_{\text{rev}} + V dp = T dS + V dp \Rightarrow T = \left(\frac{\partial H}{\partial S} \right)_p \quad (8)$$

6.5.3 Entropie d'un gaz parfait

6.5.3.1 Calcul de l'entropie

Les variations d'énergie interne et d'enthalpie de n moles d'un gaz parfait :

$$dU = nC_{V,m} dT = \frac{nR}{\gamma - 1} dT \text{ et } dH = nC_{p,m} dT = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} dT$$

associées aux identités fondamentales (7) et (8), fournissent :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{dU}{T} + \frac{p dV}{T} = \frac{nR}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \text{ car } p = \frac{nRT}{V} \\ &= \frac{nR}{\gamma - 1} [d(\ln T) + d(\ln V^{\gamma-1})] \end{aligned}$$

$$S_{GP} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{T}{T_{\text{ref}}} \left(\frac{V}{V_{\text{ref}}} \right)^{\gamma-1} + S_{\text{ref}} \right] \text{ avec } S_{\text{ref}} = S_{GP}(T_{\text{ref}}, S_{\text{ref}}) = \text{cte} \quad (9)$$

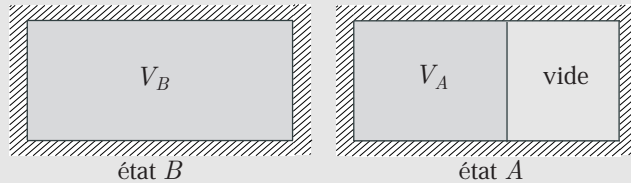
de même que :

$$dS = \frac{dH}{T} - V dp = \frac{n\gamma R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dp}{p} \text{ car } V = \frac{nRT}{p}$$

$$S_{GP} = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left[\left(\frac{T}{T_{\text{ref}}} \right)^\gamma \left(\frac{p}{p_{\text{ref}}} \right)^{1-\gamma} \right] + S'_{\text{ref}} \text{ avec } S'_{\text{ref}} = S_{GP}(T_{\text{ref}}, p_{\text{ref}}) \quad (10)$$



La détente de Joule Gay-Lussac est caractérisée par deux états, de même température ; un état B dans lequel le gaz parfait occupe un volume V_B et un état A dans lequel le volume du gaz vaut $V_A < V_B$.



1. Calculer la différence d'entropie du gaz : $\Delta S_{BA} = S_A - S_B$ entre ces deux états.
2. Quel est le signe de ΔS_{BA} ? en déduire le sens $A \rightarrow B$ ou $B \rightarrow A$ dans lequel le gaz évolue nécessairement.

RÉPONSE

1. L'entropie du gaz parfait dans les états $B(V_B, T_0)$ et $A(V_A, T_0)$ est donnée par la relation (9) :

$$S_B = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{T_0}{T_{\text{ref}}} \left(\frac{V_B}{V_{\text{ref}}} \right)^{\gamma-1} \right] + S_{\text{ref}} \text{ et } S_A = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{T_0}{T_{\text{ref}}} \left(\frac{V_A}{V_{\text{ref}}} \right)^{\gamma-1} \right] + S_{\text{ref}}$$

ce qui procure immédiatement le résultat souhaité :

$$\Delta S_{BA} = S_A - S_B = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{V_A^{\gamma-1}}{V_B^{\gamma-1}} \right) \Rightarrow \Delta S_{BA} = nR \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right)$$

2. Étant donné que $V_A < V_B$, il s'ensuit que :


$$\frac{V_A}{V_B} < 1 \Rightarrow S_A - S_B < 0 \Rightarrow S_A < S_B$$

La variation d'entropie du gaz parfait, isolé thermiquement de l'extérieur, montre qu'une telle transformation est irréversible (sans quoi S_A et S_B auraient été identiques). Or l'évolution irréversible d'un système s'accompagnant nécessairement d'une augmentation d'entropie, la détente de Joule-Gay-Lussac s'effectue de l'état A vers l'état B (dont l'entropie est plus élevée que S_A). Cet exemple illustre également un adage notoire : les gaz occupent spontanément tout le volume disponible.


6.5.3.2 Loi de Laplace

Lorsqu'un gaz parfait réalise une transformation adiabatique réversible ($\delta Q_{\text{rev}} = 0$), encore appelée *transformation isentropique* ($dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = 0$), ses paramètres d'état vérifient les identités suivantes, directement issues des lois (9) et (10) :

$$TV^{\gamma-1} = \text{cte} \quad \text{ou} \quad T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte} \quad \text{ou} \quad pV^\gamma = \text{cte}$$

 Avant d'utiliser la loi de Laplace, assurez-vous impérativement que les trois conditions suivantes sont respectées :

- le système est un gaz parfait ;
- la transformation est adiabatique ;
- la transformation est réversible.

 Au cours d'une transformation adiabatique réversible, n moles d'un gaz parfait passent de l'état $A (p_1, V_1, T_1)$ à l'état $B (p_2, V_2, T_2)$.

1. Calculer directement, en fonction de n , R , T_1 , T_2 et γ (rapport des capacités thermiques molaires du gaz parfait), le travail W reçu par ce gaz de la part des forces de pression extérieures.
2. Retrouver ce résultat en appliquant exclusivement le premier principe de la thermodynamique.

RÉPONSE

1. Lorsque le volume du gaz varie de dV , sous une pression p_{ext} , les forces extérieures de pression exercent un travail $\delta W = -p_{\text{ext}} dV$ où p_{ext} s'identifie à la pression p du gaz (la transformation étant réversible) : $\delta W = -p dV$. En outre, toutes les conditions d'application de la loi de Laplace sont réunies, ce qui justifie que pV^γ demeure constant au cours de la transformation $A \rightarrow B$; on notera K cette constante :

$$pV^\gamma = K \Rightarrow p = \frac{K}{V^\gamma} = K \times V^{-\gamma} \Rightarrow \delta W = -K V^{-\gamma} dV$$

Aussi, au cours de la totalité de la transformation, le gaz reçoit le travail :

$$W = -K \int_{V_1}^{V_2} V^{-\gamma} dV = -\frac{K}{1-\gamma} [V^{1-\gamma}]_{V_1}^{V_2} = \frac{K}{\gamma-1} (V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma})$$

Or, puisque $pV^\gamma = K$ doit être vérifié au cours de la transformation $A \rightarrow B$, cette loi l'est *a fortiori* en A et B , ce qui permet de remplacer K par $p_2 V_2^\gamma$ ou par $p_1 V_1^\gamma$:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{\gamma-1} (K V_2^{1-\gamma} - K V_1^{1-\gamma}) = \frac{1}{\gamma-1} (p_2 V_2^\gamma \times V_2^{1-\gamma} - p_1 V_1^\gamma \times V_1^{1-\gamma}) \\ &= \frac{1}{\gamma-1} (p_2 V_2 - p_1 V_1) \end{aligned}$$

Enfin, en A et B , le gaz parfait suit l'équation d'état : $p_1 V_1 = nRT_1$ et $p_2 V_2 = nRT_2$, ce qui mène finalement à :

$$W = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1)$$

2. Au cours de la transformation $A \rightarrow B$, la température du gaz passe de T_1 à T_2 , ce qui produit une variation de son énergie interne :

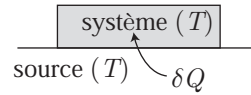
$$\Delta U = nC_{V,m} (T_2 - T_1) = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1)$$

et puisque la transformation est adiabatique ($Q = 0$), le premier principe de la thermodynamique révèle immédiatement que :

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow W = \Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} (T_2 - T_1)$$

6.5.4 Entropie d'une phase condensée

Un système (\mathcal{S}), incompressible et indilatable, qui reçoit une chaleur δQ , voit sa température varier d'une quantité dT telle que : $\delta Q = C dT$. Un tel système peut être mis en contact thermique avec une infinité de thermostats dont les températures T_{th} sont égales, en permanence, à la température T de \mathcal{S} , afin de garantir l'équilibre thermique entre \mathcal{S} et les thermostats. Cet équilibre justifie la nature réversible de la transformation subie par \mathcal{S} et c'est pourquoi : $\delta Q = \delta Q_{rev} = C dT$. Aussi, la variation élémentaire d'entropie de \mathcal{S} est définie par :



$$dS = C \frac{dT}{T_{th}} = C \frac{dT}{T} \Rightarrow S = C \ln \left(\frac{T}{T_{rev}} \right) + S_{ref} \text{ avec } S_{ref} = S(T_{ref}) \quad (11)$$

Un solide (\mathcal{S}), de capacité thermique constante C , se trouve initialement à la température $T = T_0$. Il est mis en contact avec un thermostat de température T_1 , de sorte que T finit par adopter la valeur T_1 .

1. Calculer la variation d'entropie ΔS de \mathcal{S} au cours de cette transformation.
2. En déduire l'expression de l'entropie créée S_c dans \mathcal{S} , en fonction de C , T_0 et T_1 . Que peut-on conclure quant à la réversibilité de cette transformation ?

RÉPONSE

1. Conformément à la loi (11), l'entropie de \mathcal{S} a varié de la valeur $S(T_0) = C \ln \left(\frac{T_0}{T_{ref}} \right) + S_{ref}$ à la valeur $S(T_1) = C \ln \left(\frac{T_1}{T_{ref}} \right) + S_{ref}$; cette variation vaut alors :

$$\Delta S = S(T_1) - S(T_0) = C \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right)$$

2. Sous l'influence de la chaleur δQ reçue par \mathcal{S} , la température T varie de la quantité dS telle que : $\delta Q = C dT$. Or, puisque \mathcal{S} est en contact thermique avec un thermostat de température T_1 , l'entropie que \mathcal{S} reçoit par transfert thermique est définie par :

$$S_e = \int_{T=T_0}^{T_1} \frac{\delta Q}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_{T_0}^{T_1} C dT = \frac{C}{T_1} (T_1 - T_0) = C \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right)$$

Par conséquent, l'entropie S_c créée dans \mathcal{S} au cours de cette transformation vérifie le bilan suivant :

$$\begin{aligned} \Delta S = S_e + S_c &\Rightarrow S_c = \Delta S - S_e = C \ln \left(\frac{T_1}{T_0} \right) - C \left(1 - \frac{T_0}{T_1} \right) \\ &\Rightarrow S_c = C \left[\frac{T_0}{T_1} - 1 - \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right) \right] \end{aligned}$$

Cette relation peut également s'écrire :

$$S_c = C \times f \left(\frac{T_0}{T_1} \right) \text{ avec } f(x) = x - 1 - \ln x$$

Or, la fonction $f(x)$ étant toujours positive, il s'ensuit que :

$$S_c > 0 \text{ pour } T_0 \neq T_1$$

Le signe positif de S_c montre clairement l'irréversibilité de la transformation ; pour effectuer une transformation réversible, il aurait fallu assurer l'équilibre thermique permanent avec le thermostat (ici T ne prend la valeur $T_{th} = T_1$ qu'en fin de transformation).

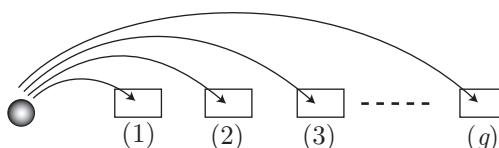
6.5.5 Interprétation statistique de l'entropie

Cette section ne s'adresse qu'aux étudiants de PCSI et ne constitue qu'une introduction qui exigera ultérieurement des développements.

On appelle *état microscopique* un état que peut occuper une particule, caractérisé par son énergie ε . Par exemple, un état peut être décrit par son énergie cinétique ε_c et son énergie potentielle ε_p . Un état d'énergie $\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_p$ peut ainsi correspondre à des couples de valeurs ε_c et ε_p différents, auquel cas l'état d'énergie ε est dit *dégénéré* (par exemple, les couples $\{\varepsilon_c = 5.10^{-21} \text{ J}, \varepsilon_p = 2.10^{-21} \text{ J}\}$ et $\{\varepsilon_c = 3.10^{-21} \text{ J}, \varepsilon_p = 4.10^{-21} \text{ J}\}$ correspondent à un état d'énergie $\varepsilon = 7.10^{-21} \text{ J}$ deux fois dégénéré si cette énergie ε ne peut être obtenue qu'à l'aide de ces deux couples).

Dans cette présentation, nous supposons en outre que toutes les particules peuvent occuper un état d'énergie ε unique, mais g fois dégénéré (g états microscopiques réalisent la même énergie ε). On démontre que g est proportionnel au volume V du système si celui-ci est un gaz parfait.

Considérons un gaz parfait, composé de N particules, occupant un état d'énergie ε , g fois dégénéré (dans le schéma ci-dessous, ces états sont figurés par des cases notées (1), (2), ..., (g)).



Une particule donnée présente ainsi g façons différentes de posséder une énergie ε , et puisque les N particules présentent la même possibilité, alors le nombre total de configurations microscopiques vaut³ :

$$\Omega = \underbrace{g \times g \times g \times \cdots \times g}_{N \text{ fois}} \Rightarrow \Omega = g^N$$

Définition 18 On appelle *entropie statistique* la grandeur :

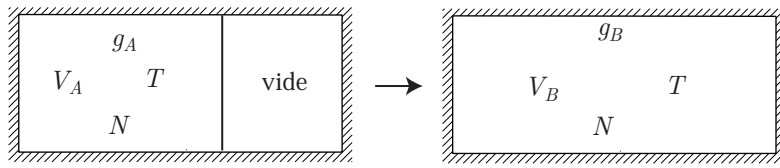
$$S = k_B \ln \Omega$$

où k_B désigne la constante de Boltzmann.

Considérons l'exemple de N particules d'un gaz parfait subissant une détente de Joule-Gay-Lussac, monotherme.

³Il s'agit ici d'une version simplifiée d'un système qui pourrait présenter plusieurs niveaux d'énergies ε_i , de degrés de dégénérescence g_i et occupés chacun par N_i particules, auquel correspondrait un nombre de configurations microscopiques :

$$\Omega = N! \prod_i \frac{g_i^{N_i}}{N_i!}$$



Dans l'état initial, le gaz peut présenter un nombre de configurations $\Omega_A = g_A^N$ tandis que dans l'état B, $\Omega_B = g_B^N$. C'est pourquoi l'entropie du gaz a varié de :

$$\Delta S = S_B - S_A = k_B \ln \left(\frac{\Omega_B}{\Omega_A} \right) = N k_B \ln \left(\frac{g_B}{g_A} \right)$$

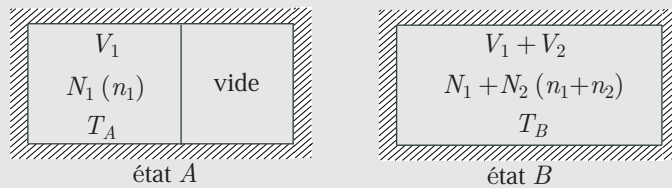
Or, étant donné que g est proportionnel au volume, $\frac{g_B}{g_A} = \frac{V_B}{V_A}$ et compte tenu de la définition de la constante de Boltzmann : $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A}$ (où \mathcal{N}_A est le nombre d'Avogadro), cette variation d'entropie vaut :

$$\Delta S = nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) \quad (n \text{ en moles})$$

On pourra s'assurer que cette variation est compatible avec l'expression thermodynamique (9) de l'entropie (page 590) : $S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{T}{T_{\text{ref}}} \left(\frac{V}{V_{\text{ref}}} \right)^{\gamma - 1} \right] + S_{\text{ref}}$.



On s'intéresse à un mélange de deux gaz parfaits, contenus dans un récipient calorifugé, séparé en deux compartiments par une paroi amovible. Initialement, les deux compartiments, de volumes V_1 et V_2 , contiennent respectivement n_1 et n_2 moles de gaz (ou N_1 et N_2 particules). Lorsque la paroi a disparu, les deux gaz occupent la totalité du volume $V = V_1 + V_2$ du récipient. On note A et B ces deux états.



1. En utilisant le premier principe de la thermodynamique, montrer que ce mélange est monotherme.
2. L'entropie d'un gaz parfait étant donnée par l'identité (9), dans laquelle S_{ref} est supposé proportionnelle à la quantité de matière :

$$S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{T}{T_{\text{ref}}} \left(\frac{V}{V_{\text{ref}}} \right)^{\gamma - 1} \right] + n s_{\text{ref}} \text{ avec } n s_{\text{ref}} = S_{\text{ref}}$$

déterminer la variation d'entropie ΔS_{AB} au cours de ce mélange, en fonction de n_1, n_2, R, V_1, V_2 et V .

3. On note g_1 et g_2 les *degrés de dégénérescence* de l'unique niveau d'énergie ε , commun à toutes les particules, associés aux volumes V_1 et V_2 . Exprimer les entropies S_A et S_B des états A et B (en fonction de N_1 , N_2 , g_1 , g_2 , k_B), puis vérifier que $\Delta S_{AB} = S_B - S_A$ est compatible avec la variation d'entropie calculée précédemment.

RÉPONSE

1. Au cours de la transformation $A \rightarrow B$, la température T est commune aux deux gaz, de capacités thermiques à volume constant C_{V1} et C_{V2} . Aussi, lorsque T passe de T_A à T_B , l'énergie interne de ces gaz varie de :

$$\Delta U_1 = C_{V1} (T_B - T_A) \text{ et } \Delta U_2 = C_{V2} (T_B - T_A)$$

de sorte que l'énergie interne de l'ensemble des deux gaz s'est accrue de :

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = (C_{V1} + C_{V2}) (T_B - T_A)$$

Or, ce système n'a reçu de l'extérieur aucun travail ($W_{\text{ext}} = 0$) et aucune chaleur ($Q = 0$), en raison de quoi le premier principe de la thermodynamique s'exprime par :

$$\Delta U = Q + W_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow (C_{V1} + C_{V2}) (T_B - T_A) = 0 \Rightarrow T_B = T_A$$

ce qui suffit à montrer que cette transformation s'effectue à température constante.

2. Initialement, le système est constitué de deux gaz, d'entropies :

$$S_{A1} = \frac{n_1 R}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{T_A}{T_{\text{ref}}} \left(\frac{V_1}{V_{\text{ref}}} \right)^{\gamma - 1} \right] + n_1 s_{\text{ref}} \text{ et } S_{A2} = \frac{n_2 R}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{T_A}{T_{\text{ref}}} \left(\frac{V_2}{V_{\text{ref}}} \right)^{\gamma - 1} \right] + n_2 s_{\text{ref}}$$

de sorte que l'entropie initiale du système vaut :

$$S_A = S_{A1} + S_{A2} = \frac{(n_1 + n_2) R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_A}{T_{\text{ref}}} \right) + n_1 R \ln \left(\frac{V_1}{V_{\text{ref}}} \right) + n_2 R \ln \left(\frac{V_2}{V_{\text{ref}}} \right) + (n_1 + n_2) s_{\text{ref}}$$

En revanche, l'état B étant constitué de $n = n_1 + n_2$ moles de gaz parfait, de température T_A , occupant le volume $V = V_1 + V_2$, son entropie vaut :

$$\begin{aligned} S_B &= \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \left[\frac{T_A}{T_{\text{ref}}} \left(\frac{V}{V_{\text{ref}}} \right)^{\gamma - 1} \right] \\ &= \frac{(n_1 + n_2) R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_A}{T_{\text{ref}}} \right) + (n_1 + n_2) R \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_{\text{ref}}} \right) + (n_1 + n_2) s_{\text{ref}} \end{aligned}$$

Aussi, au cours de la transformation $A \rightarrow B$, l'entropie du système varie de la quantité :

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= S_B - S_A = (n_1 + n_2) R \ln \left(\frac{V_1 + v_2}{V_{\text{ref}}} \right) - n_1 R \ln \left(\frac{V_1}{V_{\text{ref}}} \right) - n_2 R \ln \left(\frac{V_2}{V_{\text{ref}}} \right) \\ &\Rightarrow \Delta S_{AB} = n_1 R \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right) + n_2 R \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_2} \right) \end{aligned}$$

3. Initialement, dans chacun des compartiments se trouvent N_1 et N_2 particules susceptibles d'occuper g_1 et g_2 états ; le nombre total de configurations microscopiques :

$$\Omega_A = \Omega_1 \times \Omega_2 = g_1^{N_1} \times g_2^{N_2}$$

conduit à l'expression de l'entropie initiale du système :

$$S_A = k_B \ln \Omega_A = N_1 k_B \ln g_1 + N_2 k_B \ln g_2$$

Quant à l'état B , il comporte $N = N_1 + N_2$ particules susceptibles d'occuper g_B états, ce qui correspond à un nombre de configurations microscopiques :

$$\Omega_B = g_B^N$$

Or, étant donné que le degré de dégénérescence g est proportionnel au volume, il existe une constante α telle que :

$$\begin{cases} g_1 = \alpha V_1 \\ g_2 = \alpha V_2 \end{cases} \text{ et } g_B = \alpha (V_1 + V_2) \Rightarrow g_B = g_1 + g_2 \Rightarrow \Omega_B = (g_1 + g_2)^N$$

C'est pourquoi l'entropie de l'état B vaut :

$$S_B = k_B \ln \Omega_B = N k_B \ln (g_1 + g_2) = (N_1 + N_2) k_B \ln (g_1 + g_2)$$

Ces calculs fournissent la variation d'entropie du système :

$$\begin{aligned} \Delta S_{AB} &= S_B - S_A = (N_1 + N_2) k_B \ln (g_1 + g_2) - N_1 k_B \ln g_1 - N_2 k_B \ln g_2 \\ &\Rightarrow \Delta S_{AB} = N_1 k_B \ln \left(\frac{g_1 + g_2}{g_1} \right) + N_2 k_B \ln \left(\frac{g_1 + g_2}{g_2} \right) \end{aligned}$$

Non seulement la proportionnalité de g avec V se traduit par :

$$\frac{g_1 + g_2}{g_1} = \frac{V_1 + V_2}{V_1} \text{ et } \frac{g_1 + g_2}{g_2} = \frac{V_1 + V_2}{V_2}$$

mais, de surcroît, la définition de la constante de Boltzmann : $k_B = \frac{R}{\mathcal{N}_A}$ et celle du nombre d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = \frac{N}{n}$, fournissent : $N k_B = nR$, de sorte que :

$$\Delta S_{AB} = n_1 R \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right) + n_2 R \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_2} \right)$$

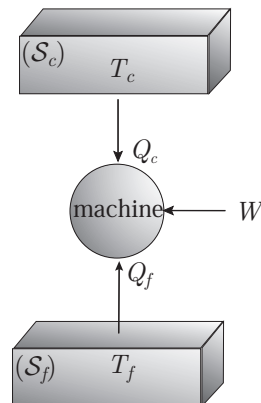
ce qui confirme l'expression de ΔS_{AB} trouvée à la question précédente, et suggère l'identité des définitions statistique et thermodynamique de l'entropie.

6.6 Machines thermiques

6.6.1 Définitions

Définition 19 Une machine thermique ditherme est une machine qui effectue des cycles entre une source chaude \mathcal{S}_c , de température T_c , et une source froide \mathcal{S}_f , de température T_f . \mathcal{S}_c lui fournit la chaleur Q_c , \mathcal{S}_f la chaleur Q_f et elle reçoit un travail W de l'extérieur.

Les grandeurs Q_c , Q_f et W sont toujours comptées positivement lorsqu'elles sont reçues par la machine, ce dont on rend compte à l'aide de flèches dans les schémas. Cependant, pour mieux rendre compte des transferts énergétiques réels, il est souvent recommandé de représenter ces transferts dans le sens où ils s'effectuent vraiment et d'explicitier leurs signes.



Définition 20 *Le moteur est une machine thermique qui fournit du travail à l'extérieur, en recevant de la chaleur de la source chaude S_c et en cédant de la chaleur à la source froide S_f .*

Ce fonctionnement impose aux transferts d'énergie les signes suivants :

$$\begin{cases} Q_c > 0 \Rightarrow Q_c = |Q_c| \\ Q_f < 0 \Rightarrow Q_f = -|Q_f| \\ W < 0 \Rightarrow W = -|W| \end{cases}$$

Au cours d'un cycle, l'énergie interne ne varie pas, ce qui se traduit par :

$$\Delta U = Q_c + Q_f + W \Rightarrow 0 = |Q_c| - |Q_f| - |W| \Rightarrow |W| = |Q_c| - |Q_f| \quad (12)$$

Définition 21 *Le rendement η du moteur est le rapport du travail qu'il fournit ($|W|$) à la chaleur qu'il consomme ($|Q_c|$) :*

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_c|} = -\frac{W}{Q_c}$$

Compte tenu de l'identité (12), on utilisera aussi la relation :

$$\eta = 1 - \frac{|Q_f|}{|Q_c|} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}$$

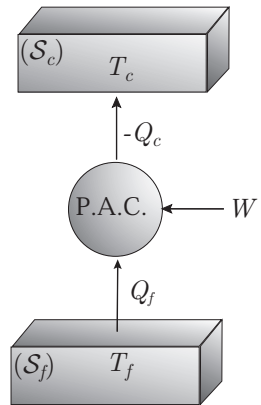
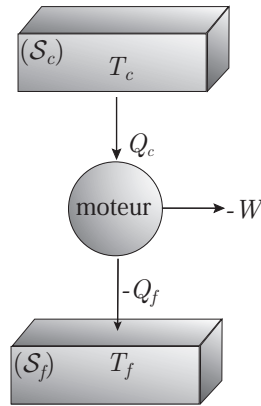
Définition 22 *Une pompe à chaleur (PAC) utilise un travail extérieur afin de transmettre de la chaleur à la source chaude, en prélevant de la chaleur à la source froide.*

Ces transferts d'énergie ont pour signes :

$$\begin{aligned} W > 0 &\Rightarrow W = |W| \\ Q_f > 0 &\Rightarrow Q_f = |Q_f| \\ Q_c < 0 &\Rightarrow Q_c = -|Q_c| \end{aligned}$$

Définition 23 *Le coefficient d'efficacité ε_{PAC} d'une pompe à chaleur est le rapport de la chaleur qu'elle cède à S_c par le travail quelle consomme :*

$$\varepsilon_{PAC} = \frac{|Q_c|}{|W|} = -\frac{Q_c}{W}$$



Au cours d'un cycle, le premier principe de la thermodynamique révèle que :

$$\Delta U = W + Q_f + Q_c \Rightarrow 0 = |W| + |Q_f| - |Q_c| \Rightarrow |Q_c| = |W| + |Q_f|$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{PAC} = 1 + \frac{|Q_f|}{|W|}$$

Définition 24 Une machine frigorifique utilise également un travail extérieur afin de prélever de la chaleur à la source froide, en la cédant à la source chaude.

À nouveau, les signes des transferts d'énergie :

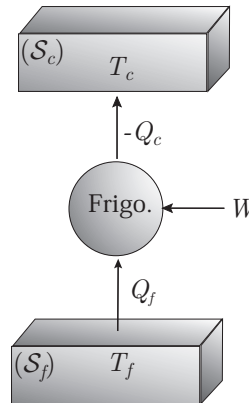
$$W > 0 \Rightarrow W = |W|$$

$$Q_f > 0 \Rightarrow Q_f = |Q_f|$$

$$Q_c < 0 \Rightarrow Q_c = -|Q_c|$$

associés au premier principe de la thermodynamique, permettent d'établir que :

$$|Q_c| = |W| + |Q_f| \tag{13}$$



Définition 25 Le coefficient d'efficacité ε_F d'une machine frigorifique est le rapport de la chaleur retirée à S_f par le travail consommé :

$$\varepsilon_F = \frac{|Q_f|}{|W|} = \frac{Q_f}{W}$$

La relation (13) fournit ainsi :

$$\varepsilon_F = \frac{|Q_c|}{|W|} - 1$$



n moles d'un gaz parfait effectuent des cycles décrits par :

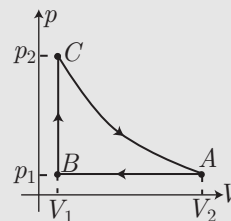
- une transformation isobare :

$$A(p_1, V_2, T_A) \rightarrow B(p_1, V_1, T_B)$$

- une transformation isochore :

$$B(p_1, V_1, T_B) \rightarrow C(p_2, V_1, T_C)$$

- une transformation adiabatique réversible : $C \rightarrow A$



1. Expliquer brièvement pourquoi ce cycle décrit le fonctionnement d'un moteur.
2. Déterminer les chaleurs reçues par ce moteur au cours de chacune des transformations, en fonction de n , T_A , T_B , T_C et des capacités thermiques molaires C_{pm} (à pression constante) et C_{Vm} (à volume constant).
En déduire les chaleurs Q_f et Q_c échangées au cours d'un cycle.

3. Donner, en fonction de $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{Vm}}$, p_1 , V_1 et V_2 , l'expression du rendement η de ce cycle.

En notant $a = \frac{V_2}{V_1}$, établir que :

$$\eta = 1 + \gamma \times \frac{1 - a}{a^{\gamma-1}}$$

RÉPONSE

1. Le travail W reçu par le système s'identifie à l'aire \mathcal{A} du cycle, parcouru dans le sens trigonométrique. Or, puisque ce cycle est parcouru dans le sens inverse :

$$W = -\mathcal{A} < 0$$

Le signe négatif de W révèle que la machine fournit du travail et ne peut donc être qu'un moteur.

2. Au cours de la transformation isochore $A \rightarrow B$, les n moles de gaz parfait reçoivent une chaleur δQ_{AB} qui s'identifie à leur variation d'enthalpie dH (car $dH = \delta Q + V dp$ et $dp = 0$), auquel cas :

$$\delta Q_{AB} = dH = nC_{pm} dT \Rightarrow Q_{AB} = nC_{pm} \int_{T_A}^{T_B} dT = nC_{pm} (T_B - T_A)$$

Étant donné que $T_B < T_A$, cette identité révèle que $Q_{AB} < 0$.

De même, au cours de la transformation isochore $B \rightarrow C$, le gaz reçoit une chaleur δQ_{BC} égale à sa variation d'énergie interne (car $dU = \delta Q - p dV$, avec $dV = 0$) :

$$\delta Q_{BC} = dU = nC_{Vm} dT \Rightarrow Q_{BC} = nC_{Vm} \int_{T_B}^{T_C} dT = nC_{Vm} (T_C - T_B)$$

où $T_C > T_B$ permet de remarquer que :

$$Q_{BC} = nC_{Vm} (T_C - T_B) > 0$$

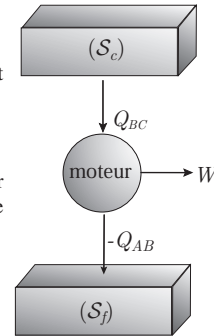
Quant à la transformation adiabatique $C \rightarrow A$, elle s'effectue évidemment sans transfert thermique, en raison de quoi :

$$Q_{CA} = 0$$

Cette étude montre que, pendant un cycle, la machine cède une chaleur $-Q_{AB}$ à l'extérieur et reçoit la chaleur Q_{BC} . Il est désormais possible d'identifier les sources froides et chaudes pour leur associer les chaleurs :

$$Q_f = Q_{AB} = nC_{pm} (T_B - T_A) < 0$$

$$\text{et } Q_c = Q_{BC} = nC_{Vm} (T_C - T_B) > 0$$



3. De ce qui précède, découle l'expression du rendement de ce moteur :

$$\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{nC_{pm} (T_B - T_A)}{nC_{Vm} (T_C - T_B)} = 1 + \frac{C_{pm}}{C_{Vm}} \times \frac{nRT_B - nRT_A}{nRT_C - nRT_B}$$

où l'équation d'état des gaz parfaits est respectée aux points A , B et C :

$$nRT_A = p_1 V_2 \quad nRT_B = p_1 V_1 \quad nRT_C = p_2 V_1$$

Par suite :

$$\eta = 1 + \gamma \times \frac{p_1 V_1 - p_1 V_2}{p_2 V_1 - p_1 V_1} = 1 + \gamma \frac{p_1 (1 - a)}{p_2 - p_1} \text{ car } V_2 = a V_1$$

Enfin, la transformation adiabatique et réversible du gaz parfait $C \rightarrow A$ justifie l'emploi de la loi de Laplace ($pV^\gamma = \text{cte}$) aux points A et C :

$$p_2 V_1^\gamma = p_1 V_2^\gamma \Rightarrow p_2 = p_1 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma \Rightarrow p_2 = p_1 \times a^\gamma$$

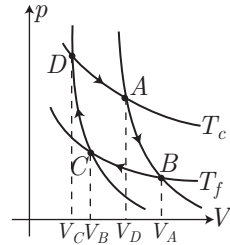
d'où il ressort que :

$$\eta = 1 + \gamma \times \frac{1 - a}{a^{\gamma-1}}$$

6.6.2 Moteur de Carnot

Il s'agit d'un moteur fictif, constitué d'un gaz parfait qui effectue un cycle réversible entre deux sources de chaleur aux températures T_c et $T_f < T_c$; les transformations $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$ sont adiabatiques, tandis que les transformations $D \rightarrow A$ et $B \rightarrow C$ sont isothermes (aux températures respectives T_c et T_f).

Au cours de chacune des transformations isothermes, l'énergie interne du gaz parfait ne varie pas, alors que le gaz reçoit la chaleur δQ et le travail $\delta W = -p_{\text{ext}} dV = -p dV$ (car $p_{\text{ext}} = p$). Le premier principe de la thermodynamique impose alors :



$$dU = \delta Q - p dV = 0 \Rightarrow \delta Q = p dV = nRT \frac{dV}{V}$$

ce qui conduit à :

$$\delta Q_{BC} = nRT_f \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V} \Rightarrow Q_{BC} = nRT_f \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right) < 0$$

et $Q_{DA} = nRT_c \ln \left(\frac{V_A}{V_D} \right) > 0$.

Enfin, compte tenu des signes de Q_{BC} et Q_{DA} , et puisque $Q_{AB} = Q_{DC} = 0$ (les transformations sont adiabatiques), il est aisé d'identifier Q_f à Q_{BC} et Q_c à Q_{DA} , auquel cas ce moteur a pour rendement :

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{T_f}{T_c} \times \frac{\ln(V_C/V_B)}{\ln(V_A/V_D)}$$

En outre, les transformations adiabatiques réversibles $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$ justifient l'emploi de la loi de Laplace ($TV^{\gamma-1} = \text{cte}$) :

$$\begin{cases} T_c V_A^{\gamma-1} = T_f V_B^{\gamma-1} \\ T_c V_D^{\gamma-1} = T_f V_C^{\gamma-1} \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{V_A}{V_D} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_B}{V_C} \right)^{\gamma-1} \Rightarrow \ln \left(\frac{V_A}{V_D} \right) = -\ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right)$$

ce qui mène, finalement, à :

$$\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Les relations de Clausius permettent également d'énoncer les théorèmes de Carnot :

Premier théorème

Toute machine thermique effectuant des cycles dithermes réversibles présente le même rendement que le moteur de Carnot fonctionnant entre les mêmes sources de chaleur :

$$\eta_{\text{rév}} = \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

Second théorème

Le rendement de la machine de Carnot excède celui de tout autre moteur qui effectue des cycles, de manière irréversible, entre les mêmes sources de chaleur.

$$\eta_{\text{irr}} < \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_f}{T_c}$$

6.7 Changements d'état

6.7.1 Définitions

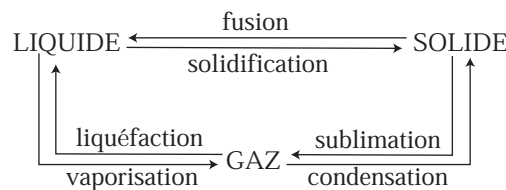
Définition 26 On appelle phase un système physique dans lequel tous les paramètres intensifs sont uniformes. Par exemple, l'eau pure peut constituer une phase, tandis qu'un mélange d'eau et d'huile ne peut en être une.

On s'intéressera ici exclusivement aux phases solide, liquide et gazeuse (encore appelés états physiques), en excluant toutes les autres (plasma, état vitreux, état superfluide, ...).

Définition 27 Un changement d'état désigne la modification de la phase sous laquelle un corps se présente.

Définition 28 On appelle vapeur la phase gazeuse d'un corps dont la phase d'équilibre, à température et pression ordinaires, est liquide ou solide (la vapeur d'eau existe mais pas celle d'oxygène).

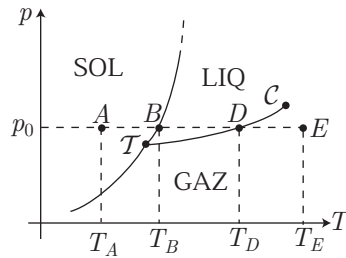
Parmi les changements d'état, on rencontrera souvent les suivants :



6.7.2 Diagrammes de changement d'état

6.7.2.1 Diagramme (p, T)

Il s'agit de représenter, en fonction de diverses valeurs de la pression et de la température, la phase sous laquelle se présente un corps pur. Des courbes de saturation (courbes de fusion, de vaporisation et de sublimation) délimitent des domaines d'existence des états solide (SOL), liquide (LIQ) et gazeux (GAZ). De manière générale, ces diagrammes présentent l'allure ci-dessous :



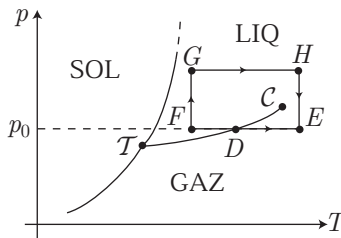
Une transformation monobare $A \rightarrow E$, au cours de laquelle la température d'un corps augmente, provoque la succession des évènements suivants :

- de A à B , le solide est échauffé de la température T_A à la température T_B ;
- en B se produit la fusion du corps, pendant laquelle la température demeure égale à T_B tant que coexistent les phases solide et liquide ;
- lorsque la fusion est totale, le corps liquide est échauffé de la température T_B à la température T_D ;
- en D , la vaporisation du corps se produit à la température T_D , constante pendant la cohabitation des phases liquide et gazeuse ;
- lorsque le corps est totalement gazeux, sa température peut augmenter de T_D à T_E .

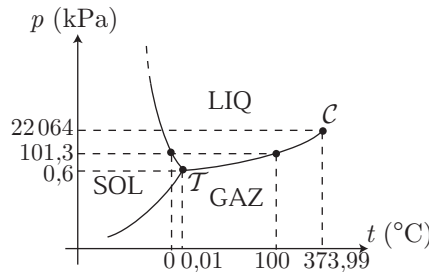
Ce diagramme révèle deux points singuliers :

- le *point triple* \mathcal{T} , où coexistent simultanément les trois phases.
- le *point critique* C , à partir duquel est définie la phase *fluide*.

Le changement d'état $F \rightarrow E$ peut être réalisé de plusieurs manières : à pression p_0 constante, auquel cas un changement d'état est observé au point D , ou par compression isotherme FG , puis échauffement monobare GH et enfin détente isotherme HE . Dans ce cas, la transformation FGH passant au-dessus du point critique C , le changement d'état n'est observé en aucun point ; cet état où liquide et gaz ne sont plus discernables est appelé *fluide*.



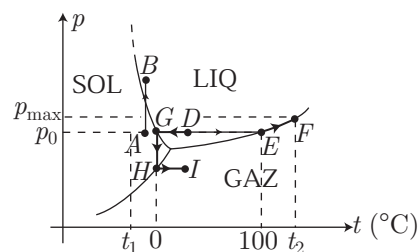
Le cas de l'eau est cependant atypique par la pente négative que présente la courbe de fusion :



Certains phénomènes s'interprètent directement à partir de ce diagramme de phases :

Pourquoi les patins glissent-ils ?

À pression ordinaire p_0 , l'eau est représentée par l'état A , à la température t_1 . Un patin à glace, par sa forme, exerce une forte pression locale, à température constante ; l'eau subit la transformation $A \rightarrow B$ qui l'amène à l'état liquide. La nappe liquide qui se forme alors sous la lame du patin facilite son glissement.

**La lyophilisation**

Afin de débarrasser de leur eau certaines denrées alimentaires (café, lait, ...) il n'est pas souhaitable de porter ces aliments à la température d'ébullition de l'eau. C'est pourquoi la lyophilisation est pratiquée en plusieurs étapes : un refroidissement monobare $D \rightarrow G$ qui provoque la solidification de l'eau et une stérilisation microbienne, puis une détente $G \rightarrow H$, à température constante, à l'issue de laquelle la glace redevient liquide (en H). Enfin, un simple échauffement qui amène la vapeur d'eau à sa température initiale.

L'autocuiseur

L'eau, initialement à la pression p_0 , se trouve dans l'état D . Un échauffement $D \rightarrow E$ permet d'atteindre sa température d'ébullition, ce qui provoque une accumulation de vapeur d'eau dans l'autocuiseur. La pression augmente alors en suivant la portion de courbe $E \rightarrow F$ (ce qui n'est pas le cas lorsque l'ébullition est effectuée à pression p_0 ambiante et indépendante de la quantité de vapeur formée) jusqu'à ce que la pression atteigne une valeur *maximum* p_{\max} , imposée par une soupape. Dans l'état F , le mélange liquide-vapeur atteint une température t_2 supérieure à 100°C , ce qui accélère la cuisson des aliments.

6.7.2.2 Diagramme de Clapeyron

Considérons n_0 moles d'un gaz parfait contenu dans un récipient de volume initial V_0 , muni d'un piston, et dont la température est maintenue à une valeur T_0 constante. Tandis que le volume V du récipient diminue, le gaz subit plusieurs transformations.

- Jusqu'au volume V_g , le corps reste gazeux et suit la loi des gaz parfaits :

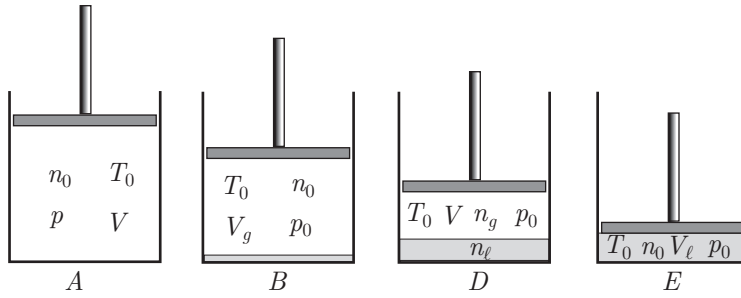
$$pV = n_0RT \Rightarrow p = \frac{n_0RT}{V}$$

- Dès que V devient inférieur à V_g , une partie du gaz se liquéfie tandis que la pression du gaz restant demeure constante (p_0). Tout se passe comme si les molécules de gaz disparaissaient dans la phase liquide afin de maintenir la pression à sa valeur p_0 . Quant aux n_g moles de gaz restant, elles se comportent comme un gaz parfait :

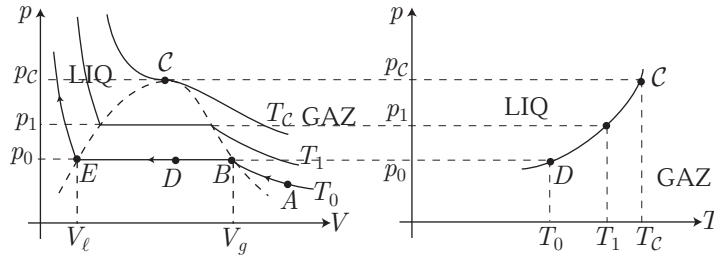
$$p_0V = n_gRT \Rightarrow n_g = \frac{p_0V}{RT_0} < n_0$$

Cette loi montre que la phase gazeuse doit s'appauvrir pour que $p = p_0$ demeure constant lorsque V diminue.

- Lorsque V prend la valeur V_ℓ , la phase gazeuse disparaît totalement au profit de la phase liquide qui comporte alors $n_\ell = n_0$ moles de particules.
- Une nouvelle diminution de V provoque une brusque augmentation de la pression au sein de la phase liquide, peu compressible.



L'ensemble des transformations $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E$, représenté sur un diagramme de Clapeyron (p, V), fait apparaître un palier de saturation pour la pression p .



Les diagrammes (p, V) et (p, T) sont étroitement liés car, pour chaque isotherme T_i , le diagramme (p, T) indique la pression p_i à laquelle est observé un palier de saturation sur le diagramme de Clapeyron (p, V). En outre, sur ce dernier diagramme, le point critique C apparaît comme l'intersection de la *courbe de rosée* (ensemble des points B) et la *courbe d'ébullition* (ensemble des points E). L'isotherme T_c (température critique) passe par C avec une tangente nulle et un point d'inflexion, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_{T_c} = 0 \text{ et } \left. \frac{\partial^2 p}{\partial V^2} \right|_{T_c} = 0$$

6.7.3 Vapeur sèche et vapeur saturante

Définition 29 La vapeur sèche est la phase gazeuse d'un corps en l'absence de sa phase liquide. Elle suit l'équation d'état des gaz parfaits, en vertu de laquelle la pression p dépend du volume V :

$$pV = nRT \text{ (} n \text{ est constant).}$$

Définition 30 On appelle vapeur saturante la phase gazeuse d'un corps pur en présence de sa phase liquide. Elle suit l'équation d'état des gaz parfaits, dans laquelle la pression prend la valeur constante p_s , tandis que n varie avec V :

$$p_s V = nRT \text{ (} n \text{ est variable).}$$

Définition 31 La pression p_s (qui dépend de la température), à laquelle peuvent co-exister les phases liquide et gazeuse, est appelée pression de vapeur saturante.



On considère un cylindre droit, de section $S = 10^{-2} \text{ m}^2$, fermé par un piston mobile, sans frottements et de masse négligeable. Soit h la hauteur du cylindre, dont les parois seront supposées parfaitement diathermes.

Le cylindre contient une masse $m_0 = 1 \text{ g}$ d'eau à la pression $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$. Il est en contact thermique avec un thermostat à la température $T_1 = 423 \text{ K}$.

- (a) Dans cet état initial, donner l'état physique de l'eau.
(b) Quelle est la hauteur initiale h_0 ?
- On met le cylindre en contact thermique avec un autre thermostat, à la température $T_0 = 373 \text{ K}$, et on amène sa hauteur jusqu'à une valeur $h_1 = 10 \text{ cm}$.
(a) À partir de quelle hauteur, h_s , doit se produire le changement d'état de l'eau ?
(b) Calculer la masse d'eau liquide présente dans le cylindre, lorsque $h = h_1$.

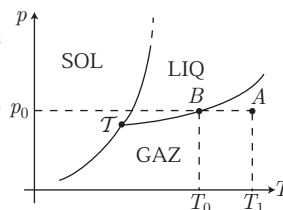
Données :

- masse molaire de l'eau : $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- pression de vapeur saturante de l'eau pour $T_0 = 373 \text{ K}$: $p_0 = 10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ bar}$;
- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

RÉPONSE

1.

- (a) L'eau est caractérisée par les états $A \left(\begin{matrix} p_0 = 1 \text{ bar} \\ T_1 = 423 \text{ K} \end{matrix} \right)$ et $B \left(\begin{matrix} p_0 = 1 \text{ bar} \\ T_0 = 373 \text{ K} \end{matrix} \right)$, ce dernier étant un point de la courbe de vaporisation. Aussi, le tracé d'un diagramme (p, T) révèle immédiatement que, dans l'état A , l'eau est entièrement gazeuse.



- (b) Les $n_0 = \frac{m_0}{M}$ moles de vapeur d'eau se comportant comme un gaz parfait, il s'ensuit que :

$$p_0 V_0 = n_0 R T_1 = \frac{m_0 R T_1}{M} \Rightarrow V_0 = S h_0 = \frac{m_0 R T_1}{M p_0} \Rightarrow h_0 = \frac{m_0 R T_1}{M p_0 S}$$

Application numérique :

$$h_0 = \frac{10^{-3} \times 8,31 \times 423}{18 \cdot 10^{-3} \times 10^5 \times 10^{-2}} \Rightarrow h_0 = 19,5 \text{ cm}$$

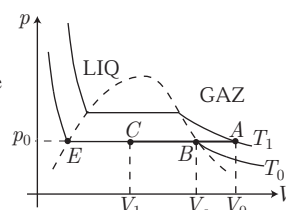
2. (a) À la température $T_0 = 273 \text{ K}$, le changement d'état des $n_0 = \frac{m_0}{M}$ moles de vapeur d'eau se produit à la pression de vapeur saturante p_0 , lorsque le volume $V_s = S h_s$ vérifie l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p_0 V_s = n_0 R T_0 \Rightarrow V_s = S h_s = \frac{n_0 R T_0}{p_0} \Rightarrow h_s = \frac{m_0 R T_0}{M p_0 S}$$

Le gaz parfait effectue la transformation $A \rightarrow B$ qui l'amène au point B de la courbe de rosée.

Application numérique :

$$h_s = \frac{10^{-3} \times 8,31 \times 373}{18 \cdot 10^{-3} \times 10^5 \times 10^{-2}} \Rightarrow h_s = 17,2 \text{ cm}$$



- (b) En diminuant à nouveau le volume du récipient, l'eau effectue la transformation $B \rightarrow C$, à l'issue de laquelle un mélange de n_v moles de vapeur d'eau et n_ℓ moles d'eau liquide est réalisé. Or, étant donné que la vapeur d'eau constitue toujours un gaz parfait, il s'ensuit que :

$$p_0 V_1 = n_v RT_0 \Rightarrow n_v = \frac{p_0 V_1}{RT_0}$$

Ce résultat indique que des n_0 moles d'eau initialement introduites, n_v sont sous forme de vapeur et n_ℓ sous forme liquide, en raison de quoi la loi de conservation de la matière impose :

$$n_0 = n_v + n_\ell \Rightarrow n_\ell = n_0 - n_v = n_0 - \frac{p_0 V_1}{RT_0}$$

ce qui correspond à une masse d'eau liquide :

$$m_\ell = M \left(n_0 - \frac{p_0 V_1}{RT_0} \right) = m_0 - \frac{M p_0 S h_1}{RT_0}$$

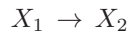
Application numérique :

$$m_\ell = 10^{-3} - \frac{18 \cdot 10^{-3} \times 10^5 \times 10^{-2} \times 0,1}{8,31 \times 373} \Rightarrow m_\ell = 0,42 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 0,42 \text{ g}$$

6.7.4 Enthalpie et entropie de changement d'état

6.7.4.1 L'enthalpie

Soit un corps pur X effectuant le changement d'état :



au cours duquel son enthalpie varie de $\Delta H_{1 \rightarrow 2} = H_2 - H_1$. Cette transformation s'effectuant à pression constante, cette variation d'enthalpie correspond à la chaleur $Q_{1 \rightarrow 2}$ que reçoit le corps pur pour effectuer cette transformation.

Définition 32 Si une masse m de corps pur s'est ainsi transformée, l'enthalpie massique $h_{1 \rightarrow 2}$ de changement d'état est définie par :

$$\Delta h_{1 \rightarrow 2} = h_2 - h_1 \Rightarrow Q_{1 \rightarrow 2} = m \times \Delta h_{1 \rightarrow 2} = \Delta H_{1 \rightarrow 2}$$

La grandeur $\Delta h_{1 \rightarrow 2}$ est appelée chaleur latente de changement d'état, souvent notée $\ell_{1 \rightarrow 2}$:

$$\Delta H_{1 \rightarrow 2} = m \ell_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2}$$

Soient ℓ_{vap} , ℓ_{sub} et ℓ_{fus} les chaleurs latentes de vaporisation, de sublimation et de fusion au point triple \mathcal{T} ; un cycle autour de ce point permet d'établir que :

$$\ell_{\text{sub}} = \ell_{\text{fus}} + \ell_{\text{vap}} \quad (14)$$

6.7.4.2 L'entropie

Au cours d'un changement d'état $X_1 \rightarrow X_2$, un système physique qui reçoit la chaleur $Q_{\text{rev}} = m \ell_{1 \rightarrow 2}$ de manière réversible, à la température $T_{1/2}$ de ce changement d'état, présente une variation d'entropie :

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = \frac{m \ell_{1 \rightarrow 2}}{T_{1/2}}$$

Remarque – La fusion : SOLIDE \rightarrow LIQUIDE, la vaporisation : LIQUIDE \rightarrow GAZ et la sublimation : SOLIDE \rightarrow GAZ sont des changements d'état qui conduisent à des phases moins ordonnées. De fait, compte tenu de la définition statistique de l'entropie S , cette dernière augmente :

$$\Delta S_{fus} > 0 \quad \Delta S_{vap} > 0 \quad \Delta S_{sub} > 0$$

ce qui signifie également que les chaleurs latentes associées à ces changements d'état sont positives :

$$l_{fus} > 0 \quad l_{vap} > 0 \quad l_{sub} > 0$$

Compte tenu de l'identité (14), les relations précédentes mènent aussi à :

$$l_{sub} > \sup \{l_{fus}, l_{vap}\} \text{ en } \mathcal{T}$$

● **175** _____ **Lycée Pissaro, Pontoise**

5 min.

Équation d'état

MPSI-PCSI-PTSI

1. L'équation d'état d'un gaz parfait est : $pV = nRT$. On impose une variation dV au volume et dT à la température. Quelle est la variation dp de la pression ?
2. Répondre à la même question si la mole de gaz suit l'équation d'état de Van Der Waals :

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) (V - b) = RT$$

● **176** _____ **Lycée Hoche, Versailles**

5 min.

Thermométrie

MPSI-PCSI-PTSI

Soit un fil conducteur de l'électricité (à pression et différence de potentiel constantes), dont la résistance R varie avec la température t (exprimée en °C) selon la loi :

$$R = R_0 (1 + at + bt^2)$$

où R_0 , a et b sont des constantes.

1. Préciser l'échelle linéaire centésimale de température, notée θ , que définit le thermomètre. On exprimera notamment θ en fonction de a , b et t .
2. Exprimer l'écart $\Delta = t - \theta$ en fonction de t , entre 0 et 100°C. Évaluer la température t_1 correspondant à l'écart *maximum*.

● **177** _____ **Lycée Champollion, Grenoble**

5 min.

Théorie cinétique des gaz

MPSI-PCSI-PTSI

On donne :

$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	constante de Boltzmann
$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	nombre d'Avogadro
$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$	constante des gaz parfaits
$M = 40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \dots\dots\dots$	masse molaire de l'argon

Calculer la vitesse moyenne des atomes d'argon se trouvant dans une enceinte de volume 1 litre, à la température 20°C.

● **178** _____ **Lycée Henry Wallon, Valenciennes**

10 min.

Équation d'état

MPSI-PCSI-PTSI

La différentielle de la pression d'un gaz est donnée en fonction des variables indépendantes T et V , par l'équation, relative à une mole :

$$dp = -\frac{RT}{V^2} \left(1 + \frac{2A}{V}\right) dV + \frac{R}{V} \left(1 + \frac{A}{V}\right) dT$$

Déterminer complètement l'équation d'état du gaz, sachant qu'aux faibles pressions, le gaz se comporte comme un gaz parfait.

● **179** ————— **Lycée Camille Guérin, Poitiers**

10 min.

Coefficients thermoélastiques

MPSI-PCSI-PTSI

Soit de l'huile liquide remplissant juste une ampoule scellée, dont on définit les coefficients :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1} \text{ et } \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = 8,5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$$

- Déterminer, en fonction de α et χ_T , la dérivée $\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V$.
- Quelle augmentation de température peut-elle supporter sans rupture, sachant que le verre dont est composée l'ampoule peut supporter une surpression maximale $\Delta p_{\max} = 10^6 \text{ Pa}$?

● **180** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

10 min.

Théorie cinétique des gaz

MPSI-PCSI-PTSI

Trois systèmes, comportant chacun n moles :

- (1) de molécules de H_2 à 320 K pour le premier système ;
- (2) d'atomes He à 160 K pour le deuxième système ;
- (3) d'atomes Ar à 400 K pour le troisième système.

ont des vitesses quadratiques moyennes telles que :

$$v_B^* = 2 v_A^* \text{ et } v_C^* = 4 v_A^*$$

- Identifier à quel système appartient chacune des vitesses quadratiques moyennes v_A^* , v_B^* et v_C^* , en justifiant la réponse.
- Parmi les trois systèmes, quel est celui qui a la plus grande énergie cinétique moyenne de translation par particule ?

Données : masses molaires atomiques (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) : H = 1, He = 4, Ar = 40

● **181** ————— **Lycée Camille Guérin, Poitiers**

15 min.

Coefficients thermoélastiques

MPSI-PCSI-PTSI

Soit un fluide pour lequel il existe une équation d'état de la forme $f(p, V, T) = 0$. On définit, pour une mole de ce fluide, les coefficients :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{pV} \text{ et } \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{p} + \frac{a}{V}$$

où a et R sont des constantes.

Sachant que, lorsque p tend vers zéro, ce fluide se comporte comme un gaz parfait, trouver son équation d'état.

● **182** **Lycée Lakanal, Sceaux**

15 min.

Thermométrie

MPSI-PCSI-PTSI

Un thermomètre à mercure est destiné à être utilisé entre 0 et 150°C. On négligera la dilatation de l'enveloppe de verre. La dilatation moyenne du mercure, entre 0 et t (°C), est :

$$\alpha_0^t = \frac{V - V_0}{V_0 t} = a - bt + ct^2$$

où a , b , c sont des constantes positives et t est la température Celsius.

On veut définir une échelle linéaire centésimale de température θ à partir du volume V de mercure.

1. Déterminer l'échelle θ en fonction de a , b , c et t .
2. Exprimer l'écart $\Delta = \theta - t$.
3. Sachant que $\theta = t$ à $t_1 = 150^\circ\text{C}$, déterminer les températures t_2 et t_3 pour lesquelles Δ passe par un *extremum*.

● **183** **Lycée du Parc, Lyon**

20 min.

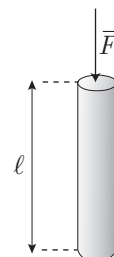
Coefficients thermoélastiques

MPSI-PCSI-PTSI

On étudie la variation de longueur ℓ d'une barre solide en fonction de la température T et de la force longitudinale appliquée : $F = \|\vec{F}\|$.

En première approximation, on supposera constante la section s de la barre. Le module d'élasticité $E = -\frac{\ell}{s} \left(\frac{\partial F}{\partial \ell} \right)_T$ et le coefficient de dilata-

tion linéaire $\alpha = \frac{1}{\ell} \left(\frac{\partial \ell}{\partial T} \right)_F$ sont supposés constants.



1. Établir la relation liant l'allongement élémentaire $d\ell$ de la barre sous l'influence d'une force dF , à température constante.
2. En l'absence de force, la barre présente une longueur ℓ_0 . Exprimer la longueur ℓ pour $F \neq 0$, en fonction de F , ℓ_0 , s et E .
3. Ce modèle s'applique (à température constante) aux os de la jambe humaine. Pour le tibia, dans sa partie la plus étroite (le rayon vaut 1 cm), on a $E = 10^{10} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$. Calculer l'accroissement relatif dû au poids d'une personne de 80 kg. Est-ce notable ?

On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour l'intensité de la pesanteur.

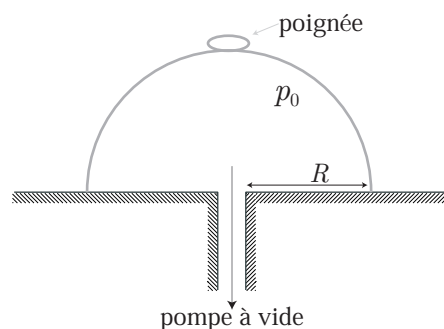
● **184** **Lycée Camille Guérin, Poitiers**

25 min.

La pression

MPSI-PCSI-PTSI

Un hémisphère creux est en contact, suivant un cercle de rayon R , avec un plan horizontal. Celui-ci est relié à une pompe à vide destinée à rendre la pression intérieure très faible (négligeable devant la pression atmosphérique p_0).



Exprimer, en fonction de p_0 et R , la force de pression qui s'exerce sur l'hémisphère.
Données : $p_0 = 10^5$ Pa et $R = 10$ cm.

● **185** **Lycée Hoche, Versailles**

15 min.

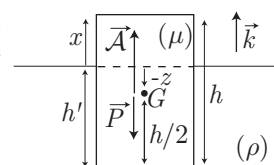
Poussée d'Archimède

MPSI-PCSI-PTSI

Un cylindre homogène, de masse volumique μ et de hauteur h , flotte sur un liquide de masse volumique ρ . On note x l'altitude de la base supérieure du cylindre et z la cote du centre de gravité G du cylindre par rapport à la surface libre du liquide.

Pour les applications numériques, on prendra :

$$\frac{\mu}{\rho} = \alpha = 0,8 \quad h = 10 \text{ cm} \quad g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$



- Déterminer la valeur x_e de x lorsque le cylindre est en équilibre.
- Calculer la période des petites oscillations du cylindre autour de sa position d'équilibre.

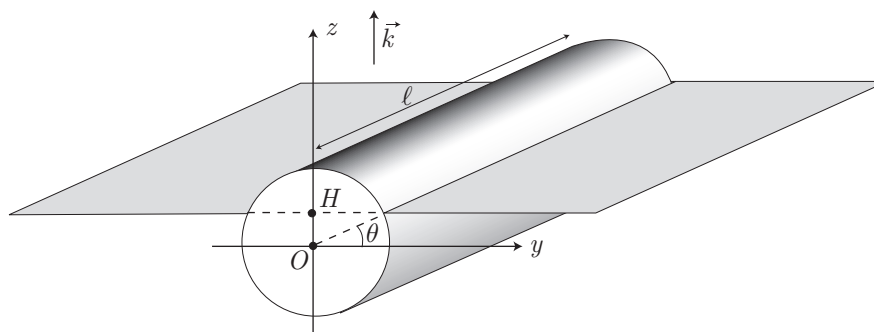
● **186** **Lycée Clémenceau, Nantes**

30 min.

Poussée d'Archimède

MPSI-PCSI-PTSI

Un cylindre plein, homogène, de rayon R , de longueur ℓ et de masse volumique ρ_S peut flotter sur un liquide de masse volumique ρ_L .



On désigne par z la cote du point H qui repère le niveau de la surface libre du liquide sur la verticale ascendante. On pose : $u = \frac{\rho_S}{\rho_L}$.

1. Exprimer, en fonction de R , ℓ et θ , le volume V_i de la partie immergée du cylindre.
2. Montrer que, lorsque le cylindre est en équilibre, on a :

$$\pi \left(u - \frac{1}{2} \right) = \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta)$$

u étant une constante que l'on déterminera.

3. Pour quelles valeurs de u le cylindre est-il en demi-immersion ou en immersion totale ?
4. Quelle valeur de u conduirait à l'immersion du quart du diamètre du cylindre ?

● **187** ————— **Lycée Fabert, Metz**
15 min.

Statique des fluides

MPSI-PCSI-PTSI

Quelle est la pression au fond d'une fosse océanique de 10 km de profondeur, où la température est uniforme, si on suppose que :

1. l'eau de mer est un fluide incompressible, de densité $d = 1,03$?
2. la densité de l'eau de mer vaut 1,03 à la surface et son coefficient de compressibilité isotherme est égale à $\chi_T = 4,44 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$?

On considérera l'accélération de la pesanteur g uniforme est égale à $9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ dans la fosse. À la surface de l'eau de mer, la pression vaut $p_0 = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

● **188** ————— **Lycée Charlemagne, Paris**
15 min.

Statique des fluides

MPSI-PCSI-PTSI

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Le champ de pesanteur, d'intensité uniforme g , est dirigé suivant l'axe vertical Oz , vers le bas. Dans le problème, l'air est assimilé à un gaz parfait. R désigne la constante molaire des gaz parfaits.

La masse molaire moyenne de l'air est égale à M_0 . Sa pression est égale à p , sa masse volumique vaut μ . On désignera par p_0 et μ_0 les valeurs de p et de μ au niveau du sol ($z = 0$).

1. On s'intéresse à l'équilibre de l'atmosphère isotherme. On appelle T la température, uniforme, de l'air.
 - (a) Exprimer la masse volumique μ de l'air, en fonction de p , R , T et M_0 .
 - (b) Écrire la condition d'équilibre statique de l'air. En déduire la valeur de la pression p , en fonction de p_0 , g , z , M_0 , R et T .
2. Le modèle de l'atmosphère isotherme n'est pas très réaliste ; aussi, on s'intéresse à l'équilibre *polytropique* de l'atmosphère. Jusqu'à une altitude de 10 km, on admet que la température de l'air vérifie la loi :

$$T = T_0 \times (1 - \alpha z)$$

expression dans laquelle le gradient de température $-\alpha T_0$ est une constante négative. T_0 est la température de l'air au niveau du sol.

Exprimer p et μ en fonction de l'altitude z , des paramètres p_0 , μ_0 , α et de la constante $\beta = \frac{M_0 g}{\alpha R T_0}$. Montrer que :

$$p = p_0 (1 - \alpha z)^\beta \text{ et } \mu = \mu_0 (1 - \alpha z)^{\beta-1}$$

● **189** **Lycée Hoche, Versailles**

20 min.

Statique des fluides

MPSI-PCSI-PTSI

On suppose que l'atmosphère est un gaz parfait en équilibre dans le champ de pesanteur uniforme. Soient p_0 et ρ_0 la pression et la masse volumique à l'altitude $z = 0$. Dans la troposphère ($0 \leq z \leq 11\,000$ m) on constate que la température T décroît de $0,65^\circ\text{C}$ pour 100 mètres :

$$T(z) = 288 - 6,5 \cdot 10^{-3} \times z$$

Montrer qu'on peut en déduire que la troposphère obéit à la loi :

$$pV^k = \text{cte}$$

Donner la valeur numérique de la constante k . Une telle loi d'évolution est dite *polytropic*.

Données :

- intensité de la pesanteur : $g = 8,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- masse molaire moyenne de l'air : $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

● **190** **Lycée Montaigne, Bordeaux**

20 min.

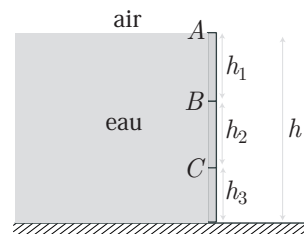
Statique des fluides

MPSI-PCSI-PTSI

Un bassin, contenant de l'eau sur une profondeur $h = 9$ m, est fermé par une porte verticale constituée par trois panneaux plans superposés.

On supposera la pression de l'air p_0 uniforme, de même que la masse volumique μ de l'eau et l'intensité g de la pesanteur.

Quelle doit être la hauteur de chaque panneau pour que chacun supporte le même effet total ?



● **191** **Lycée Janson de Sailly, Paris**

25 min.

Statique des fluides

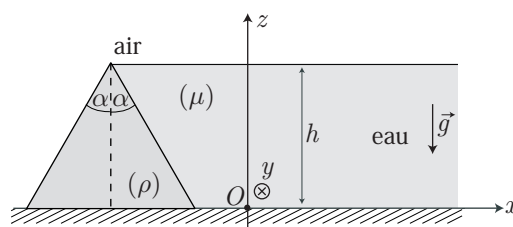
MPSI-PCSI-PTSI

Dans tout le problème, les solides et les liquides sont plongés dans le champ de pesanteur uniforme, d'intensité g .

Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen, et associé à un repère $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ tel que l'axe Oz soit dirigé suivant la verticale ascendante.

On se réfère au schéma de la figure ci-dessous. Un barrage est formé d'un solide indéformable, en forme de pentaèdre de base rectangulaire. Sa section est un triangle isocèle, de hauteur h et de demi-angle au sommet égal à α . Sa masse volumique est

ρ . Il est posé sur le sol horizontal et permet de retenir l'eau d'un lac dont la masse volumique est égale à μ .



On suppose que les seules forces qui interviennent sont liées à la pression des fluides (eau et air), au poids du barrage et aux forces de contact exercées par le sol. La longueur L du barrage est suffisamment grande pour que l'on puisse négliger les forces de liaison qui interviennent à ses extrémités.

1. Exprimer la pression de l'eau en fonction de l'altitude z , de p_0 (pression atmosphérique), μ , g et h .
2. Calculer la force exercée sur la face immergée du barrage ainsi que la force sur la face émergée.

On admet que ni l'air, ni l'eau ne peuvent pénétrer sous le barrage. Dans ce cas, la réaction du sol sur le barrage est représentée par :

- une composante normale \vec{N} verticale ascendante ;
- une composante tangentielle \vec{T} horizontale, qui s'oppose au glissement du barrage.

L'équilibre statique n'est garanti que si $\|\vec{T}\| \leq f \times \|\vec{N}\|$, expression dans laquelle f est un coefficient constant, appelé *coefficient de frottement statique* du barrage sur le sol.

On définit aussi l'*angle de frottement* φ tel que $\tan \varphi = f$. Cet angle représente l'inclinaison maximale de la réaction sur le sol par rapport à la verticale.

3. Déterminer les intensités N et T des forces \vec{N} et \vec{T} .
4. Montrer qu'il existe une valeur minimale α_0 de α qui assure l'équilibre mécanique du barrage ; on exprimera $\tan \alpha_0$ en fonction de μ , g , φ , p_0 , ρ et h .

● 192 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

15 min.

Travail des forces de pression

MPSI-PCSI-PTSI

Un corps de pompe cylindrique et horizontal, à parois parfaitement diathermes (qui laissent passer la chaleur), est fermé par un piston de masse négligeable, coulissant sans frottements. À l'extérieur du cylindre, la température est T_0 et la pression est p_0 . À l'intérieur se trouve une mole de gaz sous une pression $p_i > p_0$, occupant un volume V_i . On raisonnera sur une mole de gaz, dont l'équation d'état est :

$$p(V - b) = RT$$

où b et R sont des constantes.

Le système est maintenu en équilibre au moyen d'une force F appliquée sur le piston, perpendiculairement à celui-ci.

1. On supprime brusquement la force F et on attend que le gaz atteigne un nouvel état d'équilibre. Quel est alors le volume V_f du gaz ?
Calculer le travail échangé par le gaz avec le milieu extérieur au cours de cette transformation.
2. Le gaz est maintenant détendu de manière quasi statique, de l'état initial à l'état d'équilibre final précédent. Quel est alors le travail échangé entre le gaz et le milieu extérieur ?
3. Que se passe-t-il lorsque la pression p_i est très voisine de la pression extérieure p_0 ?

● 193 ————— Lycée Carnot, Dijon

20 min.

Transferts thermiques

MPSI-PCSI-PTSI

Une salle, de capacité thermique $K = 16,64 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ est chauffée par deux radiateurs traversés par de l'eau chaude à la température $\theta_1 = 61^\circ\text{C}$. Chacun de ces radiateurs cède à la salle une puissance thermique \mathcal{P}_e proportionnelle à l'écart de température $\theta_1 - \theta$ entre l'eau et la salle, le coefficient de proportionnalité étant égal à $k_1 = 41,8 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. La salle perd, par ailleurs, une puissance thermique \mathcal{P}_s proportionnelle à l'écart de température $\theta - \theta_2$ entre la salle et l'extérieur, avec un coefficient de proportionnalité $k_2 = 250,8 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. La température extérieure est $\theta_2 = 5^\circ\text{C}$. On désigne par θ_0 la température initiale de la salle, θ étant sa température à l'instant t .

1. Quelle est la température θ' de la salle en régime permanent, c'est-à-dire quand cette température ne varie pas ? Calculer sa valeur numérique.
2. La température de la salle ayant la valeur θ' , on ferme les radiateurs. Au bout de combien de temps la température θ sera-t-elle retombée à $5,5^\circ\text{C}$?
3. Les radiateurs sont ouverts quand la température de la salle est θ_0 . Établir la loi d'évolution de la température de la salle en fonction du temps.
Préciser la limite de θ au bout d'un temps très long.
Tracer l'allure de $\theta(t)$.

● 194 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

20 min.

Travail d'une force extérieure

MPSI-PCSI-PTSI

Un fil d'acier, de longueur à vide $L_0 = 1 \text{ m}$ et de diamètre constant d , est suspendu verticalement à une potence. L'ensemble est placé dans un thermostat où la température est 300 K . La tension F est accrue de 0 à $F_0 = 1\,000 \text{ N}$:

- de manière quasi statique ;
- puis de manière brusque.

Exprimer, dans les deux cas, le travail échangé entre le système et le milieu extérieur. On suppose constant le *module d'élasticité isotherme* de l'acier :

$$E = \frac{L}{S} \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_T$$

S étant la section du fil et L sa longueur.

On rappelle, en outre, la primitive suivante :

$$\int x e^{\alpha x} dx = e^{\alpha x} \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right)$$

● **195** ————— **Lycée Pasteur, Paris**
5 min.

Premier principe de la thermodynamique

MPSI-PCSI-PTSI

n moles d'un gaz parfait passent de l'état $A(V_A)$ à l'état $B(V_B)$ de même température T_0 , de manière quasi statique, en échangeant de la chaleur avec une seule source extérieure de chaleur.

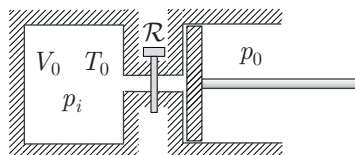
Calculer le travail W et la chaleur Q échangés avec l'extérieur.

● **196** ————— **Concours ENSI**
10 min.

Premier principe de la thermodynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Le système représenté ci-contre est parfaitement calorifugé. Le compartiment de gauche renferme un gaz parfait dans les conditions initiales : $(V_0, T_0, p_i = 2p_0)$. On note $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{Vm}}$ le rapport des capacités thermiques molaires à pression et volume constants.



On rappelle que $C_{pm} - C_{Vm} = R$ et on considère que γ est constant.

On ouvre le robinet \mathcal{R} et on laisse le système évoluer. Déterminer l'état final : la température T_f du gaz et le volume V_f qu'il occupe, en fonction de V_0, T_0 et γ .

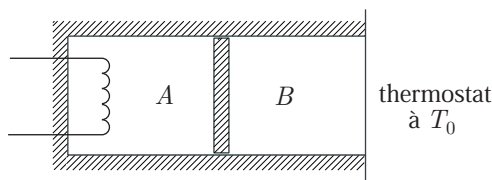
● **197** ————— **Lycée Charlemagne, Paris**
20 min.

Premier principe de la thermodynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Un cylindre fermé, horizontal, est divisé en deux compartiments A et B de même volume V_0 , par un piston coulissant librement sans frottements. A et B contiennent chacun une mole de gaz parfait monoatomique à la pression p_0 et à la température T_0 ($\simeq 273$ K, température de la glace fondante à la pression atmosphérique).

Le piston, la surface latérale du cylindre et la surface de base S_A du compartiment A sont adiabatiques ; le compartiment B reste à la température T_0 par contact thermique avec la glace fondante à la pression atmosphérique.



1. Exprimer les volumes V_A, V_B et la pression finale d'équilibre p_f en fonction de T_1, T_0, V_0 , correspondant à la position d'équilibre du piston.
2. (a) Quelle est la variation d'énergie interne du gaz à l'intérieur de A et de B ? En déduire la variation d'énergie interne du système $\{A + B\}$.

- (b) Quelle est la nature de la transformation subie par le gaz en B ?
 Quel est le travail échangé par B avec A ? En déduire la quantité de chaleur Q_1 reçue par le thermostat.
- (c) En considérant le système A , trouver la quantité de chaleur Q_2 fournie par la résistance chauffante.

● **198** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

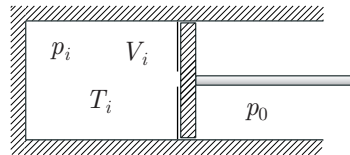
20 min.

Premier principe de la thermodynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Un cylindre contient un compartiment, de volume V_i constant, qui communique avec un piston par un petit trou. Initialement, le compartiment est rempli d'un gaz parfait et le piston est maintenu contre l'ouverture du compartiment. L'ensemble est immergé dans l'atmosphère où règne la pression constante p_0 .

On relâche la contrainte sur le piston qui se met alors en mouvement. Lorsque celui-ci s'arrête, la température du gaz vaut T_f .



Le gaz parfait se trouve initialement sous la pression $p_i > p_0$ et à la température T_i . Les parois du cylindre et le piston sont calorifugés (la chaleur ne peut pas les traverser).

1. Exprimer le travail W_e qu'exerce l'atmosphère au cours de cette transformation, en fonction de p_i , V_i , T_f , T_i et p_0 .
2. Exprimer T_f en fonction de p_0 , p_i , T_i et $\gamma = 1 + \frac{R}{C_{V_m}}$ (C_{V_m} désigne la capacité thermique molaire à volume constant du gaz parfait ; C_{V_m} est supposé constant).
3. On appelle $\Delta p = p_i - p_0 > 0$ la surpression initiale qui règne dans le compartiment. Montrer que la variation relative de température vérifie la loi :

$$\frac{T_f - T_i}{T_i} = \frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{\Delta p}{p_i}$$

Commenter le signe de $T_f - T_i$.

● **199** ————— **Lycée Carnot, Dijon**

20 min.

Premier principe de la thermodynamique

MPSI-PCSI-PTSI

On effectue la compression d'un gaz parfait en contact thermique avec un système de capacité thermique constante C , initialement à la température T_1 . En fin de compression, le gaz est à la température T_2 . L'évolution est quasi statique et l'équilibre thermique est maintenu entre le gaz et le système, lors de la compression. Le facteur $\gamma = \frac{R + C_{V_m}}{C_{V_m}}$ (R est la constante molaire des gaz parfaits et C_{V_m} la capacité thermique molaire à volume constant du gaz) est supposé constant. Les calculs menés seront relatifs à une mole de gaz.

1. Exprimer, lors d'une évolution élémentaire, la variation d'énergie interne du gaz, la quantité de chaleur et le travail reçus par le gaz.
2. Montrer que la compression suit une loi $pV^k = \text{cte}$, où k est une constante à déterminer en fonction de C_{V_m} et R .
3. Discuter physiquement les transformations limites correspondant à $C \rightarrow 0$ et $C \rightarrow \infty$. Vérifier les valeurs de k alors obtenues.
4. Représenter ces transformations limites dans le diagramme de Clapeyron (p en fonction de V).

● **200** **Lycée du Parc, Lyon**
20 min.

Premier principe de la thermodynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Une mole de gaz parfait subit la transformation cyclique réversible suivante :

- le gaz passe de l'état $A (V_1, T_1)$ à l'état $B (V_1, T_2)$ par une transformation isochore ;
- puis de l'état B à l'état $C (V_2, T_2)$ par une transformation isotherme ;
- puis de l'état C à l'état $D (V_2, T_1)$ par une transformation isochore ;
- enfin de l'état D à l'état A par une transformation isotherme.

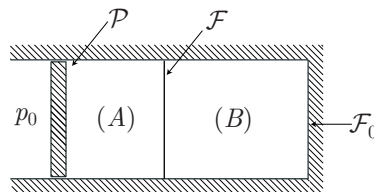
1. Représenter la transformation dans un diagramme $T = f(V)$ et dans un diagramme de Clapeyron $p = f(V)$ ($V_2 > V_1, p_2 > p_1, T_2 > T_1$).
2. Calculer le travail et la quantité de chaleur échangés sur le cycle, en fonction de γ , R et des données. On rappelle que la capacité thermique molaire à volume constant s'écrit : $C_{V_m} = \frac{R}{\gamma - 1}$.
3. Calculer la variation d'enthalpie :
 - (a) pour chaque transformation ;
 - (b) sur le cycle.

● **201** **Lycée Fabert, Metz**
30 min.

Premier principe de la thermodynamique

MPSI-PCSI-PTSI

Un cylindre horizontal est fermé à l'une de ses extrémités par une paroi fixe \mathcal{F}_0 , et à l'autre extrémité par un piston \mathcal{P} qui peut coulisser sans frottements le long du cylindre. Le cylindre est séparé en deux compartiments A et B par une paroi fixe \mathcal{F} . Sur la face extérieure du piston s'exerce la pression atmosphérique p_0 qu'on suppose constante.



Dans la situation initiale, le compartiment A , de volume V_A , contient n moles d'un gaz parfait. Le compartiment B , de volume V_B , est initialement vide.

Les parois du cylindre et le piston sont calorifugés et de capacités thermiques négligeables.

1. Préciser la pression et la température initiales dans le compartiment A .
2. On perce un orifice dans la paroi fixe \mathcal{F} et l'on cherche à décrire les caractéristiques du nouvel état d'équilibre qu'on supposera atteint.
 - (a) En analysant qualitativement le problème, montrer que selon la valeur de V_B par rapport à une valeur seuil V_{Bs} (qu'on ne cherchera pas à déterminer à ce stade de l'étude), deux types de solutions existent ; pour répondre à cette question, on pourra s'intéresser à l'équilibre mécanique du piston dans l'état final.
 - (b) En supposant que V_B est inférieur à la valeur seuil, déterminer les caractéristiques (p_1, V_1, T_1) du gaz enfermé dans le cylindre $(A + B)$ quand le nouvel état d'équilibre est atteint ; on exprimera ces grandeurs en fonction de p_0, γ, n, V_A, V_B et R . On rappelle que, pour un gaz parfait, la capacité thermique molaire à volume constant peut s'écrire : $C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$.
 - (c) Déterminer la valeur seuil V_{Bs} , en fonction de V_A et de γ .
 - (d) On suppose cette fois V_B supérieur à V_{Bs} .
Déterminer l'état (p_2, V_2, T_2) du gaz enfermé à l'intérieur du cylindre dans le nouvel état d'équilibre ; on exprimera ces grandeurs en fonction de toutes ou certaines des données : p_0, γ, n, V_A, V_B et T_A .

● 202 ————— Concours des Mines-Ponts

10 min.

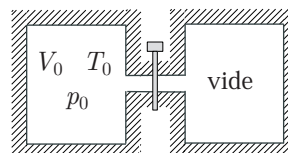
La fonction entropie

MPSI-PCSI-PTSI

Soient deux enceintes de volume V_0 , séparées par un tube très fin muni d'un robinet ; le système est adiabatique.

À l'origine, une des enceintes contient un gaz parfait (p_0, T_0) et la seconde est vide. On ouvre le robinet.

Déterminer l'état final du système de même que la variation d'entropie du gaz.



● 203 ————— Lycée Fabert, Metz

10 min.

La fonction entropie

MPSI-PCSI-PTSI

On mélange, sans fournir de chaleur et à pression constante, une masse m de liquide, de chaleur massique c_p , à la température T , avec une masse égale d'un même liquide à la température T' .

Calculer la variation d'entropie du système lorsque le nouvel état d'équilibre est atteint. Vérifier qu'elle est positive. Pourquoi ?

● 204 ————— Lycée Carnot, Dijon

10 min.

La fonction entropie

MPSI-PCSI-PTSI

On note :

- C_{pm} la capacité thermique molaire d'un gaz parfait, à pression constante ;
- C_{Vm} sa capacité thermique molaire à volume constant ;
- $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{Vm}}$;
- R la constante molaire des gaz parfaits ;
- U l'énergie interne ;
- H l'enthalpie ;
- S l'entropie.

Pour une mole de gaz parfait, on imagine une transformation infinitésimale, réversible, au cours de laquelle T , p et V varient de dT , dp et dV .

1. Écrire dU et dH en fonction de C_{Vm} , C_{pm} et dT .
En déduire que $C_{pm} - C_{Vm} = R$ puis donner les expressions de C_{Vm} et de C_{pm} en fonction de γ et R .
2. Exprimer dS en fonction de C_{pm} , T , R , dT et dp .
3. Pour une transformation adiabatique réversible faisant passer le gaz de l'état (p_1, T_1) à l'état (p_2, T_2) , exprimer la température T_2 en fonction de p_1 , T_1 , p_2 et γ .

● 205 ————— Lycée du Parc, Lyon

15 min.

La fonction entropie

MPSI-PCSI-PTSI

Pour comprimer un gaz de façon monotherme, on opère en deux temps :

- compression rapide (pratiquement adiabatique et réversible) depuis l'état (p_0, T_0) jusqu'à l'état (p_1, T_1) ;
- refroidissement monobare de T_1 à T_0 par contact thermique avec l'air ambiant.

L'air ambiant reste à la température T_0 . Calculer la variation d'entropie du gaz et l'entropie créée dans le gaz.

Application numérique :

$$p_0 = 10^5 \text{ Pa} \quad p_1 = 25 p_0 \quad T_0 = 290 \text{ K} \quad \gamma = 1,40 \quad n = 1 \text{ mole}$$

● 206 ————— Lycée Lakanal, Sceaux

20 min.

La fonction entropie

MPSI-PCSI-PTSI

On enferme une mole de gaz parfait dans une enceinte diatherme (ses parois sont parfaitement perméables à la chaleur), dont une paroi horizontale et de masse négligeable, est mobile par translation verticale.

Initialement, la pression est assurée exclusivement par une masselotte de masse m posée sur la paroi mobile.

L'état d'équilibre initial est noté (p_1, V_1, T_1) .

1. On place sans précaution une seconde masselotte, identique à la première, sur la paroi qui s'enfoncé verticalement. L'enceinte reste en contact thermique avec une source à la température $T_s = T_1$ au cours de la transformation ; grâce aux frottements, après oscillations, la paroi s'immobilise à sa position d'équilibre.
Déterminer la variation d'entropie de l'ensemble {source + gaz}, thermiquement isolé.

- La position d'équilibre précédente étant atteinte, on retire brusquement la seconde masselotte ; déterminer la variation d'entropie de l'ensemble {source + gaz}, à la fin de la transformation.
- Faire un bilan d'entropie pour les deux transformations.
On supposera que toute l'énergie dissipée par frottement est récupérée par le gaz au cours des transformations.
On donne la constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

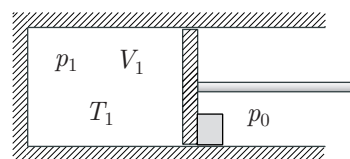
● 207 ————— Concours des Mines-Ponts

20 min.

MPSI-PCSI-PTSI

La fonction entropie

Un gaz parfait, initialement dans l'état (p_1, V_1, T_1) , est enfermé dans un cylindre à parois adiabatiques. Un piston, également calorifugé, peut coulisser sans frottements ; il sépare le gaz parfait de l'air ambiant à la pression p_0 .



On libère brusquement le piston.

- Calculer l'état final du gaz : sa pression p_f , sa température T_f et son volume V_f , en fonction de p_1, V_1, T_1, p_0 et γ (rapport des capacités thermiques à volume et à pression constants).
- En déduire la variation d'entropie du gaz au cours de la détente.

● 208 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

30 min.

MPSI-PCSI-PTSI

La fonction entropie

Une mole de gaz parfait subit le cycle suivant :

- le gaz passe de l'état $A (V_1, T_1)$ à l'état $B (V_1, T_2)$ par une transformation isochore ;
- puis de l'état B à l'état $C (V_2, T_2)$ par une transformation monobare : la pression extérieure demeure constante et égale à p_2 ;
- puis de l'état C à l'état $D (V_2, T_1)$ par une transformation isochore ;
- enfin, de l'état D à l'état A par une transformation monobare : la pression extérieure demeure constante et égale à p_1 .

- Sachant que dans les états A, B, C et D le gaz est à l'équilibre, exprimer les pressions p_1 et p_2 en fonction de V_2, T_2, V_1, T_1 et R (constante molaire des gaz parfaits).
- Déterminer, en fonction des mêmes paramètres (et de γ), la variation d'entropie du gaz au cours de chacune des transformations.
- Évaluer la variation d'entropie totale du gaz (ΔS) au cours du cycle. Calculer, de même, $\oint \frac{\delta Q}{T}$ pour l'ensemble de la transformation cyclique. Quel est le signe de cette grandeur ? Ce résultat était-il prévisible ?

● 209 ————— Lycée Carnot, Dijon

10 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Machines thermiques

On dispose de deux masses égales d'eau (de capacité thermique C) aux températures T_{10} et T_{20} ($T_{10} > T_{20}$).

On les réunit par une machine réversible, à laquelle elles servent de sources, et qui fournit un travail jusqu'à ce que les deux sources soient à la même température T_f .

Calculer T_f en fonction de T_{10} et T_{20} .

Quel est le travail W reçu par la machine à l'issue de la totalité des cycles. Trouver son signe et conclure.

● 210 ————— Lycée Sainte-Geneviève, Versailles

10 min.

Machines thermiques

MPSI-PCSI-PTSI

Une machine frigorifique réversible fonctionne entre une source (S), de température constante T_0 , et un corps (C), de capacité thermique C , initialement à la température T_0 . On fournit un travail W à la machine.

Trouver une relation qui permet, en principe, de calculer la température finale T_f de (C) (on ne cherchera pas T_f mais on établira une équation liant T_f , T_0 , C et W).

● 211 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

10 min.

Machines thermiques

MPSI-PCSI-PTSI

Une pompe à chaleur fonctionne entre deux sources de chaleur de températures constantes T_c et $T_f < T_c$.

1. Si la pompe effectue des cycles réversibles, déterminer son coefficient d'efficacité η_{rev} , en fonction de T_c et T_f .
2. On suppose maintenant que la pompe fonctionne de manière irréversible. Comparer son coefficient d'efficacité η_{irr} à η_{rev} .

● 212 ————— Lycée Carnot, Dijon

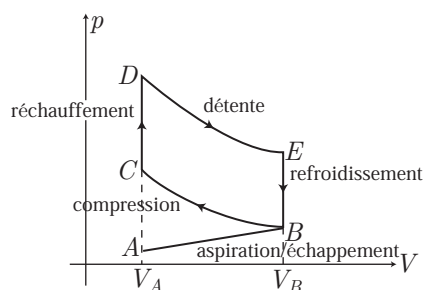
15 min.

Machines thermiques

MPSI-PCSI-PTSI

Le cycle d'un moteur à explosion à quatre temps comprend :

- deux transformations adiabatiques : compression BC d'un mélange air-combustible, et détente DE des gaz brûlés ;
- deux transformations à volumes constants : échauffement de T_C à T_D (volume $V_D = V_C = V_A$) et refroidissement de T_E à T_B (volume $V_E = V_B$).



En supposant que tout se passe comme si le cycle se rapportait à une masse invariable d'air, se comportant comme un gaz parfait de capacité thermique C_V , calculer le rendement ρ du cycle (de Beau De Rochas) en fonction du taux de compression : $a = \frac{V_B}{V_A}$

et de $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$

Application numérique : $a = 8$ et $\gamma = 1,3$.

● 213 Lycée Charlemagne, Paris

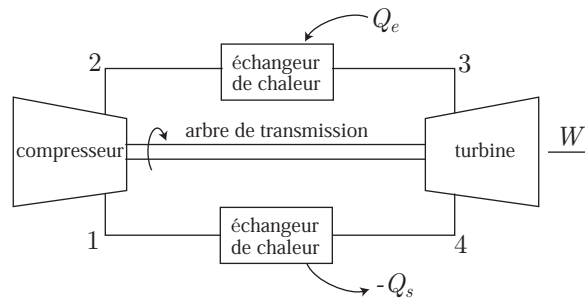
20 min.

Machines thermiques

MPSI-PCSI-PTSI

Dans ce problème, le gaz subissant les différentes transformations est de l'air, assimilé à un gaz parfait. Le rapport γ des capacités thermiques sera pris constant et égal à 1,4. Les transformations seront toutes considérées comme réversibles.

Nous proposons d'étudier un dispositif de turbine à gaz fonctionnant suivant un cycle de Brayton ; il s'agit d'un cycle moteur.



Les différentes transformations sont les suivantes :

- 1 \rightarrow 2 : compression isentropique dans le compresseur ;
- 2 \rightarrow 3 : apport de chaleur (Q_e) à pression constante ;
- 3 \rightarrow 4 : détente isentropique dans la turbine ;
- 4 \rightarrow 1 : dégagement de chaleur ($-Q_s$) à pression constante.

1. Représenter le cycle dans le diagramme de Clapeyron (V, p).
2. (a) Définir le rendement η du cycle.
(b) Exprimer ce rendement en fonction de γ et du rapport des pressions $r = \frac{p_2}{p_1}$.
3. (a) En quel point du cycle la température est-elle maximale ?
(b) Les températures maximale et minimale atteintes au cours du cycle étant respectivement $T_{\max} = 1\,000\text{ K}$ et $T_{\min} = 300\text{ K}$, déterminer la valeur de r rendant maximum le travail fourni par le système. Calculer alors η .

● 214 Lycée du Parc, Lyon

20 min.

Machines thermiques

MPSI-PCSI-PTSI

Pour maintenir une serre à la température T , l'extérieur étant à la température $T_0 < T$, on envisage deux solutions.

- **Première solution**

On fournit, par jour, la quantité de chaleur Q par transfert direct depuis une chaudière à la température $T' > T$.

- **Deuxième solution**

On fait fonctionner deux machines : un moteur (M) entre les deux sources : chaudière (T') et serre (T). Le travail ainsi libéré est alors transmis à une pompe à chaleur (PAC) qui fonctionne entre les deux sources : serre (T) et extérieur (T_0).

Comparer la deuxième solution à la première, les machines étant supposées parfaites et décrivant des cycles réversibles.

● 215 ————— Lycée Carnot, Dijon

30 min.

Machines thermiques

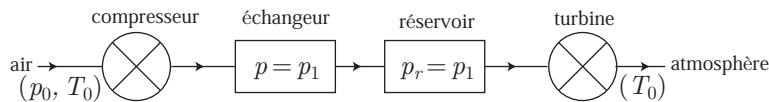
MPSI-PCSI-PTSI

On veut étudier l'efficacité mécanique d'une installation industrielle à gaz comprimé. L'air est assimilé à un gaz parfait, de constante molaire $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et de

rapport $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}} = 1,4$.

L'air subissant un écoulement, on cherche à calculer le travail effectivement fourni par le compresseur et le travail effectivement récupérable dans une turbine.

On peut schématiser l'ensemble de l'installation de la façon suivante :



On donne : $T_0 = 290 \text{ K}$, $p_0 = 1 \text{ bar}$, $p_1 = 10 \text{ bar}$.

Dans tout le problème, on négligera l'énergie cinétique du gaz à l'entrée et à la sortie des différents appareils, et on admettra que le volume du réservoir est assez grand pour que la pression $p_r = p_1$ demeure constante.

I- Pour calculer le travail que fournit le compresseur à chaque mole de gaz qui le traverse, on envisage les hypothèses suivantes :

1. compression isotherme de p_0 à p_1 ; calculer le travail W_c correspondant. Faire l'application numérique.
2. compression adiabatique réversible.
 - (a) Calculer la température du gaz à la sortie du compresseur. Donner sa valeur numérique.
 - (b) Calculer le travail W_d fourni par le compresseur à chaque mole de gaz. Passer à l'application numérique.

Le gaz subit ensuite un refroidissement isobare dans l'échangeur, d'où il ressort à la température T_0 .

(c) Calculer la quantité de chaleur cédée par chaque mole de gaz dans l'échangeur.

II- L'air comprimé, contenu dans le réservoir, est utilisé dans la turbine, où il subit une détente adiabatique réversible et se trouve en sortie à la pression p_0 .

1. Quelle est la température du gaz en sortie ? Faire l'application numérique.
2. Quel est le travail $|W'_d|$ effectivement récupéré dans la turbine ? Donner sa valeur numérique.

III- Bilan : calculer le rapport : $\rho = \frac{|W'_d|}{W_d}$.

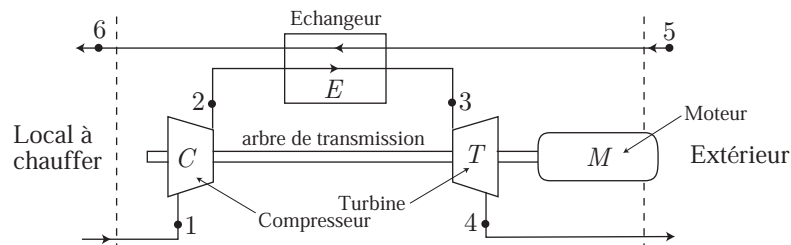
● 216 ————— Lycée Charlemagne, Paris

45 min.

Machines thermiques

MPSI-PCSI-PTSI

L'installation schématisée ci-dessous a pour but de chauffer un local et d'en renouveler son contenu : l'air « vicié » du local est aspiré, comprimé dans le compresseur C (évolution $1 \rightarrow 2$), refroidi dans l'échangeur E (évolution $2 \rightarrow 3$), détendu dans la turbine T (évolution $3 \rightarrow 4$) et est rejeté à l'extérieur. Afin de permettre le refroidissement de cet air dans l'échangeur E , on aspire de l'air neuf et froid, à l'extérieur celui-ci, ainsi réchauffé dans E , est envoyé dans le local. Le moteur M et la turbine T entraînent le compresseur C .



Hypothèses générales

- dans tout le problème, on négligera les variations d'énergie cinétique et potentielle ;
- on suppose que le débit massique d'air inspiré dans le local (en 1) est égal à celui refoulé dans ce même local (en 6). On raisonnera donc pour une masse unitaire de gaz ;
- l'air sera assimilé à un gaz parfait défini par sa capacité thermique massique à pression constante, notée c_p , par sa capacité thermique massique à volume constant, notée c_V et par le rapport des capacités thermiques $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$. On donne $c_p = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et $\gamma = 1,40$;
- l'évolution de l'air dans le compresseur et dans la turbine est adiabatique ;
- l'évolution globale des deux flux dans l'échangeur est supposée adiabatique : l'échangeur est calorifugé ;
- on négligera les pertes mécaniques dans les machines.

Données et notations :

- température extérieures : $T_5 = 0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$;
- température minimale dans le local : $T_1 = 20^\circ\text{C} = 293 \text{ K}$;
- pression ambiante (dans le local et à l'extérieur) :

$$p_1 = p_4 = p_5 = p_6 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

- $\frac{p_2}{p_1}$ étant le *taux de compression*, on notera : $x = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$;

- l'échangeur E est caractérisé par son *pincement*, noté ΔT , ainsi défini :

$$\Delta T = T_2 - T_6 = 20^\circ\text{C}$$

On suppose que toutes les évolutions sont réversibles.

1. Étude de l'échangeur

Montrer que si les évolutions $2 \rightarrow 3$ et $5 \rightarrow 6$ sont réversibles, elles sont aussi isobares.

Donner une autre expression de ΔT , en fonction de T_3 et T_5 .

2. Donner l'expression littérale :

- du travail massique de compression, noté w_{ic} , en fonction de c_p , T_1 et x ;
- du travail massique de détente, noté w_{it} , en fonction de c_p , T_3 et x , puis en fonction de c_p , T_5 , ΔT et x ;
- du travail massique fourni par le moteur, noté w_m , en fonction de c_p , T_1 , T_5 , ΔT et x ;
- de la température T_6 en fonction de T_1 , ΔT et x ;
- de la quantité de chaleur massique, notée q_{16} , et ainsi définie : $q_{16} = h_6 - h_1$. Calculer q_{16} en fonction de c_p , T_1 , ΔT et x .

3. On définit l'aptitude d'une telle installation à transformer de l'énergie mécanique en énergie calorifique, par le *coefficient d'effet calorifique*, noté φ_c , ainsi défini : $\varphi_c = \frac{q_{16}}{w_m}$. Donner l'expression littérale (en fonction de T_1 , T_5 , ΔT et x) de φ_c . Donner ensuite l'expression de la fonction $\varphi_c(x)$ avec des coefficients numériques.

4. Choix de x

- Premier critère : la performance*
Déterminer la valeur numérique de x correspondant à la valeur maximale de φ_c . En déduire la valeur numérique de la température T_6 .
- Second critère : le confort*
Déterminer la valeur numérique de x pour une valeur de T_6 fixée à 27°C .

● 217 ————— Lycée Champollion, Grenoble

5 min.

Changements d'état

MPSI-PCSI-PTSI

Un gramme d'eau liquide est placé dans une enceinte de volume variable, sous une pression de 10^5 Pa. Cette enceinte est thermostatée à la température $T_0 = 373$ K.

En faisant varier le volume de l'enceinte, on vaporise totalement l'eau liquide. Le volume de l'enceinte vaut alors $V_0 = 1,7$.

- Calculer la chaleur fournie par le thermostat lors de la vaporisation de l'eau liquide.
- Calculer également la variation d'énergie interne de l'eau liquide au cours de la transition de phase.

La chaleur latente de vaporisation de l'eau vaut : $l_v = 2\,247 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à $T_0 = 373$ K.

● 218 ————— Lycée Sainte-Geneviève, Versailles

15 min.

Changements d'état

MPSI-PCSI-PTSI

Du phosphore liquide est placé dans un récipient ouvert à l'atmosphère. On abaisse progressivement sa température jusqu'en dessous de la température normale de solidification t_f sans provoquer l'apparition du solide.

Soit θ la température du liquide *surfondu* ($\theta < t_f$). Par apport d'un germe cristallin de masse négligeable, la surfusion cesse instantanément.

On donne :

- la température normale de fusion du phosphore : $t_f = 44^\circ\text{C}$;
- la chaleur massique du phosphore liquide : $c_\ell = 1,05 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot (^\circ\text{C})^{-1}$;
- la chaleur massique du phosphore solide : $c_s = 0,84 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot (^\circ\text{C})^{-1}$;
- la chaleur latente de fusion du phosphore à 44°C : $\ell = 19,65 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1}$.

1. En dessous de quelle température t' faut-il amener le liquide surfondu pour que la masse entière de liquide se prenne à l'état solide, à la température t_f ?
2. Déterminer l'état final du système lorsque $\theta = 40^\circ\text{C}$.

● 219 ————— Lycée Clémenceau, Reims

15 min.

Changements d'état

MPSI-PCSI-PTSI

Un récipient, aux parois adiabatiques, contient initialement 1 kg d'eau liquide à la température $T_0 = 373^\circ\text{C}$. La vapeur d'eau due à l'ébullition de l'eau liquide est progressivement éliminée de l'enceinte par une pompe.

En admettant que la chaleur latente (massique) de vaporisation se mette sous la forme : $\ell_v = A - B \times T$, calculer la masse d'eau liquide restant dans l'enceinte à la température $T_1 = 273 \text{ K}$.

On donne la capacité thermique massique de l'eau liquide (supposée indépendante de la température) : $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, $A = 3310 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $B = 2,9 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

● 220 ————— Lycée Carnot, Dijon

15 min.

Changements d'état

MPSI-PCSI-PTSI

La chaleur latente de vaporisation de l'eau est supposée constante pour quelques dizaines de degrés autour de la température normale de vaporisation : $L_{vm} = 40,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1. Donner l'allure du diagramme d'état de l'eau $p = f(T)$.
2. Quelle particularité présente la courbe de fusion ? L'expliquer à l'aide de la *formule de Clapeyron* :

$$L_{1 \rightarrow 2, m} = T (u_2 - u_1) \frac{dp}{dT}$$

où $L_{1 \rightarrow 2, m}$ désigne la chaleur latente molaire du changement d'état (1) vers (2) et où u_i représente le volume molaire de l'état i .

3. On s'intéresse à la vaporisation de l'eau sous une pression p différente de la pression atmosphérique.

En considérant la vapeur d'eau comme un gaz parfait et en négligeant le volume molaire du liquide devant celui du gaz, établir une équation différentielle en T et p . En déduire l'équation de la courbe de vaporisation.

Application numérique : calculer la température d'ébullition de l'eau au sommet du Mont-Blanc (4 807 m) où la pression vaut 0,575 atm.

Données :

- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- $T(\text{K}) = t(^{\circ}\text{C}) + 273,15$.

● 221 ————— Lycée Champollion, Grenoble

20 min.

Changements d'état

MPSI-PCSI-PTSI

On vaporise une masse $m = 1 \text{ g}$ d'eau liquide de deux manières différentes :

Processus a : une masse $m = 1 \text{ g}$ d'eau liquide est enfermée à 100°C sous la pression atmosphérique $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$, dans un cylindre fermé par un piston, en contact avec un thermostat. Par déplacement lent du piston, on augmente le volume à température constante et l'on s'arrête dès que toute l'eau est vaporisée. Le volume est alors : $u_v = 1,67 \text{ L}$.

Processus b : on introduit rapidement 1 g d'eau liquide à 100°C dans un récipient fermé, de même température, de volume $u_v = 1,67 \text{ L}$ et initialement vide.

1. Pour chacun des processus précédents, calculer la chaleur fournie par le thermostat et les variations d'énergie interne et d'entropie de l'eau.
2. Calculer la création totale d'entropie dans l'Univers lors du processus irréversible.

On donne la chaleur latente de vaporisation de l'eau : $\ell_v = 2,25 \cdot 10^4 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

● 222 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

20 min.

Changements d'état

MPSI-PCSI-PTSI

Une masse m_s de glace, à la température T_{s0} , est plongée dans une masse m_ℓ d'eau liquide, de température $T_{\ell 0}$. L'ensemble est contenu dans un récipient dont les parois sont calorifugées et l'on constate qu'à l'équilibre, il reste, à la température T_f , une masse $m_\ell + \delta m_\ell$ de liquide ($\delta m_\ell > 0$) et une masse $m_s - \delta m_\ell$ de glace

On note :

- c_s la chaleur massique de la glace ;
- c_ℓ la chaleur massique de l'eau liquide ;
- ℓ la chaleur latente (en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$) de fusion de la glace à la température T_f ;
- T_f la température d'équilibre eau-glace, à pression (maintenue constante) de l'expérience.

1. Exprimer la masse δm_ℓ en fonction de m_ℓ , m_s , c_ℓ , c_s , T_f , $T_{\ell 0}$, T_{s0} et ℓ .
2. Montrer que la variation d'entropie du système vaut :

$$\Delta S = m_s c_s \times f\left(\frac{T_{s0}}{T_f}\right) + m_\ell c_\ell \times f\left(\frac{T_{\ell 0}}{T_f}\right)$$

où $f(x)$ est une fonction à déterminer.

3. Trouver le signe de ΔS et conclure.

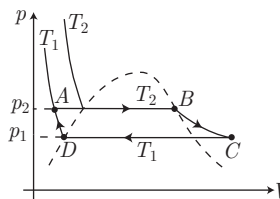
● 223 ————— Lycée Champollion, Grenoble

60 min.

Changements d'état

MPSI-PCSI-PTSI

On réalise un moteur réversible en faisant décrire le cycle ci-contre, de façon réversible, à un fluide qui subit des changements d'état :



- Il arrive à l'entrée d'un évaporateur, sous la pression p_2 et à la température T_1 (point A).
- Il se réchauffe et se vaporise à pression constante dans l'évaporateur, et ressort à la pression p_2 et à la température T_2 (point B).
- La vapeur se détend dans le moteur et sort à la pression p_1 , à une température T'_1 comprise entre T_1 et T_2 (point C).
- La vapeur traverse un condenseur qui amène, à pression constante, la vapeur à la température T_1 , puis la condense (point D).
- Un compresseur, entraîné par le moteur, comprime le fluide à la température T_1 constante, et le ramène à l'état initial. On négligera sa variation de volume dans cette phase.

On donne les valeurs numériques suivantes :

- $T_1 = 300 \text{ K}$; $T_2 = 450 \text{ K}$; $T'_1 = 350 \text{ K}$; $p_1 = 0,6 \text{ bar}$; $p_2 = 20 \text{ bar}$.
- Chaleurs latentes de vaporisation aux températures T_1 et T_2 :

$$\ell(T_1) = \ell_1 = 152 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \text{ et } \ell(T_2) = \ell_2 = 80,7 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

- Capacités thermiques massiques, à pression constante, du liquide (c) et de la vapeur (c') :

$$c = 1,02 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \text{ et } c' = 0,678 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

- Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.
 - Masse molaire du fluide : $M = 75 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.
1. Préciser l'état du fluide en chaque point A , B , C et D , ainsi que les changements d'état se produisant au cours des quatre transformations du cycle.
 2. Donner l'expression littérale de la quantité de chaleur Q_2 fournie à l'unité de masse de fluide dans l'évaporateur.
Calculer numériquement Q_2 .
 3. Dans le moteur, la vapeur (assimilée à un gaz parfait) subit une détente réversible vérifiant la relation :

$$pV^\beta = \text{cte}$$

Déterminer la constante β en fonction de p_1 , p_2 , T_2 et T'_1 puis calculer sa valeur numérique.

4. Calculer, en fonction de c' , R , M , β , T_1' et T_2 , la quantité de chaleur Q_3 reçue par l'unité de masse de fluide au cours de cette transformation.
Vérifier le résultat dans le cas où la détente serait adiabatique et réversible.
Calculer numériquement Q_3 .
5. Quelle est la quantité de chaleur Q_1 reçue par l'unité de masse de fluide provenant du condenseur ?
6. Dédurre de ce qui précède le rendement η du cycle, défini par le rapport du travail total échangé avec le milieu extérieur, et de la quantité de chaleur fournie par la source chaude lors des phases AB et BC du cycle.

● 175 Lycée Pissarro, Pontoise

1. L'équation d'état du gaz parfait : $pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V}$ montre que la pression p dépend de T et V , en conséquence de quoi sa différentielle s'écrit :

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV$$

avec :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{nR}{V} \text{ et } \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -\frac{nRT}{V^2}$$

Il s'ensuit que :

$$dp = \frac{nR}{V} dT - \frac{nRT}{V^2} dV$$

2. Pour les mêmes raisons, la fonction : $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$ admet pour différentielle :

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T dV$$

où :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V-b} \text{ et } \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}$$

en conséquence de quoi :

$$dp = \frac{R dT}{V-b} - \frac{RT dV}{(V-b)^2} + \frac{2a dV}{V^3}$$

● 176 Lycée Hoche, Versailles

1. La linéarité de l'échelle centésimale θ en fonction de R suggère l'existence de deux constantes (α et β) telles que : $\theta = \alpha R + \beta$. En outre, la nature de cette échelle justifie que :

- pour $t = 0$, c'est-à-dire pour $R = R_0$, θ est nul :

$$0 = \alpha R_0 + \beta \Rightarrow \beta = -\alpha R_0 \Rightarrow \theta = \alpha \times (R - R_0) = \alpha \times R_0 (at + bt^2)$$

- Pour $t = 100^\circ\text{C}$, θ vaut également 100 degrés :

$$100 = \alpha \times R_0 (100a + 10^4b) \Rightarrow \alpha R_0 = \frac{1}{a + 100b} \Rightarrow \theta = \frac{at + bt^2}{a + 100b}$$

2. L'écart Δ vaut :

$$\Delta = t - \theta = t - \frac{at + bt^2}{a + 100b} \Rightarrow \Delta = b \times \frac{100t - t^2}{a + 100b}$$

et prend une valeur *maximum* pour une température t_1 telle que :

$$\left. \frac{d\Delta}{dt} \right|_{t_1} = 0 \Rightarrow 100 - 2t_1 = 0 \Rightarrow t_1 = 50^\circ\text{C}$$

● **177** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

L'énergie cinétique moyenne d'un atome d'argon, de masse $m = \frac{M}{\mathcal{N}_A}$ et de vitesse quadratique moyenne v^* :

$$e_c = \frac{1}{2} m v^{*2} = \frac{1}{2} \times \frac{M}{\mathcal{N}_A} \times v^{*2}$$

est liée à la température absolue $T = 20 + 273 = 293 \text{ K}$:

$$e_c = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \times \frac{R}{\mathcal{N}_A} \times T$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{2} \times \frac{M}{\mathcal{N}_A} \times v^{*2} = \frac{3}{2} \times \frac{R}{\mathcal{N}_A} \times T \Rightarrow v^* = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Application numérique :

$$v^* = \sqrt{\frac{3 \times 8,314 \times 293}{40.10^{-3}}} \Rightarrow v^* = 427,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

● **178** ————— **Lycée Henry Wallon, Valenciennes**

La différentielle de la pression peut s'écrire sous la forme :

$$dp = R \left(dT \times \frac{1}{V} - T \times \frac{dV}{V^2} \right) + RA \left(dT \times \frac{1}{V^2} - T \times \frac{2dV}{V^3} \right)$$

qui fait directement apparaître les différentielles :

$$d \left(T \times \frac{1}{V} \right) = dT \times \frac{1}{V} - T \times \frac{dV}{V^2} \text{ et } d \left(T \times \frac{1}{V^2} \right) = dT \times \frac{1}{V^2} - T \times \frac{2dV}{V^3}$$

d'où il s'ensuit que :

$$dp = R d \left(\frac{T}{V} \right) + RA d \left(\frac{T}{V^2} \right) = d \left(\frac{RT}{V} + \frac{ART}{V^2} \right)$$

Il existe, par conséquent, une constante K telle que :

$$p = \frac{RT}{V} + \frac{ART}{V^2} + K$$

Or, lorsque la pression p est faible, c'est-à-dire lorsque V est grand, ce gaz se comporte comme un gaz parfait, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \lim_{V \rightarrow \infty} p &= \lim_{V \rightarrow \infty} \left(\frac{RT}{V} \right) \\ &\Rightarrow \lim_{V \rightarrow \infty} \left(\frac{RT}{V} + \frac{ART}{V^2} + K \right) = \lim_{V \rightarrow \infty} \left(\frac{RT}{V} \right) \Rightarrow K = 0 \end{aligned}$$

Finalement, l'équation d'état de ce gaz est donnée par :

$$pV = RT + \frac{ART}{V}$$

● **179** ————— **Lycée Camille Guérin, Poitiers**

1. Sachant que :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1$$

et compte tenu de la définition des coefficients α et χ_T :

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha V \Rightarrow \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{1}{\alpha V}$$

et :

$$\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\chi_T V$$

on trouve :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \times \frac{1}{\alpha V} \times (-\chi_T V) = -1 \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\alpha}{\chi_T}$$

2. La pression p est une fonction du volume V et de la température T , en conséquence de quoi une augmentation dV et dT de ces paramètres provoque une variation dp de la pression, telle que :

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV$$

Or, l'ampoule ne peut changer de volume sans se briser, en raison de quoi :

$$dV = 0 \Rightarrow dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT = \frac{\alpha}{\chi_T} dT \Rightarrow \Delta p = \frac{\alpha}{\chi_T} \Delta T$$

Du reste, l'intégrité de l'ampoule est maintenue tant que $\Delta p < \Delta p_{\max} = 10^6$ Pa, c'est-à-dire :

$$\frac{\alpha}{\chi_T} \Delta T < \Delta p_{\max} \Rightarrow \Delta T < \frac{\chi_T}{\alpha} \Delta p_{\max}$$

ce qui signifie aussi que l'ampoule peut supporter, sans dommage, une augmentation de température :

$$\Delta T_{\max} = \frac{\chi_T}{\alpha} \Delta p_{\max}$$

Application numérique :

$$\Delta T_{\max} = \frac{8,5 \cdot 10^{-10}}{6,8 \cdot 10^{-4}} \times 10^6 \Rightarrow \Delta T_{\max} = 1,25 \text{ K}$$

● **180** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

1. Une particule de gaz parfait, de masse m_i et de température T_i , présente une vitesse quadratique moyenne v_i^* telle que :

$$\frac{1}{2} m_i v_i^{*2} = \frac{3}{2} k_B T \Rightarrow m_i v_i^{*2} = 3k_B T \quad (k_B \text{ est la constante de Boltzmann}).$$

En notant \mathcal{N}_A le nombre d'Avogadro et $R = \mathcal{N}_A k_B$ la constante molaire des gaz parfaits, cette loi conduit à :

$$\mathcal{N}_A m_i v_i^{*2} = 3\mathcal{N}_A k_B T_i \Rightarrow M_i v_i^{*2} = 3RT_i \Rightarrow v_i^* = \sqrt{3R \times \frac{T_i}{M_i}}$$

où M_i désigne la masse molaire de la particule. Notamment, en affectant à l'indice i les valeurs des systèmes (1), (2) et (3), on obtient :

$$\frac{v_1^*}{v_2^*} = \sqrt{\frac{T_1}{M_1} \times \frac{M_2}{T_2}} = \sqrt{\frac{320}{2} \times \frac{4}{160}} = 2 \Rightarrow v_1^* = 2v_2^*$$

et :

$$\frac{v_1^*}{v_3^*} = \sqrt{\frac{T_1}{M_1} \times \frac{M_3}{T_3}} = \sqrt{\frac{320}{2} \times \frac{40}{400}} = 4 \Rightarrow v_1^* = 4v_3^*$$

En comparant avec les vitesses :

$$v_C^* = 4v_A^* \text{ et } v_C^* = 2v_B^*$$

on attribue les vitesses quadratiques aux systèmes suivants :

$$\begin{aligned} v_C^* &\leftrightarrow \text{système (1) : H}_2 \\ v_A^* &\leftrightarrow \text{système (3) : Ar} \\ v_B^* &\leftrightarrow \text{système (2) : He} \end{aligned}$$

2. L'énergie cinétique moyenne de translation par particule est directement proportionnelle à la température du gaz : $e_c = \frac{3}{2} k_B T$, ce qui permet de conclure que :

c'est le système (3), l'argon, qui possède la plus grande énergie cinétique moyenne de translation par particule.

● **181** ————— **Lycée Camille Guérin, Poitiers**

L'existence d'une équation d'état de la forme $f(p, V, T) = 0$ assure que le volume V du fluide dépend de sa température T et de sa pression p :

$$V = V(T, p) \Rightarrow dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp$$

où la définition des coefficients thermoélastiques :

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{pV} \\ \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{p} + \frac{a}{V} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{R}{p} \\ \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = -\frac{V}{p} - a \end{cases}$$

conduisent à l'équation :

$$\begin{aligned} dV &= \frac{R}{p} dT - \frac{V dp}{p} - a dp \Rightarrow p dV = R dT - V dp - ap dp \\ &\Rightarrow p dV + V dp = R dT - ap dp \end{aligned}$$

dans laquelle on reconnaît les différentielles :

$$d(pV) = p dV + V dp \text{ et } d(ap^2) = 2ap dp$$

Il s'ensuit que :

$$d(pV) = d\left(RT - \frac{1}{2}ap^2\right)$$

ce qui signifie qu'il existe une constante K telle que :

$$pV = RT - \frac{1}{2}ap^2 + K$$

Or, lorsque p tend vers zéro, ce fluide se comporte comme une mole de gaz parfait, ce qui se traduit par :

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} (pV) = RT &\Rightarrow \lim_{p \rightarrow 0} \left(RT - \frac{1}{2}ap^2 + K\right) = RT \\ &\Rightarrow RT + K = RT \Rightarrow K = 0 \end{aligned}$$

Finalement, l'équation différentielle de ce fluide est donnée par :

$$pV = RT - \frac{1}{2}ap^2$$

● 182 ————— Lycée Lakanal, Sceaux

1. L'échelle de température θ étant linéaire en fonction de V , il existe deux nombres constants α et β tels que : $\theta = \alpha V + \beta$, où V est donné à partir de la dilatation moyenne α_0^t :

$$\frac{V - V_0}{V_0 t} = a - bt + ct^2 \Rightarrow V - V_0 = V_0 (at - bt^2 + ct^3)$$

En outre, cette échelle est centésimale, ce qui signifie que :

- lorsque $t = 0$, θ est nul :

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha V_0 + \beta \Rightarrow \beta = -\alpha V_0 \Rightarrow \theta = \alpha (V - V_0) \\ &\Rightarrow \theta = \alpha \times V_0 (at - bt^2 + ct^3) \end{aligned}$$

- Lorsque $\theta = 100$, V prend la valeur $V(100^\circ\text{C}) = V_{100}$:

$$\begin{aligned} 100 &= \alpha (V_{100} - V_0) \Rightarrow 100 = \alpha \times V_0 (100a - 10^4 b + 10^6 c) \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{1}{V_0 (a - 100b + 10^4 c)} \end{aligned}$$

Finalement, il ressort de ces calculs que :

$$\theta = \alpha V_0 (at - bt^2 + ct^3) \Rightarrow \theta = \frac{at - bt^2 + ct^3}{a - 100b + 10^4 c}$$

2. L'écart Δ est défini par :

$$\Delta = \theta - t = \frac{at - bt^2 + ct^3}{a - 100b + 10^4 c} - t \Rightarrow \Delta = \frac{b(100t - t^2) + c(t^3 - 10^4 t)}{a - 100b + 10^4 c}$$

3. Sachant que, pour $t = t_1 = 150^\circ\text{C}$, $\theta = t$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \theta - t_1 = 0 &\Rightarrow bt_1(100 - t_1) + ct_1(t_1^2 - 10^4) = 0 \\ &\Rightarrow c = b \times \frac{t_1 - 100}{t_1^2 - 10^4} = \frac{b}{t_1 + 10^2} = 4.10^{-3} b \end{aligned}$$

ce qui simplifie l'expression de Δ :

$$\Delta = b \times \frac{100t - t^2 + 4.10^{-3}t^3 - 40t}{a - 100b + 10^4 c} = b \times \frac{4.10^{-3}t^3 - t^2 + 60t}{a - 100b + 10^4 c}$$

Ce faisant, Δ admet un *extremum* pour une température t telle que $\frac{d\Delta}{dt} = 0$, c'est-à-dire :

$$12.10^{-3}t^2 - 2t + 60 = 0$$

Le discriminant réduit de cette équation du second degré :

$$\Delta = 1 - 60 \times 12.10^{-3} = 0,28$$

génère deux solutions réelles :

$$t_1 = \frac{1 + \sqrt{\Delta}}{12.10^{-3}} = 127,4^\circ\text{C} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{1 - \sqrt{\Delta}}{12.10^{-3}} = 39,2^\circ\text{C}$$

● 183 ————— Lycée du Parc, Lyon

1. La longueur ℓ de la tige dépendant *a priori* de la température T et de la force F , sous l'influence des variations dT et dF , cette longueur s'accroît de :

$$d\ell = \left(\frac{\partial \ell}{\partial F}\right)_T dF + \left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_F dT$$

Notamment, à température constante :

$$dT = 0 \Rightarrow d\ell = \left(\frac{\partial \ell}{\partial F}\right)_T dF$$

où la définition du coefficient d'élasticité :

$$E = -\frac{\ell}{s} \left(\frac{\partial F}{\partial \ell}\right)_T \Rightarrow \left(\frac{\partial \ell}{\partial F}\right)_T = -\frac{\ell}{Es}$$

amène à poser :

$$d\ell = -\frac{\ell}{Es} dF \Rightarrow \frac{d\ell}{\ell} = -\frac{1}{Es} dF$$

2. Lorsque $F = 0$, ℓ prend la valeur ℓ_0 , en conséquence de quoi :

$$\int_{\ell_0}^{\ell} \frac{d\ell}{\ell} = -\frac{1}{Es} \int_0^F dF \Rightarrow \ln\left(\frac{\ell}{\ell_0}\right) = -\frac{F}{Es} \Rightarrow \ell = \ell_0 e^{-F/Es}$$

3. Avec un rayon $r = 10^{-2}$ m, le tibia est assimilé à une tige de section $s = \pi r^2$, de sorte que lorsque la force F s'apparente au poids mg d'une personne de 80 kg :

$$\frac{F}{Es} = \frac{mg}{E \times \pi r^2} = \frac{80 \times 10}{10^{10} \times \pi \times 10^{-4}} \simeq 2,5 \cdot 10^{-4}$$

ce qui justifie l'emploi d'un développement limité :

$$e^{-F/Es} \simeq 1 - \frac{F}{Es} \Rightarrow \ell \simeq \ell_0 - \ell_0 \times \frac{F}{Es}$$

C'est pourquoi l'accroissement relatif dû au poids de la personne vaut :

$$\frac{|\ell - \ell_0|}{\ell_0} = \frac{F}{Es} = 0,025\%$$

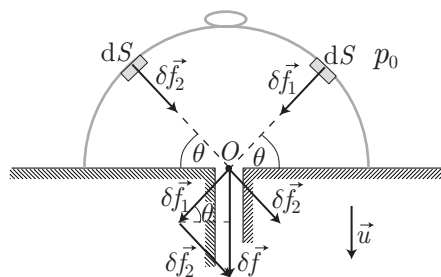
Pour un os d'une trentaine de centimètres, cette variation correspond à :

$$\Delta\ell = |\ell - \ell_0| \simeq 0,08 \text{ mm}$$

Un tel phénomène n'est évidemment pas perceptible.

● 184 ————— Lycée Camille Guérin, Poitiers

Considérons deux surfaces élémentaires identiques (dS), symétriques par rapport à l'axe vertical de l'hémisphère, soumises aux forces de pression $\delta\vec{f}_1$ et $\delta\vec{f}_2$, de normes $\delta f_1 = \delta f_2$.



La somme vectorielle de ces forces génère le vecteur :

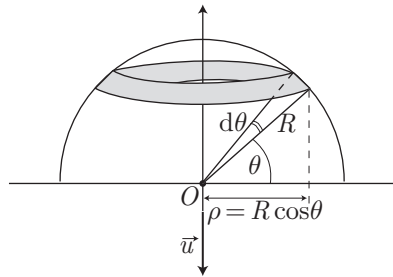
$$\delta\vec{f} = \delta\vec{f}_1 + \delta\vec{f}_2 = 2\delta f_1 \sin\theta \vec{u} \text{ avec } \delta f_1 = p_0 \times dS$$

En additionnant ces forces sur une demi-couronne horizontale, de rayon $\rho = R \cos\theta$ et de largeur $R d\theta$, nous exprimons la force $\delta\vec{F}$ de pression qui s'exerce sur la totalité de la couronne :

$$\delta \vec{F} = 2p_0 \, d\Sigma \sin \theta \, \vec{u}$$

où $d\Sigma$ désigne la surface de la demi-couronne :

$$\begin{aligned} d\Sigma &= \pi \rho \times R \, d\theta = \pi R^2 \cos \theta \, d\theta \\ \Rightarrow \delta \vec{F} &= 2\pi R^2 p_0 \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, \vec{u} \\ \Rightarrow \delta \vec{F} &= \pi R^2 p_0 \sin(2\theta) \, d\theta \, \vec{u} \end{aligned}$$



Par suite, sur la totalité de l'hémishère, décrit par θ évoluant de 0 à $\frac{\pi}{2}$, s'exerce la force de pression :

$$\vec{F} = \pi R^2 p_0 \vec{u} \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) \, d\theta = \pi R^2 p_0 \vec{u} \left[-\frac{\cos(2\theta)}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

soit encore :

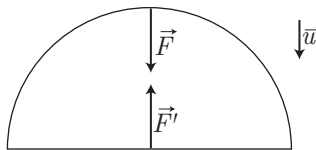
$$\vec{F} = \pi R^2 \times p_0 \vec{u}$$



Il existe une autre méthode, beaucoup plus rapide, qui permet d'accéder au même résultat. En l'absence de toute autre force que la pression atmosphérique, le même hémishère, fermé sur sa face inférieure, serait soumis à :

- la force \vec{F} sur sa partie hémisphérique ;
- la force de pression \vec{F}' qui s'exerce sur la face plane d'aire πR^2 :

$$\vec{F}' = -p_0 \times \pi R^2 \vec{u}$$



Sous l'influence de ces deux forces de pression, un tel objet demeurerait en équilibre, et c'est pourquoi :

$$\vec{F} + \vec{F}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = -\vec{F}' = p_0 \times \pi R^2 \vec{u}$$

● **185** **Lycée Hoche, Versailles**

1. Soit S la section de base du cylindre de volume $V_0 = Sh$, et donc de masse $m = \mu V = \mu Sh$; le cylindre est soumis à son poids :

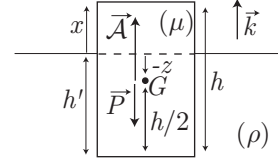
$$\vec{P} = m\vec{g} = -\mu Shg\vec{k}$$

En outre, le volume immergé du cylindre vaut :
 $S_i = Sh'$, avec :

$$h' + x = h \Rightarrow h' = h - x \Rightarrow V_i = S(h - x)$$

Par suite, la masse du liquide qui occuperait ce volume :

$$m' = \rho V_i = \rho S(h - x)$$



est à l'origine de la poussée d'Archimède :

$$\vec{A} = -m'\vec{g} = \rho Sg(h - x)\vec{k}$$

La résultante des forces qui s'exercent sur ce cylindre :

$$\vec{F} = \vec{A} + \vec{P} = Sg[\rho(h - x) - \mu h]\vec{k}$$

est nulle à l'équilibre, c'est-à-dire pour une valeur x_e de x telle que :

$$\mu h = \rho(h - x_e) \quad (15)$$

c'est-à-dire :

$$h - x_e = \frac{\mu}{\rho} h = \alpha h \Rightarrow x_e = h(1 - \alpha) = 10 \times (1 - 0,8) = 2 \text{ cm}$$

2. Le mouvement du cylindre est décrit par la position (z) de son centre de gravité G , auquel cas son accélération est donnée par : $\vec{\gamma} = \ddot{z}\vec{k}$. Or :

$$\frac{h}{2} - z = h' = h - x \Rightarrow z = x - \frac{h}{2} \Rightarrow \dot{z} = \dot{x} \Rightarrow \ddot{z} = \ddot{x}$$

Ce faisant, le mouvement du cylindre, de masse $m = \mu Sh$, est soumis à la loi fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{\gamma} = \vec{F} \Rightarrow \mu Sh\ddot{x} = Sg[\rho(h - x) - \mu h]$$

où le résultat (15) suggère de remplacer μh par $\rho(h - x_e)$:

$$\begin{aligned} \mu h\ddot{x} &= g[\rho(h - x) - \rho(h - x_e)] = \rho g(x_e - x) \\ \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\rho g}{\mu h}(x - x_e) &= 0 \end{aligned}$$

Aussi, en notant $\varepsilon = x - x_e$ l'écart par rapport à l'équilibre, cette équation différentielle devient :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\rho g}{\mu h}\varepsilon = 0 \Leftrightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{\alpha h}\varepsilon = 0$$

ce qui montre que des oscillations se produisent autour de la position d'équilibre, avec une pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\alpha h}}$$

c'est-à-dire une période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha h}{g}}$$

Application numérique :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0,8 \times 0,1}{9,8}} \Rightarrow T = 0,57 \text{ s}$$

● **186** ————— **Lycée Clémenceau, Nantes**

1. On désigne par S_e la surface latérale émergée, par S_i celle immergée, de sorte que la surface latérale totale S soit égale à :

$$S = \pi R^2 = S_e + S_i \Rightarrow S_i = \pi R^2 - S_e$$

En outre, la surface délimitée par l'angle ϕ est celle d'un secteur et, sachant que lorsque $\phi = 2\pi$, cette surface s'identifie à l'aire d'un disque de rayon R , on peut poser :

$$S_\phi = \frac{R^2\phi}{2}$$

avec :

$$\phi + 2\theta = \pi \Rightarrow \phi = \pi - 2\theta \Rightarrow S_\phi = \frac{\pi R^2}{2} - R^2\theta$$

De plus, la surface S_t du triangle OAB vaut :

$$S_t = b \times h = R \cos \theta \times R \sin \theta = \frac{R^2}{2} \sin(2\theta)$$

Aussi :

$$\begin{aligned} S_\phi = S_e + S_t &\Rightarrow S_e = S_\phi - S_t = \frac{\pi R^2}{2} - R^2\theta - \frac{R^2}{2} \sin(2\theta) \\ &\Rightarrow S_i = \pi R^2 - S_e = \frac{\pi R^2}{2} + R^2\theta + \frac{R^2}{2} \sin(2\theta) \end{aligned}$$

C'est pourquoi le volume V_i du cylindre immergé prend la valeur :

$$V_i = S_i \ell = R^2 \ell \times \left[\frac{\pi}{2} + \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]$$

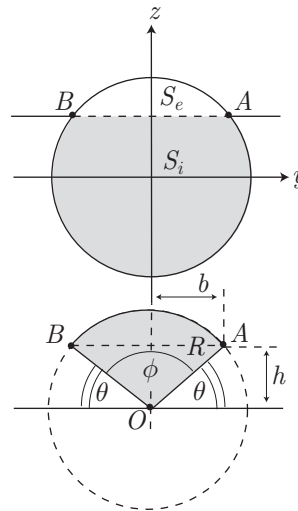
2. Le cylindre est soumis à :

- son poids $\vec{P} = -mg\vec{k}$, où m désigne la masse du cylindre, proportionnelle à son volume $V_0 = \pi R^2 \ell$:

$$m = \rho_S V_0 = \rho_S \times \pi R^2 \ell \Rightarrow \vec{P} = -\rho_S g \pi R^2 \ell \vec{k}$$

- la poussée d'Archimède \vec{A} , opposée au poids qu'aurait une masse m_i de liquide qui occuperait le volume V_i de la partie immergée du cylindre :

$$\vec{A} = m_i g \vec{k}$$



avec :

$$m_i = \rho_L V_i \Rightarrow \vec{A} = \rho_L g R^2 \ell \times \left[\frac{\pi}{2} + \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right] \vec{k}$$

Par conséquent, le cylindre est soumis à une force résultante :

$$\vec{F} = \vec{A} + \vec{P} = \rho_L g R^2 \ell \left[\frac{\pi}{2} + \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right] \vec{k} - \rho_S g \pi R^2 \ell \vec{k}$$

qui s'annule à l'équilibre :

$$\begin{aligned} \vec{F} = \vec{0} &\Rightarrow \rho_S \pi = \rho_L \left[\frac{\pi}{2} + \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right] \\ &\Rightarrow \pi u = \frac{\pi}{2} + \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \text{ avec } u = \frac{\rho_S}{\rho_L} \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$\pi \left(u - \frac{1}{2} \right) = \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \text{ avec } u = \frac{\rho_S}{\rho_L} \quad (16)$$

3. Le cylindre est en demi-immersion lorsque $\theta = 0$, auquel cas :

$$\pi \times \left(u - \frac{1}{2} \right) = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$$

et en immersion totale pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire :

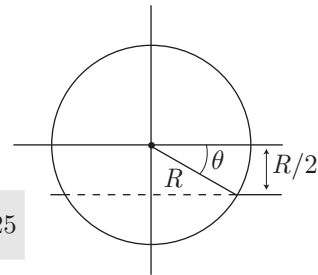
$$\pi \times \left(u - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \Rightarrow u - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow u = 1$$

4. L'immersion du quart du diamètre du cylindre correspond à une valeur de θ telle que :

$$\sin \theta = -\frac{R/2}{R} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}$$

à laquelle correspond la valeur de u vérifiant :

$$\begin{aligned} \pi \left(u - \frac{1}{2} \right) &= -\frac{\pi}{6} - \frac{1}{4} \Rightarrow u = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{4\pi} \\ &\Rightarrow u = \frac{1}{3} - \frac{1}{4\pi} \simeq 0,25 \end{aligned}$$



● 187 ————— Lycée Fabert, Metz

1. En orientant l'espace selon la verticale ascendante, la loi fondamentale de la statique des fluides relie la variation de pression dp observée à la variation dz de l'altitude :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g \Rightarrow dp = -\mu g dz \quad (17)$$

où la masse volumique μ demeure constante et s'exprime en fonction de la masse volumique de l'eau pure $\mu_e = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$:

$$d = \frac{\mu}{\mu_e} \Rightarrow \mu = d \times \mu_e \Rightarrow dp = -d \times \mu_e g dz$$

À la surface de l'eau ($z = 0$), la pression vaut p_0 tandis qu'à une profondeur $z = -h$ règne une pression p_h telle que :

$$\int_{p_0}^{p_h} dp = -\mu_e g d \int_0^{-h} dz \Rightarrow p_h = p_0 + \mu_e g h d$$

Application numérique :

$$p_h = 1,013 \cdot 10^5 + 10^3 \times 9,8 \times 10^4 \times 1,03 \Rightarrow p_h = 1\,010 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2. Il s'agit à nouveau d'utiliser la loi (17), dans laquelle l'expression de μ demeure inconnue jusqu'à présent. Cependant, sous l'influence d'une augmentation de pression dp (la température étant maintenue constante), une masse m d'eau voit son volume varier de la quantité : $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp$, où le coefficient de compressibilité isotherme fournit :

$$\begin{aligned} \chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T &\Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\chi_T V \Rightarrow dV = -\chi_T V dp \\ &\Rightarrow \frac{dV}{V} = -\chi_T dp \end{aligned}$$

Remarquons enfin que la masse volumique est définie (pour m fixé), par :

$$\mu = \frac{m}{V} \Rightarrow \ln \mu = \ln m - \ln V \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dV}{V} = \chi_T dp$$

En notant $\mu_0 = \mu_e \times d$ la masse volumique de l'eau de mer à la surface de la fosse ($z = 0$ et $p = p_0$), l'intégration de l'équation précédente conduit à :

$$\int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\mu} = \chi_T \int_{p_0}^p dp \Rightarrow \ln \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right) = \chi_T (p - p_0) \Rightarrow \mu = \mu_0 e^{\chi_T (p - p_0)}$$

L'équation (17) devient alors :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g = -\mu_0 g e^{\chi_T (p - p_0)} \Rightarrow e^{-\chi_T (p - p_0)} dp = -\mu_0 g dz$$

Il s'agit maintenant d'intégrer cette équation, sachant qu'à la profondeur $z = -h$, $p = p_h$ et qu'à la surface ($z = 0$), $p = p_0$:

$$\int_{p_0}^{p_h} e^{-\chi_T (p - p_0)} dp = -\mu_0 g \int_0^{-h} dz = \mu_0 g h$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\mu_0 g h &= e^{\chi_T p_0} \int_{p_0}^{p_h} e^{-\chi_T p} dp = -\frac{e^{\chi_T p_0}}{\chi_T} [e^{-\chi_T p}]_{p_0}^{p_h} \\ &= -\frac{e^{\chi_T p_0}}{\chi_T} (e^{-\chi_T p_h} - e^{-\chi_T p_0}) = \frac{1}{\chi_T} [1 - e^{\chi_T(p_0 - p_h)}] \\ \Rightarrow 1 - e^{\chi_T(p_0 - p_h)} &= \chi_T \mu_0 g h \\ \Rightarrow \chi_T(p_0 - p_h) &= \ln(1 - \chi_T \mu_0 g h)\end{aligned}$$

soit encore :

$$p_h = p_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \chi_T \mu_0 g h) \text{ avec } \mu_0 = d \times \mu_e$$

Application numérique :

$$\begin{aligned}p &= 1,013 \cdot 10^5 - \frac{1}{4,44 \cdot 10^{-10}} \ln(1 - 4,44 \cdot 10^{-10} \times 1,03 \times 10^3 \times 9,8 \times 10 \times 10^3) \\ \Rightarrow p_h &= 1034 \cdot 10^5 \text{ Pa}\end{aligned}$$

● 188 ————— Lycée Charlemagne, Paris

1. (a) Un volume V d'air, à la pression p et à la température T , contient un nombre n de moles de molécules tel que :

$$m = nM_0 \Rightarrow n = \frac{m}{M_0} \Rightarrow pV = m \frac{RT}{M_0} \Rightarrow \mu = \frac{m}{V} = \frac{pM_0}{RT} \quad (18)$$

- (b) La loi fondamentale de la statique des fluides impose, en outre :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g = -p \times \frac{M_0 g}{RT} \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{M_0 g}{RT} dz \quad (19)$$

Étant donné l'uniformité de T (indépendant de z) et en choisissant $p = p_0$ pour $z = 0$, cette équation conduit à :

$$\begin{aligned}\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} &= -\frac{M_0 g}{RT} \int_0^z dz \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{M_0 g}{RT} z \\ \Rightarrow p &= p_0 \exp\left(-\frac{M_0 g}{RT} z\right)\end{aligned}$$

2. Le modèle de l'atmosphère polytropique : $T = T_0 \times (1 - \alpha z)$ permet d'écrire l'équation (19) sous la forme :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M_0 g}{RT_0(1 - \alpha z)} dz = -\beta \times \frac{\alpha dz}{1 - \alpha z} \text{ avec } \alpha\beta = \frac{M_0 g}{RT_0}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned}\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} &= -\beta \int_0^z \frac{\alpha dz}{1 - \alpha z} \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \beta \ln(1 - \alpha z) = \ln(1 - \alpha z)^\beta \\ \Rightarrow p &= p_0 (1 - \alpha z)^\beta\end{aligned}$$

Pour trouver la masse volumique il suffit de poser : $T = T_0 (1 - \alpha z)$ et $p = p_0 (1 - \alpha z)^\beta$ dans la relation (18) :

$$\mu = \frac{M_0 p}{RT} = \frac{M_0 p_0}{RT_0} \times (1 - \alpha z)^{\beta-1}$$

Or, à l'altitude $z = 0$:

$$\mu_0 = \frac{M_0 p_0}{RT_0} \Rightarrow \mu = \mu_0 \times (1 - \alpha z)^{\beta-1}$$

● 189 ————— Lycée Hoche, Versailles

La loi fondamentale de la statique des fluides indique que $\frac{dp}{dz} = -\rho g$, où ρ désigne la masse volumique de l'air dont un volume V (à la pression p et à la température T) contient un nombre de moles n tel que : $pV = nRT$. Cette quantité de gaz présente une masse m donnée par :

$$m = nM \Rightarrow n = \frac{m}{M} \Rightarrow pV = m \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -p \times \frac{Mg}{RT}$$

soit encore :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

où :

$$\begin{aligned} T &= a - bz \text{ avec } a = 288^\circ\text{C} \text{ et } b = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{m}^{-1} \\ \Rightarrow dT &= -b dz \Rightarrow dz = -\frac{dT}{b} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\frac{dp}{p} = \frac{Mg}{Rb} \frac{dT}{T} = \alpha \frac{dT}{T} \text{ où } \alpha = \frac{Mg}{Rb}$$

Sachant que p et T prennent simultanément les valeurs respectives p_0 et T_0 au niveau du sol ($z = 0$), cette équation devient :

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \alpha \int_{T_0}^T \frac{dT}{T} \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = \alpha \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)^\alpha \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\alpha$$

Un même nombre de moles (n_0) de gaz occupe, au niveau du sol, un volume V_0 tel que :

$$p_0 V_0 = n_0 R T_0$$

et un volume V , à l'altitude z , donné par :

$$pV = n_0 RT$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{pV}{p_0V_0} = \frac{T}{T_0} &\Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(\frac{pV}{p_0V_0}\right)^\alpha = \left(\frac{p}{p_0}\right)^\alpha \times \left(\frac{V}{V_0}\right)^\alpha \\ &\Rightarrow \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^\alpha \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ &\Rightarrow \frac{p}{p_0} \times \left(\frac{V}{V_0}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = 1 \end{aligned}$$

Cette loi s'écrit aussi :

$$pV^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = p_0V_0^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

ce qui montre qu'en posant :

$$k = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

le produit pV^k est constant : $pV^k = \text{cte}$.

Application numérique :

$$\alpha = \frac{Mg}{Rb} = \frac{29.10^{-3} \times 9,81}{8,31 \times 6,5.10^{-3}} = 5,27 \Rightarrow k = \frac{5,27}{4,27} = 1,23$$

● 190 ————— Lycée Montaigne, Bordeaux

Soit p la pression qu'exerce l'eau à une altitude z , vérifiant la loi fondamentale de la statique des fluides :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g \Rightarrow dp = -\mu g dz$$

Or, à l'altitude $z = h$, la surface de l'eau est au contact de l'air, à la pression p_0 , en conséquence de quoi :

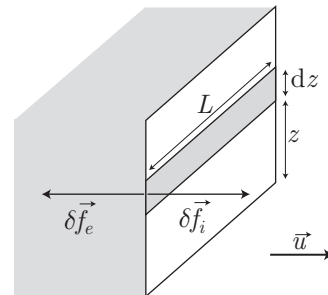
$$\int_{p_0}^p dp = -\mu g \int_h^z dz \Rightarrow p = p_0 - \mu g (z - h) = p_0 + \mu g (h - z)$$

Considérons une bande horizontale sur la porte, à une altitude z , de largeur dz et de longueur L (donc de surface $dS = L dz$). L'eau exerce sur une telle bande une force élémentaire :

$$\delta \vec{f}_i = p dS \vec{u}$$

tandis que l'air, à l'extérieur du barrage (à la pression p_0) exerce une force :

$$\delta \vec{f}_e = -p_0 dS \vec{u}$$



Aussi, cette bande est soumise à une force résultante :

$$\delta \vec{f} = \delta \vec{f}_i + \delta \vec{f}_e = (p - p_0) dS \vec{u} = \mu g (h - z) L dz \vec{u}$$

Le panneau AB , caractérisé par $z \in [h - h_1, h]$ est alors soumis à la force :

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \mu g L \vec{u} \int_{h-h_1}^h (h-z) dz = \mu g L \vec{u} \int_0^{h_1} x dx \text{ avec } x = h - z \\ \Rightarrow \vec{f}_1 &= \frac{\mu g L}{2} h_1^2 \vec{u}\end{aligned}$$

Le panneau BC , tel que $z \in [h - (h_1 + h_2), h - h_1]$ est quant à lui soumis à la force résultante :

$$\begin{aligned}\vec{f}_2 &= \mu g L \vec{u} \int_{h-(h_1+h_2)}^{h-h_1} (h-z) dz = \mu g L \vec{u} \int_{h_1}^{h_1+h_2} x dx \\ \Rightarrow \vec{f}_2 &= \frac{\mu g L}{2} [(h_1 + h_2)^2 - h_1^2] \vec{u}\end{aligned}$$

Ces deux forces sont de même intensité à condition que :

$$(h_1 + h_2)^2 - h_1^2 = h_1^2 \Rightarrow (h_1 + h_2)^2 = 2h_1^2 \Rightarrow h_1 + h_2 = \sqrt{2} h_1$$

c'est-à-dire :

$$h_2 = (\sqrt{2} - 1) h_1 \quad (20)$$

Enfin, le panneau inférieur, pour lequel $z \in [0, h_3]$, subit la force :

$$\begin{aligned}\vec{f}_3 &= \mu g L \vec{u} \int_0^{h_3} (h-z) dz = \mu g L \vec{u} \int_{h-h_3}^h x dx \\ \Rightarrow \vec{f}_3 &= \frac{\mu g L}{2} [h^2 - (h - h_3)^2] \vec{u}\end{aligned}$$

dont l'intensité vaut celle de \vec{f}_1 si :

$$h^2 - (h - h_3)^2 = h_1^2 \Rightarrow (h - h_3)^2 = h^2 - h_1^2$$

avec :

$$h - h_3 = h_1 + h_2 = \sqrt{2} h_1 \Rightarrow 2 h_1^2 = h^2 - h_1^2 \Rightarrow 3 h_1^2 = h^2$$

Il s'ensuit que :

$$h_1 = \frac{h}{\sqrt{3}} = 5,2 \text{ m}$$

Le résultat (20) révèle alors que :

$$h_2 = (\sqrt{2} - 1) h_1 \Rightarrow h_2 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}} h = 2,1 \text{ m}$$

et, enfin :

$$h_3 = h - h_1 - h_2 = h \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{3}} \right] \Rightarrow h_3 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3}} h = 1,7 \text{ m}$$

● 191 ————— Lycée Janson de Sailly, Paris

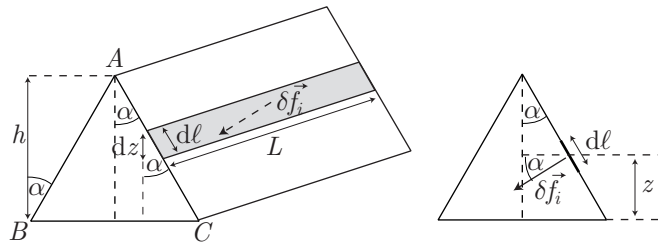
1. Au sein de l'eau, de masse volumique μ homogène, la pression p évolue avec l'altitude z selon l'équation différentielle :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g \Rightarrow dp = -\mu g dz$$

Or, lorsque $z = h$, cette pression prend la valeur p_0 de l'air (ce qui assure l'immobilité de la surface de l'eau), en raison de quoi :

$$\int_{p_0}^{p(z)} dp = -\mu g \int_h^z dz \Rightarrow p(z) = p_0 + \mu g (h - z)$$

2. Considérons une bande intérieure du barrage, de longueur L et de largeur $d\ell$ (donc de surface $dS = L d\ell$).



Cette bande est soumise, de la part de l'eau, à une force élémentaire $\delta \vec{f}_1$ telle que :

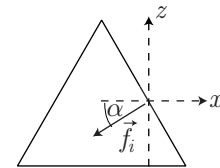
$$\|\delta \vec{f}_i\| = p(z) \times dS = L p(z) d\ell$$

ou :

$$\begin{aligned} dz = d\ell \cos \alpha \Rightarrow \|\delta \vec{f}_i\| = \delta f_i &= \frac{L}{\cos \alpha} p(z) dz \\ &= \frac{L}{\cos \alpha} [p_0 dz + \mu g (h - z) dz] \end{aligned}$$

Aussi, sur l'ensemble de cette face intérieure, s'exerce une force :

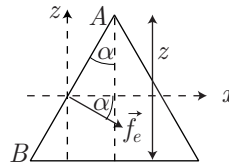
$$\vec{f}_i = \begin{pmatrix} -f_i \cos \alpha \\ 0 \\ -f_i \sin \alpha \end{pmatrix}$$



avec :

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{L}{\cos \alpha} \left[p_0 \int_0^h dz + \mu g \int_0^h (h - z) dz \right] \\ &= \frac{L}{\cos \alpha} \left[p_0 \int_0^h dz + \mu g \int_h^0 -u du \right] \text{ en posant } u = h - z \\ \Rightarrow f_i &= \frac{L}{\cos \alpha} \left(p_0 h + \mu g \frac{h^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Quant à l'air situé à l'extérieur du barrage, il exerce une pression p_0 uniforme sur l'ensemble de la surface $S = L \times AB = L \times \frac{h}{\cos \alpha}$. À cette pression est alors associée une force \vec{f}_e telle que :



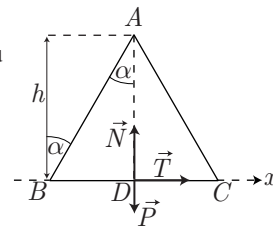
$$\vec{f}_e = \begin{pmatrix} f_e \cos \alpha \\ 0 \\ -f_e \sin \alpha \end{pmatrix} \text{ où } f_e = \|\vec{f}_e\| = p_0 S = \frac{hL}{\cos \alpha} p_0$$

3. Outre les forces de pression mentionnées précédemment, le barrage est également soumis à :

- son poids $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$, où m désigne la masse du barrage, de masse volumique ρ et de volume :

$$V = L \times BD \times AD = L \times h \tan \alpha \times h$$

$$\Rightarrow m = \rho V = \rho L h^2 \tan \alpha$$



- à la réaction : $\vec{R} \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ N \end{pmatrix}$.

Le barrage étant du reste en équilibre, ces forces se compensent vectoriellement :

$$\vec{R} + \vec{f}_i + \vec{f}_e + \vec{P} = \vec{0} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -f_i \cos \alpha \\ 0 \\ -f_i \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_e \cos \alpha \\ 0 \\ -f_e \sin \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T = f_i \cos \alpha - f_e \cos \alpha \\ N = f_i \sin \alpha + f_e \sin \alpha + mg \end{cases}$$

soit, compte tenu des expressions de f_i , f_e et m :

$$T = \frac{\mu g L h^2}{2} \text{ et } N = L \tan \alpha \left(2p_0 h + \mu g \frac{h^2}{2} + \rho g h^2 \right)$$

4. L'équilibre du barrage est conditionné par :

$$\|\vec{T}\| \leq f \times \|\vec{N}\| \Rightarrow \frac{1}{f} \leq \frac{N}{T} = \tan \alpha \times \frac{4p_0 h + \mu g h^2 + 2\rho g h^2}{\mu g h^2}$$

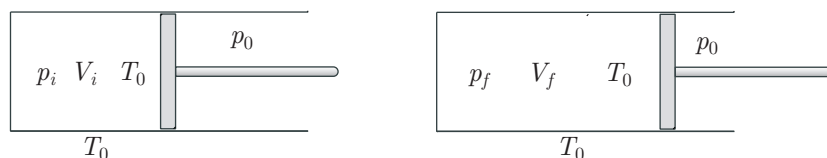
$$\Rightarrow \tan \alpha \geq \frac{\mu g h}{f (4p_0 + \mu g h + 2\rho g h)} \text{ avec } f = \tan \varphi$$

Cette inégalité montre que α doit excéder un angle α_0 tel que :

$$\alpha \geq \alpha_0 \Rightarrow \tan \alpha \geq \tan \alpha_0 = \frac{\mu g h}{\tan \varphi \times (4p_0 + \mu g h + 2\rho g h)}$$

● 192 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Le gaz passe d'un état initial $A(p_i, V_i, T_0)$ à un état final $B(p_f, V_f, T_0)$, de même température T_0 , car le contact thermique avec l'extérieur (à T_0) est supposé parfait.



En outre, l'état B est un état d'équilibre si $p_f = p_0$, ce qui assure l'équilibre mécanique du piston. Dans ces conditions, A et B étant des états d'équilibre, le gaz y vérifie son équation d'état :

$$\text{en } A : p_i (V_i - b) = RT_0 \text{ et en } B : p_0 (V_f - b) = RT_0$$

Par suite :

$$p_0 (V_f - b) = p_i (V_i - b) \Rightarrow V_f = b + \frac{p_i}{p_0} (V_i - b) \quad (21)$$

Au cours d'une détente brusque, la pression extérieure (maintenue à la valeur constante $p_{\text{ext}} = p_0$) exerce un travail :

$$\delta W_i = -p_{\text{ext}} dV = -p_0 dV \Rightarrow W_i = -p_0 \int_{V_i}^{V_f} dV = -p_0 (V_f - V_i)$$

où le résultat (21) fournit :

$$V_f - V_i = b + \frac{p_i}{p_0} (V_i - b) - V_i = \frac{p_i}{p_0} (V_i - b) - (V_i - b) = (V_i - b) \times \frac{p_i - p_0}{p_0}$$

c'est-à-dire :

$$W_i = (V_i - b) \times (p_0 - p_i) \quad (22)$$

2. Lorsque le gaz est détendu de manière quasi statique, la pression extérieure p_{ext} s'identifie à la pression $p = \frac{RT_0}{V - b}$ du gaz. Le travail élémentaire des forces de pression vaut ainsi :

$$\delta W_r = -p dV = -RT_0 \frac{dV}{V - b} \Rightarrow W_r = -RT_0 \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V - b} = -RT_0 \ln \left(\frac{V_f - b}{V_i - b} \right)$$

c'est-à-dire, compte tenu du résultat (21) :

$$\frac{V_f - b}{V_i - b} = \frac{p_i}{p_0} \Rightarrow W_r = -RT_0 \ln \left(\frac{p_i}{p_0} \right) = RT_0 \ln \left(\frac{p_0}{p_i} \right)$$

3. Si la pression p_i est très voisine de p_0 , il existe un nombre positif $\varepsilon \ll p_i$ tel que :

$$p_i = p_0 + \varepsilon \Rightarrow p_0 = p_i - \varepsilon$$

Dans ce cas :

$$W_r = RT_0 \ln \left(\frac{p_i - \varepsilon}{p_i} \right) = RT_0 \ln \left(1 - \frac{\varepsilon}{p_i} \right)$$

où $\varepsilon \ll p_i$ autorise l'emploi d'un développement limité :

$$\ln \left(1 - \frac{\varepsilon}{p_i} \right) \simeq -\frac{\varepsilon}{p_i} \Rightarrow W_r \simeq -\frac{RT_0}{p_i} \times \varepsilon$$

avec :

$$\varepsilon = p_i - p_0 \Rightarrow W_r \simeq \frac{RT_0}{p_i} \times (p_0 - p_i)$$

Enfin, l'équation d'état du gaz dans son état d'équilibre indique que :

$$p_i (V_i - b) = RT_0 \Rightarrow \frac{RT_0}{p_i} = V_i - b \Rightarrow W_r \simeq (V_i - b) (p_0 - p_i)$$

La comparaison avec le résultat (22) révèle que :

$$W_r \simeq W_i = (V_i - b) \times (p_0 - p_i)$$

ce qui révèle que le travail des forces de pression est le même au cours des deux transformations : lorsque p_i et p_0 sont très voisins, la détente brusque s'identifie à la détente quasi statique car les états A et B sont très proches. Cette similitude est d'autant mieux vérifiée que ε est petit.

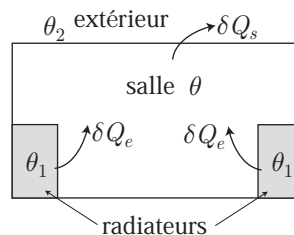
● 193 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. Pendant une durée élémentaire dt , chacun des radiateurs cède à la salle une chaleur δQ_e , à partir de laquelle est définie la puissance thermique \mathcal{P}_e :

$$\mathcal{P}_e = \frac{\delta Q_e}{dt} = k_1 (\theta_1 - \theta) \Rightarrow \delta Q_e = k_1 (\theta_1 - \theta) dt$$

Pendant la même durée, la salle cède à l'extérieur une chaleur δQ_s , associée à la puissance thermique :

$$\mathcal{P}_s = \frac{\delta Q_s}{dt} = k_2 (\theta - \theta_2) \Rightarrow \delta Q_s = k_2 (\theta - \theta_2) dt$$



Or, sous l'influence de la chaleur $\delta Q = 2 \delta Q_e - \delta Q_s$, la température θ de la salle s'accroît d'une quantité $d\theta$ telle que :

$$K d\theta = \delta Q \Rightarrow K d\theta = [2k_1 (\theta_1 - \theta) - k_2 (\theta - \theta_2)] dt \quad (23)$$

Notamment, cette température ne varie plus ($d\theta = 0$), lorsque θ prend la valeur θ' , solution de l'équation :

$$\begin{aligned} d\theta &= 2k_1 (\theta_1 - \theta') - k_2 (\theta' - \theta_2) = 0 \Rightarrow (2k_1 + k_2) \theta' = 2k_1 \theta_1 + k_2 \theta_2 \\ \Rightarrow \theta' &= \frac{2k_1 \theta_1 + k_2 \theta_2}{2k_1 + k_2} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\begin{cases} \theta_1 = 61^\circ\text{C} = 334 \text{ K} \\ \theta_2 = 5^\circ\text{C} = 278 \text{ K} \end{cases} \Rightarrow \theta' = \frac{2 \times 41,8 \times 334 + 250,8 \times 278}{2 \times 41,8 + 250,8}$$

$$\Rightarrow \theta' = 292 \text{ K} = 19^\circ\text{C}$$

2. Lorsque les radiateurs sont fermés, la salle ne reçoit plus la chaleur $2 \delta Q_e$, de sorte que :

$$\delta Q = -\delta Q_s \Rightarrow K d\theta = -k_2 (\theta - \theta_2) dt \Rightarrow K \frac{d\theta}{dt} + k_2 (\theta - \theta_2) = 0$$

On notera dorénavant $\Delta\theta_2 = \theta - \theta_2$, afin de simplifier cette équation différentielle :

$$\frac{d(\Delta\theta_2)}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow K \frac{d(\Delta\theta_2)}{dt} + k_2 \Delta\theta_2 = 0$$

dont l'équation caractéristique : $KX + k_2 = 0 \Rightarrow X = -\frac{k_2}{K}$ fournit la solution :

$$\Delta\theta_2 = A e^{-k_2 t/K} \Rightarrow \theta(t) = \theta_2 + A e^{-k_2 t/K}$$

La constante A est alors déterminée par la valeur initiale de θ : à la date $t = 0$ (ainsi définie arbitrairement), θ prend la valeur $\theta' = 292 \text{ K}$:

$$\begin{aligned} \theta' = \theta_2 + A &\Rightarrow A = \theta' - \theta_2 \Rightarrow \theta(t) = \theta_2 + (\theta' - \theta_2) e^{-k_2 t/K} \\ \Rightarrow \frac{\theta(t) - \theta_2}{\theta' - \theta_2} &= e^{-k_2 t/K} \Rightarrow -\frac{k_2 t}{K} = \ln \left[\frac{\theta(t) - \theta_2}{\theta' - \theta_2} \right] \end{aligned}$$

Aussi, la salle atteint la température $\theta(t) = \theta = 5,5^\circ\text{C}$ (278,5 K) à la date :

$$t = \frac{K}{k_2} \ln \left(\frac{\theta' - \theta_2}{\theta - \theta_2} \right)$$

Application numérique :

$$t = \frac{16,74 \cdot 10^5}{250,8} \times \ln \left(\frac{292 - 278}{278,5 - 278} \right) \Rightarrow t = 22\,241 \text{ s} = 6 \text{ h } 10 \text{ min } 41 \text{ s}$$

3. Lorsque les radiateurs sont ouverts, la température θ vérifie l'équation (23) :

$$K \frac{d\theta}{dt} = 2k_1\theta_1 + k_2\theta_2 - (2k_1 + k_2) \theta$$

où l'expression de θ' conduit à :

$$\begin{aligned} 2k_1\theta_1 + k_2\theta_2 = (2k_1 + k_2) \theta' &\Rightarrow K \frac{d\theta}{dt} = (2k_1 + k_2) (\theta' - \theta) \\ \Rightarrow K \frac{d\theta}{dt} + (2k_1 + k_2) (\theta - \theta') &= 0 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant $\Delta\theta' = \theta - \theta'$:

$$K \frac{d(\Delta\theta')}{dt} + (2k_1 + k_2) \Delta\theta' = 0$$

L'équation caractéristique :

$$K X + 2k_1 + k_2 = 0 \Rightarrow X = -\frac{2k_1 + k_2}{K}$$

génère la solution :

$$\Delta\theta' = B \exp\left(-\frac{2k_1 + k_2}{K} t\right) \Rightarrow \theta = \theta' + B \exp\left(-\frac{2k_1 + k_2}{K} t\right)$$

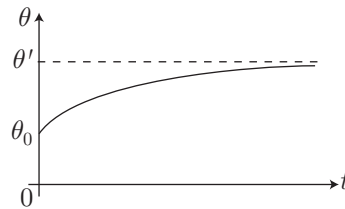
où la constante B s'obtient à partir de la valeur initiale de θ :

$$\begin{aligned} \theta(t=0) = \theta_0 &\Rightarrow \theta_0 = \theta' + B \Rightarrow B = \theta_0 - \theta' \\ &\Rightarrow \theta = \theta' + (\theta_0 - \theta') \times \exp\left(-\frac{2k_1 + k_2}{K} t\right) \end{aligned}$$

Au bout d'un temps très long, θ atteint la valeur limite :

$$\theta_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \theta = \theta' = 19^\circ\text{C}$$

ce qui représente une asymptote horizontale pour la courbe représentative de $\theta(t)$. En outre, $\theta' > \theta_0$ car c'est l'ouverture des radiateurs qui permet à θ de passer de θ_0 à θ' .



● 194 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

La longueur L du fil dépend *a priori* de sa température T et de la force F , de sorte que sa différentielle s'écrit :

$$dL = \left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)_T dF + \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_F dT$$

Notamment, le contact avec le thermostat (T demeure constant) et la définition du module d'élasticité de l'acier conduisent à :

$$\begin{aligned} E = \frac{L}{S} \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T &\Rightarrow \left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T = \frac{ES}{L} \Rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial F}\right)_T = \frac{L}{ES} \\ &\Rightarrow dL = \frac{L}{SE} dF \Rightarrow \frac{dL}{L} = \frac{1}{SE} \times dF \end{aligned}$$

Sachant que lorsque $F = 0$, le fil prend sa longueur à vide L_0 , cette équation fournit :

$$\int_{L_0}^L \frac{dL}{L} = \frac{1}{SE} \int_0^F dF \Rightarrow \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) = \frac{F}{SE} \Rightarrow L = L_0 e^{F/SE} \quad (24)$$

- Au cours du processus quasi statique, la force F s'accroît progressivement de 0 à F_0 , tandis que la longueur du fil s'accroît de dL ; le travail élémentaire de F correspondant vaut : $\delta W_i = F dL$, où la relation (24) indique que :

$$dL = \frac{L_0}{SE} e^{F/SE} dF \Rightarrow \delta W_1 = \frac{L_0}{SE} \times F e^{F/SE} dF$$

Pendant la totalité de l'étirement, la force F exerce par conséquent un travail :

$$W_1 = \frac{L_0}{SE} \int_0^{F_0} F e^{F/SE} dF = \frac{L_0}{SE} \int_0^{F_0} x e^{\alpha x} dx \text{ avec } \alpha = \frac{1}{SE}$$

L'énoncé fournit alors l'intégrale :

$$\int_0^{F_0} x e^{\alpha x} dx = \left[e^{\alpha x} \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] = e^{\alpha F_0} \left(\frac{F_0}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \text{ avec } \alpha = \frac{1}{SE}$$

C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{L_0}{SE} \times \left[e^{F_0/SE} (SE F_0 - S^2 E^2) + S^2 E^2 \right] \\ &\Rightarrow W_1 = L_0 \times \left[e^{F_0/SE} (F_0 - SE) + SE \right] \end{aligned}$$

- Au cours de la transformation brusque, la force F passe instantanément à la valeur F_0 qu'elle garde jusqu'à la fin de l'étirement. Le travail élémentaire exercé par cette force vaut ainsi :

$$\delta W_2 = F_0 dL \Rightarrow W_2 = F_0 \int_{L_0}^{L'} dL = F_0 (L' - L_0)$$

où L' désigne la longueur du fil soumis à la force F_0 , et dont l'expression est fournie par le résultat (24) :

$$L' = L_0 e^{F_0/SE}$$

Par suite :

$$W_2 = L_0 F_0 \times \left(e^{F_0/SE} - 1 \right)$$

● 195 ————— Lycée Pasteur, Paris

Sous l'influence d'une pression extérieure p_e , le volume V du gaz parfait s'accroît de dV , en conséquence de quoi il reçoit un travail élémentaire :

$$\delta W = -p_e dV$$

Notamment, au cours d'un processus quasi statique, la pression p_e s'identifie à la pression p du gaz, soumis à l'équation d'état :

$$pV = nRT_0 \Rightarrow p_e = p = \frac{nRT_0}{V} \Rightarrow \delta W = -nRT_0 \frac{dV}{V}$$

Au cours de la transformation, qui fait passer V de V_A à V_B , le gaz reçoit par conséquent un travail mécanique :

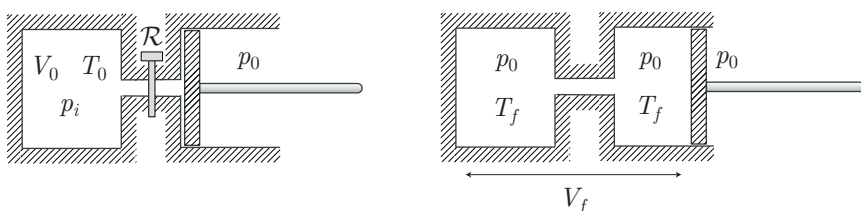
$$W = -nRT_0 \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} \Rightarrow W = nRT_0 \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right)$$

Au cours d'un processus isotherme, l'énergie interne du gaz parfait (qui ne dépend que de la température) ne varie pas : $\Delta U = 0$. Aussi, le premier principe de la thermodynamique permet-il de trouver la chaleur Q reçue par le gaz pendant la transformation :

$$\Delta U = W + Q = 0 \Rightarrow Q = -W = nRT_0 \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$$

● 196 ————— Concours ENSI

Le système évolue librement de l'état $(p_i = 2p_0, V_0, T_0)$ jusqu'à l'état $(p_f = p_0, V_f, T_f)$, car l'équilibre du piston est conditionné par l'égalité des pressions qui s'exercent sur ses deux faces :



Les n moles de gaz parfait étant en équilibre dans ces deux états extrêmes, ils suivent l'équation d'état :

$$\begin{cases} p_0 V_f = nRT_f \\ p_i V_0 = nRT_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_0 V_f = nRT_f \\ 2p_0 V_0 = nRT_0 \end{cases} \quad (25)$$

Au cours de cette transformation, l'énergie interne du gaz varie de la quantité :

$$\Delta U = nC_{Vm} (T_f - T_0)$$

tandis que la pression extérieure p_0 exerce un travail élémentaire :

$$\delta W = -p_0 dV \Rightarrow W = -p_0 \int_{V_0}^{V_f} dV = p_0 (V_0 - V_f)$$

c'est-à-dire, compte tenu des relations (25) :

$$\begin{cases} p_0 V_0 = nR \frac{T_0}{2} \\ p_0 V_f = nRT_f \end{cases} \Rightarrow W = nR \left(\frac{T_0}{2} - T_f \right)$$

Le premier principe de la thermodynamique impose à ce système calorifugé :

$$\begin{aligned}\Delta U = W &\Rightarrow nC_{Vm} (T_f - T_0) = nR \left(\frac{T_0}{2} - T_f \right) \\ &\Rightarrow T_f (C_{Vm} + R) = T_0 \left(\frac{R}{2} + C_{Vm} \right)\end{aligned}$$

avec :

$$C_{pm} - C_{Vm} = R \Rightarrow C_{Vm} (\gamma - 1) = R \Rightarrow C_{Vm} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

Il s'ensuit que :

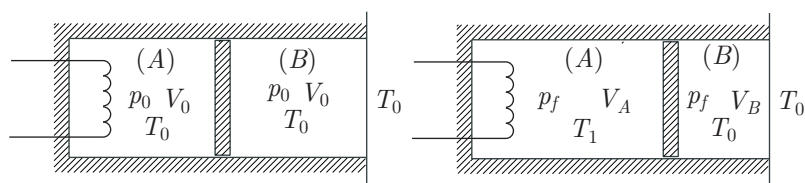
$$\begin{aligned}T_f \left(\frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right) &= T_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\gamma - 1} \right) \Rightarrow T_f \times \frac{\gamma}{\gamma - 1} = T_0 \times \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \\ &\Rightarrow T_f = T_0 \times \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\end{aligned}$$

À nouveau, les relations (25) révèlent que :

$$\frac{V_f}{2V_0} = \frac{T_f}{T_0} = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \Rightarrow V_f = V_0 \times \frac{\gamma + 1}{\gamma}$$

● 197 ————— Lycée Charlemagne, Paris

1. Chaque compartiment contient une mole de gaz parfait dont les états initiaux sont (p_0, V_0, T_0) et les états finaux sont : (p_f, V_A, T_1) , (p_f, V_B, T_0) car, d'une part l'équilibre mécanique du piston impose l'égalité des pressions qui s'y exercent, et d'autre part l'équilibre thermique du compartiment B avec le thermostat maintient constante sa température T_0 .



L'équation d'état des gaz parfaits impose dès lors :

$$\begin{cases} p_f V_A = RT_1 \\ p_f V_B = RT_0 \end{cases} \Rightarrow p_f (V_A + V_B) = R (T_1 + T_0) \\ \Rightarrow p_f \times 2V_0 = R (T_1 + T_0) \text{ car } V_A + V_B = 2V_0$$

Il s'ensuit que :

$$p_f = R \frac{T_1 + T_0}{2V_0}$$

L'équation d'état finale des deux gaz fournit alors :

$$p_f V_A = RT_1 \Rightarrow V_A = \frac{RT_1}{p_f} = RT_1 \times \frac{2V_0}{R(T_0 + T_1)} \Rightarrow V_A = 2V_0 \times \frac{T_1}{T_0 + T_1}$$

et :

$$p_f V_B = RT_0 \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{T_0}{T_1} \Rightarrow V_B = \frac{T_0}{T_1} V_A = 2V_0 \times \frac{T_0}{T_0 + T_1} \quad (26)$$

2. (a) La température du gaz parfait contenu dans le compartiment A variant de T_0 à T_1 , il s'ensuit une variation de son d'énergie interne :

$$\Delta U_A = C_{Vm} (T_1 - T_0)$$

où $C_{Vm} = \frac{3}{2} R$ représente la capacité thermique molaire, à volume constant, d'un gaz parfait monoatomique. C'est pourquoi :

$$\Delta U_A = \frac{3}{2} R (T_1 - T_0) \quad (27)$$

En revanche, la température du gaz parfait occupant le récipient B demeurant constante, il en va de même de son énergie interne :

$$\Delta U_B = 0 \quad (28)$$

- (b) Le gaz contenu dans le compartiment B étant en équilibre thermique avec un thermostat de température T_0 , sa température T_B demeure constante et égale à T_0 . En outre, la compression de ce gaz se fait assez lentement pour être considérée comme réversible, en conséquence de quoi ce gaz subit une :

compression isotherme, à la température T_0 .

Au cours de cette transformation, le gaz reçoit un travail élémentaire $\delta W_{A/B} = -p_e dV_B$, où p_e désigne la pression que le gaz dans A exerce sur le piston. Or, le caractère réversible de la compression permet d'identifier p_e à la pression p_B du gaz dans B ;

$$p_e = p_B = \frac{RT_0}{V_B} \Rightarrow \delta W_{A/B} = -RT_0 \frac{dV_B}{V_B}$$

Aussi, le travail total transmis au gaz du compartiment B par celui du compartiment A vaut-il :

$$W_{A/B} = -RT_0 \int_{V_0}^{V_B} \frac{dV_B}{V_B} = RT_0 \ln \left(\frac{V_0}{V_B} \right)$$

soit, compte tenu du résultat (26)

$$V_B = V_0 \times \frac{2T_0}{T_0 + T_1} \Rightarrow W_{A/B} = RT_0 \ln \left(\frac{T_0 + T_1}{2T_0} \right) \quad (29)$$

La chaleur Q' reçue par le gaz de ce compartiment vérifie le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_B = W_{A/B} + Q'$$

où $\Delta U_B = 0$, compte tenu du résultat (28) et $Q' = -Q_1$ puisque ce compartiment n'établit qu'un seul contact thermique avec le thermostat. C'est pourquoi :

$$0 = W_{A/B} - Q_1 \Rightarrow Q_1 = W_{A/B} = RT_0 \ln \left(\frac{T_0 + T_1}{2T_0} \right)$$

- (c) Compte tenu de l'égalité des pressions de part et d'autre du piston, le travail des forces de pression que le compartiment B exerce sur A vaut :

$$W_{B/A} = -W_{A/B}$$

En outre, la chaleur Q_2 reçue (exclusivement) par ce compartiment par effet Joule vérifie le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_A = Q_2 + W_{B/A} = Q_2 - W_{A/B} \Rightarrow Q_2 = \Delta U_A + W_{A/B}$$

c'est-à-dire, compte tenu des résultats (27) et (29) :

$$Q_2 = \frac{3}{2} R (T_1 - T_0) + RT_0 \ln \left(\frac{T_0 + T_1}{2T_0} \right) \quad (30)$$

Remarque – On pouvait obtenir ce même résultat, d'une manière plus globale : la variation d'énergie interne du système $\{A + B\}$:

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = \frac{3}{2} R (T_1 - T_0)$$

provient de l'apport des chaleurs :

$$Q_2 \text{ et } Q' = -Q_1 = -RT_0 \ln \left(\frac{T_0 + T_1}{2T_0} \right)$$

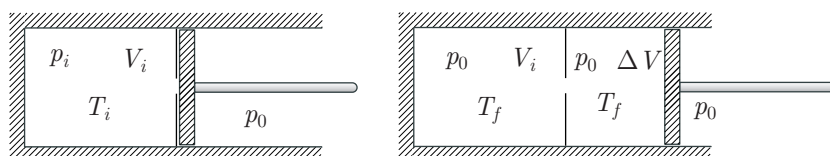
et du travail des forces extérieures à ce système (travail nul étant donné le caractère indéformable du cylindre) :

$$\begin{aligned} \Delta U = Q_2 + Q' = Q_2 - Q_1 &\Rightarrow Q_2 = \Delta U + Q_1 \\ &\Rightarrow Q_2 = \frac{3}{2} R (T_1 - T_0) + RT_0 \ln \left(\frac{T_0 + T_1}{2T_0} \right) \end{aligned}$$

ce qui confirme le résultat (30)

● 198 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

- Lorsque le cylindre atteint son équilibre, la pression de part et d'autre prend la même valeur p_0 (celle de l'atmosphère). À cet instant, les n moles de gaz parfait occupent un volume $V_i + \Delta V$ à la température T_f .



Au cours d'un déplacement élémentaire du piston, l'atmosphère (extérieure au système) exerce un travail :

$$\delta W_e = -p_{\text{ext}} dV = -p_0 dV$$

où le volume V occupé par le gaz passe de V_i à $V_i + \Delta V$:

$$W_e = -p_0 \int_{V_i}^{V_i + \Delta V} dV \Rightarrow W_e = -p_0 \Delta V \quad (31)$$

Du reste, l'équation d'état du gaz impose :

- dans l'état initial : $p_i V_i = nRT_i \Rightarrow nR = \frac{p_i V_i}{T_i}$;
- dans l'état final : $p_0 (V_i + \Delta V) = nRT_f \Rightarrow p_0 \Delta V = nRT_f - p_0 V_i$.

d'où il découle que :

$$p_0 \Delta V = p_i V_i \frac{T_f}{T_i} - p_0 V_i$$

la relation (31) fournit alors :

$$W_e = p_0 V_i - p_i V_i \frac{T_f}{T_i}$$

2. L'énergie interne des n moles de gaz parfait varie de la quantité :

$$\Delta U = n C_{Vm} (T_f - T_i) = \frac{p_i V_i}{T_i} \frac{C_{Vm}}{R} (T_f - T_i)$$

tandis que les parois calorifugées du cylindre interdisent tout échange de chaleur avec l'extérieur. C'est pourquoi le premier principe de la thermodynamique se traduit par :

$$\begin{aligned} \Delta U = W_e &\Rightarrow p_i V_i \frac{C_{Vm}}{R} \left(\frac{T_f}{T_i} - 1 \right) = p_0 V_i - p_i V_i \frac{T_f}{T_i} \\ &\Rightarrow p_i \frac{T_f}{T_i} \left(\frac{C_{Vm}}{R} + 1 \right) = p_0 + p_i \frac{C_{Vm}}{R} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \gamma = 1 + \frac{R}{C_{Vm}} &\Rightarrow \frac{C_{Vm}}{R} = \frac{1}{\gamma - 1} \\ &\Rightarrow \frac{T_f}{T_i} \left(\frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right) = \frac{p_0}{p_i} + \frac{1}{\gamma - 1} \\ &\Rightarrow \frac{T_f}{T_i} \times \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{p_0}{p_i} + \frac{1}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$T_f = \frac{T_i}{\gamma} \left[(\gamma - 1) \frac{p_0}{p_i} + 1 \right]$$

3. Compte tenu de ce résultat :

$$\begin{aligned} \frac{T_f}{T_i} - 1 &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p_0}{p_i} + \frac{1}{\gamma} - 1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p_0}{p_i} + \frac{1 - \gamma}{\gamma} \\ &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left(\frac{p_0}{p_i} - 1 \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \times \frac{p_0 - p_i}{p_i} \end{aligned}$$

d'où il découle que :

$$\frac{T_f - T_i}{T_i} = \frac{1 - \gamma}{\gamma} \times \frac{\Delta p}{p_i}$$

La définition de $\gamma = 1 + \frac{R}{C_{Vm}}$ révèle que γ est supérieur à 1, de sorte que :

$$\gamma > 1 \Rightarrow \frac{1 - \gamma}{\gamma} < 0 \Rightarrow \frac{T_f - T_i}{T_i} < 0 \Rightarrow T_f < T_i$$

Cette inégalité montre que la détente du gaz s'accompagne d'un abaissement de sa température.



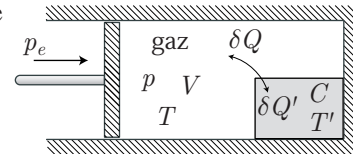
Le modèle développé ici est souvent employé dans le cas d'une fuite de gaz à travers un trou, dans l'atmosphère de pression p_0 . Autant le retenir car sa conception n'est pas évidente.

● 199 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. Soit δW_e le travail de la force de pression extérieure qui s'exerce sur le gaz : $\delta W_e = -p_e dV$, tandis que son volume varie de dV .

La transformation étant quasi statique, p_e s'identifie à la pression p du gaz, dont une mole vérifie l'équation d'état :

$$pV = RT \Rightarrow p = \frac{RT}{V}$$



d'où il s'ensuit que :

$$\delta W_e = -RT \frac{dV}{V} \quad (32)$$

Lorsque le corps, de capacité thermique C , reçoit une chaleur $\delta Q'$, sa température T' varie de la quantité dT' telle que :

$$\delta Q' = C dT' = C dT$$

car T' et T sont égaux dans le cas où l'équilibre thermique est maintenu entre le corps et le gaz parfait.

En outre, ce gaz reçoit une chaleur δQ exclusivement de la part du corps avec lequel il est en contact thermique, de sorte que :

$$\delta Q = -\delta Q' = -C dT \quad (33)$$

Quant à l'énergie interne de la mole de gaz, elle varie de la quantité :

$$dU = C_{Vm} dT \quad (34)$$

2. Le premier principe de la thermodynamique impose, du reste : $dU = \delta Q + \delta W_e$, c'est-à-dire, en tenant compte des résultats (34), (33) et (32) :

$$\begin{aligned} C_{Vm} dT = -C dT - RT \frac{dV}{V} &\Rightarrow (C_{Vm} + C) \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0 \\ &\Rightarrow (C_{Vm} + C) d(\ln T) + R d(\ln V) = 0 \\ &\Rightarrow d[\ln(T^{C_{Vm}+C} \times V^R)] = 0 \end{aligned}$$

ce qui suffit à montrer que :

$$T^{C_{Vm}+C} \times V^R = \text{cte}$$

Enfin, l'équation d'état des gaz parfaits permet de poser :

$$\begin{aligned} pV = RT &\Rightarrow T = \frac{1}{R} \times pV \\ &\Rightarrow \left(\frac{1}{R}\right)^{(C_{Vm}+C)} \times p^{(C_{Vm}+C)} V^{(C_{Vm}+C+R)} = \text{cte} \\ &\Rightarrow p \times V^{\left(1+\frac{R}{C_{Vm}+C}\right)} = \text{cte} \end{aligned}$$

ce qui suffit à prouver qu'il existe une constante k telle que :

$$pV^k = \text{cte}, \text{ avec } k = 1 + \frac{R}{C_{Vm} + C}$$

3. Lorsque C tend vers zéro, le gaz reçoit une chaleur : $\delta Q = -C dT = 0$, ce qui signifie que :

le gaz subit une compression adiabatique.

Dans ce cas⁴ :

$$k = 1 + \frac{R}{C_{Vm}} = \frac{C_{Vm} + R}{C_{Vm}} = \gamma \Rightarrow pV^\gamma = \text{cte}$$

En revanche, lorsque C tend vers l'infini :

$$\delta Q = -C dT \Rightarrow dT = -\frac{\delta Q}{C} = 0 \text{ car } \delta Q \neq \infty$$

ce qui signifie aussi que :

le gaz subit une transformation isotherme.

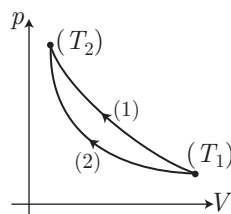
Son équation d'état :

$$pV = RT = \text{cte} \Rightarrow p = \frac{\text{cte}}{V}$$

montre que, dans un diagramme de Clapeyron (p en fonction de V), la transformation subie par ce gaz est représentée par une branche d'hyperbole.

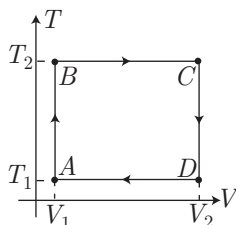
⁴Cette équation constitue la *loi de Laplace*, étudiée au prochain chapitre.

4. La transformation adiabatique est décrite, quant à elle, par la courbe (2), correspondant à la loi : $p = \frac{\text{cte}}{V^\gamma}$, tandis que la transformation isotherme ($p = \frac{\text{cte}}{V}$) est représentée par une branche de parabole (courbe 1) :



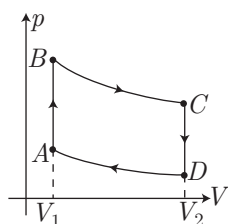
● 200 Lycée du Parc, Lyon

1. Dans un diagramme $T = f(V)$, les isochores $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$ (V étant constant) sont représentées par des portions de droites verticales et les transformations isothermes $B \rightarrow C$, $D \rightarrow A$ par des portions de droites horizontales :



En revanche, dans un diagramme de Clapeyron $p = f(V)$, les isothermes $B \rightarrow C$ et $D \rightarrow A$ sont représentées par des portions d'hyperboles :

$$p = \frac{RT_1}{V} \text{ pour } D \rightarrow A \text{ et } p = \frac{RT_2}{V} \text{ pour } B \rightarrow C \quad (35)$$



2. Calcul du travail

Au cours d'une transformation élémentaire réversible, le travail fourni par les forces de pression s'écrit :

$$\delta W = -p_{\text{ext}} dV = -p dV \quad (36)$$

Notamment, pour les transformations isochores $A \rightarrow B$ et $C \rightarrow D$, le volume est maintenu constant, de sorte que :

$$\begin{cases} \delta W_{AB} = 0 \\ \delta W_{CD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} W_{AB} = 0 \\ W_{CD} = 0 \end{cases}$$

Quant à la transformation $B \rightarrow C$, isotherme à la température T_2 , elle suit l'équation d'état (35) : $p = \frac{RT_2}{V}$. Aussi, pendant que le volume varie de V_1 à V_2 , la relation (36) indique que :

$$\delta W_{BC} = -RT_2 \frac{dV}{V} \Rightarrow W_{BC} = -RT_2 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \Rightarrow W_{BC} = RT_2 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

Le calcul se mène de la même manière pour la transformation $D \rightarrow A$, isotherme à la température T_1 ; le volume passe alors de V_2 à V_1 :

$$W_{DA} = RT_1 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

Ce faisant, au cours du cycle, le travail reçu par le gaz vaut :

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \Rightarrow W = R (T_2 - T_1) \times \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

Calcul de la chaleur

Au cours des transformations isothermes $B \rightarrow C$ et $D \rightarrow A$, l'énergie interne du gaz parfait ne varie pas, alors qu'il reçoit les chaleurs Q_{BC} et Q_{DA} soumises au premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{BC} = W_{BC} + Q_{BC} = 0 \Rightarrow Q_{BC} = -W_{BC} = RT_2 \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

et

$$\Delta U_{DA} = W_{DA} + Q_{DA} = 0 \Rightarrow Q_{DA} = -W_{DA} = RT_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

En revanche, au cours des transformations isochores $A \rightarrow B$ ($V_1 = \text{cte}$) et $C \rightarrow D$ ($V_2 = \text{cte}$), la chaleur reçue par le gaz s'identifie à sa variation d'énergie interne :

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = C_{Vm} (T_2 - T_1) \Rightarrow Q_{AB} = \frac{R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

et

$$Q_{CD} = \Delta U_{CD} = C_{Vm} (T_1 - T_2) \Rightarrow Q_{CD} = \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2)$$

Au cours du cycle, le gaz reçoit par conséquent la chaleur :

$$Q = \underbrace{Q_{AB} + Q_{CD}}_{=0} + Q_{BC} + Q_{DA} \Rightarrow Q = R (T_2 - T_1) \times \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

3. Pour une mole de gaz parfait, les variations d'énergie interne U et d'enthalpie H dépendent directement de la variation de sa température :

$$\begin{cases} dH = C_{pm} dT \\ dU = C_{Vm} dT \end{cases} \Rightarrow \frac{dH}{dU} = \frac{C_{pm}}{C_{Vm}} = \gamma \Rightarrow dH = \gamma dU \Rightarrow \Delta H = \gamma \Delta U$$

où ΔU s'obtient par application du premier principe de la thermodynamique :

(a) **pour chaque transformation :**

$$\Delta U_{AB} = Q_{AB} \Rightarrow \Delta H_{AB} = \gamma Q_{AB} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$$

$$\Delta U_{BC} = 0 \Rightarrow \Delta H_{BC} = 0$$

$$\Delta U_{CD} = Q_{CD} \Rightarrow \Delta H_{CD} = \gamma Q_{CD} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2)$$

$$\Delta U_{DA} = 0 \Rightarrow \Delta H_{DA} = 0$$

(b) **pour l'ensemble du cycle :**

$$\Delta H = \Delta H_{AB} + \Delta H_{BC} + \Delta H_{CD} + \Delta H_{DA} \Rightarrow \Delta H = 0$$

Ce résultat est une simple conséquence du comportement des fonctions d'état au cours d'un cycle :

$$\Delta H = \oint dH = 0$$

● 201 ————— Lycée Fabert, Metz

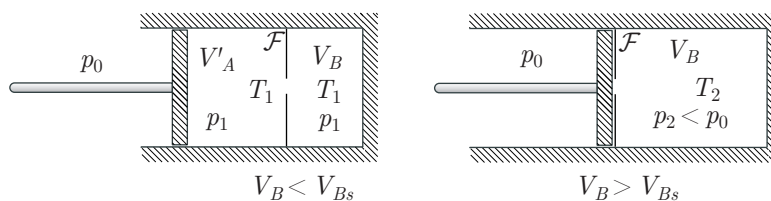
1. L'équilibre mécanique du piston est inféodé à l'identité des pressions p_A et p_0 de part et d'autre de ses faces :

$$p_A = p_0$$

Quant à l'équilibre thermodynamique du gaz dans A , il est caractérisé par l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p_0 V_A = nRT_A \Rightarrow T_A = \frac{p_0 V_A}{nR} \quad (37)$$

2. (a) Si le volume V_B est infiniment grand, le piston vient buter contre la paroi \mathcal{F} ; la pression de l'état final est inférieure à p_0 . En revanche, si V_B est suffisamment petit, il reste du gaz dans le compartiment A lorsqu'est atteint l'état d'équilibre final. C'est pourquoi il existe une valeur seuil V_{Bs} de V_B qui permet de distinguer deux états d'équilibre en fin d'expérience :



(b) Si $V_B < V_{Bs}$, l'équilibre mécanique du piston est à nouveau conditionné par l'égalité des pressions qui s'exercent sur ses deux faces :

$$p_1 = p_0$$

En notant V'_A le volume occupé par le gaz à gauche de la paroi fixe \mathcal{F} , l'équation d'état du gaz parfait impose :

$$p_0 V_1 = nRT_1 \text{ avec } V_1 = V'_A + V_B \quad (38)$$

Au cours de la transformation, la température du gaz parfait est passée de T_A à T_1 , provoquant concomitamment une variation de son énergie interne :

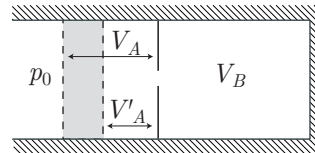
$$\Delta U = nC_{Vm} (T_1 - T_A) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_A)$$

En outre, le travail de la force de pression extérieure vaut :

$$\delta W_e = -p_0 dV \Rightarrow W_e = -p_0 \Delta V$$

où :

$$\Delta V = (V_B + V'_A) - (V_B + V_A) = V'_A - V_A$$



soit, compte tenu de l'identité (38) :

$$V'_A = V_1 - V_B \Rightarrow W_e = p_0 (V_A + V_B) - p_0 V_1 = p_0 (V_A + V_B) - nRT_1$$

Enfin, les parois calorifigées interdisant tout échange de chaleur entre le gaz et l'extérieur, le premier principe de la thermodynamique s'exprime par :

$$\begin{aligned} \Delta U = W_e &\Rightarrow \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_A) = p_0 (V_A + V_B) - nRT_1 \\ &\Rightarrow nRT_1 \left(\frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right) = p_0 V_A + p_0 V_B + \frac{nRT_A}{\gamma - 1} \end{aligned}$$

C'est ici que le résultat (37) peut à nouveau servir :

$$\begin{aligned} nRT_A = p_0 V_A &\Rightarrow nRT_1 \times \frac{\gamma}{\gamma - 1} = p_0 V_B + p_0 V_A \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1} \right) \\ &\Rightarrow nRT_1 \times \frac{\gamma}{\gamma - 1} = p_0 \left(V_B + V_A \times \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \\ &\Rightarrow T_1 = \frac{p_0}{nR} \left(V_A + V_B \times \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \end{aligned}$$

Quant à l'équation d'état qui décrit les deux situations d'équilibre, elle révèle que :

$$p_0 V_1 = nRT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{nRT_1}{p_0} = V_A + V_B \times \frac{\gamma - 1}{\gamma}$$

(c) Ce résultat montre que lorsque le piston est plaqué contre \mathcal{F} , le gaz occupe un

volume $V_1 = V_{Bs}$ qui correspond à $V_B = V_{Bs}$. Aussi :

$$V_{Bs} = V_A + V_{Bs} \times \frac{\gamma - 1}{\gamma} \Rightarrow V_{Bs} \times \underbrace{\left(1 - \frac{\gamma - 1}{\gamma}\right)}_{1/\gamma} = V_A \Rightarrow V_{Bs} = \gamma V_A$$

(d) Lorsque $V_B > V_{Bs}$, le volume total occupé par le gaz vaut :

$$V_2 = V_B$$

La pression extérieure p_0 exerce alors, sur la face gauche du piston, un travail :

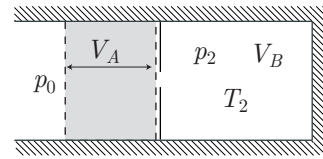
$$W_e = -p_0 \Delta V$$

avec :

$$\Delta V = (V_B) - (V_A + V_B) = -V_A$$

c'est-à-dire :

$$W_e = p_0 V_A$$



Le résultat (37) indique alors que :

$$p_0 V_A = nRT_A \Rightarrow W_e = nRT_A$$

Concomitamment, la température du gaz est passée de T_A à T_2 , provoquant une variation de son énergie interne :

$$\Delta U = nC_{Vm} (T_2 - T_A) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_A)$$

Le premier principe de la thermodynamique appliqué à cette transformation adiabatique conduit à :

$$\begin{aligned} \Delta U = W_e &\Rightarrow \frac{nR}{\gamma - 1} T_2 - \frac{nR}{\gamma - 1} T_A = nRT_A \\ &\Rightarrow \frac{T_2}{\gamma - 1} = T_A \times \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right) = T_A \times \frac{\gamma}{\gamma - 1} \\ &\Rightarrow T_2 = \gamma T_A \end{aligned}$$

Enfin, l'équation d'état du gaz parfait, dans ce nouvel état d'équilibre, impose :

$$p_2 V_2 = nRT_2 \Rightarrow p_2 = \frac{nRT_2}{V_2} = \frac{nR \times \gamma T_A}{V_B}$$

où, conformément au résultat (37) :

$$nRT_A = p_0 V_A \Rightarrow p_2 = \gamma p_0 \frac{V_A}{V_B}$$

Remarque - Si $V_B = V_{Bs}$, la pression p_2 du gaz s'identifie à la pression p_0 afin d'assurer l'équilibre mécanique du piston. Le résultat précédent devient

alors :

$$p_0 = \gamma p_0 \frac{V_A}{V_{Bs}} \Rightarrow V_{Bs} = \gamma V_A$$

et confirme de fait le résultat de la question 2.(c).

● 202 ————— Concours des Mines-Ponts

Au cours de la détente adiabatique du gaz parfait, qui passe de l'état $A (p_0, V_0, T_0)$ à l'état $B (p_1, V_1 = 2V_0, T_1)$, aucun travail ni chaleur ne sont échangés avec l'extérieur. C'est pourquoi son énergie interne U demeure constante :

$$\Delta U = W + Q = 0$$

ce qui montre que la température du gaz conserve sa valeur initiale :

$$T_1 = T_0 \text{ et } V_1 = 2V_0$$

Le nombre n de moles de gaz étant constant au cours de la transformation, les états d'équilibre A et B sont décrits par l'équation d'état :

$$\begin{cases} p_1 V_1 = nRT_1 \\ p_0 V_0 = nRT_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 \times 2V_0 = nRT_0 \\ p_0 \times V_0 = nRT_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{2p_1}{p_0} = 1 \Rightarrow p_1 = \frac{p_0}{2}$$

Il est toujours possible d'imaginer une transformation isotherme qui ferait passer ce gaz de l'état $A (p_0, V_0, T_0)$ à l'état $B \left(\frac{p_0}{2}, 2V_0, T_0\right)$, auquel cas l'énergie interne U du gaz ne varierait pas ($dU = 0$), tandis qu'il conviendrait de lui fournir une chaleur Q_{rev} et un travail W_{rev} , tels que :

$$dU = \delta Q_{\text{rev}} + \delta W_{\text{rev}} = 0 \Rightarrow \delta Q_{\text{rev}} = -\delta W_{\text{rev}}$$

Or, dans ce cas, le travail élémentaire reçu par le gaz de manière réversible, vaudrait :

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{rev}} &= -p_{\text{rev}} dV = -p dV \text{ avec } pV = nRT_0 = p_0 V_0 \\ &= -p_0 V_0 \frac{dV}{V} \Rightarrow \delta Q_{\text{rev}} = p_0 V_0 \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

Aussi, l'accroissement élémentaire de l'entropie du gaz s'écrit :

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T_0} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \frac{dV}{V}$$

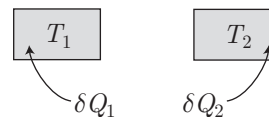
soit, entre les états A et B :

$$\Delta S = \frac{p_0 V_0}{T_0} \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right) \Rightarrow \Delta S = \frac{p_0 V_0}{T_0} \times \ln 2$$

● 203 Lycée Fabert, Metz

Au cours du mélange, la première masse d'eau reçoit une chaleur δQ_1 qui augmente sa température de dT_1 :

$$\delta Q_1 = mc_p dT_1$$



Il en va de même de la seconde masse d'eau, de température T_2 , qui reçoit une chaleur δQ_2 :

$$\delta Q_2 = mc_p dT_2$$

De fait, l'ensemble reçoit la chaleur $\delta Q_1 + \delta Q_2$ nulle (si cet ensemble est isolé thermiquement de l'extérieur) :

$$mc_p dT_1 + mc_p dT_2 = 0 \Rightarrow dT_1 + dT_2 = 0$$

Or, la température finale T_f est commune aux deux masses d'eau mélangées, ce qui permet d'intégrer l'équation précédente :

$$\int_T^{T_f} dT_1 + \int_{T'}^{T_f} dT_2 = 0 \Rightarrow T_f - T + T_f - T' = 0 \Rightarrow T_f = \frac{T + T'}{2}$$

Au cours de cette opération, l'entropie du système a varié de :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = mc_p \frac{dT_1}{T_1} + mc_p \frac{dT_2}{T_2} \\ \Rightarrow \Delta S &= mc_p \left[\int_T^{T_f} \frac{dT_1}{T_1} + \int_{T'}^{T_f} \frac{dT_2}{T_2} \right] \\ \Rightarrow \Delta S &= mc_p \left[\ln \left(\frac{T_f}{T} \right) + \ln \left(\frac{T_f}{T'} \right) \right] = mc_p \ln \left(\frac{T_f^2}{TT'} \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'expression de T_f :

$$\Delta S = mc_p \ln \left[\frac{(T + T')^2}{4TT'} \right]$$

que l'on peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \Delta S &= mc_p \ln \left(\frac{T^2 + T'^2 + 2TT'}{4TT'} \right) = mc_p \ln \left[\frac{1}{4} \left(\frac{T}{T'} + 2 + \frac{T'}{T} \right) \right] \\ &= mc_p \ln \left[f \left(\frac{T}{T'} \right) \right] \text{ avec } f(x) = \frac{1}{4} \times \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Or :

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 1}{4x^2}$$

montre que :

$$x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0 \quad x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \quad x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0$$

ce qui signifie aussi que $f(1)$ est un *minimum* pour la fonction $f(x)$, ce qui se traduit par :

$$\forall x \neq 1, f(x) > f(1) \Rightarrow \Delta S = mc_p \ln \left[f \left(\frac{T}{T'} \right) \right] > 0$$

L'accroissement de l'entropie de ce mélange rend compte de l'irréversibilité du processus : les deux masses d'eau, lorsqu'elles sont mélangées, ne peuvent plus se séparer spontanément.

● 204 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. L'énergie interne et l'enthalpie de la mole de gaz parfait ne dépendent que de la température et varient ainsi de :

$$dU = C_{V_m} dT \text{ et } dH = C_{p_m} dT$$

La définition de l'enthalpie : $H = U + pV$ (où p désigne la pression du gaz), associée à l'équation d'état du gaz parfait : $pV = RT$, conduisent à :

$$H = U + RT \Rightarrow dH = dU + R dT \Rightarrow C_{p_m} dT = (C_{V_m} + R) dT$$

d'où l'on déduit que :

$$C_{p_m} = C_{V_m} + R \Rightarrow C_{p_m} - C_{V_m} = R$$

Quant à la définition du rapport : $\gamma = \frac{C_{p_m}}{C_{V_m}} \Rightarrow C_{p_m} = \gamma C_{V_m}$, elle transforme le résultat précédent :

$$C_{V_m} \times (\gamma - 1) = R \Rightarrow C_{V_m} = \frac{R}{\gamma - 1} \Rightarrow C_{p_m} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

2. À l'issue d'une transformation élémentaire réversible, au cours de laquelle la mole de gaz parfait reçoit la chaleur δQ_{rev} et le travail δW_{rev} , son énergie interne varie de :

$$dU = \delta Q_{\text{rev}} + \delta W_{\text{rev}} = \delta Q_{\text{rev}} - p dV$$

tandis que son enthalpie varie de :

$$dH = d(U + pV) = dU + d(pV) = \delta Q_{\text{rev}} - p dV + (p dV + V dp) = \delta Q_{\text{rev}} + V dp$$

c'est-à-dire :

$$\delta Q_{\text{rev}} = dH - V dp = C_{p_m} dT - V dp = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} dT - V dp$$

avec :

$$pV = RT \Rightarrow V = \frac{RT}{p} \Rightarrow \delta Q_{\text{rev}} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} dT - RT \frac{dp}{p}$$

Par conséquent, l'entropie du gaz parfait s'accroît de :

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} \Rightarrow dS = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$$

3. Au cours d'une transformation adiabatique et réversible, le gaz reçoit une chaleur δQ_{rev} nulle, de sorte que $dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = 0$. Aussi, l'identité précédente devient :

$$\frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p}$$

En intégrant cette équation entre les états (p_1, T_1) et (p_2, T_2) , on trouve alors :

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} &= \frac{\gamma - 1}{\gamma} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} \Rightarrow \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right) = \ln \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right] \\ &\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \Rightarrow T_2 = T_1 \times \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \end{aligned}$$

● 205 ————— Lycée du Parc, Lyon

Au cours de la compression adiabatique et réversible : $A(p_0, T_0) \rightarrow B(p_1, T_1)$, le gaz reçoit, de manière réversible, une chaleur Q_{AB}^{rev} nulle et c'est pourquoi sa variation d'enthalpie vaut :

$$\Delta S_{AB} = S_B - S_A = \int_{T_0}^{T_1} \frac{\delta Q_{AB}^{\text{rev}}}{T} = 0$$

En revanche, au cours de la transformation monobare $B(p_1, T_1) \rightarrow C(p_1, T_0)$, la chaleur élémentaire δQ_{BC} reçue par le gaz s'identifie à son accroissement d'enthalpie :

$$\delta Q_{BC} = dH = C_m dT = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} dT$$

Au cours de la totalité de la transformation $B \rightarrow C$, ce gaz reçoit par conséquent une chaleur :

$$Q_{BC} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \int_{T_1}^{T_0} dT \Rightarrow Q_{BC} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_0 - T_1)$$

La transformation deviendrait réversible si, en permanence, le gaz était en équilibre thermique avec des thermostats dont les températures T_{th} s'identifieraient à T . Aussi, la variation d'entropie du gaz vaut :

$$\Delta S_{BC} = S_C - S_B = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \int_{T_1}^{T_0} \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{BC} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_0}{T_1} \right)$$

où la température T_1 s'obtient à partir de la transformation adiabatique réversible $A \rightarrow B$, sur laquelle s'applique la loi de Laplace :

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte} \Rightarrow p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_0^{1-\gamma} T_0^\gamma \Rightarrow T_1 = T_0 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

C'est pourquoi :

$$\Delta S_{AC} = \Delta S_{BC} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \ln \left[\left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right]$$

$$\Rightarrow \Delta S_{AC} = -R \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) = -R \ln 25 = -3,22 R$$

En outre, au cours de la transformation $A \rightarrow C$, le gaz reçoit la chaleur $Q_{AC} = Q_{BC}$ pendant qu'il reste au contact de l'air, qui sert de source de chaleur à la température constante T_0 . C'est pourquoi, la variation d'entropie du gaz par échange thermique vaut :

$$S_e = \frac{Q_{BC}}{T_0} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_1}{T_0} \right) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]$$

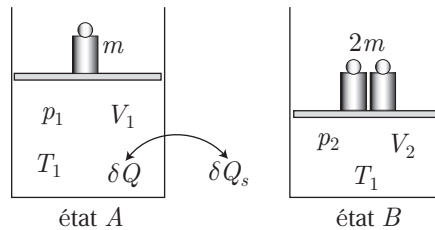
$$= 3,5 R \times \left[1 - (25)^{\frac{1}{3,5}} \right] = -5,28 R$$

Aussi, au cours de la transformation, il s'est créé au sein du gaz une entropie S_c , telle que :

$$\Delta S_{AC} = S_e + S_c \Rightarrow S_c = \Delta S_{AC} - S_e = R \times (-3,22 + 5,28) = 2,06 \times R$$

● **206** **Lycée Lakanal, Sceaux**

- La transformation, manifestement irréversible, fait passer le gaz de l'état $A (p_1, V_1, T_1)$ à l'état $B (p_2, V_2, T_1)$ (la transformation est monobare car les parois du récipient maintiennent un équilibre thermique avec une source de chaleur à la température $T_s = T_1$).



Soit δQ_s la chaleur reçue par la source et soit δQ celle reçue par le gaz ; le système {source + gaz} étant thermiquement isolé, il s'ensuit que :

$$\delta Q_s = -\delta Q$$

Il est possible d'imaginer une transformation réversible, au cours de laquelle la source reçoit cette chaleur δQ_s , à la température $T_s = T_1$, de sorte que la variation élémentaire d'entropie de la source s'écrit :

$$dS_s = \frac{\delta Q_s}{T_s} = \frac{\delta Q_s}{T_1} \Rightarrow \Delta S_s = \frac{1}{T_1} \int_A^B \delta Q_s = -\frac{Q}{T_1} \quad (39)$$

où Q représente la chaleur totale reçue par le gaz au cours de la transformation $A \rightarrow B$.

Cette transformation étant, du reste, monotherme, la variation d'énergie interne du gaz parfait, ΔU , est nulle. Le premier principe de la thermodynamique relie alors ΔU à Q et W (travail des forces de pression extérieures) :

$$\Delta U = W + Q = 0 \Rightarrow Q = -W \quad (40)$$

Enfin, l'état B étant un état d'équilibre, l'immobilité de la paroi horizontale de l'enceinte est conditionnée par une compensation de la pression extérieure p_{ext} et de p_2 . C'est pourquoi :

$$p_{\text{ext}} = p_2 \Rightarrow W = -p_2 (V_2 - V_1) \quad (41)$$

De plus, en appelant s la surface de la paroi horizontale, et en remarquant que l'état A est également un état d'équilibre, il s'ensuit que, dans le champ de pesanteur d'intensité g :

$$\begin{cases} mg = p_1 \times s \\ 2mg = p_2 \times s \end{cases} \Rightarrow p_2 = 2p_1$$

En outre, l'équation d'état des gaz parfaits s'applique légitimement aux états A et B :

$$\begin{cases} p_1 V_1 = RT_1 \\ p_2 V_2 = RT_1 \end{cases} \Rightarrow p_2 V_2 = p_1 V_1 \Rightarrow 2p_1 V_2 = p_1 V_1 \Rightarrow V_2 = \frac{V_1}{2}$$

De la connaissance de $p_2 = 2p_1$ et de $V_2 = \frac{V_1}{2}$, découle celle de W , fourni par la relation (41) :

$$W = -p_2 (V_2 - V_1) = -2p_1 \left(\frac{V_1}{2} - V_1 \right) = p_1 V_1 = RT_1$$

Les relations (39) et (40) conduisent alors à :

$$Q = -W = -RT_1 \Rightarrow \Delta S_g = -\frac{Q}{T_1} = R$$

⚠ Le calcul de la variation d'entropie du gaz ne peut être menée de la même manière car, par définition :

$$dS_g = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T}$$

signifie que δQ_{rev} représente la chaleur apportée de manière réversible, c'est-à-dire que la pression extérieure p_{ext} s'identifie en permanence à la pression p du gaz. L'expression (41) : $W = -p_2 (V_2 - V_1) = -Q_{\text{irr}}$ ne peut donc pas convenir.

Au cours d'une transformation isotherme, et par conséquent réversible, le travail élémentaire exercé par les forces extérieures de pression vaut :

$$\delta W = -p_{\text{ext}} dV = -p dV \text{ où } pV = RT_1 \Rightarrow p = \frac{RT_1}{V}$$

C'est pourquoi :

$$\delta W = -RT_1 \frac{dV}{V}$$

La température étant constante, l'énergie interne U du gaz parfait ne varie pas, de sorte qu'au cours de cette transformation élémentaire réversible, le gaz reçoit la chaleur δQ_{rev} telle que :

$$dU = 0 = \delta Q_{\text{rev}} + \delta W \Rightarrow \delta Q_{\text{rev}} = -\delta W = RT_1 \frac{dV}{V}$$

La variation concomitante d'entropie du gaz est définie par :

$$dS_g = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T_1} = R \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S_g = R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

avec :

$$V_1 = 2V_2 \Rightarrow \Delta S_g = -R \ln 2$$

Finalement, la variation d'entropie du système {source + gaz}, au cours de la transformation $A \rightarrow B$, réunit les deux contributions ΔS_s et ΔS_g :

$$\Delta S_{AB} = \Delta S_s + \Delta S_g \Rightarrow \Delta S_{AB} = R (1 - \ln 2)$$

2. En retirant brusquement la masselotte, le système effectue la transformation irréversible

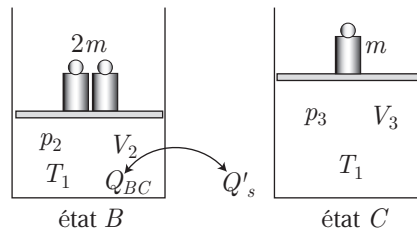
$$B \left(p_2 = 2p_1, V_2 = \frac{V_1}{2}, T_1 \right) \rightarrow C (p_3, V_3, T_1)$$

L'état C présente immédiatement des similitudes avec l'état A : outre la température (imposée par la source), la pression p_3 est aussi égale à p_1 car :

$$mg = s \times p_3 \text{ et } mg = s \times p_1$$

L'équation d'état du gaz parfait peut alors décrire les deux états d'équilibres A et C :

$$\begin{cases} p_1 V_1 = RT_1 \\ p_3 V_3 = RT_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 V_1 = RT_1 \\ p_1 V_3 = RT_1 \end{cases} \Rightarrow V_3 = V_1$$



Connaissant désormais les états B et C , il devient possible d'effectuer un bilan entropique.

• **La source de chaleur**

Elle reçoit la chaleur $Q'_s = -Q_{BC}$, où Q_{BC} est la chaleur reçue par le gaz parfait au cours de son évolution monotherme $B \rightarrow C$. Du premier principe de la thermodynamique, on conclut que :

$$Q_{BC} + W_{BC} = 0 \Rightarrow Q_{BC} = -W_{BC} = -Q'_s \Rightarrow Q'_s = W_{BC}$$

avec :

$$W_{BC} = -p_3 (V_3 - V_2) = -p_1 \left(V_1 - \frac{V_1}{2} \right) = -p_1 \times \frac{V_1}{2} = -\frac{RT_1}{2}$$

Ce faisant, $Q'_s = W_{BC} = -\frac{RT_1}{2}$ donne accès à la variation d'entropie de la source :

$$\Delta S'_s = \frac{Q'_s}{T_1} \Rightarrow \Delta S'_s = -\frac{R}{2}$$

• **Le gaz**

Au cours d'une transformation isotherme le menant de l'état B au même état C , il reçoit une chaleur $\delta Q'_{BC}$, tandis que la pression extérieure $p_{\text{ext}} = p = \frac{RT_1}{V}$ lui transmet un travail $\delta W'_{AB} = -p_{\text{ext}} dV = -RT_1 \frac{dV}{V}$. Consécutivement à ces transferts, l'énergie interne accuse une variation dU_{BC} nulle :

$$dU_{BC} = \delta Q'_{BC} + \delta W'_{BC} = 0 \Rightarrow \delta Q'_{BC} = -\delta W'_{BC} = RT_1 \frac{dV}{V}$$

La réversibilité du processus rend légitime l'utilisation directe de la définition de l'entropie :

$$dS'_g = \frac{\delta Q'_{BC}}{T_1} \Rightarrow \Delta S'_g = R \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = R \ln \left(\frac{V_3}{V_2} \right)$$

où :

$$V_3 = V_1 = 2V_2 \Rightarrow \Delta S'_g = R \ln 2$$

En conclusion, la transformation $B \rightarrow C$ est accompagnée d'une variation d'entropie du système {gaz + source} :

$$\Delta S_{BC} = \Delta S'_g + \Delta S'_s \Rightarrow \Delta S_{BC} = R \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right)$$

3. Un bilan entropique montre, en première approche, que l'entropie totale du système a varié d'une quantité :

$$\Delta S_{AC} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} = R \left(1 - \ln 2 + \ln 2 - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \Delta S_{AC} = \frac{R}{2}$$

Le simple constat que $\Delta S_{AC} > 0$ suffirait à conclure un peu rapidement que ce résultat était attendu : le système étant thermiquement isolé de l'extérieur, son entropie ne peut qu'augmenter. Cependant, en seconde analyse, le problème s'avère un peu plus délicat : en apparence, rien ne distingue l'état A de l'état C , aussi devrions nous observer :

$$\Delta S_{AC} = S_C - S_A = 0$$

Convenons d'examiner alors en quoi, manifestement, la transformation $A \rightarrow B \rightarrow C$ ne constitue pas un cycle pour le système {gaz + source}.

- Le gaz subit les variations d'entropie $\Delta S_g = -R \ln 2$ et $\Delta S'_g = R \ln 2$. Le bilan étant nul, ces résultats confirment la nature cyclique de la transformation subie par le gaz, car :

$$\oint dS_g = \Delta S_g + \Delta S'_g = 0$$

- En revanche, l'entropie de la source a varié de la quantité :

$$\Delta S_{\text{source}} = \Delta S_s + \Delta S'_s = R - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}$$

Un tel résultat suggère que la source atteint un état C différent de l'état A , en dépit de sa température qui demeure constante.

● 207 ————— Concours des Mines-Ponts

1. Lorsque l'équilibre mécanique du piston est établi, les pressions de part et d'autre de sa paroi s'égalisent :

$$p_f = p_0$$

Pendant la détente, qui fait passer la température des n moles de gaz parfait de T_1 à T_f , l'énergie interne de ce gaz varie de :

$$\Delta U = nC_{Vm} (T_f - T_1) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_1)$$

Concomitamment, la pression extérieure $p_{\text{ext}} = p_0$ exerce un travail élémentaire :

$$\delta W = -p_{\text{ext}} dV = -p_0 dV$$

c'est-à-dire, lorsque le volume V passe de V_1 à V_f :

$$W = -p_0 \int_{V_1}^{V_f} dV = -p_0 (V_f - V_1) = -p_0 V_f + p_0 V_1$$

Enfin, les deux états d'équilibre du gaz parfait sont décrits par son équation d'état :

$$p_1 V_1 = nRT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{nRT_1}{p_1} \quad (42)$$

et :

$$p_0 V_f = nRT_f \quad (43)$$

auquel cas :

$$W = -nRT_f + nRT_1 \frac{p_0}{p_1}$$

Quant au premier principe de la thermodynamique, il révèle qu'en l'absence d'échange de chaleur avec l'extérieur :

$$\begin{aligned} \Delta U = W &\Rightarrow \frac{nR}{\gamma - 1} (T_f - T_1) = nR \left(T_1 \frac{p_0}{p_1} - T_f \right) \\ &\Rightarrow T_f \left(\frac{1}{\gamma - 1} + 1 \right) = T_1 \frac{p_0}{p_1} + \frac{T_1}{\gamma - 1} \\ &\Rightarrow T_f \times \frac{\gamma}{\gamma - 1} = T_1 \times \left(\frac{p_0}{p_1} + \frac{1}{\gamma - 1} \right) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$T_f = \frac{T_1}{\gamma} \times \left[1 + (\gamma - 1) \frac{p_0}{p_1} \right] \quad (44)$$

Enfin, les équations d'état (42) et (43) fournissent :

$$\begin{cases} p_0 V_f = nRT_f \\ p_1 V_1 = nRT_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{p_0}{p_1} \times \frac{V_f}{V_1} = \frac{T_f}{T_1} \quad (45)$$

$$\Rightarrow \frac{V_f}{V_1} = \frac{T_f}{T_1} \times \frac{p_1}{p_0} = \frac{1}{\gamma} \left[1 + (\gamma - 1) \frac{p_0}{p_1} \right] \times \frac{p_1}{p_0} \quad (46)$$

$$\Rightarrow V_f = \frac{V_1}{\gamma} \left[\frac{p_1}{p_0} + (\gamma - 1) \right] \quad (47)$$

2. Il existe une transformation réversible (pas nécessairement adiabatique) qui permet de faire passer le gaz entre les mêmes états (p_1, V_1, T_1) au même état (p_0, V_f, T_f) . Au cours de ce processus réversible, il conviendrait non seulement d'apporter au gaz une chaleur δQ_{rev} mais également un travail mécanique δW_{rev} exercé par une pression extérieure p_{ext} en permanence égale à la pression p du gaz :

$$\delta W_{\text{rev}} = -p_{\text{ext}} dV = -p dV = -nRT \frac{dV}{V}$$

Consécutivement, l'énergie interne du gaz s'accroîtrait d'une quantité :

$$\begin{aligned} dU = \delta Q_{\text{rev}} + \delta W_{\text{rev}} &\Rightarrow nC_{V_m} dT = \delta Q_{\text{rev}} - nRT \frac{dV}{V} \\ &\Rightarrow \delta Q_{\text{rev}} = n \frac{R}{\gamma - 1} dT + nRT \frac{dV}{V} \end{aligned}$$

Par définition, la variation élémentaire d'entropie du gaz vaut alors :

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T} = n \frac{R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \text{ avec } nR = \frac{p_1 V_1}{T_1}$$

ce qui devient, pour la totalité de la transformation :

$$\Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1} \left[\frac{1}{\gamma - 1} \int_{T_1}^{T_f} \frac{dT}{T} + \int_{V_1}^{V_f} \frac{dV}{V} \right] = \frac{p_1 V_1}{T_1} \left[\frac{1}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_f}{T_1} \right) + \ln \left(\frac{V_f}{V_1} \right) \right]$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{V_f}{V_1} = \frac{T_f}{T_1} \times \frac{p_1}{p_0} &\Rightarrow \ln \left(\frac{V_f}{V_1} \right) = \ln \left(\frac{T_f}{T_1} \right) + \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \\ &\Rightarrow \Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_f}{T_1} \right) + \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \right] \end{aligned}$$

Le résultat (44) fournit finalement :

$$\frac{T_f}{T_1} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p_0}{p_1} \Rightarrow \Delta S = \frac{p_1 V_1}{T_1} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{p_0}{p_1} \right) + \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right) \right]$$

● 208 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. L'état $C (V_2, T_2)$ étant un état d'équilibre, notamment mécanique, la pression du gaz s'identifie à la pression extérieure p_2 . C'est pourquoi :

$$p_2 V_2 = RT_2 \Rightarrow p_2 = \frac{RT_2}{V_2} \quad (48)$$

De même, dans l'état $A (V_1, T_1)$, la pression du gaz atteint la valeur p_1 de la pression extérieure :

$$p_1 V_1 = RT_1 \Rightarrow p_1 = \frac{RT_1}{V_1} \quad (49)$$

2. • Au cours de la transformation isochore : $A (V_1, T_1) \rightarrow B (V_1, T_2)$, c'est-à-dire réversible, le gaz reçoit une chaleur élémentaire $\delta Q_{AB}^{\text{rev}}$ directement responsable de sa variation d'énergie interne :

$$\delta Q_{AB}^{\text{rev}} = dU_{AB} = C_{V_m} dT = \frac{R}{\gamma - 1} dT$$

car le travail des forces de pression, au cours d'une transformation à volume constant, est nulle. Par suite, son entropie varie de la quantité :

$$dS_{AB} = \frac{\delta Q_{AB}^{\text{rev}}}{T} = \frac{R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{AB} = \frac{R}{\gamma - 1} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

soit encore :

$$\Delta S_{AB} = \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$$

- De même, au cours de la transformation isochore $C (V_2, T_2) \rightarrow D (V_2, T_1)$, la chaleur $\delta Q_{CD}^{\text{rev}}$ reçue par le gaz provoque une variation de son énergie interne :

$$dU_{CD} = \delta Q_{CD}^{\text{rev}} = \frac{R}{\gamma - 1} dT$$

à laquelle correspond une variation de son entropie :

$$dS_{CD} = \frac{\delta Q_{CD}^{\text{rev}}}{T} = \frac{R}{\gamma - 1} \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S_{CD} = \frac{R}{\gamma - 1} \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T}$$

d'où l'on déduit que :

$$\Delta S_{CD} = \frac{R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = -\Delta S_{AB}$$

- La transformation $B (V_1, T_2) \rightarrow C (V_2, T_2)$ se réalise à pression extérieure constante p_2 . Il est donc possible d'imaginer une transformation réversible permettant au gaz de passer de l'état B à l'état C , la pression extérieure p_{ext} s'identifiant en permanence à la pression p du gaz. Cette transformation étant, du reste, isotherme ($T = T_2$), l'énergie interne U du gaz parfait demeure constante, tandis qu'il reçoit une chaleur $\delta Q_{BC}^{\text{rev}}$ et un travail $\delta W_{BC}^{\text{rev}}$ tels que :

$$\delta W_{BC}^{\text{rev}} = -p_{\text{ext}} dV = -p dV = -RT_2 \frac{dV}{V}$$

et :

$$dU_{BC} = 0 = \delta Q_{BC}^{\text{rev}} + \delta W_{BC}^{\text{rev}} \Rightarrow \delta Q_{BC}^{\text{rev}} = -\delta W_{BC}^{\text{rev}} = RT_2 \frac{dV}{V}$$

Concomitamment, l'entropie du gaz varie de :

$$dS_{BC} = \frac{\delta Q_{BC}^{\text{rev}}}{T_2} = R \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S_{BC} = R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S_{BC} = R \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right)$$

- De même, la transformation $D(V_2, T_1) \rightarrow A(V_1, T_1)$ étant irréversible (la pression extérieure p_{ext} demeure constante et égale à p_1), il faut concevoir une transformation réversible (isotherme à T_1) afin de calculer la variation d'entropie du gaz. Au cours d'une telle transformation, son énergie interne demeure constante, tandis que le travail :

$$\delta W_{DA}^{\text{rev}} = -p_{\text{ext}} dV = -p dV = -RT_1 \frac{dV}{V}$$

et la chaleur $\delta Q_{DA}^{\text{rev}}$, reçus par le gaz, vérifient :

$$dU_{DA} = 0 = \delta Q_{DA}^{\text{rev}} + \delta W_{DA}^{\text{rev}} \Rightarrow \delta Q_{DA}^{\text{rev}} = -\delta W_{DA}^{\text{rev}} = RT_1 \frac{dV}{V}$$

Aussi, la variation d'entropie du gaz vaut :

$$dS_{DA} = \frac{\delta Q_{DA}^{\text{rev}}}{T_1} = R \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S_{DA} = R \int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} \Rightarrow \Delta S_{DA} = R \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

3. Au cours de la transformation cyclique $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$, l'entropie du gaz varie de :

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA} \\ &= \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} - \Delta S_{AB} - \Delta S_{BC} \Rightarrow \Delta S = 0 \end{aligned}$$

ce qui confirme que l'entropie est une fonction d'état :

$$\Delta S = \oint dS = 0$$

En revanche, l'intégrale :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B \frac{\delta Q_{AB}^{\text{rev}}}{T} + \int_B^C \frac{\delta Q_{BC}^{\text{irr}}}{T} + \int_C^D \frac{\delta Q_{CD}^{\text{rev}}}{T} + \int_D^A \frac{\delta Q_{DA}^{\text{irr}}}{T}$$

se calcule, d'une part à l'aide de la définition de l'entropie :

$$\int_A^B \frac{\delta Q_{AB}^{\text{rev}}}{T} + \int_C^D \frac{\delta Q_{CD}^{\text{rev}}}{T} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{CD} = \Delta S_{AB} - \Delta S_{AB} = 0$$

et d'autre part à l'aide de la connaissance des transformations $B(V_1, T_2) \rightarrow C(V_2, T_2)$ et $D(V_2, T_1) \rightarrow A(V_1, T_1)$, soumises à des pressions extérieures respectives $p_{\text{ext}} = p_2$ et $p'_{\text{ext}} = p_1$. Les travaux élémentaires échangés par le gaz au cours de ces transformations valent, par conséquent :

$$\delta W_{BC} = -p_{\text{ext}} dV = -p_2 dV \text{ et } \delta W_{DA} = -p'_{\text{ext}} dV = -p_1 dV$$

Or, la température du gaz étant maintenue constante au cours de ces transformations (T_2 pour $B \rightarrow C$ et T_1 pour $D \rightarrow A$), l'énergie interne y demeure constante, en raison de quoi :

$$dU_{BC} = 0 = \delta Q_{BC}^{\text{irr}} + \delta W_{BC} \Rightarrow \delta Q_{BC}^{\text{irr}} = -\delta W_{BC} = p_2 dV$$

et :

$$dU_{DA} = 0 = \delta Q_{DA}^{\text{irr}} + \delta W_{DA} \Rightarrow \delta Q_{DA}^{\text{irr}} = -\delta W_{DA} = p_1 dV$$

Il s'ensuit que :

$$\int_B^C \frac{\delta Q_{BC}^{\text{irr}}}{T} = \int_B^C \frac{p_2}{T_2} dV = \frac{p_2}{T_2} \int_{V_1}^{V_2} dV = \frac{p_2}{T_2} (V_2 - V_1)$$

et :

$$\int_D^A \frac{\delta Q_{DA}^{\text{irr}}}{T} = \int_D^A \frac{p_1}{T_1} dV = \frac{p_1}{T_1} \int_{V_2}^{V_1} dV = \frac{p_1}{T_1} (V_1 - V_2)$$

soit, compte tenu des résultats (48) et (49) :

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{R}{V_2} \Rightarrow \int_B^C \frac{\delta Q_{BC}^{\text{irr}}}{T} = R \left(1 - \frac{V_1}{V_2} \right)$$

et :

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{R}{V_1} \Rightarrow \int_D^A \frac{\delta Q_{DA}^{\text{irr}}}{T} = R \left(1 - \frac{V_2}{V_1} \right)$$

Finalement :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = R \left(2 - \frac{V_1}{V_2} - \frac{V_2}{V_1} \right)$$

Ce résultat peut également se présenter sous la forme suivante :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = R \times \frac{2V_1V_2 - V_1^2 - V_2^2}{V_1V_2} = -R \times \frac{(V_1 - V_2)^2}{V_1V_2}$$

ce qui suffit à montrer que :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < 0$$

Ce résultat était, du reste, prévisible puisqu'il confirme l'inégalité de Clausius portant sur l'ensemble du cycle, globalement irréversible :

$$\oint \frac{\delta Q}{T} < \Delta S = 0$$

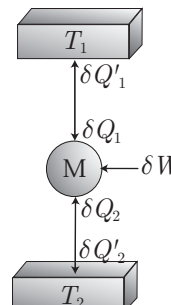
● 209 ————— Lycée Carnot, Dijon

On note δQ_1 , δQ_2 les quantités de chaleur reçues par la machine de la part des sources aux températures T_1 et T_2 . Quant aux chaleurs reçues par les sources, elles s'écrivent : $\delta Q'_1 = C dT_1$ et $\delta Q'_2 = C dT_2$.

Si les liaisons entre la machine et les sources ne perdent pas de chaleur :

$$\delta Q_1 = -\delta Q'_1 = -C dT_1 \text{ et } \delta Q_2 = -\delta Q'_2 = -C dT_2$$

Au cours d'un cycle, la machine (M) reçoit les chaleurs δQ_1 , δQ_2 et le travail δW . Or, la machine fonctionnant de manière réversible :



$$\oint dS = \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0 \Rightarrow -C \frac{dT_1}{T_1} - C \frac{dT_2}{T_2} = 0$$

c'est-à-dire, pour la totalité des cycles :

$$\begin{aligned} \int_{T_{10}}^{T_f} \frac{dT_1}{T_1} + \int_{T_{20}}^{T_f} \frac{dT_2}{T_2} = 0 &\Rightarrow \ln\left(\frac{T_f}{T_{10}}\right) + \ln\left(\frac{T_f}{T_{20}}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{T_f^2}{T_{10} T_{20}}\right) = 0 \Rightarrow \frac{T_f^2}{T_{10} T_{20}} = 1 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$T_f = \sqrt{T_{10} T_{20}}$$

Quant au premier principe de la thermodynamique, il révèle qu'au cours d'un cycle (la machine reçoit le travail δW), l'énergie interne de la machine varie de :

$$\oint dU = \delta Q_1 + \delta Q_2 + \delta W = 0 = -C dT_1 - C dT_2 + \delta W \Rightarrow \delta W = C (dT_1 + dT_2)$$

si bien qu'à l'issue de la totalité des cycles, la machine reçoit le travail :

$$\begin{aligned} W &= C \left(\int_{T_{10}}^{T_f} dT_1 + \int_{T_{20}}^{T_f} dT_2 \right) = C (2T_f - T_{10} - T_{20}) \\ &\Rightarrow W = C \left(2\sqrt{T_{10} T_{20}} - T_{10} - T_{20} \right) \end{aligned}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$W = -C \left(\sqrt{T_{10}} - \sqrt{T_{20}} \right)^2 < 0$$

ce qui indique que la machine fournit du travail ; il s'agit d'un moteur.

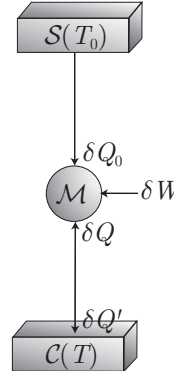
● 210 ————— Lycée Sainte-Geneviève, Versailles

Au cours d'un cycle effectué par la machine (\mathcal{M}), nous adopterons les notations suivantes :

- la température T de (\mathcal{C}) varie d'une quantité dT proportionnelle à la chaleur reçue par (\mathcal{C}) : $\delta Q' = C dT$;
- si la liaison thermique entre \mathcal{M} et \mathcal{C} est parfaite (sans fuite), la chaleur δQ reçue par (\mathcal{M}) vérifie :

$$\delta Q = -\delta Q' = -C dT$$

- la source \mathcal{S} délivre une chaleur δQ_0 à (\mathcal{M}) qui reçoit, par ailleurs, un travail $\delta W > 0$.



Le premier principe de la thermodynamique précise qu'au cours d'un cycle, l'énergie interne de (\mathcal{M}) varie de la quantité :

$$\oint dU = 0 \Rightarrow \delta Q + \delta Q_0 + \delta W = 0 \Rightarrow \delta Q_0 = -\delta W - \delta Q \quad (50)$$

En outre, la machine étant réversible, sa variation d'entropie au cours d'un cycle s'écrit :

$$\oint dS = \frac{\delta Q_0}{T_0} + \frac{\delta Q}{T} = 0$$

ce qui devient, compte tenu du résultat (50) :

$$-\frac{\delta W}{T_0} - \frac{\delta Q}{T_0} + \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow \frac{\delta Q}{T} - \frac{\delta Q}{T_0} = \frac{\delta W}{T_0}$$

et où $\delta Q = -C dT$ entraîne que :

$$\frac{C}{T_0} dT - C \frac{dT}{T} = \frac{\delta W}{T_0}$$

Cette expression demeure valable au cours de chaque cycle qui voit varier la température de la source d'une quantité dT consécutivement à un apport de travail δW . Par conséquent, à l'issue de nombreux cycles, (\mathcal{M}) a reçu le travail W tandis que la température T est passée de T_0 à T_f :

$$\frac{C}{T_0} \int_{T_0}^{T_f} dT - C \int_{T_0}^{T_f} \frac{dT}{T} = \int \frac{\delta W}{T_0} = \frac{W}{T_0}$$

ce qui conduit, finalement, à la relation cherchée, permettant, en principe, de trouver T_f :

$$C \left[\left(\frac{T_f}{T_0} - 1 \right) - \ln \left(\frac{T_f}{T_0} \right) \right] = \frac{W}{T_0}$$

● 211 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

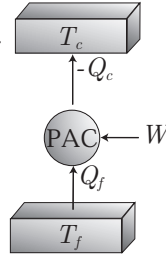
1.

Au cours d'un cycle de fonctionnement, la pompe à chaleur (PAC) échange les chaleurs $Q_c < 0$ et $Q_f > 0$ avec les sources de chaleur aux températures T_c et T_f . Elle reçoit également un travail W de l'extérieur. Or, au cours d'un cycle, l'énergie interne U de la pompe ne varie pas, ce qui se traduit par :

$$\Delta U = Q_c + Q_f + W = 0 \Rightarrow W = -Q_c - Q_f$$

De fait, le coefficient d'efficacité de cette machine est défini par :

$$\eta_{\text{rev}} = -\frac{Q_c}{W} = \frac{Q_c}{Q_c + Q_f} \quad (51)$$



En outre, les chaleurs qu'elle échange avec les sources sont reçues de manière réversible, en conséquence de quoi son entropie varie de :

$$\Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f}$$

Or, à l'issue d'un cycle, l'entropie d'un système ne varie pas, d'où :

$$\begin{aligned} \Delta S = \oint dS = 0 &\Rightarrow \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \Rightarrow Q_f = -\frac{T_f}{T_c} Q_c \\ &\Rightarrow Q_c + Q_f = Q_c \times \frac{T_c - T_f}{T_c} \end{aligned}$$

Par suite, la relation (51) devient :

$$\eta_{\text{rev}} = \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

2. Lorsque la pompe fonctionne de manière irréversible, l'inégalité de Clausius impose :

$$\begin{aligned} \frac{Q_c^{\text{irr}}}{T_c} + \frac{Q_f^{\text{irr}}}{T_f} < \oint dS = 0 &\Rightarrow Q_f^{\text{irr}} < -\frac{T_f}{T_c} Q_c^{\text{irr}} \\ &\Rightarrow Q_c^{\text{irr}} + Q_f^{\text{irr}} < \frac{T_c - T_f}{T_c} Q_c^{\text{irr}} \\ &\Rightarrow \frac{1}{Q_c^{\text{irr}} + Q_f^{\text{irr}}} > \frac{T_c}{T_c - T_f} \times \frac{1}{Q_c^{\text{irr}}} \end{aligned}$$

où le signe négatif de Q_c^{irr} conduit à :

$$\frac{Q_c^{\text{irr}}}{Q_c^{\text{irr}} + Q_f^{\text{irr}}} < \frac{T_c}{T_c - T_f}$$

La relation (51) devient ainsi :

$$\eta_{\text{irr}} = \frac{Q_c^{\text{irr}}}{Q_c^{\text{irr}} + Q_f^{\text{irr}}} < \frac{T_c}{T_c - T_f} \Rightarrow \eta_{\text{irr}} < \eta_{\text{rev}}$$

● 212 ————— Lycée Carnot, Dijon

Au cours de chaque étape du cycle (qui ne comprend pas les phases d'aspiration et d'échappement du mélange tonnant), il convient de calculer le travail W et la chaleur Q échangés par le gaz parfait.

- Transformation $B \rightarrow C$

Cette transformation étant adiabatique : $Q_{BC} = 0$, tandis que le premier principe de la thermodynamique précise que :

$$W_{BC} + \underbrace{Q_{BC}}_{=0} = \Delta U_{BC} \Rightarrow W_{BC} = C_V (T_C - T_B)$$

- Transformation $D \rightarrow E$

Pour les mêmes raisons : $Q_{DE} = 0$, d'où il s'ensuit que :

$$W_{DE} + \underbrace{Q_{DE}}_{=0} = \Delta U_{DE} \Rightarrow W_{DE} = C_V (T_E - T_D)$$

- Transformation $C \rightarrow D$

À volume constant, $W_{CD} = 0$, ce que traduit le premier principe de la thermodynamique :

$$\underbrace{W_{CD}}_{=0} + Q_{CD} = \Delta U_{CD} \Rightarrow Q_{CD} = C_V (T_D - T_C)$$

- Transformation $E \rightarrow B$

De même, le volume du gaz demeurant constant au cours de cette transformation : $W_{EB} = 0$, et c'est pourquoi :

$$\underbrace{W_{EB}}_{=0} + Q_{EB} = \Delta U_{EB} \Rightarrow Q_{EB} = C_V (T_B - T_E)$$

Le réchauffement $C \rightarrow D$ fait croître la température du gaz, en conséquence de quoi :

$$T_D > T_C \Rightarrow Q_{CD} = C_V (T_D - T_C) > 0$$

tandis que le refroidissement $E \rightarrow B$ provoque l'effet inverse :

$$T_B < T_E \Rightarrow Q_{EB} = C_V (T_B - T_E) < 0$$

Étant donné que Q_{CD} et Q_{EB} sont les seules chaleurs échangées par le gaz au cours du cycle, on déduit que :

- le gaz reçoit la chaleur $Q_c = Q_{CD} > 0$ de la part d'une source chaude ;
- le gaz échange la chaleur $Q_f = Q_{EB}$ avec une source froide.

C'est pourquoi le rendement d'un cycle moteur est donné par :

$$\rho = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_{EB}}{Q_{CD}} = 1 + \frac{T_B - T_E}{T_D - T_C} = 1 - \frac{T_E - T_B}{T_D - T_C} \quad (52)$$

Quant aux transformations adiabatiques réversibles du gaz parfait : $D \rightarrow E$ et $B \rightarrow C$, elles réunissent les conditions d'application de la loi de Laplace ($TV^{\gamma-1} = \text{cte}$) :

$$\begin{aligned} T_D V_D^{\gamma-1} = T_E V_E^{\gamma-1} &\Rightarrow T_D V_A^{\gamma-1} = T_E V_B^{\gamma-1} \\ &\Rightarrow T_D = T_E \times \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = T_E \times a^{\gamma-1} \text{ car } a = \frac{V_B}{V_A} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} &\Rightarrow T_C V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \\ &\Rightarrow T_C = T_B \times \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = T_B \times a^{\gamma-1} \end{aligned}$$

De fait, l'identité (52) devient :

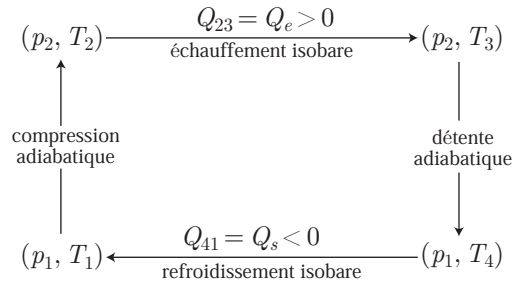
$$\rho = 1 - \frac{T_E - T_B}{(T_E - T_B) \times a^{\gamma-1}} \Rightarrow \rho = 1 - a^{1-\gamma}$$

Application numérique :

$$\rho = 1 - 8^{(1-1,3)} \Rightarrow \rho = 0,464 = 46,4\%$$

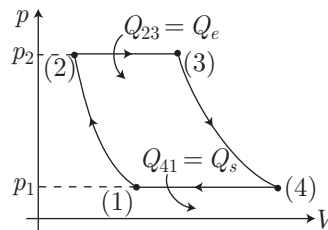
● 213 ————— Lycée Charlemagne, Paris

1. Compte tenu de la nature des transformations, le cycle peut aussi être représenté de la manière suivante :



Sachant que dans un diagramme (p, V) :

- les transformations isentropiques (adiabatiques réversibles) sont des branches de courbes d'équation : $p = \frac{\text{cte}}{V^\gamma}$;
- les transformations isobares sont des segments linéaires horizontaux, le cycle de transformations prend l'allure suivante :



2. (a) Au cours d'un cycle, cette machine thermique reçoit un travail $W = -|W|$ (car $W < 0$ pour un moteur) et les chaleurs $Q_{23} = Q_e$ et $Q_{41} = Q_s$ (les transformations $3 \rightarrow 4$ et $1 \rightarrow 2$ étant isentropiques, c'est-à-dire adiabatiques réversibles, elles ne sont le siège d'aucun échange de chaleur). Or, l'énergie interne varie, au cours d'un cycle, d'une quantité nulle :

$$\oint dU = 0 = W + Q_{23} + Q_{41} \Rightarrow |W| = Q_{23} + Q_{41} = Q_e + Q_s \quad (53)$$

En outre, ce moteur reçoit exclusivement la chaleur $Q_{23} = Q_e$ de la part d'une source chaude, en conséquence de quoi son rendement est défini par :

$$\eta = \frac{|W|}{Q_e} \Rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_s}{Q_e} \quad (54)$$

- (b) La transformation $2 \rightarrow 3$ étant isobare, la chaleur reçue par le gaz parfait est intégralement responsable de sa variation d'enthalpie ΔH_{23} :

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = Q_e = C_p (T_3 - T_2)$$

Pour les mêmes raisons, au cours de la transformation isobare $4 \rightarrow 1$, le gaz reçoit la chaleur Q_{41} tandis que son enthalpie varie de ΔH_{41} :

$$Q_{41} = \Delta H_{41} \Rightarrow Q_s = C_p (T_1 - T_4)$$

Les expressions de Q_s et Q_e , associées à la définition (54) conduisent à :

$$\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \quad (55)$$

où les températures T_1 , T_2 et T_3 , T_4 sont liées par la loi de Laplace au cours des transformations isentropiques $1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$:

$$p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \Rightarrow T_1 = T_2 \times \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 \times r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

et :

$$p_1^{1-\gamma} T_4^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_3^\gamma \Rightarrow T_4 = T_3 \times \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 \times r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$

Ce faisant, la relation (55) devient :

$$\eta = 1 + \frac{(T_2 - T_3) \times r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{T_3 - T_2} \Rightarrow \eta = 1 - r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \quad (56)$$

3. (a) Si n moles de gaz parfait constituent le système, l'équation d'état : $pV = nRT$ montre que la température T est d'autant plus grande (*resp.* faible) que p et V sont importants (*resp.* faibles). Par conséquent, dans un diagramme de Clapeyron, les températures croissent vers le haut et vers la droite. Les températures maximale et minimale sont donc :

$$T_{\max} = T_3 \text{ et } T_{\min} = T_1$$

- (b) L'expression du travail fourni par la machine est directement accessible à partir du résultat (53) :

$$|W| = Q_e + Q_s = C_p (T_3 - T_2 + T_1 - T_4) \text{ où } T_3 = T_{\max} \text{ et } T_1 = T_{\min}$$

et avec :

$$\begin{cases} T_1 = T_2 \times r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \\ T_4 = T_3 \times r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_2 = T_{\min} \times r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \\ T_4 = T_{\max} \times r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow |W| = C_p \times \left[T_{\max} \times \left(1 - r^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right) + T_{\min} \times \left(1 - r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right) \right]$$

Ce travail devient *maximum* pour une valeur r_m de r telle que :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d|W|}{dr} \right|_{r_m} &= 0 \\ \Rightarrow C_p \times \left[\frac{\gamma-1}{\gamma} T_{\max} \times r_m^{\frac{1-\gamma}{\gamma}-1} - \frac{\gamma-1}{\gamma} T_{\min} \times r_m^{\frac{\gamma-1}{\gamma}-1} \right] &= 0 \\ \Rightarrow T_{\max} \times r_m^{\frac{1-2\gamma}{\gamma}} &= T_{\min} \times r_m^{-\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow r_m^{\frac{1-2\gamma}{\gamma} + \frac{1}{\gamma}} = \frac{T_{\min}}{T_{\max}} \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$r_m = \left(\frac{T_{\min}}{T_{\max}} \right)^{\frac{\gamma}{2-2\gamma}} \quad (57)$$

Application numérique :

$$r_m = \left(\frac{300}{1000} \right)^{\frac{1,4}{2-2,8}} \Rightarrow r_m = 8,22$$

Le rendement est alors donné par le résultat (56) :

$$\begin{aligned} \eta_{\max} &= 1 - r_m^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - \left(\frac{T_{\min}}{T_{\max}} \right)^{\frac{\gamma}{2-2\gamma} \times \frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - \left(\frac{T_{\min}}{T_{\max}} \right)^{1/2} \\ \Rightarrow \eta_{\max} &= 1 - \sqrt{\frac{T_{\min}}{T_{\max}}} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\eta_{\max} = 1 - \sqrt{\frac{300}{1000}} \Rightarrow \eta_{\max} = 0,45 = 45\%$$

● 214 ————— Lycée du Parc, Lyon

L'énoncé suggère que la chaudière est en mesure de fournir une quantité de chaleur Q fixée, de sorte qu'il est possible de représenter schématiquement les échanges énergétiques réalisés dans chacune des solutions envisagées (voir ci-contre).

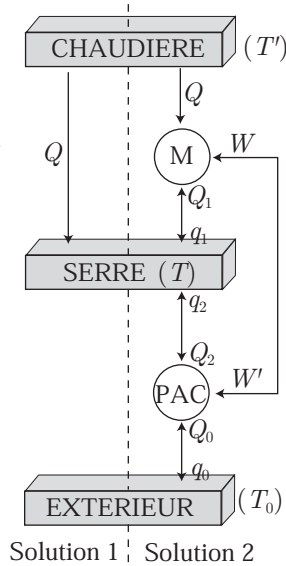
Intéressons-nous plus particulièrement à la seconde solution. Au cours de son fonctionnement, le moteur réalise des cycles à l'issue desquels son énergie interne demeure constante :

$$W + Q + Q_1 = 0 \Rightarrow -|W| + |Q| + Q_1 = 0$$

car $Q > 0$ et $W < 0$

$$\Rightarrow Q_1 = |W| - |Q|$$

De même, pour la pompe à chaleur, dont l'énergie interne ne varie pas à l'issue de chaque cycle :



$$W' + Q_2 + Q_0 = 0 \Rightarrow |W'| + Q_2 + |Q_0| = 0 \text{ car } Q_0 > 0 \text{ et } W' > 0$$

$$\Rightarrow Q_2 = -|W'| - |Q_0|$$

Par suite, au cours de chaque cycle, la serre reçoit une chaleur totale :

$$q = q_1 + q_2 = -Q_1 - Q_2 = |Q| - |W| + |Q_0| + |W'|$$

avec :

$$W' = -W \Rightarrow |W'| = |W| \Rightarrow q = |Q| + |Q_0|$$

ce qui suffit à révéler que :

$$q > |Q| = Q$$

d'où l'on déduit que la deuxième solution est plus efficace que la première pour réchauffer la serre.

● 215 ————— Lycée Carnot, Dijon

I-

1. Au cours de la compression isotherme $(p_0, T_0) \rightarrow (p_1, T_0)$, la mole de gaz parfait reçoit un travail élémentaire :

$$\delta W_c = -p dV = -RT_0 \frac{dV}{V} \text{ car } pV = RT_0$$

c'est-à-dire, lorsque son volume passe de $V_0 = \frac{RT_0}{p_0}$ à $V_1 = \frac{RT_0}{p_1}$:

$$W_c = -RT_0 \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = RT_0 \ln \left(\frac{V_0}{V_1} \right)$$

avec :

$$\frac{V_0}{V_1} = \frac{p_1}{p_0} \Rightarrow W_c = RT_0 \ln \left(\frac{p_1}{p_0} \right)$$

Application numérique :

$$W_c = 8,31 \times 290 \times \ln(10) \Rightarrow W_c = 5\,549 \text{ J}$$

2. (a) Au cours de la compression adiabatique réversible $(p_0, T_0) \rightarrow (p_1, T_1)$, la loi de Laplace est respectée :

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte} \Rightarrow p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_0^{1-\gamma} T_0^\gamma \Rightarrow T_1 = T_0 \times \left(\frac{p_1}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Application numérique :

$$T_1 = 290 \times (10)^{\frac{0,4}{1,4}} \Rightarrow T_1 = 560 \text{ K}$$

- (b) Dans le compresseur, la mole de gaz s'écoule tandis qu'elle reçoit un travail W_d de la part du compresseur et une chaleur Q_d . Son enthalpie varie de ΔH et son énergie cinétique varie de ΔE_c :

$$\Delta H + \Delta E_c = W_d + Q_d \quad (58)$$

Or, la compression est adiabatique ($Q_d = 0$) et l'énoncé précise que l'énergie cinétique du gaz peut être négligée. Il s'ensuit que :

$$W_d = \Delta H = C_{pm} (T_1 - T_0) \Rightarrow W_d = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \times (T_1 - T_0)$$

Application numérique :

$$W_d = \frac{1,4 \times 8,31}{0,4} \times (560 - 290) \Rightarrow W_d = 7\,853 \text{ J}$$

- (c) Dans l'échangeur, le gaz passe de l'état (p_1, T_1) à l'état (p_1, T_0) de façon isobare de sorte que la chaleur Q qu'il reçoit s'identifie à sa variation d'enthalpie :

$$Q = \Delta H = C_{pm} (T_0 - T_1) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_0 - T_1)$$

Ce faisant, la mole de gaz cède la chaleur :

$$Q_{\text{cédée}} = -Q = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) \Rightarrow Q_{\text{cédée}} = W_d = 7\,853 \text{ J}$$

II-

1. À nouveau, dans la turbine, le gaz subit la transformation $(p_1, T_0) \rightarrow (p_0, T_f)$ de manière adiabatique réversible ; la loi de Laplace s'y applique :

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte} \Rightarrow p_0^{1-\gamma} T_f^\gamma = p_1^{1-\gamma} T_0^\gamma \Rightarrow T_f = T_0 \times \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Application numérique :

$$T_f = 290 \times \left(\frac{1}{10} \right)^{\frac{0,4}{1,4}} \Rightarrow T_f = 150 \text{ K}$$

2. Lors de son écoulement adiabatique dans la turbine, l'enthalpie du gaz varie conformément à la loi (58) :

$$\Delta H + \Delta E_c = W'_d + Q'_d$$

avec $\Delta E_c \simeq 0$ et $Q'_d = 0$. Par conséquent, le gaz reçoit le travail :

$$W'_d = \Delta H = C_{pm} (T_f - T_0) = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_f - T_0)$$

ce qui signifie que la turbine récupère le travail :

$$|W'_d| = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_0 - T_f)$$

Application numérique :

$$|W'_d| = \frac{1,4 \times 8,31}{0,4} \times (290 - 150) \Rightarrow |W'_d| = 4072 \text{ J}$$

III- Ces calculs montrent que :

$$\rho = \frac{|W'_d|}{W_d} = \frac{4072}{7853} \Rightarrow \rho = 0,52$$

ce qui signifie que ce système ne restitue, par la turbine, que 52% du travail absorbé par le compresseur ; il ne peut s'agir d'un moteur.

● 216 ————— Lycée Charlemagne, Paris

1. Étude de l'échangeur

Dans l'échangeur, l'air s'écoule en recevant, de la part de l'échangeur, un travail δW_e nul et une chaleur δQ . Son énergie cinétique et son enthalpie varient des quantités dE_c et dH telles que :

$$dH + dE_c = \delta Q + \delta W_e = \delta Q \text{ car } \delta W_e = 0$$

En outre, l'énoncé suggère de négliger la variation d'énergie cinétique, auquel cas :

$$dE_c \simeq 0 \Rightarrow dH = \delta Q \quad (59)$$

Quant au premier principe de la thermodynamique, il stipule que, lors d'une transformation réversible, l'énergie interne du gaz varie de :

$$dU = \delta Q - p_{\text{ext}} dV = \delta Q - p dV$$

d'où s'ensuit la variation de son enthalpie :

$$H = U + pV \Rightarrow dH = dU + p dV + V dp = \delta Q + V dp$$

L'identification avec l'identité (59) conduit à :

$$\delta Q = \delta Q + V dp \Rightarrow V dp = 0 \Rightarrow dp = 0$$

Par suite, les transformations $2 \rightarrow 3$ et $5 \rightarrow 6$ sont isobares (réversibles à pression constante).

Du reste, au cours d'une transformation isobare, la chaleur reçue par un gaz parfait s'identifie à sa variation d'enthalpie, ce qui se traduit, pour les transformations $2 \rightarrow 3$ et $5 \rightarrow 6$ relatives à une masse unitaire de gaz, par :

$$Q_{23} = \Delta H_{23} = c_p (T_3 - T_2) \text{ et } Q_{56} = \Delta H_{56} = c_p (T_6 - T_5)$$

Enfin, l'échangeur E étant calorifugé, les quantités de chaleurs Q_{23} et Q_{56} vérifient :

$$Q_{23} + Q_{56} = 0 \Rightarrow T_3 - T_2 + T_6 - T_5 = 0 \Rightarrow T_3 - T_5 - \underbrace{(T_2 - T_6)}_{\Delta T} = 0$$

d'où il s'ensuit que :

$$\Delta T = T_3 - T_5 \quad (60)$$

2. (a) Dans le compresseur, une masse m de gaz parfait subit un écoulement pendant lequel il reçoit un travail W_{ic} (du compresseur) et une chaleur Q_{ic} nulle (l'évolution de l'air dans le compresseur est adiabatique). Concomitamment, son enthalpie varie de $\Delta H_{12} = mc_p (T_2 - T_1)$ tandis que son énergie cinétique varie de la quantité ΔE_c telle que :

$$\Delta H_{12} + \Delta E_c = W_{ic} + Q_{ic} \Rightarrow mc_p (T_2 - T_1) + \Delta E_c = m w_{ic}$$

où, d'après l'énoncé, il est possible de négliger ΔE_c :

$$w_{ic} = c_p (T_2 - T_1)$$

Quant à la transformation adiabatique réversible du gaz, au cours de la transformation $1 \rightarrow 2$, elle autorise l'emploi de la loi de Laplace :

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte} \Rightarrow p_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = p_2^{1-\gamma} T_2^\gamma \Rightarrow T_2 = T_1 \times \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 \times x \quad (61)$$

C'est pourquoi :

$$w_{ic} = c_p T_1 (x - 1)$$

- (b) Un raisonnement analogue s'applique à la transformation adiabatique réversible 3 → 4 dans la turbine, auquel cas :

$$\begin{aligned} \Delta H_{34} + \underbrace{\Delta E_c}_{\simeq 0} &= \underbrace{W_{it}}_{=0} + \underbrace{Q_{it}}_{=0} \Rightarrow mc_p (T_4 - T_3) = m w_{it} \\ &\Rightarrow w_{it} = c_p (T_4 - T_3) \end{aligned}$$

avec :

$$p^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cte} \Rightarrow p_4^{1-\gamma} T_4^\gamma = p_3^{1-\gamma} T_3^\gamma \Rightarrow T_4 = T_3 \times \left(\frac{p_4}{p_3}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

Non seulement l'énoncé précise que $p_4 = p_1$, mais de surcroît : $p_3 = p_2$ d'après la question 1. Il s'ensuit que :

$$T_4 = T_3 \times \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_3 \times \frac{1}{x}$$

d'où il ressort que :

$$w_{it} = c_p T_3 \left(\frac{1}{x} - 1\right) = c_p T_3 \times \frac{1-x}{x}$$

Quant au résultat (60), il indique que :

$$T_3 = \Delta T + T_5 \Rightarrow w_{it} = c_p (\Delta T + T_5) \times \frac{1-x}{x}$$

- (c) Selon l'énoncé, le moteur M et la turbine T entraînent le compresseur C , ce qui signifie aussi que le travail w_{ic} reçu par le compresseur provient d'une part du travail w_m fourni par le moteur et d'autre part du travail $-w_{it}$ fourni par le gaz dans la turbine :

$$w_{ic} = w_m - w_{it} \Rightarrow w_m = w_{ic} + w_{it} = c_p T_1 (x - 1) + c_p (\Delta T + T_5) \frac{1-x}{x}$$

soit encore :

$$w_m = c_p \frac{x-1}{x} \times [xT_1 - (\Delta T + T_5)] \quad (62)$$

- (d) La définition du pincement : $\Delta T = T_2 - T_6$, associée au résultat (61) : $T_2 = xT_1$, conduit directement à :

$$T_6 = T_2 - \Delta T \Rightarrow T_6 = xT_1 - \Delta T \quad (63)$$

- (e) La variation d'enthalpie d'une masse m de gaz parfait, entre les états (1) et (6) vaut :

$$\Delta H_{16} = mc_p (T_6 - T_1) = m (h_6 - h_1) = m \Delta h$$

et est à l'origine de la définition de la chaleur massique :

$$q_{16} = h_6 - h_1 = c_p (T_6 - T_1)$$

où T_6 a été exprimé dans la question précédente :

$$T_6 = xT_1 - \Delta T \Rightarrow q_{16} = c_p [(x-1)T_1 - \Delta T] \quad (64)$$

3. Compte tenu des résultats (62) et (64), la définition du coefficient d'effet calorique devient :

$$\varphi_c = \frac{q_{16}}{w_m} \Rightarrow \varphi_c = x \times \frac{(x-1)T_1 - \Delta T}{(x-1)[xT_1 - (\Delta T + T_5)]}$$

Notamment, en choisissant $T_1 = 293 \text{ K}$, $T_5 = 273 \text{ K}$ et $\Delta T = 20 \text{ K}$, cette expression devient aussi :

$$\varphi_c = x \times \frac{293x - 293 - 20}{(x-1)[293x - 20 - 273]} \Rightarrow \varphi_c = \frac{293x^2 - 313x}{293 \times (x-1)^2}$$

4. Choix de x

(a) *Premier critère : la performance*

La valeur maximale de φ_c est atteinte pour une valeur x_1 de x telle que :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\varphi_c}{dx} \right|_{x_1} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{(586x_1 - 313) \times 293(x_1 - 1)^2 - 586(x_1 - 1) \times (293x_1^2 - 313x_1)}{293(x_1 - 1)^4} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{(x_1 - 1)^3} [(586x_1 - 313)(x_1 - 1) - 2 \times (293x_1^2 - 313x_1)] &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{(x_1 - 1)^3} \times [(313 - 899x_1) + (626x_1)] &= 0 \Rightarrow \frac{313 - 273x_1}{(x_1 - 1)^3} = 0 \end{aligned}$$

soit encore :

$$x_1 = \frac{313}{273} = 1,15$$

La température T_6 s'obtient alors directement à partir de l'expression (63) :

$$T_6 = xT_1 - \Delta T = 1,15 \times 293 - 20 \Rightarrow T_6 = 317 \text{ K} = 44^\circ\text{C}$$

Cette valeur montre que ce critère ne peut être admis comme celui qui rendrait confortable la température du local.

(b) *Second critère : le confort*

À nouveau, le résultat (63) fournit directement :

$$T_6 = xT_1 - \Delta T \Rightarrow x = \frac{T_6 + \Delta T}{T_1}$$

et, notamment, si on impose $T_6 = 27^\circ\text{C} = 300 \text{ K}$, x doit prendre la valeur :

$$x = \frac{300 + 20}{293} \Rightarrow x = 1,09$$

● **217** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

1. Par définition, la chaleur apportée pour vaporiser une masse $m = 10^{-3}$ kg d'eau liquide à température et pression constantes vaut :

$$Q = m \ell_v = 10^{-3} \times 2\,247 \cdot 10^3 = 2\,247 \text{ J}$$

2. La vaporisation étant effectuée à pression constante, elle s'identifie à la variation d'enthalpie de l'eau :

$$\Delta H = Q$$

à laquelle est associée une variation d'énergie interne ΔU telle que :

$$\Delta H = \Delta U + \Delta(pV) = \Delta U + p \Delta V \Rightarrow \Delta U = \Delta H - p \Delta V$$

En négligeant le volume initial de l'eau liquide devant le volume de la vapeur d'eau, la variation de volume de l'eau s'identifie à V_0 :

$$\Delta U = \Delta H - pV_0 = m \ell_v - pV_0$$

Application numérique :

$$\Delta U = 10^{-3} \times 2\,247 \cdot 10^3 - 10^5 \times 1,7 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \Delta U = 2\,077 \text{ J}$$

● **218** ————— **Lycée Sainte-Geneviève, Versailles**

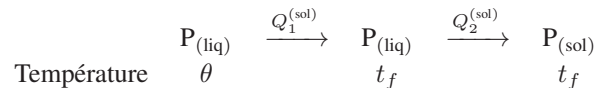
1. Considérons que le phosphore, initialement liquide à la température θ , se solidifie partiellement ; une masse m_ℓ de phosphore liquide ($P_{(\text{liq})}$) demeure dans le système, tandis qu'une masse m_s de phosphore solide ($P_{(\text{sol})}$) se forme. Il convient de représenter séparément les transformations subies par ces deux masses.

- La masse m_ℓ de $P_{(\text{liq})}$ est simplement passée de la température initiale θ à la température t_f de fusion du phosphore, car la coexistence finale des phases liquide et solide du phosphore ne peut se maintenir qu'à la température t_f . Au cours de cette évolution, $P_{(\text{liq})}$ a reçu une chaleur :

$$Q_{(\text{liq})} = m_\ell c_\ell (t_f - \theta)$$

- La masse m_s de phosphore initialement liquide a dû changer d'état. Or, ce changement d'état se fait à la température t_f de fusion, si bien que m_s a dû atteindre d'abord cette température, se solidifier, et la masse de solide ainsi formée est restée à la température t_f (qui assure la coexistence finale de $P_{(\text{liq})}$ et $P_{(\text{sol})}$).

En notant $Q_1^{(\text{sol})}$ et $Q_2^{(\text{sol})}$ les chaleurs reçues par m_s au cours des deux transformations, ce processus peut se résumer par le schéma suivant :



où :

$$Q_1^{(\text{sol})} = m_s c_\ell (t_f - \theta) \text{ et } Q_2^{(\text{sol})} = -m_s \ell$$

⚠ La chaleur $Q_2^{(\text{sol})}$ s'identifie à $-m_s \ell$ et non à $+m_s \ell$. La présence du signe négatif provient de la nature même de la transformation $P_{(\text{liq})} \rightarrow P_{(\text{sol})}$; il s'agit d'une solidification. Cependant, l'énoncé donne la chaleur latente de *fusion*, c'est-à-dire celle d'une transformation justement inverse de celle qui se produit.

Finalement, la solidification de la masse m_s de phosphore requiert la chaleur :

$$Q_{(\text{sol})} = Q_1^{(\text{sol})} + Q_2^{(\text{sol})} = m_s c_\ell (t_f - \theta) - m_s \ell$$

La chaleur totale reçue par le phosphore s'écrit donc :

$$Q = Q_{(\text{liq})} + Q_{(\text{sol})} = (m_\ell + m_s) c_\ell (t_f - \theta) - m_s \ell$$

et doit être nulle si l'on considère que la surfusion cesse spontanément, sans échange de chaleur avec l'extérieur. C'est pourquoi :

$$m_\ell c_\ell (t_f - \theta) = m_s [\ell + c_\ell (\theta - t_f)]$$

fournit :

$$m_\ell = m_s \times \frac{\ell + c_\ell (\theta - t_f)}{c_\ell (t_f - \theta)} \quad (65)$$

À cette étape du calcul, il convient d'interpréter l'énoncé : lorsque la température θ prend la valeur t' , tout le phosphore s'est solidifié, c'est à dire qu'il ne reste plus de phosphore liquide :

$$\theta = t' \Rightarrow m_\ell = 0$$

ce qui donne à l'équation (65) la forme suivante :

$$0 = m_s \times \frac{\ell + c_\ell (t' - t_f)}{c_\ell (t_f - t')} \Rightarrow c_\ell (t' - t_f) = -\ell \Rightarrow t' = t_f - \frac{\ell}{c_\ell}$$

Application numérique :

$$t' = 44 - \frac{19,65}{1,05} \Rightarrow t' = 25,3^\circ\text{C}$$

2. Lorsque $\theta = 40^\circ\text{C}$, la relation (65) donne la masse de phosphore liquide restant :

$$m_\ell = m_s \times \frac{\ell + c_\ell (\theta - t_f)}{c_\ell (t_f - \theta)}$$

sachant que la masse initiale de phosphore surfondu vaut :

$$m = m_\ell + m_s \Rightarrow m = m_s \times \frac{\ell}{c_\ell (t_f - \theta)}$$

Ainsi, la proportion de liquide restant s'écrit :

$$\frac{m_\ell}{m} = \frac{\ell + c_\ell (\theta - t_f)}{\ell} = 1 + c_\ell \frac{\theta - t_f}{\ell}$$

et la proportion de phosphore solide formé vaut :

$$\frac{m_s}{m} = \frac{c_\ell (t_f - \theta)}{\ell}$$

Application numérique :

$$\frac{m_\ell}{m} = 1 + \frac{1,05 \times (40 - 44)}{19,65} \Rightarrow \frac{m_\ell}{m} = 0,786 = 78,6\%$$

et :

$$\frac{m_s}{m} = \frac{1,05 \times (44 - 40)}{19,65} \Rightarrow \frac{m_s}{m} = 0,214 = 21,4\%$$

Ces résultats révèlent que le phosphore se compose, finalement, de 21,4% de solide et de 78,6% de liquide.

● 219 ————— Lycée Clémenceau, Reims

Au cours de cette expérience, deux phénomènes peuvent être distingués :

- une masse élémentaire δm_v de vapeur est créée à une température T , ce qui requiert un apport de chaleur :

$$\delta Q_1 = \delta m_v \times \ell_v$$

- la masse m d'eau liquide voit sa température varier de dT , en absorbant la chaleur :

$$\delta Q_2 = mc \, dT$$

Ce faisant, le système ainsi constitué reçoit la chaleur :

$$\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 = mc \, dT + \delta m_v \ell_v$$

au demeurant nulle, étant donné la nature adiabatique du récipient. En outre, une variation dm de la masse d'eau liquide provient d'une masse δm_v de vapeur d'eau formée, selon la loi :

$$\begin{aligned} \delta m_v = -dm &\Rightarrow \delta Q = mc \, dT - dm \ell_v = 0 \\ &\Rightarrow c \frac{dT}{\ell_v} = \frac{dm}{m} \Rightarrow c \frac{dT}{A - BT} = \frac{dm}{m} \end{aligned}$$

Pendant que la température varie de T_0 à T_1 , la masse de liquide passe de $m_0 = 1$ kg à la valeur finale m_f , telle que :

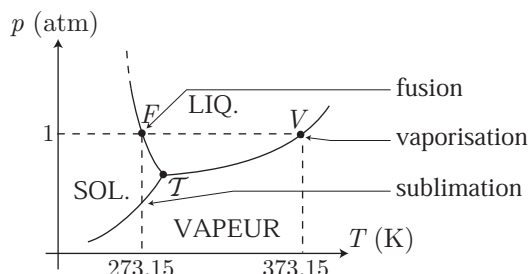
$$\begin{aligned} \int_{m_0}^{m_f} \frac{dm}{m} &= c \int_{T_0}^{T_1} \frac{dT}{A - BT} \Rightarrow \ln \left(\frac{m_f}{m_1} \right) = -\frac{c}{B} \ln \left(\frac{A - BT_1}{A - BT_0} \right) \\ &\Rightarrow \ln \left(\frac{m_f}{m_1} \right) = \ln \left(\frac{A - BT_0}{A - BT_1} \right)^{c/B} \\ &\Rightarrow m_f = m_1 \times \ln \left(\frac{A - BT_0}{A - BT_1} \right)^{c/B} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$m_f = 1 \times \left(\frac{3310 - 2,9 \times 373}{3310 - 2,9 \times 273} \right)^{\frac{4,18}{2,9}} \Rightarrow m_f = 0,838 \text{ kg} = 838 \text{ g}$$

● 220 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. Le diagramme d'état de l'eau présente l'allure suivante :



Sur cette courbe apparaissent trois points singuliers :

- le point F de fusion de la glace, sous la pression normale ($p_0 = 1\text{ atm}$) et à la température $T_{f_0} = 273,15\text{ K} = 0^\circ\text{C}$;
- le point V de vaporisation (ou d'ébullition) de l'eau à la température $T_{v_0} = 373,15\text{ K}$ lorsqu'on opère sous la pression normale p_0 ;
- le point triple T qui représente le seul point où coexistent simultanément les trois phases de l'eau (glace, liquide, vapeur).

2. La courbe de fusion de l'eau présente une singularité : sa pente négative.

Une masse m d'un corps (contenant n moles de particules) et de masse molaire M , qui occupe un volume V , présente une masse volumique μ définie par :

$$\mu = \frac{m}{V} = M \times \frac{n}{V} = \frac{M}{u} \Rightarrow u = \frac{M}{\mu}$$

où l'on reconnaît la définition du volume molaire : $u = \frac{V}{n}$. Cette loi peut être étendue aux volumes molaires de la glace (solide) et de l'eau liquide :

$$u_s = \frac{M}{\mu_s} \text{ et } u_\ell = \frac{M}{\mu_\ell}$$

Ce faisant, la formule de Clapeyron relative à la fusion (transformation du solide en liquide) devient :

$$\begin{aligned} L_{\text{fus}, m} &= T (u_\ell - u_s) \left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{fus}} = MT \times \left(\frac{1}{\mu_\ell} - \frac{1}{\mu_s} \right) \left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{fus}} \\ &= MT \times \frac{\mu_s - \mu_\ell}{\mu_\ell \mu_s} \times \left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{fus}} \end{aligned}$$

En outre, l'eau liquide est plus dense que la glace (qui flotte sur l'eau), ce qui signifie également que :

$$\mu_\ell > \mu_s \Rightarrow \mu_s - \mu_\ell < 0$$

Enfin, étant donné le signe positif de $L_{\text{fus}, m}$:

$$\left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{fus}} = \frac{\mu_\ell \mu_s L_{\text{fus}, m}}{MT (\mu_s - \mu_\ell)} \Rightarrow \left(\frac{dp}{dT} \right)_{\text{fus}} < 0$$

ce qui justifie la pente négative observée pour la courbe de fusion.

3. Lors de la vaporisation, l'eau liquide (de volume molaire u_ℓ) se transforme en vapeur d'eau (de volume molaire u_v) de sorte que la formule de Clapeyron devient :

$$L_{vm} = T (u_v - u_\ell) \frac{dp}{dT} \simeq T u_v \frac{dp}{dT}$$

car, d'après l'énoncé : $u_\ell \ll u_v$. En outre, si la vapeur d'eau se comporte comme un gaz parfait, elle vérifie l'équation d'état :

$$pV = n_v RT \Rightarrow \frac{V}{n_v} = \frac{RT}{p} \Rightarrow u_v = \frac{RT}{p}$$

De cette relation découle alors l'équation différentielle en T et p de la courbe de vaporisation :

$$L_{vm} = \frac{RT^2}{p} \frac{dp}{dT} \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{L_{vm}}{R} \times \frac{dT}{T^2}$$

L'intégration de cette équation depuis la température $T_{v0} = 373,15$ K, où la pression vaut p_0 , conduit à :

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = \frac{L_{vm}}{R} \int_{T_{v0}}^T \frac{dT}{T^2} \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{L_{vm}}{R} \times \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{v0}}\right) \quad (66)$$

d'où est extraite l'équation cartésienne de la courbe de vaporisation :

$$p = p_0 \exp\left[-\frac{L_{vm}}{R} \times \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_{v0}}\right)\right]$$

Notamment, au sommet du Mont-Blanc, où la pression vaut $p_1 = 0,575$ atm, l'équation (66) révèle que l'eau bout à une température T_1 telle que :

$$\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_{v0}} = -\frac{R}{L_{vm}} \ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) \Rightarrow \frac{1}{T_1} = \frac{1}{T_{v0}} - \frac{R}{L_{vm}} \ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right)$$

Application numérique :

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{373,15} - \frac{8,31}{40,7 \cdot 10^3} \times \ln\left(\frac{0,575}{1}\right) \Rightarrow T_1 = 358 \text{ K} \simeq 85^\circ\text{C}$$

● 221 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Processus a

Ce processus étant supposé réversible, il faut fournir la chaleur $\delta Q_{\text{rev}} = \delta m \times \ell_v$ pour vaporiser une masse δm d'eau, c'est-à-dire, pour la totalité du processus :

$$Q_{\text{rev}} = m \times \ell_v$$

Application numérique :

$$Q_{\text{rev}} = 10^{-3} \times 2,25 \cdot 10^4 \Rightarrow Q_{\text{rev}} = 22,5 \text{ J}$$

Au cours de cette transformation, la pression extérieure $p_{\text{ext}} = p_0 = 10^5$ Pa fournit un travail élémentaire :

$$\delta W_{\text{rev}} = -p_{\text{ext}} dV = -p_0 dV$$

tandis que le volume du cylindre s'accroît de dV . Notamment, lorsque ce volume varie de u_L à u_v (u_L étant négligeable devant u_v , compte tenu de la densité du liquide) :

$$W_{\text{rev}} = -p_0 \int_{u_L}^{u_v} dV = -p_0 (u_v - u_L) \Rightarrow W_{\text{rev}} \simeq -p_0 u_v$$

Application numérique :

$$W_{\text{rev}} = -10^5 \times 1,67 \cdot 10^{-3} \Rightarrow W_{\text{rev}} = -167 \text{ J}$$

En vertu du premier principe de la thermodynamique, l'énergie interne de l'eau varie de :

$$\Delta U_a = Q_{\text{rev}} + W_{\text{rev}} \Rightarrow \Delta U_a = m \ell_v - p_0 u_v$$

Application numérique :

$$\Delta U_a = 22,5 - 167 = -144,5 \text{ J}$$

L'eau reçoit la chaleur δQ_{rev} de manière réversible, tandis qu'elle reste en contact thermique avec le thermostat de température $T_0 = 373 \text{ K}$. C'est pourquoi son entropie varie de :

$$dS_a = \frac{\delta Q_{\text{rev}}}{T_0} \Rightarrow \Delta S_a = \frac{Q_{\text{rev}}}{T_0} = \frac{m \ell_v}{T_0}$$

Application numérique :

$$\Delta S_a = \frac{22,5}{373} = 0,06 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Processus b

Les fonctions d'état (énergie interne et entropie) ne dépendent pas de la nature de la transformation, mais seulement de l'état du système. Le second processus reliant des états identiques à ceux du premier processus, il s'ensuit que :

$$\Delta U_b = \Delta U_a = -144,5 \text{ J} \quad (67)$$

et :

$$\Delta S_b = \Delta S_a = \frac{m \ell_v}{T_0} = 0,06 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \quad (68)$$

En outre, au cours de ce second processus (irréversible), l'eau reçoit la chaleur Q_{irr} et un travail W_{irr} (nul étant donné que le volume du récipient ne varie pas). C'est pourquoi :

$$\Delta U_b = Q_{\text{irr}} + W_{\text{irr}} = Q_{\text{irr}}$$

Enfin, l'identité (67) fournit :

$$\Delta U_b = \Delta U_a \Rightarrow Q_{\text{irr}} = \Delta U_a = m \ell_v - p_0 u_v = -144,5 \text{ J}$$

2. Au cours du second processus le thermostat reçoit la chaleur $Q_{\text{th}} = -Q_{\text{irr}}$, tandis que sa température demeure égale à T_0 . Un processus réversible (par exemple, le

thermostat en équilibre thermique permanent avec une source de chaleur) lui permettrait d'acquiescer ces mêmes grandeurs, auquel cas son entropie varie de :

$$\Delta S_{\text{th}} = \frac{Q_{\text{th}}}{T_0} = \frac{p_0 u_v}{T_0} - \frac{m \ell_v}{T_0}$$

Cette relation, associée au résultat (68), fournit finalement la variation d'entropie ΔS_c du système {eau + thermostat}, qui s'apparente à une création d'entropie (puisque ce système est thermiquement isolé) :

$$\Delta S_c = \Delta S_b + \Delta S_{\text{th}} = \left(\frac{m \ell_v}{T_0} \right) + \left(\frac{p_0 u_v}{T_0} - \frac{m \ell_v}{T_0} \right) \Rightarrow \Delta S_c = \frac{p_0 u_v}{T_0}$$

Application numérique :

$$\Delta S_c = \frac{10^5 \times 1,67 \cdot 10^{-3}}{373} \Rightarrow \Delta S_c = 0,45 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

● 222 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Étudions séparément les transformations subies par l'eau liquide et par la glace.

• L'eau liquide

Pour passer de la température $T_{\ell 0}$ à la température T_f , la masse m_ℓ d'eau a reçu la chaleur :

$$Q_\ell = m_\ell c_\ell (T_f - T_{\ell 0})$$

• La glace

Dans un premier temps, la masse m_s de glace est passée de la température T_{s0} à T_f . Au cours de cette transformation, la glace a reçu la chaleur :

$$Q_{s1} = m_s c_s (T_f - T_{s0})$$

Ensuite, une masse δm_ℓ de glace a fondu, à la température constante T_f . Cette fusion requiert l'apport de la chaleur :

$$Q_{s2} = \delta m_\ell \times \ell$$

Ainsi, la glace a globalement reçu la chaleur :

$$Q_s = Q_{s1} + Q_{s2} = m_s c_s (T_f - T_{s0}) + \delta m_\ell \times \ell$$

Le système diphasé {eau + glace} a reçu la chaleur :

$$Q = Q_s + Q_\ell = m_s c_s (T_f - T_{s0}) + \delta m_\ell \times \ell + m_\ell c_\ell (T_f - T_{\ell 0})$$

Cependant, ce système est introduit dans une enceinte à parois calorifugées, ce qui signifie encore que :

$$Q = 0 \Rightarrow \delta m_\ell = \frac{m_\ell c_\ell}{\ell} (T_{\ell 0} - T_f) + \frac{m_s c_s}{\ell} (T_{s0} - T_f) \quad (69)$$

2. Quant à l'entropie du système, sa variation doit tenir compte des variations d'entropie des deux phases.

• **L'eau liquide**

Tandis que sa température varie de dT_ℓ , sous l'influence de la chaleur δQ_ℓ (que l'on peut apporter de manière réversible, par simple équilibre thermique permanent avec une infinité de sources dont les températures varient continûment de $T_{\ell 0}$ à T_f), son entropie accuse, concomitamment, un accroissement :

$$dS_\ell = \frac{\delta Q_\ell}{T_\ell} = m_\ell c_\ell \frac{dT_\ell}{T_\ell} \Rightarrow \Delta S_\ell = m_\ell c_\ell \int_{T_{\ell 0}}^{T_f} \frac{dT_\ell}{T_\ell} = m_\ell c_\ell \ln \left(\frac{T_f}{T_{\ell 0}} \right)$$

• **La glace**

La variation de température dT_s de la masse m_s de glace peut aussi être obtenue par un apport réversible de la chaleur $\delta Q_{s1} = m_s c_s dT_s$, auquel cas son entropie s'accroît de la quantité :

$$dS_{s1} = \frac{\delta Q_{s1}}{T_s} = m_s c_s \frac{dT_s}{T_s} \Rightarrow \Delta S_{s1} = m_s c_s \int_{T_{s0}}^{T_f} \frac{dT_s}{T_s} = m_s c_s \ln \left(\frac{T_f}{T_{s0}} \right)$$

En outre, la fusion de la masse δm_ℓ de glace, à la température T_f constante, s'effectue selon un processus réversible au cours duquel la chaleur $\delta m_\ell \times \ell$ a été transmise à cette glace. Il s'ensuit une variation d'entropie :

$$\Delta S_{s2} = \frac{\delta m_\ell \times \ell}{T_f}$$

Finalement, le mélange {eau + glace} subit une variation d'entropie :

$$\begin{aligned} \Delta S &= \Delta S_\ell + \Delta S_{s1} + \Delta S_{s2} \\ &= m_\ell c_\ell \ln \left(\frac{T_f}{T_{\ell 0}} \right) + m_s c_s \ln \left(\frac{T_f}{T_{s0}} \right) + \frac{\delta m_\ell \times \ell}{T_f} \quad (70) \end{aligned}$$

où le dernier terme du membre de droite peut s'exprimer à l'aide de la relation (69) :

$$\begin{aligned} \frac{\delta m_\ell \times \ell}{T_f} &= m_\ell c_\ell \times \frac{T_{\ell 0} - T_f}{T_f} + m_s c_s \times \frac{T_{s0} - T_f}{T_f} \\ &= m_\ell c_\ell \times \left(\frac{T_{\ell 0}}{T_f} - 1 \right) + m_s c_s \times \left(\frac{T_{s0}}{T_f} - 1 \right) \end{aligned}$$

L'identité (70) devient ainsi :

$$\Delta S = m_\ell c_\ell \left[\frac{T_{\ell 0}}{T_f} - 1 - \ln \left(\frac{T_{\ell 0}}{T_f} \right) \right] + m_s c_s \left[\frac{T_{s0}}{T_f} - 1 - \ln \left(\frac{T_{s0}}{T_f} \right) \right]$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme :

$$\Delta S = m_\ell c_\ell \times f \left(\frac{T_{\ell 0}}{T_f} \right) + m_s c_s \times f \left(\frac{T_{s0}}{T_f} \right)$$

en définissant la fonction f par :

$$f(x) = x - 1 - \ln x$$

3. La fonction $f(x)$ admet pour dérivée :

$$\frac{df}{dx} = 1 - \frac{1}{x}$$

qui s'annule pour $x = 1$, qui associe à $f(x)$ un *extremum* dont la nature est déterminée par le signe de $\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{x^2} > 0$, ce qui révèle que $f(x = 1) = 0$ représente la valeur minimale de $f(x)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq f(1) \Rightarrow f(x) \geq 0$$

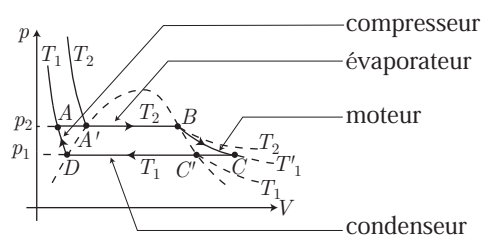
Notamment, pour $x = \frac{T_{\ell 0}}{T_f}$ ou $x = \frac{T_{s0}}{T_f}$, cette inégalité prévaut *a fortiori* et c'est pourquoi :

$$\Delta S = \underbrace{m_{\ell} c_{\ell} \times f\left(\frac{T_{\ell 0}}{T_f}\right)}_{\geq 0} + \underbrace{m_s c_s \times f\left(\frac{T_{s0}}{T_f}\right)}_{\geq 0} \Rightarrow \Delta S \geq 0$$

Remarquons enfin que l'égalité $\Delta S = 0$ ne peut être observée que dans le cas où $T_{\ell 0} = T_{s0} = T_f$, qui correspond à un simple équilibre {liquide + glace} au cours duquel l'entropie ne varie pas. Dans tout autre cas, l'augmentation d'entropie indique que la fusion de la glace est un phénomène irréversible car l'absence d'échange thermique avec l'extérieur signifie que l'augmentation d'entropie provient d'une création d'entropie ; spontanément, le processus décrit ici ne peut s'inverser.

● 223 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Il convient, dans un premier temps, de repérer sur le cycle l'ensemble des transformations subies par le fluide :



- Dans l'évaporateur : de A à A', le liquide est chauffé de T_1 à T_2 , sous la pression constante p_2 ; en A' le liquide commence sa vaporisation qu'il achève en B, où il se présente totalement sous forme de vapeur à la température T_2 et sous la pression p_2 .
- Dans le moteur : au cours de la transformation $B \rightarrow C$, la vapeur subit une détente à l'issue de laquelle son état passe de $B(p_2, T_2)$ à $C(p_1, T_1)$.
- Dans le condenseur : de C à C', le volume du gaz est diminué à pression constante (p_1) ; son état passe de $C(p_1, T_1)$ à $C'(p_1, T_1)$. En C' se produit la liquéfaction de la vapeur, jusqu'en D, où le fluide est intégralement liquide.

- Au cours de la transformation $D \rightarrow A$, le liquide (de volume constant) est comprimé de p_1 à p_2 à la température T_1 constante.

2. Dans l'évaporateur se produisent deux transformations :

- de A à A' , le liquide passe de la température T_1 à la température T_2 sous la pression p_2 constante ; la chaleur Q'_2 qu'il reçoit s'identifie à sa variation d'enthalpie :

$$Q'_2 = mc (T_2 - T_1) = c (T_2 - T_1) \text{ car } m = 1 \text{ kg}$$

- de A' à B , la masse m de liquide est totalement vaporisée, ce qui requiert une chaleur $Q''_2 = m \ell_2 = \ell_2$.

Finalement, l'unité de masse de fluide reçoit, dans l'évaporateur, une chaleur :

$$Q_2 = Q'_2 + Q''_2 = c (T_2 - T_1) + \ell_2$$

Application numérique :

$$Q_2 = 1,02 \cdot 10^3 \times (450 - 300) + 80,7 \cdot 10^3 \Rightarrow Q_2 = 233,7 \text{ kJ}$$

3. Dans le moteur, le gaz (considéré comme parfait) vérifie l'équation d'état :

$$pV = nRT = \frac{mRT}{M} = \frac{RT}{M} \Rightarrow V = \frac{RT}{pM}$$

auquel cas la détente réversible qu'il subit vérifie la loi :

$$pV^\beta = \text{cte} \Rightarrow p^{1-\beta} T^\beta \times \left(\frac{R}{M}\right)^\beta = \text{cte} \Rightarrow p^{1-\beta} T^\beta = \text{cte} \times \left(\frac{M}{R}\right)^\beta$$

c'est-à-dire, puisque $\frac{M}{R}$ est une grandeur constante :

$$p^{1-\beta} T^\beta = \text{cte}$$

Au cours de la transformation $B(p_2, T_2) \rightarrow C(p_1, T'_1)$, cette loi se traduit par :

$$\begin{aligned} p_2^{1-\beta} T_2^\beta &= p_1^{1-\beta} T_1'^\beta \Rightarrow p_2 \times \left(\frac{T_2}{p_2}\right)^\beta = p_1 \times \left(\frac{T_1'}{p_1}\right)^\beta \\ &\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{p_2 T_1'}{p_1 T_2}\right)^\beta \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \beta \times \ln\left(\frac{p_2 T_1'}{p_1 T_2}\right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\beta = \frac{\ln(p_2/p_1)}{\ln(p_2 T_1'/p_1 T_2)}$$

Application numérique :

$$\beta = \frac{\ln\left(\frac{20}{0,6}\right)}{\ln\left(\frac{20 \times 350}{0,6 \times 450}\right)} \Rightarrow \beta = 1,08$$

4. Au cours de la transformation réversible $B(p_2, T_2, V_2) \rightarrow C(p_1, T_1', V_1)$, le gaz reçoit une chaleur élémentaire δQ_3 tandis que son enthalpie varie de la quantité : $dH = mc' dT = c' dT$ telle que :

$$dH = \delta Q_3 + V dp \Rightarrow \delta Q_3 = c' dT - V dp$$

avec :

$$pV^\beta = \text{cte} \Rightarrow p^{1/\beta} V = \text{cte} = \alpha \Rightarrow V = \alpha p^{-1/\beta}$$

en notant α la constante :

$$\alpha = p_2^{1/\beta} V_2 = p_1^{1/\beta} V_1 \quad (71)$$

Ce faisant, :

$$\begin{aligned} \delta Q_3 &= -c' dT - \alpha p^{-1/\beta} dp \\ \Rightarrow Q_3 &= c' \int_{T_2}^{T_1'} dT - \alpha \int_{p_2}^{p_1} p^{-1/\beta} dp \\ \Rightarrow Q_3 &= c' (T_1' - T_2) - \frac{\alpha}{1 - \frac{1}{\beta}} \left[p_1^{1 - \frac{1}{\beta}} - p_2^{1 - \frac{1}{\beta}} \right] \\ \Rightarrow Q_3 &= c' (T_1' - T_2) - \frac{\beta}{\beta - 1} \left[\alpha p_1^{1 - \frac{1}{\beta}} - \alpha p_2^{1 - \frac{1}{\beta}} \right] \end{aligned}$$

Or, conformément à la définition (71), la constante α peut être remplacée indifféremment par $p_1^{1/\beta} V_1$ ou par $p_2^{1/\beta} V_2$, ce qui mène à :

$$\alpha p_1^{1 - \frac{1}{\beta}} = V_1 p_1^{\frac{1}{\beta}} \times p_1^{1 - \frac{1}{\beta}} = p_1 V_1 \text{ et } \alpha p_2^{1 - \frac{1}{\beta}} = V_2 p_2^{\frac{1}{\beta}} \times p_2^{1 - \frac{1}{\beta}} = p_2 V_2$$

de sorte que :

$$Q_3 = c' (T_1' - T_2) + \frac{\beta}{\beta - 1} (p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

Par ailleurs, la masse $m = 1$ kg de gaz contient un nombre de moles n de particules satisfaisant l'équation d'état :

$$\begin{aligned} pV = nRT = \frac{mRT}{M} = \frac{RT}{M} &\Rightarrow \begin{cases} p_1 V_1 = \frac{RT_1'}{M} \\ p_2 V_2 = \frac{RT_2}{M} \end{cases} \\ \Rightarrow Q_3 = c' (T_1' - T_2) + \frac{\beta R}{M(\beta - 1)} (T_2 - T_1') \end{aligned}$$

Ce résultat peut aussi s'écrire :

$$Q_3 = \left[\frac{\beta R}{M(\beta - 1)} - c' \right] \times (T_2 - T_1')$$

Application numérique :

$$Q_3 = \left[\frac{1,08 \times 8,31}{75 \cdot 10^{-3} \times 0,08} - 678 \right] \times (450 - 350) \Rightarrow 81,78 \text{ kJ}$$

La capacité thermique molaire à pression constante du gaz parfait s'exprime à l'aide du rapport γ :

$$C'_m = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \Rightarrow c' = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$$

auquel cas :

$$Q_3 = \frac{R}{M} \left(\frac{\beta}{\beta - 1} - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \times (T_2 - T'_1)$$

et, notamment, si la transformation $B \rightarrow C$ était adiabatique (et réversible), la chaleur Q_3 serait nulle, tandis que $T_2 \neq T'_1$, imposant de fait :

$$\frac{\beta}{\beta - 1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \Rightarrow \beta = \gamma$$

Aussi, dans ce cas, cette transformation vérifierait la loi $pV^\beta = \text{cte}$, c'est-à-dire la loi de Laplace (classiquement évoquée dans le cas des transformations adiabatiques réversibles des gaz parfaits) :

$$pV^\gamma = \text{cte}$$

5. Le condenseur est le siège de deux types de transformations :

- au cours du processus $C(p_1, T'_1) \rightarrow C'(p_1, T_1)$, le gaz reçoit la chaleur Q'_1 , de manière isobare, qui s'identifie donc à sa variation d'enthalpie :

$$Q'_1 = c' (T_1 - T'_1)$$

- La vapeur est ensuite liquéfiée pendant la transformation $C' \rightarrow D$, à pression (p_1) constante. C'est pourquoi elle reçoit la chaleur :

$$Q''_1 = -m \ell_1 = -\ell_1$$

Par conséquent, dans le condenseur, le fluide reçoit la quantité de chaleur :

$$Q_1 = Q'_1 + Q''_1 = c' (T_1 - T'_1) - \ell_1$$

Application numérique :

$$Q_1 = 678 \times (300 - 350) - 152 \cdot 10^3 \Rightarrow Q_1 = -185,9 \text{ kJ}$$

6. *A priori*, l'énergie interne du liquide, qui subit la transformation $D \rightarrow A$, dépend de sa température T et de son volume V :

$$U \equiv U(T, V) \Rightarrow dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

où $\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = C_V$ par définition et $dV \simeq 0$ (l'énoncé suggère de négliger la variation de volume du fluide au cours de cette transformation). Par suite :

$$dU = C_V dT = \delta Q_4 + \delta W$$

avec $dT = 0$ (la température demeure égale à T_1) et $\delta W = 0$ (la variation de volume du liquide est négligeable). Finalement, au cours de la transformation $D \rightarrow A$, le fluide reçoit la chaleur :

$$Q_4 = 0$$

Au cours du cycle ($ABCD$), le fluide reçoit un travail W (négatif car il s'agit d'un cycle moteur) et une quantité de chaleur $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$. Par suite, son énergie interne varie de :

$$\Delta U = \oint dU = 0 = W + Q_1 + Q_2 + Q_3 \Rightarrow -W = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Cette relation permet alors le calcul du rendement η du cycle, défini par :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{|W|}{Q_2 + Q_3} = -\frac{W}{Q_2 + Q_3} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{Q_2 + Q_3} \\ &\Rightarrow \eta = 1 + \frac{Q_1}{Q_2 + Q_3} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\eta = 1 - \frac{185,9}{233,7 + 81,78} \Rightarrow \eta = 0,41 = 41\%$$

Chapitre 7

Électromagnétisme

7.1 Électrostatique

7.1.1 Le champ électrique

7.1.1.1 Champ produit par une charge

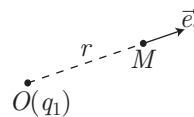
Une charge q_1 , située en O , crée un champ électrique \vec{E} en un point M , tel que $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$:

$$\vec{E} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

où $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$ USI désigne la permittivité électrique du vide.

Une autre charge, (q), placée en M , subirait alors une force décrite par la *loi de Coulomb* :

$$\vec{f} = q \vec{E} = \frac{q_1 q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$



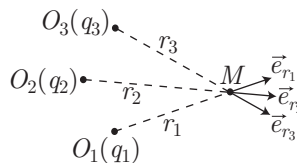
7.1.1.2 Champ produit par plusieurs charges

Soient q_1, q_2, \dots, q_n un ensemble de n charges électriques disposées aux points O_1, O_2, \dots, O_n , tels que $\overrightarrow{OM}_i = r_i \vec{e}_{ri}$. Le champ électrique produit par chacune de ces charges est défini par :

$$\vec{E}_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} \vec{e}_{ri}$$

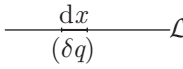
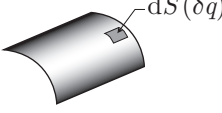
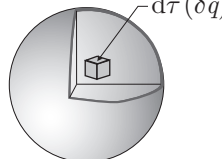
tandis que le champ électrique résultant vaut :


$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \vec{e}_{ri} \quad (1)$$



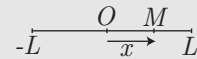
7.1.1.3 Cas d'une distribution de charges

Dans le cas où les charges électriques sont continûment réparties, il convient de définir :

- la *densité linéique* de charge : $\lambda = \frac{\delta q}{dx}$ où δq est la charge portée par un élément de longueur dx d'une distribution linéaire de charges \mathcal{L} . 
- la *densité surfacique* de charges : $\sigma = \frac{\delta q}{dS}$, la surface élémentaire dS contenant la charge δq . 
- la *densité volumique* de charge : $\rho = \frac{\delta q}{d\tau}$, où δq désigne la charge contenue dans un volume élémentaire $d\tau$ de la distribution volumique. 

 Soit \mathcal{L} un segment de droite de longueur $2L$, centré sur un point O . Un point M , tel que $\overline{OM} = x$, présente une densité linéique de charge :

$$\lambda = \lambda_0 e^{-a|x|}$$



où λ_0 et a sont des constantes.
Calculer la charge totale q_{tot} portée par \mathcal{L} .

RÉPONSE Un élément de longueur dx de \mathcal{L} porte une charge élémentaire δq définie à partir de la distribution linéique λ :

$$\lambda = \frac{\delta q}{dx} \Rightarrow \delta q = \lambda dx = \lambda_0 e^{-a|x|} dx$$

auquel cas, q_{tot} représente la somme de toutes les charges élémentaires lorsque x varie de $-L$ à L :

$$q_{\text{tot}} = \lambda_0 \int_{-L}^L e^{-a|x|} dx$$

soit, compte tenu de la parité de la fonction $e^{-a|x|}$:

$$q_{\text{tot}} = 2\lambda_0 \int_0^L e^{-a|x|} dx = 2\lambda_0 \int_0^L e^{-ax} dx \Rightarrow q_{\text{tot}} = \frac{2\lambda_0}{a} (1 - e^{-aL})$$

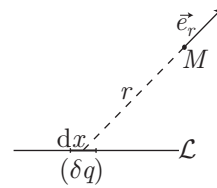
Δ L'exemple précédent montre que $\frac{q_{\text{tot}}}{2L} = \frac{\lambda_0}{aL} (1 - e^{-aL})$ ne peut s'identifier, dans le cas général à $\lambda = \frac{\delta q}{dx}$. En revanche, lorsque la distribution (linéique, surfacique ou volumique) est uniforme (indépendante de son point de mesure), il est tout à fait légitime d'écrire :

$$\lambda = \frac{q_{\text{tot}}}{L_{\text{tot}}} \quad \sigma = \frac{q_{\text{tot}}}{S_{\text{tot}}} \quad \rho = \frac{q_{\text{tot}}}{V_{\text{tot}}}$$

La généralisation du résultat (1) permet de calculer le champ produit par :

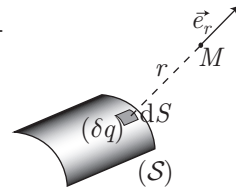
- une distribution linéaire de charges \mathcal{L} , portant une densité linéique λ :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda dx}{r^2} \vec{e}_r$$



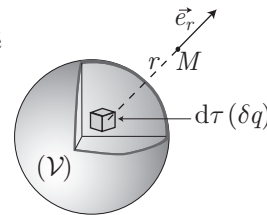
- une distribution surfacique de charges (S) , de densité surfacique σ :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{(S)} \frac{\sigma dS}{r^2} \vec{e}_r$$



- une distribution volumique de charges (V) , de densité volumique ρ :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{(V)} \frac{\rho d\tau}{r^2} \vec{e}_r$$

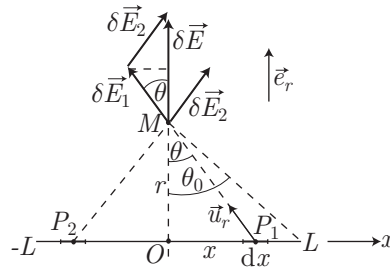


7.1.2 Calcul de champs électriques

7.1.2.1 Distribution linéaire de charges

Soit \mathcal{L} un segment de droite, de longueur $2L$ et centré sur O , portant une charge de densité linéique λ uniforme. Un point P_1 de \mathcal{L} , tel que $\overline{OP_1} = x$, porte une charge élémentaire $\delta q = \lambda dx$ sur une longueur dx de \mathcal{L} , qui produit en M un champ électrique :

$$\delta \vec{E}_1 = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 MP_1^2} \vec{u}_r \Rightarrow \|\delta \vec{E}_1\| = \frac{\lambda dx}{4\pi\epsilon_0 MP_1^2}$$



Un point P_2 , symétrique de P_1 par rapport à O , crée en M un champ $\delta \vec{E}_2$ de même norme que celle de $\delta \vec{E}_1$. C'est pourquoi la somme de ces deux champs vaut :

$$\delta \vec{E} = \delta \vec{E}_1 + \delta \vec{E}_2 = 2 \|\delta \vec{E}_1\| \cos \theta \vec{e}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{dx \cos \theta}{MP_1^2} \vec{e}_r$$

avec :

$$\tan \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \tan \theta \Rightarrow dx = r \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}$$

et :

$$\cos \theta = \frac{r}{MP_1} \Rightarrow \frac{1}{MP_1^2} = \frac{\cos^2 \theta}{r^2}$$

Par suite :

$$\frac{dx \cos \theta}{MP_1^2} = \frac{r d\theta}{\cos^2 \theta} \times \cos \theta \times \frac{\cos^2 \theta}{r^2} = \frac{1}{r} \cos \theta d\theta \Rightarrow \delta \vec{E} = \frac{\lambda \vec{e}_r}{2\pi\epsilon_0 r} \times \cos \theta d\theta$$

L'ensemble des couples de points $\{P_1, P_2\}$ étant reconstitué lorsque θ varie de 0 à θ_0 , tel que $\sin \theta_0 = \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}}$, le champ total produit par \mathcal{L} en un point M , situé à une distance $r = OM$ de \mathcal{L} , vaut :

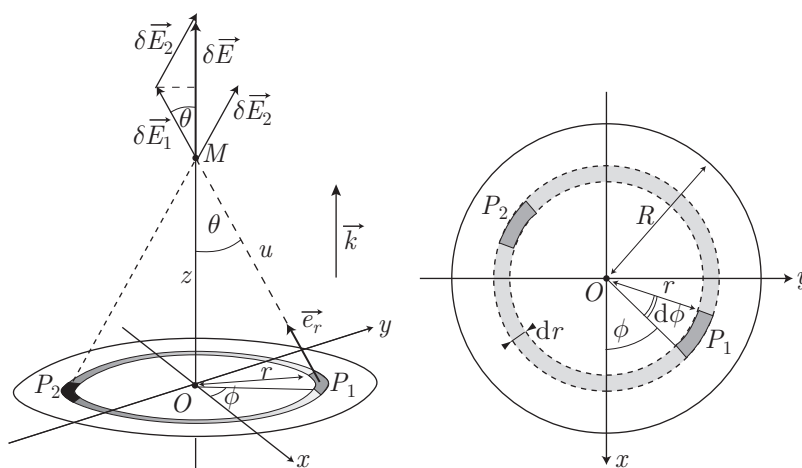
$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{e}_r}{2\pi\epsilon_0 r} \times \int_0^{\theta_0} \cos \theta \, d\theta \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda \vec{e}_r}{2\pi\epsilon_0 r} \sin \theta_0 = \frac{\lambda \vec{e}_r}{2\pi\epsilon_0 r} \times \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \quad (2)$$

L'hypothèse : $L \gg r$, $r^2 + L^2 \simeq L^2$ permet de trouver l'expression du champ produit par un fil très long :

$$\vec{E} = \frac{\lambda \vec{e}_r}{2\pi\epsilon_0 r} \text{ pour } L \gg r \quad (3)$$

7.1.2.2 Distribution surfacique de charges

Soit \mathcal{D} un disque chargé, de rayon R et centré sur O , portant une densité surfacique de charge σ uniforme.



Découpons ce disque en couronnes concentriques, de centre O , de rayons r et d'épaisseur dr . Au voisinage d'un point P_1 d'une telle couronne est définie une surface élémentaire $dS = r \, d\phi \times dr$, portant la charge $\delta q = \sigma \, dS = \sigma \, r \, dr \, d\phi$, qui produit un champ $\delta \vec{E}_1$ en un point M de l'axe Oz :

$$\delta \vec{E}_1 = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 \, MP_1^2} \vec{e}_r = \frac{\sigma \, r \, dr \, d\phi}{4\pi\epsilon_0 \, MP_1^2} \vec{e}_r$$

Soit P_2 un point symétrique de P_1 par rapport à O , qui produit en M un champ $\delta \vec{E}_2$ de même norme que celle de $\delta \vec{E}_1$. Compte tenu de la symétrie de ces deux points, la résultante des champs qu'ils produisent en M est dirigée selon le vecteur unitaire \vec{k} de Oz :

$$\delta \vec{E} = \delta \vec{E}_1 + \delta \vec{E}_2 = 2 \left\| \delta \vec{E}_1 \right\| \cos \theta \vec{k} = \frac{\sigma \vec{k}}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{r \, dr \, \cos \theta}{MP_1^2} \, d\phi$$

où l'on pose :

$$u = MP_1 \Rightarrow u^2 = r^2 + z^2 \Rightarrow 2u \, du = 2r \, dr \Rightarrow r \, dr = u \, du$$

et : $\cos \theta = \frac{z}{u}$. Ce faisant :

$$\delta \vec{E}_1 = \frac{\sigma \vec{k}}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{u \, du}{u^2} \times \frac{z}{u} \times d\phi = \frac{\sigma z \vec{k}}{2\pi\epsilon_0} \frac{du}{u^2} \times d\phi$$

Notamment, l'ensemble des couples de points $\{P_1, P_2\}$ est totalement décrit lorsque ϕ varie de 0 à π , tandis que u évolue de z à $u_1 = \sqrt{R^2 + z^2}$. C'est pourquoi le champ total que ce disque produit en M vaut :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\sigma z \vec{k}}{2\pi\epsilon_0} \int_{u=z}^{u_1} \left[\int_{\phi=0}^{\pi} \frac{du}{u^2} \times d\phi \right] = \frac{\sigma z \vec{k}}{2\pi\epsilon_0} \int_{u=z}^{u_1} \left[\frac{du}{u^2} \times \int_{\phi=0}^{\pi} d\phi \right] \\ &= \frac{\sigma z \vec{k}}{2\pi\epsilon_0} \int_{u=z}^{u_1} \frac{du}{u^2} \times \pi = \frac{\sigma z \vec{k}}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{u} \right]_z^{u_1} \\ &\Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma \vec{k}}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \end{aligned}$$

Dans le cas où $R \gg z$, ce disque s'apparente à un plan infini, qui produit en M le champ électrique :

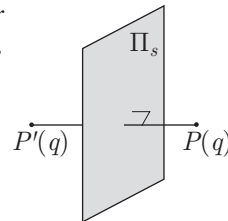
$$\vec{E}_{\text{plan}} = \frac{\sigma \vec{k}}{2\epsilon_0} \text{ pour } R \gg z$$

7.1.3 Symétries et invariants

7.1.3.1 Symétries

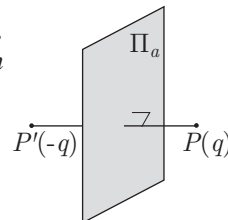
Définition 1 On dit qu'un plan Π_s est un plan de symétrie pour une distribution de charges si tout couple de points P et P' , symétriques par rapport à Π_s , portent la même charge q .

Le champ électrique produit en M par une distribution (\mathcal{D}) de charges appartient aux plans de symétrie passant par M (s'ils existent).



Définition 2 Un plan Π_a est appelé plan d'antisymétrie pour une distribution de charges, si tout couple de points P et P' , symétriques par rapport à Π_a , portent des charges égales en valeur absolue mais de signes contraires.

Le champ électrique produit en M par une distribution (\mathcal{D}) de charges est perpendiculaire aux plans d'antisymétrie de (\mathcal{D}) passant par M (s'ils existent).





Les conclusions précédentes s'appliquent également aux axes de symétrie de (\mathcal{D}) , que l'on préférera utiliser selon les cas, afin de trouver directement la direction du champ électrique en un point :

- s'il existe un axe de symétrie Δ , passant par M , le champ électrique produit en M par (\mathcal{D}) est orienté selon Δ ;
- s'il existe un plan d'antisymétrie (Π_a) passant par M , le champ électrique produit en M par (\mathcal{D}) prend la direction de la perpendiculaire à Π_a .

△ Les éléments de symétrie choisis pour déterminer la direction du champ électrique en un point M doivent nécessairement contenir M .

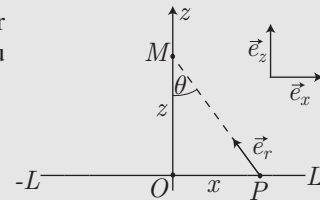


Un segment de droite (Δ) , de longueur $2L$ et centré sur O , porte une densité linéique de charge λ qui dépend du point P où elle est mesurée :

$$\lambda = \alpha x^2 \text{ avec } x = \overline{OP}$$

où α est une constante.

Soit M un point de l'axe Oz perpendiculaire à (Δ) , tel que $OM = z$. On notera \vec{e}_r le vecteur unitaire de \overrightarrow{PM} et $\theta = (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MP})$.



1. Donner la direction du champ électrique \vec{E} que cette distribution produit en M . En déduire l'expression de $E = \|\vec{E}\|$ en fonction de \vec{E} et d'un vecteur unitaire directeur de \vec{E} .
2. Exprimer le champ élémentaire $\delta\vec{E}$ que produit en M un élément, de longueur dx centré sur P , en fonction de x, z, α, dx et \vec{e}_r .
3. En utilisant la loi d'additivité du champ $\vec{E} = \int_{x=-L}^L \delta\vec{E}$, associée aux résultats des deux questions précédentes, déterminer \vec{E} en fonction de $L, z, \alpha, u_0 = \operatorname{argsh}\left(\frac{L}{z}\right)$ et \vec{e}_z . Pour répondre à cette question, on pourra effectuer le changement de variable : $x = z \times \sinh(u) \Rightarrow u = \operatorname{argsh}\left(\frac{x}{z}\right)$ et utiliser l'identité :

$$(\cosh u)^2 = \frac{1 + \cosh(2u)}{2}$$

RÉPONSE

1. L'axe Oz qui passe par M est un axe de symétrie pour la distribution de charges, qui produit par conséquent, en M , un champ électrique \vec{E} de même direction \vec{e}_z que Oz . C'est pourquoi on peut poser :

$$\vec{E} = E \times \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{e}_z = E \times \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{e}_z = E \quad (4)$$

2. Autour du point P , un élément de longueur dx de (Δ) possède une charge :

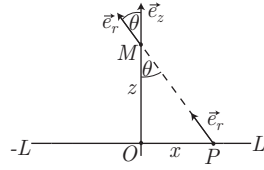
$$\delta q = \lambda dx = \alpha x^2 dx$$

qui produit en M un champ élémentaire :

$$\delta \vec{E} = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 MP^2} \vec{e}_r = \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{x^2 dx}{MP^2} \vec{e}_r$$

avec :

$$MP = \sqrt{x^2 + z^2} \Rightarrow \delta \vec{E} = \underbrace{\frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{x^2 dx}{x^2 + z^2}}_{\delta E = \|\delta \vec{E}\|} \vec{e}_r = \delta E \vec{e}_r \quad (5)$$



3. L'ensemble de la distribution de charges étant décrit lorsque x varie de $-L$ à $+L$, au point M apparaît le champ électrique :

$$\vec{E} = \int_{x=-L}^L \delta \vec{E} = \int_{x=-L}^L \delta E \times \vec{e}_r \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{e}_z = \int_{x=-L}^L \delta E \times \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z \text{ avec } \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = \cos \theta$$

c'est-à-dire, en tenant compte des résultats (4) et (5) :

$$\begin{aligned} E &= \frac{\alpha}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{x^2 \cos \theta dx}{x^2 + z^2} \text{ où } \cos \theta = \frac{z}{MP} = \frac{z}{(x^2 + z^2)^{1/2}} \\ &= \frac{\alpha z}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{x^2 dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

L'intégrale qui apparaît alors peut se calculer par parties :

$$\int_{-L}^L x \times \frac{x dx}{(x^2 + z^2)^{3/2}} = \left[-\frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right]_{-L}^L + \int_{-L}^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{2L}{\sqrt{L^2 + z^2}} + \int_{-L}^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

Quant au changement de variable :

$$x = z \sinh u \Rightarrow dx = z du \cosh u \text{ et } x^2 + z^2 = z^2 [(\sinh u)^2 + 1] = z^2 (\cosh u)^2$$

il fournit :

$$\int_{-L}^L \frac{dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \int_{-u_0}^{u_0} \frac{z \cosh u}{z \cosh u} du = 2u_0 \text{ où } L = z \sinh(u_0) \Rightarrow u_0 = \operatorname{argsh} \left(\frac{L}{z} \right)$$

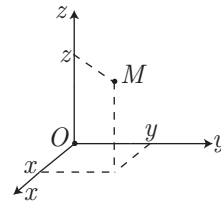
Par suite, le champ électrique produit en M vaut :

$$\vec{E} = \frac{\alpha z}{2\pi\epsilon_0} \times \left[\frac{L}{\sqrt{L^2 + z^2}} + \operatorname{argsh} \left(\frac{L}{z} \right) \right] \vec{e}_z$$

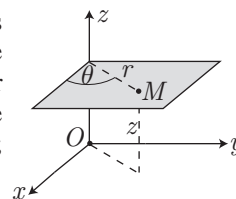
7.1.3.2 Invariants

Selon la géométrie de la distribution de charges, plusieurs systèmes de coordonnées seront privilégiés.

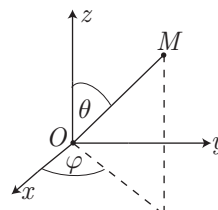
- **Les coordonnées cartésiennes** (x, y, z) sont particulièrement adaptées aux distributions de charges contenues dans un des plans (Ox, Oy) , (Ox, Oz) , (Oy, Oz) . Les composantes du champ \vec{E} dépendent *a priori* des coordonnées x, y et z du point M où \vec{E} est calculé, sauf si une translation du système de charges laisse invariante la distribution de charges. Par exemple, si la distribution de charges est infinie dans la direction de l'axe (Oy) , une translation selon (Oy) ne modifie rien, de sorte que \vec{E} ne dépend pas de y : $\vec{E} \equiv \vec{E}(x, z)$.



- **Les coordonnées cylindriques** (r, θ, z) sont bien adaptées aux distributions axiales. Par exemple, si la distribution de charge est située sur l'axe Oz , une rotation de M autour de l'axe Oz , d'un angle θ (ou encore, une rotation de l'axe Oz , d'un angle $-\theta$) laisse invariante la situation physique ; le champ \vec{E} ne dépend pas du paramètre θ : $\vec{E} \equiv \vec{E}(r, z)$.



- **Les coordonnées sphériques** sont essentiellement employées lorsque la distribution de charges se répartit selon une sphère ou un disque. Par exemple, si une rotation d'un angle φ de M autour de Oz (ou une rotation de Oz d'un angle $-\varphi$) laisse invariante la distribution de charges, \vec{E} ne dépend pas de φ : $\vec{E} \equiv \vec{E}(r, \theta)$.



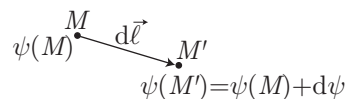
7.1.4 Potentiel électrostatique

7.1.4.1 Gradient d'un champ scalaire

On appelle *champ scalaire* une fonction $\psi(M)$ qui dépend de la position du point M où elle est mesurée.

Définition 3 Soient deux points M et M' , infiniment voisins et tels que $\overrightarrow{MM'} = d\vec{\ell}$, où un champ scalaire prend les valeurs $\psi(M)$ et $\psi(M')$. La différence $d\psi = \psi(M') - \psi(M)$ est donnée à l'aide d'un vecteur, $\overrightarrow{\text{grad}}\psi$, appelé gradient de ψ :

$$d\psi = (\overrightarrow{\text{grad}}\psi) \cdot d\vec{\ell}$$



Le gradient de ψ est aussi noté : $\overrightarrow{\text{grad}}\psi \equiv \vec{\nabla}\psi$.

Le système de coordonnées choisi pour repérer M détermine l'expression des composantes de $\overrightarrow{\text{grad}}\psi$ et de $d\vec{\ell}$.

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial\psi}{\partial z} \vec{e}_z$$

En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial\psi}{\partial z} \vec{e}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi$$

7.1.4.2 Définition et calcul de potentiels

La définition de l'énergie potentielle \mathcal{E}_p associée à la force conservative \vec{f}_c :

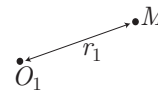
$$\vec{f}_c \cdot d\vec{\ell} = -d\mathcal{E}_p \Rightarrow \vec{f}_c \cdot d\vec{\ell} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \vec{f}_c = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p$$

adjointe à la définition du champ électrostatique \vec{E} à l'origine de la force $\vec{f}_c = q\vec{E}$, permet de montrer qu'il existe une fonction V , appelée *potentiel électrostatique*, telle que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Le potentiel électrostatique, produit en un point M par une charge q_1 située en O_1 , est donné par :

$$V = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ avec } r = O_1M$$



Un ensemble de charges, q_i , situées aux points O_i , produit en M un potentiel électrostatique :

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i} \text{ avec } r_i = O_iM$$

À l'instar du champ électrostatique, cette loi d'additivité se généralise aux distributions continues de charges (linéiques, surfaciques ou volumiques) :

$$V = \int_{\mathcal{L}} \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ ou } : V = \iint_{(S)} \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 r} \text{ ou encore } : V = \iiint_{(V)} \frac{\rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r}$$



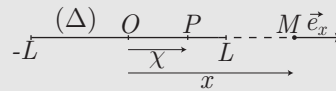
Un segment de droite (Δ), de longueur $2L$ et centré sur O , porte des charges de densité linéique λ uniforme.

Dans la direction de Δ se trouve un point M repéré

par $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$, avec $x > L$, tandis qu'un point P de

la distribution de charges est repéré par sa position :

$\overrightarrow{OP} = \chi\vec{e}_x$, avec : $\chi \in [-L, L]$.



1. Exprimer le potentiel électrostatique δV que produit un élément $d\chi$ de la distribution de charge (Δ) sur le point M .
2. Calculer le potentiel V créé en M par l'ensemble des charges portées par (Δ).
3. En déduire l'expression du champ électrostatique \vec{E} produit en M .
4. On considère, dorénavant, que L tend vers zéro tandis que la charge totale (q) portée par (Δ) demeure inchangée. Déterminer, en fonction de q et de x , le potentiel et le champ électrostatiques créés en M . Commenter ces résultats.

RÉPONSE

1. Le point P se trouvant à une distance $r = PM = x - \chi$ du point M , la charge élémentaire $\delta q = \lambda d\chi$ y produit un potentiel :

$$\delta V = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{d\chi}{x - \chi}$$

2. Aussi, l'ensemble des points P , repérés par $\chi \in [-L, +L]$, crée en M un potentiel :

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{d\chi}{x-\chi} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [-\ln(x-\chi)]_{-L}^L \Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{x+L}{x-L}\right) \quad (6)$$

3. En coordonnées cartésiennes, la relation entre le champ \vec{E} et le potentiel électrostatiques s'écrit :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow \vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

où V ne dépend que de x , en raison de quoi :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x = -\frac{\lambda \vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0} \frac{d}{dx} [\ln(x+L) - \ln(x-L)] \quad (7)$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{x-L} - \frac{1}{x+L} \right] \vec{e}_x \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{L}{x^2 - L^2} \vec{e}_x \quad (8)$$

4. La charge totale portée par le segment de droite vaut :

$$q = \lambda \times 2L \Rightarrow \lambda = \frac{q}{2L}$$

auquel cas les résultats (6) et (8) deviennent :

$$V = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L} \times \ln\left(\frac{1+L/x}{1-L/x}\right) \text{ et } \vec{E} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L} \left[\frac{1}{x} \left(1 - \frac{L}{x}\right)^{-1} - \frac{1}{x} \left(1 + \frac{L}{x}\right)^{-1} \right] \vec{e}_x$$

Or, lorsque $L \ll x$, l'emploi de développements limités se justifie :

$$\begin{cases} \ln\left(1 + \frac{L}{x}\right) \simeq \frac{L}{x} \\ \ln\left(1 - \frac{L}{x}\right) \simeq -\frac{L}{x} \end{cases} \Rightarrow V = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L} \left[\ln\left(1 + \frac{L}{x}\right) - \ln\left(1 - \frac{L}{x}\right) \right] \Rightarrow V \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x}$$

et :

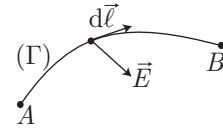
$$\begin{cases} \left(1 - \frac{L}{x}\right)^{-1} \simeq 1 + \frac{L}{x} \\ \left(1 + \frac{L}{x}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{L}{x} \end{cases} \Rightarrow \vec{E} \simeq \frac{q}{8\pi\epsilon_0 L x} \left[\left(1 + \frac{L}{x}\right) - \left(1 - \frac{L}{x}\right) \right] \vec{e}_x \Rightarrow \vec{E} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{e}_x$$

Ce potentiel et ce champ électrostatiques sont ceux que produirait, au point M , une charge ponctuelle q , placée en O , tel que $OM = x$; cette situation équivaut donc à celle où, L devenant infiniment petit, la charge $q = 2\lambda L$ se trouve confinée en O .

7.1.4.3 Circulation du champ électrique

Définition 4 On appelle circulation C du champ électrique \vec{E} le long d'un parcours Γ liant deux points A et B la grandeur :

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



Compte tenu de la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ et de la définition du gradient :

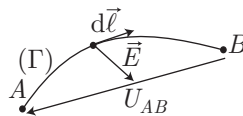
$$dV = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell}$$

la circulation C peut aussi s'écrire :

$$C = - \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B dV = V_A - V_B$$

où apparaît la différence de potentiel : $U_{AB} = V_A - V_B$:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

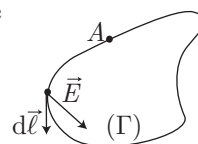


Remarque – Si, le long de Γ , le champ \vec{E} est uniforme, la tension $U_{AB} = V_A - V_B$ vaut simplement :

$$U_{AB} = \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB}$$

Le long d'un parcours fermé Γ , la circulation du champ électrique est nulle :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \text{ car } \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_A$$



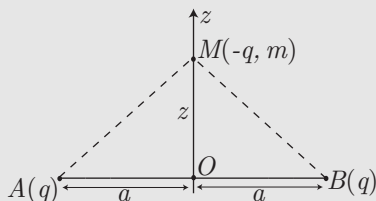
7.1.5 Énergie potentielle électrostatique

Dans un champ extérieur \vec{E} , qui dérive d'un potentiel V , une charge électrique q présente une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = q \times V$$



Deux charges ponctuelles identiques (q) sont placées aux points A et B d'un segment $[AB]$ centré sur O et de longueur $2a$. Une autre charge ponctuelle ($-q$) est placée en un point M de l'axe Oz perpendiculaire à $[AB]$, à une cote $OM = z$. La charge ponctuelle située en M a pour masse m et on négligera l'influence de la pesanteur sur son mouvement. On supposera, en outre, que sa présence reste sans effet sur les champs et potentiels créés par A et B .



1. Déterminer, en fonction de q , a et z , le potentiel créé en M par les charges situées en A et B .
2. Montrer qu'il existe, pour M , une position d'équilibre stable repérée par $z = z_0$.
3. Le point M étant légèrement écarté de cette position d'équilibre, il effectue des oscillations de pulsation ω . Exprimer ω en fonction de q , a et m .

RÉPONSE

1. La distance AM valant $\sqrt{a^2 + z^2}$, la charge q placée en A crée le potentiel :

$$V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

Étant donné qu'il en va de même pour la charge q placée en B , il s'ensuit que le potentiel créé en M par ces deux charges vaut :

$$V = 2V_A = \frac{q}{2\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$$

2. La charge $-q$ placée en M acquiert une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = -qV = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \times (a^2+z^2)^{-1/2}$$

dont la dérivée est donnée par :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dz} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}}$$

Il existe donc une position d'équilibre, à la cote $z = z_0$, qui rend *extremum* cette énergie potentielle, c'est-à-dire telle que :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_p}{dz} \right|_{z_0} = 0 \Rightarrow \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{z_0}{(a^2+z_0^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow z_0 = 0$$

En outre :

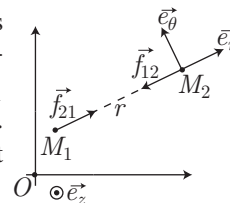
$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dz^2} \right|_{z_0} &= \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(a^2+z_0^2)^{3/2}} - \frac{3z_0^2}{(a^2+z_0^2)^{5/2}} \right] = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{a^2-2z_0^2}{(a^2+z_0^2)^{5/2}} \\ &\Rightarrow \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dz^2} \right|_{z_0=0} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3} > 0 \end{aligned}$$

suffit à montrer qu'en $z = z_0$ la fonction $\mathcal{E}_p(z)$ admet un *minimum* qui correspond, de surcroît, à la position d'un équilibre stable.

3. La pulsation ω des oscillations qui se produisent au voisinage de la position d'équilibre stable s'obtient directement à l'aide de la relation :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \times \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dz^2} \right|_{z_0}} \Rightarrow \omega = \frac{q}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 m a^3}}$$

Soient M_1 et M_2 deux points portant les charges q_1 et q_2 , dans un référentiel galiléen de centre O . On note $r = \overline{M_1M_2}$ la distance qui les sépare, \vec{e}_r le vecteur unitaire de $\overline{M_1M_2}$, \vec{f}_{12} et \vec{f}_{21} les forces que M_1 et M_2 exercent mutuellement l'un sur l'autre. Le travail élémentaire des forces \vec{f}_{12} et \vec{f}_{21} , au demeurant conservatives, est alors défini par :



$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{f}_{21} \cdot d\overline{OM_1} + \vec{f}_{12} \cdot d\overline{OM_2} = \vec{f}_{12} \cdot (d\overline{OM_2} - d\overline{OM_1}) \text{ car } \vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12} \\ &= \vec{f}_{12} \cdot d\overline{M_1M_2} \end{aligned}$$

où $\vec{f}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ et $d\overline{M_1M_2} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z$. Par conséquent :

$$\delta W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{dr}{r^2}$$

Or, l'énergie potentielle \mathcal{E}_p associée à ce travail est définie par :

$$d\mathcal{E}_p = -\delta W = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{-dr}{r^2}$$

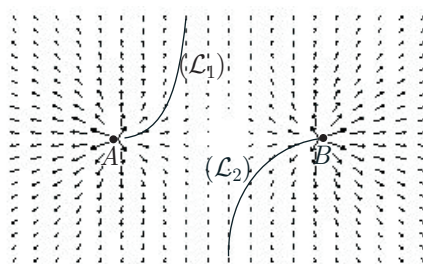
c'est-à-dire, en convenant que $\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}_p = 0$:

$$\int_0^{\mathcal{E}_p} d\mathcal{E}_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{-dr}{r^2} \Rightarrow \mathcal{E}_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

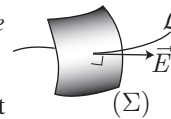
7.1.6 Surfaces équipotentielles et lignes de champ

Définition 5 Une ligne de champ \mathcal{L} est une courbe en tout point tangente au champ électrique \vec{E} .

Par exemple, quelques lignes de champ (\mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2) créées par deux charges identiques, situées en A et B , sont reproduites sur la figure ci-dessous.



Définition 6 Une surface équipotentielle (Σ) est une surface sur laquelle les points possèdent tous le même potentiel électrostatique V .

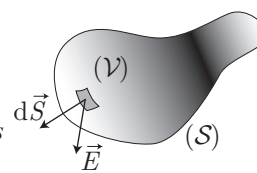


Toute ligne de champ \mathcal{L} , coupant une surface équipotentielle (Σ), est perpendiculaire à (Σ) en ce point d'intersection.

7.1.7 Théorème de Gauss

Définition 7 On appelle flux du champ électrique \vec{E} , à travers une surface fermée (S), la grandeur :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$



l'élément de surface $d\vec{S}$ devant toujours être orienté vers l'extérieur du volume (V) enfermé à l'intérieur de (S).

7.1.7.1 Énoncé du théorème de Gauss

Soit q_i la charge électrique enfermée à l'intérieur d'une surface fermée (S), le théorème de Gauss stipule que :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_i}{\epsilon_0}$$

Remarque – Les charges extérieures à (S) n'interviennent pas dans le flux Φ .

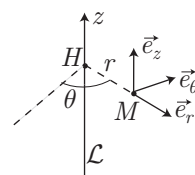


L'utilisation du théorème de Gauss, en vue de calculer un champ électrique, procède en plusieurs étapes :

- la recherche de la direction de \vec{E} (à l'aide des axes de symétrie ou des plans d'antisymétrie) et des paramètres dont \vec{E} dépend réellement.
- la détermination de (S) qui permettra le calcul de Φ le plus aisé. Dans la pratique, (S) est composé (en totalité ou en partie) du surfaces sur lesquelles $\|\vec{E}\|$ demeure constant (ce qui justifie le développement de l'étape précédente) ; l'expression de Φ est alors établie.
- le calcul de q_i , à partir duquel le théorème de Gauss : $\Phi = \frac{q_i}{\varepsilon_0}$ permet de trouver \vec{E} .

7.1.7.2 Champ créé par un fil infini

Soit \mathcal{L} un fil infini portant des charges, de densité linéique λ uniforme. La géométrie de cette distribution suggère l'emploi de coordonnées cylindriques, à partir desquelles le champ électrique produit en M s'écrit *a priori* : $\vec{E} = \vec{E}(r, \theta, z)$. Pour appliquer le théorème de Gauss, il convient de procéder en trois étapes.



- Soit H le projeté orthogonal de M sur \mathcal{L} , l'axe HM est un axe de symétrie pour la distribution de charges, et passe par M . Donc \vec{E} prend la direction du vecteur unitaire \vec{e}_r de \overrightarrow{HM} :

$$\vec{E} = E(r, \theta, z) \vec{e}_r$$

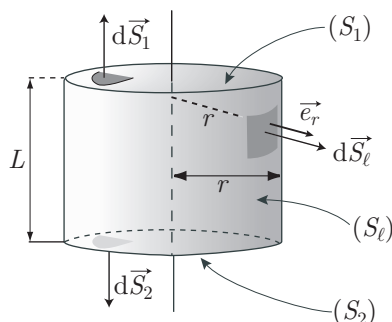
Or, le fil étant infini, θ et z laissent \vec{E} invariant, de sorte que \vec{E} ne dépend en fait que de r :

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

- De ce qui précède, il ressort que la « surface de Gauss » (S) est partiellement composée d'une surface cylindrique S_ℓ (où $E(r)$ est constant car r l'est) et de deux surfaces de base, S_1 et S_2 , assurant la fermeture de (S) . Le flux Φ de \vec{E} à travers (S) peut ainsi être décomposé en trois termes :

$$\Phi = \int_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell + \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2$$

où $\vec{E} \perp d\vec{S}_1$ et $\vec{E} \perp d\vec{S}_2$ (car $\vec{E} = E \vec{e}_r$) permet d'annuler les deux derniers termes. En outre, $d\vec{S}_\ell$ étant colinéaire à \vec{E} , $\vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = E \times dS_\ell$, où $E(r)$ est constant sur S_ℓ (car E ne dépend que de r , au demeurant constant). C'est pourquoi :



$$\Phi = \iint_{(S_\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = \iint_{(S_\ell)} E \times dS_\ell = E \times \int_{(S_\ell)} dS_\ell = E \times S_\ell$$

où $S_\ell = 2\pi r \times L$ désigne la valeur de la surface latérale S_ℓ , de longueur $2\pi r$ et de hauteur L . Par suite :

$$\Phi = E \times 2\pi r L$$

- La densité linéique λ de charges étant uniforme, la charge enfermée à l'intérieur de (S) vaut :

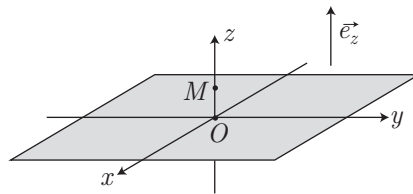
$$q_i = \int_0^L \lambda d\ell = \lambda \int_0^L d\ell = \lambda \times L$$

Ce faisant, le théorème de Gauss indique que :

$$\Phi = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \times 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r$$

7.1.7.3 Champ créé par un plan infini

Un plan $\mathcal{P}(Ox, Oy)$, infini dans ces deux directions, porte des charges électriques de densité surfacique σ uniforme. On cherche le champ électrique \vec{E} créé par cette distribution en un point M , situé à une distance $OM = z$ de ce plan.



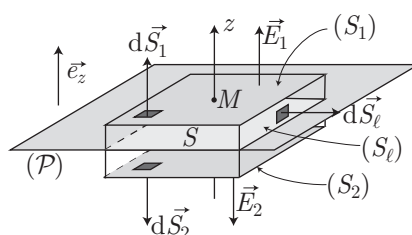
- Étant donné que \mathcal{P} est infini, l'axe Oz contenant M est un axe de symétrie pour la distribution de charges qui peut, du reste, être décrite par un système de coordonnées cartésiennes x, y et z . Par conséquent \vec{E} prend la direction du vecteur unitaire \vec{e}_z de Oz :

$$\vec{E} = E(x, y, z) \vec{e}_z$$

Une translation du plan (infini) dans les directions Ox et Oy laisse invariant le champ \vec{E} , en raison de quoi ce vecteur ne dépend ni de x ni de y :

$$\vec{E} = E(z) \times \vec{e}_z$$

- La « surface de Gauss » (S) sur laquelle doit être calculé le flux de \vec{E} doit alors comporter des parties où z demeure constant ; il s'agit des surfaces (S_1) et (S_2) planes, parallèles à (Ox, Oy) et de même section S .



La surface (S) est ensuite fermée à l'aide d'une surface latérale S_ℓ telle que $d\vec{S}_\ell \perp \vec{E}$, c'est-à-dire : $\vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = 0$.

En outre, pour des raisons de symétrie (S_2) se trouve à une distance z de (P) de sorte que, sur (S_2) , le champ électrique s'écrit : $\vec{E}_2 = E(-z) \vec{e}_z = -E(z) \vec{e}_z$. On désignera par $\vec{E}_1 = E(z) \vec{e}_z$ le champ en tout point de (S_1) .

Ce faisant, le flux de \vec{E} à travers (S) comporte trois parties :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_1)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{(S_\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell$$

où $\vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = 0$ permet d'annuler le dernier terme. En revanche :

$$\begin{cases} d\vec{S}_1 = dS_1 \vec{e}_z \\ \vec{E}_1 = E(z) \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = E(z) \times dS_1$$

et :

$$\begin{cases} d\vec{S}_2 = -dS_2 \vec{e}_z \\ \vec{E}_2 = -E(z) \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = E(z) \times dS_2$$

Or, étant donné que $E(z)$ demeure constant sur S_1 et sur S_2 (où z est constant), l'expression de Φ se simplifie :


$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{(S_1)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{(S_1)} E(z) dS_1 + \iint_{(S_2)} E(z) dS_2 \\ &= E(z) \times \iint_{(S_1)} dS_1 + E(z) \times \iint_{(S_2)} dS_2 = E(z) \times (S_1 + S_2) \\ &\Rightarrow \Phi = 2 E(z) \times S \text{ car } S_1 = S_2 = S \end{aligned}$$

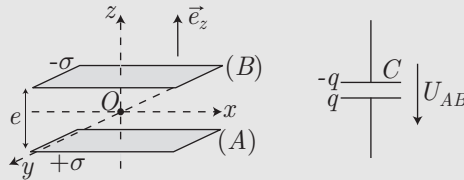
- La charge enfermée dans (S) est celle contenue sur la surface S du plan \mathcal{P} , auquel cas elle vaut :

$$q_i = \iint_{(S)} \sigma dS = \sigma \iint_{(S)} dS = \sigma \times S$$

De cette manière, le théorème de Gauss fournit :

$$\Phi = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2 E(z) \times S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z$$

 Soient deux plaques de surface S , supposée très grande et distantes de e . La plaque inférieure (A) porte une charge q de densité surfacique $\sigma = \frac{q}{S}$ uniforme, tandis que la plaque supérieure (B) porte une charge $-q$, de densité $-\sigma$ uniforme.



1. Donner les caractéristiques du champ électrostatique \vec{E} créé par cette distribution de charges, loin des bords des plaques.
2. En utilisant le théorème de Gauss, établir les expressions de \vec{E} ; on distinguera les cas : $|z| > \frac{e}{2}$ et $|z| < \frac{e}{2}$.
3. Exprimer, en fonction de q , e , S et ϵ_0 (permittivité électrique du vide), la différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$.
4. Un tel système réalise un condensateur de capacité $C = \frac{q}{U_{AB}}$. Déterminer cette capacité C en fonction de ϵ_0 , S et e .

RÉPONSE

1. Soit M un point de l'axe Oz , qui constitue dès lors un axe de symétrie pour les plaques chargées, supposées infiniment grandes, afin d'ignorer l'effet des bords ; le champ \vec{E} est orienté selon \vec{e}_z :

$$\vec{E} = E(x, y, z) \times \vec{e}_z$$

En outre, une translation des plaques dans les directions de \vec{e}_x et de \vec{e}_y laisse invariant le champ électrique, en conséquence de quoi \vec{E} ne dépend que de z :

$$\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$$

De plus, compte tenu de l'antisymétrie des plaques par rapport au plan (Ox, Oy) , la fonction $E(z)$ est impaire :

$$E(-z) = -E(z)$$

2. L'étude précédente montre que le théorème de Gauss fait intervenir des surfaces sur lesquelles $E(z)$ est constant, c'est-à-dire caractérisées par $z = \text{cte}$; il s'agit de plans (de section s) parallèles à (Ox, Oy) .

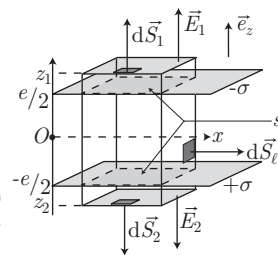
Choisissons ces deux plans (S_1 et S_2) aux cotes respectives $z_1 > \frac{e}{2}$ et $z_2 = -z_1$, de sorte que :

$$\vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = E(z_1) \times dS_1$$

et

$$\vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = E(z_1) \times dS_2$$

Aussi, en introduisant la surface latérale S_ℓ , sur laquelle $\vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = 0$ car $\vec{E} \perp d\vec{S}_\ell$, le flux du champ électrique à travers la surface parallélépipédique fermée (S) vaut :



$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_1)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \underbrace{\iint_{(S_\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell}_0 \\ &= \iint_{(S_1)} E(z_1) \times dS_1 + \iint_{(S_2)} E(z_1) \times dS_2 = E(z_1) \times \left(\iint_{(S_1)} dS_1 + \iint_{(S_2)} dS_2 \right) \end{aligned}$$

Les surfaces S_1 et S_2 ayant la même valeur s , il s'ensuit que :

$$\Phi = E(z_1) \times 2s$$

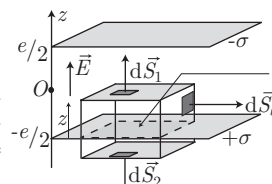
Quant à la charge q_i contenue à l'intérieur de cette surface fermée (S), elle est composée de la charge $q_1 = \sigma s$ de la plaque inférieure et de la charge $q_2 = -\sigma s$ de la plaque supérieure :

$$q_i = q_1 + q_2 = 0$$

Le théorème de Gauss devient ainsi :

$$\Phi = \frac{q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z_1) \times 2s = 0 \Rightarrow E(z_1) = 0 \text{ pour } |z_1| > \frac{e}{2}$$

De même, considérons une surface fermée (S') composée de la surface S_2 , sur laquelle le champ est nul (conformément au résultat précédent), de la face S_1 située entre les deux plaques, et d'une surface latérale S_ℓ refermant (S') et sur laquelle $\vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = 0$ car $\vec{E} \perp d\vec{S}_\ell$.



Le flux du champ électrostatique à travers une telle surface est alors défini par :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{(S')} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_2}_0 + \iint_{(S_\ell)} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell}_0 \\ &= \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{(S_1)} E(z) \times dS_1 = E(z) \times \iint_{(S_1)} dS_1 = E(z) \times s \end{aligned}$$

La charge q'_i contenue à l'intérieur de (S') est intégralement située sur la surface s de la plaque inférieure, auquel cas :

$$q'_i = \sigma \times s$$

Par suite, le théorème de Gauss stipule que :

$$\Phi = \frac{q'_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z) \times s = \frac{\sigma \times s}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ pour } |z| < \frac{e}{2}$$

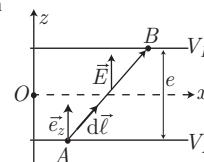
3. Considérons deux points A et B , situés respectivement sur les plaques inférieure et supérieure (mais pas nécessairement sur la verticale Oz), portés aux potentiels V_A et V_B .

La différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$ est alors donnée par la circulation de \vec{E} le long du chemin Γ liant A et B :

$$U_{AB} = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

où $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$ est uniforme, de sorte que :

$$U_{AB} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \cdot \int_A^B d\vec{\ell} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} = \frac{q e}{S \epsilon_0} \text{ car } \sigma = \frac{q}{S} \text{ et } \vec{e}_z \cdot \overrightarrow{AB} = e$$



4. De cette étude découle directement l'expression de la capacité C du condensateur ainsi réalisé :

$$C = \frac{q}{U_{AB}} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

7.1.7.4 Application à la gravitation

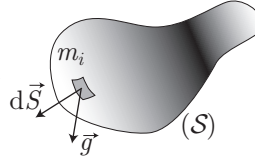
Le champ électrique produit par une charge ponctuelle q s'écrit : $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, c'est-à-dire : $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$, avec $\alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$. Aussi, le théorème de Gauss peut-il se présenter sous la forme suivante :

$$\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \Phi_E = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \alpha_i \text{ où } \alpha_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}$$

De même, le champ gravitationnel \vec{g} produit par une masse ponctuelle m vaut :

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2} \vec{e}_r = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r \text{ avec } \alpha = -Gm$$

et c'est la raison pour laquelle le théorème de Gauss peut être étendu au flux Φ_g du champ gravitationnel à travers une surface fermée (S) , à l'intérieur de laquelle se trouve une masse totale m_i :



$$\Phi_g = \iint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi Gm_i$$

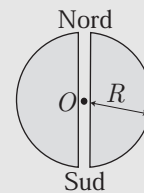


On suppose la Terre sphérique, de rayon R , de centre O et de masse M uniformément répartie en volume avec une densité volumique ρ .

- Déterminer, en coordonnées sphériques, les caractéristiques du champ gravitationnel \vec{g} produit en un point M de l'espace, tel que $\vec{OM} = r \vec{e}_r$.
- En appliquant le théorème de Gauss, retrouver les expressions de \vec{g} lorsque $r > R$ et $r < R$.
- Un tunnel, passant par O , est creusé dans la Terre selon l'axe des pôles (ce qui permet de s'affranchir de la rotation de la Terre).

Un point M , de masse m , est assujéti à se déplacer radialement et sans frottements, dans ce tunnel. On note $r = OM$ la distance séparant M de O .

- Établir l'équation différentielle satisfaite par r , pour $r < R$.
- En déduire, en fonction de G , M et R , la période des oscillations que peut effectuer ce point autour de O .



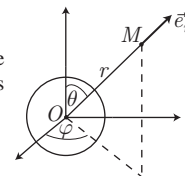
RÉPONSE

- Tout axe passant par O et M est un axe de symétrie pour la Terre. La direction du vecteur unitaire \vec{e}_r de \vec{OM} est par conséquent aussi celle du champ de gravitation :

$$\vec{g} = g(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

En coordonnées sphériques, toute rotation d'un angle θ ou φ de la Terre laisse invariante la distribution de masse, auquel cas le champ \vec{g} ne dépend pas de ces paramètres :

$$\vec{g} = g(r) \times \vec{e}_r$$

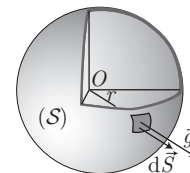


- Le théorème de Gauss fait intervenir une surface fermée caractérisée par $r = \text{cte}$, afin que $g(r)$ y demeure constant ; il s'agit d'une sphère (S) , de rayon r , centrée sur O , dont chaque élément de surface $d\vec{S}$ est colinéaire à \vec{e}_r , et donc à \vec{g} .

Ce faisant, le flux de \vec{g} à travers (S) est défini par :

$$\Phi_g = \iint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} g(r) \times dS = g(r) \times \iint_{(S)} dS = g(r) \times S$$

où $S = 4\pi r^2$ désigne la surface d'une sphère de rayon r .



- Lorsque $r > R$, la masse totale m_i contenue dans (S) s'identifie à la masse de la Terre, auquel cas le théorème de Gauss stipule que :

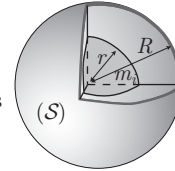
$$\Phi_g = -4\pi Gm_i \Rightarrow g(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi GM \Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$$

Remarque – Cette expression correspond également à celle du champ gravitationnel produit en M par une masse ponctuelle située en O . Ce constat justifie, en mécanique, l'assimilation d'une planète à une masse ponctuelle concentrée en son centre.

- Lorsque $r < R$, la masse m_i contenue dans (S) ne peut s'identifier à la masse M de la Terre, mais est calculable à partir de la densité volumique $\mu = \frac{\delta m}{d\tau}$, supposée uniforme :

$$m_i = \iiint_{(V)} \mu d\tau = \mu \iiint_{(V)} d\tau = \mu \times V$$

où $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ désigne le volume de la sphère de rayon r , contenue dans (S) .



De même, la masse de la Terre est donnée par :

$$M = \mu \times V_{\text{Terre}} = \mu \times \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \mu = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

C'est pourquoi :

$$m_i = \frac{3M}{4\pi R^3} \times \frac{4\pi r^3}{3} = M \times \frac{r^3}{R^3}$$

d'où découle l'expression mathématique du théorème de Gauss :

$$\Phi_g = -4\pi G m_i \Rightarrow g(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi G M \times \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM}{R^3} \times r \vec{e}_r$$

3. (a) Le point M est repéré par sa position $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$, à laquelle est associée une accélération $\vec{\gamma} = \ddot{r} \vec{e}_r$, en l'absence de rotation de M autour de O . En outre, $r < R$ soumet M à une force :

$$\vec{f} = m \vec{g} = -\frac{GMm}{R^3} \times r \vec{e}_r$$

respectant la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \vec{\gamma} = \vec{f} \Rightarrow m \ddot{r} = -\frac{GMm}{R^3} r \Rightarrow \ddot{r} + \frac{GM}{R^3} r = 0$$

- (b) Étant donné le signe positif du coefficient $\frac{GM}{R^3}$, cette équation différentielle admet une solution harmonique qui traduit des oscillations, autour de O , avec une pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

c'est-à-dire une période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

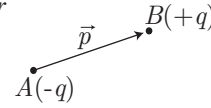
7.1.8 Dipôle électrostatique

7.1.8.1 Potentiel et champ créés

Définition 8 On appelle *dipôle électrostatique* un ensemble de deux charges ponctuelles, de même valeur absolue mais de signe opposé, placées en deux points distincts.

Définition 9 Soient deux points A et B , portant les charges respectives $-q$ et $+q$; on appelle moment dipolaire \vec{p} la grandeur vectorielle :

$$\vec{p} = q \times \overrightarrow{AB}$$

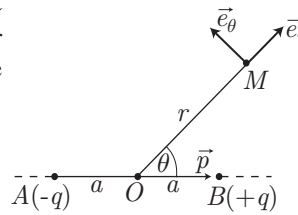


Bien que l'unité légale de $\|\vec{p}\|$ soit le $C \cdot m$, on lui préfère souvent, en chimie, le debye :

$$1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C} \cdot \text{m}$$

Soit un dipôle électrostatique constitué par des charges $-q$ et q , situées aux points respectifs A et B , de moment dipolaire $\vec{p} = q \times \overrightarrow{AB}$, de norme : $p = \|\vec{p}\| = q \times 2a$, car $AB = 2a$. On note O le milieu de $[AB]$ et un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées polaires r et θ . Les potentiels V_A et V_B créés en M par A et B valent :

$$V_A = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 AM} \text{ et } V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM}$$



avec :

$$AM = (r^2 + 2ar \cos \theta + a^2)^{1/2} \text{ et } BM = (r^2 - 2ar \cos \theta + a^2)^{1/2}$$

c'est-à-dire, en se satisfaisant d'un développement limité du premier ordre en $\frac{a}{r}$ (lorsque $r \gg a$) :

$$\frac{1}{AM} \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta\right) \text{ et } \frac{1}{BM} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta\right)$$

Aussi, le potentiel électrostatique V créé en M par le dipôle vaut-il :

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2a \cos \theta}{r^2} \Rightarrow V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (9)$$

En remarquant que $\vec{p} \cdot \vec{e}_r = p \cos \theta$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{e}_r$, cette expression possède également une forme implicite :

$$V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Quant au champ électrostatique \vec{E} , produit en M par ce dipôle, il s'obtient à l'aide de la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

d'où se déduisent les composantes polaires de \vec{E} :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \text{ et } E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3}$$

Remarque – En coordonnées polaires, le moment dipolaire a pour composantes :

$$\vec{p} = p \cos \theta \vec{e}_r - p \sin \theta \vec{e}_\theta \Rightarrow p \sin \theta \vec{e}_\theta = p \cos \theta \vec{e}_r - \vec{p}$$

de sorte que :

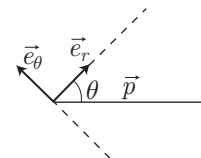
$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

s'écrit aussi :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3p \cos \theta \vec{e}_r - \vec{p})$$

où : $\vec{p} \cdot \vec{e}_r = p \cos \theta$ conduit à :

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \times \vec{e}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



 Le potentiel V et le champ électrostatique $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$ créés par un dipôle valent :

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}, E_r = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \text{ et } E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3}$$

1. Représenter l'allure des équipotentielles associées à ce dipôle, et notamment l'équipotentielle $V = 0$.
2. On note $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$ un élément d'une ligne de champ \mathcal{L} . Établir une équation liant θ , r , dr et $d\theta$. En intégrant cette équation, montrer que les lignes de champ sont décrites par la relation :

$$r = r_0 \sin \theta \text{ où } r_0 = \text{cte}$$

Représenter l'allure de quelques lignes de champ.

3. Soit M un point de l'espace où passent une ligne de champ \mathcal{L} et une équipotentielle \mathcal{V} . Montrer qu'un élément $d\vec{\ell}$, appartenant à \mathcal{V} est perpendiculaire à \mathcal{L} .

RÉPONSE

1. Une équipotentielle $V = V_0 \neq 0$ admet pour équation polaire :

$$V_0 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{A \cos \theta} \text{ où } A = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 V_0} = \text{cte}$$

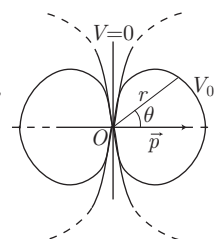
Cette relation montre que, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $A > 0$, r diminue avec θ , jusqu'à s'annuler pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

En outre, l'équipotentielle $V_0 = 0$ vérifie :

$$0 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

Cette équipotentielle est donc confondue avec l'axe Oy perpendiculaire à \vec{p} .

2. Si $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$ appartient à une ligne de champ, ce vecteur doit être colinéaire à



$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\det(\vec{E}, d\vec{\ell}) = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} E_r & dr \\ E_\theta & r d\theta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow r E_r d\theta - E_\theta dr = 0$$

$$\Rightarrow \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2r \cos \theta d\theta - \sin \theta dr) = 0$$

soit encore :

$$2r \cos \theta d\theta = \sin \theta dr \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta}$$

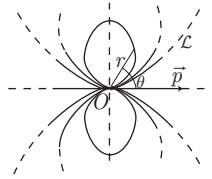
En remarquant que $d(\sin \theta) = \cos \theta d\theta$, cette équation s'écrit aussi :

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta} \Rightarrow d(\ln r) = 2 d(\ln \sin \theta) = d(\ln \sin^2 \theta)$$

Ce faisant, il existe une constante $K = \ln r_0$ telle que :

$$\ln r = \ln(\sin^2 \theta) + \ln r_0 \Rightarrow r = r_0 \sin^2 \theta$$

Cette relation, caractérisant les lignes de champ en coordonnées polaires, révèle que, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, r augmente avec θ , jusqu'à atteindre son maximum en $\theta = \frac{\pi}{2}$ et devenir nul en $\theta = 0$.



3. Un vecteur élémentaire $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$ appartient à une équipotentielle à condition que r et θ vérifient la relation :

$$r = \sqrt{A \cos \theta} \Rightarrow \ln r = \frac{1}{2} \ln A + \frac{1}{2} \ln(\cos \theta) \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\frac{\sin \theta d\theta}{2 \cos \theta}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \theta dr = -r \sin \theta d\theta \quad (10)$$

Aussi, le produit scalaire de $d\vec{\ell}$ par \vec{E} vaut-il :

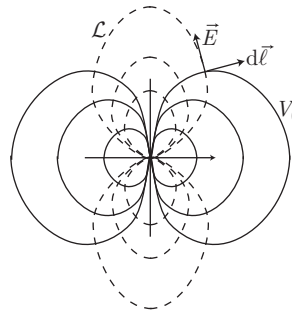
$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix} = E_r dr + E_\theta r d\theta$$

$$= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} (2 \cos \theta dr + r \sin \theta d\theta)$$

c'est-à-dire, compte tenu de la relation (10) :

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{\ell} \Rightarrow \mathcal{V} \perp \mathcal{L}$$

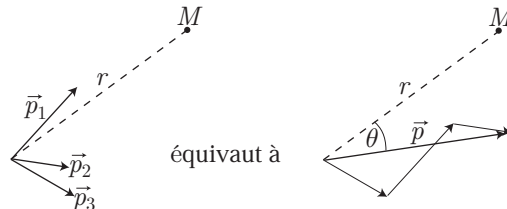
ce qui justifie l'orthogonalité des lignes de champ et des équipotentielles, comme l'illustre la superposition ci-contre des deux réseaux de courbes.



7.1.8.2 Distribution de dipôles

Lorsqu'une distribution de charges peut se transformer en un ensemble de dipôles, de moments dipolaires \vec{p}_i , le potentiel et le champ électrostatiques, créés à grande distance de ces charges, équivalent à ceux créés par un dipôle de moment dipolaire :

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i$$

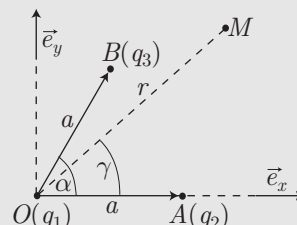




Un ensemble de trois charges est disposé de la manière suivante :

- une charge $q_1 = -3q_0$ en un point O ;
- une charge $q_2 = q_0$ en un point A de l'axe Ox , de vecteur unitaire directeur \vec{e}_x ;
- une charge $q_3 = 2q_0$ en un point B , tel que :

$$\alpha = (\vec{OA}, \vec{OB}) = 60^\circ \text{ et } OA = OB = a$$



1. Trouver deux dipôles, de moments dipolaires \vec{p}_1 et \vec{p}_2 , équivalents à cette distribution de charges ; on notera $p_0 = a \times q_0$ et on donnera les composantes de \vec{p}_1 et \vec{p}_2 dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
2. En déduire les caractéristiques du dipôle \vec{p} équivalent à ces trois charges, c'est-à-dire exprimer $p = \|\vec{p}\|$ en fonction de p_0 et donner la valeur numérique de $\beta = (\vec{p}, \vec{e}_x)$.
3. Soit M un point de l'espace, situé à une distance $r \gg a$ de O , dans la direction $\theta = (\vec{OM}, \vec{p})$. Trouver la valeur de θ qui assure l'appartenance de M à l'équipotentielle $V = 0$. Représenter l'allure de cette équipotentielle.

RÉPONSE

1. La charge $q_1 = -3q_0 = -q_0 - 2q_0 = -(q_2 + q_3)$ peut être décomposée en une charge $-q_2$, opposée à celle de A et une charge $-q_3$, opposée à celle portée par B . C'est pourquoi la distribution de charges est équivalente à celle d'un ensemble de deux dipôles, de moments dipolaires :

$$\vec{p}_1 = q_2 \vec{OA} \text{ et } \vec{p}_2 = q_3 \vec{OB}$$

dont les normes valent :

$$p_1 = q_2 a = q_0 a = p_0 \text{ et } p_2 = 2q_0 a = 2p_0$$

et dont les composantes, dans la base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ sont :

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} p_2 \cos \alpha \\ p_2 \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_0 \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ car } \begin{cases} p_2 = 2p_0 \\ \alpha = 60^\circ \end{cases}$$

2. Le moment dipolaire \vec{p} résultant est simplement la somme vectorielle de ces moments :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2p_0 \\ p_0 \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Ce faisant, sa norme vaut :

$$p = \sqrt{4p_0^2 + 3p_0^2} \Rightarrow p = p_0 \sqrt{7}$$

tandis que sa direction : $\beta = (\vec{p}, \vec{e}_x)$ peut être obtenue à l'aide du produit scalaire $\vec{p} \cdot \vec{e}_x$, calculé de deux manière différentes :

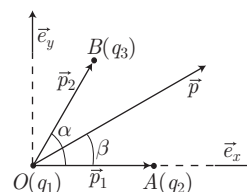
$$\vec{p} \cdot \vec{e}_x = \|\vec{p}\| \times \|\vec{e}_x\| \times \cos \beta = p \cos \beta = p_0 \sqrt{7} \times \cos \beta$$

et :

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 2p_0 \\ p_0 \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2p_0$$

Par conséquent :

$$p_0 \sqrt{7} \times \cos \beta = 2p_0 \Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \beta \simeq 40,9^\circ$$



3. Soit M un point de l'espace, repéré par ses coordonnées polaires $r = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{OM}, \vec{p})$.

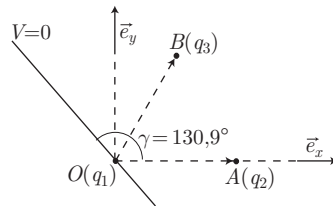
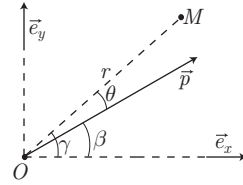
Le potentiel V , créé en M par le dipôle de moment \vec{p} , est directement donné par la relation (9) :

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Aussi, l'appartenance de M à l'équipotentielle $V = 0$ est assurée pour la valeur $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à la même direction).

Finalement, en remarquant que $\gamma = \theta + \beta$, on trouve l'équipotentielle $V = 0$ dans la direction donnée par :

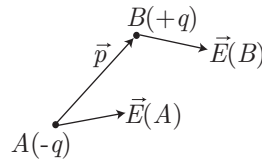
$$\gamma = 90 + 40,9 \Rightarrow \gamma = 130,9^\circ$$



7.1.8.3 Action d'un champ extérieur

Soit un dipôle électrostatique, constitué par deux charges $-q$ et $+q$ placées en des points A et B . Ce dipôle est plongé dans un champ électrostatique \vec{E} , dont l'origine est indépendante de ces deux charges (champ extérieur).

Soient $\vec{E}(A)$ et $\vec{E}(B)$ les valeurs de \vec{E} prises en A et en B . Le dipôle électrostatique est alors soumis à une force résultante :



$$\vec{f} = q [\vec{E}(B) - \vec{E}(A)]$$

Remarque – Dans le cas général où le champ \vec{E} n'est pas uniforme, cette force est non nulle, de sorte que le dipôle est susceptible de se déplacer sous l'influence du champ \vec{E} ; c'est ce phénomène qui est observé à l'approche d'une règle électrisée près d'un filet d'eau : les dipôles constitués par les molécules d'eau sont déviés, de même que le filet d'eau.

En revanche, dans un champ électrique uniforme : $\vec{E}(B) = \vec{E}(A)$ a pour conséquence :

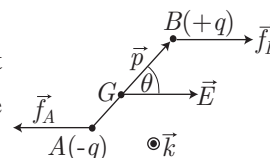
$$\vec{f} = \vec{0} \text{ (dans un champ extérieur uniforme)}$$

Soit G un point du segment $[AB]$ (par exemple le centre d'inertie de A et B , si ces points sont massifs), plongé dans le champ électrostatique uniforme \vec{E} . Les points A et B sont soumis aux forces extérieures $\vec{f}_A = -q \vec{E}$ et $\vec{f}_B = q \vec{E}$, dont le moment en G est défini par :

$$\vec{\mathcal{M}}_G = \vec{GB} \wedge \vec{f}_B + \vec{GA} \wedge \vec{f}_A \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_G = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

En notant $\theta = (\vec{E}, \vec{p})$, avec $\vec{p} = q \times \vec{AB}$, et en orientant l'espace à l'aide d'un vecteur unitaire \vec{k} , dans le sens de l'augmentation de θ , ce moment s'écrit également :

$$\vec{\mathcal{M}}_G = -pE \sin \theta \vec{k}$$



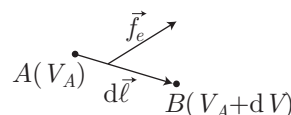
7.2 Mouvement d'une particule chargée

7.2.1 Forces électromagnétiques

7.2.1.1 Force électrostatique

Dans un champ électrostatique \vec{E} , une particule de charge q est soumise à une force électrostatique :

$$\vec{f}_e = q \vec{E}$$



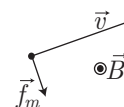
Le travail élémentaire de cette force, entre deux points A et B , tels que $\vec{AB} = d\vec{\ell}$, portés aux potentiels V_A et $V_B = V_A + dV$, est défini par :

$$\delta W_e = \vec{f}_e \cdot d\vec{\ell} = q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -q \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \delta W_e = -q dV$$

7.2.1.2 Force de Lorentz

Une particule, de charge q , de vitesse \vec{v} , placée dans une région de l'espace où règne un champ magnétique stationnaire \vec{B} , est soumise à la *force de Lorentz* :

$$\vec{f}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$



La puissance de cette force est donnée par la relation :

$$\mathcal{P}_m = \vec{f}_m \cdot \vec{v} = q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} \Rightarrow \mathcal{P}_m = 0 \text{ car } (\vec{v} \wedge \vec{B}) \perp \vec{v}$$

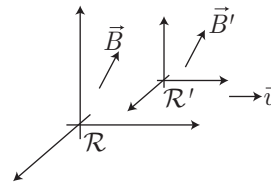
Or, cette puissance est liée à la variation d'énergie cinétique \mathcal{E}_c induite par \vec{f}_m : $\mathcal{P}_m = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt}$, ce qui signifie qu'un champ magnétique \vec{B} ne peut provoquer de variation d'énergie cinétique.

Remarque – Considérons deux référentiels galiléens \mathcal{R} et \mathcal{R}' , le second étant animé d'un mouvement uniforme de vitesse $\vec{v}_e = \vec{v}$ par rapport au premier. Une particule chargée, se déplaçant avec une vitesse $\vec{v}_a = \vec{v}$ par rapport à \mathcal{R} , se déplace alors avec une vitesse relative \vec{v}_r par rapport à \mathcal{R}' , conformément à la loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e \Rightarrow \vec{v}_r = \vec{v}_a - \vec{v}_e = \vec{0}$$

Si \vec{B} et \vec{B}' désignent les champs magnétiques dans \mathcal{R} et \mathcal{R}' (on peut admettre qu'il existe vraisemblablement une loi de composition des champs magnétiques – ce qui est du reste démontré par la théorie de la relativité restreinte), cette même particule est soumise aux forces de Lorentz :

$$\vec{f}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} \neq \vec{0} \text{ dans } \mathcal{R} \text{ et } \vec{f}'_m = q \vec{v}_r \wedge \vec{B}' = \vec{0} \text{ dans } \mathcal{R}'$$



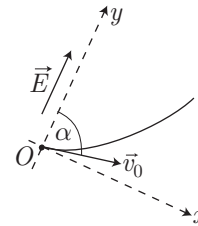
ce qui devient incompatible avec le principe de relativité classique (les forces \vec{f}_m et \vec{f}'_m ne devraient pas dépendre du référentiel d'observation). Il s'agit là d'un des paradoxes qui a donné naissance, au début du XX^e siècle, à la théorie de la relativité restreinte.

7.2.2 Mouvement dans un champ électrique

Considérons une particule de charge q et de masse m , qui arrive, à une date $t = 0$, avec une vitesse \vec{v}_0 , dans une région de l'espace où règne un champ électrostatique uniforme \vec{E} tel que $\alpha = (\vec{v}_0, \vec{E})$.

En choisissant judicieusement les axes du repère d'étude, le champ électrique \vec{E} peut ne présenter qu'une seule composante (par exemple si l'axe Oy possède la même direction de \vec{E}). Dans

ces conditions, le vecteur \vec{E} vaut $\begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}$ tandis que le vecteur vitesse $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ de la particule vaut initialement $\vec{v}_0 \begin{pmatrix} V_0 \sin \alpha \\ V_0 \cos \alpha \end{pmatrix}$.



La loi fondamentale de la dynamique : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$ a alors pour conséquences :

$$\frac{dv_x}{dt} = 0 \Rightarrow v_x = V_0 \sin \alpha \text{ et } \frac{dv_y}{dt} = \frac{qE}{m} \Rightarrow v_y = V_0 \cos \alpha + \frac{qE}{m} \times t$$

d'où se déduisent les composantes du vecteur position \vec{OM} de la particule, qui passe initialement par O :

$$x = V_0 \sin \alpha \times t \Rightarrow t = \frac{x}{V_0 \sin \alpha} \text{ et } y = V_0 \cos \alpha \times t + \frac{qE}{2m} \times t^2$$

soit encore :

$$y = \frac{x}{\tan \alpha} + \frac{qE x^2}{2mV_0^2 \sin^2 \alpha}$$

ce qui suffit à montrer que la particule chargée décrit une parabole.

7.2.3 Mouvement dans un champ magnétique

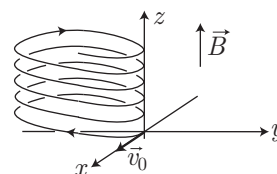
Soit P une particule de charge q , de masse m , qui pénètre à l'instant $t = 0$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$. On note \vec{v}_0 la

vitesse initiale de P , de composantes :

$$\vec{v}_0 = v_{x0} \vec{e}_x + v_{y0} \vec{e}_y + v_{z0} \vec{e}_z \text{ avec } V_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$$

On montre aisément que, dans le plan (Ox, Oy) , perpendiculaire à \vec{B} , la particule décrit des cercles de rayon :

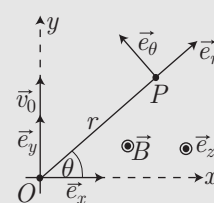
$$R = \frac{mV_0}{|q|B}$$



tandis que la composante v_z de \vec{v} , selon \vec{e}_z , demeure constante. La composition de ces deux mouvements (translation et rotation) produit une trajectoire hélicoïdale.



On considère une particule P , de charge $q > 0$ et de masse m , pénétrant en O , dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$. La position de P sera repérée par ses coordonnées cylindriques : $\vec{OP} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$. La vitesse initiale de la particule est notée $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ et on utilisera la notation : $\omega_0 = \frac{qB}{m}$.



1. Donner les conditions initiales portant sur \vec{OP} et sur la vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{OP}}{dt}$:

$$r(t=0) \quad \theta(t=0) \quad \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} \quad v_z(0) = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0}$$

2. En utilisant la loi fondamentale de la dynamique, montrer d'une part que le mouvement de P est contenu dans le plan (O, x, y) et d'autre part que ce mouvement est gouverné par deux équations différentielles :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \omega_0 r \dot{\theta} \text{ et } 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\omega_0 \dot{r}$$

3. Dédire de la seconde équation différentielle qu'il existe une constante K permettant d'écrire :

$$r^2 \dot{\theta} = -\frac{\omega_0}{2} r^2 + K$$

et calculer K à l'aide des conditions initiales.

De cette équation, tirer l'expression de $\theta(t)$

4. À l'aide de la première équation différentielle de la question 2., montrer qu'il existe une constante Ω , dont on donnera l'expression en fonction de ω_0 , telle que :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \Omega^2 r = 0$$

En déduire l'expression complète de $r(t)$ (en fonction de m, v_0, q, B et Ω), puis celle de $r(\theta)$, en fonction de m, v_0, q, B et θ .

5. À l'aide de la question précédente, montrer que la trajectoire de P est un cercle, dont on précisera le rayon et le centre C .

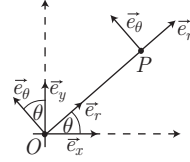
RÉPONSE

1. Compte tenu des conditions imposées par l'énoncé, à la date $t = 0$, la particule P se trouve en O , de sorte que :

$$t = 0 \Rightarrow \vec{OP} = \vec{0} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \Rightarrow \begin{cases} r(0) = 0 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

En outre, la vitesse de P s'écrit, en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z = \dot{r} \vec{e}_r + \dot{z} \vec{e}_z \text{ à } t = 0 \text{ (où } r = 0)$$



et, sachant que le vecteur radial \vec{e}_r a pour composantes : $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y$, la vitesse vaut :

$$\vec{v} = \dot{r} \cos \theta \vec{e}_x + \dot{r} \sin \theta \vec{e}_y + \dot{z} \vec{e}_z$$

Par suite, à la date $t = 0$, $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ s'écrit aussi :

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} \times \cos \theta_0 \vec{e}_x + \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} \times \sin \theta_0 \vec{e}_y + \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} \vec{e}_z = v_0 \vec{e}_y \text{ où } \theta_0 = \theta(t=0)$$

La solution de cette équation est alors :

$$v_z(0) = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0, \theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = v_0 \quad (11)$$

2. Sous l'influence du champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_z$, la particule P est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{f}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qBr \dot{\theta} \\ -qB \dot{r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui intervient dans la loi fondamentale de la dynamique, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} m \vec{\gamma} &= \vec{f}_m \text{ avec } \vec{\gamma} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} &= \frac{1}{m} \begin{pmatrix} qBr \dot{\theta} \\ -qB \dot{r} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_0 r \dot{\theta} \\ -\omega_0 \dot{r} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ car } \omega_0 = \frac{qB}{m} \end{aligned}$$

D'une part cette équation fournit deux équations différentielles :

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = \omega_0 r \dot{\theta} \text{ et } 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = -\omega_0 \dot{r} \quad (12)$$

et d'autre part elle conduit à :

$$\begin{aligned} \dot{v}_z = 0 &\Rightarrow v_z = \text{cte} = 0 \text{ car } v_z(t=0) = 0 \\ &\Rightarrow z = \text{cte} = 0 \text{ car } z(t=0) = 0 \end{aligned}$$

Cette dernière identité suffit à prouver que le mouvement de P se fait dans le plan (O, x, y) , d'équation $z = 0$.

3. La seconde des équations (12) se présente aussi sous la forme :

$$\frac{1}{r} (2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = -\omega_0 \dot{r} \Rightarrow \frac{1}{r} \times \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = -\omega_0 \dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = -\omega_0 \dot{r} r$$

soit encore :

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\omega_0}{2} r^2 \right)$$

ce qui suffit à prouver qu'il existe une constante K telle que :

$$r^2 \dot{\theta} = -\frac{\omega_0}{2} r^2 + K$$

Or, à la date $t = 0$, r étant nul, il s'ensuit que :

$$0 = 0 + K \Rightarrow K = 0 \Rightarrow r^2 \dot{\theta} = -\frac{\omega_0}{2} r^2$$

Aussi, à toute autre date pour laquelle $r \neq 0$, cette équation conduit à :

$$\dot{\theta} = -\frac{\omega_0}{2} \Rightarrow \theta = -\frac{\omega_0}{2} \times t + K' \quad (13)$$

où la constante K' est adaptée à la condition initiale (11) :

$$t = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_0 = K' \Rightarrow \theta(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_0}{2} t \quad (14)$$

4. L'expression (13) de $\dot{\theta} = -\frac{\omega_0}{2}$ donne à la première des équations (12) la forme suivante :

$$\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = \omega_0 \dot{\theta} r \Rightarrow \ddot{r} - \frac{\omega_0^2}{4} r = -\frac{\omega_0^2}{2} r$$

c'est-à-dire :

$$\ddot{r} + \Omega^2 r = 0 \text{ en posant } \Omega = \frac{\omega_0}{2} \quad (15)$$

La solution générale de cette équation différentielle fait intervenir deux constantes A_1 et A_2 :

$$r = A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t) \Rightarrow \dot{r} = -A_1 \Omega \sin(\Omega t) + A_2 \Omega \cos(\Omega t)$$

Aussi, à la date $t = 0$, les expressions :

$$r(t=0) = A_1 \text{ et } \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = A_2 \Omega$$

doivent rester compatibles avec les conditions initiales :

$$r(t=0) = 0 \text{ et } \left. \frac{dr}{dt} \right|_{t=0} = v_0$$

ce qui permet de conclure que :

$$A_1 = 0 \text{ et } A_2 = \frac{v_0}{\Omega} = \frac{2v_0}{\omega_0} = \frac{2mv_0}{qB}$$

Finalement, la position de la particule est décrite par l'équation :

$$r(t) = A_2 \sin(\Omega t) = \frac{2mv_0}{qB} \sin(\Omega t)$$

où l'expression (15) de $\Omega : \Omega = \frac{\omega_0}{2}$, associée à celle (14) de θ , conduit à :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_0}{2} t = \frac{\pi}{2} - \Omega t \Rightarrow \Omega t = \frac{\pi}{2} - \theta \Rightarrow \sin(\Omega t) = \cos \theta$$

Ce faisant, on obtient l'équation polaire de la trajectoire suivie par P :

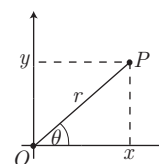
$$r(\theta) = \frac{2mv_0}{qB} \cos \theta$$

5. En remarquant que les coordonnées cartésiennes de P s'expriment par $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, le résultat précédent fournit :

$$x = \frac{mv_0}{qB} \times 2 \cos^2 \theta \text{ et } y = \frac{mv_0}{qB} \times 2 \sin \theta \cos \theta$$

avec, d'une part : $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$, et d'autre part :

$$\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \Rightarrow 2 \cos^2 \theta = 1 + \cos(2\theta)$$



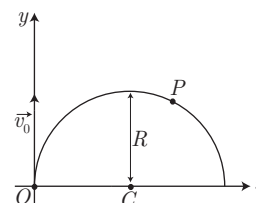
Aussi, les coordonnées de P vérifient :

$$x = \frac{mv_0}{qB} [1 + \cos(2\theta)] \Rightarrow \left(x - \frac{mv_0}{qB}\right)^2 = \left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2 \cos^2(2\theta) \text{ et } y^2 = \left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2 \sin^2(2\theta)$$

ce qui mène finalement à l'équation cartésienne :

$$\left(x - \frac{mv_0}{qB}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{mv_0}{qB}\right)^2$$

caractéristique d'un cercle de rayon $R = \frac{mv_0}{qB}$ et de centre $C(R, 0)$.

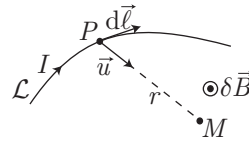


7.3 Magnétostatique

7.3.1 Le champ magnétique

7.3.1.1 Loi de Biot et Savart

Soit \mathcal{L} un fil électrique parcouru par un courant d'intensité I , et soit P un point de ce fil, d'où est défini un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ des charges dans \mathcal{L} . Ce déplacement de charges produit, en un point M tel que $\overrightarrow{PM} = r \vec{u}$, un champ magnétique donné par la loi de Biot et Savart :

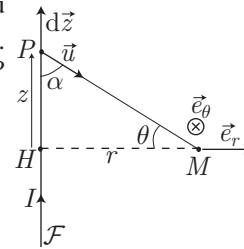


$$\delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

où μ_0 désigne la perméabilité magnétique du vide ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ USI). Cette loi permet le calcul de nombreux champs magnétiques, par exemple celui produit par un fil infini \mathcal{F} parcouru par un courant uniforme I , en un point M situé à une distance $r = HM$ de \mathcal{F} .

Notons $z = \overline{HP}$, $d\vec{z}$ un déplacement élémentaire selon \mathcal{F} au voisinage de P , et \vec{u} le vecteur unitaire de $\overrightarrow{PM} = PM \times \vec{u}$. La loi de Biot et Savart indique que le courant qui circule en P produit en M un champ magnétique :

$$\delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{d\vec{z} \wedge \vec{u}}{MP^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{dz \sin \alpha \vec{e}_\theta}{MP^2}$$



avec $\alpha = (\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PH})$.

Aussi, en introduisant l'angle $\theta = (\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MH})$, cette relation devient :

$$\delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{dz \cos \theta}{MP^2} \vec{e}_\theta$$

où :

$$\tan \theta = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \tan \theta \Rightarrow dz = r \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \text{ et } \cos \theta = \frac{r}{MP} \Rightarrow \frac{1}{MP^2} = \frac{\cos^2 \theta}{r^2}$$

Il s'ensuit que :

$$\delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{r d\theta}{\cos^2 \theta} \times \cos \theta \times \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{e}_\theta \times \cos \theta d\theta$$

Aussi, l'ensemble du fil étant décrit par l'angle θ évoluant entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, \mathcal{F} crée en M le champ magnétique :

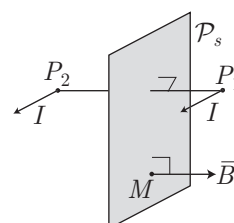
$$\vec{B} = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \vec{e}_\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

7.3.1.2 Symétries et antisymétries

Définition 10 Un plan \mathcal{P}_s est appelé plan de symétrie, si en deux points P_1 et P_2 , symétriques par rapport à \mathcal{P}_s , circule le même courant (même intensité, même sens et même direction).

Si un point M appartient à un plan de symétrie \mathcal{P}_s d'une distribution de courants, celle-ci produit en M un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire à \mathcal{P}_s :

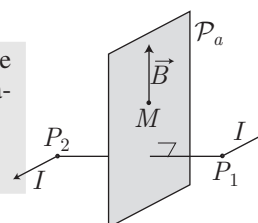
$$\vec{B} \perp \mathcal{P}_s \text{ (sur un plan de symétrie).}$$



Définition 11 Un plan \mathcal{P}_a est un plan d'antisymétrie si tout couple de points $\{P_1, P_2\}$, symétriques par rapport à \mathcal{P}_a , sont parcourus par des courants de même intensité, de même direction, mais de sens opposé.

Si un point M appartient à un plan d'antisymétrie \mathcal{P}_a d'une distribution de courants, celle-ci produit en M un champ magnétique \vec{B} contenu dans \mathcal{P}_a :

$$\vec{B} \in \mathcal{P}_a \text{ (sur un plan d'antisymétrie).}$$

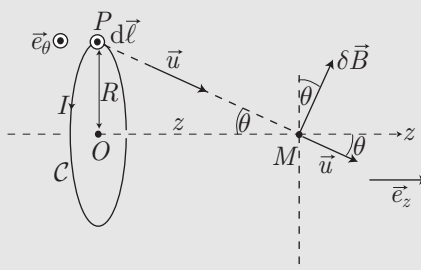


La découverte d'un plan de symétrie est toujours plus fructueuse que celle d'un plan d'antisymétrie, car elle fournit immédiatement la direction du champ magnétique \vec{B} (mais pas son sens). En revanche, si seuls des plans d'antisymétrie sont accessibles, au moins deux d'entre eux sont nécessaires à la détermination de la direction de \vec{B} ; il s'agit de l'intersection de ces plans.



Soit \mathcal{C} une spire, de rayon R , de centre O et d'axe Oz , parcourue par un courant uniforme d'intensité I . Un élément $d\vec{\ell}$ de \mathcal{C} , au voisinage d'un point P de \mathcal{C} produit en un point M de Oz (avec $\vec{OM} = z\vec{e}_z$) un champ magnétique élémentaire :

$$\delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{MP^2}$$



1. On note \vec{e}_θ le vecteur unitaire directeur de $d\vec{\ell} = dl \vec{e}_\theta$. Exprimer, en fonction de $\sin \theta$ et de dl , le produit mixte : $(d\vec{\ell} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{e}_z$.
2. En déduire l'expression du champ magnétique \vec{B} produit en M par la totalité de la spire \mathcal{C} .

RÉPONSE

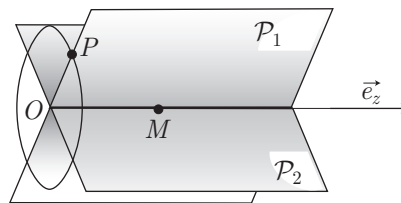
1. Le produit mixte étant invariant par permutation circulaire de ses vecteurs, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} (d\vec{\ell} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{e}_z &= (\vec{u} \wedge \vec{e}_z) \cdot d\vec{\ell} \text{ avec } \vec{u} \wedge \vec{e}_z = \sin \theta \vec{e}_\theta \\ &= (\sin \theta \vec{e}_\theta) \cdot (dl \vec{e}_\theta) = \sin \theta dl \end{aligned}$$

2. Tout plan \mathcal{P}_1 passant simultanément par O , M et P est un plan d'antisymétrie pour la spire \mathcal{C} . C'est pourquoi le champ magnétique \vec{B} appartient nécessairement à ce plan.

Il en va de même du plan \mathcal{P}_2 , perpendiculaire à \mathcal{P}_1 , contenant O et M . \vec{B} appartient donc aussi à \mathcal{P}_2 , c'est-à-dire à l'intersection de \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 ; il s'agit de l'axe (Oz) , dont le vecteur directeur \vec{e}_z est par conséquent aussi un vecteur directeur de \vec{B} :

$$\vec{B} = B \vec{e}_z \Rightarrow B = \vec{B} \cdot \vec{e}_z$$



Ce faisant, \vec{B} est donné par la loi de Biot et Savart :

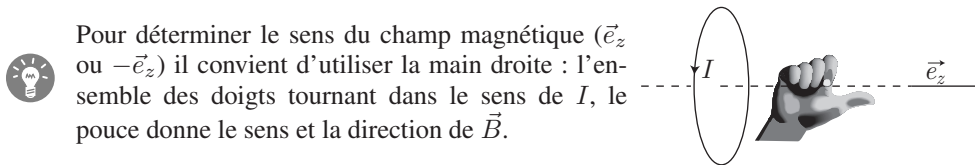
$$\delta \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{MP^2} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi MP^2} \oint_C d\vec{\ell} \wedge \vec{u} \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{4\pi MP^2} \oint_C (d\vec{\ell} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{e}_z$$

c'est-à-dire, en tenant compte du résultat de la question précédente :

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi MP^2} \oint_C \sin \theta dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi MP^2} \sin \theta \oint_C dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi MP^2} \sin \theta \times 2\pi R$$

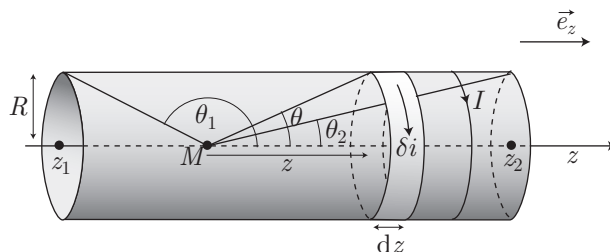
ou encore :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 IR}{2} \times \frac{\sin \theta}{MP^2} \vec{e}_z \text{ avec } \frac{1}{MP^2} = \frac{\sin^2 \theta}{R^2} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \times \sin^3 \theta \vec{e}_z \quad (16)$$



Pour déterminer le sens du champ magnétique (\vec{e}_z ou $-\vec{e}_z$) il convient d'utiliser la main droite : l'ensemble des doigts tournant dans le sens de I , le pouce donne le sens et la direction de \vec{B} .

Le calcul du champ magnétique produit par une spire se généralise au calcul d'un champ produit par un solénoïde sur son axe Oz .



Soit n le nombre de spires par unité de longueur, constituant le solénoïde ; une longueur dz de ce solénoïde comporte δN spires : $\delta N = n \times dz$. Aussi, chacune des spires étant parcourue par le même courant I , la bande de largeur dz est parcourue par un courant d'intensité :

$$\delta i = \delta N \times I = nI \times dz$$

Or, dz pouvant être choisi infinitésimal, une telle bande peut être assimilée à une spire unique qui produit au point M de l'axe un champ donné par l'identité (16) :

$$\delta \vec{B} = \frac{\mu_0 \delta i}{2R} \times \sin^3 \theta \vec{e}_z = \frac{\mu_0 n I}{2R} \times \sin^3 \theta dz \vec{e}_z$$

En remarquant que :

$$\tan \theta = \frac{R}{z} \Rightarrow z = \frac{R}{\tan \theta} \Rightarrow dz = -\frac{R d\theta}{\sin^2 \theta}$$

l'expression de $\delta \vec{B}$ devient :

$$\delta \vec{B} = -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \theta d\theta \vec{e}_z$$

et, puisque la bobine est comprise entre z_1 et z_2 , c'est-à-dire qu'elle est décrite par θ évoluant de θ_1 à θ_2 , le champ total qu'elle produit en un point M de son axe vaut :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} \vec{e}_z \int_{\theta_1}^{\theta_2} -\sin \theta d\theta \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \theta_2 - \cos \theta_1) \vec{e}_z$$

Dans le cas d'une bobine infinie (ou dont le rayon R est très inférieur à sa longueur $z_2 - z_1$), les angles θ_1 et θ_2 prennent les valeurs respectives π et 0 , de sorte que, sur l'axe Oz , le champ devient :

$$\vec{B}_{Oz} = \mu_0 n I \vec{e}_z \quad (17)$$

7.3.2 Théorème d'Ampère

7.3.2.1 Vecteur densité de courant

Définition 12 Soit δI le courant électrique traversant une surface élémentaire dS , orientée par le vecteur $d\vec{S}$.

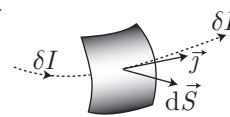
Le courant δI est alors défini comme le flux d'un vecteur \vec{j} , appelé vecteur densité de courant :

$$\delta i = \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Pour une surface (S) plus importante, il convient d'additionner tous les courants élémentaires δI afin d'obtenir le courant total I qui traverse (S) :

$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (18)$$

On peut montrer que le vecteur \vec{j} dépend de la densité volumique n des porteurs de charge qui se déplacent avec une vitesse moyenne \vec{v} , et qui sont dépositaires d'une charge individuelle q :



$$\vec{j} = nq\vec{v}$$

Si toutefois les porteurs mobiles de charge sont de natures différentes (par exemple, dans l'eau, les ions H^+ et HO^- ne portent pas les mêmes charges et ne se déplacent pas avec la même vitesse moyenne), cette loi se généralise (et est à l'origine de l'expression de la conductivité d'un électrolyte en fonction des concentrations ioniques) :

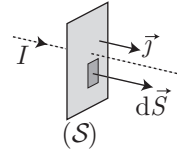
$$\vec{j} = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$$

Remarque – Lorsque le vecteur densité de courant est uniforme et perpendiculaire à la surface (S), la loi (18) se simplifie :

$$I = j \times S \Rightarrow j = \frac{I}{S}$$

En revanche, si \vec{j} n'est pas uniforme ou si $(\vec{j}, d\vec{S}) \neq \frac{\pi}{2}$, il n'est plus possible d'utiliser ce résultat, auquel cas seule la relation :

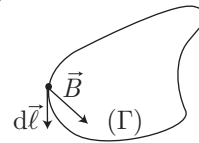
$$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



7.3.2.2 Circulation du champ magnétique

Définition 13 On appelle circulation du champ magnétique \vec{B} le long d'un parcours fermé (Γ), la grandeur :

$$C = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$



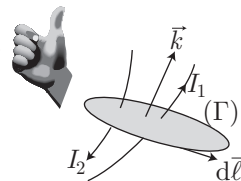
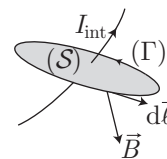
Le théorème d'Ampère stipule que cette circulation est proportionnelle à la somme algébrique des courants I_{int} qui traversent la surface (S) de contour (Γ).

$$C = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int}$$

Afin d'assigner un signe correct à I_{int} , il convient d'orienter la surface (S) en fonction du sens de parcours de (Γ). Pour cela, les doigts de la main droite tournent dans le sens de parcours de (Γ), tandis que le pouce indique une direction, notée \vec{k}

Les courants qui traversent (S) dans le sens de \vec{k} sont alors comptés positivement, tandis que les autres sont comptés négativement :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$



Remarque – Les courants qui ne traversent pas (S) sont sans influence sur la circulation C .



Pour utiliser le théorème d'Ampère dans le but d'exprimer un champ magnétique \vec{B} produit, en un point M , par une distribution \mathcal{D} de courants, il convient de procéder en trois étapes :

- la détermination des caractéristiques de \vec{B} : sa direction (un plan de symétrie \mathcal{P}_s pour \mathcal{D} et passant par M donne directement la direction de \vec{B} : perpendiculaire à \mathcal{P}_s . Sinon, la recherche de deux plans d'antisymétrie \mathcal{P}_a et \mathcal{P}'_a donne également la direction de \vec{B} : l'intersection de \mathcal{P}_a et de \mathcal{P}'_a), et les variables (x, y, z) , (r, θ, z) ou (r, θ, φ) dont dépend réellement \vec{B} (la recherche de paramètres qui rendent \vec{B} invariant est ici requise).
- La définition d'un parcours (Γ) fermé et orienté, sur lequel $\|\vec{B}\|$ demeure en partie constant. Ce parcours étant défini, le calcul de la circulation de \vec{B} devient possible :

$$\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

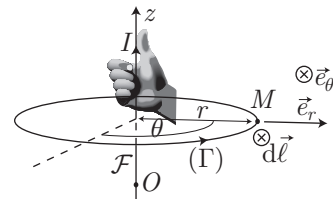
- la recherche du courant I_{int} qui traverse la surface (S) circonscrite dans (Γ) . On s'aidera, pour cette étape, de l'orientation de (Γ) définie ci-avant, et l'on utilisera assez fréquemment le vecteur densité de courant \vec{j} pour calculer I_{int} . Il devient alors possible d'utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer \vec{B} :

$$\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{int}}$$

7.3.2.3 Champ créé par un fil infini

Soit \mathcal{F} un fil infiniment long, parcouru par un courant uniforme d'intensité I . Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) où r désigne sa distance à \mathcal{F} et où l'axe Oz est confondu avec \mathcal{F} .

\mathcal{F} produit en M un champ magnétique $\vec{B}(r, \theta, z)$ qui dépend *a priori* des paramètres r , θ et z . Cependant, une rotation d'un angle $\Delta\theta$ de \mathcal{F} sur lui-même laisse invariante la distribution de courant, de même qu'une translation de \mathcal{F} dans la direction de Oz . C'est pourquoi \vec{B} ne dépend en fait que de r .



En outre, tout plan contenant \mathcal{F} est un plan de symétrie pour \mathcal{F} , et notamment celui qui passe par M (il s'agit du plan de la feuille de papier). Aussi \vec{B} présente-t-il la direction \vec{e}_θ perpendiculaire à ce plan : $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$.

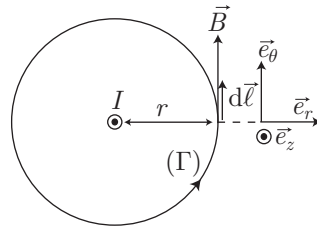
Il convient alors de définir un parcours fermé et orienté (Γ) sur lequel $B(r)$ demeure constant ; il s'agit du cercle passant par M , de rayon r et d'axe Oz (l'orientation de (Γ) se fait à l'aide des doigts de la main droite).

Le long de ce parcours, la colinéarité de $d\vec{\ell}$ et de \vec{B} simplifie le calcul de la circulation :

$$\mathcal{C} = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(\Gamma)} B(r) \times d\ell = B(r) \times \oint_{(\Gamma)} d\ell$$

où $\oint_{(\Gamma)} d\ell$ représente le périmètre de (Γ) . C'est pour-
quoi :

$$\mathcal{C} = B(r) \times 2\pi r$$

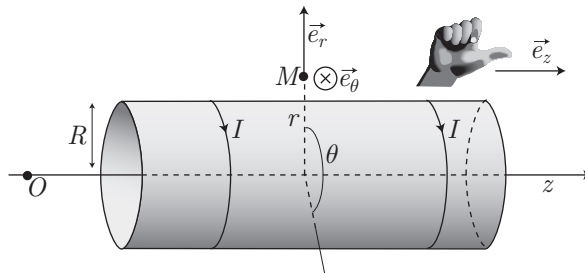


Quant à la surface de contour (Γ) , elle est traversée par le courant I (positif car de même sens que \vec{e}_z), qui permet l'utilisation du théorème d'Ampère :

$$\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

7.3.2.4 Champ créé par un solénoïde

Un solénoïde infini, d'axe Oz et de rayon R , est parcouru par un courant d'intensité I , et comporte n spires par unité de longueur. À nouveau, un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

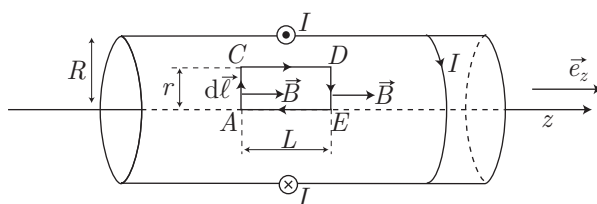


Tout plan passant par M perpendiculairement à Oz est un plan de symétrie, auquel cas le champ magnétique \vec{B} prend la même direction qu'un vecteur unitaire \vec{e}_z perpendiculaire à ce plan : $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_z$.

Par ailleurs, une rotation de $\Delta\theta$ du solénoïde autour de son axe, ou encore une translation selon Oz du solénoïde laissent invariante la distribution de courants, en conséquence de quoi \vec{B} ne dépend que de r :

$$\vec{B} = B(r) \times \vec{e}_z$$

Le parcours fermé (Γ) sera donc (partiellement) composé de courbes caractérisées par $r = \text{cte}$, c'est-à-dire des segments de droites parallèles à l'axe Oz (des cercles de rayon r et d'axe Oz ne peuvent convenir car la surface qu'ils délimitent n'est traversée par aucun courant) ; soit $(ACDEA)$ un tel parcours, contenu, ou non, à l'intérieur du solénoïde.



En outre, une partie de (Γ) , la branche EA , est confondue avec l'axe Oz car, en vertu du résultat (17) de la page 740, le champ magnétique y est connu et vaut :

$$\vec{B}(r=0) = \vec{B}_{Oz} = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

Enfin, sur les segments AC et DE , le vecteur $d\vec{\ell}$ est perpendiculaire à \vec{B} ($\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$), tandis que les vecteurs \vec{CD} et \vec{B} sont colinéaires :

$$\vec{B} \cdot \vec{CD} = B(r) \times CD = B(r) \times L \text{ avec } L = CD$$

de même que les vecteurs \vec{B}_{Oz} et \vec{EA} :

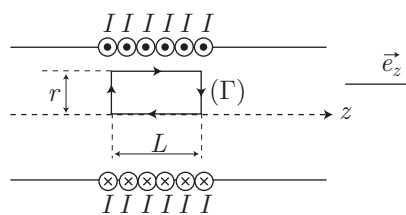
$$\vec{B}_{Oz} \cdot \vec{EA} = -B_{Oz} \times EA = -\mu_0 n I \times L$$

Ce faisant, la circulation de \vec{B} le long de (Γ) s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{=0} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^E \underbrace{\vec{B} \cdot d\vec{\ell}}_{=0} + \int_E^A \vec{B}_{Oz} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \vec{B}(r) \cdot \int_C^D d\vec{\ell} + \vec{B}_{Oz} \cdot \int_E^A d\vec{\ell} = \vec{B}(r) \cdot \vec{CD} + \vec{B}_{Oz} \cdot \vec{EA} \\ &\Rightarrow \mathcal{C} = [B(r) - \mu_0 n I] \times L \end{aligned}$$

Le calcul du courant I_{int} traversant la surface de contour (Γ) doit être mené en distinguant deux cas :

- Pour $r < R$, (Γ) est intégralement contenu dans le solénoïde, auquel cas la surface qu'il circonscrit n'est traversée par aucun courant : $I_{\text{int}}=0$. Le théorème d'Ampère y devient :



$$\mathcal{C} = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow B(r) - \mu_0 n I = 0 \Rightarrow \vec{B}(r < R) = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

Remarque – Le champ magnétique, à l'intérieur du solénoïde, est uniforme car indépendant de r .

- Pour $r > R$, le parcours (Γ) , de longueur L , est traversé par $N = n \times L$ fils, parcourus chacun par un courant I .

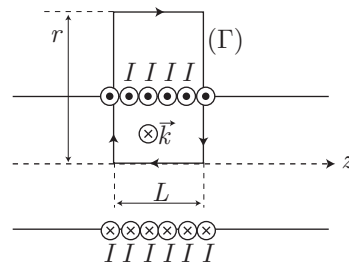
Par conséquent, la surface (\mathcal{S}) circonscrite par (Γ) est traversée par un courant d'intensité $N \times I = nI \times L$. Or, le sens du parcours (Γ) permet de définir un vecteur unitaire \vec{k} (les doigts de la main droite tournent dans le sens de (Γ), tandis que le pouce définit le vecteur \vec{k}), opposé aux courants I .

Par suite, le courant I_{int} qui traverse (\mathcal{S}) a pour valeur algébrique :

$$I_{\text{int}} = -nI \times L$$

d'où se déduit le champ magnétique, à l'aide du théorème d'Ampère :

$$C = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow [B(r) - \mu_0 nI] \times L = -\mu_0 nI \times L \Rightarrow \vec{B}(r > 0) = \vec{0}$$



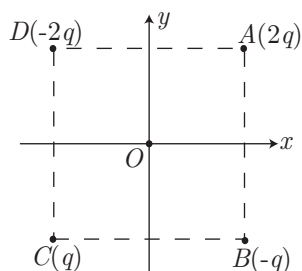
● **224** **Lycée Carnot, Dijon**

5 min.

Calcul de champs électriques

MPSI-PCSI-PTSI

Calculer le champ électrique \vec{E} au centre O d'un carré de côté a , aux sommets duquel ont été placées différentes charges ponctuelles.



● **225** **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

Calcul de champs électriques

MPSI-PCSI-PTSI

Un anneau, d'épaisseur négligeable, de rayon R , porte une charge répartie uniformément avec la densité linéique λ . Au centre de l'anneau se trouve une charge ponctuelle $-q$, opposée à la charge totale $+q$ de l'anneau.

1. Calculer le champ électrique produit en un point M de l'axe Oz de l'anneau, en fonction de λ , R et $z = OM$.
2. Donner l'expression approchée de ce champ lorsque $z \gg R$.

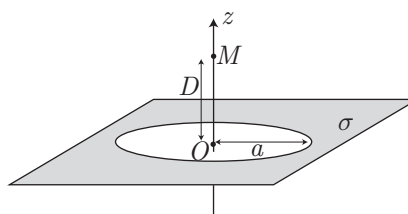
● **226** **Lycée Champollion, Grenoble**

10 min.

Calcul de champs électriques

MPSI-PCSI-PTSI

1. Un plan (Π) infini est uniformément chargé avec une densité surfacique de charge σ_1 . Déterminer l'expression du champ électrique que ces charges produisent en un point M situé à une distance D du plan.
2. Un disque, de rayon a , de centre O et d'axe Oz est uniformément chargé avec une densité surfacique σ_2 . Déterminer le champ électrique produit par ce disque en un point M de l'axe Oz , situé à une distance D de O .
3. Un plan infini est percé, autour du point O , d'un trou circulaire de rayon a . Il est uniformément chargé avec une densité surfacique σ . Déterminer l'expression du champ électrique produit par cette distribution de charges, en un point M de l'axe Oz perpendiculaire au plan, tel que $OM = D$.



● **227** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

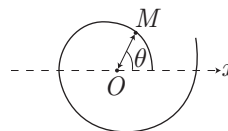
10 min.

Calcul de champs électriques

MPSI-PCSI-PTSI

Un fil fin et infini contient des charges de densité linéique uniforme λ . Sa forme en spirale est décrite par son équation polaire :

$$r = r_0 e^{a\theta} \text{ avec } \theta \in [0, \infty[$$



où r_0 et a sont des constantes.

1. Donner l'expression d'une longueur élémentaire de ce fil, en fonction de r_0 , a , θ et $d\theta$.
2. En déduire les composantes du champ électrique \vec{E} que cette distribution de charges produit en O , en fonction de λ , a et r_0 .

Quel angle fait \vec{E} avec l'axe Ox ?

On donne les intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty e^{-a\theta} \cos \theta d\theta = \frac{a}{1+a^2} \text{ et } \int_0^\infty e^{-a\theta} \sin \theta d\theta = \frac{1}{1+a^2}$$

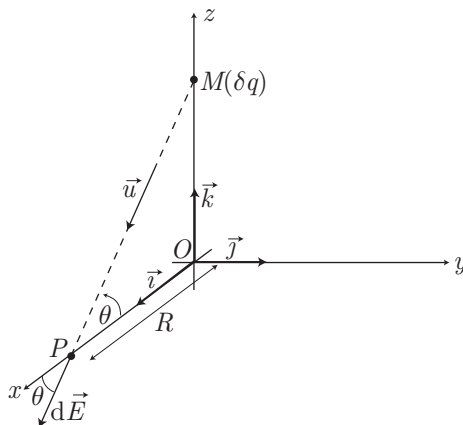
● **228** ————— **Concours de la Banque Filière PT**

15 min.

Calcul de champs électriques

MPSI-PTSI-PCSI

L'espace est rapporté au repère cartésien (O, x, y, z) et l'on se situe dans l'air assimilé au vide quant aux propriétés électriques.



1. **Étude d'un fil infini uniformément chargé**

On considère un fil rectiligne illimité, confondu avec (Oz) , portant une distribution uniforme de charges $\lambda > 0$.

- (a) On fixe le point M sur le fil, à l'altitude z , et le point P sur l'axe (Ox) , tel que $OP = R > 0$. Un petit élément de charge $dq = \lambda dz$, au voisinage du point M , crée au point P un champ élémentaire $d\vec{E}$. Exprimer $d\vec{E}$ en fonction de ε_0 , R , λ et $d\theta$.

(b) En déduire le champ total \vec{E} au point P par intégration de l'expression précédente.

2. Étude d'une plaque infinie, uniformément chargée

On considère maintenant une plaque infinie, dans le plan (O, y, z) , uniformément chargée avec la densité surfacique de charge $\sigma > 0$.

En décomposant ce plan en de minces rubans d'axe (Oz) , de largeur dy , d'abscisses y , et en utilisant le résultat relatif à un fil, trouver l'expression du champ \vec{E} produit au point P .

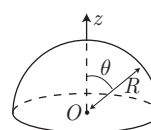
● 229 ————— Lycée Carnot, Dijon

20 min.

Calcul de champs électriques

MPSI-PCSI-PTSI

- Calculer le champ électrique au centre d'une sphère chargée en surface, avec la distribution surfacique de charges : $\sigma = \sigma_0 \cos^2 \theta$ (l'angle θ est celui des coordonnées sphériques).
- Même question pour la demi-sphère correspondant à $z \geq 0$.



● 230 ————— Concours ENSI

5 min.

Champs et potentiels électrostatiques

MPSI-PCSI-PTSI

On considère, seules dans le vide, deux charges ponctuelles q_0 et q , situées respectivement aux points O et A tels que $OA = a$ (constante positive). Les effets électriques engendrés par ces deux charges se superposent en tout point de l'espace. On donne $q = -q_0$, avec $q_0 > 0$.

On pose : $\vec{u} = \frac{\vec{OA}}{\|\vec{OA}\|}$ (vecteur unitaire).

- Déterminer l'expression vectorielle de la force électrique \vec{f} exercée par la charge q_0 sur la charge q .
- Soit un point P , équidistant des deux charges q_0 et q , tel que $OP = AP = a$.
 - Déterminer l'expression vectorielle du champ électrostatique \vec{E} créé au point P par l'ensemble des deux charges q_0 et q .
 - Calculer le potentiel V associé.

● 231 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

15 min.

Champs et potentiels électrostatiques

MPSI-PCSI-PTSI

On considère, dans le vide, un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé, au point M , par une répartition de charges à symétrie sphérique de centre O . On pose $\vec{OM} = r \vec{e}_r$.

Ce champ est radial et ne dépend que de r : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$. La valeur algébrique $E(r)$ est définie par :

$$\begin{cases} E(r) = \frac{k}{2\varepsilon_0} \text{ pour } r \in [0, R] \\ E(r) = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2} \text{ pour } r \in [R, +\infty[\end{cases}$$

k et R sont des constantes positives.

On rappelle que la variation de potentiel électrostatique dV est liée à la circulation du champ électrostatique \vec{E} , par la relation : $dV = \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$. D'autre part, le champ \vec{E} est relié, dans le vide, à la charge volumique ρ par l'équation locale :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Compte tenu des considérations de symétrie, l'opérateur scalaire $\operatorname{div} \vec{E}$ s'écrit ici sous sa forme simplifiée :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{d[r^2 E(r)]}{dr}$$

La démonstration de ces formules n'est pas demandée.

I- Potentiel électrostatique $V(r)$

On pose, par convention : $\lim_{r \rightarrow \infty} [V(r)] = 0$.

- Déterminer le potentiel $V(r)$ de cette distribution de charges, pour les valeurs suivantes :
 - $r \in [R, +\infty[$;
 - $r \in [0, R]$.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $V(r)$.

II- Charge volumique $\rho(r)$

- Déterminer la charge volumique $\rho(r)$ de cette distribution de charges pour les valeurs suivantes de r :
 - $r \in [0, R[$;
 - $r \in]R, +\infty[$.
- Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $\rho(r)$.

III- Charge totale q_0

- Exprimer la charge d'une couche sphérique élémentaire, de centre O et comprise entre les sphères de rayons r et $r + dr$.
- En déduire, en fonction de k et R , la charge totale q_0 de cette répartition de charges, à symétrie sphérique.
- Montrer que, pour $r > R$, cette distribution volumique est équivalente, d'un point de vue électrostatique, à une charge électrique q_0 placée au point O .

● **232** **Lycée Thiers, Marseille**

20 min.

Champs et potentiels électrostatiques

MPSI-PCSI-PTSI

Deux charges ponctuelles $(+3q)$ et $(-q)$ sont placées aux points d'abscisses $+a$ et $-a$ d'un axe Ox . Déterminer la surface équipotentielle $V = 0$.

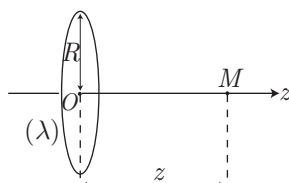
● 233 ————— Lycée Chateaubriand, Rennes

20 min.

Champs et potentiels électrostatiques

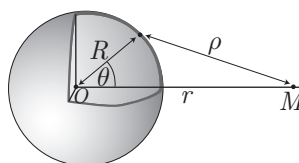
MPSI-PCSI-PTSI

1. Soit un anneau circulaire de centre O , de rayon R et d'axe Oz , portant une charge linéique uniforme λ .



Calculer le champ électrique $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ en un point M de l'axe Oz , tel que $\overline{OM} = z$. On donnera le résultat en fonction de z , R , λ , ε_0 et $\vec{k} = \frac{\overline{OM}}{OM}$.

2. Soit une sphère uniformément chargée en surface, de charge surfacique σ , de centre O , de rayon R .



Par un calcul direct, s'inspirant des résultats de la première question, calculer le potentiel en un point M extérieur à la sphère ($OM = r$ avec $r > R$), en fonction de r , R , σ et ε_0 .

En déduire le champ $\vec{E}(M)$.

Indication : On intégrera sur la variable ρ , en remarquant que l'on a :

$$\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta$$

● 234 ————— Concours Centrale

30 min.

Champs et potentiels électrostatiques

MPSI-PCSI-PTSI

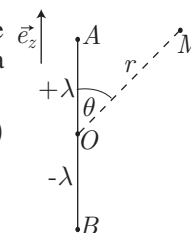
On considère un segment AB , de milieu O , portant une charge linéique uniforme $+\lambda$ sur OA et $-\lambda$ sur OB . On notera $OA = OB = L$.

1. Déterminer le potentiel correspondant $V(r, \theta)$ au point $M(r, \theta)$ tel que $r = OM$ et $\theta = (\vec{e}_z, \overline{OM})$.

On posera :

$$u_1 = \frac{L}{r \sin \theta} - \cotan \theta \quad u_2 = -\frac{L}{r \sin \theta} - \cotan \theta \quad u_0 = -\cotan \theta$$

2. Quelle est la limite $V_\infty(r, \theta)$ de ce potentiel lorsqu'on fait tendre L vers l'infini ?



On donne la primitive :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \ln(u + \sqrt{1+u^2})$$

● 235

Q.C.M.

30 min.

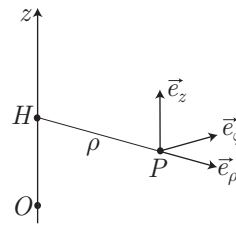
Champs et potentiels électrostatiques

MPSI-PCSI-PTSI

Un fil rectiligne « infini », de direction Oz , porte des charges électriques réparties uniformément avec une densité linéique λ .

On rappelle que le vecteur champ électrique $\vec{E}(P)$, créé en tout point P situé à la distance $HP = \rho$ du fil, est donné par :

$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \vec{e}_\rho$$



dans un système de coordonnées cylindriques, de vecteurs de base \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ et \vec{e}_z .

1. En déduire, à une constante près, le potentiel $V(P)$ créé par le fil.

- (a) $V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + \text{cte.}$
- (b) $V(P) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\rho^2} + \text{cte.}$
- (c) $V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \rho (\ln \rho - 1) + \text{cte.}$
- (d) $V(P) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + \text{cte.}$

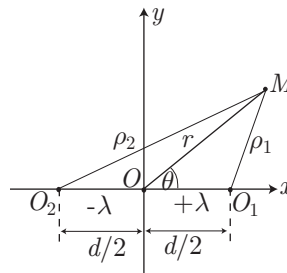
2. Deux fils rectilignes « infinis » L_1 et L_2 , distants de d et parallèles à l'axe Oz , portent des charges réparties uniformément avec les densités linéiques λ et $-\lambda$.

Le plan perpendiculaire aux fils et passant par O est repéré par les axes Ox et Oy . O est le milieu du segment $[O_1O_2]$, O_1 et O_2 étant les traces respectives, dans ce plan, des fils L_1 et L_2 .

On approche les deux fils, de sorte qu'au cours de l'opération, le produit λd reste constant et égal à p , avec $OM = r \gg d$.

Établir, dans ces conditions, une expression approchée du potentiel $V(M)$ créé par les deux fils au point M du plan, situé aux distances ρ_2 de O_2 et ρ_1 de O_1 .

Exprimer $V(M)$ en fonction des coordonnées polaires r et θ de M . On prend $V(O) = 0$.



- (a) $V(M) \simeq \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r}$
- (b) $V(M) \simeq \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r}$
- (c) $V(M) \simeq \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r}$
- (d) $V(M) \simeq \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \theta}{r}$

3. Indiquer la nature des traces, dans le plan (xOy) des surfaces équipotentielles autres que $V = 0$.

- (a) Droites parallèles à l'axe Ox .
 (b) Droites parallèles à l'axe Oy .
 (c) Cercles centrés sur l'axe Ox .
 (d) Cercles centrés sur l'axe Oy .
4. Soit $\vec{E}(M)$ le vecteur champ électrostatique qui dérive du potentiel $V(M)$. Indiquer la nature des lignes $\|\vec{E}(M)\| = \text{cte}$ et déterminer l'angle $(\vec{Ox}, \vec{E}(M))$.
- (a) Ellipses dont l'un des foyers est O .
 (b) Cercles centrés sur O .
 (c) $\alpha = \frac{3\theta}{2}$.
 (d) $\alpha = 2\theta$.

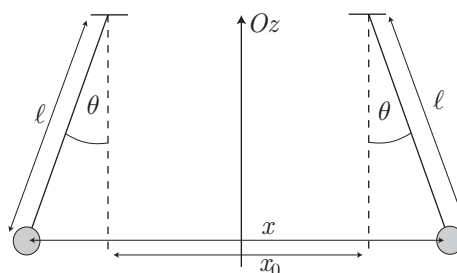
● **236** ————— **Lycée Blaise Pascal, Rouen**

15 min.

Énergie électrostatique

MPSI-PCSI-PTSI

Deux boules chargées, de même masse m et de charge q , sont animées d'un mouvement symétrique par rapport à l'axe vertical ascendant Oz .



1. Montrer que l'énergie potentielle \mathcal{E}_p du dispositif est donnée par la relation :

$$\frac{\mathcal{E}_p}{2mg\ell} = \frac{K}{1 + \alpha \sin \theta} + 1 - \cos \theta = f(\theta)$$

Donner l'expression des constantes α et K .

2. La courbe représentative de $f(\theta)$ admet un *minimum* pour $\theta = \theta_0$. Si on se limite à de petits angles, donner l'expression théorique de la pulsation ω du mouvement harmonique autour de la position d'équilibre θ_0 . On posera $\varepsilon = \theta - \theta_0$ et l'on exprimera ω en fonction de g (intensité de la pesanteur), ℓ et $\left. \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right|_{\theta_0}$.

● **237** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

20 min.

Énergie électrostatique

MPSI-PCSI-PTSI

Un disque, centré sur O , de rayon R et de densité surfacique de charges σ uniforme, présente une épaisseur négligeable. Son axe Oz , vertical et ascendant, contient une particule M de charge q et de masse m , à la cote $OM = z > 0$. On supposera que

la présence de M ne modifie pas le champ électrique \vec{E} produit par le disque et on constate qu'en plus de la force électrostatique exercée par le disque, la particule est soumise à son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$.

1. Exprimer le champ \vec{E} qui s'exerce sur M , en fonction de σ , ε_0 , z , R et \vec{k} (vecteur unitaire de Oz).

En déduire qu'il existe au moins une position d'équilibre pour M , à condition que :

$$2mg\varepsilon_0 < \sigma q$$

On supposera vérifiée cette condition dans la suite de l'exercice.

2. Montrer que cette position d'équilibre est repérée à l'altitude :

$$z_0 = \frac{\alpha R}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

où α est une constante à exprimer en fonction de m , g , ε_0 , σ et q .

3. Montrer que l'équilibre précédemment mentionné est stable.
4. Si l'on écarte M de sa position d'équilibre, il se produit des oscillations de pulsation ω . Donner ω en fonction de σ , q , m , ε_0 et α .

238

Q.C.M.

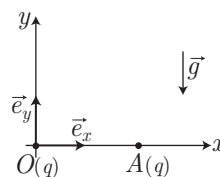
25 min.

Énergie électrostatique

MPSI-PCSI-PTSI

1. Deux charges électriques ponctuelles identiques (q) sont placées respectivement à l'origine et au point $A(a > 0, 0)$ du repère plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

Calculer les composantes E_x et E_y du vecteur champ électrostatique $\vec{E}(P)$ créé au point P du plan, de coordonnées x et y .



- (a) $E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x - a}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}} \right]$
- (b) $E_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x + a}{[(x + a)^2 + y^2]^{3/2}} \right]$
- (c) $E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}} \right]$
- (d) $E_y = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y}{[(x + a)^2 + y^2]^{3/2}} \right]$

2. Indiquer sur quelle droite Δ du plan $\vec{E}(P)$ est parallèle en tout point à l'axe Oy .

Donner l'expression correspondante de \vec{E} .

- (a) Δ est la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$

(b) Δ est la droite d'équation : $x = y$

$$(c) \vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{y^2} \vec{e}_y$$

$$(d) \vec{E}(P) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{y}{\left(y^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} \vec{e}_y$$

3. Une charge électrique ponctuelle q' , de masse m et de signe contraire à celui de q , se déplace sans frottements sur la droite Δ , à proximité immédiate de l'axe Ox ($|y| \ll a$), sous l'action de la force électrostatique due au champ des deux charges q et de son poids. Oy est la verticale ascendante et g est l'accélération de la pesanteur, supposée uniforme.

$$\text{On pose : } k = -\frac{4}{\pi\epsilon_0} \times \frac{qq'}{a^3}.$$

Constater qu'il existe une position d'équilibre P_e et calculer l'ordonnée y_e de P_e .

$$(a) y_e = \frac{mg}{k} \quad (b) y_e = -\frac{mg}{3k}$$

$$(c) y_e = -\frac{mg}{k} \quad (d) y_e = -\frac{mg}{4k}$$

4. Calculer la période T_0 des oscillations qu'effectue la charge q' écartée de sa position d'équilibre.

$$(a) T = 0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} \quad (b) T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

$$(c) T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} \quad (d) T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

● 239 ————— Concours ESME

60 min.

Énergie électrostatique

MPSI-PCSI-PTSI

On considère une sphère de centre O et de rayon R , portant une charge $-q$ (q étant positif) uniformément répartie en volume. On appelle $x'Ox$ un diamètre de la sphère et on note \vec{v} le vecteur unitaire de cet axe. En coordonnées polaires, cette sphère crée, en un point M , un champ électrique :

$$\begin{cases} \vec{E}_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \times r \vec{e}_r \text{ pour } r \leq R \\ \vec{E}_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \text{ pour } r \geq R \end{cases} \quad \text{avec } \vec{OM} = r \vec{e}_r$$

Cette sphère est plongée dans un champ électrique uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \vec{v}$ colinéaire à l'axe $x'Ox$. On supposera négligeable toute action de \vec{E}_0 sur la sphère elle-même.

1. On note $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$ le champ électrique résultant.

Déterminer le champ \vec{E} en tout point de $x'Ox$ en fonction de q , ϵ_0 , x , R et \vec{E}_0 .

On pose $\vec{E} = E \vec{v}$. Tracer l'allure du graphe de E en fonction de x ; on prendra soin de distinguer les cas : $x \leq -R$, $-R \leq x \leq R$ et $x \geq R$.

2. Une particule matérielle ponctuelle, de masse m et de charge $+q$, est dorénavant susceptible de se déplacer sur l'axe $x'Ox$ du système précédent (en particulier, il lui est possible de se trouver à l'intérieur de la sphère). On négligera toute autre action sur cette charge que celle du champ \vec{E} défini ci-dessus et on suppose que sa présence ne modifie pas le champ \vec{E}
- À l'aide du graphe précédent, établir l'allure de la courbe donnant l'énergie potentielle \mathcal{E}_p de cette charge.
 - En déduire qu'il existe deux positions d'équilibre sur l'axe $x'Ox$, à condition que E_0 vérifie une inégalité que l'on précisera et dont on donnera le sens physique.
 - Montrer que l'abscisse x_A du point A correspondant à la position d'équilibre stable est : $x_A = \frac{4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0}{q}$ (on prendra soin de justifier la stabilité de cet équilibre).
3. On écarte la particule du point A d'une distance a (positive), tout en la maintenant sur l'axe $x'Ox$ et on l'abandonne sans vitesse initiale.
- Déterminer la valeur a_M que l'on peut donner à a pour que la particule effectue des oscillations sinusoïdales.
Quel est alors leur pulsation ω_0 ?
 - Application numérique* : le système précédent modélise l'atome d'hydrogène. On adopte les valeurs numériques suivantes :

$$q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \quad R = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

On rappelle que $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ USI}$.

Calculer :

- la valeur maximale E_{0M} pour qu'il y ait un équilibre stable possible ;
- la valeur a_M dans le cas où $E_0 = \frac{1}{2} E_{0M}$;
- la fréquence des oscillations sinusoïdales, lorsqu'elles existent. La fréquence appartient-elle au domaine optique (on rappelle que la célérité de la lumière dans le vide est $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) ?

● 240 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

10 min.

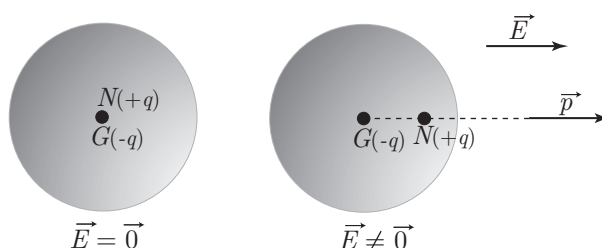
Théorème de Gauss

MPSI-PCSI-PTSI

Un atome peut être (grossièrement) assimilé à un noyau ponctuel N , de charge $+q$, entouré d'un nuage électronique, supposé sphérique de rayon R , comportant une charge totale $-q$ répartie uniformément dans le volume $V = \frac{4}{3} \pi R^3$. On note G le barycentre électrique de ce nuage électronique et on admet ici que G coïncide avec le centre géométrique du nuage électronique.

En l'absence de champ électrique, N et G sont supposés confondus. En revanche, sous l'influence d'un champ électrique \vec{E} uniforme, le déplacement relatif de N et G induit l'apparition d'un *moment dipolaire* électrique $\vec{\mu}$ défini par :

$$\vec{\mu} = q \times \overrightarrow{GN}$$



Montrer que $\vec{\mu}$ et \vec{E} sont colinéaires : $\vec{\mu} = \alpha \vec{E}$, et exprimer la constante α (*polarisabilité* de l'atome) en fonction de R .
On supposera que $r = GN < R$.

● **241** ————— **Lycée Condorcet, Paris**

10 min.

Théorème de Gauss

MPSI-PCSI-PTSI

Soit un cylindre droit, de rayon R , d'axe Ox , de hauteur $h \gg R$, de sorte qu'on le considère comme infini et qu'on négligera les effets de bords. Ce cylindre est chargé en surface avec une densité superficielle uniforme σ .

- Déterminer le champ électrostatique \vec{E} créé en tout point de l'espace à la distance r de l'axe du cylindre (on distinguera les cas $r < R$ et $r > R$).
- Donner l'allure de la courbe $E(r)$. Qu'observe-t-on pour $r = R$?

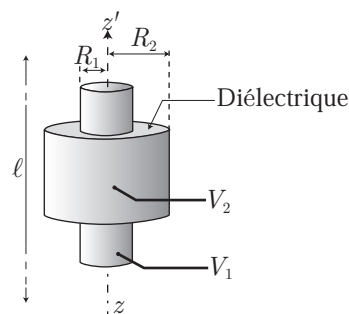
● **242** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

Théorème de Gauss

MPSI-PCSI-PTSI

On considère un condensateur cylindrique d'axe (zz') et de longueur ℓ suffisamment grande pour qu'on puisse négliger les effets de bords. Ce condensateur est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux portant les charges $+Q$ et $-Q$ uniformément réparties en surface (densité surfacique σ). Le conducteur intérieur, de rayon R_1 , est porté au potentiel V_1 et l'autre conducteur (cylindre évidé de rayon R_2) est porté au potentiel V_2 . L'espace séparant les deux conducteurs est rempli d'un matériau parfaitement isolant (diélectrique) assimilable à du vide.



- En utilisant le théorème de Gauss, exprimer le champ électrique \vec{E} en tout point situé à une distance $r \in [R_1, R_2]$ de l'axe (zz') .
- En déduire l'expression de la différence de potentiel $V_1 - V_2$ en fonction de Q , R_1 , R_2 , ℓ et ϵ_0 .
- Montrer que ce dispositif se comporte comme un condensateur de capacité :

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 \ell}{\ln(R_2/R_1)}$$

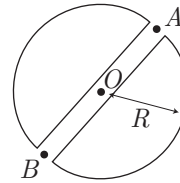
● **243** ————— **Lycée Saint-Louis, Paris**

20 min.

Théorème de Gauss appliqué à la gravitation

MPSI-PCSI-PTSI

Un objet de masse m est lâché de la surface de la Terre, de centre O , sans vitesse initiale, dans un tuyau creusé dans la Terre, homogène et sphérique. Ce tuyau décrit un diamètre de la Terre. On note g_0 l'intensité du champ de pesanteur au niveau du sol, R le rayon de la Terre, M sa masse. On considère également que le référentiel terrestre est galiléen.



1. Exprimer, en fonction de g_0 , R et r , le champ de gravitation à une distance $r < R$ de O .
2. En supposant que le mouvement de la masse m s'effectue sans frottements, établir l'équation différentielle vérifiée par r :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{g_0}{R} r^2 = g_0 R$$

3. En déduire le temps mis par la particule pour parvenir à l'autre bout du tunnel.

● **244** ————— **Lycée Thiers, Marseille**

30 min.

Théorème de Gauss

MPSI-PCSI-PTSI

On considère deux sphères concentriques de rayons R_i et R_e ($R_i < R_e$). Entre les deux sphères le champ électrique \vec{E} a pour expression : $\vec{E} = k (r - R_i) \vec{e}_r$. Le champ est nul à l'intérieur de la sphère de rayon R_i et pour $r > R_e$, l'espace est vide.

Déterminer :

1. la densité volumique de charge ρ ;
2. la charge totale Q , en fonction de k et des autres paramètres ;
3. le champ et le potentiel en tout point de l'espace.

● **245** ————— **Lycée Hoche, Versailles**

45 min.

Théorème de Gauss

MPSI-PCSI-PTSI

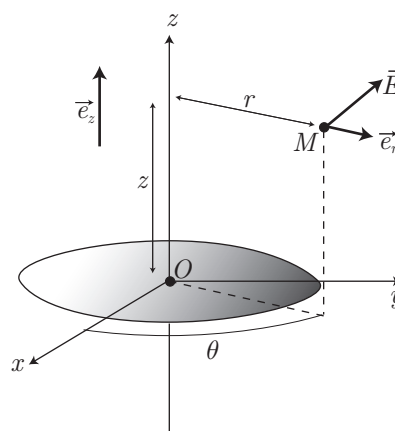
Un disque, de rayon R , de centre O et d'axe Oz , porte une densité surfacique de charge σ uniforme.

1. Montrer que le champ électrique $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_z \vec{e}_z$ présente une symétrie de révolution autour de Oz .
2. Montrer qu'au voisinage de l'axe, dans une région vide de charge :

$$E_r \simeq -\frac{r}{2} \times \left. \frac{dE_z}{dz} \right|_{r=0}$$

Indication : On pourra utiliser le théorème de Gauss pour un cylindre élémentaire de rayon r , d'axe Oz , limité par les plans de cotes z et $z + dz$.

3. En déduire une expression approchée de la composante $E_r(r, z)$ au voisinage de (Oz) .



● 246 ————— Lycée Fabert, Metz

10 min.

Dipôle électrostatique

MPSI-PCSI-PTSI

À l'origine O d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est placée une molécule de moment dipolaire fixe : $\vec{p}_0 = p_0 \vec{k}$ (molécule polaire, non polarisable) et au point $M(r, 0, 0)$ se trouve une molécule de moment dipolaire intrinsèque nul, et de polarisabilité α (molécule non polaire, polarisable).

On rappelle que, soumise à un champ électrostatique \vec{E} , une molécule polarisable fait apparaître un moment dipolaire : $\vec{p} = \alpha \vec{E}$.

1. Déterminer le caractère attractif ou répulsif de la force qui s'exerce entre les molécules.
2. Déterminer la force \vec{F} subie par la molécule polarisable et montrer qu'elle est proportionnelle à $\frac{1}{r^7}$.

● 247 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

10 min.

Dipôle électrostatique

MPSI-PCSI-PTSI

Un dipôle électrostatique est constitué de deux charges $(+q)$ et $(-q)$ portées par des points A et B situés sur un axe Ox , aux abscisses respectives $x_A = a$ et $x_B = -a$. Un point M est situé à une distance r de O , dans une direction définie par l'angle $\theta = (\vec{e}_r, \vec{Ox})$.

1. On suppose $r \gg a$. Trouver l'expression approchée du potentiel V créé par ce dipôle en M .
2. En déduire la composante radiale E_r du champ électrostatique décrit par $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$ en coordonnées polaires.
3. Calculer le flux de \vec{E} à travers une surface (Σ) sphérique, de rayon r et centrée sur O . Ce résultat confirme-t-il le théorème de Gauss, en dépit des approximations réalisées ?

● **248** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

20 min.

Dipôle électrostatique

MPSI-PCSI-PTSI

Un champ électrique uniforme \vec{E} règne dans tout l'espace. On place, en un point O , un dipôle de moment \vec{p} parallèle à \vec{E} .

1. Montrer qu'il existe une sphère (Σ), de centre O , sur laquelle le potentiel est constant. Calculer le rayon a de (Σ), ainsi que son potentiel.

On choisit, arbitrairement, le potentiel du point O nul pour le champ \vec{E} .

2. Calculer, en tout point de (Σ), les composantes radiale et orthoradiale du champ total.

● **249** ————— **Lycée Thiers, Marseille**

20 min.

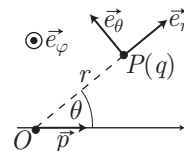
Dipôle électrostatique

MPSI-PCSI-PTSI

Soient, en présence l'un de l'autre, un dipôle électrostatique de moment \vec{p} au point O , et une charge q au point P .

1. De l'expression du potentiel V_p en P , dû au dipôle :

$$V_p = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$



déduire la force \vec{F}_q qui s'exerce sur la charge q .

2. Déduire de la question précédente l'expression de la force \vec{F}_p qui s'exerce sur le dipôle.
3. On considère le système de deux points $\{O, P\}$. Calculer l'énergie potentielle d'interaction de l'ensemble et déterminer la valeur de θ qui assure au dipôle une position d'équilibre stable (on distinguera les cas $pq > 0$ et $pq < 0$).

● **250** ————— **Concours e4a**

30 min.

Dipôle électrostatique

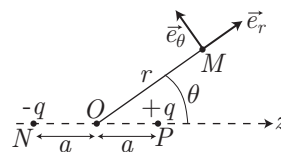
MPSI-PCSI-PTSI

1. Rappeler la définition d'un dipôle électrostatique de moment \vec{p} , ainsi que son unité (on note $p = \|\vec{p}\|$).

Considérons le dipôle électrostatique représenté sur la figure ci-contre.

Dans la suite, on supposera que $r \gg a$, avec

$2a = \|\vec{NP}\|$. Cette distance étant constante, le dipôle est dit « rigide ».



2. (a) Donner, sans calcul, la composante du champ électrostatique (créé par cette distribution) portée par un vecteur unitaire perpendiculaire au plan (\vec{OM}, \vec{Oz}) . Justifier rapidement que l'étude peut se faire dans le plan polaire repéré par les vecteurs de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

- (b) Déterminer, à l'ordre le plus bas en $\frac{a}{r}$, l'expression du potentiel électrostatique créé au point $M(r, \theta)$ par le dipôle, avec comme référence le potentiel nul à l'infini.

- (c) En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en $M(r, \theta)$ par le dipôle. Montrer que celui-ci peut s'écrire sous la forme donnée par l'équation :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \times \vec{e}_r - \vec{p}]$$

- (d) Tracer, dans un plan méridien, les équipotentielles $V = 0$, $V > 0$ et $V < 0$.
 (e) Établir les équations des lignes de champ et des équipotentielles. Vérifier qu'en tout point, les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ.

● 251 Concours ENSG, Nancy

40 min.

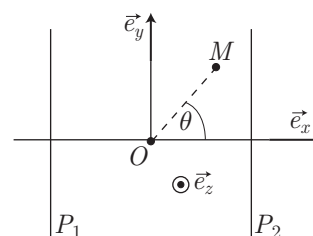
Dipôle électrostatique

MPSI-PCSI-PTSI

1. Deux plaques métalliques planes, parallèles, P_1 et P_2 , distantes de e , délimitent une région de l'espace vide : $-\frac{e}{2} < x < \frac{e}{2}$.

La plaque P_1 est reliée à la borne positive d'un générateur de force électromotrice U , la plaque P_2 à la borne négative, elle-même étant reliée au sol, c'est-à-dire maintenue au potentiel 0.

Ce dispositif crée, dans l'espace interconducteur, un champ électrique uniforme : $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$.

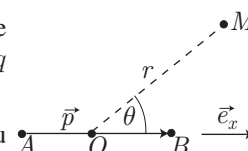


- (a) Exprimer la différence de potentiel $V_1 - V_2$, en fonction de E_0 et de e , V_1 et V_2 étant les potentiels de P_1 et de P_2 respectivement.
 (b) Exprimer, de même, la différence de potentiel $V - V_2$, où V est le potentiel du point M à l'intérieur de l'espace interconducteur ; on exprimera le résultat en fonction de E_0 , e et x , abscisse de M , puis en fonction de E_0 , e , r et θ ; r et θ sont les coordonnées polaires de M .

2. Un dipôle électrostatique, de moment dipolaire \vec{p} , est placé en un point O' .

- (a) Calculer le potentiel créé par ce dipôle au point M repéré par ses coordonnées polaires r et θ , si ce dipôle est modélisé par une charge $-q$ en A et une charge $+q$ en B , avec $r \gg AB$, $q > 0$ et $\vec{p} = q \vec{AB}$.

- (b) En déduire les coordonnées radiale et orthoradiale du champ électrique \vec{E} créé en M par ce dipôle.



3. Le dipôle est placé au point O de l'espace interconducteur de la première question, entre les deux plaques P_1 et P_2 , dans le champ \vec{E}_0 qu'elles créent et que l'on suppose non perturbé par cette introduction.

Il peut tourner librement dans le plan de la figure autour de l'axe fixe (O, \vec{e}_z) perpendiculaire au plan de la figure.

Le vecteur moment dipolaire fait initialement un angle α avec l'axe (O, \vec{e}_x) : $\alpha = (\vec{e}_x, \vec{p})$.

- (a) Indiquer qualitativement l'action du champ \vec{E}_0 sur ce dipôle.

On pourra analyser cette action en termes de force et de moment de force.

- (b) Préciser la position d'équilibre stable de ce dipôle.

4. Le dipôle est dans sa position d'équilibre stable.

(a) Calculer le potentiel électrostatique V créé par les plaques (sources de \vec{E}_0) et par le dipôle \vec{p} .

On l'exprimera en fonction de p , r , θ , E_0 et U .

(b) Montrer, après avoir factorisé dans V la dépendance angulaire, qu'il existe une équipotentielle particulière, formée de deux nappes, de potentiel $\frac{U}{2}$.

Tracer, à main levée, ces deux nappes.

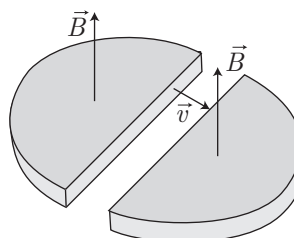
● 252 ————— Concours de l'ENAC

10 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Mouvement de particules chargées

Un cyclotron est formé de deux régions, appelées *Dees*, à l'intérieur desquelles règne un champ magnétique uniforme $B = 0,1$ T, perpendiculaire au plan des *Dees*. La particule à accélérer, de charge $q = 2e$ ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C), de masse $m = 4 \cdot 10^{-26}$ kg, est injectée dans un des *Dees*, avec une faible vitesse horizontale \vec{v} , perpendiculaire à \vec{B} . Une tension U , de fréquence f , appliquée entre les deux *Dees*, permet à chaque passage d'accélérer la particule.



La fréquence f est approximativement égale à :

1. $f = 0,26$ MHz
2. $f = 0,13$ MHz
3. $f = 0,40$ MHz
4. $f = 0,20$ MHz

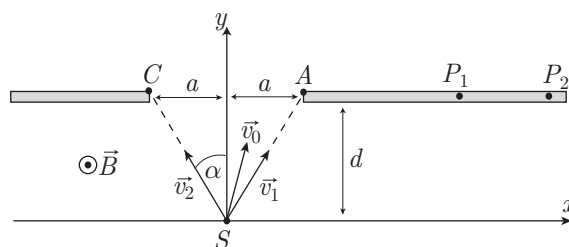
● 253 ————— Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

15 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Mouvement de particules chargées

Soit une source filiforme S , parallèle au champ magnétique \vec{B} , uniforme et constant, régnant dans tout l'espace. Cette source émet des particules identiques de masse m et de charge q positive. Les vitesses initiales sont perpendiculaires à \vec{B} et de même norme v_0 .



La fente source S est parallèle à la grande médiane d'une ouverture rectangulaire de largeur $2a$, équidistante de ses bords et située à la distance d de son plan. On désigne par 2α l'ouverture du pinceau utile. On admettra que chaque particule décrit une trajectoire

circulaire de rayon $R = \frac{mv_0}{qB}$ et que les particules passant par A (resp. C) possèdent la vitesse \vec{v}_1 (resp. \vec{v}_2).

- Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire d'une particule quittant S avec un vecteur vitesse \vec{v}_i faisant un angle θ_i ($-\alpha \leq \theta_i \leq \alpha$) avec l'axe Oy . On admettra que d est assez petit pour que toutes les particules passent à travers l'ouverture.
- En déduire, en fonction de d , α et R , la distance P_1P_2 séparant les deux droites parallèles à S , entre lesquelles se trouvent les intersections, dans le plan de l'ouverture rectangulaire, des trajectoires de toutes les particules.
- Que devient la distance P_1P_2 lorsque l'angle α est petit et R très supérieur à d ?

● 254

Concours ESIM

15 min.

Mouvement de particules chargées

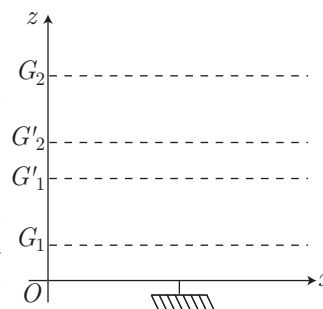
MPSI-PCSI-PTSI

Le dispositif représenté sur la figure ci-dessous comprend une cathode émissive d'électrons, portée au potentiel zéro, de forme plane, centrée en O .

Des électrodes planes, en forme de grilles métalliques transparentes aux électrons, sont placées perpendiculairement à l'axe Oz .

Les grilles G_1 et G'_1 sont portées au même potentiel V_1 ; les grilles G_2 et G'_2 sont portées au même potentiel V_2 ; soit d la distance très faible entre les grilles G'_1 et G'_2 .

Un électron aborde la grille G_1 sous un angle θ_1 , avec la vitesse \vec{v}_1 . θ_1 est mesuré par rapport à la normale à la grille G_1 et l'électron a été émis par la cathode avec une vitesse initiale négligeable.



- Quelle est la nature de la trajectoire entre G_1 et G'_1 , entre G_2 et G'_2 et enfin entre G'_1 et G'_2 ?
- Soit θ_2 l'angle que fait le vecteur vitesse \vec{v}_2 de l'électron avec la normale à la grille G'_2 , à la traversée de celle-ci. Établir une relation, sous forme d'invariant, entre θ_1 , V_1 et θ_2 , V_2 .
- Pour quelle valeur de θ_1 l'électron est-il « réfléchi » au niveau de la grille G'_2 ? Calculer la valeur numérique de l'angle limite θ_{10} pour $V_1 = 100$ V et $V_2 = 80$ V.
- Ce dispositif rappelle un système optique ; préciser lequel ainsi que les analogies.

● 255

Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

20 min.

Mouvement de particules chargées

MPSI-PCSI-PTSI

Une particule M , de masse m et de charge q , est lancée en un point O , à l'instant origine, avec une vitesse initiale \vec{v}_0 , dans une région où règne un champ magnétique constant et uniforme \vec{B} . On choisit un repère orthonormé $Oxyz$ tel que \vec{B} soit parallèle à Oz et on désigne par \dot{x}_0 , \dot{y}_0 et \dot{z}_0 les composantes de la vitesse initiale selon les trois axes.

Déterminer les coordonnées x, y, z de la particule M en fonction du temps. Donner l'équation explicite de la trajectoire de M sur le plan xOy et décrire la trajectoire de

M. Calculer la distance P séparant O du point où la trajectoire recoupe l'axe Oz pour la première fois. On posera : $\omega = \frac{qB}{m}$.

● **256** ————— **Lycée Clémenceau, Reims**

20 min.

Mouvement de particules chargées

MPSI-PCSI-PTSI

On étudie, dans le plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$, le mouvement d'une particule de masse m et de charge q , dans le champ d'un dipôle électrostatique de moment $\vec{p} = p \vec{e}_x$ placé en O . Cette particule se trouve, à la date t , au point M repéré par les coordonnées polaires r, θ . Les conditions initiales sont les suivantes :

$$r(0) = r_0, \theta(0) = 0, \dot{r}(0) = 0, r(0) \dot{\theta}(0) = v_0 > 0$$

On rappelle que le dipôle crée, en M , le potentiel électrostatique :

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos\theta}{r^2}$$

1. Écrire, à partir de la relation fondamentale de la dynamique, deux équations vérifiées par r, θ et leurs dérivées par rapport à t . On posera $k = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 m}$.
2. Écrire alors une troisième équation vérifiée par r et θ et leurs dérivées par rapport au temps, traduisant la conservation de l'énergie mécanique que l'on notera \mathcal{E} .
3. Dédire des équations précédentes une équation ne contenant que r et ses dérivées par rapport au temps. Intégrer cette équation et donner l'expression de r en fonction de t, m, r_0 et \mathcal{E} . Discuter suivant le signe de \mathcal{E} .
4. On considère alors le cas particulier pour lequel la trajectoire de la particule est circulaire. Quelle est dans ce cas la valeur de \mathcal{E} ?

Calculer la période T de rotation de la particule en fonction de v_0, r_0 et de l'intégrale définie par :

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$$

● **257** ————— **Concours ENGEES**

30 min.

Mouvement de particules chargées

MPSI-PCSI-PTSI

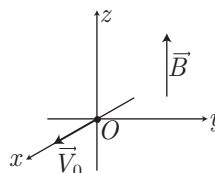
On considère un référentiel galiléen, d'origine O , d'axes orthonormés Ox, Oy, Oz ; il

règne un champ magnétique $\vec{B} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$ uniforme et permanent.

Une particule ponctuelle, de charge q positive et de masse m ,

pénètre en O avec une vitesse initiale $\vec{V}_0 \begin{pmatrix} V_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On pose $\omega_0 = \frac{qB}{m}$ et $R = \frac{V_0}{\omega_0}$.



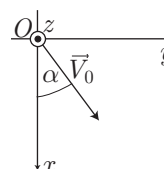
On utilisera la notation \dot{f} , \ddot{f} pour désigner les dérivées temporelles successives de f .

1. (a) Écrire, en fonction de q , B , \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , les composantes de la force subie par la charge q , dans le champ magnétique \vec{B} .
- (b) En déduire les équations différentielles permettant d'étudier le mouvement de la particule ; on introduira ω_0 et on montrera que le mouvement est plan.
- (c) Déterminer les équations paramétriques $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de ce mouvement. Préciser clairement la trajectoire, en justifiant le raisonnement.
- (d) Quelles sont, à la date $t = \frac{\pi}{\omega_0}$, les coordonnées du point P atteint par la particule ?
Dessiner qualitativement la trajectoire de cette particule entre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{\omega_0}$.
- (e) Quelle est la variation d'énergie cinétique de la particule entre ces deux dates ?

2. La vitesse initiale est modifiée : $\vec{V}_0 = \begin{pmatrix} V_0 \cos \alpha \\ V_0 \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le champ magnétique est inchangé.

- (a) En reprenant la méthode suivie précédemment, déterminer les nouvelles équations paramétriques $x(t)$, $y(t)$ du mouvement. Vérifier que, pour $\alpha = 0$, on retrouve les résultats précédents.
- (b) Quelles sont, à la date $t = \frac{\pi}{\omega_0}$, les coordonnées du point Q atteint par la particule ?
Exprimer la distance PQ en fonction de R et α .



● 258 ————— Concours des Ponts et Chaussées

40 min.

Mouvement de particules chargées

MPSI-PCSI-PTSI

1. Établir et décrire la trajectoire non relativiste d'une particule de masse m et de charge positive q dans un champ magnétique \vec{B} uniforme et constant, définissant l'axe Oz attaché à un référentiel galiléen. On introduira la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{qB}{m}$.
2. Un référentiel galiléen \mathcal{R} est en translation uniforme avec la vitesse \vec{V}_e par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{S} . On note \vec{E}_r et \vec{B}_r (respectivement \vec{E}_s et \vec{B}_s) les champs électriques et magnétiques, l'un et l'autre uniformes et constants, mesurés dans le référentiel \mathcal{R} (respectivement \mathcal{S}). On suppose que la formule donnant la force agissant sur la particule : $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$, reste vraie dans tout référentiel. Établir alors que :

$$\vec{B}_r = \vec{B}_s \text{ et } \vec{E}_r = \vec{E}_s + \vec{V}_e \wedge \vec{B}_s$$

3. Les champs \vec{E}_s et \vec{B}_s sont orthogonaux. À l'instant initial, la vitesse de la particule dans \mathcal{S} est nulle. Montrer, en choisissant judicieusement le référentiel galiléen d'étude, que la trajectoire de la particule est celle d'un point fixé sur un cercle qui roule sans glisser sur une droite, en restant dans un plan fixe. Nommer cette trajectoire et la tracer.

4. Dans ce dernier référentiel, établir l'expression de la vitesse maximale de la particule.

● **259** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

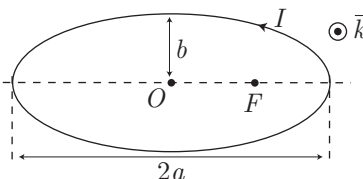
10 min.

Loi de Biot et Savart

MPSI-PCSI-PTSI

Un circuit électrique a la forme d'une ellipse de foyer F et de demi-axes a et b . Il est parcouru par un courant électrique d'intensité I constante.

Exprimer le champ magnétique créé par ce courant en F , en fonction de a , I , b et \vec{k} .



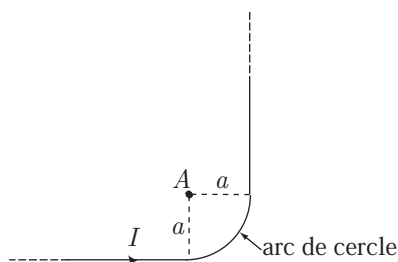
● **260** ————— **Lycée Fabert, Metz**

10 min.

Loi de Biot et Savart

MPSI-PCSI-PTSI

Déterminer, par un calcul direct, le champ magnétique B créé en un point A par le circuit ci-dessous :



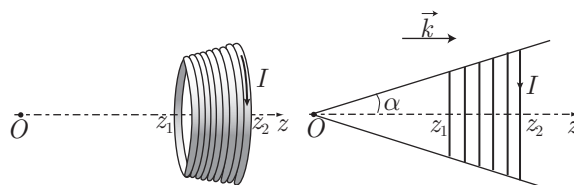
● **261** ————— **Lycée Saint-Louis, Paris**

15 min.

Loi de Biot et Savart

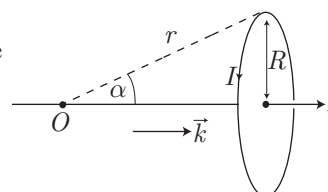
MPSI-PCSI-PTSI

On considère un ensemble de spires jointives, parcourues par un courant de même intensité I , enroulées sur un cône de sommet O , de demi-angle au sommet α , entre z_1 et z_2 , comme indiqué sur le schéma suivant. On appelle b le diamètre du fil constituant les spires, tel que $b \ll z_2 - z_1$.



1. Montrer que le champ magnétique sur l'axe d'une spire s'écrit :

$$\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{R}{r^2} \times \sin \alpha \vec{k}$$



2. En déduire l'expression du champ magnétique créé en O par la distribution tronconique.

● 262 ————— Concours National DEUG

15 min.

Loi de Biot et Savart

MPSI-PCSI-PTSI

On rappelle que l'élément de champ magnétique $\delta\vec{B}$ créé en un point M par un élément de circuit $d\vec{\ell}$, centré au point P et parcouru par un courant i , est défini par :

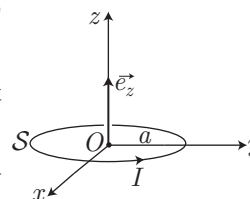
$$\delta\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2} \text{ avec } r = PM \text{ et } \vec{u} = \frac{\vec{PM}}{r}$$

Une spire est un conducteur métallique filiforme parcouru par un courant d'intensité I constante et positive (l'origine du courant n'est pas précisée).

1. On considère le champ magnétique $\vec{B}(O)$ créé au point O par le courant d'intensité I .

(a) Recopier, approximativement, la figure ci-contre et préciser l'orientation du champ $\vec{B}(O)$.

(b) Déterminer, en fonction des données de l'énoncé, la norme $B(O)$ du champ $\vec{B}(O)$.



2. Soit un point $M(0, 0, z)$ appartenant à l'axe (Oz) . Déterminer l'expression vectorielle du champ magnétique résultant $\vec{B}(M)$ créé, au point M , par le courant d'intensité I .
3. Une particule, de charge q positive, se trouve au point O à l'instant initial $t = 0$, avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$ ($v_0 > 0$). On néglige l'action du champ de pesanteur. Déduire le mouvement de la particule.

● 263 ————— Lycée Fabert, Metz

15 min.

Loi de Biot et Savart

MPSI-PCSI-PTSI

Les bobines de Helmholtz sont un dispositif constitué de deux spires S_1 et S_2 , de même rayon a , de même axe Oz , situées respectivement dans les plans $z = +\frac{a}{2}$ et $z = -\frac{a}{2}$. Ces spires, orientées positivement autour de Oz , sont parcourues dans le même sens par un courant d'intensité I .

- Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par ce système en tout point M appartenant à l'axe Oz .
- Exprimer $\vec{B}(M)$ en fonction de $\alpha = \frac{z}{a}$; représenter le graphe de la fonction $B(\alpha)$.
- Déterminer la valeur de α telle que $B(\alpha) = 0,999 \times B(0)$ (en faisant une recherche numérique à la calculatrice). Conclure.

● **264** **Lycée Michelet, Vanves**

20 min.

Loi de Biot et Savart

MPSI-PCSI-PTSI

L'espace, défini par $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ y > 0 \end{cases}$ est parcouru par des courants continus, de direction \vec{k} , uniformément répartis et dont l'intensité totale est I .

On souhaite calculer le champ magnétostatique \vec{B} en $O(0, 0, 0)$, que l'on note \vec{B}_0 .

1. Déterminer la direction de \vec{B}_0 .
2. Pour le calcul de \vec{B}_0 , on se propose de découper le demi-cylindre en « fils élémentaires » de section dS , dont le champ $\delta\vec{B}$ peut être calculé par les expressions relatives au fil illimité.
 - (a) Rappeler, en la démontrant, l'expression $\vec{B}(M)$ du champ créé par un fil illimité, parcouru par un courant i , en un point M extérieur à celui-ci.
 - (b) En précisant le découpage utilisé, déterminer le courant dI traversant la section dS , en fonction de I , a et des éléments définissant dS .
 - (c) En déduire l'expression de \vec{B}_0 .

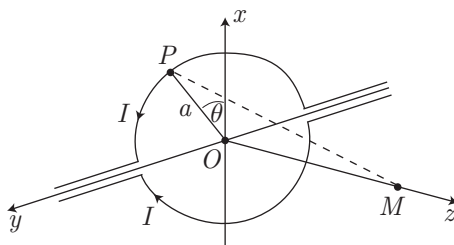
● **265** **Q.C.M.**

30 min.

Loi de Biot et Savart

MPSI-PCSI-PTSI

Deux demi-spires circulaires, de même centre O et de même rayon a , sont parcourues par des courants continus de même intensité I et de même sens. Elles appartiennent au plan (xOy) du repère cartésien d'origine O .



Soit \vec{B} le champ magnétique qu'elles créent au point M de l'axe Oz , d'abscisse $z = OM$.

1. Indiquer la direction de \vec{B} .
 - (a) Axe Oz
 - (b) Axe Oy
 - (c) Axe Ox
 - (d) Dans le plan (xOz)
2. Déterminer l'intensité B de ce champ. Il est commode d'utiliser comme variable d'intégration l'angle $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OP})$, P désignant le point courant de la distribution.
 - (a) $B = \frac{\mu_0}{4\pi} \times \frac{z^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}$.

$$(b) B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times \frac{z}{(z^2 + a^2)^{1/2}}.$$

$$(c) B = \frac{\mu_0 I}{\pi} \times \frac{b}{(z^2 + a^2)^{1/2}}.$$

$$(d) B = \frac{\mu_0 I}{\pi} \times \frac{az}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

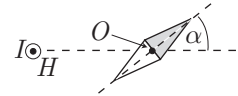
● 266 **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-jolie**

10 min.

Théorème d'Ampère

MPSI-PCSI-PTSI

Un fil linéaire « infini » est placé dans le champ magnétique terrestre de composante horizontale \vec{B}_H . Ce fil est parcouru par un courant uniforme et constant d'intensité I . On place dans un plan horizontal, à une distance $r = 2,5$ cm, l'aiguille aimantée d'une boussole de centre O , dont le projeté sur le fil coïncide avec un point H . L'expérience donne les résultats suivants :



- Lorsque $I = 0$, l'aiguille de la boussole prend la direction de \vec{HO} ;
- Lorsque $I = 2,5$ A, l'aiguille se stabilise dans une direction qui fait un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avec \vec{HO} .

1. À l'aide du théorème d'Ampère, donner l'expression du champ magnétique \vec{B}_1 que produit le fil en O , lorsqu'il est parcouru par le courant I .
2. (a) Quelle est la direction de \vec{B}_H ?
(b) Dédurre des résultats expérimentaux la valeur de l'intensité B_H de la composante horizontale du champ géomagnétique.

On rappelle que la perméabilité magnétique du vide vaut : $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ USI.

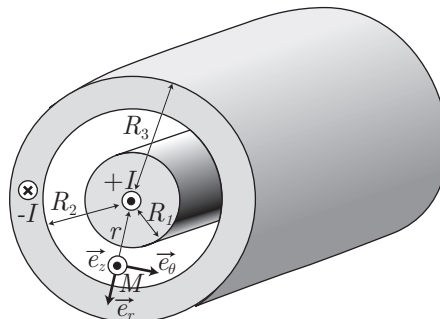
● 267 **Lycée Fabert, Metz**

15 min.

Théorème d'Ampère

MPSI-PCSI-PTSI

Un câble coaxial, d'axe (Oz) , est constitué par un conducteur cylindrique « infini » et plein, de rayon R_1 , entouré d'un conducteur externe occupant le volume compris entre les cylindres de rayons R_2 et R_3 ($R_3 > R_2 > R_1$), les trois cylindres étant coaxiaux. Un courant I circule dans le cylindre intérieur dans un sens et « revient » dans l'autre sens à l'intérieur du conducteur extérieur.



1. Déterminer la structure du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.
2. En supposant le courant uniformément réparti dans la section des conducteurs, calculer le champ $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.
3. Tracer le graphe de $B(r)$ où r désigne la distance de M à l'axe.

● 268

Concours ENSI

20 min.

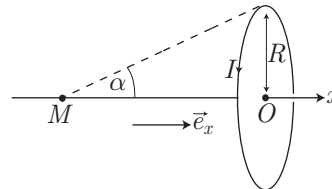
Théorème d'Ampère

MPSI-PCSI-PTSI

Soit une spire circulaire de rayon R , de centre O , parcourue par un courant constant d'intensité I . Soit un point M situé sur l'axe de la spire et tel que du point M un rayon de la spire soit vu d'un angle α .

En utilisant la loi de Biot et Savart, on peut montrer que le champ magnétique créé par cette spire vaut, en M :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_x$$



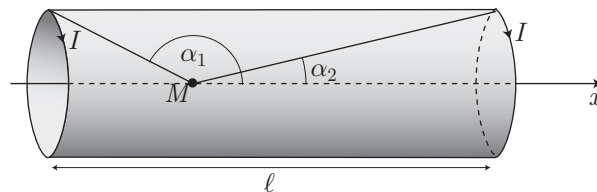
Considérons un solénoïde constitué par un enroulement régulier de fil conducteur sur un cylindre d'axe (Ox) .

L'enroulement est constitué des spires jointives de rayon R . Les N tours de fils, de même rayon R , occupent une longueur totale ℓ . Soit n le nombre de tours de fil par unité de longueur ($n = \frac{N}{\ell}$).

Les spires de ce solénoïde sont parcourues par un courant constant d'intensité I . Ce solénoïde peut être considéré comme une distribution de spires circulaires de rayon R et de même axe (Ox) .

1. Soit un point M situé à l'intérieur du solénoïde et sur son axe. Donner l'expression du champ magnétique créé par ce solénoïde en un point M de l'axe (Ox) , en fonction de l'intensité I , de μ_0 , de n et des angles α_1 et α_2 sous lesquels les spires sont vues du point M .

Que devient cette expression si l'on considère que le solénoïde est infiniment long ?



2. En utilisant les propriétés de symétrie, déterminer la direction du champ magnétique créé en tout point à l'intérieur de ce solénoïde infiniment long.
3. En appliquant le théorème d'Ampère, montrer que le champ magnétique est uniforme à l'intérieur du solénoïde et qu'il est nul à l'extérieur. On précisera clairement le contour utilisé pour appliquer le théorème d'Ampère.

● **269** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

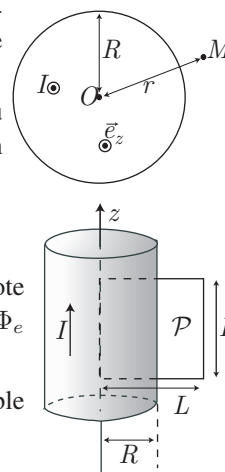
20 min.

Théorème d'Ampère

MPSI-PCSI-PTSI

Un conducteur cylindrique, de rayon R et d'axe Oz , est parcouru par un courant uniforme et constant d'intensité I , dans le sens du vecteur directeur \vec{e}_z d'un axe (Oz) .

- Déterminer les caractéristiques (direction et invariants) du champ magnétique $\vec{B}(M)$ que cette distribution produit en un point M , à la distance $r = OM$ de l'axe (Oz) .
- Représenter graphiquement la courbe $B(r) = \|\vec{B}(M)\|$.
- Soit \mathcal{P} un plan carré passant par l'axe Oz , de côté L . On note Φ_i le flux de \vec{B} à travers \mathcal{P} , à l'intérieur du conducteur et Φ_e celui à l'extérieur du conducteur (à travers \mathcal{P} également).
Exprimer, en fonction de R et L , le rapport $\frac{\Phi_e}{\Phi_i}$. Est-il possible de choisir L de manière à vérifier $\Phi_e = \Phi_i$?



● **270** ————— **Q.C.M.**

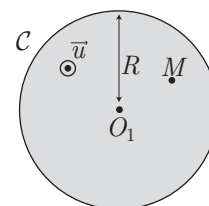
20 min.

Théorème d'Ampère

MPSI-PCSI-PTSI

Un cylindre \mathcal{C} , de rayon R , dont l'axe est parallèle à un vecteur unitaire \vec{u} perpendiculaire au plan de la figure ci-contre, est parcouru par un courant I constant, dans le sens défini par \vec{u} et de densité volumique uniforme. On supposera la longueur de \mathcal{C} très grande devant R .

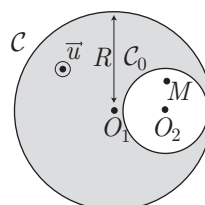
- Exprimer, en appliquant le théorème d'Ampère, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ créé par le courant circulant dans le cylindre, en un point M intérieur à \mathcal{C} .



$$\begin{aligned} \text{(a) } \vec{B}(M) &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 M} & \text{(b) } B(\vec{M}) &= -\frac{R^2 I}{2\pi\mu_0} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 M} \\ \text{(c) } \vec{B}(M) &= \frac{4\mu_0 I}{3\pi R^3} \overrightarrow{O_1 M} & \text{(d) } \vec{B}(M) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 M} \end{aligned}$$

- Le cylindre \mathcal{C} est maintenant percé d'une cavité cylindrique \mathcal{C}_0 , dont l'axe est parallèle à l'axe de \mathcal{C} et de rayon $r < \frac{R}{2}$. Les axes de \mathcal{C} et \mathcal{C}_0 sont distants de $a = O_1 O_2 < R/2$.

Exprimer vectoriellement le champ magnétique $\vec{B}_0(M)$ qui règne en un point M de la cavité lorsque le cylindre est parcouru par un courant d'intensité I dans le sens défini par \vec{u} et de densité volumique uniforme. On pourra considérer, pour cela, que le cylindre \mathcal{C} est équivalent à un ensemble de deux cylindres \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 respectivement confondus avec \mathcal{C} et \mathcal{C}_0 et parcourus par des courants volumiques égaux et opposés.



$$\begin{aligned} \text{(a) } \vec{B}_0(M) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} & \text{(b) } \vec{B}_0(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} \\ \text{(c) } \vec{B}_0(M) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi (R^2 - r^2)} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} & \text{(d) } \vec{B}_0(M) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} \end{aligned}$$

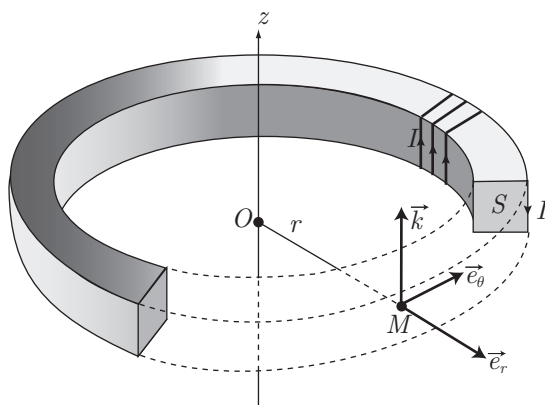
● 271 ————— Lycée du Parc, Lyon

20 min.

Théorème d'Ampère

MPSI-PCSI-PTSI

Soit, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) , une spire rectangulaire S contenue dans le plan $\theta = 0$, ayant ses côtés définis par $r = r_1$ et $r = r_2 > r_1$ et $z = \pm \frac{h}{2}$. S est orienté positivement par le vecteur unitaire \vec{e}_θ .



Une bobine torique est modélisée comme une distribution de $N \gg 1$ spires déduites de S par des rotations autour de (Oz) , d'angles $\frac{2\pi p}{N}$, avec p variant de 1 à N , et parcourues par le même courant d'intensité I .

1. En $M(r, \theta, z)$, déterminer la direction du champ magnétique \vec{B} et montrer que sa norme est constante le long d'une ligne de champ.
2. Calculer $\vec{B}(M)$ en distinguant les régions intérieures et extérieures à la bobine.
3. Calculer le flux magnétique ϕ à travers une spire, puis le flux total Φ à travers la bobine.

Montrer que l'on peut écrire : $\Phi = L \times I$.

● 272

Concours e3a

30 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Théorème d'Ampère

On envisage une distribution de courant volumique, uniforme et constante, de densité de courant $\vec{j} = J_0 \vec{e}_x$ entre les plans $y = -\frac{a}{2}$ et $y = \frac{a}{2}$, et nulle pour $|y| > \frac{a}{2}$.

1. Par une analyse des symétries, déterminer la direction du champ magnétique \vec{B} .

Justifier que le champ \vec{B} ne dépend que de y .
Montrer, également par un argument de symétrie, que $\vec{B}(y = 0) = \vec{0}$.

2. Déterminer l'expression de \vec{B} pour $|y| < \frac{a}{2}$.

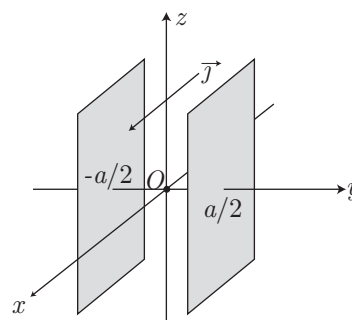
3. (a) Montrer que \vec{B} est uniforme pour $y > \frac{a}{2}$ et $y < -\frac{a}{2}$.

(b) Justifier que le champ \vec{B} est continu au passage par les faces $y = \frac{a}{2}$ et $y = -\frac{a}{2}$.

(c) En déduire les expressions de \vec{B} pour $y > \frac{a}{2}$ et pour $y < -\frac{a}{2}$.

4. On suppose désormais que a tend vers zéro, le produit $J_0 a$ restant égal à une constante J_s (densité de courants surfaciques).

Déterminer les expressions de \vec{B} en fonction de μ_0 et J_s , pour $y > 0$ et pour $y < 0$.
Vérifier la relation de passage donnant $\vec{B}(y = 0^+) - \vec{B}(y = 0^-)$.

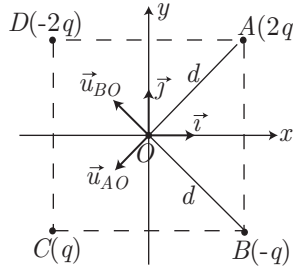


● **224** ————— **Lycée Carnot, Dijon**

Soient \vec{u}_{AO} et \vec{u}_{BO} les vecteurs unitaires de \vec{AO} et \vec{BO} respectivement :

$$\vec{u}_{AO} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{u}_{BO} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

En notant d les distances AO , BO , CO et DO , les charges électriques placées aux points A , B , C et D produisent, en O , les champs respectifs :



$$\vec{E}_A = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_{AO}, \quad \vec{E}_B = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_{BO}, \quad \vec{E}_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_{CO}, \quad \vec{E}_D = \frac{-2q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_{DO}$$

où les vecteurs unitaires \vec{u}_{CO} et \vec{u}_{DO} de \vec{CO} et \vec{DO} vérifient :

$$\vec{u}_{CO} = -\vec{u}_{AO} \Rightarrow \vec{E}_C = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_{AO} \quad \text{et} \quad \vec{u}_{DO} = -\vec{u}_{BO} \Rightarrow \vec{E}_D = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_{BO}$$

Par suite :

$$\vec{E}_A + \vec{E}_C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_{AO} \quad \text{et} \quad \vec{E}_B + \vec{E}_D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \vec{u}_{BO}$$

ce qui fournit, comme résultante, en O :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_A + \vec{E}_B + \vec{E}_C + \vec{E}_D = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 d^2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{q}{2\pi\epsilon_0 d^2} \vec{i} \end{aligned}$$

Quant à la distance d , elle s'obtient en remarquant que la diagonale $CA = 2d$ vaut $a\sqrt{2}$:

$$2d = a\sqrt{2} \Rightarrow d = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2d^2 = a^2 \Rightarrow \vec{E} = -\frac{q}{\pi\epsilon_0 a^2} \vec{i}$$

● **225** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

1. L'uniformité de λ permet de couper, par la pensée, l'anneau en deux, de part et d'autre d'un axe Ox .

Soit P_1 un point d'un demi-anneau, au voisinage duquel un élément de longueur ds porte la charge élémentaire $\delta q = \lambda ds$. Cette charge produit, en M , un champ électrique $\delta \vec{E}_1$, de norme :

$$\delta E_1 = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 MP_1^2}$$

Compte tenu de la symétrie de l'anneau par rapport à Ox , à tout point P_1 correspond un point P_2 , symétrique de P_1 par rapport à O . Une charge $\delta q = \lambda ds$, centrée sur P_2 , produit alors en M un champ $\delta \vec{E}_2$ de même norme que $\delta \vec{E}_1$.

Les champs $\delta \vec{E}_1$ et $\delta \vec{E}_2$ étant symétriques par rapport à l'axe Oz , leur somme produit un champ $d\vec{E}_a$ dirigé selon le vecteur unitaire \vec{k} de Oz :

$$d\vec{E}_a = \delta \vec{E}_1 + \delta \vec{E}_2 = 2 \delta E_1 \cos \theta \vec{k} = \frac{\lambda ds \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 MP_1^2} \vec{k}$$

avec :

$$\cos \theta = \frac{OM}{MP_1} = \frac{z}{MP_1} \Rightarrow d\vec{E}_a = \frac{\lambda z ds}{2\pi\epsilon_0 MP_1^3} \vec{k}$$

et :

$$MP_1 = \sqrt{R^2 + z^2} \Rightarrow d\vec{E}_a = \frac{\lambda z ds}{2\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Aussi, l'ensemble des couples de points $\{P_1, P_2\}$, lorsque P_1 décrit l'arc $\widehat{AB} = \pi R$, produit en M le champ :

$$\vec{E}_a = \frac{\lambda z \vec{k}}{2\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{\pi R} ds \Rightarrow \vec{E}_a = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

Quant au point O , il porte l'opposé de la charge $q = 2\pi R \times \lambda$ de l'anneau, auquel cas il produit en M le champ électrique :

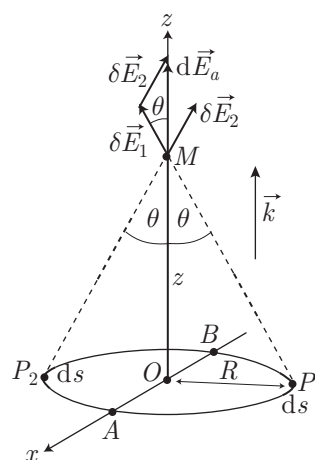
$$\vec{E}_O = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 z^2} \vec{k} \Rightarrow \vec{E}_O = \frac{-\lambda R}{2\epsilon_0 z^2} \vec{k}$$

Finalement, cette distribution de charges est à l'origine, en M , du champ électrique :

$$\vec{E} = \vec{E}_a + \vec{E}_O = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{z^2} \right] \vec{k}$$

2. Lorsque $z \gg R$, on peut poser :

$$(R^2 + z^2)^{3/2} = z^3 \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{3/2} \Rightarrow \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{R^2}{z^2} \right)^{-3/2}$$



qui admet, pour développement limité :

$$\frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \simeq \frac{1}{z^2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{R^2}{z^2} \right) = \frac{1}{z^2} - \frac{3R^2}{2z^4}$$

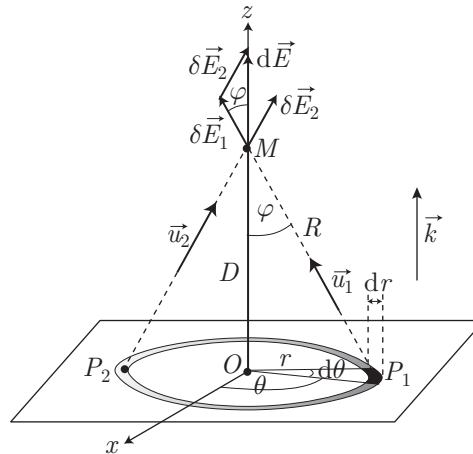
Ce faisant, l'expression trouvée pour \vec{E} se simplifie :

$$\vec{E} \simeq \frac{\lambda R}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{z^2} - \frac{3R^2}{2z^4} - \frac{1}{z^2} \right] \vec{k} \Rightarrow \vec{E} \simeq -\frac{3\lambda R^3}{4\epsilon_0 z^4} \vec{k}$$

● 226 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Soit O un point du plan (Π) , projeté orthogonal de M sur (Π) . Un point P_1 de (Π) est repéré par ses coordonnées polaires r et θ , de sorte qu'une surface élémentaire centrée sur P_1 vaut :

$$dS = r d\theta \times dr$$



Cette surface porte alors la charge élémentaire $\delta q = \sigma_1 dS = \sigma_1 r dr d\theta$ et produit en M un champ :

$$\delta \vec{E}_1 = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 MP_1^2} \vec{u}_1 = \frac{\sigma_1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{r dr}{R^2} \times d\theta \vec{u}_1 \Rightarrow \|\delta \vec{E}_1\| = \frac{\sigma_1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{r dr}{R^2} \times d\theta$$

où $R = MP_1$ et \vec{u}_1 est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{P_1M}$ ($\overrightarrow{P_1M} = R\vec{u}_1$).

Un point P_2 , symétrique de P_1 par rapport à O , produit en M un champ $\delta \vec{E}_2$ symétrique de $\delta \vec{E}_1$ par rapport à l'axe Oz , de sorte que la résultante de $\delta \vec{E}_1$ et $\delta \vec{E}_2$ est dirigée selon le vecteur unitaire \vec{k} de Oz :

$$d^2 \vec{E} = \delta \vec{E}_1 + \delta \vec{E}_2 = 2 \|\delta \vec{E}_1\| \cos \varphi \vec{k} = \frac{\sigma_1 \vec{k}}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{r dr \cos \varphi}{R^2} \times d\theta$$

L'ensemble de la couronne, centrée sur O , de rayons r et $r + dr$, est décrite par tous les couples de points $\{P_1, P_2\}$, lorsque θ évolue de 0 à π . Par suite, une telle

couronne produit en M le champ électrique :

$$d\vec{E} = \int_{\theta=0}^{\pi} d^2\vec{E} = \frac{\sigma_1 \vec{k}}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{r dr \cos\varphi}{R^2} \int_0^{\pi} d\theta = \frac{\sigma_1 \vec{k}}{2\epsilon_0} \times \frac{r dr \cos\varphi}{R^2}$$

Quant au triangle rectangle (MOP_1), non seulement il permet l'utilisation du théorème de Pythagore :

$$MP_1^2 = OP_1^2 + OM^2 \Rightarrow R^2 = r^2 + D^2 \Rightarrow 2R dR = 2r dr \Rightarrow r dr = R dR$$

mais également, il définit : $\cos\varphi = \frac{D}{R}$. C'est pourquoi le champ $d\vec{E}$ s'écrit aussi :

$$d\vec{E} = \frac{\sigma_1 \vec{k}}{2\epsilon_0} \times \frac{R dR}{R^2} \times \frac{D}{R} = \frac{\sigma_1 D \vec{k}}{2\epsilon_0} \frac{dR}{R^2}$$

Enfin, l'ensemble du plan étant décrit lorsque R évolue de D à l'infini, le champ électrique qu'il produit en M vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 D \vec{k}}{2\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dR}{R^2} = \frac{\sigma_1 D \vec{k}}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{R} \right]_D^{\infty} \quad (19)$$

c'est-à-dire :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_1 \vec{k}}{2\epsilon_0} \quad (20)$$

2. En s'inspirant de la méthode précédente, considérons un disque de rayon a (R évolue alors de D à $\sqrt{D^2 + a^2}$) et de densité surfacique σ_2 , qui produit en M un champ donné par la loi (19) :

$$\vec{E}' = \frac{\sigma_2 D}{2\epsilon_0} \vec{k} \times \left[-\frac{1}{R} \right]_D^{\sqrt{D^2+a^2}} = \frac{\sigma_2 D}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{\sqrt{D^2+a^2}} \right) \vec{k} \quad (21)$$

$$\Rightarrow \vec{E}' = \frac{\sigma_2 \vec{k}}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{D}{\sqrt{D^2+a^2}} \right) \quad (22)$$

3. Pour réaliser la distribution de charge proposée par l'énoncé (plan infini percé d'un trou de rayon a), il suffirait d'ajouter au plan (Π) de densité uniforme $\sigma_1 = \sigma$, un disque centré sur O et de densité surfacique uniforme $\sigma_2 = -\sigma$ (les charges se neutralisent sur le disque, celui-ci peut être considéré comme dépourvu de charge). Compte tenu du théorème de superposition, une telle distribution de charges produit un champ électrique :

$$\vec{E}_{\text{tot}} = \vec{E} + \vec{E}'$$

où \vec{E} et \vec{E}' sont donnés par les résultats (20) et (22) :

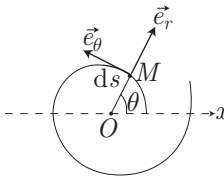
$$\vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{k} \times \left(1 - \frac{D}{\sqrt{D^2+a^2}} \right) \Rightarrow \vec{E}_{\text{tot}} = \frac{\sigma D}{2\epsilon_0 \sqrt{D^2+a^2}} \vec{k}$$

● 227 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Soit $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ le vecteur position d'un point M du fil, tel que :

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

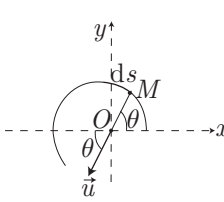
avec :

$$\begin{cases} dr = ar_0 e^{a\theta} d\theta \\ r d\theta = r_0 e^{a\theta} d\theta \end{cases} \Rightarrow d\vec{OM} = r_0 e^{a\theta} (a \vec{e}_r + \vec{e}_\theta) d\theta$$


De cette expression ressort alors celle d'un élément de longueur du fil :

$$ds = \left\| d\vec{OM} \right\| \Rightarrow ds = r_0 e^{a\theta} \sqrt{a^2 + 1} d\theta \text{ si } d\theta > 0$$

2. Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$ un vecteur unitaire de \vec{MO} , M étant un point courant du fil, au voisinage duquel un élément de longueur ds porte une charge $\delta q = \lambda ds$ responsable de l'apparition d'un champ électrique en O :

$$\begin{aligned} \delta \vec{E} &= \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} = \frac{\lambda ds}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u} \\ &= \frac{\lambda \times r_0 e^{a\theta} \sqrt{1+a^2} d\theta}{4\pi\epsilon_0 \times r_0^2 e^{2a\theta}} \vec{u} \\ &= -\frac{\lambda\sqrt{1+a^2}}{4\pi\epsilon_0 r_0} e^{-a\theta} d\theta \times \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$


Par conséquent, ce champ a pour composantes :

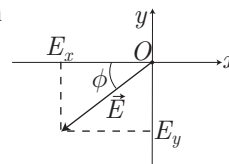
$$\begin{aligned} \delta E_x &= -\frac{\lambda\sqrt{1+a^2}}{4\pi\epsilon_0 r_0} \times e^{-a\theta} \cos \theta d\theta \Rightarrow E_x = -\frac{\lambda\sqrt{1+a^2}}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int_0^\infty e^{-a\theta} \cos \theta d\theta \\ \Rightarrow E_x &= \frac{-\lambda a}{4\pi\epsilon_0 r_0 \sqrt{1+a^2}} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \delta E_y &= -\frac{\lambda\sqrt{1+a^2}}{4\pi\epsilon_0 r_0} e^{-a\theta} \sin \theta d\theta \Rightarrow E_y = -\frac{\lambda\sqrt{1+a^2}}{4\pi\epsilon_0 r_0} \int_0^\infty e^{-a\theta} \sin \theta d\theta \\ \Rightarrow E_y &= -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r_0 \sqrt{1+a^2}} \end{aligned}$$

Ces composantes montrent que le champ \vec{E} est incliné d'un angle ϕ par rapport à l'axe Ox , tel que :

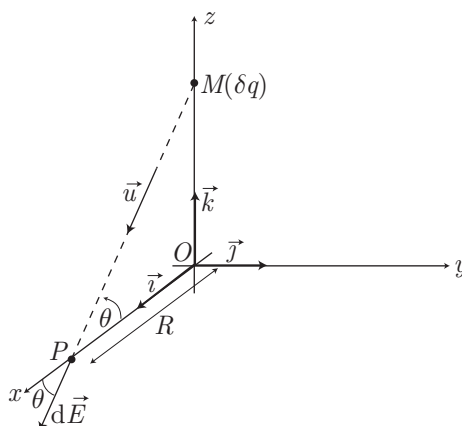
$$\tan \phi = \frac{|E_y|}{|E_x|} \Rightarrow \tan \phi = \frac{1}{a}$$



● 228 ————— Concours de la Banque Filière PT

1. Étude d'un fil infini, uniformément chargé

(a) Soit \vec{u} le vecteur unitaire de $\overrightarrow{MP} = MP \vec{u}$, de composantes : $\begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$.



Le champ électrique élémentaire produit en P par la charge $\delta q = \lambda dz$ vaut :

$$d\vec{E} = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PM^2} \vec{u} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz}{PM^2} \vec{u}$$

avec :

$$\tan \theta = \frac{OM}{OP} = \frac{z}{R} \Rightarrow z = R \tan \theta \Rightarrow dz = \frac{R d\theta}{\cos^2 \theta}$$

et :

$$\cos \theta = \frac{R}{PM} \Rightarrow \frac{1}{PM^2} = \frac{\cos^2 \theta}{R^2}$$

Il s'ensuit que :

$$d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{R d\theta}{\cos^2 \theta} \times \frac{\cos^2 \theta}{R^2} \vec{u} \Rightarrow d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \vec{u} d\theta$$

(b) La connaissance des composantes du vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$ entraîne celle des

composantes de $\vec{E} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$:

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \cos \theta d\theta; dE_y = 0; dE_z = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \sin \theta d\theta$$

Or, le fil infini étant décrit par l'angle θ variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, les composantes du champ électrique \vec{E} vérifient :

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}$$

$$E_y = 0$$

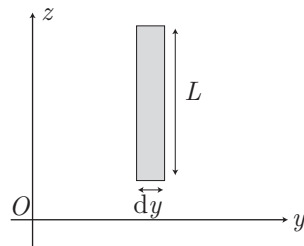
$$E_z = \frac{-\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \, d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] = 0$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{e}_x \tag{23}$$

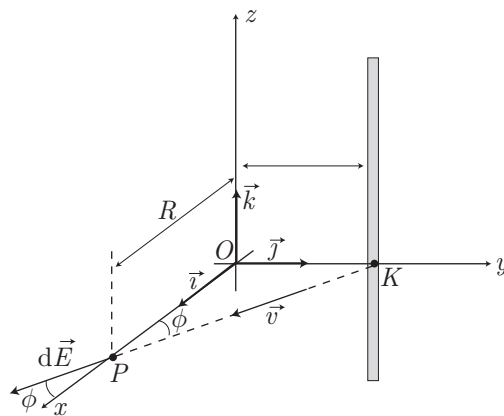
2. Étude d'une plaque infinie, uniformément chargée

Considérons un élément de la plaque, de hauteur L et de largeur dy . Cet élément peut être assimilé à une portion de fil de longueur L , qui porterait ainsi une charge $\delta q = \lambda L$, tandis qu'il porte réellement la charge $\delta q = \sigma L dy$. C'est pourquoi on passe aisément du modèle du fil à celui de la plaque en posant :



$$\lambda = \sigma dy \tag{24}$$

Soit une de ces bandes, infiniment longue, située dans le plan (O, y, z) à une ordonnée y . Elle se trouve à une distance KP du point P , qui définit un vecteur unitaire \vec{v} tel que : $\vec{K\hat{P}} = KP \vec{v}$:



Compte tenu des résultats (23) et (24), cette bande produit en P un champ élec-

trique :

$$d\vec{E} = \frac{\sigma dy}{2\pi\epsilon_0 KP} \vec{v} \text{ avec } \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

où :

$$\tan \phi = \frac{OK}{OP} = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R \tan \phi \Rightarrow dy = \frac{R d\phi}{\cos^2 \phi}$$

et :

$$\cos \phi = \frac{OP}{PK} = \frac{R}{PK} \Rightarrow \frac{1}{PK} = \frac{\cos \phi}{R}$$

Il s'ensuit que :

$$d\vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{R d\phi}{\cos^2 \phi} \times \frac{\cos \phi}{R} \vec{v} = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \frac{d\phi}{\cos \phi} \vec{v}$$

Les composantes du champ $\vec{E} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$ s'obtiennent en additionnant toutes ces

contributions élémentaires, lorsque ϕ évolue de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$, soit compte tenu des composantes de \vec{v} :

$$E_x = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\phi}{\cos \phi} \times \cos \phi \Rightarrow E_x = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \times \pi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

$$E_y = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\sin \phi}{\cos \phi} d\phi = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} [\ln(\cos \phi)]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0$$

et :

$$E_z = 0$$

Finalement, le champ électrique produit par cette plaque a pour expression :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$$

● 229 ————— Lycée Carnot, Dijon

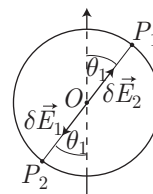
1. Considérons deux éléments de surface dS , centrés sur des points P_1 et P_2 symétriques par rapport à O , c'est-à-dire repérés par des angles θ_1 et $\pi + \theta_1$

La nature des points P_1 et P_2 permet de définir des vecteurs unitaires \vec{u}_1 et $\vec{u}_2 = -\vec{u}_1$ tels que $\overrightarrow{P_1O} = R\vec{u}_1$ et $\overrightarrow{P_2O} = R\vec{u}_2$. Aussi, les charges élémentaires δq_1 et δq_2 , centrées sur P_1 et P_2 :

$$\delta q_1 = \sigma_0 \cos^2 \theta_1 dS \text{ et } \delta q_2 = \sigma_0 \cos^2 \theta_2 dS = \delta q_1$$

produisent respectivement en O des champs élémentaires :

$$\delta \vec{E}_1 = \frac{\delta q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_1 \text{ et } \delta \vec{E}_2 = \frac{\delta q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \vec{u}_2 = -\delta \vec{E}_1$$



La résultante de ce champ est par conséquent nulle :

$$d\vec{E} = \delta\vec{E}_1 + \delta\vec{E}_2 = \vec{0}$$

Or, compte tenu de la symétrie sphérique de la distribution de charges, à chaque point P_1 peut être associé un point P_2 , de sorte que chaque couple de points $\{P_1, P_2\}$ produit un champ nul ; la somme de ces contributions fournit finalement :

$$\vec{E} = \vec{0}$$

2. Soient deux éléments de surface dS , centrés sur des points P_1 et P_2 , symétriques par rapport à l'axe Oz .

Ces éléments sont repérés par l'angle θ et l'angle φ en coordonnées sphériques tandis que :

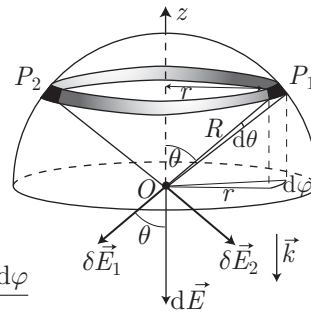
$$dS = R d\theta \times r d\varphi$$

avec :

$$r = R \sin \theta \Rightarrow dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Ces deux points produisent en O des champs $\delta\vec{E}_1$ et $\delta\vec{E}_2$, tels que :

$$\|\delta\vec{E}_1\| = \|\delta\vec{E}_2\| = \frac{\sigma dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\sigma_0 \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0}$$



Ces deux vecteurs étant symétriques par rapport à l'axe Oz , leur somme est orientée selon le vecteur \vec{k} :

$$d^2\vec{E} = \delta\vec{E}_1 + \delta\vec{E}_2 = 2 \|\delta\vec{E}_1\| \cos \theta \vec{k} = \frac{\sigma_0 \cos^3 \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{2\pi\epsilon_0} \vec{k}$$

Aussi, l'ensemble des couples de points $\{P_1, P_2\}$ ayant le même angle θ est décrit lorsque φ varie de 0 à π , ce qui produit en O le champ :

$$\begin{aligned} d\vec{E} &= \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \frac{\sigma_0 \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \vec{k}}{2\pi\epsilon_0} d\varphi = \frac{\sigma_0 \cos^3 \theta \sin \theta d\theta \vec{k}}{2\pi\epsilon_0} \int_0^\pi d\varphi \\ &= \frac{\sigma_0 \cos^3 \theta \sin \theta \vec{k}}{2\epsilon_0} d\theta \end{aligned}$$

Ce faisant, les contributions de toutes les couronnes chargées, lorsque θ évolue de 0 à $\frac{\pi}{2}$, produit en O un champ électrique :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{k} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta$$

Le changement de variable :

$$u = \cos \theta \Rightarrow du = -\sin \theta d\theta$$

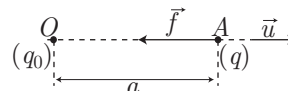
conduit à :

$$\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{k} \int_1^0 -u^3 du = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{k} \times \left[-\frac{u^4}{4} \right]_1^0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma_0}{8\epsilon_0} \vec{k}$$

● 230 Concours ENSI

1. La charge q_0 exerce sur la charge $q = -q_0$ une force électrostatique donnée par la loi de Coulomb :

$$\vec{f} = \frac{q_0 q}{4\pi\epsilon_0 OA^2} \vec{u} \Rightarrow \vec{f} = \frac{-q_0^2}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}$$



2. (a) Les charges q_0 et $-q_0$ créent en P les champs électriques respectifs :

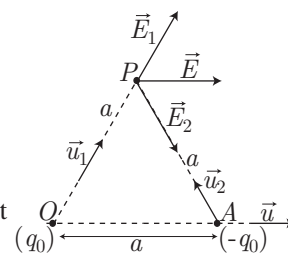
$$\vec{E}_1 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_1 \text{ et } \vec{E}_2 = \frac{-q_0}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}_2$$

où les vecteurs unitaires \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont associés à :

$$\vec{OP} = a \vec{u}_1 \text{ et } \vec{AP} = a \vec{u}_2$$

L'identité vectorielle : $\vec{OA} + \vec{AP} + \vec{PO} = \vec{0}$ étant en outre toujours vérifiée, elle conduit à :

$$a \vec{u} + a \vec{u}_2 - a \vec{u}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{u}$$



Ce faisant l'ensemble des deux charges crée en P un champ résultant :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 a^2} (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \Rightarrow \vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 a^2} \vec{u}$$

- (b) De même, les charges q_0 et $-q_0$ provoquent, en P l'apparition des potentiels électrostatiques respectifs :

$$V_1 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 a} \text{ et } V_2 = \frac{-q_0}{4\pi\epsilon_0 a}$$

dont la résultante vaut : $V = V_1 + V_2 = 0$

● 231 Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

I- Potentiel électrostatique $V(r)$

1. Le champ électrique étant radial et ne dépendant que de r , il s'ensuit que :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow E(r) \vec{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

où r , θ et φ sont les coordonnées sphériques au point de mesure de \vec{E} et de V . Cette équation révèle que $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, ce qui signifie également que V ne dépend que de r :

$$\frac{dV}{dr} = -E(r) \tag{25}$$

- (a) Pour $r \in [R, +\infty[$, cette équation devient :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{k R^2}{2\epsilon_0 r^2} \Rightarrow dV = \frac{k R^2}{2\epsilon_0} \times \frac{-dr}{r^2}$$

et, notamment, sachant que $\lim_{r \rightarrow \infty} [V(r)] = 0$:

$$\int_0^{V(r)} dV = \frac{k R^2}{2\varepsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{-dr}{r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{k R^2}{2\varepsilon_0} \times \frac{1}{r} \text{ pour } r \in [R, +\infty[$$

En outre, la fonction $V(r)$ est nécessairement continue, sans quoi $E = -\frac{dV}{dr}$ deviendrait infini, ce qui se traduit par :

$$V(R) = \lim_{r \rightarrow R} [V(r)] = \frac{kR}{2\varepsilon_0} \quad (26)$$

(b) Pour $r \in [0, R]$, l'équation (25) s'écrit :

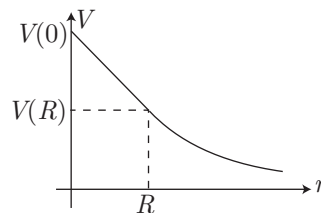
$$\begin{aligned} \frac{dV}{dr} = -\frac{k}{2\varepsilon_0} &\Rightarrow dV = -\frac{k}{2\varepsilon_0} dr \Rightarrow \int_{V(R)}^{V(r)} dV = -\frac{k}{2\varepsilon_0} \int_R^r dr \\ &\Rightarrow V(r) = V(R) - \frac{k}{2\varepsilon_0} (r - R) \end{aligned}$$

soit, compte tenu du résultat (26) :

$$V(r) = \frac{kR}{2\varepsilon_0} - \frac{kr}{2\varepsilon_0} + \frac{kR}{2\varepsilon_0} \Rightarrow V(r) = \frac{k}{2\varepsilon_0} (2R - r) \text{ pour } r \in [0, R]$$

2. Ces expressions montrent que pour $r \in [0, R]$, $V(r)$ est linéaire, tandis que pour $r \geq R$, la courbe représentative de $V(r)$ est une branche d'hyperbole. On note également que :

$$V(0) = \frac{kR}{\varepsilon_0} = 2V(R)$$



II- Charge volumique $\rho(r)$

1. La charge volumique ρ est directement liée au champ \vec{E} :

$$\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\varepsilon_0}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 E) \quad (27)$$

- (a) Pour $r \in [0, R]$, l'expression de $E = \frac{k}{2\varepsilon_0}$ permet d'obtenir :

$$\rho = \frac{\varepsilon_0}{r^2} \times \frac{d}{dr} \left(\frac{k r^2}{2\varepsilon_0} \right) = \frac{\varepsilon_0}{r^2} \times \frac{k r}{\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \frac{k}{r} \text{ pour } r \in [0, R]$$

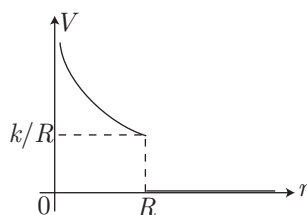
(b) En revanche, pour $r \in]R, +\infty[$:

$$E = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow r^2 E = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \rho = \frac{\varepsilon_0}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{kR^2}{2\varepsilon_0} \right) = 0 \text{ pour } r \in]R, +\infty[$$

2. Bien que la fonction $\rho(r)$ présente une discontinuité en $r = R$, il est possible de calculer :

$$\lim_{r \rightarrow R^-} [\rho(r)] = \frac{k}{R}$$

afin d'obtenir la courbe suivante :



III- Charge totale q_0

1. Une sphère de rayon r présentant un volume $\mathcal{V} = \frac{4}{3} \pi r^3$, le volume élémentaire compris entre les sphères de rayons r et $r + dr$ vaut :

$$d\mathcal{V} = 4\pi r^2 dr$$

Un tel volume contient par conséquent la charge élémentaire $\delta q = \rho(r) d\mathcal{V}$, c'est-à-dire, compte tenu des résultats obtenus à la question précédente :

$$\delta q = 4\pi k r dr \text{ pour } r < R \text{ et } \delta q = 0 \text{ pour } r > R$$

2. La charge totale q_0 de la distribution étudiée s'obtient en additionnant toutes les charges δq contenues dans les coquilles sphériques précédentes, dont les rayons r s'étendent de 0 jusqu'à l'infini :

$$q_0 = \int_{r=0}^{\infty} \delta q = \int_{r=0}^R 4\pi k r dr + \int_{r=R}^{\infty} \underbrace{\delta q}_{=0} \Rightarrow q_0 = 2\pi k R^2$$

3. Une charge électrique ponctuelle q_0 placée au point O produit, en un point M situé à une distance $r = OM$, un champ radial de norme :

$$E = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{2\pi k R^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow E = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2}$$

qui s'identifie par conséquent au champ produit par la distribution étudiée, pour $r > R$; ces deux modèles sont équivalents d'un point de vue électrique.

● 232 ————— Lycée Thiers, Marseille

Soient x, y, z les coordonnées d'un point M , dans un repère cartésien centré sur le milieu O du segment formé par les points A et B qui portent les charges respectives $(-q)$ et $(+3q)$. Ces charges sont à l'origine des potentiels :

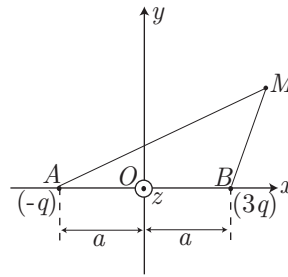
$$V_A = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 AM} \text{ et } V_B = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 BM}$$

En M règne par conséquent un potentiel résultant :

$$V = V_A + V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3}{BM} - \frac{1}{AM} \right)$$

Aussi, l'équipotentielle correspondant à $V = 0$ représente l'ensemble des points M de l'espace, solutions de l'équation :

$$\frac{3}{BM} = \frac{1}{AM} \Rightarrow BM = 3AM \Rightarrow BM^2 = 9AM^2 \quad (28)$$



avec :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} a+x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow AM^2 = (a+x)^2 + y^2 + z^2$$

et :

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} -a+x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow BM^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2$$

L'équation (28) devient ainsi :

$$\begin{aligned} x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + z^2 &= 9a^2 + 18ax + 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 \\ \Rightarrow 8y^2 + 8z^2 + 8x^2 + 20ax + 8a^2 &= 0 \\ \Rightarrow y^2 + z^2 + x^2 + \frac{5}{2}ax + a^2 &= 0 \end{aligned}$$

où l'on peut poser :

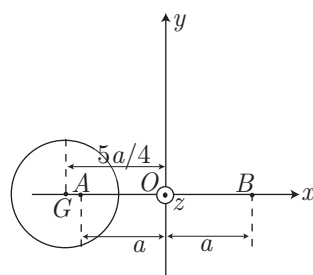
$$x^2 + \frac{5}{2}ax = x^2 + 2x \times \frac{5a}{4} + \frac{25a^2}{16} - \frac{25a^2}{16} = \left(x + \frac{5a}{4}\right)^2 - \frac{25a^2}{16}$$

afin d'obtenir :

$$y^2 + z^2 + \left(x + \frac{5a}{4}\right)^2 - \frac{9a^2}{16} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{5a}{4}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{3a}{4}\right)^2$$

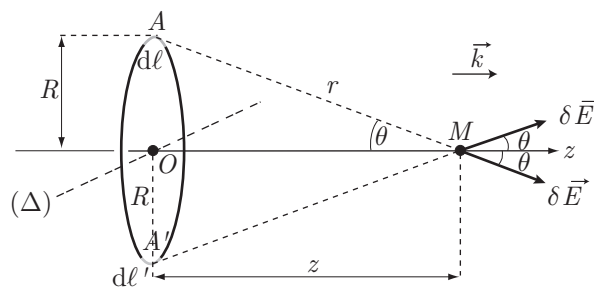
Il s'agit là de l'équation cartésienne d'une sphère centrée sur le point $G\left(-\frac{5a}{4}, 0, 0\right)$

et de rayon $\frac{3a}{4}$:



● 233 ————— Lycée Chateaubriand, Rennes

1. Soit A un point de l'anneau et A' son symétrique par rapport à O . On appelle $d\ell$ un élément de longueur centré sur A , portant la charge δq et soit $d\ell' = d\ell$ un élément de longueur centré sur A' , portant également la charge $\delta q = \delta q'$ (car $\delta q = \lambda d\ell$ et $\delta q' = \lambda d\ell' = \lambda d\ell$).



Ces deux charges sont responsables des champs respectifs $\delta\vec{E}$ et $\delta\vec{E}'$ en M , tels que :

$$d\vec{E} = \delta\vec{E} + \delta\vec{E}' = 2\delta E \cos\theta \vec{k}$$

où :

$$\delta E = \|\delta\vec{E}\| = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow dE = \frac{\lambda d\ell \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{k}$$

Aussi, le champ total créé en M est obtenu en additionnant les contributions de tous les couples de points $\{A, A'\}$, c'est-à-dire lorsque A parcourt le demi-périmètre πR :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda \cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^2} \vec{k} \int_0^{\pi R} d\ell = \frac{\lambda R \cos\theta}{2\epsilon_0 r^2} \vec{k}$$

On remarque enfin que :

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \text{ et } \cos\theta = \frac{z}{r}$$

de sorte que :

$$\vec{E} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 r^3} \vec{k} \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} \quad (29)$$

Une méthode analogue peut être développée afin de trouver le potentiel $V(M)$: chaque charge $\delta q = \lambda d\ell$, centrée sur A , crée le potentiel élémentaire :

$$dV = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda d\ell}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (30)$$

si bien que la somme de ces contributions est à l'origine du potentiel :

$$V(M) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 r} \int_0^{2\pi R} d\ell = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 r}$$

où :

$$r = \sqrt{R^2 + z^2} \Rightarrow V(M) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$$

Remarque – On aurait pu aussi trouver ce résultat, directement à partir de l'expression (29) du champ électrique :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

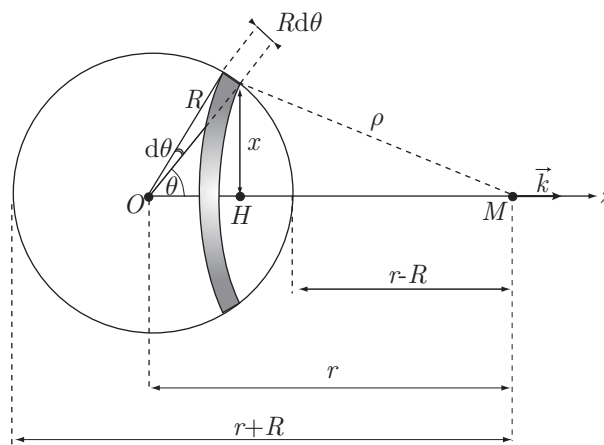
qui montre que V ne dépend que de z (car $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$). Il s'ensuit que :

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\lambda R z}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}} \Rightarrow V = V_0 + \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}}$$

avec :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} [V(z)] = 0 \Rightarrow V_0 = 0 \Rightarrow V = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}}$$

2. Considérons, à la surface de la sphère, une bande circulaire, centrée sur $H \in Oz$, de rayon x et d'angle au sommet $d\theta$:



Une telle bande porte la charge $\delta q = \sigma dS$ telle que :

$$\begin{aligned} dS &= 2\pi x \times R d\theta = 2\pi R \sin \theta \times R d\theta = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \\ \Rightarrow \delta q &= 2\pi R^2 \sigma \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

et produit en M le potentiel $V(M)$ donné par l'expression (30) :

$$dV = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0\rho} = \frac{R^2\sigma}{2\epsilon_0} \times \frac{\sin \theta d\theta}{\rho}$$

C'est ici qu'intervient l'indication de l'énoncé, selon laquelle :

$$\begin{aligned} \rho^2 &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta \Rightarrow 2\rho d\rho = 2Rr \sin \theta d\theta \\ &\Rightarrow \sin \theta d\theta = \frac{1}{Rr} \times \rho d\rho \\ &\Rightarrow dV = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 r} \times d\rho \end{aligned}$$

Aussi le potentiel $V(M)$ produit par la sphère en $r > R$ est obtenu en additionnant les contributions de toutes les bandes, pour ρ variant de $r - R$ à $r + R$:

$$V(M) = \frac{R\sigma}{2\epsilon_0 r} \int_{r-R}^{r+R} d\rho \Rightarrow V(M) = \frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 r}$$

En utilisant un système de coordonnées sphériques :

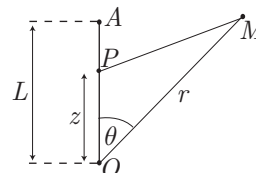
$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{k} = -\frac{R^2\sigma}{\epsilon_0} \vec{k} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \Rightarrow \vec{E} = \frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 r^2} \vec{k}$$

● 234 ————— Concours Centrale

1. Soit P un point compris entre O et A , repéré par sa distance $z = OP$ de O .

Autour de ce point, un élément de longueur dz porte la charge $\delta q = \lambda dz$ responsable de l'apparition d'un potentiel au point M :

$$dV_1 = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 PM} = \frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 PM}$$



avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow PM^2 = PO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} \\ &\Rightarrow PM^2 = z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta \\ &\Rightarrow PM = \sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta} \end{aligned}$$

C'est pourquoi l'ensemble des points P situés entre O et A (décrits par z variant de 0 à L) produit en M le potentiel :

$$V_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta}} \quad (31)$$

Il convient alors de remarquer que :

$$z^2 - 2zr \cos \theta + r^2 = (z - r \cos \theta)^2 + r^2 (1 - \cos^2 \theta) = (z - r \cos \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta$$

afin d'effectuer le changement de variable :

$$\begin{aligned} z - r \cos \theta &= r \sin \theta \times u \Rightarrow u = \frac{z}{r \sin \theta} - \cotan \theta \\ &\Rightarrow dz = r \sin \theta du \end{aligned}$$

Dès lors, $z^2 - 2zr \cos \theta + r^2 = r^2 \sin^2 \theta (1 + u^2)$ permet d'obtenir :

$$V_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{u_0}^{u_1} \frac{r \sin \theta du}{r \sin \theta \sqrt{1 + u^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{u_0}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}}$$

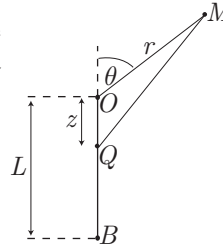
Enfin, la primitive rappelée dans l'énoncé conduit à :

$$V_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \times \ln \left(\frac{u_1 + \sqrt{1 + u_1^2}}{u_0 + \sqrt{1 + u_0^2}} \right) \quad (32)$$

De même, un point Q situé sur $[OB]$ et repéré par sa distance $z = OQ$ est entouré de la charge élémentaire $\delta q = -\lambda dz$, à l'origine du potentiel δV_2 en M :

$$\delta V_2 = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 QM} = -\frac{\lambda dz}{4\pi\epsilon_0 QM}$$

où :



$$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow QM^2 = QO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{QO} \cdot \overrightarrow{OM} = z^2 + r^2 + 2zr \cos \theta$$

Le potentiel créé en M par l'ensemble de ces points Q vaut par conséquent :

$$V_2 = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^L \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r^2 + 2zr \cos \theta}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{-L} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + r^2 - 2zr \cos \theta}}$$

c'est-à-dire, compte tenu de la similitude avec l'identité (31) :

$$V_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{u_0}^{u_2} \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{u_2 + \sqrt{1 + u_2^2}}{u_0 + \sqrt{1 + u_0^2}} \right) \quad (33)$$

Les expressions (32) et (33) fournissent finalement le potentiel qui règne en M :

$$V = V_1 + V_2 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(u_1 + \sqrt{1 + u_1^2})(u_2 + \sqrt{1 + u_2^2})}{(u_0 + \sqrt{1 + u_0^2})^2} \right]$$

2. Lorsque L tend vers l'infini, u_1 et u_2 tendent respectivement vers :

$$u_{1\infty} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{L}{r \sin \theta} \right) = \infty \text{ et } u_{2\infty} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left(\frac{-L}{r \sin \theta} \right) = -u_{1\infty}$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\left(u_1 + \sqrt{1 + u_1^2} \right) \left(u_2 + \sqrt{1 + u_2^2} \right) \right] \\ = \lim_{u_{1\infty} \rightarrow \infty} \left[\left(u_{1\infty} + \sqrt{1 + u_{1\infty}^2} \right) \left(-u_{1\infty} + \sqrt{1 + u_{1\infty}^2} \right) \right] \\ = \lim_{u_{1\infty} \rightarrow \infty} \left[-u_{1\infty}^2 + (1 + u_{1\infty}^2) \right] = 1 \end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{1}{\left(u_0 + \sqrt{1 + u_0^2} \right)^2} \right] = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(u_0 + \sqrt{1 + u_0^2} \right)$$

avec :

$$1 + u_0^2 = 1 + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow u_0 + \sqrt{1 + u_0^2} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}$$

où :

$$\begin{cases} \sin \theta = 2 \sin \left(\frac{\theta}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \\ 1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \end{cases} \Rightarrow u_0 + \sqrt{1 + u_0^2} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \tan \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

à la suite de quoi :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[\tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \right]$$

● 235 Q.C.M.

1. Dans le système de coordonnées cylindriques, la relation entre \vec{E} et V s'écrit :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \vec{e}_\rho = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \vec{e}_\rho - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

D'une part cette équation révèle que $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ (ce qui signifie que V ne dépend que de ρ) et d'autre part que :

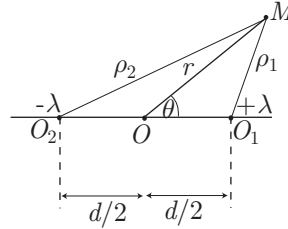
$$\frac{dV}{d\rho} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \Rightarrow V(P) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho + \text{cte (réponse a.)}$$

2. Compte tenu du résultat précédent (en notant V_0 la constante), les fils placés en O_1 et O_2 créent en M les potentiels respectifs :

$$V_1 = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho_1 + V_0 \text{ et } V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \rho_2 + V_0$$

Par suite, le potentiel électrostatique produit en M vaut :

$$V(M) = V_1 + V_2 = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) + 2V_0$$



Or, en O règne un potentiel nul, c'est-à-dire lorsque $\rho_1 = \rho_2$:

$$\begin{aligned} V(O) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_2} \right) + 2V_0 = 0 &\Rightarrow 2V_0 = 0 \\ &\Rightarrow V(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \end{aligned}$$

Quant aux grandeurs ρ_1 et ρ_2 , elles s'obtiennent en posant :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_1M} &= \overrightarrow{O_1O} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow O_1M^2 = O_1O^2 + 2\overrightarrow{O_1O} \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2 \\ &\Rightarrow \rho_1^2 = \frac{d^2}{4} - 2 \times \frac{d}{2} \times r \times \cos \theta + r^2 \\ &\Rightarrow \rho_1 = r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2}} \simeq r \sqrt{1 - \frac{d}{r} \cos \theta} \\ &\quad \text{car } \frac{d^2}{4r^2} \ll \frac{d}{r} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_2M} &= \overrightarrow{O_2O} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow O_2M^2 = O_2O^2 + 2\overrightarrow{O_2O} \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2 \\ &\Rightarrow \rho_2^2 = \frac{d^2}{4} + 2 \times \frac{d}{2} \times r \times \cos \theta + r^2 \\ &\Rightarrow \rho_2 = r \sqrt{1 + \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{d^2}{4r^2}} \simeq r \sqrt{1 + \frac{d}{r} \cos \theta} \\ &\quad \text{pour les mêmes raisons.} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} V(M) &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{1+\epsilon}}{\sqrt{1-\epsilon}} \right) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \right) \text{ avec } \epsilon = \frac{d}{r} \cos \theta \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} [\ln(1+\epsilon) - \ln(1-\epsilon)] \end{aligned}$$

où $\epsilon \ll 1$ suggère l'emploi de développements limités :

$$\begin{cases} \ln(1+\epsilon) \simeq \epsilon \\ \ln(1-\epsilon) \simeq -\epsilon \end{cases} \Rightarrow V(M) \simeq \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \times \epsilon$$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r} \text{ (réponse c).}$$

3. Les surfaces équipotentielles $V \neq 0$ ont pour traces, dans le plan (xOy) , des courbes d'équation :

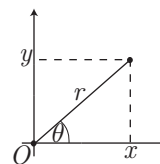
$$\frac{p}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos\theta}{r} = V = \text{cte} \Rightarrow r = r_0 \cos\theta \text{ où } r_0 = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 V} = \text{cte}$$

Les coordonnées x et y des points vérifiant cette équation sont alors :

$$y = r \sin\theta = r_0 \sin\theta \cos\theta \Rightarrow y = \frac{r_0}{2} \sin(2\theta)$$

et :

$$\begin{aligned} x = r \cos\theta = r_0 \cos^2\theta &\Rightarrow x = r_0 \times \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\ &\Rightarrow x - \frac{r_0}{2} = \frac{r_0}{2} \times \cos(2\theta) \end{aligned}$$



Les expressions ainsi obtenues pour x et y révèlent que :

$$\left(x - \frac{r_0}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r_0}{2}\right)^2$$

ce qui suffit à montrer que :

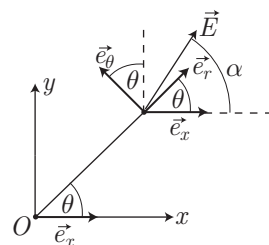
ces traces sont des cercles centrés sur le point $A\left(\frac{r_0}{2}, 0\right)$ de l'axe Ox (réponse c), de rayons $\frac{r_0}{2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 V}$.

4. En coordonnées polaires (r, θ) , le champ $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$ est lié au potentiel par :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} E_r &= -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos\theta}{r} \right) \\ &\Rightarrow E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \times \cos\theta \end{aligned}$$



et :

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos\theta}{r} \right) \Rightarrow E_\theta = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \times \sin\theta$$

Par conséquent, ce champ a pour norme :

$$\|\vec{E}\| = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^2}$$

ce qui montre que les lignes $\|\vec{E}\| = \text{cte}$ vérifient $r = \text{cte}$, ou encore que :

les lignes $\|\vec{E}\| = \text{cte}$ sont des cercles centrés sur O (réponse b).

En outre, sachant que $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \cos \theta$ et $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = -\sin \theta$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{e}_x &= E_r \times \vec{e}_r \cdot \vec{e}_x + E_\theta \times \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = E_r \times \cos \theta - E_\theta \times \sin \theta \\ &= \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \times (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \times \cos(2\theta) \end{aligned}$$

Enfin, la définition du produit scalaire conduit à :

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{e}_x &= \|\vec{E}\| \times \underbrace{\|\vec{e}_x\|}_{=1} \times \cos \alpha \text{ avec } \alpha = (\vec{Ox}, \vec{E}) \\ &= \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha \end{aligned}$$

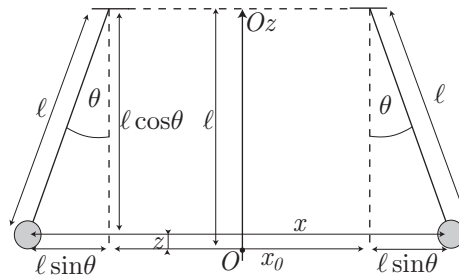
d'où l'on déduit que :

$$\frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \times \cos \alpha = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^2} \times \cos(2\theta) \Rightarrow \alpha = 2\theta \text{ (réponse d).}$$

● **236** ————— **Lycée Blaise Pascal, Rouen**

1. On peut définir l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur \mathcal{E}_{pp} à l'altitude de O , auquel cas chaque boule se trouvant à l'altitude z possède une énergie potentielle de pesanteur de mgz , soit pour les deux boules :

$$\mathcal{E}_{pp} = 2mgz$$



Or :

$$l = l \cos \theta + z \Rightarrow z = l (1 - \cos \theta) \Rightarrow \mathcal{E}_{pp} = 2mg\ell (1 - \cos \theta)$$

En outre, l'énergie électrostatique \mathcal{E}_{pe} des charges $q_1 = q_2 = q$, séparées d'une distance x , vaut :

$$\mathcal{E}_{pe} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x}$$

avec :

$$x = x_0 + 2\ell \sin \theta \Rightarrow \mathcal{E}_{pe} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (x_0 + 2\ell \sin \theta)}$$

C'est pourquoi, l'énergie potentielle totale de ce système vaut :

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{pp} + \mathcal{E}_{pe} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x_0 \left(1 + \frac{2\ell}{x_0} \sin \theta\right)} + 2mg\ell (1 - \cos \theta)$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme suivante :

$$\frac{\mathcal{E}_p}{2mgl} = f(\theta) = \frac{K}{1 + \alpha \sin \theta} + 1 - \cos \theta \text{ avec } \begin{cases} K = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 x_0 mgl} \\ \alpha = \frac{2\ell}{x_0} \end{cases}$$

2. L'énergie cinétique de chaque boule en rotation valant : $\frac{1}{2} m (\ell\dot{\theta})^2$, celle du système s'écrit :

$$\mathcal{E}_c = 2 \times \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 = m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

tandis que l'énergie potentielle du système prend la valeur $\mathcal{E}_p = 2mgl f(\theta)$, où $f(\theta)$ peut être développé à l'ordre 2 au voisinage de θ_0 :

$$f(\theta) = f(\theta_0 + \varepsilon) \simeq f(\theta_0) + \varepsilon \left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_0} + \frac{\varepsilon^2}{2} \left. \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right|_{\theta_0} = f(\theta_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left. \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right|_{\theta_0}$$

car $\left. \frac{df}{d\theta} \right|_{\theta_0} = 0$ traduit l'existence d'un *minimum* pour la fonction $f(\theta)$ en θ_0 . Il s'ensuit que l'énergie mécanique du système vaut :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = m \ell^2 \dot{\theta}^2 + 2mgl f(\theta_0) + mgl \varepsilon^2 \left. \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right|_{\theta_0}$$

Quant à la nature conservative des forces qui interviennent dans ce système, elle impose à \mathcal{E}_m de demeurer constant, en raison de quoi :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Rightarrow 2m \ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + 2mgl \varepsilon \dot{\varepsilon} \left. \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right|_{\theta_0} = 0$$

où :

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$$

Aussi, après simplification par $2m \ell^2 \dot{\varepsilon}$, il apparaît que :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{\ell} \left. \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right|_{\theta_0} \varepsilon = 0$$

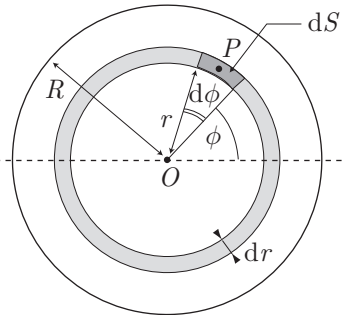
ce qui signifie que les boules oscillent autour de leur position d'équilibre, avec une pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell} \times \left. \frac{d^2 f}{d\theta^2} \right|_{\theta_0}}$$

● 237 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Soit \mathcal{C} une couronne chargée, de centre O , de rayon r et de largeur dr , appartenant au disque chargé uniformément.

Un élément de surface dS , centré sur un point P de la couronne, est défini par un angle élémentaire $d\phi$, tel que $dS = r d\phi \times dr$. Soit \vec{u} le vecteur unitaire directeur de \vec{PM} , qui permet d'obtenir l'expression du champ élémentaire $\delta\vec{E}$ produit par la charge $\delta q = \sigma dS$ centrée sur P :

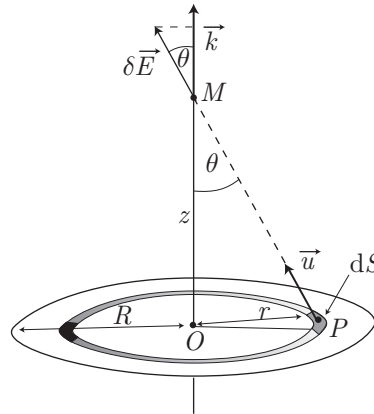


$$\delta\vec{E} = \frac{\delta q}{4\pi\epsilon_0 MP^2} \vec{u} = \frac{\sigma \times r dr d\phi}{4\pi\epsilon_0 MP^2} \vec{u}$$

d'où l'on déduit que :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \frac{r dr d\phi}{MP^2} \vec{u}$$

En outre, l'axe Oz étant un axe de symétrie pour la distribution de charges, il s'ensuit que \vec{E} est colinéaire à Oz et donc à son vecteur unitaire directeur \vec{k} : $\vec{E} = E \vec{k}$, en conséquence de quoi :



$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{k} = E &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \frac{r dr d\phi}{MP^2} \vec{u} \cdot \vec{k} \text{ avec } \vec{u} \cdot \vec{k} = \cos \theta \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R \frac{r dr d\phi}{MP^2} \cos \theta \\ &= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R \frac{r dr \cos \theta}{MP^2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr \cos \theta}{MP^2} \end{aligned}$$

En remarquant que $\cos \theta = \frac{z}{MP}$, avec $MP = (z^2 + r^2)^{1/2}$, cette intégrale devient :

$$E = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right]_0^R = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right)$$

d'où il découle que :

$$\vec{E} = E \vec{k} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \vec{k}$$

En outre, le champ \vec{E} dérive du potentiel V , qui s'exprime en coordonnées cylindro-polaires par :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow E \vec{k} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$$

D'une part $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ montrent que V ne dépend ni de r ni de θ , et d'autre part l'équation précédente devient :

$$\frac{dV}{dz} = -E = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \quad (34)$$

À ce potentiel est associée une énergie potentielle électrostatique \mathcal{E}_{pe} , telle que : $\mathcal{E}_{pe} = qV$. Or, soumise au champ de gravitation, la particule présente également une énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pp} = mgz$, auquel cas son énergie potentielle totale vaut :

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{pe} + \mathcal{E}_{pp} = qV + mgz$$

S'il existe une position d'équilibre pour cette particule, elle se trouve à une cote $z = z_0$ pour laquelle \mathcal{E}_p est *extremum*, c'est-à-dire telle que :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_p}{dz} \right|_{z_0} = 0 \Rightarrow q \left. \frac{dV}{dz} \right|_{z_0} + mg = 0$$

où l'identité (34) fournit $\frac{dV}{dz}$:

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dz} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} - 1 \right) + mg \quad (35)$$

Par suite, l'existence d'un équilibre en $z = z_0$ est conditionnée par :

$$\frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + R^2}} - 1 = -\frac{2mg\varepsilon_0}{q\sigma} \Rightarrow \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + R^2}} = 1 - \frac{2mg\varepsilon_0}{q\sigma} \quad (36)$$

Cependant, le membre de gauche étant positif, cette équation n'admet une solution réelle que si :

$$1 > \frac{2mg\varepsilon_0}{q\sigma} \Rightarrow q\sigma > 2mg\varepsilon_0$$

2. En notant :

$$\alpha = 1 - \frac{2mg\varepsilon_0}{q\sigma} \quad \text{où } 1 > \alpha > 0$$

l'équation (36) devient :

$$\begin{aligned} \frac{z_0}{\sqrt{z_0^2 + R^2}} = \alpha &\Rightarrow z_0^2 = \alpha^2 z_0^2 + \alpha^2 R^2 \Rightarrow z_0^2 (1 - \alpha^2) = \alpha^2 R^2 \\ &\Rightarrow z_0 = \frac{\alpha R}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \end{aligned}$$

3. L'expression (35) fournit :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2} &= \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}} - \frac{z^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{q\sigma R^2}{2\varepsilon_0 (z^2 + R^2)^{3/2}} \\ \Rightarrow \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2} \Big|_{z_0} &= \frac{q\sigma R^2}{2\varepsilon_0 (z_0^2 + R^2)^{3/2}} > 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{E}_p(z_0)$ représente un *minimum* pour la fonction $\mathcal{E}_p(z)$; l'équilibre est stable.

4. Le point M est susceptible d'osciller autour de sa position d'équilibre, avec une pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2} \Big|_{z_0}} = \sqrt{\frac{q\sigma R^2}{2m\varepsilon_0 (z_0^2 + R^2)^{3/2}}}$$

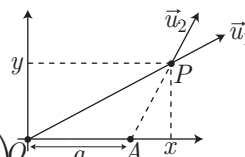
où l'expression de z_0 conduit à :

$$\begin{aligned} z_0 = \frac{\alpha R}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \Rightarrow z_0^2 + R^2 &= \frac{\alpha^2 R^2}{1 - \alpha^2} + R^2 = \frac{R^2}{1 - \alpha^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{(z_0^2 + R^2)^{3/2}} &= \frac{(1 - \alpha^2)^{3/2}}{R^3} \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{q\sigma}{2mR\varepsilon_0} (1 - \alpha^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

● **238** **Q.C.M.**

1. Soit \vec{u}_1 le vecteur unitaire de \vec{OP} et \vec{u}_2 celui de \vec{AP} , définis par :

$$\begin{cases} \vec{OP} = OP \vec{u}_1 \Rightarrow \vec{u}_1 = \frac{1}{OP} \times \vec{OP} \\ \vec{AP} = AP \vec{u}_2 \Rightarrow \vec{u}_2 = \frac{1}{AP} \times \vec{AP} \end{cases}$$



c'est-à-dire :

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix}$$

Par suite, les points O et A créent en P le champ total :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_1}{OP^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_2}{AP^2} \\ &\text{avec } OP^2 = x^2 + y^2 \text{ et } AP^2 = (x-a)^2 + y^2 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x-a \\ y \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

ce qui conduit aux expressions des composantes de $\vec{E}(P)$:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x - a}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}} \right] \text{ (réponse a).}$$

et :

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}} \right] \text{ (réponse c).}$$

2. Le champ $\vec{E}(P)$ est parallèle à l'axe Oy à condition que E_x soit nul :

$$\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{a - x}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}}$$

Or, cette équation devant être vérifiée pour toute valeur réelle de y , elle l'est *a fortiori* pour la valeur particulière $y = 0$:

$$\frac{x}{(x^2)^{3/2}} = \frac{a - x}{[(x - a)^2]^{3/2}}$$

Or, en remarquant que $(X^2)^{1/2} = |X|$, cette équation équivaut à :

$$\frac{x}{|x|^3} = \frac{a - x}{|x - a|^3} \quad (37)$$

Plusieurs cas doivent être distingués :

- pour $x < 0$, $|x| = -x$ et $|x - a| = a - x$, de sorte que :

$$\frac{x}{-x^3} = \frac{a - x}{(a - x)^3} \Rightarrow -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{(a - x)^2} \Rightarrow x^2 = -(a - x)^2$$

Cette équation n'admet pas de solution réelle car x^2 et $(a - x)^2$ sont simultanément positifs.

- pour $x > a$, $|x| = x$ et $|x - a| = x - a$ confèrent à l'équation (37) la forme suivante :

$$\frac{x}{x^3} = \frac{a - x}{(x - a)^3} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{(x - a)^2} \Rightarrow x^2 = -(x - a)^2$$

À nouveau, cette équation n'admet pas de solution réelle, pour les mêmes raisons que précédemment.

- pour $0 < x < a$, $|x| = x$ et $|x - a| = a - x$, d'où il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^3} = \frac{a - x}{(a - x)^2} &\Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{(a - x)^2} \Rightarrow x^2 = (a - x)^2 \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = a - x \\ \text{ou} \\ x = x - a \end{cases} \end{aligned}$$

La deuxième équation de ce système n'admet pas de solution, tandis que la première fournit :

$$2x = a \Rightarrow x = \frac{a}{2} \text{ (réponse a).}$$

Dans ces conditions, $(a-x)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4} + y^2$, de sorte que les deux termes qui composent l'expression de E_y sont identiques ; il s'ensuit que :

$$E_y = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{y}{\left(\frac{a^2}{4} + y^2\right)^{3/2}} \Rightarrow \vec{E}(P) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{y}{\left(\frac{a^2}{4} + y^2\right)^{3/2}} \vec{e}_y \text{ (réponse d).}$$

3. La condition $|y| \ll a$ simplifie l'expression de $\vec{E}(P)$:

$$\vec{E}(P) \simeq \frac{4q}{\pi\epsilon_0 a^3} \times y \vec{e}_y$$

qui dérive du potentiel V tel que :

$$\vec{E}(P) = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow \frac{4qy}{\pi\epsilon_0 a^3} \vec{e}_y = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

Les identités $\frac{\partial V}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial z} = 0$ montrent que V ne dépend que de y , auquel cas :

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{4qy}{\pi\epsilon_0 a^3}$$

Or, à ce potentiel est associée une énergie potentielle électrostatique pour la particule de charge q' :

$$\mathcal{E}_{pe} = q'V \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_{pe}}{dy} = -\frac{4qq'y}{\pi\epsilon_0 a^3} = ky \quad (38)$$

En outre, la particule est soumise au champ de gravitation qui lui confère une énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{pp} = mgy$ (l'axe Ox étant choisi comme référence). C'est pourquoi l'énergie potentielle de la particule vaut :

$$\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{pp} + \mathcal{E}_{pe} = mgy + \mathcal{E}_{pe} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_p}{dy} = mg + \frac{d\mathcal{E}_{pe}}{dy} = mg + ky$$

On constate qu'il existe une valeur :

$$y_e = -\frac{mg}{k} \text{ (réponse c)}$$

qui rend *extremum* \mathcal{E}_p et qui correspond donc à une position d'équilibre de la particule.

4. Des calculs précédents, on déduit que :

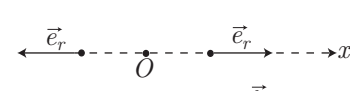
$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dy^2} = k > 0$$

ce qui signifie également que \mathcal{E}_p est *minimum* en $y = y_e$; l'équilibre en P_e est stable, auquel cas des oscillations peuvent s'y produire avec la pulsation :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dy^2} \right|_{y_e}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \text{ (réponse d).}$$

● 239 ————— Concours ESME

1. Selon que x est positif ou négatif, le vecteur unitaire \vec{e}_r s'identifie à $+\vec{i}$ ou à $-\vec{i}$.

$$x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_r = \vec{i} \\ r = x \end{cases} \quad \text{et} \quad x \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_r = -\vec{i} \\ r = -x \end{cases}$$


en conséquence de quoi il convient de distinguer plusieurs cas :

- pour $x \geq R$: $\vec{E}_1 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{i}$;
- pour $R \geq x \geq 0$: $\vec{E}_1 = -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \times x \vec{i}$;
- pour $-R \leq x \leq 0$: $\vec{E}_1 = -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \times x \vec{i}$;
- pour $x \leq -R$: $\vec{E}_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{i}$.

C'est pourquoi le champ résultant $\vec{E} = E_0 \vec{i} + \vec{E}_1$ admet trois expressions :

$$\begin{aligned} x \geq R &\Rightarrow \vec{E} = \left(E_0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \right) \vec{i} \\ R \geq x \geq -R &\Rightarrow \vec{E} = \left(E_0 - \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) \vec{i} \\ -R \geq x &\Rightarrow \vec{E} = \left(E_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \right) \vec{i} \end{aligned} \quad (39)$$

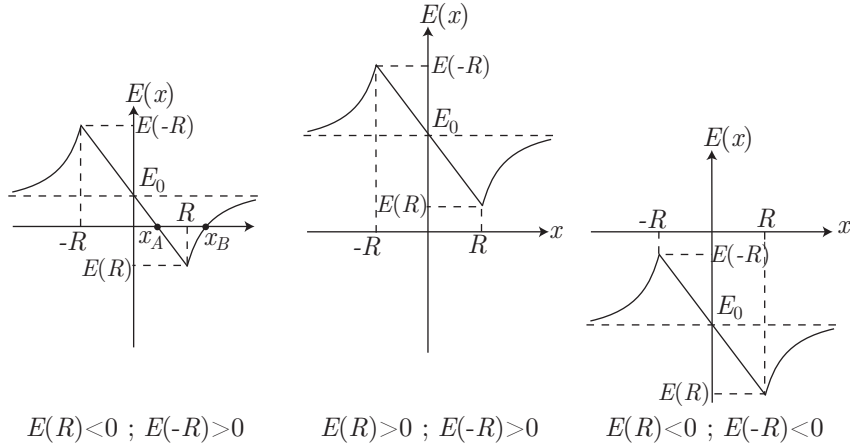
En posant $\vec{E} = E \vec{i}$, on fait alors apparaître trois fonctions $E = E(x)$ caractérisées par :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} [E(x)] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(E_0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \right) = E_0 \\ \lim_{x \rightarrow R} [E(x)] &= E_0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = E(R) \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [E(x)] &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(E_0 - \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right) = E_0 \\ \lim_{x \rightarrow -R} [E(x)] &= E_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = E(-R) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [E(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(E_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \right) = E_0$$

En remarquant, en outre, que pour $x \in [-R, +R]$, la fonction $E(x)$ est linéaire, on obtient des représentations graphiques qui dépendent de la valeur prise par E_0 :



La première courbe révèle que $E(x)$ devient négatif sur l'intervalle $[x_A, x_B]$ si $E(R) < 0$ et $E(-R) > 0$. Si l'une de ces conditions n'est pas vérifiée, $E(x)$ conserve un signe constant (deuxième et troisième courbes).

2. (a) L'énergie potentielle de la charge q est liée au potentiel électrostatique :

$$\mathcal{E}_p = qV \Rightarrow V = \frac{1}{q} \mathcal{E}_p$$

lequel définit le champ \vec{E} :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow E \vec{i} = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k} = -\frac{dV}{dx} \vec{i} \Rightarrow E = -\frac{dV}{dx}$$

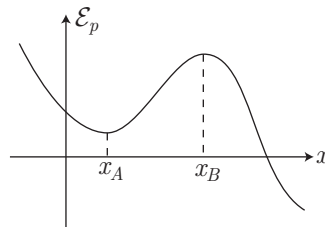
et c'est pour cette raison que :

$$E = -\frac{1}{q} \frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = -qE \tag{42}$$

De fait, les variations de \mathcal{E}_p sont liées au signe de E en conséquence de quoi les trois graphes précédents procurent l'allure de la fonction $\mathcal{E}_p(x)$ dans trois cas distincts :

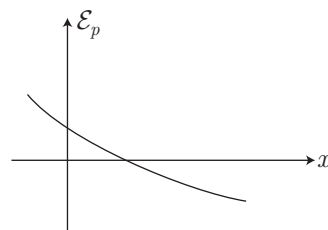
- si $E(R) < 0$ et $E(-R) > 0$:

$E(x)$	+	x_A	-	x_B	+
$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$	-		+		-
\mathcal{E}_p	↘		↗		↘



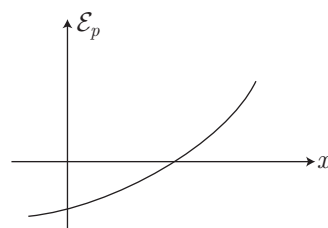
- si $E(R) > 0$ et $E(-R) > 0$:

$E(x)$	+
$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$	-
\mathcal{E}_p	↘



- si $E(R) < 0$ et $E(-R) < 0$:

$E(x)$	-
$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$	+
\mathcal{E}_p	↗



- (b) Les schémas précédents révèlent qu'il existe deux positions d'équilibre, aux abscisses x_A et x_B (qui affectent à \mathcal{E}_p des valeurs *extremum*), à condition toutefois que $E(R) < 0$ et $E(-R) > 0$, c'est-à-dire, compte tenu des expressions (40) et (41) :

$$\begin{cases} E_0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} < 0 \\ E_0 + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_0 < \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \\ E_0 > -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \end{cases} \Rightarrow |E_0| < \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad (43)$$

Cette condition montre qu'un champ E_0 d'intensité trop forte ($|E_0| > \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$) peut permettre le départ de la charge q (voir les deux derniers schémas), c'est-à-dire vaincre l'attraction électrostatique que la sphère chargée exerce sur la particule ; en termes d'atomes, un tel phénomène s'apparente à une ionisation.

- (c) Compte tenu de la représentation de $\mathcal{E}_p(x)$ pour $E(R) < 0$ et $E(-R) > 0$, seule la valeur x_A de x affecte à \mathcal{E}_p sa valeur minimale, à laquelle est associée une position d'équilibre stable. Une telle tendance peut être confirmée par l'identité (42) : $\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = -qE$ où $E(x)$ correspond au cas $x \in [-R, +R]$ (conformément à la première représentation graphique de $E(x)$), c'est-à-dire :

$$E(x) = E_0 - \frac{qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = \frac{x}{4\pi\epsilon_0 R^3} - \frac{E_0}{q} \Rightarrow \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} > 0$$

Non seulement l'abscisse x_A annule $E(x)$:

$$E(x_A) = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right|_{x_A} = \frac{x_A}{4\pi\epsilon_0 R^3} - \frac{E_0}{q} = 0 \Rightarrow x_A = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 E_0}{q}$$

mais de surcroît :

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2} \right|_{x_A} > 0$$

suffit à montrer que $\mathcal{E}_p(x_A)$ représente une valeur *minimum* pour l'énergie potentielle, à laquelle est associée une position d'équilibre stable.

3. (a) La représentation graphique de $\mathcal{E}_p(x)$, pour $E(R) < 0$ et $E(-R) > 0$, révèle que si x excède la valeur x_B , la particule s'échappe de l'attraction de la sphère (pour atteindre une énergie potentielle plus petite). C'est pourquoi l'amplitude des oscillations ne peut dépasser la valeur $a_M = x_B$, solution de l'équation :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right|_{x_B} = 0 \Rightarrow E(a_M) = 0 \text{ car } \frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = -q \times E$$

où la représentation graphique de $\mathcal{E}_p(x)$, pour $E(R) < 0$ et $E(-R) > 0$ montre que : $a_M = x_B > R$, auquel cas :

$$E(a_M) = E_0 - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a_M^2} = 0 \Rightarrow a_M = \sqrt{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 E_0}}$$

Dans ces conditions, la pulsation des oscillations vaut :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dx^2} \right|_{x_A}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m R^3}}$$

(b) **Application numérique**

- Du résultat (43), il ressort que $|E_0|$ ne peut excéder une valeur maximale :

$$E_{0M} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{(5,3 \cdot 10^{-11})^2} \times 9 \cdot 10^9$$

$$\Rightarrow E_{0M} = 5,13 \cdot 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

- Dans le cas où $E_0 = \frac{1}{2} E_{0M} = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R^2}$:

$$a_M = \sqrt{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{E_0}} = \sqrt{\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{8\pi\epsilon_0 R^2}{q}} = R\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow a_M = 7,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

- La pulsation des oscillations devient alors :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{mR^3}} = \sqrt{9 \cdot 10^9 \times \frac{1}{9,1 \cdot 10^{-31} \times (5,3 \cdot 10^{-11})^3}}$$

$$= 2,58 \cdot 10^{35} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

à laquelle est associée la fréquence :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 4,1 \cdot 10^{34} \text{ Hz}$$

Cette fréquence appartient à une radiation électromagnétique de longueur d'onde :

$$\lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{4,1 \cdot 10^{34}} = 7,3 \cdot 10^{-29} \text{ m}$$

qui ne peut être visible (car $\lambda_0 \ll 400 \text{ nm} = 4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$).

● 240 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

Lorsque G et N sont décalés l'un par rapport à l'autre, au champ électrique extérieur \vec{E} s'ajoute le champ électrique produit par la distribution de charges. Appelons \vec{E}_N le champ électrique que le nuage électronique produit en N :

$$\begin{array}{c} \vec{E}_N \quad \vec{E} \quad \vec{e}_r \\ \leftarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \\ N(+q) \end{array}$$

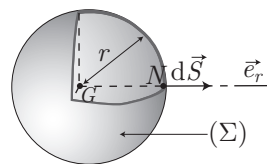
L'équilibre de N peut alors être obtenu lorsque $\vec{E} + \vec{E}_N = \vec{0}$, c'est-à-dire :

$$\|\vec{E}_N\| = \|\vec{E}\| = E \text{ car } \vec{E} = E \times \vec{e}_r \quad (44)$$

Déterminer la position d'équilibre de N revient alors à calculer le champ E_N créé par le nuage électronique sur N , tel que $GN = r$.

Compte tenu de la géométrie sphérique du nuage électronique, \vec{E}_N est radial et ne dépend que de r :

$$\vec{E}_N = E_N(r) \times \vec{e}_r$$



Soit (Σ) une sphère de rayon r , de centre G et soit $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$ un élément de surface de cette sphère. Le théorème de Gauss lie alors le flux Φ de \vec{E}_N à travers (Σ) , à la charge Q_{int} contenue à l'intérieur de (Σ) :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{E}_N \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Or :

$$\begin{cases} \vec{E}_N = E_N(r) \times \vec{e}_r \\ d\vec{S} = dS \times \vec{e}_r \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_N \cdot d\vec{S} = E_N(r) \times dS$$

$$\Rightarrow \Phi = \iint_{(\Sigma)} E_N(r) \times dS = E_N(r) \times \iint_{(\Sigma)} dS$$

car E_N est constant sur (Σ)

$$\Rightarrow \Phi = E_N(r) \times 4\pi r^2$$

En outre, la charge négative $-q$ est supposée uniformément répartie dans la sphère de rayon R , ce qui signifie aussi que :

$$\frac{-q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q_{\text{int}}}{\frac{4}{3}\pi r^3} \Rightarrow Q_{\text{int}} = -q \times \frac{r^3}{R^3}$$

Le théorème de Gauss s'écrit dès lors :

$$E_N(r) \times 4\pi r^2 = -\frac{q}{\varepsilon_0} \times \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow E_N = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \times r$$

et la condition d'équilibre (44) devient :

$$\|\vec{E}_N\| = E \Rightarrow \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \times r = E \Rightarrow q \times r = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \times E$$

Enfin, la définition du moment dipolaire : $\vec{\mu} = q \times \overrightarrow{GN} = qr \vec{e}_r$ conduit à :

$$\vec{\mu} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \times E \vec{e}_r = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \times \vec{E}$$

Ce résultat introduit la polarisabilité de l'atome :

$$\vec{\mu} = \alpha \vec{E} \text{ avec } \alpha = 4\pi\varepsilon_0 R^3$$

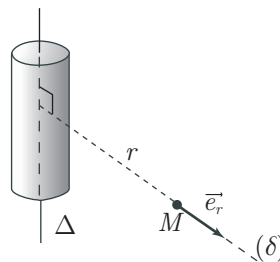
Un moment dipolaire peut donc être induit par un champ électrique au sein d'un atome. Ce moment est d'autant plus important que le volume de l'atome est plus volumineux. C'est pourquoi, en chimie, on affirme que les atomes les plus gros sont aussi les plus polarisables.

● 241 ————— Lycée Condorcet, Paris

1. Avant de répondre à la question posée, remarquons que toute droite (δ) , perpendiculaire à l'axe du cylindre et coupant celui-ci, est un axe de symétrie pour la distribution de charges.

Le champ \vec{E} en un point M de (δ) doit par conséquent être colinéaire au vecteur unitaire directeur \vec{e}_r de (δ) ; $\vec{E} = E \vec{e}_r$. Du reste, la rotation du cylindre autour de l'axe Δ laisse invariante la distribution de charges, de même que la translation du cylindre dans la direction de Δ . C'est pourquoi $\|\vec{E}\|$ ne dépend que de la distance r qui sépare M de Δ :

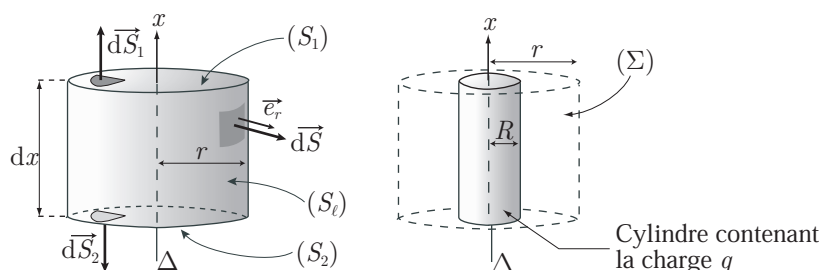
$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$



Considérons maintenant un élément du cylindre, de hauteur dx , c'est-à-dire de surface latérale $S = 2\pi R dx$. Cet élément contient, en surface, la charge $q = \sigma S = 2\pi R \sigma dx$.

- **Cas où $r > R$**

Appelons (Σ) une surface cylindrique fermée, contenant l'élément du cylindre précédemment cité, et possédant le même axe Δ .



Le théorème de Gauss indique que le flux du champ \vec{E} à travers (Σ) est lié à la charge $q = \sigma \times 2\pi R dx$ à l'intérieur de (Σ) :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

où (Σ) se compose d'une surface latérale (S_ℓ) et de deux surfaces planes extrêmes (S_1) et (S_2) , avec $S_\ell = 2\pi r dx$:

$$\Phi = \underbrace{\iint_{(S_\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{S}}_{\phi_\ell} + \underbrace{\iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1}_{\phi_1} + \underbrace{\iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2}_{\phi_2}$$

L'étude préliminaire révèle la nature radiale de \vec{E} , de sorte que :

- $\vec{E} \perp d\vec{S}_1$ et $\vec{E} \perp d\vec{S}_2$ attribuent une valeur nulle à ϕ_1 et ϕ_2 ;
- $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$ et $d\vec{S}_\ell = dS \vec{e}_r$ impliquent que :

$$\begin{aligned} \phi_\ell &= \iint_{(S_\ell)} E(r) dS = E(r) \times \iint_{(S_\ell)} dS = E(r) \times S_\ell \\ &= E(r) \times 2\pi r dx \end{aligned}$$

Finalement, le théorème de Gauss conduit à :

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} &\Rightarrow E(r) \times 2\pi r dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times 2\pi R dx \\ &\Rightarrow E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times \frac{R}{r} \text{ pour } r > R \end{aligned}$$

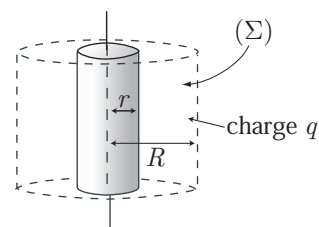
• **Cas où $r < R$**

À l'intérieur de (Σ) se trouve une charge nulle puisque $r < R$. Aussi, le théorème de Gauss impose :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

où Φ se calcule comme dans le cas où $r > R$:

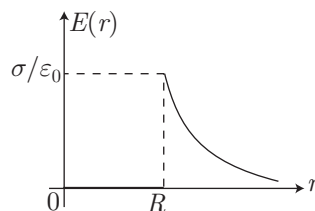
$$\Phi = \phi_\ell = E(r) \times 2\pi r dx = 0 \Rightarrow E(r) = 0 \text{ pour } r < R$$



2. Les expressions analytiques du champ :

$$E(r > R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \times \frac{R}{r} \text{ et } E(r < R) = 0$$

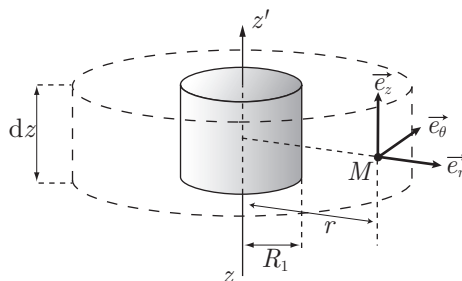
fournissent directement l'allure de la courbe $E(r)$:



Cette courbe indique la discontinuité du champ E pour $r = R$. Une telle discontinuité est généralement observée au passage des régions chargées vers le vide.

● 242 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Compte tenu de la symétrie cylindrique du condensateur, l'usage des coordonnées cylindriques (r, θ, z) est fortement recommandé ; la base associée à ces coordonnées est $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.

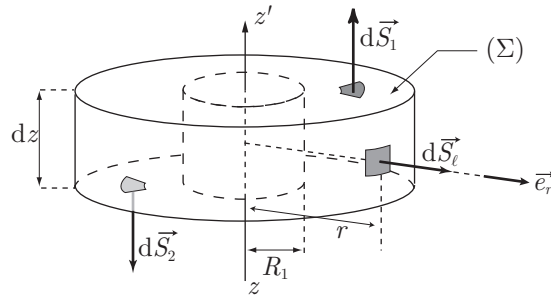


Cherchons au préalable les éléments de symétrie permettant d'orienter le champ $\vec{E}(M)$ en un point M : la droite qui passe par M et intercepte l'axe $(z'z)$, perpendiculairement à $(z'z)$, constitue un axe de symétrie pour le cylindre ; le champ électrique \vec{E} est colinéaire à cet axe : $\vec{E} = E \vec{e}_r$.

En outre, la rotation du condensateur autour de son axe, ou encore sa translation le long de l'axe $(z'z)$ laisse invariante la distribution de charges ; une telle invariance assure l'indépendance de \vec{E} à l'égard des coordonnées z et θ :

$$\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$$

Il est désormais possible d'appliquer le théorème de Gauss à une surface fermée (Σ) cylindrique, de hauteur dz et de rayon $r \in [R_1, R_2]$:



En notant Q_{int} la charge électrique contenue à l'intérieur de (Σ) :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

où (Σ) se décompose en une surface latérale (S_ℓ) et de deux surfaces de base (S_1) et (S_2) :

$$\Phi = \underbrace{\iint_{(S_\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell}_{\phi_\ell} + \underbrace{\iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1}_{\phi_1} + \underbrace{\iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2}_{\phi_2}$$

Il s'agit maintenant d'exprimer les flux ϕ_ℓ , ϕ_1 et ϕ_2 composant le flux total Φ .

• **Calcul de ϕ_ℓ**

La surface élémentaire $d\vec{S}_\ell$ étant toujours orientée comme \vec{e}_r :

$$\begin{cases} d\vec{S}_\ell = dS_\ell \vec{e}_r \\ \vec{E} = E(r) \vec{e}_r \end{cases} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = E(r) \times dS_\ell$$

$$\Rightarrow \phi_\ell = \iint_{(S_\ell)} E(r) dS_\ell = E(r) \iint_{(S_\ell)} dS_\ell$$

car $E(r)$ est constant sur (S_ℓ)

$$\Rightarrow \phi_\ell = E(r) \times S_\ell = E(r) \times 2\pi r dz$$

• **Calcul de ϕ_1 et ϕ_2**

Les surfaces élémentaires $d\vec{S}_1$ et $d\vec{S}_2$ sont perpendiculaires à $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$, de sorte que :

$$\begin{cases} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 = 0 \\ \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = 0 \\ \phi_2 = 0 \end{cases}$$

Finalement, le théorème de Gauss s'écrit :

$$\Phi = E(r) \times 2\pi r dz = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \quad (45)$$

où Q_{int} est proportionnel à la densité surfacique uniforme de charges :

$$\frac{Q_{\text{int}}}{2\pi R_1 dz} = \sigma = \frac{Q}{2\pi R_1 \ell} \Rightarrow Q_{\text{int}} = Q \times \frac{dz}{\ell}$$

La relation (45) devient par conséquent :

$$E(r) = Q \times \frac{dz}{\varepsilon_0 \ell} \times \frac{1}{2\pi r dz} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \times \frac{1}{r} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \times \frac{\vec{e}_r}{r}$$

2. Champ et potentiel sont liés par la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, qui s'exprime, en coordonnées cylindriques, par :

$$\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \times \frac{\vec{e}_r}{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$

Cette relation implique d'une part que :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow V = V(r)$$

et d'autre part que :

$$\begin{aligned} -\frac{dV}{dr} &= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell r} \Rightarrow -dV = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \times \frac{dr}{r} \\ &\Rightarrow -\int_{V_1}^{V_2} dV = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} \\ &\Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \end{aligned}$$

3. La capacité C d'un condensateur est le coefficient de proportionnalité entre la tension $V_1 - V_2$ aux bornes du condensateur et la charge Q portée par l'armature portée au potentiel V_1 :

$$Q = C \times (V_1 - V_2)$$

Par identification avec le résultat obtenu à la question précédente, il vient finalement :

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \Rightarrow C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \ell}{\ln(R_2/R_1)}$$

● 243 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

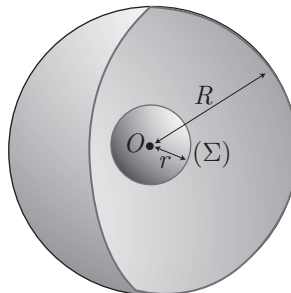
1. Considérons une surface sphérique (Σ), de rayon $r < R$, centrée sur O .

Si la Terre est homogène, sa masse volumique ρ l'est également, ce qui permet le calcul de la masse M_i à l'intérieur de (Σ) :

$$M_i = \rho \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

tandis que la masse totale de la Terre vaut :

$$M = \rho \times \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \rho = \frac{3M}{4\pi R^3} \Rightarrow M_i = M \times \frac{r^3}{R^3}$$



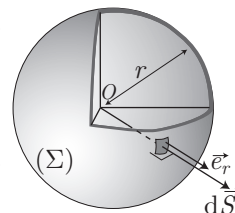
Tout rayon OM , tel que $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$, est axe de symétrie pour la Terre, de sorte que le champ de gravitation \vec{g} est colinéaire à \vec{e}_r :

$$\vec{g} = g \vec{e}_r$$

De plus, toute rotation de la Terre autour de O laisse invariant le champ \vec{g} , qui ne dépend par conséquent que de r :

$$\vec{g} = g(r) \vec{e}_r$$

Aussi, en définissant par $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$ une surface élémentaire de (Σ) , le flux de \vec{g} à travers (Σ) vaut :



$$\Phi_g = \iint_{(\Sigma)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} g(r) \times dS = g(r) \times \iint_{(\Sigma)} dS = g(r) \times 4\pi r^2$$

Par suite, le théorème de Gauss généralisé à la gravitation :

$$\Phi_g = -4\pi GM_i$$

devient :

$$g(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi G \times \frac{Mr^3}{R^3} \Rightarrow g = -\frac{GMr}{R^3} \Rightarrow \vec{g} = -\frac{GMr}{R^3} \vec{e}_r$$

ce qui signifie qu'au niveau du sol, le champ de pesanteur a pour intensité :

$$g_0 = \left\| -\frac{GM}{R^2} \vec{e}_r \right\| = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow GM = g_0 R^2 \Rightarrow \vec{g} = -g_0 \frac{r}{R} \vec{e}_r$$

2. La masse m est soumise à la force de gravitation :

$$\vec{f} = m \vec{g} \Rightarrow f \vec{e}_r = -g_0 \frac{m}{R} r \vec{e}_r \Rightarrow f(r) = -\frac{mg_0}{R} r$$

à laquelle est associée une énergie potentielle \mathcal{E}_p telle que :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -f(r) = \frac{mg_0 r}{R} \Rightarrow \mathcal{E}_p = \frac{mg_0}{2R} r^2 + K$$

où K est une constante. En outre, le mouvement de cette masse étant purement radial, sa vitesse $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r$ conduit à l'expression de son énergie cinétique \mathcal{E}_c :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{r}^2$$

De ces expressions découle celle de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m de la masse :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mg_0}{2R} r^2 + K$$

L'absence de frottements garantit la nature conservative du mouvement de la masse, dont l'énergie se conserve entre A (où sa vitesse est nulle) et tout autre point :

$$\mathcal{E}_m(r) = \mathcal{E}_m(r_A) \Rightarrow \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{mg_0}{2R} r^2 + K = \frac{mg_0}{2} R + K$$

d'où se déduit l'équation différentielle :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{g_0}{R} r^2 = g_0 R \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{g_0}{R} (R^2 - r^2)$$

3. L'équation différentielle précédente s'écrit également :

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{g_0}{R}} \sqrt{R^2 - r^2}$$

Or, entre A et O , la distance r diminue, en conséquence de quoi :

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{g_0}{R}} \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow dt = -\sqrt{\frac{R}{g_0}} \times \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

Sachant qu'à la date $t = 0$, r vaut R et qu'à la date τ_0 la masse arrive en O ($r = 0$), l'intégration de cette équation différentielle donne :

$$\int_0^{\tau_0} dt = -\sqrt{\frac{R}{g_0}} \int_R^0 \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \sqrt{\frac{R}{g_0}} \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}$$

où il est judicieux d'effectuer le changement de variable :

$$r = R \sin u \Rightarrow dr = R \cos u du \text{ et } r = R \text{ pour } u = \frac{\pi}{2}$$

afin d'obtenir :

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{R}{g_0}} \int_0^{\pi/2} \frac{R \cos u du}{R \sqrt{1 - \sin^2 u}} = \sqrt{\frac{R}{g_0}} \int_0^{\pi/2} du = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

Par suite, la masse met un temps $\tau = 2\tau_0$ pour traverser la Terre, tel que :

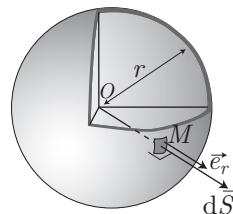
$$\tau = \pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

● **244** ————— **Lycée Thiers, Marseille**

1. Soit M un point situé à une distance r du centre O des sphères, tel que : $\vec{OM} = r \vec{e}_r$.

L'axe OM étant un axe de symétrie pour la distribution de charges, le champ \vec{E} en M appartient à cet axe et est donc colinéaire à \vec{e}_r . En outre, toute rotation du système autour de O laisse invariante la distribution de charges, ce qui signifie que \vec{E} ne dépend que de r : $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$.

Soit $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$ un élément de surface de la boule de rayon r , et donc de surface totale $S = 4\pi r^2$.



Le flux de \vec{E} à travers cette boule (\mathcal{B}) est défini par :

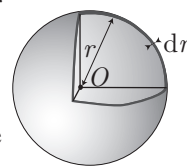
$$\Phi = \iint_{(\mathcal{B})} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(\mathcal{B})} E(r) \times dS = E(r) \times \iint_{(\mathcal{B})} dS = E(r) \times 4\pi r^2 \quad (46)$$

En outre, une coquille centrée sur O , de rayon r et d'épaisseur dr , présente un volume :

$$d\tau = 4\pi r^2 \times dr \text{ (surface} \times \text{épaisseur)}$$

et donc une charge $\delta q = \rho(r) d\tau$. C'est pourquoi la charge totale contenue dans la sphère de rayon r vaut :

$$q(r) = \int_0^r \rho(u) \times 4\pi u^2 du = 4\pi \int_0^r \rho(u) u^2 du \quad (47)$$



Plusieurs cas peuvent être étudiés :

- pour $r < R_i$, le champ \vec{E} est nul, de sorte que $\Phi = 0$. Le théorème de Gauss conduit directement à :

$$\Phi = \frac{q(r)}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(u) u^2 du = 0$$

dont la dérivation par rapport à r fournit :

$$\frac{4\pi}{\varepsilon_0} \times \rho(r) r^2 = 0 \Rightarrow \rho_1(r) = 0 \text{ pour } r < R_i$$

- Pour $r \in]R_i, R_e[$, les expressions (46) et (47) donnent au théorème de Gauss la forme suivante :

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{q(r)}{\varepsilon_0} &\Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(u) u^2 du \\ &\Rightarrow k (r^3 - R_i r^2) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(u) u^2 du \text{ car } E(r) = k (r - R_i) \end{aligned}$$

À nouveau, la dérivation par rapport à r fournit :

$$k\varepsilon_0 (3r^2 - 2R_i r) = \rho(r) r^2 \Rightarrow \rho_2(r) = k\varepsilon_0 \left(3 - \frac{2R_i}{r} \right) \text{ pour } R_i < r < R_e$$

- pour $r > R_e$, l'espace est vide, ce qui signifie aussi que :

$$\rho_3(r) = 0 \text{ pour } r > R_e$$

2. Compte tenu de l'identité (47), la charge totale vaut :

$$\begin{aligned} Q &= 4\pi \int_0^\infty \rho(u) u^2 du \\ &= 4\pi \underbrace{\int_0^{R_i} \rho_1 u^2 du}_{=0} + 4\pi \int_{R_i}^{R_e} \rho_2 u^2 du + 4\pi \underbrace{\int_{R_e}^\infty \rho_3 u^2 du}_{=0} \\ &= 4\pi \int_{R_i}^{R_e} k\varepsilon_0 (3u^2 - 2R_i u) du \text{ car } \rho_2(u) = k\varepsilon_0 \left(3 - \frac{2R_i}{u} \right) \\ &= 4\pi\varepsilon_0 k [u^3 - R_i u^2]_{R_i}^{R_e} = 4\pi\varepsilon_0 k (R_e^3 - R_i R_e^2) \end{aligned}$$

soit encore :

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 k R_e^2 (R_e - R_i)$$

3. Les expressions précédentes permettent désormais la détermination du champ et du potentiel électrostatiques en tout point de l'espace.

- Pour $r > R_e$, le flux de \vec{E} est donné par l'identité (46), tandis que la charge contenue à l'intérieur de la surface correspondante (boule de rayon r supérieur à R_e) vaut Q . Le théorème de Gauss devient ainsi :

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{Q}{\varepsilon_0} &\Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = 4\pi k R_e^2 (R_e - R_i) \\ &\Rightarrow \vec{E} = \frac{k R_e^2 (R_e - R_i)}{r^2} \vec{e}_r \text{ pour } r > R_e \end{aligned}$$

Quant au potentiel dont dérive \vec{E} , il suit la loi :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E(r) \vec{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

L'identification des deux membres de cette équation révèle que $\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, ce qui traduit la dépendance exclusive de V en fonction de r :

$$\frac{dV}{dr} = -E(r) \Rightarrow dV = -E(r) dr \quad (48)$$

Pour $r > R_e$, il convient de postuler pour un potentiel nul lorsque r tend vers l'infini, à la suite de quoi :

$$\begin{aligned} \int_0^{V(r)} dV &= -\int_\infty^r E(r) dr = k R_e^2 (R_e - R_i) \int_\infty^r \frac{-dr}{r^2} \\ &\Rightarrow V(r) = \frac{k R_e^2 (R_e - R_i)}{r} \text{ pour } r > R_e \end{aligned}$$

- Pour $R_i < r < R_e$, le champ électrique est directement donné par l'énoncé :

$$\vec{E} = k (r - R_i) \vec{e}_r \text{ pour } R_i < r < R_e$$

tandis que la condition de continuité de la fonction potentiel $V(r)$ en $r = R_e$ impose :

$$V(R_e) = \frac{k R_e^2 (R_e - R_i)}{R_e} = k R_e (R_e - R_i)$$

Par suite, $V(r)$ s'obtient grâce à la loi (48) :

$$\begin{aligned} \int_{V(R_e)}^{V(r)} dV &= -\int_{R_e}^r E(r) dr = -k \int_{R_e}^r (r - R_i) dr = -k \left[\frac{r^2}{2} - r R_i \right]_{R_e}^r \\ &\Rightarrow V(r) = V(R_e) - k \left(\frac{r^2}{2} - r R_i \right) + k \left(\frac{R_e^2}{2} - R_e R_i \right) \\ &\Rightarrow V(r) = k R_e (R_e - R_i) - k \left(\frac{r^2}{2} - r R_i \right) + k R_e \left(\frac{R_e}{2} - R_i \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$V(r) = kR_e \left(\frac{3R_e}{2} - 2R_i \right) - kr \left(\frac{r}{2} - R_i \right) \text{ pour } R_i < r < R_e$$

- Pour $r < R_i$, l'énoncé précise que :

$$\vec{E} = \vec{0} \text{ pour } r < R_i$$

tandis que la fonction $V(r)$ est continue en $r = R_i$:

$$V(R_i) = kR_e \left(\frac{3R_e}{2} - 2R_i \right) - kR_i \left(\frac{R_i}{2} - R_i \right) = k \left(\frac{3R_e^2}{2} - 2R_e R_i + \frac{R_i^2}{2} \right)$$

Finalement, la loi (48) fournit :

$$\int_{V(R_i)}^{V(r)} dV = - \int_{R_i}^r E(r) dr = 0$$

$$\Rightarrow V(r) = V(R_i) = \frac{k}{2} (3R_e^2 - 4R_e R_i + R_i^2) \text{ pour } r > R_i$$

● 245 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. La rotation du disque sur lui-même n'apporte aucune modification d'ordre physique, ce qui signifie que le champ électrique est indépendant de l'angle θ (en coordonnées sphériques), ce qui assure également sa symétrie de révolution.
2. Considérons un cylindre élémentaire, de hauteur dz , de rayon r infiniment petit, et d'axe Oz .

Ce cylindre étant vide de charge, le théorème de Gauss prévoit un flux de \vec{E} nul à travers sa surface (Σ) :

$$\Phi = \iint_{(\Sigma)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

où (Σ) se compose :

- d'une surface latérale (S_ℓ) ;
- des surfaces de base (S_1) et (S_2), sur lesquelles le champ électrique vaut respectivement \vec{E}_1 et \vec{E}_2 ;

de sorte que :

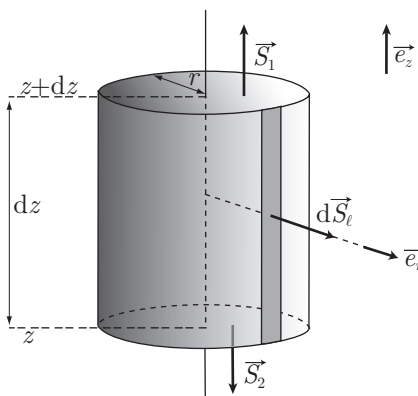
$$\Phi = \underbrace{\iint_{(S_\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell}_{\phi_\ell} + \underbrace{\vec{E}_1 \cdot \vec{S}_1}_{\phi_1} + \underbrace{\vec{E}_2 \cdot \vec{S}_2}_{\phi_2} \quad (49)$$

Évaluons maintenant les trois termes de cette expression :

- **Le flux ϕ_ℓ**

Sur la surface (S_ℓ), le champ s'écrit :

$$\vec{E} = E_r(r, z) \vec{e}_r + E_z(r, z) \vec{e}_z = E_r \vec{e}_r + E_z \vec{e}_z$$



et :

$$d\vec{S}_\ell = dS_\ell \vec{e}_r \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = E_r \times dS_\ell \Rightarrow \phi_\ell = E_r \times dS_\ell = E_r \times 2\pi r dz$$

• **Le flux ϕ_1**

Sur la surface $\vec{S}_1 = S_1 \vec{e}_z = \pi r^2 \vec{e}_z$, le champ s'écrit :

$$\vec{E} = E_r(r=0, z+dz) \vec{e}_r + E_z(r=0, z+dz) \vec{e}_z$$

de sorte que :

$$\phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \vec{S}_1 = E_z(0, z+dz) \times \pi r^2$$

• **Le flux ϕ_2**

De même, sur $\vec{S}_2 = -S_2 \vec{e}_z = -\pi r^2 \vec{e}_z$:

$$\vec{E}_2 = E_r(r=0, z) \vec{e}_r + E_z(r=0, z) \vec{e}_z$$

fournit :

$$\phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \vec{S}_2 = -E_z(0, z) \times \pi r^2$$

Finalement, l'équation (49) prend la forme suivante :

$$\underbrace{E_r \times 2\pi r dz}_{\phi_\ell} + \underbrace{[E_z(0, z+dz) - E_z(0, z)] \times \pi r^2}_{\phi_1 + \phi_2} = 0$$

où le développement limité :

$$E_z(0, z+dz) = E_z(0, z) + dz \times \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{r=0}$$

apporte une simplification :

$$E_r \times 2\pi r dz + dz \times \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{r=0} \times \pi r^2 = 0 \Rightarrow E_r = -\frac{r}{2} \times \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{r=0} \quad (50)$$

3. Conformément au rappel de cours, le champ électrostatique \vec{E} créé par le disque uniformément chargé vaut, en un point de l'axe Oz :

$$\vec{E}(0, z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) \vec{e}_z$$

en conséquence de quoi :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{r=0} &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{d}{dz} \left[z \times (z^2 + R^2)^{-1/2} \right] \\ &= -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[(z^2 + R^2)^{-1/2} - z^2 \times (z^2 + R^2)^{-3/2} \right] \\ &= -\frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0} \times \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Aussi, au voisinage de l'axe Oz , la composante radiale du champ est donnée par le résultat (50) :

$$E(r, z) \simeq \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0} \times \frac{r}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

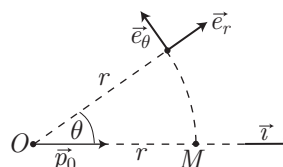
● 246 ————— Lycée Fabert, Metz

1. La molécule, de moment dipolaire permanent \vec{p}_0 , crée un champ électrique \vec{E} dont l'expression en coordonnées polaires est donnée par :

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$$

avec :

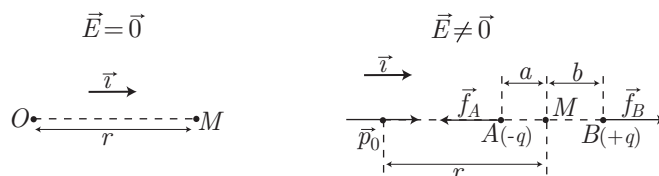
$$E_r = \frac{p_0 \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \text{ et } E_\theta = \frac{p_0 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$



Notamment, au point M , $\theta = 0$ et \vec{e}_r s'identifie à \vec{r} :

$$\vec{E} = \frac{p_0}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (51)$$

Sous l'influence de ce champ, la molécule polarisable se scinde en deux charges électriques ($-q$) et ($+q$), dont les barycentres se trouvent aux points $A(r - a, 0, 0)$ et $B(r + b, 0, 0)$:



Cette scission est le résultat de forces électrostatiques \vec{f}_A et \vec{f}_B en A et B respectivement :

$$\vec{f}_A = -q \vec{E}_A \text{ et } \vec{f}_B = q \vec{E}_B$$

avec :

$$\begin{cases} \vec{E}_A = E_A \vec{r} \\ \vec{E}_B = E_B \vec{r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{f}_A = -q E_A \vec{r} \\ \vec{f}_B = q E_B \vec{r} \end{cases} \quad (52)$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \vec{f}_A + \vec{f}_B = q (E_B - E_A) \vec{r} \quad (53)$$

Les champs E_A et E_B étant donnés par la relation (51), il apparaît que :

$$E_A > E_B \Rightarrow \vec{F} = -q |E_A - E_B| \vec{r}$$

Le sens de la résultant \vec{F} des forces électrostatiques montre que la molécule polarisable est attirée par la molécule polaire située en O .

2. La relation (51) donne l'expression des champs en A et B :

$$\vec{E}_A = \frac{p_0 \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 (r - a)^3} = \frac{p_0 \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-3} \simeq \frac{p_0 \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 + \frac{3a}{r}\right)$$

en effectuant le développement limité d'ordre 1 :

$$(1 + \varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha \times \varepsilon \text{ lorsque } \varepsilon \ll 1$$

De même :

$$\vec{E}_B = \frac{p_0 \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 (r+b)^3} = \frac{p_0 \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 + \frac{b}{r}\right)^{-3} \simeq \frac{p_0 \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^3} \left(1 - \frac{3b}{r}\right)$$

Aussi, $\vec{F} = q (\vec{E}_B - \vec{E}_A)$ s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{p_0 \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^3} \times q \left[\left(1 - \frac{3b}{r}\right) - \left(1 + \frac{3a}{r}\right) \right] = -\frac{p_0 \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^3} \times 3q \frac{a+b}{r}$$

où l'on reconnaît la définition du moment dipolaire induit sur la molécule en M :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{AB} \Rightarrow p = q \times (a+b) \Rightarrow \vec{F} = \frac{-p_0 \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^4} \times 3p$$

Enfin, ce moment dipolaire provient de la seule présence du champ \vec{E} :

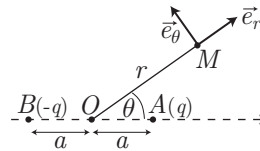
$$\begin{aligned} \vec{p} &= \alpha \vec{E} = \alpha \times \frac{p_0 \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^3} \Rightarrow p = \frac{\alpha p_0}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ &\Rightarrow \vec{F} = -\frac{p_0 \vec{r}}{2\pi\epsilon_0 r^4} \times \frac{3\alpha p_0}{2\pi\epsilon_0 r^3} \\ &\Rightarrow \vec{F} = -\frac{3\alpha p_0^2}{4\pi^2 \epsilon_0^2 r^7} \vec{r} \end{aligned}$$

● 247 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Soient V_A et V_B les potentiels créés en M par les charges $(+q)$ et $(-q)$.

$$V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM} \text{ et } V_B = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 BM}$$

avec :



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow AM^2 = a^2 + 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} + r^2 \\ &\Rightarrow AM = \sqrt{a^2 - 2ar \cos \theta + r^2} \\ &\Rightarrow AM = r \sqrt{1 - \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2}} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow BM^2 = a^2 + 2\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{OM} + r^2 \\ &\Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} \\ &\Rightarrow BM = r \sqrt{1 + \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2}} \end{aligned}$$

En ne conservant que les termes d'ordre 1 en $\frac{a}{r}$, ces expressions deviennent :

$$AM \simeq r \left(1 - \frac{2a}{r} \cos \theta\right)^{1/2} \text{ et } BM \simeq r \left(1 + \frac{2a}{r} \cos \theta\right)^{1/2}$$

de sorte que :

$$V_A \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \times \left(1 - \frac{2a}{r} \cos \theta\right)^{-1/2} \quad \text{et} \quad V_B = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} \times \left(1 + \frac{2a}{r} \cos \theta\right)^{-1/2}$$

où le développement limité : $(1 + \varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon$ apporte une simplification :

$$V_A \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \times \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta\right) \quad \text{et} \quad V_B \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \times \left(-1 + \frac{a}{r} \cos \theta\right)$$

Finalement, le potentiel total que le dipôle crée en M vaut :

$$V = V_A + V_B = \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

où est introduit le moment dipolaire $\vec{p} = q \overrightarrow{AB}$:

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} \quad \text{car} \quad p = \|\vec{p}\| = q \times 2a \quad (54)$$

2. Le champ électrique qui dérive de V vérifie, en coordonnées polaires :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

d'où l'on tire l'expression de la composante radiale E_r :

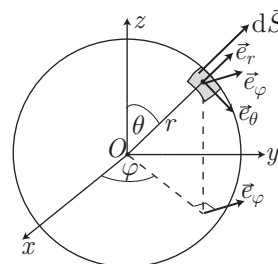
$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \Rightarrow E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^3}$$

3. Sur la sphère (Σ) de rayon r , isolons un élément de surface décrit par :

$$d\vec{S} = r d\theta \times r \sin \theta d\varphi \vec{e}_r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$$

à partir duquel est défini le flux élémentaire de \vec{E} :

$$\begin{aligned} d\Phi &= \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \times dS \\ &= \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r} \times \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned}$$



C'est pourquoi le flux total de \vec{E} à travers (Σ) vaut :

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\Phi = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \times d\varphi \\ &= \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r} \int_{\theta=0}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta \times 2\pi \\ &= \frac{p}{\epsilon_0 r} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(2\theta) d\theta = \frac{p}{4\epsilon_0 r} [-\cos(2\theta)]_0^{\pi} \\ &\Rightarrow \Phi = 0 \end{aligned}$$

Malgré l'approximation résultant de l'hypothèse $a \ll r$, ce résultat confirme le théorème de Gauss, en vertu duquel une charge q_{int} , incluse à l'intérieur de (Σ),

génère un champ dont le flux vérifie :

$$\Phi = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

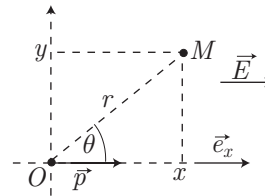
Notamment, ici q_{int} est la charge totale portée par le dipôle, c'est-à-dire :
 $q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \Phi = 0$.

● 248 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Soit \vec{e}_x le vecteur unitaire directeur commun à $\vec{E} = E \vec{e}_x$ et $\vec{p} = p \vec{e}_x$.

Le champ \vec{E} dérive d'un potentiel V_e , conformément à la loi :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\text{grad}} V_e \\ \Rightarrow E \vec{e}_x &= -\frac{\partial V_e}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V_e}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V_e}{\partial z} \vec{e}_z \end{aligned}$$



ce qui montre que $\frac{\partial V_e}{\partial y} = \frac{\partial V_e}{\partial z} = 0$, c'est-à-dire que \vec{E} ne dépend que de x :

$$E = -\frac{dV_e}{dx} \Rightarrow V_e = -Ex + A$$

où A est une constante que l'on peut déterminer à partir du choix arbitraire : $V_e = 0$ pour $x = 0$, qui se traduit par :

$$V_e = -E \times x$$

Dans cette expression, la coordonnée x du point M , où est calculé V_e , vaut aussi :

$$x = r \cos \theta \Rightarrow V_e = -Er \cos \theta$$

En outre, le dipôle crée en M un potentiel V_p , dont l'expression est fournie à la page 818 :

$$V_p = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Par suite, le potentiel total créé en M vaut :

$$V = V_p + V_e = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} - Er \cos \theta = \cos \theta \times \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - Er \right) \quad (55)$$

Sur une sphère de rayon $r = a$, ce potentiel : $V = \cos \theta \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - Ea \right)$ ne peut demeurer constant que si :

$$dV = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \sin \theta \times \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - Ea \right) = 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^2} = Ea \Rightarrow a^3 = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E}$$

$$\Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 E}}$$

Dans ces conditions, le potentiel vaut :

$$V = \cos \theta \times \underbrace{\left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^2} - Ea \right)}_{=0} \Rightarrow V = 0$$

2. Le champ électrique total \vec{E}_t dérive du potentiel décrit par la relation (55) :

$$\vec{E}_t = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = E_{tr} \vec{e}_r + E_{t\theta} \vec{e}_\theta$$

auquel cas ce champ a pour composante selon \vec{e}_θ :

$$\begin{aligned} E_{\theta t} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\cos \theta \times \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - Er \right) \right] \\ &= \sin \theta \times \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E \right) \end{aligned}$$

Notamment, sur (Σ) où $r = a$ tel que $a^3 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 E}$:

$$E_{\theta t} = \sin \theta \times \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{4\pi\epsilon_0 E}{p} - E \right) \Rightarrow E_{\theta t} = 0$$

De même, la composante de \vec{E} selon \vec{e}_r vaut :

$$\begin{aligned} E_{tr} &= -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\cos \theta \times \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} - Er \right) \right] \\ &= \cos \theta \times \left(\frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} - E \right) \end{aligned}$$

où, sur (Σ) :

$$r^3 = a^3 \Rightarrow E_{tr} = \cos \theta \times \left(\frac{p}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{4\pi\epsilon_0 E}{p} - E \right) \Rightarrow E_{tr} = \cos \theta \times E$$

Remarque – La valeur $E_{\theta t} = 0$ révèle que le champ est purement radial en tout point de (Σ) , c'est-à-dire perpendiculaire à la surface équipotentielle sphérique (Σ) , correspondant à $V = 0$.

● 249 ————— Lycée Thiers, Marseille

1. Du potentiel V_p dérive un champ électrique $\vec{E}(P)$ produit par le dipôle :

$$\vec{E}(P) = -\vec{\text{grad}} V_p = -\frac{\partial V_p}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_p}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

dont les coordonnées polaires sont :

$$E_r(P) = -\frac{\partial V_p}{\partial r} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \text{ et } E_\theta(P) = -\frac{1}{r} \frac{\partial V_p}{\partial \theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta$$

Par suite, la charge q est soumise à la force :

$$\vec{F}_q = q \vec{E} = \frac{pq}{2\pi\epsilon_0 r^3} \cos \theta \vec{e}_r + \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sin \theta \vec{e}_\theta = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

2. Le principe des actions réciproques stipule que :

$$\vec{F}_p = -\vec{F}_q = -\frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

3. L'étude générale des systèmes de deux points matériels a permis de montrer que la variation d'énergie potentielle (interne au système) \mathcal{E}_p ne dépend que du déplacement relatif des points O et M :

$$d\mathcal{E}_p = -\vec{F}_q \cdot d\vec{OP} = -\vec{F}_p \cdot d\vec{PO}$$

où le vecteur $\vec{OP} = r \vec{e}_r$ admet pour différentielle :

$$d\vec{OP} = dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix}$$

Par suite :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_p &= \frac{-pq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \left(\cos \theta \times \frac{-2 dr}{r^3} - \sin \theta d\theta \times \frac{1}{r^2} \right) \\ &= \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} d \left(\cos \theta \times \frac{1}{r^2} \right) = d \left(\frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} \right) \\ \Rightarrow \mathcal{E}_p &= \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} + \mathcal{E}_{p0} \end{aligned}$$

où la constante \mathcal{E}_{p0} s'obtient en postulant pour une valeur nulle de \mathcal{E}_p pour r infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}_p = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p0} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_p = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Remarque – Ce résultat pouvait s'obtenir beaucoup plus directement en remarquant que la charge q , soumise au potentiel V_p , prend l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = q V_p = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Si la distance r est maintenue constante, \mathcal{E}_p ne dépend que de θ , ce qui signifie qu'une position d'équilibre est repérée par un angle θ pour lequel \mathcal{E}_p est *extremum* :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = 0 \Rightarrow -\frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \theta = 0$$

Deux positions sont alors observées en $\theta_1 = 0$ et en $\theta_2 = \pi$. Quant à la stabilité de ces équilibres, elle est déterminée par le signe de $\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} = -\frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$ pour les

deux valeurs θ_1 et θ_2 :

$$\left. \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_1=0} = -\frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \text{ et } \left. \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_2=\pi} = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

- Lorsque $pq > 0$, $\left. \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_2} > 0$ montre que la position d'équilibre située en $\theta = \theta_2 = \pi$ est stable, tandis qu'en $\theta = \theta_1 = 0$ la position est instable.
- Lorsque $pq < 0$, l'identité $\left. \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{d\theta^2} \right|_{\theta_1} > 0$ montre que la stabilité des positions précédentes est permutée, ce que l'on peut résumer de la manière suivante :

Équilibre	$\theta_1 = 0$	$\theta_2 = \pi$
$p \times q > 0$	instable	stable
$p \times q < 0$	stable	instable

● 250 ————— Concours e4a

1. Un dipôle électrostatique est constitué de deux charges opposées ($+q$) et ($-q$) situées en deux points (P et N). Il est caractérisé par son moment dipolaire :

$$\vec{p} = q \times \overrightarrow{NP} \Rightarrow p = \|\vec{p}\| = 2aq$$

Ce faisant, son unité est :

$$[p] = \text{C} \cdot \text{m} \text{ (coulomb-mètre)}$$

2. (a) Compte tenu de l'antisymétrie de la distribution de charges, les seuls plans de symétrie sont ceux qui contiennent l'axe Oz , et donc les vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ . Dans une base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, où $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$, le champ $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta + E_\varphi \vec{e}_\varphi$ est par conséquent contenu dans le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, ce qui signifie aussi que :

$$E_\varphi = 0$$

Par suite, la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (56)$$

montre que $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, c'est-à-dire que le potentiel V n'est fonction que de r et θ ; l'étude dans le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est justifiée.

- (b) Les points P et N créent en M les potentiels :

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM} \text{ et } V_N = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 NM}$$

avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PM} &= \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow PM^2 = PO^2 + 2\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{OM} + OM^2 \\ &\Rightarrow PM^2 = a^2 - 2ar \cos \theta + r^2 \\ &\Rightarrow PM = r \left(1 - \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\overline{NM} &= \overline{NO} + \overline{OM} \Rightarrow NM^2 = NO^2 + 2\overline{NO} \cdot \overline{OM} + OM^2 \\ &\Rightarrow NM^2 = a^2 + 2ar \cos \theta + r^2 \\ &\Rightarrow NM = r \left(1 + \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2}\end{aligned}$$

c'est-à-dire, à l'ordre le plus bas en $\frac{a}{r}$:

$$PM \simeq r \left(1 - \frac{2a}{r} \cos \theta \right)^{1/2} \text{ et } NM \simeq r \left(1 + \frac{2a}{r} \cos \theta \right)^{1/2}$$

d'où il s'ensuit, avec un développement limité d'ordre 1 en $\frac{a}{r}$:

$$V_P = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \times \left(1 - \frac{2a}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \times \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

et :

$$V_N = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} \times \left(1 + \frac{2a}{r} \cos \theta \right)^{-1/2} \simeq \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} \times \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

C'est pourquoi le potentiel V créé en M par le dipôle vaut :

$$V = V_P + V_N \Rightarrow V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \times \frac{2a \cos \theta}{r}$$

où :

$$p = 2aq \Rightarrow V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (57)$$

(c) De ce potentiel dérive un champ \vec{E} , conformément à la relation (56), en vertu de laquelle :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \Rightarrow E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^3} \quad (58)$$

et :

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \Rightarrow E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (59)$$

Ces composantes conduisent à l'expression du champ électrique créé en M :

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

Quant au moment dipolaire \vec{p} , ses composantes polaires sont :

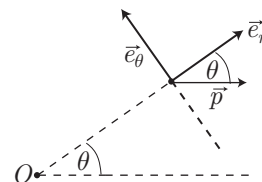
$$\vec{p} = p \cos \theta \vec{e}_r - p \sin \theta \vec{e}_\theta$$

d'où il découle, d'une part que :

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_r = p \cos \theta$$

et d'autre part que :

$$p \sin \theta \vec{e}_\theta = p \cos \theta \vec{e}_r - \vec{p}$$



Par suite :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [2p \cos \theta \vec{e}_r + (p \cos \theta \vec{e}_r - \vec{p})] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3p \cos \theta \vec{e}_r - \vec{p}) \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \times \vec{e}_r - \vec{p}]$$

(d) Compte tenu de l'identité (57), l'équipotentielle $V = 0$ correspond à :

$$0 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$

ce qui signifie que l'équipotentielle $V = 0$ coïncide avec le plan passant par O perpendiculairement à l'axe Oz .

De même, l'équipotentielle $V > 0$ vérifie :

$$\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} = V \Rightarrow r^2 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 V} \times \cos \theta$$

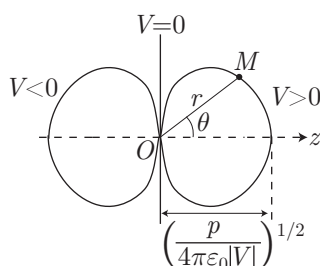
où $r^2 > 0$ et $V > 0$ impose : $\cos \theta > 0 \Rightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

En revanche, l'équipotentielle $V < 0$ satisfait à l'équation :

$$r^2 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{V} > 0$$

c'est-à-dire :

$$V < 0 \Rightarrow \cos \theta < 0 \Rightarrow \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

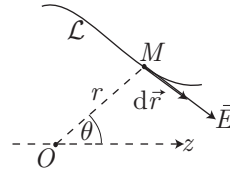


- (e) Conformément à la question précédente, les équipotentielles sont décrites par l'équation générale :

$$V \times r^2 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \cos \theta \quad (60)$$

Soit \mathcal{L} une ligne de champ, sur laquelle un point M est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$. Un déplacement élémentaire de M sur \mathcal{L} est alors repéré par le vecteur :

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$



au demeurant tangent à \mathcal{L} .

Quant au champ \vec{E} , il est en tout point M tangent à \mathcal{L} (il s'agit de la définition de la ligne de champ), auquel cas \vec{E} et $d\vec{r}$ sont colinéaires, ce qui se traduit par :

$$\det \left\{ \vec{E}, d\vec{r} \right\} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} E_r & dr \\ E_\theta & r d\theta \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r d\theta \times E_r = dr \times E_\theta$$

c'est-à-dire, compte tenu des expressions (58) et (59) de E_r et E_θ :

$$\begin{aligned} \frac{p}{2\pi\epsilon_0 r^3} \times r \cos \theta d\theta &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times \sin \theta dr \Rightarrow 2r \cos \theta d\theta = \sin \theta dr \\ &\Rightarrow \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta} = \frac{dr}{r} \\ &\Rightarrow d [\ln (\sin^2 \theta)] = d (\ln r) \end{aligned}$$

Cette équation différentielle montre qu'il existe une constante K telle que :

$$\ln r = \ln (\sin^2 \theta) + K$$

que l'on peut aussi présenter sous la forme :

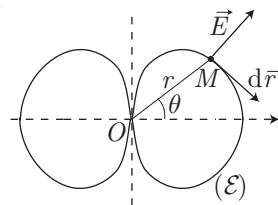
$$r = r_0 \times \sin^2 \theta \text{ (pour une ligne de champ).}$$

Considérons une équipotentielle (\mathcal{E}), décrite par l'équation (60) :

$$V \times r^2 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \cos \theta \Rightarrow \ln V + 2 \ln r = \ln \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \right) + \ln (\cos \theta)$$

Soit $M(r, \theta)$ un point de cette équipotentielle, qui effectue un déplacement élémentaire $d\vec{r}$, alors caractérisé par la différentielle de l'équation précédente :

$$2 \frac{dr}{r} = -\frac{\sin \theta d\theta}{\cos \theta} \Rightarrow dr = -\frac{r \sin \theta d\theta}{2 \cos \theta}$$



auquel cas :

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta = -\frac{r \sin \theta}{2 \cos \theta} d\theta \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

Compte tenu des expressions des composantes (58) et (59) du champ $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$, on obtient :

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot d\vec{r} &= \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix} = E_r dr + E_\theta \times r d\theta \\ &= \frac{p \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 r^3} \times \frac{-r \sin \theta d\theta}{2 \cos \theta} + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \times r d\theta \\ &= -\frac{p \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{p \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \end{aligned}$$

c'est-à-dire : $\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{r}$ ce qui confirme l'orientation relative des lignes de champ et des équipotentielles : ces lignes sont perpendiculaires les unes aux autres.

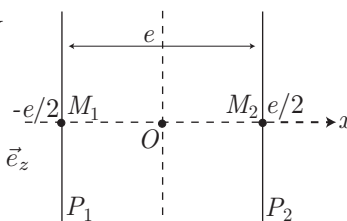
● 251 ————— Concours ENSG, Nancy

1. (a) Soit M_2 un point de P_2 (et donc de potentiel V_2) et soit M_1 un point de P_1 (de potentiel V_1).

Le champ $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$ dérive du potentiel V conformément à la loi :

$$\vec{E}_0 = -\vec{\text{grad}} V$$

$$\Rightarrow E_0 \vec{e}_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z$$



L'identification des deux membres de cette équation impose : $\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0$, ce qui révèle que V ne dépend que de x , auquel cas :

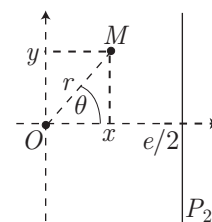
$$\frac{dV}{dx} = -E_0 \Rightarrow dV = -E_0 dx \Rightarrow \int_{V_2}^{V_1} dV = -E_0 \int_{e/2}^{-e/2} dx$$

C'est pourquoi :

$$U = V_1 - V_2 = e E_0$$

- (b) De même, pour tout point d'abscisse x :

$$\begin{aligned} dV = -E_0 dx &\Rightarrow \int_{V_2}^V dV = -E_0 \int_{e/2}^x dx \\ &\Rightarrow V - V_2 = E_0 \left(\frac{e}{2} - x \right) \end{aligned}$$



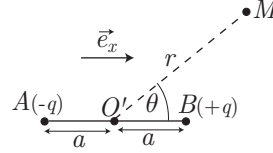
En remarquant que $x = r \cos \theta$ et que $E_0 e = U$, cette expression se présente aussi sous la forme suivante :

$$V - V_2 = \frac{E_0 e}{2} - E_0 r \cos \theta = \frac{U}{2} - E_0 r \cos \theta \quad (61)$$

2. (a) Les charges $(-q)$ et $(+q)$ placées en A et B créent les potentiels respectifs V_A et V_B en M , tels que :

$$V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM} \text{ et } V_A = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 AM}$$

On note ici $BO' = AO' = a$ de manière à poser :



$$\begin{aligned} \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{BO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow BM^2 = BO'^2 + 2\overrightarrow{BO'} \cdot \overrightarrow{O'M} + O'M^2 \\ &\Rightarrow BM^2 = a^2 - 2ar \cos \theta + r^2 \\ &\Rightarrow BM = r\sqrt{1 - \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2}} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AO'} + \overrightarrow{O'M} \Rightarrow AM^2 = AO'^2 + 2\overrightarrow{AO'} \cdot \overrightarrow{O'M} + O'M^2 \\ &\Rightarrow AM^2 = a^2 + 2ar \cos \theta + r^2 \\ &\Rightarrow AM = r\sqrt{1 + \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en ne conservant que les termes d'ordre 1 en $\frac{a}{r}$ (car $r \gg 2a$) :

$$BM \simeq r \left(1 - \frac{2a}{r} \cos \theta\right)^{1/2} \text{ et } AM \simeq r \left(1 + \frac{2a}{r} \cos \theta\right)^{1/2}$$

À nouveau, la condition $2a \ll r$ justifie l'emploi d'un développement limité d'ordre 1, en vertu duquel :

$$V_B \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta\right) \text{ et } V_A \simeq \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta\right)$$

Quant au principe de superposition, il s'applique également au potentiel V créé par les deux charges :

$$V = V_A + V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta - 1 + \frac{a}{r} \cos \theta\right) = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Enfin, la définition du moment dipolaire :

$$\vec{p} = q \overrightarrow{AB} \Rightarrow p = \|\vec{p}\| = q \times \|\overrightarrow{AB}\| = q \times 2a$$

fournit :

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} \tag{62}$$

- (b) En coordonnées polaires, le champ \vec{E} créé en M dérive du potentiel V conformément à la loi :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

d'où il découle que :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) \text{ et } E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right)$$

soit encore :

$$E_r = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^3} \text{ et } E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3}$$

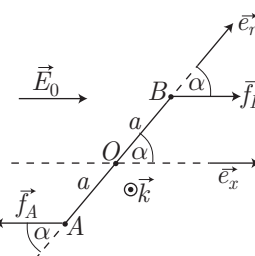
3. (a) Les charges situées en B et A sont soumises aux forces respectives :

$$\vec{f}_B = q \vec{E}_0 \text{ et } \vec{f}_A = -q \vec{E}_0 = -\vec{f}_B$$

Aussi, la résultante des forces électrostatiques qui

s'exercent sur ce dipôle vaut : $\vec{f} = \vec{f}_A + \vec{f}_B = \vec{0}$.

En vertu du principe de l'inertie, le centre d'inertie du dipôle ne peut donc pas se mettre en mouvement sous la seule influence de \vec{E}_0 .



En revanche, le moment des forces extérieures (en O) qui s'exercent sur ce système de deux points est défini par :

$$\begin{aligned} \vec{M}_O &= \vec{OA} \wedge \vec{f}_A + \vec{OB} \wedge \vec{f}_B \text{ où } \vec{f}_A = -\vec{f}_B \\ &= (\vec{OB} - \vec{OA}) \wedge \vec{f}_B = \vec{AB} \wedge \vec{f}_B \\ &= 2aq E_0 \vec{e}_r \wedge \vec{e}_x \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en remarquant que $2aq = p$ et $\vec{e}_r \wedge \vec{e}_x = -\sin \alpha \vec{k}$:

$$\vec{M}_O = -pE_0 \sin \alpha \vec{k}$$

Ce faisant, le moment des forces extérieures par rapport à un axe Δ orienté selon \vec{k} vaut :

$$\mathcal{M}_\Delta = \vec{M}_O \cdot \vec{k} = -pE_0 \sin \alpha$$

L'existence d'un moment \mathcal{M}_Δ non nul signifie que le dipôle peut tourner autour de l'axe Δ sous l'influence de \vec{E}_0 .

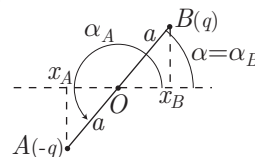
(b) Le résultat précédent montre que les positions d'équilibre du dipôle sont caractérisées par l'annulation de \mathcal{M}_Δ , c'est-à-dire pour $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$. Pour trouver laquelle de ces configurations correspond à un équilibre stable, il convient d'évaluer l'énergie potentielle \mathcal{E}_p du dipôle, constitué des charges $-q$ et $+q$ aux points respectifs A et B où règnent les potentiels V_A et V_B .

Chacune de ces charges présente ainsi une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_{pA} = -qV_A \text{ et } \mathcal{E}_{pB} = qV_B$$

où V_A et V_B s'obtiennent à l'aide du résultat (61), dans lequel $V_2 = 0$:

$$V_B = \frac{U}{2} - E_0 a \cos \alpha_B \text{ et } V_A = \frac{U}{2} - E_0 a \cos \alpha_A$$



avec :

$$\alpha_B = \alpha \Rightarrow V_B = \frac{U}{2} - E_0 a \cos \alpha \text{ et } \alpha_A = \pi + \alpha \Rightarrow V_A = \frac{U}{2} + E_0 a \cos \alpha$$

Par suite :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{pB} + \mathcal{E}_{pA} = q (V_B - V_A) &\Rightarrow \mathcal{E}_p = -2E_0 a q \cos \alpha = -E_0 p \cos \alpha \\ &\Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_p}{d\alpha} = E_0 p \sin \alpha \\ &\Rightarrow \frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\alpha^2} = E_0 p \cos \alpha \end{aligned}$$

Les positions d'équilibre ($\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$) correspondent effectivement à un *extremum* de \mathcal{E}_p , car $\frac{d\mathcal{E}_p}{d\alpha} = 0$. Pour chacune de ces valeurs, les relations :

$$\left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=0} = E_0 \times p > 0 \text{ et } \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\pi} = -E_0 \times p < 0$$

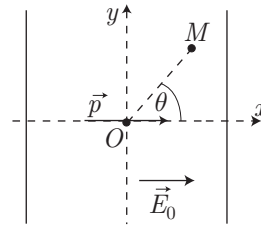
montrent que l'équilibre est stable pour $\alpha = 0$.

4. (a) Lorsque le dipôle se trouve dans sa position d'équilibre stable, le potentiel V_d qu'il crée en M est donné par le résultat (62) :

$$V_d = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

tandis que les plaques créent un potentiel V_p donné par le résultat (61), dans lequel $V_2 = 0$:

$$V_p = \frac{U}{2} - E_0 r \cos \theta$$



Par conséquent, le potentiel total créé en M vaut :

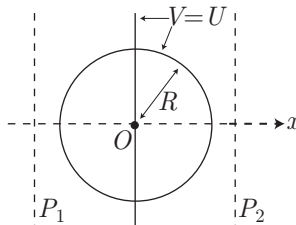
$$V = V_p + V_d = \frac{U}{2} - E_0 r \cos \theta + \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

- (b) L'équipotentielle $V = \frac{U}{2}$ obéit à l'équation :

$$\frac{U}{2} = \frac{U}{2} - \cos \theta \times \left(E_0 r - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \Rightarrow \cos \theta \times \left(E_0 r - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) = 0$$

Deux types de solutions apparaissent, correspondant chacune à une nappe particulière :

- $\cos \theta = 0$, c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$; cette nappe est confondue avec le plan (Oy, Oz) .
- $E_0 r - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0}}$, ce qui représente l'équation polaire d'une sphère de centre O et de rayon :



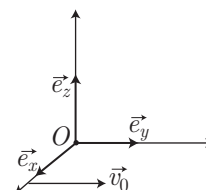
$$R = \sqrt[3]{\frac{P}{4\pi\varepsilon_0 E_0}}$$

● 252 ————— Concours de l'ENAC

Dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la particule (assimilée à un point P) est injectée dans un des *Dees* avec une vitesse initiale : $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0y} \vec{e}_y$.

On note $\vec{B} = B \vec{e}_z$ le champ magnétique qui règne dans les *Dees*, responsable de la force de Laplace :

$$\vec{f} = q \wedge \vec{B} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} Bv_y \\ -Bv_x \\ 0 \end{pmatrix}$$



La loi fondamentale de la dynamique impose :

$$m \vec{\gamma} = \vec{f} \Rightarrow m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire, en définissant le coefficient constant $\omega_c = \frac{qB}{m}$:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \omega_c v_y \\ \dot{v}_y = -\omega_c v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \quad (63)$$

La troisième de ces équations montre que v_z est constant et conserve par conséquent sa valeur initiale nulle. En revanche, la dérivation de la première équation de ce système : $\ddot{v}_x = \omega_c \dot{v}_y$, associée à la deuxième équation : $\dot{v}_y = -\omega_c v_x$, conduit à :

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \Rightarrow \ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit :

$$v_x = V_0 \cos(\omega_c t + \phi)$$

où V_0 et ϕ sont des constantes (que l'on ne cherchera pas ici).

Quant à la première équation du système (63), elle fournit immédiatement :

$$v_y = \frac{1}{\omega_c} \dot{v}_x = -V_0 \sin(\omega_c t + \phi)$$

Enfin, les coordonnées x et y de P définissent v_x et v_y :

$$\frac{dx}{dt} = v_x = V_0 \cos(\omega_c t + \phi) \text{ et } \frac{dy}{dt} = -V_0 \sin(\omega_c t + \phi)$$

ce qui montre qu'il existe des constantes X_0 et Y_0 telles que :

$$x = X_0 + \frac{V_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \phi) \text{ et } y = Y_0 + \frac{V_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \phi)$$

De fait, les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont périodiques, de période T telle que :

$$\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{cases} \Rightarrow \omega_c T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_c}$$

ce qui signifie également que la particule repasse régulièrement entre les *Dees* avec une fréquence :

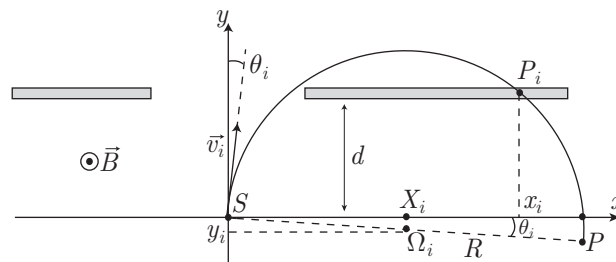
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{eB}{\pi m}$$

Application numérique :

$$f = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,1}{\pi \times 4 \cdot 10^{-26}} \Rightarrow f = 0,13 \text{ MHz}$$

● 253 ————— Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1. Une particule qui quitte S avec une vitesse \vec{v}_i décrit un cercle de rayon R et de centre Ω_i , tel que \vec{v}_i est perpendiculaire au diamètre SP .



Les coordonnées de Ω_i étant $X_i = R \cos \theta_i$ et $Y_i = -R \sin \theta_i$, la trajectoire d'une telle particule a pour équation cartésienne :

$$(x - X_i)^2 + (y - Y_i)^2 = R^2 \Rightarrow (x - R \cos \theta_i)^2 + (y + R \sin \theta_i)^2 = R^2$$

2. La trajectoire de cette particule coupe le plan de l'ouverture rectangulaire en un point P_i d'ordonnées d et d'abscisse x_i telle que :

$$\begin{aligned} (x_i - R \cos \theta_i)^2 + (d + R \sin \theta_i)^2 &= R^2 \\ \Rightarrow (x_i - R \cos \theta_i)^2 &= R^2 - (d + R \sin \theta_i)^2 \\ \Rightarrow x_i &= R \cos \theta_i \pm \sqrt{R^2 - (d + R \sin \theta_i)^2} \end{aligned}$$

Or, étant donné que $R \cos \theta_i = X_i$, le schéma précédent montre que $x_i > X_i$, ce qui a pour conséquence :

$$x_i = R \cos \theta_i + \sqrt{R^2 - (d + R \sin \theta_i)^2}$$

Les particules qui passent par A sont caractérisées par $\theta_i = \alpha$, auquel cas leur point d'intersection P_1 a pour abscisse :

$$x_1 = R \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (d + R \sin \alpha)^2}$$

tandis que celles qui passent par C sont caractérisées par $\theta_i = -\alpha$. L'abscisse x_2 de leur point d'intersection P_2 vaut :

$$x_2 = R \cos \alpha + \sqrt{R^2 - (d - R \sin \alpha)^2}$$

C'est pourquoi la distance $P_1P_2 = x_2 - x_1$ s'écrit :

$$P_1P_2 = \sqrt{R^2 - (d - R \sin \alpha)^2} - \sqrt{R^2 - (d + R \sin \alpha)^2}$$

3. La distance P_1P_2 peut aussi s'écrire :

$$P_1P_2 = R \left[\sqrt{1 - \left(\frac{d}{R} - \sin \alpha\right)^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{d}{R} + \sin \alpha\right)^2} \right]$$

où les conditions : $d \ll R$ et $\alpha \ll 1$ suggèrent l'emploi de développements limités :

$$\sqrt{1 - \left(\frac{d}{R} \pm \sin \alpha\right)^2} \simeq 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{R} \pm \sin \alpha\right)^2$$

Par suite :

$$\begin{aligned} P_1P_2 &\simeq \frac{R}{2} \left[\left(\frac{d}{R} + \sin \alpha\right)^2 - \left(\frac{d}{R} - \sin \alpha\right)^2 \right] = \frac{R}{2} \times \left(\frac{2d}{R}\right) \times 2 \sin \alpha \\ &\Rightarrow P_1P_2 \simeq 2d \sin \alpha \simeq 2d\alpha \end{aligned}$$

● 254 ————— Concours ESIM

1. Les grilles G_1 et G'_1 étant portées au même potentiel, entre celles-ci règne un champ électrique nul, étant donné que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \vec{0}$$

Par suite, les électrons ne sont soumis à aucune force et c'est pourquoi :

entre G_1 et G'_1 les électrons décrivent une trajectoire rectiligne (le mouvement est de surcroît uniforme) ; il en va de même entre les grilles G_2 et G'_2 , pour les mêmes raisons.

En revanche, entre les grilles G'_1 et G'_2 , le potentiel V passe de V_1 à V_2 , tandis que le champ \vec{E} vérifie :

$$\begin{aligned} \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V &\Rightarrow E_x \vec{e}_x + E_y \vec{e}_y + E_z \vec{e}_z = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{e}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{e}_y - \frac{\partial V}{\partial z} \vec{e}_z \\ &\Rightarrow \begin{cases} E_z = -\frac{dV}{dz} \\ E_x = E_y = 0 \end{cases} \text{ car } \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

De ces équations, il ressort qu'en notant z et $z + d$ les cotes respectives des grilles G'_1 et G'_2 :

$$dV = -E_z dz \Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} dV = -\int_z^{z+d} E_z dz \Rightarrow V_2 - V_1 = -\int_z^{z+d} E_z dz$$

et notamment, si d est assez petit :

$$\int_z^{z+d} E_z dz \simeq E_z \times d \Rightarrow E_z = \frac{V_1 - V_2}{d} = \text{cte}$$

Par suite, les électrons (de charge $-e$ et de masse m) sont soumis à la force constante et uniforme :

$$\vec{F} = -e\vec{E} \Rightarrow \vec{F} = \frac{e}{d} (V_2 - V_1) \vec{e}_z = F \vec{e}_z$$

tandis que leur vitesse $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ vérifie la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = 0 \\ \dot{v}_z = \frac{F}{m} \end{cases}$$

Les deux premières équations révèlent que v_x et v_y sont des constantes, désormais notées v_{x0} et v_{y0} :

$$v_x = v_{x0} \text{ et } v_y = v_{y0}$$

tandis que :

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{F}{m} \Rightarrow v_z = \frac{F}{m} t + K$$

où la constante d'intégration K dépend de la vitesse initiale v_{z0} de v_z :

$$v_z(t=0) = v_{z0} = K \Rightarrow v_z = \frac{F}{m} t + v_{z0}$$

Par suite, les coordonnées des électrons sont données par :

$$\frac{dx}{dt} = v_{x0} \Rightarrow x = v_{x0} t + x_0 \text{ et } \frac{dy}{dt} = v_{y0} \Rightarrow y = v_{y0} t + y_0 \quad (64)$$

où x_0 et y_0 sont les valeurs initiales de x et de y . De même en notant z_0 la valeur initiale de z :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{F}{m} t + v_{z0} \Rightarrow z = \frac{F}{2m} t^2 + v_{z0} t + z_0$$

Des relations (64), on tire aisément que :

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{v_{x0}} \\ t = \frac{y - y_0}{v_{y0}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \frac{F}{2mv_{x0}^2} (x - x_0)^2 + \frac{v_{z0}}{v_{x0}} (x - x_0) + z_0 \\ z = \frac{F}{2mv_{y0}^2} (y - y_0)^2 + \frac{v_{z0}}{v_{y0}} (y - y_0) + z_0 \end{cases}$$

ce qui montre que :

dans la région située entre G'_1 et G'_2 , les électrons suivent une trajectoire parabolique.

2. Travaillons exclusivement dans le plan (Oxz) , où la composante v_x de la vitesse est constante (car $\dot{v}_x = 0$).

Cette composante vaut :

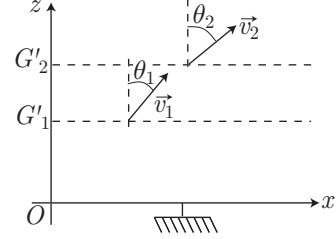
$$v_1 \sin \theta_1 \text{ en } G'_1 \text{ et } v_2 \sin \theta_2 \text{ en } G'_2$$

d'où il s'ensuit que :

$$v_1 \sin \theta_1 = v_2 \sin \theta_2$$

c'est-à-dire :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \quad (65)$$



Quant à l'électron, plongé dans un potentiel V , il acquiert une énergie potentielle $\mathcal{E}_p = -eV$, en raison de quoi son énergie mécanique vaut :

$$\mathcal{E}_{m1} = \frac{1}{2} m v_1^2 - eV_1 \text{ et } \mathcal{E}_{m2} = \frac{1}{2} m v_2^2 - eV_2 \text{ en } G'_1 \text{ et } G'_2$$

Or, la nature conservatrice de la force électrostatique assure l'invariance de cette énergie mécanique, qui vaut du reste, sur la cathode :

$$\mathcal{E}_{m0} = \frac{1}{2} m v_0^2 - eV_0 = 0 \text{ car } v_0 \simeq 0 \text{ et } V_0 = 0$$

Par suite :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{m1} = \mathcal{E}_{m0} = 0 \\ \mathcal{E}_{m2} = \mathcal{E}_{m0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m v_1^2 = 2eV_1 \\ m v_2^2 = 2eV_2 \end{cases} \Rightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{v_1^2}{v_2^2}$$

soit, en tenant compte du résultat (65) :

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\sin^2 \theta_2}{\sin^2 \theta_1} \Rightarrow V_1 \sin^2 \theta_1 = V_2 \sin^2 \theta_2 = \text{cte}$$

3. Lorsque l'électron est « réfléchi » au niveau de G'_2 , θ_2 prend la valeur $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, auquel cas l'identité précédente devient :

$$\sin \theta_1 = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} \sin \theta_2 = \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} \Rightarrow \theta_1 = \arcsin \left(\sqrt{\frac{V_2}{V_1}} \right)$$

On appelle désormais angle limite θ_{10} cette valeur car :

$$\sin \theta_2 \leq 1 \Rightarrow \sin \theta_1 \leq \sqrt{\frac{V_2}{V_1}} \Rightarrow \theta_1 \leq \theta_{10} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{V_2}{V_1}} \right)$$

Application numérique :

$$\theta_{10} = \arcsin \left(\sqrt{\frac{80}{100}} \right) \simeq 63,4^\circ$$

4. Ce dispositif rappelle la fibre optique à gradient d'indice (l'indice de réfraction n varie en fonction de la distance z à l'axe de la fibre). La loi de Snell-Descartes impose :

$$n \sin \theta = \text{cte contre} : V \sin^2 \theta = \text{cte ici}$$

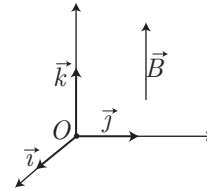
tandis qu'il existe également un angle limite θ_{10} à partir duquel se produit la réflexion de la lumière :

$$\theta_{10} = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

● 255 ————— Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le champ magnétique \vec{B} et les vecteurs vitesse \vec{v} et accélération $\vec{\gamma}$ ont pour composantes :

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix}$$



La force de Lorentz qui s'exerce sur M s'écrit ainsi :

$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

soit encore :

$$\dot{v}_x = \omega v_y \quad \dot{v}_y = -\omega v_x \quad \dot{v}_z = 0 \quad (66)$$

Recherche de \vec{v}

Les équations précédentes montrent que v_z est constant, c'est-à-dire :

$$v_z = \dot{z}_0 \quad (67)$$

avec :

$$\dot{v}_x = \omega v_y \Rightarrow \ddot{v}_x = \omega \dot{v}_y$$

où $\dot{v}_y = -\omega v_x$ conduit à :

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \Rightarrow \ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0$$

La solution d'une telle équation différentielle s'écrit :

$$v_x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (68)$$

La connaissance de v_x entraîne celle de v_y grâce aux équations (66) :

$$\begin{aligned} \omega v_y = \dot{v}_x &\Rightarrow \omega v_y = -\omega A \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \\ &\Rightarrow v_y = -A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (69)$$

Les constantes d'intégration qui apparaissent dans les identités (68) et (69) s'obtiennent grâce aux conditions initiales :

$$t = 0 \Rightarrow \begin{cases} v_x = \dot{x}_0 \\ v_y = \dot{y}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \dot{x}_0 \\ B = \dot{y}_0 \end{cases}$$

d'où il ressort que :

$$v_x = \dot{x}_0 \cos(\omega t) + \dot{y}_0 \sin(\omega t) \text{ et } v_y = -\dot{x}_0 \sin(\omega t) + \dot{y}_0 \cos(\omega t)$$

Recherche de la position

Sachant qu'initialement ($t = 0$), la particule se trouve à l'origine O du repère, les coordonnées x , y et z s'obtiennent par intégration des vitesses v_x , v_y et v_z .

- *Calcul de x*

Puisque $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}_0 \cos(\omega t) + \dot{y}_0 \sin(\omega t)$, alors :

$$\begin{aligned} x &= \dot{x}_0 \int_0^t \cos(\omega t) dt + \dot{y}_0 \int_0^t \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{\dot{x}_0}{\omega} [\sin(\omega t)]_0^t - \frac{\dot{y}_0}{\omega} [\cos(\omega t)]_0^t \\ &= \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \end{aligned}$$

soit :

$$x - \frac{\dot{y}_0}{\omega} = \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{\dot{y}_0}{\omega} \cos(\omega t) \quad (70)$$

Afin de soulager les calculs, nous poserons dorénavant :

$$v_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2} \quad R = \frac{v_0}{\omega} \quad \sin \phi = \frac{\dot{x}_0}{v_0} \quad \cos \phi = \frac{\dot{y}_0}{v_0}$$

À l'aide de ces notations, la relation (70) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} x - \frac{\dot{y}_0}{\omega} &= \frac{v_0}{\omega} \left[\frac{\dot{x}_0}{v_0} \sin(\omega t) - \frac{\dot{y}_0}{v_0} \cos(\omega t) \right] \\ &= R [\sin \phi \sin(\omega t) - \cos \phi \cos(\omega t)] \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$x - \frac{\dot{y}_0}{\omega} = -R \cos(\omega t + \phi) \quad (71)$$

- *Calcul de y .*

En utilisant les mêmes notations que précédemment, l'expression de v_y conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} = v_y &= -\dot{x}_0 \sin(\omega t) + \dot{y}_0 \cos(\omega t) \\ \Rightarrow dy &= -\dot{x}_0 \sin(\omega t) dt + \dot{y}_0 \cos(\omega t) dt \end{aligned}$$

d'où il découle que :

$$\begin{aligned}
 y = \int_0^y dy &= -\dot{x}_0 \int_0^t \sin(\omega t) dt + \dot{y}_0 \int_0^t \cos(\omega t) dt \\
 &= \frac{\dot{x}_0}{\omega} [\cos(\omega t)]_0^t + \frac{\dot{y}_0}{\omega} [\sin(\omega t)]_0^t \\
 &= \frac{\dot{x}_0}{\omega} \cos(\omega t) + \frac{\dot{y}_0}{\omega} \sin(\omega t) - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \\
 &= \frac{v_0}{\omega} \left[\frac{\dot{x}_0}{v_0} \cos(\omega t) + \frac{\dot{y}_0}{v_0} \sin(\omega t) \right] - \frac{\dot{x}_0}{\omega} \\
 &= R [\sin \phi \cos(\omega t) + \cos \phi \sin(\omega t)] - \frac{\dot{x}_0}{\omega}
 \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$y + \frac{\dot{x}_0}{\omega} = R \sin(\omega t + \phi) \quad (72)$$

• Calcul de z .

L'équation (67) s'intègre aisément :

$$v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}_0 \Rightarrow \int_0^z dz = \dot{z}_0 \int_0^t dt \Rightarrow z = \dot{z}_0 \times t$$

Cette relation montre que la cote z croît de manière linéaire en fonction du temps t .

Les résultats (71) et (72) conduisent à :

$$\left(x - \frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)^2 + \left(y + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2 = R^2 \cos^2(\omega t + \phi) + R^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

c'est-à-dire :

$$\left(x - \frac{\dot{y}_0}{\omega}\right)^2 + \left(y + \frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2 = R^2$$

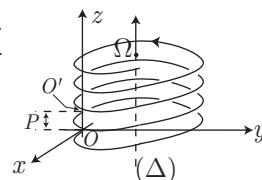
ce qui montre que, dans un plan parallèle à (Oxy) , la particule décrit une trajectoire circulaire de centre Ω et de rayon R , tels que :

$$\Omega \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega}, -\frac{\dot{x}_0}{\omega} \right) \text{ et } R = \frac{\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}}{\omega}$$

Ainsi, la trajectoire est une hélice de rayon R et dont l'axe (Δ) , dirigé selon (Oz) , est suivi par Ω .

La trajectoire coupe l'axe Oz en un point O' à la date t qui correspond justement à une période de rotation autour de (Δ) . Les relations (71) et (72) révèlent, à ce propos, que ce mouvement de rotation est effectué en une période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$$



Or, pendant le temps T , le point Ω s'est déplacé d'une distance $z = \dot{z}_0 \times T$, c'est-à-dire :

$$z = P \Rightarrow P = \dot{z}_0 \times \frac{2\pi m}{qB}$$

● 256 ————— Lycée Clémenceau, Reims

1. Le champ électrique $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$ dérive du potentiel V :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

où les composantes E_r et E_θ valent :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^3}$$

et :

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r^2} \right) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3}$$

Sous l'influence de \vec{E} , la particule est soumise à la force $\vec{f} = q\vec{E}$ conformément à la loi fondamentale de la dynamique (en coordonnées polaires) :

$$m\vec{\gamma} = q\vec{E} \Rightarrow m \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) \vec{e}_r + m \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \right) \vec{e}_\theta = qE_r \vec{e}_r + qE_\theta \vec{e}_\theta$$

d'où découlent deux relations (en posant $k = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 m}$) :

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{qE_r}{m} = \frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 m} \times \frac{\cos \theta}{r^3} \Rightarrow \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{2k \cos \theta}{r^3} \quad (73)$$

et :

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{qE_\theta}{m} = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0 m} \times \frac{\sin \theta}{r^3} \Rightarrow 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{k \sin \theta}{r^3}$$

2. En coordonnées polaires, la vitesse $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta$ de la particule est à l'origine de son énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

tandis que son énergie potentielle est proportionnelle au potentiel V dans lequel elle est plongée :

$$\mathcal{E}_p = qV = \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

C'est pourquoi son énergie mécanique vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + \frac{pq}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} \\ \Rightarrow \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2pq}{4\pi\epsilon_0 m} \frac{\cos \theta}{r^2} &= \frac{2\mathcal{E}}{m} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{2k \cos \theta}{r^2} = \frac{2\mathcal{E}}{m} \quad (74)$$

3. De l'équation (73), il découle que :

$$r \dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{2k \cos \theta}{r^3} \Rightarrow r^2 \dot{\theta}^2 = r \ddot{r} - \frac{2k \cos \theta}{r^2}$$

ce qui donne à l'équation (74) la forme suivante :

$$\dot{r}^2 + r \ddot{r} - \frac{2k \cos \theta}{r^2} + \frac{2k \cos \theta}{r^2} = \frac{2\mathcal{E}}{m} \Rightarrow \dot{r}^2 + r \ddot{r} = \frac{2\mathcal{E}}{m}$$

avec :

$$\frac{d}{dt}(r \dot{r}) = r^2 + r \ddot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}(r \dot{r}) = \frac{2\mathcal{E}}{m}$$

Or, l'énergie mécanique \mathcal{E} demeurant constante, cette équation différentielle admet pour solution :

$$r \dot{r} = \frac{2\mathcal{E}}{m} t + A$$

où A est une constante adaptée aux valeurs initiales $r(0) = r_0$ et $\dot{r}(0) = 0$:

$$r_0 \times 0 = 0 + A \Rightarrow A = 0 \Rightarrow r \dot{r} = \frac{2\mathcal{E}}{m} t$$

En outre, l'équation :

$$\frac{d}{dt}(r^2) = 2r \dot{r} \Rightarrow r \dot{r} = \frac{1}{2} \frac{d(r^2)}{dt} = \frac{2\mathcal{E}}{m} t \Rightarrow \frac{d(r^2)}{dt} = \frac{4\mathcal{E}}{m} t$$

a pour solution générale :

$$r^2 = \frac{4\mathcal{E}}{m} \times \frac{t^2}{2} + B = \frac{2\mathcal{E}}{m} t^2 + B$$

qui présente une constante B ajustée à la valeur initiale $r(0) = r_0$:

$$r_0^2 = 0 + B \Rightarrow r^2 = r_0^2 + \frac{2\mathcal{E}}{m} t^2 \Rightarrow r = \sqrt{r_0^2 + \frac{2\mathcal{E}t^2}{m}}$$

Trois cas apparaissent alors :

- si $\mathcal{E} > 0$, la particule s'éloigne indéfiniment de O car r est une fonction monotone croissante de t ;
- si $\mathcal{E} < 0$, la particule s'approche du point O , qu'elle atteint à la date :

$$t_{\max} = r_0 \sqrt{\frac{m}{2|\mathcal{E}|}}$$

- si $\mathcal{E} = 0$, $r = r_0$ révèle que la particule décrit une trajectoire circulaire de rayon r_0 , et de centre O .

4. De ce qui précède, il ressort que la rotation d'une particule est assurée lorsque $\mathcal{E} = 0$. Or, cette énergie étant constante, elle conserve sa valeur initiale :

$$\frac{2\mathcal{E}}{m} = \left(\frac{dr}{dt} \Big|_0 \right)^2 + [r(0)\dot{\theta}(0)]^2 + \frac{2k \cos \theta(0)}{r_0^2} = v_0^2 + \frac{2k}{r_0^2}$$

d'où l'on déduit que :

$$\mathcal{E} = 0 \Rightarrow v_0^2 + \frac{2k}{r_0^2} = 0 \Rightarrow 2k = -v_0^2 r_0^2 \quad (75)$$

Aussi, en posant $r = r_0 = \text{cte}$, l'équation (73) devient :

$$-r_0 \dot{\theta}^2 = \frac{2k \cos \theta}{r_0^3} = -\frac{v_0^2}{r_0} \cos \theta \Rightarrow \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{v_0^2}{r_0^2} \cos \theta$$

Si l'on admet que θ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$ pendant une durée $\frac{T}{4}$, l'intégration de cette équation différentielle conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{r_0} \sqrt{\cos \theta} &\Rightarrow \int_0^{T/4} dt = \frac{r_0}{v_0} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} \\ &\Rightarrow \frac{T}{4} = \frac{r_0}{v_0} I \text{ avec } I = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta}} \\ &\Rightarrow T = \frac{4r_0}{v_0} \times I \end{aligned}$$

● 257 ————— Concours ENGEES

1. (a) La particule est soumise à la force de Lorentz :

$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} qB \dot{y} \\ -qB \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Soient $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ et $v_z = \dot{z}$ les composantes du vecteur vitesse \vec{v} de la particule, soumis à la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \Rightarrow m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qB v_y \\ -qB v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où se déduisent les équations différentielles du mouvement :

$$\dot{v}_x = \omega_0 v_y \quad \dot{v}_y = -\omega_0 v_x \quad \dot{v}_z = 0 \quad (76)$$

La dernière de ces équations révèle que v_z demeure constant et conserve donc sa valeur nulle initiale. Du reste, $v_z = \dot{z} = 0$ montre également que z reste constant et, notamment, puisque $z = 0$ à la date $t = 0$, alors :

$$z(t) = 0 \forall t \geq 0$$

ce qui signifie aussi que le mouvement de la particule se fait dans le plan (Ox, Oy) .

- (c) La dérivation de la première équation (76) : $\ddot{v}_x = \omega_0 \dot{v}_y$, associée à la deuxième équation : $\dot{v}_y = -\omega_0 v_x$, conduit à :

$$\ddot{v}_x = -\omega_0^2 v_x \Rightarrow \ddot{v}_x + \omega_0^2 v_x = 0$$

La solution générale de cette équation se présente alors sous la forme :

$$v_x = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \quad (77)$$

Quant à la première équation (76), elle indique aussi que :

$$v_y = \frac{1}{\omega_0} \dot{v}_x \Rightarrow v_y = -A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t) \quad (78)$$

Les constantes A et B , introduites dans ces solutions générales, s'obtiennent à partir des valeurs initiales de v_x et de v_y (respectivement V_0 et 0) :

$$\begin{cases} V_0 = A \\ 0 = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = V_0 \cos(\omega_0 t) \\ v_y = -V_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases} \quad (79)$$

De ces expressions découlent alors celles de x et y :

$$\begin{cases} \dot{x} = V_0 \cos(\omega_0 t) \\ \dot{y} = -V_0 \sin(\omega_0 t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + R \sin(\omega_0 t) \\ y = y_0 + R \cos(\omega_0 t) \end{cases} \text{ avec } \frac{V_0}{\omega_0} = R$$

À nouveau, les constantes x_0 et y_0 sont ajustées de manière à rendre compte du passage de la particule en O à la date $t = 0$:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ 0 = y_0 + R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -R \end{cases}$$

ce qui conduit, finalement, aux équations paramétriques du mouvement :

$$x(t) = R \sin(\omega_0 t) \quad y(t) = R \cos(\omega_0 t) - R \quad z(t) = 0 \quad (80)$$

d'où l'on tire que :

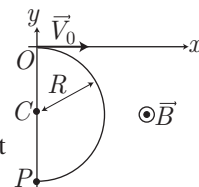
$$\begin{cases} x^2 = R^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ (y + R)^2 = R^2 \cos^2(\omega_0 t) \end{cases} \Rightarrow x^2 + (y + R)^2 = R^2$$

Ce résultat révèle que la trajectoire de la particule est un cercle de centre $C(0, -R, 0)$ et de rayon R .

- (d) À la date $t = \frac{\pi}{\omega_0}$, la particule passe par le point de coordonnées :

$$\begin{cases} x_P = R \sin \pi \\ y_P = R \cos \pi - R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = 0 \\ y_P = -2R \end{cases}$$

et c'est pourquoi, entre $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{\omega_0}$, la particule décrit le demi-cercle de centre O et de rayon R



- (e) Étant donné que $v_z = 0$, et compte tenu des expressions (79) des composantes v_x et v_y :

$$v_x = V_0 \cos(\omega_0 t) \text{ et } v_y = -V_0 \sin(\omega_0 t)$$

à tout instant, la particule possède une vitesse v telle que :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = V_0$$

ce qui lui confère la même énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m V_0^2$$

qu'à la date $t = 0$. C'est pourquoi, entre les dates $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{\omega_0}$, l'énergie cinétique de la particule n'a pas changé.

2. (a) Les calculs précédents, qui ont conduit aux expressions générales (77) et (78) de v_x et v_y :

$$v_x = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) \text{ et } v_y = -A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

demeurent valables ; seules les constantes A et B doivent être adaptées aux nouvelles conditions initiales ($v_x = V_0 \cos \alpha$ et $v_y = V_0 \sin \alpha$ à $t = 0$) :

$$\begin{aligned} \begin{cases} V_0 \cos \alpha = A \\ V_0 \sin \alpha = B \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} v_x = V_0 [\cos(\omega_0 t) \cos \alpha + \sin(\omega_0 t) \sin \alpha] \\ v_y = -V_0 [\sin(\omega_0 t) \cos \alpha - \cos(\omega_0 t) \sin \alpha] \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_x = V_0 \cos(\omega_0 t - \alpha) \\ v_y = -V_0 \sin(\omega_0 t - \alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque – On s'assure d'ores et déjà qu'en posant $\alpha = 0$, les expressions (79) de v_x et v_y sont confirmées :

$$v_x = V_0 \cos(\omega_0 t) \text{ et } v_y = -V_0 \sin(\omega_0 t)$$

Les coordonnées de la particule s'obtiennent ensuite par intégration de v_x et v_y , en posant $\frac{V_0}{\omega_0} = R$:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x = V_0 \cos(\omega_0 t - \alpha) \\ \dot{y} = v_y = -V_0 \sin(\omega_0 t - \alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + R \sin(\omega_0 t - \alpha) \\ y = y_0 + R \cos(\omega_0 t - \alpha) \end{cases}$$

Quant aux constantes x_0 et y_0 , elles sont ajustées de manière à rendre compte de la présence initiale de la particule en O :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 0 = x_0 - R \sin \alpha \\ 0 = y_0 + R \cos \alpha \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x_0 = R \sin \alpha \\ y_0 = -R \cos \alpha \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x = R \sin \alpha + R \sin(\omega_0 t - \alpha) \\ y = -R \cos \alpha + R \cos(\omega_0 t - \alpha) \end{cases} \end{aligned}$$

À nouveau, on s'assure qu'en choisissant $\alpha = 0$, les coordonnées $r = R \sin(\omega_0 t)$ et $y = -R + R \cos(\omega_0 t)$ sont compatibles avec celles du résultat (80).

(b) À la date $t = \frac{\pi}{\omega_0}$, la particule atteint le point Q de coordonnées :

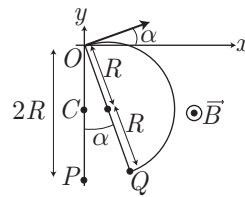
$$x_Q = R \sin \alpha + R \sin(\pi - \alpha) = R \sin \alpha + R \sin \alpha \Rightarrow x_Q = 2R \sin \alpha$$

et :

$$y_Q = -R \cos \alpha + R \cos(\pi - \alpha) = -R \cos \alpha - R \cos \alpha \Rightarrow y_Q = -2R \cos \alpha$$

La distance séparant les points P et Q est alors donnée par :

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(2R \sin \alpha)^2 + (2R - 2R \cos \alpha)^2} \\ &= 2R\sqrt{2 \times (1 - \cos \alpha)} \end{aligned}$$



où l'on rappelle que :

$$\begin{aligned} 2 \cos^2 x &= 1 - \cos(2x) \Rightarrow 1 - \cos \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \\ &\Rightarrow PQ = 4R \left| \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right| \end{aligned}$$

● 258 ————— Concours des Ponts et Chaussées

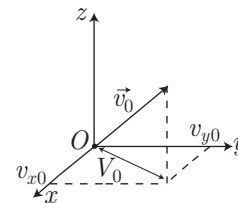
1. Soient v_{x0} , v_{y0} et v_{z0} les composantes de la vitesse initiale \vec{v}_0 de la particule qui pénètre dans le champ magnétique \vec{B} en un point origine O d'un repère cartésien.

On posera $V_0 = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$ et $\omega_c = \frac{qB}{m}$.

La force de Lorentz qui s'exerce sur la particule, de vitesse $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$

s'écrit :

$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} Bv_y \\ -Bv_x \\ 0 \end{pmatrix}$$



et suit la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \Rightarrow m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = \omega_c v_y \\ \dot{v}_y = -\omega_c v_x \\ \dot{v}_z = 0 \end{cases} \quad (81)$$

La dernière équation de ce système révèle que v_z est constant, c'est-à-dire :

$$v_z = v_{z0} \Rightarrow \dot{z} = v_{z0} \Rightarrow z = v_{z0} \times t$$

Quant à la première équation, sa dérivation : $\ddot{v}_x = \omega_c \dot{v}_y$, associée à la deuxième équation : $\dot{v}_y = -\omega_c v_x$, elle conduit à :

$$\ddot{v}_x = -\omega_c^2 v_x \Rightarrow \ddot{v}_x + \omega_c^2 v_x = 0$$

dont la solution générale s'écrit en fonction de deux constantes A et ϕ :

$$v_x = A \cos(\omega_c t + \phi)$$

Enfin, la première équation du système (81) donne accès à v_y :

$$v_y = \frac{1}{\omega_c} \dot{v}_x = -A \sin(\omega_c t + \phi)$$

Les constantes A et B sont ajustées de manière à satisfaire aux conditions initiales ($v_x = v_{x0}$ et $v_y = v_{y0}$ lorsque $t = 0$) :

$$v_{x0} = A \cos \phi \text{ et } v_{y0} = -A \sin \phi \quad (82)$$

d'où l'on déduit, d'une part que :

$$v_{x0}^2 + v_{y0}^2 = V_0^2 \Rightarrow A = V_0$$

et d'autre part que :

$$\tan \phi = -\frac{v_{y0}}{v_{x0}}$$

C'est pourquoi les composantes v_x et v_y de \vec{v} sont données par :

$$\frac{dx}{dt} = v_x = V_0 \cos(\omega_c t + \phi) \text{ et } \frac{dy}{dt} = v_y = -V_0 \sin(\omega_c t + \phi)$$

à partir desquelles se déduisent les coordonnées de la particule :

$$x = C_1 + \frac{V_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t + \phi) \text{ et } y = C_2 + \frac{V_0}{\omega_c} \cos(\omega_c t + \phi)$$

où les constantes C_1 et C_2 sont introduites afin de respecter la position initiale de la particule ($x = 0$ et $y = 0$ à $t = 0$) :

$$0 = C_1 + \frac{V_0}{\omega_c} \sin \phi \text{ et } 0 = C_2 + \frac{V_0}{\omega_c} \cos \phi$$

Les relations (82) fournissent alors :

$$C_1 = -\frac{V_0 \sin \phi}{\omega_c} = \frac{v_{y0}}{\omega_c} \text{ et } C_2 = -\frac{V_0 \cos \phi}{\omega_c} = -\frac{v_{x0}}{\omega_c}$$

Aussi, en définissant la constante :

$$R = \frac{V_0}{\omega_c} = \frac{mV_0}{qB}$$

le mouvement de la particule est décrit par les équations :

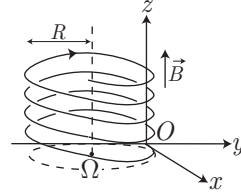
$$x = \frac{v_{y0}}{\omega_c} + R \sin(\omega_c t + \phi) \text{ et } y = -\frac{v_{x0}}{\omega_c} + R \cos(\omega_c t + \phi)$$

qui se présentent également sous la forme :

$$\left(x - \frac{v_{y0}}{\omega_c}\right)^2 + \left(y + \frac{v_{x0}}{\omega_c}\right)^2 = R^2$$

Cette équation révèle que la particule décrit, dans le plan (Oxy) , un cercle de rayon R et de centre $\Omega \left(\frac{v_{y0}}{\omega_c}, -\frac{v_{x0}}{\omega_c}\right)$. À ce mouvement s'ajoute une translation dans la direction de Oz , étant donné que $z = v_{z0} \times t$.

Aussi, la particule décrit, dans l'espace, une hélice d'axe (Oz) et de rayon R .

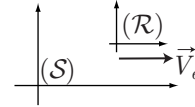


2. Le référentiel (\mathcal{R}) étant en translation uniforme par rapport au référentiel galiléen (\mathcal{S}) , il est lui-même galiléen, auquel cas la force électromagnétique qui s'exerce sur la particule dans (\mathcal{S}) :

$$\vec{f} = q \vec{E}_s + q \vec{v} \wedge \vec{B}_s$$

a les mêmes effets que dans le référentiel (\mathcal{R}) :

$$\vec{f} = q \vec{E}_r + q \vec{v}_r \wedge \vec{B}_r = q \vec{E}_s + q \vec{v} \wedge \vec{B}_s$$



où \vec{v}_r est la vitesse (relative) de la particule dans (\mathcal{R}) . La loi de composition des vitesses :

$$\vec{v} = \vec{V}_e + \vec{v}_r$$

conduit alors à :

$$q \vec{E}_r + q \vec{v}_r \wedge \vec{B}_r = q \vec{E}_s + q \vec{V}_e \wedge \vec{B}_s + q \vec{v}_r \wedge \vec{B}_s$$

Cette loi devant être vérifiée pour toute vitesse \vec{v}_r , elle l'est *a fortiori* lorsque $\vec{v}_r = \vec{0}$, auquel cas :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_s + \vec{V}_e \wedge \vec{B}_s$$

d'où il s'ensuit que : $\vec{B}_r = \vec{B}_s$.

3. Il est possible de choisir une vitesse \vec{V}_e qui annule le champ électrique \vec{E}_r dans (\mathcal{R}) , auquel cas la particule décrirait simplement un cercle, dans ce référentiel, de rayon :

$$R = \frac{|v_{r0}|}{\omega_{cr}} = \frac{|v_{r0}|}{\omega_c} \text{ car } \omega_{cr} = \frac{qB_r}{m} = \frac{qB_s}{m} = \omega_c \quad (83)$$

Ce vecteur vitesse doit donc être choisi de manière à annuler \vec{E}_r :

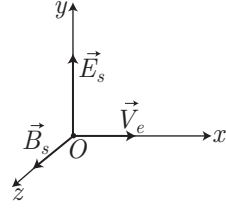
$$\begin{aligned} \vec{E}_r = \vec{E}_s + \vec{V}_e \wedge \vec{B}_s = \vec{0} &\Rightarrow \vec{V}_e \wedge \vec{B}_s = -\vec{E}_s \\ &\Rightarrow \vec{B}_s \wedge (\vec{V}_e \wedge \vec{B}_s) = -\vec{B}_s \wedge \vec{E}_s \\ &\Rightarrow \vec{V}_e \times (\vec{B}_s \cdot \vec{B}_s) - \vec{B}_s \times (\vec{B}_s \cdot \vec{V}_e) = \vec{E}_s \wedge \vec{B}_s \end{aligned}$$

En choisissant \vec{V}_e perpendiculaire à \vec{B}_s , cette équation devient :

$$\vec{B}_s \cdot \vec{V}_e = 0 \Rightarrow \vec{V}_e = \frac{\vec{E}_s \wedge \vec{B}_s}{B_s^2}$$

ce qui montre que \vec{V}_e est aussi perpendiculaire à \vec{E}_s . En outre, $\vec{E}_s \perp \vec{B}_s$ implique que :

$$V_e = \frac{\|\vec{E}_s \wedge \vec{B}_s\|}{B_s^2} = \frac{E_s \times B_s}{B_s^2} \Rightarrow V_e = \frac{E_s}{B_s}$$



Étant donné que la vitesse initiale de la particule est nulle dans le référentiel (S) :

$$\vec{v} \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow v_{x0} = v_{y0} = v_{z0} = 0$$

la loi de composition des vitesses révèle que la vitesse $\vec{v}_r \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{pmatrix}$ vaut initialement :

$$\vec{v}_r = \vec{v} - \vec{V}_e = \vec{0} - \begin{pmatrix} V_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v'_{x0} = -V_e \\ v'_{y0} = 0 \\ v'_{z0} = 0 \end{cases}$$

Compte tenu de l'étude menée au cours de la première question, ces conditions initiales montrent que, dans \mathcal{R} (où seul le champ $\vec{B}_r = \vec{B}_s$ existe), les coordonnées de la particule sont données par :

$$x_r = \frac{v'_{y0}}{\omega_c} + R \sin(\omega_c t + \phi) \text{ et } y_r = -\frac{v'_{x0}}{\omega_c} R \cos(\omega_c t + \phi)$$

où :

$$\tan \phi = -\frac{v'_{y0}}{v'_{x0}} = 0 \Rightarrow \phi = 0$$

et, d'après l'identité (83)

$$\frac{v'_{x0}}{\omega_c} = -\frac{V_e}{\omega_c} = -\frac{|v_{r0}|}{\omega_c} = -R \text{ car } |v_{r0}| = |v'_{x0}| = V_e \quad (84)$$

C'est pourquoi :

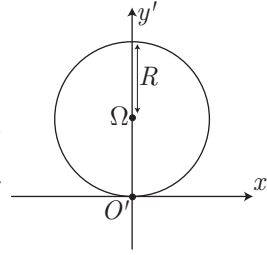
$$x_r = R \sin(\omega_c t + \phi) \text{ et } y_r = R + R \cos(\omega_c t + \phi)$$

d'où l'on déduit que :

$$x_r^2 + (y_r - R)^2 = R^2$$

ce qui montre que, dans le référentiel (\mathcal{R}) de centre O' , la particule décrit un cercle de centre $\Omega(0, R)$ et de rayon R .

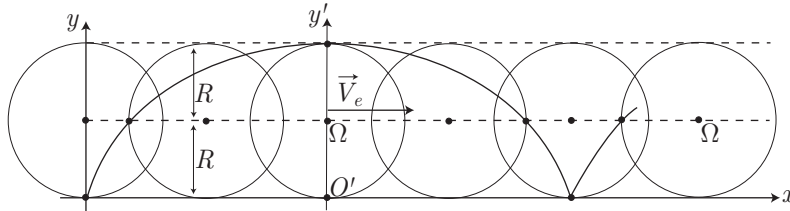
En outre, le point O' se déplace avec une vitesse V_e par rapport au centre O du référentiel (\mathcal{S}) , avec :



$$V_e = R\omega_c$$

conformément à l'identité (84).

Cette relation montre que le cercle de centre Ω se déplace avec une vitesse $R\omega_c$ par rapport à O , tandis que la particule décrit ce même cercle avec une vitesse angulaire ω_c (d'après les expressions de x_r et y_r). C'est pourquoi la composition de ces deux mouvements génère une cycloïde :



4. La connaissance des coordonnées de la particule dans (\mathcal{R}) entraîne celle des composantes de son vecteur vitesse, dans le même référentiel :

$$\begin{cases} x_r = R \sin(\omega_c t + \phi) \\ y_r = R + R \cos(\omega_c t + \phi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_{rx} = \dot{x}_r = R\omega_c \cos(\omega_c t + \phi) \\ v_{ry} = \dot{y}_r = -R\omega_c \sin(\omega_c t + \phi) \end{cases}$$

avec $R\omega_c = V_e$. Par suite, dans le référentiel galiléen (\mathcal{S}) , le vecteur vitesse suit la loi de composition :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{V}_e + \vec{v}_r &= \begin{pmatrix} V_e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + V_e \begin{pmatrix} \cos(\omega_c t + \phi) \\ -\sin(\omega_c t + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= V_e \begin{pmatrix} 1 + \cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \varphi = \omega_c t + \phi \end{aligned}$$

Sa norme vaut par conséquent :

$$v = V_e \sqrt{(1 + \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = V_e \sqrt{2(1 + \cos \varphi)}$$

où l'on remarque que :

$$2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) = 1 + \cos \varphi \Rightarrow v = 2V_e \left| \cos \left(\frac{\varphi}{2} \right) \right|$$

Or, étant donné que $\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ est majoré par 1, il s'ensuit que la vitesse maximale de la particule dans (S) vaut :

$$v_{\max} = 2V_e$$

● 259 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

L'ellipse est décrite, en coordonnées polaires, par l'équation :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

où p et e sont des constantes (paramètre de l'ellipse et excentricité) que nous supposons positives.

Ce faisant, le schéma ci-contre révèle que les points P et A , pour lesquels r est respectivement *minimum* et *maximum* se trouvent à des distances r_1 et r_2 de F qui correspondent respectivement à $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

$$r_1 = \frac{p}{1 + e} \text{ et } r_2 = \frac{p}{1 - e}$$

C'est pourquoi le grand axe $2a$ vérifie :

$$2a = r_1 + r_2 = \frac{2p}{1 - e^2} \Rightarrow p = a(1 - e^2)$$

En outre, la relation entre a et b :

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \Rightarrow 1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

conduit à :

$$p = a \times \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow p = \frac{b^2}{a} \quad (85)$$

Considérons maintenant un élément du circuit elliptique :

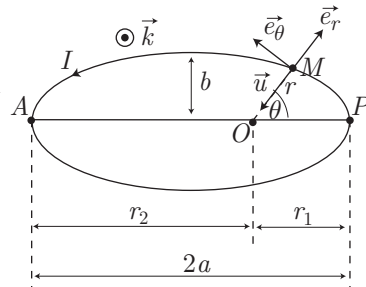
$$d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

qui produit en F un champ magnétique élémentaire :

$$\delta \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

où \vec{u} est un vecteur unitaire de \overrightarrow{MF} : $\vec{u} = -\vec{e}_r$. Ce champ s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \delta \vec{B} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \times (dr \vec{e}_r \wedge \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} d\theta \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\theta}{r} \vec{k} \text{ car } \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = \vec{k} \end{aligned}$$



c'est-à-dire, en tenant compte de l'équation polaire de l'ellipse :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{p}$$

$$\Rightarrow \delta \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi p} \vec{k} (1 + e \cos \theta) d\theta$$

De cette expression découle celle du champ \vec{B} produit en F par la totalité du circuit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi p} \vec{k} \times \left\{ \int_0^{2\pi} d\theta + e \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right\}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi p} \vec{k} \times \left\{ 2\pi + e \times [\sin \theta]_0^{2\pi} \right\} = \frac{\mu_0 I}{2p} \vec{k}$$

avec $p = \frac{b^2}{a}$ conformément à l'identité (85) :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{2b^2} \vec{k}$$

● 260

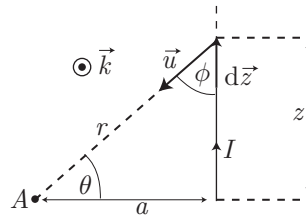
Lycée Fabert, Metz

Un élément dz de la partie linéaire crée en A un champ élémentaire $\delta \vec{B}_1$ donné par la loi de Biot et Savart :

$$\delta \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{d\vec{z} \wedge \vec{u}}{r^2}$$

où :

$$d\vec{z} \wedge \vec{u} = dz \sin \phi \vec{k} = dz \cos \theta \vec{k}$$



en raison de quoi :

$$\delta \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{k} \times \frac{dz}{r^2} \times \cos \theta$$

En outre :

$$\tan \theta = \frac{z}{a} \Rightarrow z = a \tan \theta \Rightarrow dz = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta}$$

et :

$$\cos \theta = \frac{a}{r} \Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2 \theta}{a^2}$$

conduisent à :

$$\frac{dz}{r^2} = \frac{a d\theta}{\cos^2 \theta} \times \frac{\cos^2 \theta}{a^2} = \frac{1}{a} \times d\theta \Rightarrow \delta \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I \vec{k}}{4\pi a} \cos \theta d\theta$$

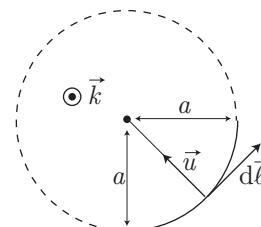
Enfin, l'angle θ pouvant varier de 0 à $\frac{\pi}{2}$, il s'ensuit que :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{k} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{k} \times [\sin \theta]_0^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{k}$$

Cherchons maintenant le champ \vec{B}_2 que produirait une spire de rayon a et centrée sur A .

À nouveau, la loi de Biot et Savart donne le champ $\delta\vec{B}_2$ produit par un élément $d\vec{\ell}$ de cette spire :

$$\delta\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{a^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{d\ell \vec{k}}{a^2}$$



C'est pourquoi, le diamètre de la spire valant $2\pi a$, il vient :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \vec{k} \int_0^{2\pi a} d\ell \Rightarrow \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{k}$$

Finalement, le circuit de l'énoncé est constitué de deux portions linéaires, créant chacune un champ \vec{B}_1 et d'un quart de spire circulaire, responsable du champ $\frac{1}{4}\vec{B}_2$. Par conséquent, ce circuit provoque en A l'apparition du champ magnétique :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= 2\vec{B}_1 + \frac{1}{4}\vec{B}_2 = 2 \times \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \vec{k} + \frac{1}{4} \times \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{k} \\ \Rightarrow \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2a} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{4} \right) \vec{k} \end{aligned}$$

● 261 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

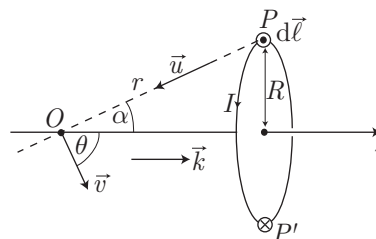
1. Soit $d\vec{\ell}$ un élément de spire, centré sur un point P et soit \vec{u} un vecteur unitaire de \overrightarrow{PO} .

La loi de Biot et Savart indique que $d\vec{\ell}$ produit en O un champ élémentaire :

$$\delta\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{PO^2}$$

avec $PO = r$ et $d\vec{\ell} \wedge \vec{u} = d\ell \vec{v}$:

$$\delta\vec{B}_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell \vec{v}}{r^2}$$



En outre, l'axe Oz est un axe d'antisymétrie pour la boucle de courant (tout couple de points P et P' , symétriques par rapport à cet axe présentent des courants d'orientation opposée), en conséquence de quoi le champ \vec{B} , produit par cette spire (S) est colinéaire à Oz , de vecteur unitaire \vec{k} (car l'axe d'antisymétrie est l'intersection de deux plans d'antisymétrie auxquels appartient \vec{B}) :

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{k} \Rightarrow B_0 = \vec{B}_0 \cdot \vec{k}$$

avec :

$$\vec{B}_0 = \oint_{(S)} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\vec{v}}{r^2} \times d\ell \Rightarrow B_0 = \oint_{(S)} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{r^2} \times d\ell$$

où $\vec{v} \cdot \vec{k} = \cos \theta = \sin \alpha$. Or, α et r étant indépendants de la position du point P , cette intégrale vaut :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\sin \alpha}{r^2} \oint d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{\sin \alpha}{r^2} \times 2\pi R$$

ce qui justifie la loi fournie par l'énoncé :

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{2} \times \frac{R}{r^2} \times \sin \alpha \vec{k}$$

2. En remarquant que $\sin \alpha = \frac{R}{r}$, le résultat précédent donne le champ magnétique produit en O par dn spires, confondues, et traversées globalement par un courant δI :

$$\delta \vec{B} = \frac{\mu_0 \delta I}{2} \times \frac{R^2}{r^3} \vec{k} = \frac{\mu_0 \delta I}{2} \vec{k} \times \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

En outre :

$$\tan \alpha = \frac{R}{z} \Rightarrow R = z \tan \alpha \Rightarrow \delta \vec{B} = \frac{\mu_0 \delta I}{2} \vec{k} \times \frac{\tan^2 \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^{3/2}} \times \frac{1}{z} \quad (86)$$

Considérons maintenant que les spires jointives présentent un diamètre b suffisamment petit devant $z_2 - z_1$ pour que l'on puisse calculer le nombre dn de spires contenues dans un intervalle de longueur dz :

$$z_2 - z_1 = N \times b \Rightarrow \frac{N}{z_2 - z_1} = \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{dn}{dz} = \frac{1}{b} \Rightarrow dn = \frac{dz}{b}$$

Chacune des spires étant parcourue par le même courant I , il s'ensuit que dans un intervalle dz , un courant $\delta I = I \times dn$ produit le champ $\delta \vec{B}$ donné par la relation (86) :

$$\delta \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2b} \vec{k} \times \frac{\tan^2 \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^{3/2}} \times \frac{dz}{z}$$

L'ensemble des spires étant compris dans l'intervalle $[z_1, z_2]$, la distribution de courant est à l'origine du champ magnétique :

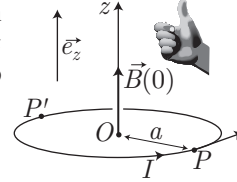
$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2b} \vec{k} \times \frac{\tan^2 \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^{3/2}} \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z} \\ \Rightarrow \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2b} \vec{k} \times \frac{\tan^2 \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^{3/2}} \times \ln \left(\frac{z_2}{z_1} \right) \end{aligned}$$

● **262** **Concours National DEUG**

1.

- (a) L'axe Oz étant axe d'antisymétrie du courant, (en deux points P et P' symétriques par rapport à Oz circulent des courants de sens opposé), le champ $\vec{B}(O)$ présente la même direction que Oz :

$$\vec{B}(O) = B(O) \vec{e}_z$$



Quant à son sens, il est directement fourni par la règle de la main droite : les doigts tournant dans le sens de I , le sens de $\vec{B}(O)$ correspond à celui du pouce tendu.

- (b) En vertu de la loi de Biot et Savart, un élément $d\vec{\ell}$ de circuit centré sur P produit en O le champ magnétique élémentaire :

$$\delta\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{PO^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} d\ell \vec{e}_z$$

et c'est pourquoi l'ensemble de la spire (S) produit le champ magnétique :

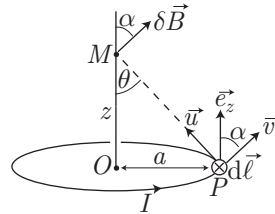
$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \vec{e}_z \oint_{(S)} d\ell = \frac{\mu_0 I}{4\pi a^2} \vec{e}_z \times 2\pi a \Rightarrow \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{e}_z$$

2. L'axe d'antisymétrie de la spire passant par M , il s'y produit un champ magnétique colinéaire à cet axe :

$$\vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_z$$

L'élément de circuit $d\vec{\ell}$ produit à nouveau, en M , le champ élémentaire :

$$\delta\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{MP^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{MP^2} \vec{v}$$



d'où l'on déduit que :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(S)} \frac{d\ell}{MP^2} \vec{v}$$

Or :

$$\begin{aligned} \vec{B}(M) = B(M) \vec{e}_z \Rightarrow B(M) &= \vec{e}_z \cdot \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(S)} \frac{d\ell}{MP^2} \vec{v} \cdot \vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(S)} \frac{d\ell}{MP^2} \cos \alpha \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{(S)} \frac{d\ell}{MP^2} \sin \theta \end{aligned}$$

où $\sin \theta = \frac{a}{MP}$ et $MP = (a^2 + z^2)^{1/2}$ conduisent à :

$$B(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \times \frac{a}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \times \underbrace{\oint_{(S)} d\ell}_{2\pi a} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

3. Une particule située sur l'axe Oz est soumise au champ $\vec{B}(M) = B \vec{e}_z$ à l'origine de la force de Lorentz qui dépend de la vitesse $\vec{v} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$ de la particule :

$$\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B} \Rightarrow m \begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \\ \dot{v}_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qBv_y \\ -qBv_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire, en notant $\omega = \frac{qB}{m}$:

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \omega v_y \\ \dot{v}_y = -\omega v_x \end{cases} \quad \text{et } \dot{v}_z = 0 \quad (87)$$

Les deux équations du système s'écrivent également :

$$\ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0 \quad \text{et } v_y = \frac{1}{\omega} \dot{v}_x$$

dont les solutions générales sont :

$$v_x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad \text{et } v_y = -A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

Du reste, à la date $t = 0$, $\vec{v} = \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_z$ montre que v_x et v_y sont nuls :

$$\begin{cases} 0 = A \\ 0 = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \end{cases}$$

De même, la troisième équation (87) montre que v_z demeure constant et conserve par conséquent sa valeur initiale $v_0 : v_z = v_0$.

De cette étude, il ressort que : $\vec{v} = \vec{v}_0 \forall t \geq 0$, auquel cas la particule est animée d'un mouvement de translation uniforme ; sa trajectoire se confond avec l'axe Oz .

● **263** ————— **Lycée Fabert, Metz**

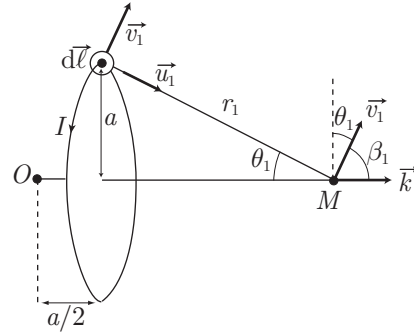
1. Soit $d\vec{\ell}$ un élément de la spire qui produit, en M , le champ magnétique élémentaire $\delta\vec{B}_1$:

$$\delta\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}_1}{r_1^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell}{r_1^2} \vec{v}_1 \quad \text{avec } \|\vec{v}_1\| = 1$$

Le champ magnétique produit par la totalité de la spire vaut alors :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1^2} \oint_{S_1} d\vec{\ell} \vec{v}_1$$

En outre, l'axe (OM) passant par M , est un axe d'antisymétrie pour (S_1) auquel cas \vec{B}_1 est colinéaire au vecteur unitaire directeur \vec{k} de (OM) :



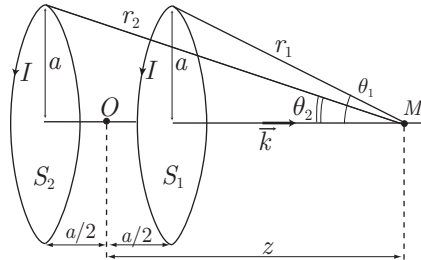
$$\begin{aligned} \vec{B}_1 = B_1 \vec{k} \Rightarrow B_1 &= \vec{B}_1 \cdot \vec{k} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1^2} \oint_{(S_1)} \underbrace{d\vec{\ell} \vec{v}_1 \cdot \vec{k}}_{\cos \beta_1} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1^2} \sin \theta_1 \oint_{(S_1)} d\ell \text{ car } \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \theta_1 \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r_1^2} \times \sin \theta_1 \times 2\pi a \end{aligned}$$

d'où il découle que :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I a}{2} \times \frac{\sin \theta_1}{r_1^2} \vec{k} \quad (88)$$

Un raisonnement analogue montre que S_2 crée en M le champ :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I a}{2} \times \frac{\sin \theta_2}{r_2^2} \vec{k} \quad (89)$$



Les deux spires cumulent leurs effets pour produire en M un champ magnétique issu des résultats (88) et (89) :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I a}{2} \times \left(\frac{\sin \theta_1}{r_1^2} + \frac{\sin \theta_2}{r_2^2} \right) \vec{k} \quad (90)$$

2. Les grandeurs r_1 , r_2 , $\sin \theta_1$ et $\sin \theta_2$ de la relation précédente peuvent s'exprimer à l'aide de a et z (voir la figure précédente) :

$$\sin \theta_1 = \frac{a}{r_1} \Rightarrow \frac{\sin \theta_1}{r_1^2} = \frac{a}{r_1^3}$$

où, en posant $z = \alpha a$:

$$r_1 = \sqrt{a^2 + \left(z - \frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{1 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2}$$

Aussi :

$$\frac{\sin \theta_1}{r_1^2} = \frac{a}{a^3 \left[1 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{1}{a^2} \left[1 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2}$$

De même :

$$r_2 = a\sqrt{1 + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \frac{\sin \theta_2}{r_2^2} = \frac{a}{r_2^3} = \frac{1}{a^2} \left[1 + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2}$$

La relation (90) s'exprime finalement à l'aide de la variable $\alpha = \frac{z}{a}$:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{k} \left\{ \left[1 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2} \right\}$$

Afin de soulager les calculs, nous poserons :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2a} \vec{k} \times f(\alpha)$$

où la fonction :

$$f(\alpha) = \left[1 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2} + \left[1 + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{-3/2}$$

admet pour dérivée :

$$\frac{df}{d\alpha} = -\frac{3}{2} \times 2 \frac{\alpha - \frac{1}{2}}{\left[1 + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2\right]^{5/2}} - \frac{3}{2} \times 2 \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\left[1 + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)^2\right]^{5/2}}$$

On pourra notamment s'assurer que :

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \text{ et } \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [f(\alpha)] = 0$$

de même que :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} [f(\alpha)] = 2 \times \left[1 + \frac{1}{4}\right]^{-3/2} = \frac{2}{\left(\frac{5}{4}\right)^{3/2}} \Rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} [f(\alpha)] = \frac{16}{\sqrt{125}}$$

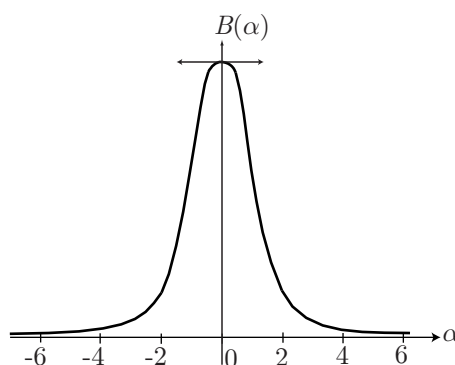
c'est-à-dire aussi, en posant $B = \|\vec{B}(M)\|$:

$$\left. \frac{dB}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} B = \frac{\mu_0 I}{2a} \times \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [f(\alpha)] = 0$$

et enfin :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} B = \frac{\mu_0 I}{2a} \times \lim_{\alpha \rightarrow 0} [f(\alpha)] = \frac{8\mu_0 I}{\sqrt{125} a}$$

En outre, $f(-\alpha) = f(\alpha)$ indique que la fonction $f(\alpha)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, ce qui conduit à la représentation graphique de la fonction $B(\alpha)$:



3. Numériquement, l'équation : $B(\alpha) = 0,999 \times B(0)$ s'obtient par la résolution de :

$$f(\alpha) = 0,999 \times f(0) = 0,999 \times \frac{16}{\sqrt{125}}$$

On trouve alors :

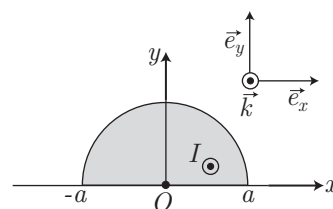
$$\alpha \simeq 0,17307$$

Ce résultat montre qu'une variation appréciable de α autour de la valeur $\alpha = 0$ entraîne une très faible variation de $B(\alpha)$. Un tel comportement indique une certaine homogénéité du champ magnétique au milieu des deux bobines de Helmholtz. Du reste, la représentation graphique de $B(\alpha)$ confirme un tel résultat.

● 264 ————— Lycée Michelet, Vanves

1. Pour déterminer l'orientation de \vec{B}_0 , il convient de préciser les éléments de symétrie de la distribution de courant :

- Le plan (Ox, Oy) est un plan d'antisymétrie (d'un côté de ce plan le courant arrive, tandis qu'il repart de l'autre côté) ; le champ \vec{B}_0 appartient à ce plan.
- Le plan (Oy, Oz) est un plan de symétrie, en raison de quoi \vec{B}_0 est perpendiculaire à ce plan, et donc à l'axe Oy .



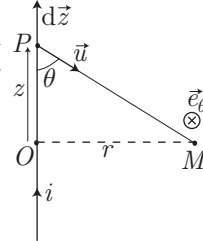
Ce faisant, le champ \vec{B}_0 est nécessairement colinéaire à l'axe (Ox) :

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$$

2. (a) Soit P un point du fil, parcouru par un courant i , et M un point situé à une distance $r = OM$ de ce fil. On repère P à l'aide de sa cote z et on désigne par $d\vec{z}$ un déplacement élémentaire centré sur P .

Si \vec{u} représente un vecteur unitaire directeur de \overrightarrow{PM} , la loi de Biot et Savart stipule que P produit en M le champ magnétique élémentaire :

$$\delta\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{z} \wedge \vec{u}}{MP^2} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dz \sin \theta}{MP^2} \vec{e}_\theta$$



où l'on remarque que :

$$\tan \theta = \frac{r}{z} \Rightarrow z = \frac{r}{\tan \theta} \Rightarrow dz = -r \frac{d\theta}{\sin^2 \theta}$$

et :

$$\sin \theta = \frac{r}{MP} \Rightarrow \frac{1}{MP^2} = \frac{\sin^2 \theta}{r^2}$$

C'est pourquoi :

$$\delta\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \times \frac{-r d\theta}{\sin^2 \theta} \times \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \times \sin \theta \vec{e}_\theta = -\frac{\mu_0 i}{4\pi r} \vec{e}_\theta \sin \theta d\theta$$

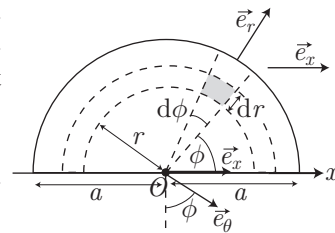
où l'angle θ varie de π à 0 lorsque z varie de $-\infty$ à $+\infty$. Ainsi le champ magnétique créé en M vaut-il :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \vec{e}_\theta \int_{\pi}^0 -\sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \vec{e}_\theta [\cos \theta]_{\pi}^0 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (91)$$

- (b) Découpons la distribution de courant en portions d'angle au sommet $d\phi$, de longueur dr et localisées par leur distance r à O et l'angle ϕ entre \vec{e}_r et l'axe (Ox).

Chacune de ces portions présente une surface élémentaire $dS = r d\phi \times dr$ et un courant élémentaire $dI = i$. Or, le courant I étant réparti uniformément sur la surface $S = \frac{\pi a^2}{2}$,

la densité de courant $\frac{I}{S}$ doit aussi être uniforme :



$$\frac{dI}{dS} = \frac{I}{S} = \frac{2I}{\pi a^2} \Rightarrow i = dI = \frac{2I}{\pi a^2} \times r dr \times d\phi$$

- (c) Conformément au résultat (91), chaque fil précédemment décrit produit en O un champ magnétique élémentaire :

$$\delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi r} \times dI \times \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 a^2} dr d\phi \vec{e}_\theta$$

de sorte que l'ensemble de la distribution de courant produit un champ global :

$$\vec{B}_0 = \int_{r=0}^a \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\mu_0 I}{\pi^2 a^2} dr d\phi \vec{e}_\theta$$

Or, conformément à la première question, le champ \vec{B}_0 s'écrit aussi :

$$\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x \Rightarrow B_0 = \vec{B}_0 \cdot \vec{e}_x = \int_{r=0}^a \int_{\phi=0}^{\pi} \frac{\mu_0 I}{\pi^2 a^2} dr d\phi \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x$$

où $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin \phi$. C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{\mu_0 I}{\pi^2 a^2} \int_{r=0}^a dr \int_{\phi=0}^{\pi} \sin \phi d\phi \\ &= \frac{\mu_0 I}{\pi^2 a^2} \times a \times \underbrace{[-\cos \phi]_0^{\pi}}_2 = \frac{2\mu_0 I}{\pi^2 a} \\ \Rightarrow \vec{B}_0 &= \frac{2\mu_0 I}{\pi^2 a} \vec{e}_x \end{aligned}$$

● 265 Q.C.M.

1. Le plan (xOz) est un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant et, puisque M appartient à ce plan, la direction de \vec{B} se trouve :

dans le plan (xOz) (réponse d)

en conséquence de quoi \vec{B} possède *a priori* deux composantes : $\vec{B} = B_x \vec{e}_x + B_z \vec{e}_z$.

Δ L'axe Ox est aussi un axe d'antisymétrie pour la distribution de courant mais cela ne suffit pas à affirmer que \vec{B} est colinéaire à Ox , car cet axe ne passe pas par M .

En revanche, le plan (yOz) , qui contient M , est un plan de symétrie pour la distribution de courant, ce qui signifie que \vec{B} est perpendiculaire à ce plan, de vecteurs de base \vec{e}_y et \vec{e}_z . C'est pour cette raison que :

$$\vec{B} = B \vec{e}_x$$

ce qui justifie l'orientation de \vec{B} :

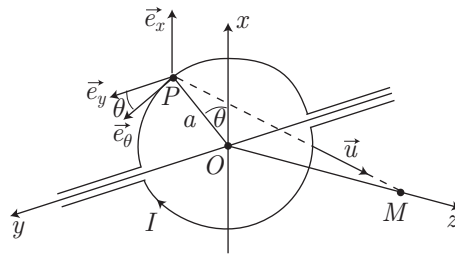
\vec{B} est colinéaire à Ox (réponse c).

2. En coordonnées cylindro-polaires, un élément de circuit $d\vec{\ell}$ a pour composantes :

$$d\vec{\ell} = a d\theta \vec{e}_\theta \text{ avec } \vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y$$

de sorte que, dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$d\vec{\ell} = \begin{pmatrix} -a \sin \theta d\theta \\ a \cos \theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$



Quant au vecteur unitaire \vec{u} de \overrightarrow{PM} , il est défini par :

$$\overrightarrow{PM} = PM \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{PM} \begin{pmatrix} -a \cos \theta \\ -a \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

ce qui permet le calcul de :

$$d\vec{\ell} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} -a \sin \theta d\theta \\ a \cos \theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \frac{1}{MP} \begin{pmatrix} -a \cos \theta \\ -a \sin \theta \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{MP} \begin{pmatrix} -za \cos \theta d\theta \\ za \sin \theta d\theta \\ a^2 d\theta \end{pmatrix}$$

et conduit à l'expression du champ élémentaire $\delta\vec{B}$ que $d\vec{\ell}$ produit en M :

$$\begin{aligned} \delta\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{u}}{MP^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi MP^3} \begin{pmatrix} za \cos \theta d\theta \\ za \sin \theta d\theta \\ a^2 d\theta \end{pmatrix} \\ &= \delta B_x \vec{e}_x + \delta B_y \vec{e}_y + \delta B_z \vec{e}_z \text{ avec } \begin{cases} \delta B_x = za \cos \theta d\theta \\ \delta B_y = za \sin \theta d\theta \\ \delta B_z = a^2 d\theta \end{cases} \end{aligned}$$

Ce faisant, le champ total créé par la demi-spire supérieure vaut :

$$\vec{B}_1 = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \delta\vec{B}_1$$

tandis que le champ créé par la demi-spire inférieure vaut :

$$\vec{B}_2 = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \delta\vec{B}_2$$

C'est pourquoi la résultante de ces deux champs s'identifie à :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta\vec{B}_1 + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta\vec{B}_2$$

et ne possède qu'une composante selon \vec{e}_x :

$$\begin{aligned}\vec{B} = B \vec{e}_x \Rightarrow B &= \vec{B} \cdot \vec{e}_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta \vec{B}_1 \cdot \vec{e}_x + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \delta \vec{B}_2 \cdot \vec{e}_x \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{za}{MP^3} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \, d\theta \right) \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{za}{MP^3} [2 \sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{\pi} \times \frac{za}{MP^3}\end{aligned}$$

où $MP = \sqrt{a^2 + z^2}$ fournit également :

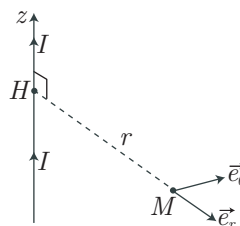
$$B = \frac{\mu_0 I}{\pi} \times \frac{za}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \text{ (réponse d).}$$

● 266 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Le plan $(\overrightarrow{Hz}, \overrightarrow{HM})$, qui contient M et le fil Hz est un plan de symétrie pour le courant, en raison de quoi \vec{B}_1 est perpendiculaire à ce plan ; il est colinéaire au vecteur orthoradial \vec{e}_θ :

$$\vec{B}_1 = B_1 \times \vec{e}_\theta$$

En outre, la distribution de courant demeure invariante par translation du fil dans la direction de H_z , ou par rotation autour de H_z . C'est pourquoi \vec{B}_1 ne dépend que de la distance $HM = r$:



$$\vec{B}_1 = B_1(r) \times \vec{e}_\theta$$

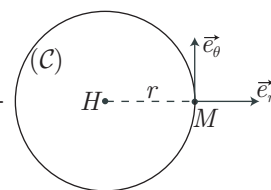
Soit \mathcal{C} un cercle horizontal, de centre H , de rayon r , dont un élément de longueur est décrit par $d\vec{\ell} = dl \times \vec{e}_\theta$.

La circulation de \vec{B}_1 le long de \mathcal{C} est définie par :

$$C = \oint_{(\mathcal{C})} \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(\mathcal{C})} B_1(r) \times dl$$

Or, sur \mathcal{C} , r est constant de sorte que $B_1(r)$ l'est également, ce qui se traduit par :

$$C = B_1(r) \times \oint_{(\mathcal{C})} dl = B_1 \times 2\pi r$$



Enfin, à l'intérieur de la surface circonscrite par \mathcal{C} , circule le courant I , à la suite de quoi le théorème d'Ampère stipule que :

$$C = \mu_0 I \Rightarrow B_1 \times 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$$

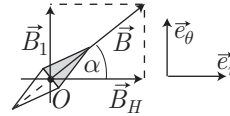
2. (a) En l'absence de courant I , $\vec{B}_1 = \vec{0}$ révèle que l'aiguille aimantée n'est soumise qu'au seul champ magnétique \vec{B}_H . L'orientation radiale de cette aiguille coïncide alors avec la direction de \vec{B}_H , et c'est pourquoi :

$$\vec{B}_H = B_H \times \vec{e}_r$$

- (b) Lorsque le courant I circule dans le fil, l'aiguille de la boussole est soumise au champ résultant : $\vec{B} = \vec{B}_H + \vec{B}_1$, dont elle adopte la direction :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{B_1}{B_H} = 1 \Rightarrow B_H = B_1$$

$$\Rightarrow B_H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Application numérique :

$$B_H = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 2,5}{2\pi \times 2,5 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow B_H = 2 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

● 267 ————— Lycée Fabert, Metz

1. Tout plan contenant M et passant par l'axe (Oz) est un plan de symétrie pour le courant, auquel cas le champ $\vec{B} = \vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan et est donc colinéaire à \vec{e}_θ :

$$\vec{B} = B \times \vec{e}_\theta$$

De plus, la géométrie cylindrique du câble infini (invariant par translation sur l'axe (Oz) et par rotation autour de cet axe) rend B dépendant exclusivement de sa distance r à l'axe :

$$\vec{B} = B(r) \times \vec{e}_\theta$$

2. Si (C) désigne un contour circulaire de rayon r et centré sur (Oz), à l'intérieur duquel circule un courant I_{int} , le théorème d'Ampère indique que :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}}, \text{ où :}$$

$$d\vec{\ell} = dl \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) \times dl$$

$$\Rightarrow \oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(r) \oint_{(C)} dl = B(r) \times 2\pi r$$

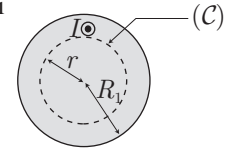
$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I_{\text{int}}}{2\pi r}$$

Il s'agit désormais d'étudier la valeur de I_{int} en fonction de la position du contour (C).

- **Pour** $r \leq R_1$

La densité (surfaccique) de courant est uniforme, de ce qui se traduit par :

$$\frac{I}{\pi R_1^2} = \frac{I_{\text{int}}}{\pi r^2} \Rightarrow I_{\text{int}} = \frac{I}{R_1^2} \times r^2$$



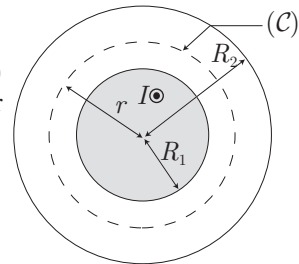
d'où il s'ensuit que :

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2} \times r \text{ pour } r \in [0, R_1]$$

- **Pour** $R_1 \leq r \leq R_2$

Le seul courant qui circule dans le parcours (C) est également celui qui circule dans le conducteur central, c'est-à-dire : $I_{\text{int}} = I$. C'est pourquoi :

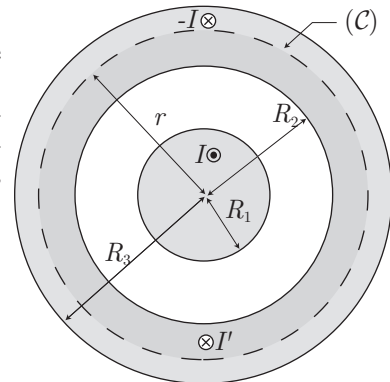
$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \text{ pour } r \in [R_1, R_2]$$



- **Pour** $R_2 \leq r \leq R_3$

Outre le courant $+I$ qui circule dans le conducteur central, une partie du courant, notée I' , traversant (C), provient du courant de retour dans le conducteur extérieur. L'uniformité du courant dans les conducteurs se traduit aussi par :

$$\begin{aligned} \frac{I'}{\pi (r^2 - R_2^2)} &= \frac{-I}{\pi (R_3^2 - R_2^2)} \\ \Rightarrow I' &= -I \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \end{aligned}$$



c'est-à-dire :

$$I_{\text{int}} = I + I' = I \times \left(1 - \frac{r^2 - R_2^2}{R_3^2 - R_2^2} \right)$$

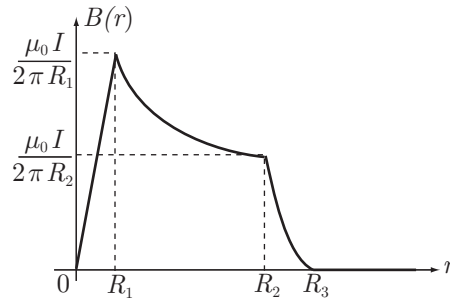
$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi (R_3^2 - R_2^2)} \times \frac{R_3^2 - r^2}{r} \text{ pour } r \in [R_2, R_3]$$

- **Pour** $r \geq R_3$

(C) est traversé par les deux courants I et $-I$ qui se compensent, si bien que :

$$I_{\text{int}} = 0 \Rightarrow B(r) = 0 \text{ pour } r \geq R_3$$

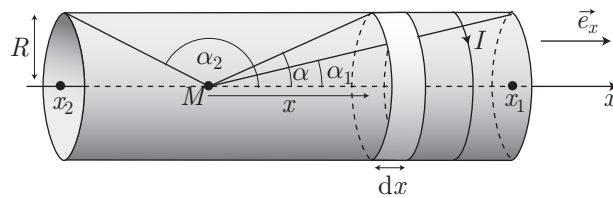
3. Les expressions précédentes de $B(r)$ sont résumées sur la représentation graphique suivante :



● 268 **Concours ENSI**

1. Les $dN = n dx$ spires, situées à la distance x de M , laissent circuler un courant d'intensité $\delta I = dN I = n I dx$ qui produit en M un champ magnétique :

$$\delta \vec{B} = \frac{\mu_0 \delta I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_x = \frac{\mu_0 n I}{2R} dx \sin^3 \alpha \vec{e}_x$$



Or :

$$\begin{aligned} \tan \alpha = \frac{R}{x} &\Rightarrow x = \frac{R}{\tan \alpha} \Rightarrow dx = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha} \\ &\Rightarrow \delta \vec{B} = -\frac{\mu_0 n I}{2} \sin \alpha d\alpha \vec{e}_x \end{aligned}$$

Pendant que x augmente de x_2 à x_1 , l'angle α varie de α_2 à α_1 , auquel cas le champ magnétique total produit en M vaut :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= -\frac{\mu_0 n I}{2} \vec{e}_x \int_{\alpha_2}^{\alpha_1} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 n I}{2} \vec{e}_x [\cos \alpha]_{\alpha_2}^{\alpha_1} \\ &\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_x \end{aligned}$$

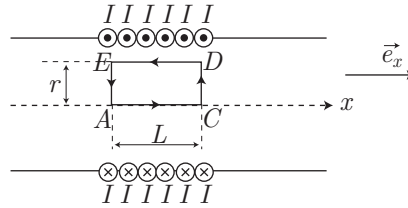
Lorsque le solénoïde est infiniment long, ses extrémités sont repérées par les angles $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$, en raison de quoi le champ magnétique devient :

$$\vec{B}_0 = \mu_0 n I \vec{e}_x$$

2. Tout plan perpendiculaire à l'axe Ox de la bobine est un plan de symétrie pour la distribution de courant, auquel cas \vec{B} est perpendiculaire à ce plan et donc colinéaire à \vec{e}_x : $\vec{B} = B \vec{e}_x$. En outre, toute rotation de la bobine autour de son axe, ou toute translation le long de cet axe laissent invariante la distribution de courant. C'est pourquoi \vec{B} ne dépend que de la distance r qui sépare M de l'axe :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_r$$

3. Considérons un contour rectangulaire C_1 , à l'intérieur de la bobine, dont les côtés AC et DE sont parallèles à l'axe Ox . Le côté AC est choisi sur cet axe, et on pose $\vec{AC} = L \vec{e}_x$ et $\vec{DE} = -L \vec{e}_x$



Sur un tel contour, la circulation du champ magnétique est définie par :

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

où chaque intégrale peut se calculer individuellement.

- Sur CD et EA les vecteurs $d\vec{\ell}$ sont perpendiculaires à \vec{e}_x tandis que $\vec{B} = B \vec{e}_x$, auquel cas $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$, ce qui a pour conséquence :

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

- Sur AC et DE , le champ \vec{B} est invariant car r conserve une valeur constante. C'est pourquoi :

$$\int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \vec{B}_0 \cdot \int_A^C d\vec{\ell} = \vec{B}_0 \cdot \vec{AC} \text{ et } \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \vec{B} \cdot \int_D^E d\vec{\ell} = \vec{B} \cdot \vec{DE}$$

où $\vec{B} = B \vec{e}_x$, $\vec{AC} = L \vec{e}_x$ et $\vec{DE} = -L \vec{e}_x$ conduisent à :

$$\int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_0 L \text{ et } \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = -B(r) L$$

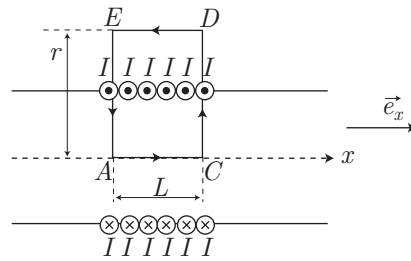
Finalement la circulation de \vec{B} le long de C_1 vaut :

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = [B_0 - B(r)] \times L$$

Or, la surface délimitée par C_1 n'est traversée par aucun courant, ce qui donne au théorème d'Ampère la forme suivante :

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow B(r) = B_0 = \mu_0 n I \text{ pour } r < R$$

Choisissons maintenant un contour C_2 , orienté comme C_1 , mais dont le côté DE se trouve à l'extérieur de la bobine (AC étant situé sur l'axe Ox).



Le calcul de la circulation de \vec{B} sur C_2 se mène comme précédemment et conduit au même résultat :

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = [B_0 - B(r)] \times L$$

En revanche, la surface circonscrite dans C_2 est parcourue par un courant $I_{\text{int}} = nL \times I$, où nL représente le nombre de spires confinées sur une longueur L de solénoïde. Le théorème d'Ampère stipule alors que :

$$\begin{aligned} \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow [B_0 - B(r)] \times L = \mu_0 nI \times L \\ &\Rightarrow B_0 - B(r) = \mu_0 nI \end{aligned}$$

avec :

$$B_0 = \mu_0 nI \Rightarrow \vec{B}(r) = \vec{0} \text{ pour } r > R$$

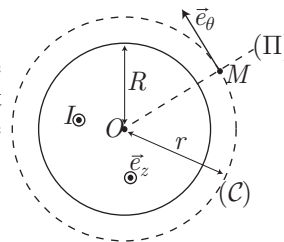
● **269** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

1. Tout plan (Π) contenant simultanément M et l'axe Oz est un plan de symétrie pour la distribution de courant, auquel cas le champ magnétique \vec{B} est perpendiculaire à (Π) :

$$\vec{B} = B \vec{e}_\theta$$

En outre, une translation du cylindre le long de son axe Oz , de même qu'une rotation autour de Oz , laissent invariante la distribution de courant, ce qui révèle que $B = \|\vec{B}\|$ ne dépend que de r :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$



2. Soit (C) un cercle de centre O , de rayon r , sur lequel est défini un déplacement élémentaire $d\vec{l} = dl \vec{e}_\theta$. La circulation de \vec{B} à travers C est définie par :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_{(C)} B(r) dl = B(r) \oint_{(C)} dl = B(r) \times 2\pi r$$

L'utilisation du théorème d'Ampère distingue alors deux cas :

- pour $r > R$, la surface circonscrite par (C) est traversée par la totalité du courant I , auquel cas le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Rightarrow B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \text{ pour } r > R$$

- pour $r < R$, la surface $s = \pi r^2$ circonscrite dans (\mathcal{C}) est traversée par un courant d'intensité I_{int} , différent du courant I qui traverse la section $S = \pi R^2$ du cylindre. Or, l'homogénéité du courant dans le conducteur se traduit par :

$$\frac{I_{\text{int}}}{s} = \frac{I}{S} \Rightarrow I_{\text{int}} = I \times \frac{\pi r^2}{\pi R^2} \Rightarrow I_{\text{int}} = I \times \frac{r^2}{R^2}$$

Ce faisant, le théorème d'Ampère devient :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow B(r) \times 2\pi r = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \times r \vec{e}_\theta \text{ pour } r < R$$

Les résultats précédents montrent que :

$$\lim_{r \rightarrow 0} [B(r)] = \lim_{r \rightarrow 0} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \times r \right] \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} [B(r)] = 0$$

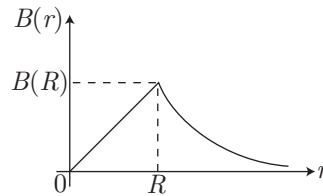
et :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [B(r)] = \lim_{r \rightarrow \infty} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right] \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} [B(r)] = 0$$

De plus, pour $r < R$, $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$ a pour représentation graphique un segment de droite, tandis que :

$$\lim_{r \rightarrow R^-} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \times r \right] = \lim_{r \rightarrow R^+} \left[\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right] \Rightarrow B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

traduit la continuité de la fonction $B(r)$ en $r = R$.



3. Soit $d\vec{S} = dS \vec{e}_\theta$ un élément de surface du plan \mathcal{P} , ainsi composé de bandes de longueur L , de largeur dr , situées à des distances r de Oz .

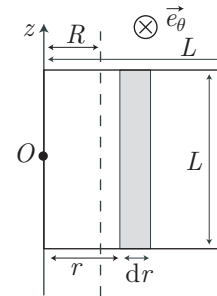
Le flux élémentaire du champ \vec{B} à travers $d\vec{S}$ est défini par :

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B(r) \times dS = B(r) \times L dr$$

Selon que $r < R$ ou $r > R$, $B(r)$ adopte des expressions différentes, auquel cas il convient de distinguer deux flux.

- À l'intérieur du conducteur cylindrique, $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$ tandis que r peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et R . C'est pourquoi :

$$\Phi_i = \int_0^R \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \times L dr = \frac{\mu_0 I L}{2\pi R^2} \int_0^R r dr \Rightarrow \Phi_i = \frac{\mu_0 I L}{4\pi}$$



- À l'extérieur du cylindre, r varie de R à L et le champ magnétique a pour norme $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. C'est pourquoi :

$$\Phi_e = \int_R^L \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times L dr = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \int_R^L \frac{dr}{r} \Rightarrow \Phi_e = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln\left(\frac{L}{R}\right)$$

Ces deux résultats permettent finalement d'obtenir le rapport :

$$\frac{\Phi_e}{\Phi_i} = 2 \ln\left(\frac{L}{R}\right)$$

Les flux Φ_e et Φ_i sont égaux à condition que :

$$2 \ln\left(\frac{L}{R}\right) = 1 \Rightarrow \frac{L}{R} = e^{1/2} \Rightarrow L \simeq 1,65 \times R$$

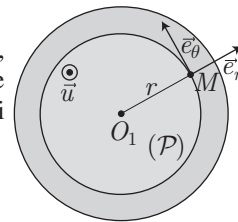
● **270** **Q.C.M.**

1. Le plan contenant O_1 et M est un plan de symétrie pour la distribution de courant, auquel cas \vec{B} est perpendiculaire à ce plan :

$$\vec{B} = B \vec{e}_\theta$$

En outre, toute rotation de ce cylindre autour de son axe $O_1 \vec{u}$, ou toute translation du cylindre dans la direction de cet axe laisse invariante la distribution de courant, en raison de quoi B ne dépend que de r :

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$



Considérons alors un parcours circulaire (\mathcal{P}), de rayon r et centré sur O_1 , sur lequel est défini un élément de longueur $d\vec{\ell} = dl \vec{e}_\theta$. La circulation de \vec{B} le long de (\mathcal{P}) vaut :

$$\oint_{(\mathcal{P})} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(\mathcal{P})} B(r) dl = B(r) \oint_{(\mathcal{P})} dl = B(r) \times 2\pi r$$

En outre, la densité volumique de courant étant homogène, il en va de même de la densité surfacique de courant, définie par :

$$J = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R^2}$$

où S est la section du cylindre parcourue par le courant I .

Ce faisant, le parcours (\mathcal{P}) délimite une surface $S' = \pi r^2$ traversée par le courant :

$$I_{\text{int}} = JS' = \frac{I}{\pi R^2} \times \pi r^2 = \frac{I}{R^2} r^2$$

auquel cas le théorème d'Ampère stipule que :

$$\oint_{(\mathcal{P})} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow B(r) \times 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{R^2} r^2 \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r$$

$$\Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{e}_\theta$$

avec :

$$\vec{e}_\theta = \vec{u} \wedge \vec{e}_r \Rightarrow r \vec{e}_\theta = \vec{u} \wedge r \vec{e}_r = \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 M}$$

et c'est pourquoi :

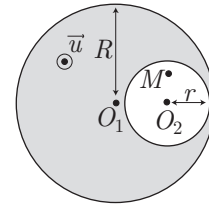
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 M} \text{ (réponse d).}$$

2. Si le cylindre \mathcal{C}_1 est parcouru par un courant $I = I_1$ et si le cylindre (\mathcal{C}_2) est parcouru par un courant I_2 , les champs \vec{B}_1 et \vec{B}_2 produits en M sont donnés par le résultat de la question précédente :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 M} \text{ et } \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r^2} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_2 M}$$

Or, l'énoncé précise que les courants volumiques (ou encore surfaciques) sont égaux et opposés, ce qui se traduit par :

$$J_1 = \frac{I}{\pi R^2} \text{ et } J_2 = \frac{I_2}{\pi r^2} = -J_1 = -\frac{I}{\pi R^2}$$



en raison de quoi :

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 M} \text{ et } \vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_2 M}$$

Ce faisant, le champ résultant produit en M vaut :

$$\vec{B}_0(M) = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \vec{u} \wedge (\overrightarrow{O_1 M} - \overrightarrow{O_2 M})$$

soit encore :

$$\vec{B}_0(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1 O_2} \text{ (réponse a).}$$

● 271 ————— Lycée du Parc, Lyon

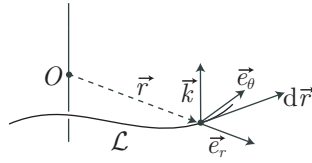
1. Tout plan passant par l'axe (Oz) et contenant M est un plan de symétrie, en raison de quoi \vec{B} est perpendiculaire à un tel plan :

$$\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta$$

Du reste, une rotation de la bobine autour de l'axe (Oz) laisse invariante la distribution de courant, ce qui signifie que \vec{B} ne dépend pas de θ :

$$\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta$$

Désignons par \mathcal{L} une ligne de champ associée à $\vec{B} = B \vec{e}_\theta = B(r, z) \vec{e}_\theta$, sur laquelle peut être défini un vecteur tangent élémentaire :



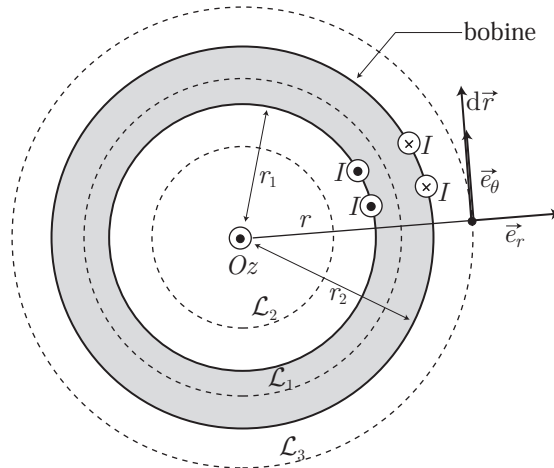
$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{k}$$

Par définition, \vec{B} est en tout point de \mathcal{L} tangent à \mathcal{L} , c'est-à-dire colinéaire à $d\vec{r}$, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\vec{B} \wedge d\vec{r} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ dz \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} B dz = 0 \\ B dr = 0 \end{cases} \Rightarrow dz = dr = 0$$

Ce résultat signifie qu'une ligne de champ magnétique est caractérisée par z et r constants ; il s'agit d'arcs de cercle plans, perpendiculaires à Oz . Aussi, la norme $B = B(r, z)$ de \vec{B} est constante sur une telle ligne.

2. Soient \mathcal{L}_1 une ligne de champ à l'intérieur de la bobine (cercle de rayon r compris entre r_1 et r_2), \mathcal{L}_2 une ligne de champ à l'extérieur (cercle de rayon $r < r_1$) et \mathcal{L}_3 une autre ligne de champ à l'extérieur de la bobine ($r > r_2$).



La circulation \mathcal{C} du champ magnétique le long d'une de ces lignes est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \oint_{\mathcal{L}} \vec{B} \cdot d\vec{r} \text{ avec } \vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta \text{ et } d\vec{r} = r d\theta \vec{e}_\theta \\ &= \oint_{\mathcal{L}} B(r, z) r d\theta = r B(r, z) \int_0^{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

soit encore :

$$\mathcal{C} = 2\pi r \times B(r, z) \tag{92}$$

Le théorème d'Ampère peut alors s'appliquer en distinguant trois cas :

- La surface circonscrite par la ligne \mathcal{L}_2 n'est traversée par aucun courant, auquel cas :

$$C_2 = \oint_{\mathcal{L}_2} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow 2\pi r \times B(r, z) = 0 \Rightarrow \vec{B}(r, z) = \vec{0} \text{ pour } r < r_1$$

- La ligne de champ \mathcal{L}_1 circonscrit une surface traversée par N courants de même intensité I , en raison de quoi le théorème d'Ampère stipule que :

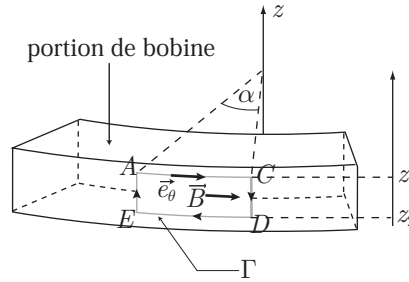
$$C_1 = \oint_{\mathcal{L}_1} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 N I \Rightarrow 2\pi r \times B(r, z) = \mu_0 N I$$

$$\Rightarrow \vec{B}(r, z) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \text{ pour } r_1 < r < r_2$$

- La surface circonscrite par \mathcal{L}_3 est traversée par N courants dans un même sens, et autant de courants, de même intensité, dans le sens contraire ; la résultante algébrique de ces courants étant nulle, le théorème d'Ampère devient :

$$C_3 = \oint_{\mathcal{L}_3} \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow 2\pi r \times B(r, z) = 0 \Rightarrow \vec{B}(r, z) = \vec{0} \text{ pour } r > r_2$$

3. Définissons, à l'intérieur de la bobine torique, un contour Γ de côtés AE , DC parallèles à Oz et tel que les côtés AC et ED soient des arcs de cercle de rayon r , centrés sur Oz .



La circulation \mathcal{C} du champ magnétique le long de Γ est définie par :

$$\mathcal{C} = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{r} + \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{r}$$

Or, étant donné que $\vec{B} = B(r, z) \vec{e}_\theta$, il convient de distinguer plusieurs cas :

- Sur CD et EA , un élément du parcours s'écrit : $d\vec{r} = dz \vec{k}$, auquel cas : $\vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$, ce qui a pour conséquence :

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{r} = 0$$

- Sur AC et DE , les éléments de parcours s'écrivent $d\vec{r} = r d\theta \vec{e}_\theta$, où l'angle θ varie de 0 à α pour AC et de α à 0 pour DE (α désignant l'angle des arcs \widehat{AC} et \widehat{ED} , depuis l'axe Oz). C'est pourquoi :

$$\int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_0^\alpha B(r, z_1) r d\theta = B(r, z_1) \times \alpha r$$

tandis que :

$$\int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_\alpha^0 B(r, z_2) r d\theta = -B(r, z_2) \times \alpha r$$

De cette étude, ressort l'expression de \mathcal{C} :

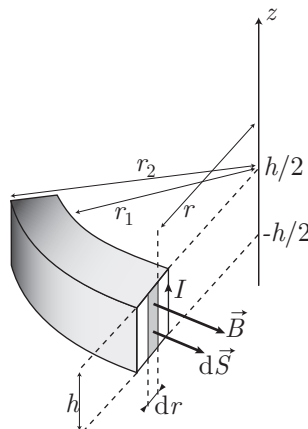
$$\mathcal{C} = \oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = [B(r, z_1) - B(r, z_2)] \times \alpha r$$

Or, la surface circonscrite à l'intérieur de Γ n'est traversée par aucun courant, ce qui donne au théorème d'Ampère la forme suivante :

$$\oint_\Gamma \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow B(r, z_1) = B(r, z_2)$$

et, puisque cette égalité doit être vérifiée pour tout couple $\{z_1, z_2\}$ de l'intérieur de la bobine, elle révèle l'indépendance de B à l'égard de z , à l'intérieur de la bobine.

Soit maintenant une spire rectangulaire \mathcal{S} située entre les cotes $z = \frac{h}{2}$ et $z = -\frac{h}{2}$ et entre les rayons $r = r_1$ et $r = r_2$.



Découpons la surface de cette spire en bandes de hauteur h et de largeur dr (donc de surface $dS = h dr$) à travers lesquelles le flux du champ magnétique vaut :

$$\begin{aligned} d\phi &= \vec{B} \cdot d\vec{S} = [B(r) \vec{e}_\theta] \cdot [h dr \vec{e}_\theta] = h B(r) dr \\ &= \frac{\mu_0 N I h}{2\pi r} dr \end{aligned}$$

Le flux total, à travers la spire \mathcal{S} vaut alors :

$$\phi = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

Enfin, puisque la bobine torique est composée de N spires identiques à \mathcal{S} , le flux total du champ magnétique à travers ces spires vaut :

$$\Phi = N \phi \Rightarrow \Phi = LI \text{ avec } L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

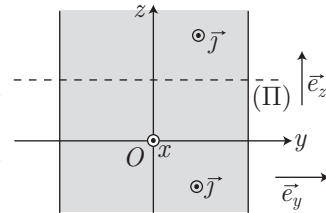
où L est aussi appelé *coefficient d'auto-inductance* de la bobine.

● 272 ————— Concours e3a

1. Tout plan (Π) parallèle à (Ox, Oy) est un plan de symétrie pour la distribution de courant, en conséquence de quoi \vec{B} est perpendiculaire à (Π) et est donc colinéaire à l'axe (Oz) .

$$\vec{B} = B \vec{e}_z$$

En outre, une translation de la nappe de courant dans la direction de (Oz) ou de (Ox) laisse invariante la distribution, ce qui signifie que \vec{B} ne peut pas dépendre de x ou de z . C'est pourquoi :



$$\vec{B} = B(y) \vec{e}_z$$

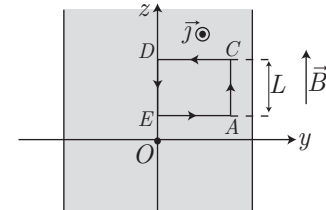
Le plan (Ox, Oz) est également plan de symétrie pour la distribution de courant, ce qui révèle que sur ce plan : $\vec{B}(y=0) \perp \vec{e}_x$ et $\vec{B}(y=0) \perp \vec{e}_z$. Ce faisant, puisque $\vec{B} = B(y) \vec{e}_z$:

$$\vec{B}(y=0) \perp \vec{e}_z \Rightarrow B(y=0) \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 0 \Rightarrow B(y=0) = 0 \quad (93)$$

2. Définissons un contour C_1 par un rectangle $(ACDE)$, dont les côtés AC et DE sont parallèles à Oz (le côté DE se trouvant sur cet axe). Le sens de déplacement sur ce parcours $(A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E)$ est défini à l'aide de la main droite : le pouce étant orienté comme \vec{j} , les autres doigts tournent dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Ce faisant, la circulation de \vec{B} le long de C_1 est définie par :

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$



où :

- le champ \vec{B} est perpendiculaire à tout déplacement $d\vec{\ell}$ le long de CD et de EA , auquel cas :

$$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

- le segment DE se trouve sur l'axe Oz , c'est-à-dire à l'ordonnée $y = 0$, pour laquelle le résultat (93) établit que :

$$\vec{B}(y=0) = \vec{0} \Rightarrow \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

- sur le segment AC , $\vec{B} = B(y) \vec{e}_z$ demeure uniforme et colinéaire à tout déplacement $d\vec{\ell}$. Aussi :

$$\int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \vec{B} \cdot \int_A^C d\vec{\ell} = \vec{B} \cdot \vec{AC} = B(y) \times L \text{ car } \|\vec{AC}\| = L$$

Finalement, cette circulation vaut :

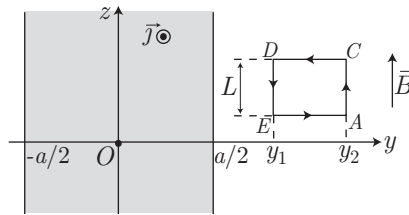
$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B(y) \times L$$

En outre, la surface $S = AE \times AC = y \times L$, circonscrite dans C_1 , est traversée par un courant $I_{\text{int}} = J_0 \times S$, où J_0 désigne la densité de courant uniforme. Par suite, l'application du théorème d'Ampère fournit :

$$\oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow B(y) \times L = \mu_0 J_0 y L \Rightarrow B(y) = \mu_0 J_0 y \quad (94)$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \mu_0 J_0 y \vec{e}_z \text{ pour } |y| < \frac{a}{2} \quad (95)$$

3. (a) Définissons, de même, un contour C_2 analogue à C_1 , mais à l'extérieur de la distribution de courant, c'est-à-dire dont les ordonnées y_1 et y_2 des côtés ED et AC excèdent, en valeur absolue, $\frac{a}{2}$.



La circulation de \vec{B} le long de C_2 est définie par :

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} + \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

où :

- $\vec{B} = B \vec{e}_z$ est perpendiculaire à chaque déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$ le long des segments CD et DE , auquel cas $\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$ conduit à :

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \text{ et } \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

- $\vec{B} = \vec{B}(y)$ demeure constant sur les portions AC et DE , pour lesquelles y adopte les valeurs y_1 et y_2 . C'est pourquoi :

$$\int_A^C \vec{B}(y_2) \cdot d\vec{\ell} = \vec{B}(y_2) \cdot \int_A^C d\vec{\ell} = \vec{B}(y_2) \cdot \vec{AC} = B(y_2) \times L \text{ car } \vec{AC} = L \vec{e}_z$$

et :

$$\begin{aligned} \int_D^E \vec{B}(y_1) \cdot d\vec{l} &= \vec{B}(y_1) \cdot \int_D^E d\vec{l} = \vec{B}(y_1) \cdot \overrightarrow{DE} \\ &= -B(y_1) \times L \text{ car } \overrightarrow{DE} = -L \vec{e}_z \end{aligned}$$

Finalement, il reste :

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = [B(y_2) - B(y_1)] \times L$$

et, puisque la surface délimitée par C_2 n'est traversée par aucun courant, le théorème d'Ampère devient :

$$\oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \Rightarrow B(y_2) = B(y_1)$$

Cette identité devant être respectée pour toute valeur de y_1 et y_2 telles que $y_1 > \left|\frac{a}{2}\right|$ et $y_2 > \left|\frac{a}{2}\right|$, il s'ensuit que :

$$\vec{B}(y) = B_0 \times \vec{e}_z = c\vec{t}\vec{e} \forall y / |y| > \left|\frac{a}{2}\right| \quad (96)$$

- (b) Considérons désormais un contour C_3 , orienté comme C_1 et C_2 , mais dont les côtés AC et ED sont aux ordonnées respectives $\frac{a}{2} + \varepsilon$ et $\frac{a}{2} - \varepsilon$ (avec $\varepsilon \ll a$).

Les calculs précédents permettent de montrer que :

$$\int_C^D \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 \text{ et } \int_E^A \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

tandis que sur les segments AC et DE , le champ magnétique se présente sous les formes respectives $\vec{B}\left(\frac{a}{2} + \varepsilon\right)$ et $\vec{B}\left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right)$. C'est pourquoi :

$$\int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B}\left(\frac{a}{2} + \varepsilon\right) \cdot \int_A^C d\vec{l} = \vec{B}\left(\frac{a}{2} + \varepsilon\right) \cdot \overrightarrow{AC} = B\left(\frac{a}{2} + \varepsilon\right) \times L$$

et :

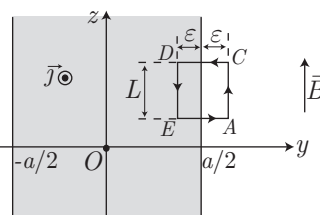
$$\int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{l} = \vec{B}\left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \cdot \int_D^E d\vec{l} = \vec{B}\left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \cdot \overrightarrow{DE} = -B\left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \times L$$

De ces expressions ressort celle de la circulation de \vec{B} le long de C_3 :

$$\oint_{(C_3)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \left[B\left(\frac{a}{2} + \varepsilon\right) - B\left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \right] \times L$$

En outre, seule la surface $S' = \varepsilon L$, contenue dans C_3 , est traversée par un courant dont l'intensité vaut par conséquent :

$$I_{\text{int}} = J_0 S' = J_0 \varepsilon L$$



Le théorème d'Ampère stipule alors que :

$$\begin{aligned} \oint_{(C_3)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} &= \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow B\left(\frac{a}{2} + \varepsilon\right) - B\left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) = J_0 \varepsilon \\ &\Rightarrow B\left(\frac{a}{2} + \varepsilon\right) = B\left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) + J_0 \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui permet de remarquer que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[B\left(\frac{a}{2} + \varepsilon\right) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[B\left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \right] \quad (97)$$

et de s'assurer ainsi de la continuité de la fonction $B(y)$ au voisinage de $y = \frac{a}{2}$ (évidemment, un raisonnement analogue conduirait à la même conclusion au voisinage de $-\frac{a}{2}$).

(c) En utilisant les résultats (95) et (96), l'équation précédente s'écrit :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [B_0] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\mu_0 J \times \left(\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \right] \Rightarrow B_0 = \frac{\mu_0 J a}{2} \quad (98)$$

$$\Rightarrow \vec{B}\left(y > \frac{a}{2}\right) = B_0 \vec{e}_z = \frac{\mu_0 J a}{2} \vec{e}_z \quad (99)$$

De même, lorsque $y < -\frac{a}{2}$, l'uniformité du champ magnétique :

$$\vec{B}\left(y < -\frac{a}{2}\right) = B'_0 \vec{e}_z$$

associée aux identités (95) et (97), permet de conclure que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[B\left(-\frac{a}{2} - \varepsilon\right) \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[B\left(-\frac{a}{2} + \varepsilon\right) \right] \quad (100)$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [B'_0] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\mu_0 J \times \left(-\frac{a}{2} + \varepsilon\right) \right] \quad (101)$$

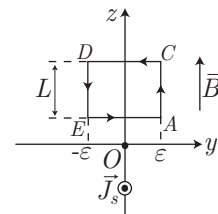
$$\Rightarrow B'_0 = -\frac{\mu_0 J a}{2} \quad (102)$$

$$\Rightarrow \vec{B}\left(y < -\frac{a}{2}\right) = -\frac{\mu_0 J a}{2} \vec{e}_z \quad (103)$$

4. Lorsque a tend vers zéro, les résultats (99) et (103) deviennent :

$$\vec{B}(y > 0) = \frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{e}_z \text{ et } \vec{B}(y < 0) = -\frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{e}_z \text{ avec } J_s = J_0 a \quad (104)$$

Cette configuration équivaut à un plan (Ox, Oz) parcouru par un courant de densité J_s , ce qui signifie que dans un segment vertical, de longueur L , circule un courant $I_L = J_s L$. Définissons un parcours C_4 , orienté comme C_1 , dont les côtés AC et DE se trouvent aux ordonnées respectives $y_1 = \varepsilon$ et $y_2 = -\varepsilon$. Le long des segments CD et EA , tout déplacement $d\vec{\ell}$ est perpendiculaire à $\vec{B} = B \vec{e}_z$, en conséquence de quoi :



$$\vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

En revanche, sur les segments AC et DE , le champ magnétique est uniforme et prend les valeurs respectives $\vec{B}(\varepsilon)$ et $\vec{B}(-\varepsilon)$. Par suite :

$$\int_A^C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \vec{B}(\varepsilon) \cdot \int_A^C d\vec{\ell} = \vec{B}(\varepsilon) \cdot \overrightarrow{AC} = B(\varepsilon) \times L \text{ car } \overrightarrow{AC} = L \vec{e}_z$$

et :

$$\int_D^E \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \vec{B}(-\varepsilon) \cdot \int_D^E d\vec{\ell} = \vec{B}(-\varepsilon) \cdot \overrightarrow{DE} = -B(-\varepsilon) \times L \text{ car } \overrightarrow{DE} = -L \vec{e}_z$$

Aussi, la circulation de \vec{B} le long de C_4 vaut :

$$\oint_{C_4} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = [B(\varepsilon) - B(-\varepsilon)] \times L$$

auquel cas le théorème d'Ampère stipule que :

$$\begin{aligned} \oint_{(C_4)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_L &\Rightarrow [B(\varepsilon) - B(-\varepsilon)] \times L = \mu_0 J_s L \\ &\Rightarrow [B(\varepsilon) - B(-\varepsilon)] \vec{e}_z = \mu_0 J_s \vec{e}_z \end{aligned}$$

soit encore, étant donné que $\vec{B}(y) = B(y) \vec{e}_z$:

$$\vec{B}(\varepsilon) - \vec{B}(-\varepsilon) = \mu_0 J_s \vec{e}_z$$

Notamment, lorsque ε tend vers zéro, cette identité devient :

$$\vec{B}(0^+) - \vec{B}(0^-) = \mu_0 J_s \vec{e}_z$$

Quant aux résultats (104), ils conduisent à :

$$\vec{B}(y > 0) = \frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{e}_z \Rightarrow \vec{B}(0^+) = \frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{e}_z$$

et :

$$\vec{B}(y < 0) = -\frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{e}_z \Rightarrow \vec{B}(0^-) = -\frac{\mu_0 J_s}{2} \vec{e}_z$$

et confirment par conséquent le résultat précédent :

$$\vec{B}(0^+) - \vec{B}(0^-) = \mu_0 J_s \vec{e}_z$$

Partie 3

Chimie

Chapitre 8

Cinétique chimique

8.1 Paramètres d'un système chimique

8.1.1 Paramètres intensifs et extensifs

Définition 1 *Un paramètre intensif est une variable qui décrit le système en chacun de ses points ; par exemple, la température, la pression, la concentration, la masse volumique,...*

Les paramètres intensifs ne sont pas additifs : le mélange de deux litres de solutions d'acide chlorhydrique à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ne constitue pas une solution d'acide à $2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$!

Parmi les paramètres intensifs, on rencontrera souvent :

- **la concentration** $[X_i]$ d'une espèce X_i dans un mélange : si n_i désigne la quantité de X_i (en moles) dissoute dans un volume V (en litres) d'un mélange, la concentration de X_i est définie par :

$$[X_i] = \frac{n_i}{V} \text{ (en mol} \cdot \text{L}^{-1}\text{)}$$

⚠ La concentration d'un corps pur (l'eau, les solvants en général ou les solides) n'a aucun sens en chimie.

- **la fraction molaire** x_i d'une espèce X_i dans un mélange : si n_i désigne la quantité de X_i (en moles) dans un mélange qui contient une quantité totale n (en moles) d'espèces chimiques, la fraction molaire x_i s'exprime par le rapport :

$$x_i = \frac{n_i}{n} \text{ (sans unité).}$$

- **la pression** d'un gaz (parfait) : une quantité n (en moles) de gaz, occupant un volume V (en m^3), à une température T (en kelvins, K), présente une pression p (en pascals, Pa) donnée par :

$$pV = nRT$$

où $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ est la constante molaire des gaz parfaits.

⚠ La pression correspondant à un mélange de gaz parfaits, de natures différentes (par exemple l'air) ne tient pas compte de la nature de ses constituants individuellement.

- la **pression partielle** p_i d'un gaz X_i (par exemple $O_{2(gaz)}$) contenu dans un mélange de gaz (par exemple l'air). Cette pression partielle est définie comme la pression qu'aurait X_i s'il occupait seul le volume V à la température T :

$$p_i = \frac{n_i RT}{V} \text{ avec } n_i = n(X_i) \text{ (en moles).}$$

Si p représente la pression totale du mélange de gaz, la pression partielle p_i s'exprime aussi par :

$$p_i = x_i \times p = \frac{n_i}{n} \times p$$

Définition 2 *Un paramètre extensif est un paramètre que l'on ne peut mesurer que dans un volume non nul d'un système (par exemple, la quantité de matière, la masse, le volume,...)*

Les paramètres extensifs sont généralement additifs (le mélange de deux systèmes contenant chacun un gramme de chlorure de sodium réalise un nouveau système qui contient 2 grammes de chlorure de sodium), sauf lorsque des interactions chimiques ou des changements d'état se produisent.

Définition 3 *Une phase est un système (ou une partie d'un système) dans lequel les paramètres intensifs ne subissent aucune discontinuité.*

Par exemple une solution aqueuse de chlorure de sodium est une phase, tandis qu'une émulsion (telle que la vinaigrette) ne peut en être une, puisque la masse volumique y varie brusquement d'un point à l'autre.

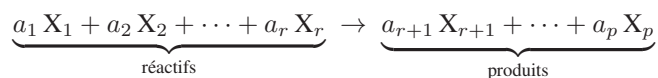
8.1.2 Modélisation de la réaction chimique

Une réaction chimique fait apparaître :

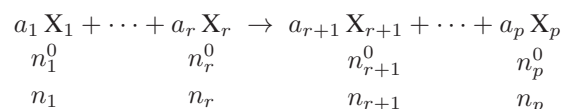
- des réactifs, représentés par leurs formules chimiques ($X_{i \in \{1, \dots, r\}}$), qui vont réagir entre eux ;
- des produits, également représentés par leurs formules ($X_{i \in \{r+1, \dots, p\}}$), formés à l'issue de la réaction ;
- des coefficients stœchiométriques a_i qui indiquent dans quelles proportions les réactifs réagissent et dans quelles proportions les produits se forment.

⚠ Les coefficients stœchiométriques n'ont aucune influence sur la composition initiale d'un milieu réactionnel, laquelle est laissée au libre arbitre de l'expérimentateur.

- une flèche qui indique le sens dans lequel se déroule la réaction : \rightarrow si la réaction est totale (elle se réalise jusqu'à épuisement d'un des réactifs), ou \rightleftharpoons si la réaction est un équilibre (en fin de réaction, aucun réactif n'a totalement disparu).



Le bilan d'une réaction chimique peut s'opérer sur des quantités de matière (n_i^0 désignant les nombres initiaux de moles et n_i les nombres de moles à toute date) :



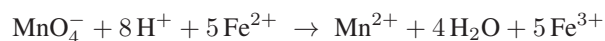
L'évolution de ces quantités de matière est caractérisée par un unique paramètre, appelé *avancement de la réaction* ξ (en moles), tel que :

$$\begin{cases} n_i = n_i^0 - a_i \times \xi & \text{pour les réactifs} \\ n_i = n_i^0 + a_i \times \xi & \text{pour les produits} \end{cases}$$

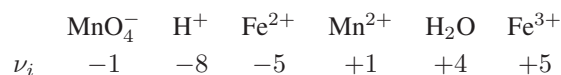
Afin de s'affranchir de la distinction entre produits et réactifs, on introduit des *coefficients stœchiométriques algébriques* :

$$\nu_i = -a_i \text{ pour les réactifs et } \nu_i = +a_i \text{ pour les produits.}$$

Par exemple, pour la réaction d'équation-bilan :



les coefficients stœchiométriques algébriques valent :



Ce faisant, l'évolution des systèmes chimiques est décrite par la relation :


$$n_i = n_i^0 + \nu_i \times \xi \quad (1)$$

Remarque – Il est également possible de décrire l'évolution d'une réaction chimique à l'aide des concentrations $[X_i]$, à condition que :

- le volume du mélange réactionnel ne varie pas au cours de la réaction ;
- les phases pures (solides) ou les solvants ne sont pas représentés dans le bilan.

$$[X_i] = [X_i]_{t=0} + \nu_i \times \chi$$

χ désigne alors l'avancement molaire volumique (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) de la réaction.

 On s'intéresse à la réaction, en phase gazeuse, du diazote sur le dihydrogène, qui conduit à la formation d'ammoniac NH_3 . Pour cela, on introduit dans un réacteur thermostaté (température T_0 constante) et de volume invariable V_0 , une quantité n_1 (en moles) de $\text{N}_{2(\text{gaz})}$ et $2n_1$ moles de $\text{H}_{2(\text{gaz})}$; la pression initiale du milieu réactionnel vaut p_0 .

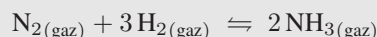
1. Si la réaction est totale, elle s'écrit :



- (a) À l'aide de l'avancement ξ de la réaction, déterminer le réactif en défaut et donner la composition finale du système.
 (b) En déduire que la pression du milieu réactionnel vaut, en fin de réaction :

$$p = 0,56 \times p_0$$

2. On considère maintenant que la réaction n'est plus totale :



(a) Montrer, en utilisant l'avancement ξ , que :

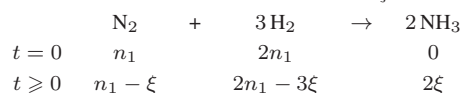
$$\frac{5}{9} \leq \frac{p}{p_0} \leq 1$$

(b) Quelle doit être la valeur de $\frac{p}{p_0}$ pour que les nombres de moles n_{N_2} et n_{H_2} de N_2 et de H_2 soient égaux ?

Décrire alors la composition du mélange réactionnel en fonction de n_1 .

RÉPONSE

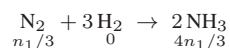
1. (a) Le bilan molaire de la réaction s'obtient à l'aide de l'avancement ξ :



Cette réaction étant totale, elle cesse pour la plus petite valeur de ξ annulant la quantité d'un des réactifs, c'est-à-dire :

$$n_1 - \xi_1 = 0 \Rightarrow \xi_1 = n_1 \text{ ou } 2n_1 - 3\xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_2 = \frac{2n_1}{3} < \xi_1$$

Ce résultat montre que le réactif en défaut est l'hydrogène, puisqu'en fin de réaction, ξ atteint la valeur ξ_2 , auquel cas le bilan final de la réaction s'écrit :



(b) De la question précédente, ressort le nombre total n de moles de gaz présent dans le milieu réactionnel en fin de réaction :

$$n = \frac{n_1}{3} + \frac{4n_1}{3} = \frac{5n_1}{3}$$

auquel cas la pression p prend une valeur p , soumise à l'équation d'état des gaz parfaits :

$$pV_0 = nRT_0 = \frac{5n_1}{3} RT_0 \Rightarrow p = \frac{5n_1}{3} \times \frac{RT_0}{V_0}$$

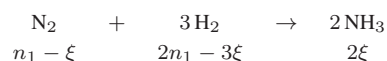
Or, initialement, le milieu réactionnel contenait $n_0 = n_1 + 2n_1 = 3n_1$ moles de gaz, lui conférant la pression p_0 telle que :

$$p_0V_0 = n_0RT_0 = 3n_1RT_0 \Rightarrow \frac{RT_0}{V_0} = \frac{p_0}{3n_1} \quad (2)$$

d'où il ressort que :

$$p = \frac{5n_1}{3} \times \frac{p_0}{3n_1} \Rightarrow p = \frac{5}{9} \times p_0 \simeq 0,56 \times p_0$$

2. (a) À nouveau, l'avancement ξ permet d'étudier l'évolution de la réaction qui n'est pas totale :



ce qui révèle qu'à une date $t \geq 0$, le milieu réactionnel est composé de n moles de gaz, tel que :

$$n = (n_1 - \xi) + (2n_1 - 3\xi) + 2\xi \Rightarrow n = 3n_1 - 2\xi$$

et dont la pression p respecte l'équation d'état des gaz parfaits :

$$pV_0 = nRT_0 \Rightarrow p = \frac{RT_0}{V_0} \times (3n_1 - 2\xi)$$

soit, compte tenu de l'identité (2)

$$p_0 = \frac{RT_0}{V_0} \times 3n_1 \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \frac{3n_1 - 2\xi}{3n_1} \Rightarrow \frac{p}{p_0} = 1 - \frac{2\xi}{3n_1} \quad (3)$$

Or, H_2 étant le réactif en défaut, sa quantité n_{H_2} doit varier entre $2n_1$ et 0 :

$$\begin{aligned} 0 \leq n_{\text{H}_2} \leq 2n_1 &\Rightarrow 0 \leq 2n_1 - 3\xi \leq 2n_1 \Rightarrow \frac{2n_1}{3} \leq -\xi \leq 0 \\ &\Rightarrow -\frac{4n_1}{9n_1} \leq \frac{-2\xi}{3n_1} \leq 0 \Rightarrow 1 - \frac{4}{9} \leq 1 - \frac{2\xi}{3n_1} \leq 1 \end{aligned}$$

où l'identité (3) conduit à :

$$\frac{5}{9} \leq \frac{p}{p_0} \leq 1$$

- (b) Les quantités de diazote ($n_{\text{N}_2} = n_1 - \xi$) et de dihydrogène ($n_{\text{H}_2} = 2n_1 - 3\xi$) sont égales pour une valeur ξ_0 de ξ qui assure :

$$n_1 - \xi_0 = 2n_1 - 3\xi_0 \Rightarrow 2\xi_0 = n_1 \Rightarrow \xi_0 = \frac{n_1}{2}$$

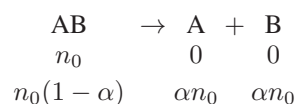
Dans ces conditions, la composition du mélange réactionnel est décrite par les quantités de chacune des espèces qui le composent :

$$n_{\text{N}_2} = n_1 - \xi_0 = n_1 - \frac{n_1}{2} = \frac{n_1}{2} = n_{\text{H}_2} \text{ et } n_{\text{NH}_3} = 2\xi_0 = n_1$$

Définition 4 Lorsqu'un réactif AB peut se dissocier en A et B , on définit le coefficient de dissociation α de cette réaction comme le rapport de la quantité n_{dis} de AB dissocié, par la quantité initiale n_0 de AB introduit dans le milieu réactionnel :

$$\alpha = \frac{n_{\text{dis}}}{n_0}$$

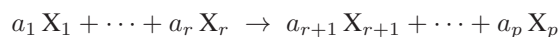
On peut montrer que le bilan d'une telle dissociation peut être décrit par α :



8.2 Évolution des systèmes chimiques

8.2.1 Définitions

L'ensemble des définitions portera sur une réaction :



où la composition du milieu réactionnel (c'est-à-dire les nombres de moles n_i de chacun de ses constituants X_i) dépend de l'avancement ξ de la réaction et des coefficients stœchiométriques algébriques ν_i :

$$n_i = n_i^0 + \nu_i \xi \Rightarrow \frac{dn_i}{dt} = \nu_i \frac{d\xi}{dt}$$

Définition 5 La vitesse v de la réaction, qui s'effectue dans un réacteur de volume constant, est définie par :

$$v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} \text{ (en mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}\text{)} \quad (4)$$

Cette grandeur caractérise l'évolution globale de la réaction, indépendamment des coefficients stœchiométriques qui interviennent dans son équation-bilan.

Définition 6 La vitesse d'apparition v_i d'une espèce X_i est donnée par :

$$v_i = \frac{d[X_i]}{dt} = \nu_i \times v \text{ (pour l'apparition)} \quad (5)$$

tandis que sa vitesse de disparition vaut :

$$v'_i = -\frac{d[X_i]}{dt} = -\nu_i \times v \text{ (pour la disparition).}$$

Définition 7 S'il existe des coefficients α_i et une constante k permettant d'écrire la vitesse de la réaction sous la forme :

$$v = k [X_1]^{\alpha_1} \times \dots \times [X_p]^{\alpha_p} = k \times \prod_{i=1}^p [X_i]^{\alpha_i}$$

ces coefficients sont appelés ordres partiels par rapport à chaque espèce X_i , et leur somme constitue l'ordre global de la réaction :

$$\text{ordre global} = \sum_{i=1}^p \alpha_i$$

Définition 8 On dit d'une réaction qu'elle respecte le critère de Van't Hoff si :

- les ordres partiels par rapport aux réactifs s'identifient à leurs coefficients stœchiométriques ($\alpha_i = a_i$ pour $i \in [1, r]$);
- les ordres partiels par rapport aux produits sont tous nuls : $\alpha_i = 0$ pour $\alpha_i \in [r + 1, p]$.

La vitesse de la réaction s'écrit alors :

$$v = k \times \prod_{i=1}^r [\text{X}_i]^{a_i}$$

Définition 9 La constante k , appelée constante de vitesse, dépend de la température conformément à la loi d'Arrhénius :

$$k = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$

où A est une constante spécifique à chaque réaction (facteur pré-exponentiel), R la constante molaire des gaz parfaits et E_a une constante appelée énergie d'activation (en $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$), caractéristique de la réaction.

Lorsqu'un réactif (par exemple X_j) est introduit en très faible quantité par rapport aux autres réactifs intervenant dans une réaction qui respecte le critère de Van't Hoff, les concentrations de ces derniers peuvent être considérées comme constamment égales à leurs valeurs initiales $[\text{X}_{i \neq j}]_0$, auquel cas la vitesse de la réaction devient :

$$v = k_{\text{app}} \times [\text{X}_j]^{a_j} \text{ avec } k_{\text{app}} = k \prod_{i \neq j} [\text{X}_i]_0^{a_i}$$

où k_{app} est appelée constante apparente. L'ordre global de la réaction ne vaut alors que a_j ; on dit qu'il y a *dégénérescence de l'ordre*.



La dégénérescence de l'ordre d'une réaction est fréquemment employée lors de l'étude de la loi cinétique d'une réaction. Cette méthode permet de traiter la réaction comme si sa vitesse ne dépendait que de la concentration d'un seul réactif.

Définition 10 Au cours d'une réaction, les concentrations $[\text{X}_i](t)$ des réactifs décroissent par rapport à leurs valeurs initiales $[\text{X}_i]_0$. On appelle temps de demi-réaction la date τ à laquelle la concentration du réactif introduit initialement en défaut a diminué de moitié :

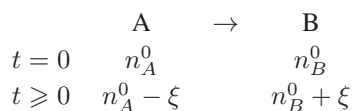
$$[\text{X}_k](\tau) = \frac{1}{2} [\text{X}_k]_0 \text{ avec } [\text{X}_k]_0 = \inf \{[\text{X}_i]_0\}_{i=1 \dots r}$$

8.2.2 Lois de vitesse

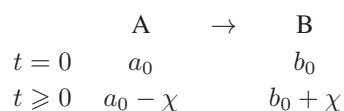
Dans cette partie, on ne s'intéressera qu'aux réactions supposées vérifier le critère de Van't Hoff.

8.2.2.1 Réactions d'ordre 1

Il s'agit de réactions dont le bilan :



peut également s'obtenir à l'aide des concentrations (en posant $\chi = \frac{\xi}{V}$) :



Bien que l'étude des concentrations $[A]$ et $[B]$, au cours du temps, peut se mener de deux manières différentes, il convient de respecter une succession d'étapes :

- écrire la définition de la vitesse v de la réaction à l'aide des ordres partiels connus ;
- déduire de la définition d'apparition (ou de disparition) d'une espèce, en fonction de v , une équation différentielle faisant intervenir soit χ , soit la concentration de cette espèce ;
- résoudre cette équation différentielle, si elle ne présente qu'un seul paramètre inconnu et le temps t .

Le développement de ces trois points fait l'objet des études suivantes :

Première méthode

Étant donné que la réaction d'équation : $A \rightarrow B$ suit le critère de Van't Hoff, sa vitesse globale est donnée par : $v = k \times [A]$. Quant à la vitesse d'apparition de A, elle suit la définition (5) :

$$v_A = \frac{d[A]}{dt} = \nu_A \times v \Rightarrow \frac{d[A]}{dt} = -k [A] \text{ car } \nu_A = -1 \Rightarrow \frac{d[A]}{[A]} = -k dt$$

Remarque – Il est possible de résoudre cette équation différentielle étant donné que $[A]$ est le seul paramètre inconnu ; si deux concentrations indéterminées étaient apparues, il aurait fallu rejeter cette méthode.

Sachant qu'à la date $t = 0$, $[A] = a_0$, l'intégration de cette équation mène à :

$$\int_{a_0}^{[A]} \frac{d[A]}{[A]} = -k \int_0^t dt \Rightarrow \ln \left(\frac{[A]}{a_0} \right) = -kt \Rightarrow [A] = a_0 e^{-kt}$$

Enfin, la connaissance de $[A]$, c'est-à-dire celle de $v = k [A]$, conduit à la détermination de $[B]$, dont la vitesse d'apparition suit également la définition (5) :

$$\begin{aligned} v_B = \frac{d[B]}{dt} = \nu_B \times v &\Rightarrow \frac{d[B]}{dt} = k [A] = ka_0 e^{-kt} \text{ car } \nu_B = 1 \\ &\Rightarrow d[B] = ka_0 \times e^{-kt} dt \end{aligned}$$

dont l'intégration doit tenir compte de la valeur initiale b_0 de $[B]$:

$$\int_{b_0}^{[B]} d[B] = ka_0 \int_0^t e^{-kt} dt \Rightarrow [B] - b_0 = a_0 [-e^{-kt}]_0^t$$

$$\Rightarrow [B] = b_0 + a_0 \times (1 - e^{-kt})$$

Seconde méthode

Si le volume du milieu réactionnel demeure constant, la définition (4) de la vitesse de la réaction s'écrit :

$$v = \frac{1}{V} \frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\xi}{V} \right) = \frac{d\chi}{dt} \text{ car } \chi = \frac{\xi}{V}$$

et devient, pour une réaction d'ordre 1 :

$$v = k[A] \Rightarrow \frac{d\chi}{dt} = k[A]$$

où : $[A] = a_0 - \chi$, d'après le bilan de la réaction. Il s'ensuit que :

$$\frac{d\chi}{dt} = k(a_0 - \chi) \Rightarrow \frac{d\chi}{a_0 - \chi} = k dt$$

et, puisque $\chi = 0$ à la date $t = 0$, l'intégration de cette équation conduit à :

$$\int_0^\chi \frac{d\chi}{a_0 - \chi} = k \int_0^t dt \Rightarrow [-\ln(a_0 - \chi)]_0^\chi = kt \Rightarrow \ln \left(\frac{a_0 - \chi}{a_0} \right) = -kt$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{\chi}{a_0} = e^{-kt}$$

d'où l'on déduit que :

$$\chi = a_0 \times (1 - e^{-kt})$$

Ce faisant, à l'aide du bilan de la réaction, on obtient simultanément les concentrations $[A] = a_0 - \chi$ et $[B] = b_0 + \chi$:

$$[A] = a_0 \times e^{-kt} \text{ et } [B] = b_0 + a_0 \times (1 - e^{-kt})$$

Temps de demi-réaction

Par définition, il s'agit de la date $t = \tau$ à laquelle $[A]$ vaut $\frac{a_0}{2}$, c'est-à-dire, compte tenu des résultats précédents :

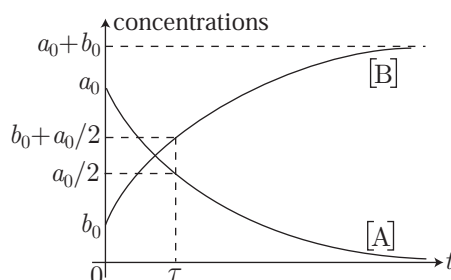
$$\frac{a_0}{2} = a_0 e^{-k\tau} \Rightarrow e^{-k\tau} = \frac{1}{2} \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{k}$$

Représentation graphique

La connaissance des expressions de $[A]$ et de $[B]$ permet de prédire que :

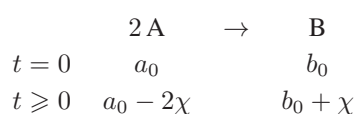
$$\lim_{t \rightarrow \infty} [A] = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} [B] = b_0 + a_0$$

ce qui donne l'allure des courbes décrivant $[A]$ et $[B]$ en fonction du temps :



8.2.2.2 Réactions d'ordre 2

On considère une réaction d'équation : $2A \rightarrow B$, dont le bilan (des concentrations) s'écrit :



Si la réaction respecte le critère de Van't Hoff, sa vitesse globale est donnée par :

$$v = k [A]^2$$

tandis que la vitesse d'apparition de A est définie par :

$$\begin{aligned}
 v_A = \frac{d[A]}{dt} = \nu_A \times v &\Rightarrow \frac{d[A]}{dt} = -2k [A]^2 \text{ car } \nu_A = -2 \\
 &\Rightarrow -\frac{d[A]}{[A]^2} = 2k dt
 \end{aligned}$$

Connaissant la concentration initiale a_0 de A, l'intégration de cette équation fournit :

$$\int_{a_0}^{[A]} -\frac{d[A]}{[A]^2} = 2k \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{[A]} - \frac{1}{a_0} = 2kt \quad (6)$$

soit encore :

$$\frac{1}{[A]} = \frac{1}{a_0} + 2kt \Rightarrow [A] = \frac{a_0}{1 + 2a_0kt} \quad (7)$$



Il ne serait pas judicieux, à cette étape du calcul, d'utiliser la définition de la vitesse d'apparition de B pour déterminer [B] ; une telle démarche contraindrait à un calcul d'intégrale, souvent source d'erreur :

$$\begin{aligned}
 v_B = \frac{d[B]}{dt} = \nu_B \times v &\Rightarrow \frac{d[B]}{dt} = k [A]^2 = k \times \frac{a_0^2}{(1 + 2a_0kt)^2} \\
 &\Rightarrow \int_{b_0}^{[B]} d[B] = k \times \int_0^t \frac{a_0^2 dt}{(1 + 2a_0kt)^2} \\
 &\Rightarrow [B] - b_0 = \frac{a_0}{2} \left[\frac{-1}{1 + 2a_0kt} \right]_0^t \\
 &\Rightarrow [B] = b_0 + \frac{a_0^2 kt}{1 + 2a_0kt}
 \end{aligned}$$

En revanche, l'utilisation du bilan permet de s'affranchir d'un tel calcul car :

$$\begin{cases} [A] = a_0 - 2\chi \\ [B] = b_0 + \chi \end{cases} \Rightarrow 2[B] + [A] = 2b_0 + a_0 \Rightarrow [B] = b_0 + \frac{1}{2}(a_0 - [A])$$

$$\Rightarrow [B] = b_0 + \frac{a_0^2 kt}{1 + 2a_0 kt}$$

Le temps de demi-réaction τ étant défini par : $[A](\tau) = \frac{a_0}{2}$, l'équation (6) fournit :

$$\frac{2}{a_0} - \frac{1}{a_0} = 2k\tau \Rightarrow \tau = \frac{1}{2ka_0}$$

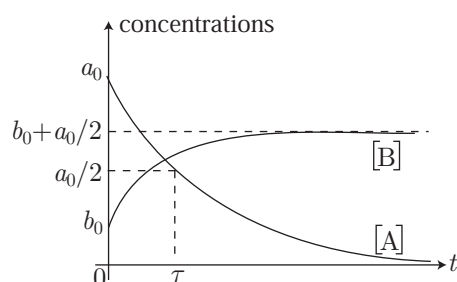
Enfin, les limites :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [A] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{1 + 2a_0 kt} \right) = 0$$

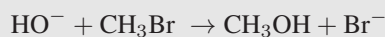
et :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [B] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(b_0 + \frac{a_0^2 kt}{1 + 2a_0 kt} \right) = b_0 + \frac{a_0}{2}$$

mènent à la représentation graphique des concentrations en fonction de t :



La réaction des ions hydroxyde HO^- sur le bromométhane CH_3Br :



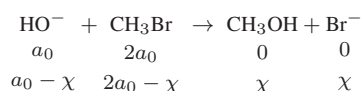
est d'ordre 1 par rapport à chacun de ses réactifs, et se déroule en phase aqueuse homogène de volume constant ; on note k sa constante de vitesse à une température T . La réaction est réalisée avec des concentrations initiales $[\text{HO}^-]_0 = a_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{CH}_3\text{Br}]_0 = 2a_0$.

1. Écrire, en fonction de l'avancement χ (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$), le bilan de cette réaction et en déduire une équation différentielle satisfaite par χ .
2. Résoudre cette équation différentielle et en déduire les expressions de $[\text{HO}^-]$ et de $[\text{CH}_3\text{Br}]$ en fonction du temps t .

3. En calculant $\lim_{t \rightarrow \infty} [\text{HO}^-]$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} [\text{CH}_3\text{Br}]$, représenter graphiquement l'allure des courbes $[\text{HO}^-]$ et $[\text{CH}_3\text{Br}]$ en fonction de t .
4. Les concentrations initiales des réactifs sont multipliées par 2 : $[\text{HO}^-]_0 = a_1 = 2a_0$ et $[\text{CH}_3\text{Br}]_0 = 2a_1$, et l'on opère à la même température. Comparer les temps de demi-réaction des deux expériences.

RÉPONSE

1. Compte tenu des concentrations initiales en réactifs, le bilan de la réaction s'écrit :



La vitesse de la réaction est, quant à elle, définie par :

$$v = \frac{d\chi}{dt} = k [\text{HO}^-] [\text{CH}_3\text{Br}] \Rightarrow \frac{d\chi}{dt} = k (a_0 - \chi) \times (2a_0 - \chi)$$

2. La résolution de cette équation différentielle exige, au préalable, la séparation des variables t et χ :

$$k dt = \frac{d\chi}{(a_0 - \chi)(2a_0 - \chi)} = \left(\frac{d\chi}{a_0 - \chi} - \frac{d\chi}{2a_0 - \chi} \right) \times \frac{1}{a_0}$$

dont l'intégration conduit à :

$$\begin{aligned} a_0 k \int_0^t dt &= \int_0^\chi \frac{d\chi}{a_0 - \chi} - \int_0^\chi \frac{d\chi}{2a_0 - \chi} \Rightarrow a_0 kt = \left[\ln \left(\frac{2a_0 - \chi}{a_0 - \chi} \right) \right]_0^\chi \\ &\Rightarrow a_0 kt = \ln \left(\frac{2a_0 - \chi}{2a_0 - 2\chi} \right) \Rightarrow (2a_0 - 2\chi) e^{a_0 kt} = 2a_0 - \chi \\ &\Rightarrow \chi = 2a_0 \frac{e^{a_0 kt} - 1}{2e^{a_0 kt} - 1} \end{aligned}$$

Ce faisant, les concentrations $[\text{HO}^-]$ et $[\text{CH}_3\text{Br}]$ s'obtiennent aisément :

$$[\text{HO}^-] = a_0 - \chi = a_0 \times \left(1 - \frac{2e^{a_0 kt} - 2}{2e^{a_0 kt} - 1} \right) \Rightarrow [\text{HO}^-] = \frac{a_0}{2e^{a_0 kt} - 1} \quad (8)$$

et :

$$[\text{CH}_3\text{Br}] = 2a_0 - \chi = 2a_0 \left(1 - \frac{e^{a_0 kt} - 1}{2e^{a_0 kt} - 1} \right) \Rightarrow [\text{CH}_3\text{Br}] = \frac{2a_0 e^{a_0 kt}}{2e^{a_0 kt} - 1}$$

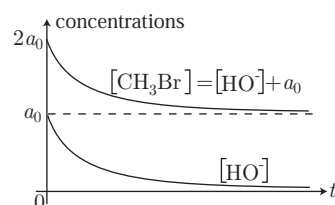
3. Ces expressions sont à l'origine des limites suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\text{HO}^-] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{a_0}{2e^{a_0 kt} - 1} \right) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} [\text{HO}^-] = 0$$

et :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\text{CH}_3\text{Br}] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2a_0 e^{a_0 kt}}{2e^{a_0 kt} - 1} \right) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} [\text{CH}_3\text{Br}] = a_0$$

Ces résultats confirment que HO^- est le réactif introduit en défaut, car la réaction cesse dès que $[\text{HO}^-] = 0$ et $[\text{CH}_3\text{Br}] \neq 0$. En outre, ils conduisent à la représentation graphique ci-dessous :



4. Lorsque la concentration initiale de HO^- (réactif en défaut) vaut a_0 , le temps de demi-réaction τ_0 est défini par : $[\text{HO}^-](\tau_0) = \frac{a_0}{2}$, c'est-à-dire, compte tenu du résultat (8) :

$$\frac{a_0}{2} = \frac{a_0}{2e^{a_0 k \tau_0} - 1} \Rightarrow e^{a_0 k \tau_0} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tau_0 = \frac{1}{ka_0} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

En opérant à la même température (k ne varie alors pas), avec une concentration initiale $[\text{HO}^-]_0 = a_1 = 2a_0$, le temps de demi-réaction τ_1 est également accessible à partir du résultat (8), dans lequel a_1 se substitue à a_0 :

$$\tau_1 = \frac{1}{ka_1} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

Ce faisant, les temps de demi-réaction dépendent de la concentration initiale, étant donné que :

$$\frac{\tau_1}{\tau_0} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{a_0}{2a_0} \Rightarrow \tau_1 = \frac{\tau_0}{2}$$

Remarque – Les résultats précédents révèlent que l'étude de la dépendance du temps de demi-réaction en fonction de la concentration initiale permet de soupçonner l'ordre de la réaction :

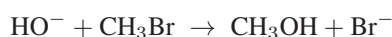
- si τ est indépendant de la concentration initiale, la réaction est vraisemblablement d'ordre 1 ;
- si τ est inversement proportionnel à la concentration initiale ($\tau \propto \frac{1}{a_0}$), la réaction est sûrement d'ordre 2.

8.3 Mécanismes réactionnels

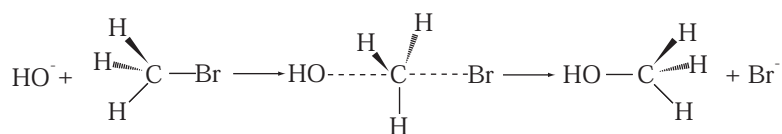
8.3.1 Définitions

Définition 11 Un processus élémentaire est une équation qui rend compte d'une réaction qui se produit à l'échelle microscopique (aucune étape ou espèce chimique n'est occultée).

Par exemple, la réaction des ions hydroxyde HO^- sur le bromométhane :



est un processus élémentaire car les réactifs HO^- et CH_3Br se rencontrent conformément au schéma réactionnel suivant :



Définition 12 On appelle molécularité le nombre de réactifs intervenant dans une équation décrivant une réaction chimique.

Dans l'exemple précédent, la molécularité vaut 2.

Pour qu'un processus soit élémentaire, il doit respecter les conditions suivantes (nécessaires mais pas suffisantes) :

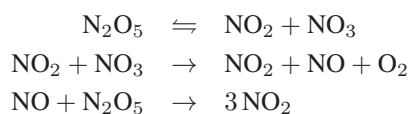
- la molécularité ne peut excéder 2 ;
- le critère de Van't Hoff doit être vérifié.

Définition 13 *Un mécanisme réactionnel est une succession de processus élémentaires qui rend compte d'une réaction complexe.*

Par exemple, la décomposition du pentoxyde de diazote :



n'est pas un processus élémentaire, mais admet comme mécanisme réactionnel :



Définition 14 *Un intermédiaire réactionnel est une entité chimique qui apparaît au cours d'un mécanisme réactionnel, sans figurer dans l'équation-bilan de la réaction (dans l'exemple précédent, NO_3 et NO) sont des intermédiaires réactionnels).*

8.3.2 Étude des réactions successives

Soient A, B et C trois espèces chimiques, impliquées dans des processus élémentaires :



Ces processus doivent respecter le critère de Van't Hoff (puisque'ils sont élémentaires), auquel cas leurs vitesses respectives valent :

$$v_1 = k_1 [\text{A}] \text{ et } v_2 = k_2 [\text{B}]$$

- L'entité A n'étant impliquée que dans la première étape, sa vitesse d'apparition est définie par :

$$\frac{d[\text{A}]}{dt} = -v_1 = -k_1 [\text{A}] \Rightarrow \frac{d[\text{A}]}{[\text{A}]} = -k_1 dt$$

Aussi, en notant a_0 la concentration initiale de A, l'intégration de cette équation fournit :

$$\int_{a_0}^{[\text{A}]} \frac{d[\text{A}]}{[\text{A}]} = -k_1 \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{[\text{A}]}{a_0}\right) = -k_1 t \Rightarrow [\text{A}] = a_0 e^{-k_1 t}$$

- L'espèce B apparaît au cours de la première étape, puis disparaît à l'issue de la seconde. C'est pourquoi sa vitesse d'apparition est définie par :

$$\frac{d[\text{B}]}{dt} = v_1 - v_2 = k_1 [\text{A}] - k_2 [\text{B}] \Rightarrow \frac{d[\text{B}]}{dt} + k_2 [\text{B}] = k_1 [\text{A}] = k_1 a_0 e^{-k_1 t} \quad (9)$$

L'équation différentielle dépourvue de son second membre :

$$\frac{d[\text{B}]_s}{dt} + k_2 [\text{B}]_s = 0$$

est associée à une équation caractéristique : $X + k_2 = 0$, dont la solution : $X = -k_2$ procure l'expression de $[B]_s$ (à une constante α près) :

$$[B]_s = \alpha e^{-k_2 t}$$

En outre, la solution $[B]_h$ homogène au second membre doit se présenter sous la forme suivante (où β est une constante) :

$$[B]_h = \beta e^{-k_1 t} \Rightarrow \frac{d[B]_h}{dt} = -k_1 \beta e^{-k_1 t}$$

Ce faisant, $[B]_h$ doit être solution de l'équation (9) :

$$\beta \times (k_2 - k_1) e^{-k_1 t} = k_1 a_0 e^{-k_1 t} \Rightarrow \beta = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} \Rightarrow [B]_h = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t}$$

Aussi, la solution générale de l'équation différentielle (9) :

$$[B] = [B]_h + [B]_s = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + \alpha e^{-k_2 t}$$

doit être adaptée à la valeur initiale de $[B]$, que l'on suppose nulle :

$$0 = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} + \alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} \Rightarrow [B] = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

- Enfin, l'espèce C n'apparaissant qu'au cours de la deuxième étape, sa vitesse d'apparition est donnée par :

$$\frac{d[C]}{dt} = v_2 = k_2 [B] = \frac{k_1 k_2 a_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$

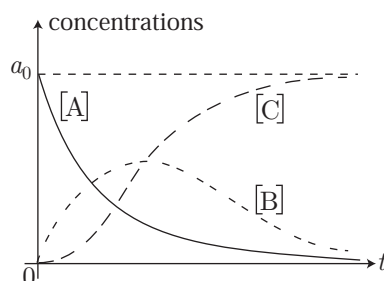
Aussi, en supposant nulle la valeur initiale de $[C]$, cette équation fournit :

$$\begin{aligned} \int_0^{[C]} d[C] &= \frac{k_1 k_2 a_0}{k_2 - k_1} \left(\int_0^t e^{-k_1 t} dt - \int_0^t e^{-k_2 t} dt \right) \\ \Rightarrow [C] &= \frac{k_1 k_2 a_0}{k_2 - k_1} \times \left(\frac{e^{-k_2 t} - 1}{k_2} - \frac{e^{-k_1 t} - 1}{k_1} \right) \end{aligned}$$

soit encore :

$$[C] = a_0 + \frac{a_0}{k_2 - k_1} (k_1 e^{-k_2 t} - k_2 e^{-k_1 t})$$

Les expressions de $[A]$, $[B]$ et $[C]$ ainsi obtenues ont pour représentations graphiques :



8.3.3 Approximation de l'état quasi stationnaire

Dans le cas où la réaction de disparition de [B] (deuxième étape) est beaucoup plus rapide que celle de sa formation ($k_2 \gg k_1$), [B] se comporte comme un intermédiaire réactionnel et on montre que :

$$[A] = a_0 e^{-k_1 t} \quad [B] \simeq \frac{k_1 a_0}{k_2} e^{-k_1 t} \quad [C] \simeq a_0 - a_0 e^{-k_1 t}$$

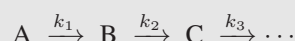
Il s'ensuit que :

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1 [A] - k_2 [B] \Rightarrow \frac{d[B]}{dt} = 0$$

Il s'agit ici de l'approximation de l'état quasi stationnaire (ou principe de Bodenstein), en vertu de laquelle un intermédiaire réactionnel, dont la disparition est beaucoup plus rapide que l'apparition, présente une concentration constante.



On considère la suite de réactions d'ordre 1 :



1. Si la constante k_1 est très inférieure à la constante k_2 , montrer qu'au bout d'un certain temps le rapport $\frac{[B]}{[A]}$ est constant (équilibre séculaire). Exprimer ce rapport en utilisant l'approximation de l'état quasi stationnaire.
2. Calculer, en fonction du temps t , le rapport $\frac{[B]}{[A]}$, en choisissant comme conditions initiales :

$$[A]_{t=0} = a_0 \text{ et } [B]_{t=0} = b_0$$

Montrer que ce calcul confirme le résultat de la question précédente.

RÉPONSE

1. En supposant $k_1 \ll k_2$, on suggère que l'apparition de B est beaucoup plus lente que son apparition ; l'approximation de l'état quasi stationnaire s'applique légitimement sur B, dont la vitesse d'apparition est définie par :

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1 [A] - k_2 [B] = 0 \Rightarrow \frac{[B]}{[A]} = \frac{k_1}{k_2}$$

2. L'espèce A n'intervient qu'au cours du processus $A \xrightarrow{k_1} B$, auquel cas son apparition a pour vitesse :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_1 [A] \Rightarrow \frac{d[A]}{[A]} = -k_1 dt \Rightarrow \int_{a_0}^{[A]} \frac{d[A]}{[A]} = -k_1 \int_0^t dt \Rightarrow [A] = a_0 e^{-k_1 t}$$

En revanche, l'entité B apparaît au cours du processus : $A \xrightarrow{k_1} B$ et disparaît au cours de l'étape : $B \xrightarrow{k_2} C$. C'est pourquoi sa vitesse d'apparition est définie par :

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1 [A] - k_2 [B] \Rightarrow \frac{d[B]}{dt} + k_2 [B] = k_1 [A] = k_1 a_0 e^{-k_1 t} \quad (10)$$

La solution de cette équation différentielle dépourvue de son second membre :

$$\frac{d[B]_s}{dt} + k_2 [B]_s = 0$$

s'obtient à l'aide de l'équation caractéristique : $X + k_2 = 0 \Rightarrow X = -k_2$, d'où il découle que :

$$[B]_s = \alpha e^{Xt} = \alpha e^{-k_2 t}$$

où α est une constante à déterminer ultérieurement.

Quant à la solution homogène au second membre ($k_1 a_0 e^{-k_1 t}$), elle prend la forme :

$$[B]_h = \beta e^{-k_1 t} \Rightarrow \frac{d[B]_h}{dt} = -k_1 \times \beta e^{-k_1 t}$$

et elle est solution de l'équation différentielle (10)

$$\begin{aligned} \frac{d[B]_h}{dt} + k_2 [B]_h &= k_1 a_0 e^{-k_1 t} \Rightarrow (k_2 - k_1) \times \beta e^{-k_1 t} = k_1 a_0 e^{-k_1 t} \Rightarrow \beta = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} \\ &\Rightarrow [B]_h = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} \end{aligned}$$

Finalement, la solution générale de cette équation différentielle :

$$[B] = [B]_h + [B]_s = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + \alpha e^{-k_2 t}$$

comporte une constante α qui doit être adaptée à la condition initiale : $[B]_{t=0} = b_0$, c'est-à-dire :

$$b_0 = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} + \alpha \Rightarrow \alpha = b_0 - \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} \Rightarrow [B] = \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) + b_0 e^{-k_2 t}$$

Ce faisant, il devient possible de calculer le rapport $\frac{[B]}{[A]}$:

$$\begin{aligned} \frac{[B]}{[A]} &= \frac{1}{a_0 e^{-k_1 t}} \times \left[\frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + \left(b_0 - \frac{k_1 a_0}{k_2 - k_1} \right) e^{-k_2 t} \right] \\ &\Rightarrow \frac{[B]}{[A]} = \frac{k_1}{k_2 - k_1} + \left(\frac{b_0}{a_0} - \frac{k_1}{k_2 - k_1} \right) \times e^{(k_1 - k_2)t} \end{aligned}$$

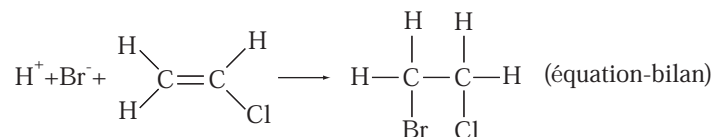
Aussi, lorsque $k_2 \gg k_1$:

$$\frac{[B]}{[A]} \simeq \frac{k_1}{k_2 - k_1} \simeq \frac{k_1}{k_2}$$

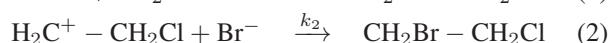
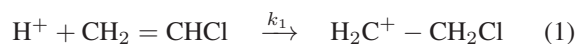
ce qui confirme le résultat de la première question.

8.3.4 Mécanismes en séquence ouverte

Au cours de ces mécanismes (aussi appelé « par stade »), les intermédiaires réactionnels produits au cours d'une étape sont irrémédiablement consommés dans une étape ultérieure. Le développement d'un mécanisme réactionnel permet de trouver la loi de vitesse d'une réaction, à condition de suivre l'algorithme suivant, illustré par la réaction d'hydrobromation du chlorure de vinyle (chloroéthène) :



dont le mécanisme généralement admis est le suivant :



- Dans un premier temps, il convient de définir les vitesses d'apparition (ou de disparition) des réactifs et produits qui interviennent dans l'équation-bilan :

$$\frac{d[\text{H}^+]}{dt} = \frac{d[\text{Br}^-]}{dt} = \frac{d[\text{CH}_2 = \text{CHCl}]}{dt} = -v \text{ et } : \frac{d[\text{CH}_2\text{Br} - \text{CH}_2\text{Cl}]}{dt} = v$$

- Parmi toutes ces expressions, on privilégie celle qui introduit une espèce qui intervient dans le *minimum* d'étapes du mécanisme. Si toutes les espèces interviennent identiquement (ce qui est le cas ici), autant utiliser la définition de la vitesse qui n'introduit pas de signe négatif ; il s'agit alors de l'équation :

$$v = \frac{d[\text{CH}_2\text{Br} - \text{CH}_2\text{Cl}]}{dt}$$

- La vitesse d'apparition de l'entité ainsi sélectionnée est ensuite exprimée à l'aide des étapes du mécanisme réactionnel ; le 1-bromo 1-chloro éthane n'intervient que dans l'étape (2), en conséquence de quoi :

$$\frac{d[\text{CH}_2\text{Br} - \text{CH}_2\text{Cl}]}{dt} = k_2 [\text{H}_2\text{C}^+ - \text{CH}_2\text{Cl}] [\text{Br}^-] = v$$

- Dans l'expression de la vitesse ainsi obtenue, apparaissent souvent des intermédiaires réactionnels, dont la concentration devra être remplacée par celles des seuls produits ou réactifs de l'équation-bilan ; le principe de Bodenstein est généralement employé sur ces intermédiaires (notamment, ici, la première étape est beaucoup plus lente que la seconde et c'est pour cette raison qu'elle est qualifiée d'étape *cinétiquement limitante*) :

$$\frac{d[\text{H}_2\text{C}^+ - \text{CH}_2\text{Cl}]}{dt} = 0 = k_1 [\text{H}^+] [\text{CH}_2 = \text{CHCl}] - k_2 [\text{H}_2\text{C}^+ - \text{CH}_2\text{Cl}] [\text{Br}^-]$$

c'est-à-dire :

$$k_2 [\text{H}_2\text{C}^+ - \text{CH}_2\text{Cl}] [\text{Br}^-] = k_1 [\text{H}^+] [\text{CH}_2 = \text{CHCl}]$$

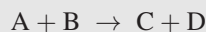
Ce faisant, la loi de vitesse de la réaction s'écrit :

$$v = k_1 [\text{H}^+] [\text{CH}_2 = \text{CHCl}]$$

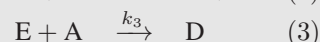
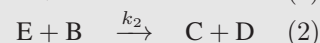
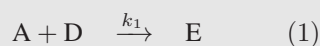
Remarque – La réaction cinétiquement limitante impose fréquemment sa loi de vitesse à l'ensemble de la réaction.



On s'intéresse à une réaction dont l'équation-bilan s'écrit :



et qui est catalysée par l'espèce D. Pour expliquer cette *autocatalyse*, on envisage le mécanisme réactionnel suivant :



1. À l'aide de ce mécanisme réactionnel, donner l'expression de la vitesse v de la réaction, en fonction des constantes k_1, k_2, k_3 et des concentrations de A, B et D.
2. Dédire de la loi de vitesse v la relation entre t, k_1, k_2, k_3, χ (avancement de la réaction) et les concentrations initiales a_0, b_0, d_0 de A, B et D respectivement.
3. En admettant que $a_0 < b_0$, donner l'expression du temps de demi-réaction τ .
4. Interpréter la valeur de τ lorsque d_0 tend vers zéro.

RÉPONSE

1. L'équation-bilan de la réaction : $A + B \rightarrow C + D$ conduit à définir la vitesse de formation des diverses espèces en fonction de la vitesse globale v de la réaction :

$$\frac{d[A]}{dt} = \frac{d[B]}{dt} = -v \text{ et } \frac{d[C]}{dt} = \frac{d[D]}{dt} = v$$

L'entité C n'apparaissant que dans l'étape (3), il convient de l'utiliser pour calculer v :

$$v = \frac{d[C]}{dt} = k_2 [E] [B]$$

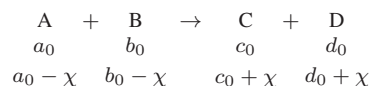
où intervient la concentration en intermédiaire réactionnel E, que l'on peut remplacer en lui appliquant l'approximation de l'état quasi stationnaire :

$$\begin{aligned} \frac{d[E]}{dt} &= k_1 [A] [D] - k_2 [E] [B] - k_3 [E] [A] = 0 \\ \Rightarrow [E] \times (k_2 [B] + k_3 [A]) &= k_1 [A] [D] \\ \Rightarrow [E] &= \frac{k_1 [A] [D]}{k_2 [B] + k_3 [A]} \end{aligned}$$

C'est pourquoi :

$$v = k_1 k_2 \frac{[A] [B] [D]}{k_2 [B] + k_3 [A]} \quad (11)$$

2. Le bilan de la réaction peut s'écrire à l'aide de son avancement χ :



qui donne non seulement les concentrations $[A] = a_0 - \chi, [B] = b_0 - \chi, [D] = d_0 + \chi$, mais également :

$$v = \frac{d[C]}{dt} = \frac{d(c_0 + \chi)}{dt} = \frac{d\chi}{dt}$$

Ce faisant, le résultat (11) devient :

$$\frac{d\chi}{dt} = k_1 k_2 \frac{[A] [B] [D]}{k_2 [B] + k_3 [A]} \Rightarrow k_1 k_2 dt = \frac{k_2 [B] + k_3 [A]}{[A] [B] [D]} \times d\chi$$

soit, après simplification :

$$k_1 k_2 dt = \frac{k_2 d\chi}{[A][D]} + \frac{k_3 d\chi}{[B][D]} = \frac{k_2 d\chi}{(a_0 - \chi)(d_0 + \chi)} + \frac{k_3 d\chi}{(b_0 - \chi)(d_0 + \chi)}$$

L'intégration de cette équation différentielle ne peut s'effectuer qu'en remarquant que :

$$\frac{1}{(a_0 - \chi)(d_0 + \chi)} = \frac{1}{a_0 + d_0} \times \left(\frac{1}{a_0 - \chi} + \frac{1}{d_0 + \chi} \right)$$

et

$$\frac{1}{(b_0 - \chi)(d_0 + \chi)} = \frac{1}{b_0 + d_0} \times \left(\frac{1}{b_0 - \chi} + \frac{1}{d_0 + \chi} \right)$$

d'où il découle que :

$$\begin{aligned} k_1 k_2 \int_0^t dt &= \frac{k_2}{a_0 + d_0} \left(\int_0^x \frac{d\chi}{a_0 - \chi} + \int_0^x \frac{d\chi}{d_0 + \chi} \right) \\ &+ \frac{k_3}{b_0 + d_0} \left(\int_0^x \frac{d\chi}{b_0 - \chi} + \int_0^x \frac{d\chi}{d_0 + \chi} \right) \\ &= \frac{k_2}{a_0 + d_0} \left[\ln \left(\frac{d_0 + \chi}{a_0 - \chi} \right) \right]_0^x + \frac{k_3}{b_0 + d_0} \left[\ln \left(\frac{d_0 + \chi}{b_0 - \chi} \right) \right]_0^x \end{aligned}$$

soit, finalement :

$$k_1 k_2 t = \frac{k_2}{a_0 + d_0} \ln \left[\frac{a_0 (d_0 + \chi)}{d_0 (a_0 - \chi)} \right] + \frac{k_3}{b_0 + d_0} \ln \left[\frac{b_0 (d_0 + \chi)}{d_0 (b_0 - \chi)} \right]$$

3. La condition : $a_0 < b_0$ révèle que A est le réactif introduit en défaut, à partir de quoi le temps de demi-réaction τ est le temps au bout duquel :

$$[A](\tau) = \frac{a_0}{2} \Rightarrow a_0 - \chi(\tau) = \frac{a_0}{2} \Rightarrow \chi(\tau) = \frac{a_0}{2}$$

Ce faisant, le résultat de la question précédente révèle que :

$$k_1 k_2 \tau = \frac{k_2}{a_0 + d_0} \ln \left[\frac{a_0 (d_0 + a_0/2)}{d_0 \times a_0/2} \right] + \frac{k_3}{b_0 + d_0} \ln \left[\frac{b_0 (d_0 + a_0/2)}{d_0 (b_0 - a_0/2)} \right]$$

ou encore :

$$\tau = \frac{1}{k_1 (a_0 + d_0)} \ln \left(2 + \frac{a_0}{d_0} \right) + \frac{k_3}{b_0 + d_0} \ln \left[\frac{b_0 (2d_0 + a_0)}{d_0 (2b_0 - a_0)} \right]$$

4. Les limites :

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \left(2 + \frac{a_0}{d_0} \right) = \infty \text{ et } \lim_{d_0 \rightarrow 0} \left[\frac{b_0 (2d_0 + a_0)}{d_0 (2b_0 - a_0)} \right] = \infty$$

suffisent à montrer que $\lim_{d_0 \rightarrow 0} \tau = \infty$, ce qui signifie, physiquement, que la réaction ne se déroulera pas (car il lui faut un temps infini pour ne consommer que la moitié de A). Cette conclusion révèle l'importance du catalyseur dans la réaction proposée : tant que D est absent du milieu réactionnel, la réaction $A + B \rightarrow C + D$ ne peut se produire. En revanche, l'introduction d'une faible quantité de D permet d'autant mieux le déroulement de cette réaction que celle-ci produit l'entité D dont elle a besoin.

8.3.5 Mécanismes en séquence fermée

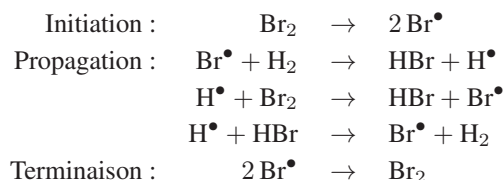
Ces mécanismes, encore appelés *réactions en chaîne*, sont caractérisés par trois phases :

- une phase *d'initiation*, au cours de laquelle un intermédiaire (*I*) est formé ;
- une phase de *propagation* pendant laquelle (*I*) est consommé, puis formé à nouveau à l'issue d'une autre étape (c'est cette régénération de (*I*) qui distingue les réactions en chaîne des mécanismes en séquence ouverte) ;
- une phase de *terminaison* (ou de *rupture*) qui consomme définitivement (*I*).

Deux types de réactions en chaîne sont distinguées, selon qu'elles produisent ou non des intermédiaires réactionnels en quantité plus importante qu'elle n'en consomme.

Les mécanismes convergents

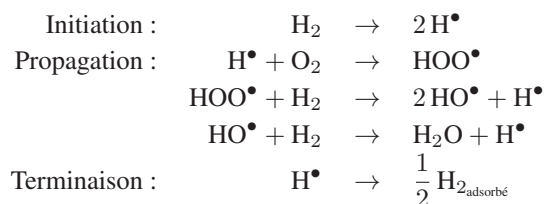
La somme des intermédiaires réactionnels, de part et d'autre de toutes les étapes du mécanisme réactionnel, fournit le même résultat. Par exemple, pour la réaction photolytique : $\text{H}_2 + \text{Br}_2 \rightarrow 2 \text{HBr}$, on propose le mécanisme suivant :



La présence, à gauche, de cinq intermédiaires réactionnels ($3 \text{Br}^\bullet + 2 \text{H}^\bullet$) et de la même quantité à droite ($4 \text{Br}^\bullet + \text{H}^\bullet$) montre que cette réaction est convergente.

Les mécanismes divergents

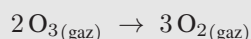
De part et d'autre des équations du mécanisme réactionnel, la somme des intermédiaires réactionnels n'est pas la même. Par exemple, au cours de la synthèse de l'eau :



la présence de quatre intermédiaires à gauche ($2 \text{H}^\bullet + \text{HOO}^\bullet + \text{HO}^\bullet$) contre sept à droite ($4 \text{H}^\bullet + 2 \text{HO}^\bullet + \text{HOO}^\bullet$) montre que cette réaction diverge.

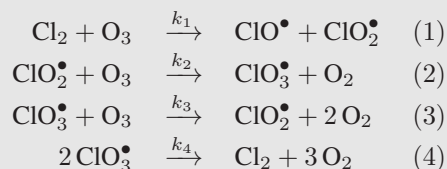


L'ozone peut se décomposer, en l'absence de catalyseur, suivant la réaction très lente :



Il y a une vingtaine d'année, on a commencé à soupçonner les C.F.C. d'accroître cette destruction de l'ozone atmosphérique. En effet, la vitesse de décomposition de l'ozone est fortement accrue en présence de dichlore.

Le mécanisme proposé est le mécanisme de réaction en chaîne suivant :



Le radical ClO^\bullet , dans l'étape (1), se détruit sans participer à la propagation de la chaîne.

- Définir la vitesse globale v de la réaction en fonction de la vitesse de formation de O_3 .
- En appliquant l'approximation de l'état quasi stationnaire sur les intermédiaires ClO_2^\bullet et ClO_3^\bullet , montrer que :

$$[ClO_3^\bullet] = \sqrt{\frac{k_1}{2k_4}} [Cl_2]^{1/2} [O_3]^{1/2}$$

- En déduire que :

$$v = k_1 [Cl_2] [O_3] + k_3 \sqrt{\frac{k_1}{2k_4}} [Cl_2]^{1/2} [O_3]^{3/2}$$

Justifier alors le rôle catalytique du dichlore dans la décomposition de l'ozone.

- On définit la longueur moyenne de chaîne, notée ℓ , par :

$$\ell = \frac{\text{vitesse globale de décomposition de } O_3 (v)}{\text{vitesse d'initiation}}$$

Déterminer l'expression de ℓ en fonction de $[O_3]$, $[Cl_2]$ et des k_i ($i = 1, 2, 3$ ou 4).
Quelle est l'influence de Cl_2 sur cette longueur de chaîne ?

RÉPONSE

- La vitesse de formation de O_3 est associée à la vitesse v de la réaction : $2 O_3 \rightarrow 3 O_2$ par la loi :

$$\frac{d[O_3]}{dt} = -2v \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \frac{d[O_3]}{dt} \quad (12)$$

- L'approximation de l'état quasi stationnaire s'applique aux intermédiaires ClO_2^\bullet et ClO_3^\bullet :

$$\frac{d[ClO_2^\bullet]}{dt} = k_1 [Cl_2] [O_3] - k_2 [ClO_2^\bullet] [O_3] + k_3 [ClO_3^\bullet] [O_3] = 0 \quad (13)$$

et :

$$\frac{d[ClO_3^\bullet]}{dt} = k_2 [ClO_2^\bullet] [O_3] - k_3 [ClO_3^\bullet] [O_3] - 2k_4 [ClO_3^\bullet]^2 = 0$$

L'addition de ces deux équations fournit directement :

$$k_1 [Cl_2] [O_3] - 2k_4 [ClO_3^\bullet]^2 = 0 \Rightarrow [ClO_3^\bullet] = \sqrt{\frac{k_1}{2k_4}} [Cl_2]^{1/2} [O_3]^{1/2} \quad (14)$$

- En outre, l'ozone disparaît au cours des étapes (1) (2) et (3) du mécanisme réactionnel, en conséquence de quoi :

$$\frac{d[O_3]}{dt} = -k_1 [Cl_2] [O_3] - k_2 [ClO_2^\bullet] [O_3] - k_3 [ClO_3^\bullet] [O_3]$$

tandis que l'équation (13) fournit :

$$k_2 [ClO_2^\bullet] [O_3] = k_1 [Cl_2] [O_3] + k_3 [ClO_3^\bullet] [O_3]$$

d'où il s'ensuit que :

$$\frac{d[O_3]}{dt} = -2k_1 [Cl_2] [O_3] - 2k_3 [ClO_3^\bullet] [O_3]$$

où, conformément à l'identité (14) :

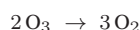
$$k_3 [ClO_3^\bullet] [O_3] = k_3 \sqrt{\frac{k_1}{2k_4}} [Cl_2]^{1/2} [O_3]^{3/2}$$

$$\Rightarrow \frac{d[O_3]}{dt} = -2k_1 [Cl_2] [O_3] - 2k_3 \sqrt{\frac{k_1}{2k_4}} [Cl_2]^{1/2} [O_3]^{3/2}$$

Finalement, la vitesse v devient accessible à partir de la relation (12) :

$$v = -\frac{1}{2} \frac{d[\text{O}_3]}{dt} \Rightarrow v = k_1 [\text{Cl}_2] [\text{O}_3] + k_3 \sqrt{\frac{k_1}{2k_4}} [\text{Cl}_2]^{1/2} [\text{O}_3]^{3/2}$$

Ce résultat révèle que Cl_2 accélère la réaction de décomposition de l'ozone :



en dépit de son absence dans l'équation-bilan de cette réaction ; il s'agit typiquement d'un catalyseur.

4. La phase d'initiation est décrite par l'étape (1), de vitesse :

$$v_1 = k_1 [\text{Cl}_2] [\text{O}_3]$$

auquel cas la longueur moyenne de chaîne est définie par :

$$\ell = \frac{v}{v_1} = \frac{k_1 [\text{Cl}_2] [\text{O}_3] + k_3 \sqrt{\frac{k_1}{2k_4}} [\text{Cl}_2]^{1/2} [\text{O}_3]^{3/2}}{k_1 [\text{Cl}_2] [\text{O}_3]}$$

c'est-à-dire, finalement :

$$\ell = 1 + \frac{k_3}{\sqrt{2k_1k_4}} \times \sqrt{\frac{[\text{O}_3]}{[\text{Cl}_2]}}$$

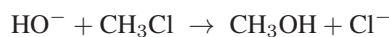
On remarque immédiatement que ℓ est d'autant plus faible que $[\text{Cl}_2]$ est plus important, ce qui signifie également que, lorsque Cl_2 est présent en grand excès ($\ell \simeq 1$), chaque molécule de dichlore provoque la disparition d'une seule molécule d'ozone.

8.3.6 Diagrammes d'énergie potentielle

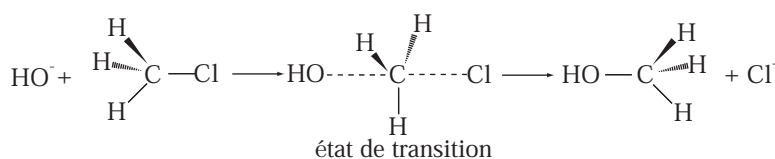
Cette partie n'est exigible que des étudiants de la filière PCSI, mais son aspect purement descriptif la rendra avantageusement accessible aux autres étudiants.

Définition 15 On appelle état de transition (noté T^\ddagger), ou complexe activé, une configuration moléculaire dont on soupçonne l'apparition transitoire et éphémère au cours d'une étape élémentaire d'un mécanisme réactionnel.

Par exemple, le processus élémentaire :



peut être décrit par le schéma réactionnel suivant :

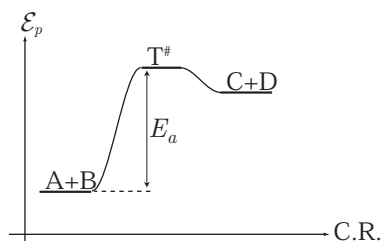


La forte instabilité de l'état de transition lui confère une énergie potentielle plus élevée que celle des produits et réactifs de la réaction.

Remarque – Même si l'on en ignore la structure, un état de transition est toujours supposé apparaître au cours d'une étape élémentaire.

Définition 16 Un diagramme d'énergie potentielle est une représentation graphique de l'énergie potentielle (\mathcal{E}_p) de toutes les espèces participant à un processus élémentaire (ainsi que celle, supposée, de l'état de transition) en fonction de coordonnées généralisées : les coordonnées réactionnelles (C.R.) qui peuvent figurer le temps, l'avancement de la réaction, ...

Par exemple, au cours du processus élémentaire : $A + B \xrightarrow{k} C + D$, où l'état $\{C + D\}$ est moins stable que $\{A + B\}$, ce diagramme est représenté par :

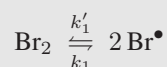


La différence d'énergie potentielle de l'état de transition et des réactifs coïncide, approximativement, avec l'énergie d'activation E_a de la réaction.

Définition 17 *Le postulat de Hammond stipule que l'énergie potentielle de l'état de transition est toujours légèrement supérieure à la plus grande des énergies des réactifs et des produits.*



On considère l'étape élémentaire :



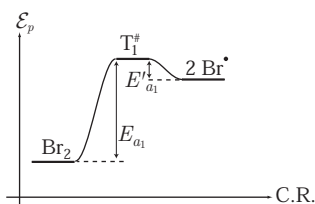
1. Représenter le diagramme d'énergie potentielle de cette étape (on notera T_1^\ddagger l'état de transition, E_{a1} l'énergie d'activation de la réaction $\text{Br}_2 \rightarrow 2 \text{Br}^\bullet$ et E'_{a1} celle de la réaction : $2 \text{Br}^\bullet \rightarrow \text{Br}_2$).
2. Exprimer la vitesse v_1 de cette réaction en fonction des constantes k_1 , k'_1 et des concentrations $[\text{Br}_2]$, $[\text{Br}^\bullet]$.
3. On appelle équilibre chimique l'état stationnaire de cette réaction ($v_1 = 0$). Exprimer le rapport $\frac{[\text{Br}^\bullet]^2}{[\text{Br}_2]} = K$ en fonction de k_1 , k'_1 , la température T et des facteurs préexponentiels de la loi d'Arrhénius.
4. L'utilisation d'un catalyseur permet l'apparition d'un nouvel état de transition (T_2^\ddagger) plus stable que T_1^\ddagger .
En utilisant les diagrammes d'énergie potentielle de la réaction (spontanée et catalysée), expliquer comment évolue :
 - (a) le rapport K , dans les mêmes conditions.
 - (b) la vitesse v de la réaction, avec l'introduction d'un catalyseur.

RÉPONSE

1. Le radical Br^\bullet étant beaucoup moins stable que la molécule Br_2 , il présente également une plus grande énergie potentielle \mathcal{E}_p .

En vertu du postulat de Hammond, l'état de transition T_1^\ddagger présente alors une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p1}^\ddagger$ légèrement supérieure à celle du radical $\text{Br}\cdot$.

En outre, la différence entre $\mathcal{E}_{p1}^\ddagger$ et l'énergie potentielle de Br_2 s'apparente à E_{a1} , tandis que la différence entre $\mathcal{E}_{p1}^\ddagger$ et l'énergie potentielle de $\text{Br}\cdot$ s'identifie à E'_{a1} .



2. La vitesse de la réaction : $\text{Br}_2 \xrightleftharpoons[k_1]{k'_1} 2 \text{Br}\cdot$ est définie par :

$$v_1 = k_1 [\text{Br}_2] - k'_1 [\text{Br}\cdot]^2 \quad (15)$$

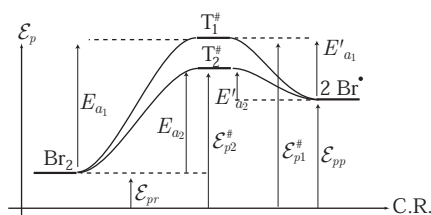
3. Lorsque l'équilibre chimique est atteint v_1 est nul, ce qui se traduit par :

$$k_1 [\text{Br}_2] = k'_1 [\text{Br}\cdot]^2 \Rightarrow K = \frac{[\text{Br}\cdot]^2}{[\text{Br}_2]} = \frac{k_1}{k'_1}$$

où les constantes k_1 et k'_1 suivent la loi d'Arrhénius : $k_1 = A e^{-E_{a1}/RT}$ et $k'_1 = A' e^{-E'_{a1}/RT}$, en raison de quoi :

$$K = \frac{A}{A'} \times \exp\left(\frac{E'_{a1} - E_{a1}}{RT}\right) \quad (16)$$

4. L'utilisation d'un catalyseur permet d'abaisser la valeur de l'énergie potentielle de l'état de transition (qui devient $\mathcal{E}_{p2}^\ddagger$). Les diagrammes d'énergie potentielle de la réaction (avec ou sans catalyseur) peuvent également faire apparaître les énergies potentielles des réactifs (\mathcal{E}_{pr}) et des produits (\mathcal{E}_{pp}), qui ne sont pas affectées par l'emploi d'un catalyseur :



- (a) La nouvelle vitesse de réaction adopte alors une forme analogue à (15) :

$$v_2 = k_2 [\text{Br}_2] - k'_2 [\text{Br}\cdot]^2$$

de sorte qu'en régime stationnaire :

$$v_2 = 0 \Rightarrow \frac{[\text{Br}\cdot]^2}{[\text{Br}_2]} = \frac{k_2}{k'_2} = K$$

où les constantes k_2 et k'_2 obéissent à la loi d'Arrhénius :

$$\begin{cases} k_2 = A e^{-E_{a2}/RT} \\ k'_2 = A' e^{-E'_{a2}/RT} \end{cases} \Rightarrow \frac{[\text{Br}\cdot]^2}{[\text{Br}_2]} = \frac{A}{A'} \times \exp\left(\frac{E'_{a2} - E_{a2}}{RT}\right)$$

Or, le diagramme d'énergie potentielle précédent révèle que :

$$\mathcal{E}_{pr} + E_{a1} = \mathcal{E}_{pp} + E'_{a1} \Rightarrow E'_{a1} - E_{a1} = \mathcal{E}_{pr} - \mathcal{E}_{pp}$$

et :

$$\mathcal{E}_{pr} + E_{a2} = \mathcal{E}_{pp} + E'_{a2} \Rightarrow E'_{a2} - E_{a2} = \mathcal{E}_{pr} - \mathcal{E}_{pp}$$

Ce faisant, $E'_{a2} - E_{a2} = E'_{a1} - E_{a1}$ indique que le rapport :

$$K = \frac{[\text{Br}\cdot]^2}{[\text{Br}_2]} = \frac{k_2}{k'_2}$$

n'est pas modifié par la catalyse ; l'emploi d'un catalyseur n'a aucune influence sur la composition d'un milieu réactionnel parvenu à l'équilibre.

(b) En revanche, la vitesse de la réaction peut s'écrire :

$$v_i = k_i [\text{Br}_2] - k'_i [\text{Br}\bullet]^2 = k_i \left([\text{Br}_2] - \frac{[\text{Br}\bullet]^2}{K} \right)$$

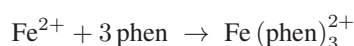
où $k_i = A e^{-E_{ai}/RT}$ est une fonction décroissante de E_{ai} . C'est pourquoi l'emploi d'un catalyseur, abaissant la valeur de E_{ai} , se traduit par une augmentation de la vitesse de la réaction.

● **273** ————— **Concours de la banque PT**
10 min.

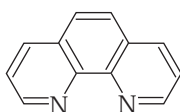
Loi de vitesse d'une réaction simple

MPSI-PCSI-PTSI

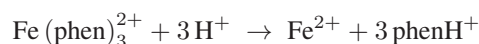
La (1,10)-phénanthroline donne avec les ions Fe^{2+} un complexe très stable d'une couleur rouge très intense, qui est utilisé comme indicateur d'oxydo-réduction. L'équation de formation du complexe en solution aqueuse peut s'écrire :



phen représente la molécule de (1,10)-phénanthroline, de formule semi-développée :



On étudie la décomposition du complexe $\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}$ en milieu acide, selon la réaction d'équation-bilan :



- On suppose, dans cette question, que l'addition d'acide se fait instantanément, à la date $t = 0$. Dans l'hypothèse d'une réaction totale d'ordre 1 par rapport au complexe, établir l'expression de la variation de la concentration en complexe, en fonction du temps. La constante de vitesse sera notée k .
- Le suivi de la réaction est effectué par spectrophotométrie, en mesurant l'absorbance d'une solution de complexe à une longueur d'onde pour laquelle seul le complexe absorbe. On rappelle que, dans ces conditions, l'absorbance A s'exprime d'après la loi de *Beer-Lambert* en fonction du coefficient d'extinction molaire ε et de la concentration C en espèce absorbante ($\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}$) :

$$A = \varepsilon \ell C, \ell \text{ étant la longueur de la cuve.}$$

On considère une solution de concentration $8.10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en complexe, et $2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en acide chlorhydrique, à l'instant $t = 0$.

On mesure l'absorbance A à différents instants, la température étant maintenue à 26°C .

Les valeurs sont rassemblées dans le tableau suivant :

t (min)	0	20	35	48	66	85
A	0,937	0,851	0,815	0,757	0,701	0,640

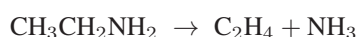
- Vérifier, graphiquement, que la réaction est bien d'ordre 1.
- Déterminer la valeur de k à 26°C .

● **274** ————— **Université Paris-Sud**
10 min.

Loi de vitesse d'une réaction simple

MPSI-PCSI-PTSI

Soit la réaction suivante, en phase gazeuse :



La réalisation expérimentale de cette réaction se fait à volume et température constants et on mesure la pression totale à différents instants. On obtient les résultats suivants :

t (min)	0	1	4	10
p (Pa)	7 240	7 900	9 480	11 720

1. Faire un bilan molaire en fonction du coefficient de dissociation α . On rappelle que α est le rapport du nombre de moles d'éthylamine dissociée sur le nombre de moles d'éthylamine introduite initialement ; on appellera n_0 ce nombre initial de moles.
2. En considérant les gaz comme parfaits, trouver la relation entre α , la pression initiale p_0 et la pression p à l'instant t .
3. (a) Justifier graphiquement l'ordre 1 de la réaction.
(b) Trouver la valeur de la constante de vitesse de la réaction.

● 275 Concours des ENSI 10 min.

Loi de vitesse de réactions concurrentes

MPSI-PCSI-PTSI

L'acide acétique se décompose selon deux réactions concurrentes, monomoléculaires :



1. On appelle :

- x la concentration en CH_3COOH consommé ;
- y la concentration en CH_4 formé ;
- z la concentration en $\text{C}_2\text{H}_2\text{O}$ formé .

Exprimer $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ en fonction de x , y , z et C_0 (concentration initiale de CH_3COOH).

2. En déduire une relation entre x , y et z .
3. On donne $k_1 = 3,75 \text{ s}^{-1}$ et $k_2 = 4,65 \text{ s}^{-1}$. Calculer le temps au bout duquel 99% de CH_3COOH a disparu.

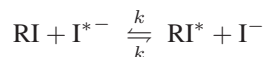
● 276 Lycée Champollion, Grenoble 15 min.

Loi de vitesse d'un équilibre

MPSI-PCSI-PTSI

On fait réagir, dans l'acétone, du 2-iodo-octane (noté RI) avec de l'iodure de sodium contenant l'isotope radioactif $^{128}_{53}\text{I}$, noté I^* .

On observe une réaction de substitution, d'équation :



Dans chaque sens, la réaction a la même constante de vitesse k et l'on admet qu'elle est d'ordre 1 par rapport au dérivé iodé et d'ordre 1 par rapport à l'ion iodure.

1. La désintégration de l'iodure radioactif utilisé est suffisamment lente pour pouvoir considérer que, pendant la durée de l'expérience, la concentration totale de cet élément est constante.

À l'instant initial, on a $[\text{RI}^*]_0 = 0$. On pose :

$$[\text{RI}]_0 = a \quad [\text{I}^{*-}]_0 = b \quad [\text{I}^-]_0 = c$$

À l'instant de date t , $[\text{RI}^*] = x$. Exprimer $\frac{dx}{dt}$ et en déduire l'expression de k en fonction de t , x , a , b et c .

2. On mesure, au temps t , la radioactivité du dérivé iodé et de l'iodure de sodium. Les résultats obtenus, R_1 et R_2 , sont proportionnels aux fractions molaires :

$$R_1 = \lambda \times \frac{[\text{RI}^*]}{[\text{RI}] + [\text{RI}^*]} \text{ et } R_2 = \lambda \times \frac{[\text{I}^{*-}]}{[\text{I}^-] + [\text{I}^{*-}]}$$

λ étant une constante.

On pose : $\gamma = \frac{R_1}{R_2}$. Exprimer k en fonction de t , γ , a , b et c .

La réaction est étudiée à $29,6^\circ\text{C}$, avec :

$$a = 0,1377 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad b + c = 0,1600 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

À $t = 2100 \text{ s}$, $\gamma = 0,39$. Calculer k .

● **277** **Concours « Vété »**
15 min.

Loi de vitesse d'une réaction simple

MPSI-PCSI-PTSI

La vapeur d'eau se décompose, suivant certaines conditions, en $\text{H}_2(\text{gaz})$ et $\text{O}_2(\text{gaz})$:



On étudie cette réaction à une température T dans un récipient de volume V constant. On introduit, à l'instant $t = 0$, une quantité n_0 (moles) de vapeur d'eau et on suit l'évolution de la pression partielle en vapeur d'eau $p_{\text{H}_2\text{O}}$ au cours du temps, ce qui est traduit dans le tableau ci-dessous :

t (s)	0	2	4	10	20	30
$p_{\text{H}_2\text{O}}$ (bars)	20,00	18,76	17,61	14,55	10,58	7,70

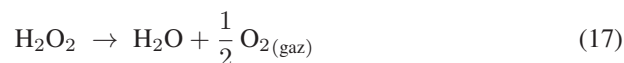
- Montrer que la réaction est d'ordre 1 en démontrant que la pression partielle de l'eau obéit à la relation : $p_{\text{H}_2\text{O}} = p_0 e^{-2kt}$, où k est la constante de vitesse et p_0 la pression partielle de l'eau à la date $t = 0$.
- Calculer la constante k de la réaction, à la température T .
- Établir l'expression du temps de demi-réaction τ et calculer sa valeur à la température T .

● **278** **Lycée Condorcet, Paris**
15 min.

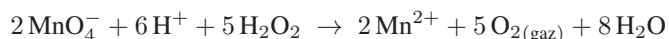
Loi de vitesse d'une réaction simple

MPSI-PCSI-PTSI

En présence de chlorure de fer (III) jouant le rôle de catalyseur, l'eau oxygénée H_2O_2 , en solution aqueuse, se décompose selon la réaction :



On se propose d'étudier la cinétique de la réaction à une température T fixée. Pour cela, on effectue sur le mélange réactionnel, des prélèvements échelonnés dans le temps, en on dose immédiatement H_2O_2 restant à l'aide d'une solution de permanganate de potassium ($\text{K}^+ + \text{MnO}_4^-$). On opère en milieu acide : MnO_4^- est alors réduit en Mn^{2+} et H_2O_2 est oxydé en O_2 :



À chaque essai, on opère sur 10 mL de prélèvement et on utilise v mL de la solution titrante de permanganate pour doser l'eau oxygénée restante. On désigne par C_0 la concentration initiale en H_2O_2 et par C_1 la concentration de la solution de permanganate.

Le tableau ci-dessous donne les valeurs obtenues à différents instants.

t (s)	0	180	360	540	720	900
v (mL)	12,3	8,4	6,1	4,1	2,9	2,0

1. Montrer que la concentration molaire volumique C en H_2O_2 est proportionnelle au volume v de solution de permanganate versé ; établir la relation de proportionnalité.
2. On postule pour un ordre 1 par rapport à H_2O_2 ; établir la relation existant entre le volume v à t , le volume v_0 à $t = 0$, la constante de vitesse k et le temps t .
3. Vérifier graphiquement l'ordre de la réaction (17) et trouver, par cette technique, la constante de vitesse k à la température T et le temps de demi-réaction.
4. Voyez-vous un risque expérimental dans cette méthode, qui puisse fausser les résultats et, le cas échéant, quels remèdes proposez-vous ?

● 279 ————— Concours des Ponts et Chaussées

25 min.

Loi de vitesse d'une réaction simple

MPSI-PCSI-PTSI

En solution dans l'éthanol, la potasse KOH est totalement dissociée. On étudie la cinétique, à 20°C , de la réaction entre la potasse et le 1-bromo 2-méthylpropane (qui sera noté RBr dans la suite de l'énoncé) qui conduit à l'obtention du 2-méthylpropan-1-ol. Une telle réaction peut, d'une manière générale, s'opérer selon deux mécanismes limites conduisant à des lois de vitesse $v = k [\text{RBr}]$ ou $v = k [\text{RBr}] [\text{HO}^-]$.

Nous nous proposons, dans ce problème, d'identifier le mécanisme de la réaction entre la potasse et le 1-bromo 2-méthylpropane.

1. Définir le temps de demi-réaction $t_{1/2}$.
2. Dans le cas d'une réaction $\text{A} \rightarrow \text{B}$ admettant un ordre apparent, exprimer $t_{1/2}$ en fonction de la constante apparente k et de $[\text{A}]_0$ pour des ordres 0, puis 1, puis 2.
3. Une expérience a pour conditions initiales :

$$[\text{RBr}]_0 = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ et } [\text{HO}^-]_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

On détermine la concentration de RBr à l'instant t :

t (min)	0	10	20	30	40
1 000 $[\text{RBr}]_0$ (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	10	5,0	2,5	1,2	0,6

Déterminer, à l'aide du tableau, trois valeurs de $t_{1/2}$ à différentes origines.

Cette réaction admet-elle un ordre ? si oui, quel est-il et combien vaut la constante apparente de vitesse ?

4. On recommence la même expérience avec une solution de concentrations initiales $[\text{RBr}]_0 = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{HO}^-]_0 = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On obtient un nouveau tableau de concentrations :

t (min)	0	10	20	30	40
1 000 $[\text{RBr}]_0$ (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	10	7,1	5,0	3,5	2,5

- (a) Déterminer des valeurs $t_{1/2}$ et en déduire éventuellement une constante apparente de vitesse.
- (b) En déduire l'ordre partiel par rapport à $[\text{HO}^-]$.

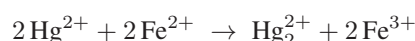
● 280 ————— Lycée Champollion, Grenoble

30 min.

Loi de vitesse d'une réaction simple

MPSI-PCSI-PTSI

Les ions mercuriques Hg^{2+} peuvent être réduits par les ions ferreux Fe^{2+} , selon l'équation-bilan :



On suit la réaction par spectrophotométrie, ce qui permet de déterminer le rapport des concentrations en ions Hg^{2+} à un instant quelconque t et à l'instant $t = 0$, soit :

$$\frac{[\text{Hg}^{2+}]}{[\text{Hg}^{2+}]_0}$$

Le tableau ci-dessous donne les résultats des deux expériences menées à 80°C .

- **Expérience 1** : initialement $[\text{Fe}^{2+}]_0 = 0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{Hg}^{2+}]_0 = 0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

t (s)	0	$1,0 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^5$	$3,0 \cdot 10^5$	∞
$[\text{Hg}^{2+}] / [\text{Hg}^{2+}]_0$	1,0	0,50	0,333	0,25	0

- **Expérience 2** : initialement : $[\text{Fe}^{2+}]_0 = 0,100 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{Hg}^{2+}]_0 = 0,001 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

t (s)	0	$0,5 \cdot 10^5$	$1,0 \cdot 10^5$	$1,5 \cdot 10^5$	$2,0 \cdot 10^5$	∞
$[\text{Hg}^{2+}] / [\text{Hg}^{2+}]_0$	1,0	0,585	0,348	0,205	0,122	0

La vitesse est de la forme : $v = -\frac{1}{2} \frac{d[\text{Hg}^{2+}]}{dt} = k [\text{Hg}^{2+}]^q [\text{Fe}^{2+}]^p$.

- À l'aide de ces deux expériences, en justifiant soigneusement les raisonnements, déterminer l'ordre global de la réaction, soit $n = p + q$, ainsi que les valeurs de p et q .
- En déduire la valeur de k .

● 281 ————— Lycée Fabert, Metz

30 min.

Loi de vitesse d'une réaction simple

MPSI-PCSI-PTSI

1. Démonstration préliminaire

On considère une réaction totale : $\text{A} \xrightarrow{k} \text{B}$. Cette réaction est étudiée en mesurant une propriété physique D , proportionnelle aux concentrations des deux espèces en solution :

$$D = D_S + \varepsilon_A [\text{A}] + \varepsilon_B [\text{B}]$$

D_S est la valeur de D pour le solvant et $\varepsilon_A \neq \varepsilon_B$.

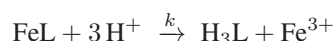
Montrer que, lorsque la réaction est d'ordre 1 par rapport à A, l'équation suivante est vérifiée :

$$\ln |D_t - D_\infty| = \ln |D_0 - D_\infty| - k \times t$$

D_t , D_0 et D_∞ représentent respectivement les valeurs de D à l'instant t , à l'instant initial et pour $t \rightarrow \infty$. Le temps est réputé infini lorsqu'il atteint dix fois le temps de demi-réaction.

2. Étude de la réaction globale de libération du fer par H^+

Cette réaction s'écrit :



On mélange rapidement une solution de FeL et une solution d'acide afin d'obtenir les concentrations initiales :

$$[FeL]_0 = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad [H^+]_0 = 0,88 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

L'absorbance D de cette solution est mesurée en fonction du temps à la longueur d'onde de 444 nm. À cette longueur d'onde, H^+ et H_3L ne présentent pas d'absorbance notable ($\varepsilon_{H^+} \simeq 0$ et $\varepsilon_{H_3L} \simeq 0$).

L'absorbance de la solution possède les propriétés énoncées dans la première question et prend les valeurs suivantes :

t (s)	20	50	100	200	1 000
$10^4 \times D$	661	492	298	108	28

On admettra que la durée 1 000 s est assimilable au temps infini.

- Montrer, graphiquement, que la réaction est d'ordre 1 par rapport à FeL.
- Calculer sa constante de vitesse apparente k_{app} .
- Calculer le temps de demi-réaction et montrer que l'hypothèse concernant le temps infini était justifiée.

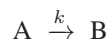
● 282 ————— Lycée Charlemagne

45 min.

Loi de vitesse d'une réaction simple

MPSI-PCSI-PTSI

On introduit, initialement, n_0 moles d'une espèce gazeuse A pure, dans un réacteur vide, isotherme (température T_0 constante) et isochore (volume V_0 constant). A se décompose pour produire B, également gazeux, selon l'équation-bilan :



où k est la constante cinétique relative aux concentrations molaires volumiques.

- On admet que cette réaction est d'ordre $\frac{3}{2}$ par rapport à A et on définit la vitesse d'apparition de A à l'aide de sa pression partielle p_A :

$$v_p = k_p \times p_A^{3/2} \text{ avec } \frac{dp_A}{dt} = -v_p$$

où k_p est la constante de vitesse relative aux pressions.

Les gaz sont supposés parfaits, et on rappelle que la constante molaire des gaz parfaits vaut : $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- (a) Donner l'expression de k_p en fonction de k , R et T_0 .
 (b) Exprimer p_A en fonction du temps t et exprimer le temps de demi-réaction en fonction de k_p et de la pression initiale p_0 de A.
2. On étudie, à 504°C , la pyrolyse du diméthyl éther CH_3OCH_3 (gazeux).

- (a) Les mesures de la pression de $(\text{CH}_3)_2\text{O}$, exprimée en pascals (Pa), ont été relevées à différents instants.

t (min)	0	5	9	15	20,5	25
p_A (10^3 Pa)	32,9	29,6	27,2	24,2	21,2	19,7

t (min)	32,5	38	46	70	90
p_A (10^3 Pa)	17,4	15,9	13,8	10,0	8,16

Déterminer, graphiquement, la valeur de la vitesse initiale (v_0), dans les conditions de l'expérience.

- (b) On a déterminé, à $T = 504^\circ\text{C}$, la vitesse initiale v_0 de la réaction pour diverses valeurs de la pression initiale p_0 du diméthyl éther :

p_0 (10^3 Pa)	8,55	13,7	27,6	39,5	55,3
v_0 ($\text{Pa} \cdot \text{min}^{-1}$)	32,1	170	477	830	1 350

Déterminer l'ordre de la réaction par rapport au diméthyl éther. En déduire la valeur de k_p , en précisant son unité.

Calculer k , en $\text{mol}^{-1/2} \cdot \text{L}^{1/2} \cdot \text{min}^{-1}$.

- (c) La pyrolyse, étudiée à plusieurs températures, a conduit aux résultats suivants :

T ($^\circ\text{C}$)	477	497	517	537
k ($10^{-3} \text{ mol}^{-1/2} \cdot \text{L}^{1/2} \cdot \text{min}^{-1}$)	1,53	3,94	9,61	22,51

Déterminer l'énergie d'activation de cette réaction.

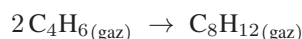
● 283 ————— Lycée Champollion, Grenoble

45 min.

Loi de vitesse d'une réaction simple

MPSI-PCSI-PTSI

À température élevée et en phase gazeuse, le buta-1,3-diène se dimérise en 4-vinyl cyclohexène suivant la réaction :



que l'on peut schématiser par : $2\text{A} \rightarrow \text{B}$.

Afin d'étudier cette réaction, une certaine quantité de buta-1,2-diène (A) est introduite dans un récipient de volume V constant, maintenu à une température constante T . On mesure alors la pression totale p dans le récipient en fonction du temps.

1. Montrer, en utilisant la loi des gaz parfaits, que la connaissance de la pression initiale p_0 et de la température T suffit pour calculer la concentration initiale C_0 en A.

2. Soit ξ_v l'avancement volumique (quotient de l'avancement par le volume) de la dimérisation du buta-1,3-diène. Exprimer, en fonction de ξ_v et de C_0 , les concentrations à l'instant de la date t . Montrer que la connaissance de $p(t)$, p_0 et T permet de calculer ξ_v . Exprimer, en fonction de $p(t)$, p_0 et T les concentrations à l'instant de date t .
3. Une expérience, effectuée à $T_1 = 609$ K, conduit aux résultats suivants :

t (min)	0	30	60	90	120	150
p (kPa)	101,3	77,8	69,2	64,7	62	60,2

Calculer les concentrations des différents constituants aux différentes dates t . On donne : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

4. On postule, pour cette réaction de dimérisation, une cinétique d'ordre 2. Vérifier cette hypothèse à l'aide des résultats expérimentaux ci-dessus et calculer la valeur numérique de la constante de vitesse (préciser les unités).
5. Une deuxième expérience, menée cette fois à $T_2 = 574,7$ K, conduit aux résultats suivants :

$$t = 0 \Rightarrow p = 92,5 \text{ kPa} \text{ et } t = 150 \text{ min} \Rightarrow p = 64,2 \text{ kPa}$$

Calculer la constante de vitesse à cette température et déterminer la valeur de l'énergie d'activation de cette réaction.

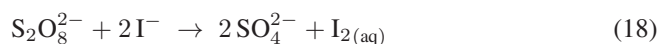
● 284 Concours du CAFEP

60 min.

Loi de vitesse d'une réaction simple

MPSI-PCSI-PTSI

Soit la réaction lente :



1. En supposant que cette réaction admette un ordre a par rapport à $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ et b par rapport à I^- , écrire, après avoir défini la vitesse v , son expression.
2. On réalise, à 303 K, l'expérience suivante :

On place, dans un bécher, 20,0 mL d'iodure de potassium de concentration $5,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Dans une burette, au dessus du bécher, on met un mélange de thiosulfate de sodium ($\text{S}_2\text{O}_3^{2-} + 2\text{Na}^+$) de concentration $5,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et d'iodure de potassium ($\text{K}^+ + \text{I}^-$) de concentration $3,33 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

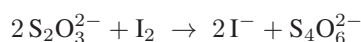
On verse rapidement, dans le bécher, tout en déclenchant le chronomètre, 10,0 mL de peroxydisulfate de potassium ($\text{S}_2\text{O}_8^{2-} + 2\text{K}^+$) de concentration $5,00 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Une coloration bleue apparaît au temps t_1 ; on ajoute alors rapidement 1,00 mL du mélange contenu dans la burette ; la coloration bleue réapparaît au temps t_2 . On ajoute alors 1,00 mL du mélange et ainsi de suite...

On obtient les résultats suivants :

n (mL) versés dans la burette	1	2	3	4	5
t_n (s)	314	645	1 016	1 384	1 785

On rappelle que les ions thiosulfate réagissent rapidement sur l'iode en solution aqueuse, selon l'équation :



- Pourquoi met-on de l'iodure de potassium dans le bécher et dans la burette ?
 - À quoi est due la coloration bleue observée ?
 - Rappeler les différentes réactions chimiques qui se produisent dans le bécher.
 - Montrer que la concentration en iodure reste constante dans le bécher.
 - Calculer, en fonction de n , la concentration en peroxydisulfate à l'instant t_n .
- Montrer, par une représentation graphique, que ces résultats sont compatibles avec un ordre partiel $a = 1$.
 - Déterminer, après les avoir définis, la constante de vitesse apparente k_1 et le temps de demi-réaction. Préciser l'unité de k_1 (les concentrations sont en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et le temps en secondes).
 - Une seconde série de mesures est réalisée à la même température, en multipliant par 2 les concentrations en ions iodure, les autres concentrations restant inchangées. On détermine une constante de vitesse apparente k_2 .
Sachant que $k_2 = 4,98 \cdot 10^{-4}$ (dans la même unité que k_1), calculer l'ordre partiel b . En déduire la constante de vitesse k et préciser son unité.

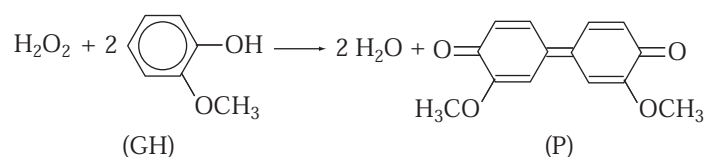
● 285 ————— Concours des Mines-Ponts

10 min.

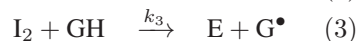
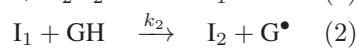
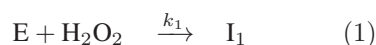
Mécanismes réactionnels

MPSI-PCSI-PTSI

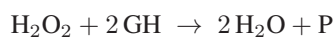
On étudie l'oxydation d'un composé, le gaïcol (GH) par l'eau oxygénée en milieu aqueux. On obtient le produit (P) selon la réaction :



La vitesse de cette réaction, très lente à température ordinaire, peut être augmentée par la présence d'un catalyseur. Le catalyseur utilisé dans la réaction est une enzyme, appelée E ; son mécanisme de fonctionnement est le suivant, décomposé en étapes élémentaires faisant intervenir des intermédiaires réactionnels I_1 , I_2 (les espèces participant aux réactions sont toutes en solution aqueuse) :



- Ce mécanisme est-il un mécanisme par stade (ou en séquence ouverte) ou un mécanisme en chaîne (ou en séquence fermée) ?
- Établir l'expression de la vitesse v de la réaction globale, d'équation-bilan :



- Mettre en évidence les propriétés de catalyseur présentées par l'enzyme E.

● **286** **Concours de l'E.N.S.**

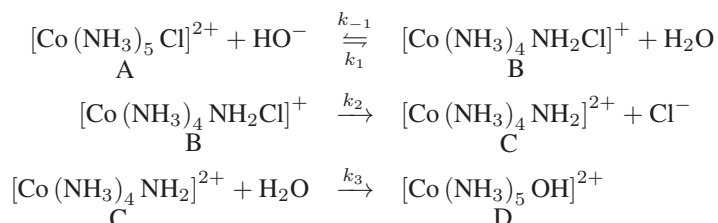
10 min.

Mécanismes réactionnels

MPSI-PCSI-PTSI

On étudie la cinétique de la formation du complexe pentaamminehydroxo cobalt (III), noté D, à partir du complexe pentaamminechloro cobalt (III), noté A.

Des études ont montré que cette réaction d'échange de ligands peut se décomposer en trois actes élémentaires représentés ci-dessous :



1. Qu'appelle-t-on un acte élémentaire ?
2. Écrire l'équation-bilan de la formation du pentaamminehydroxo cobalt (III).
3. Déterminer la vitesse de formation de $[\text{Co}(\text{NH}_3)_5\text{OH}]^{2+}$ (noté D) en fonction des concentrations des réactifs et des constantes de vitesse données. On appliquera l'approximation de l'état quasi stationnaire aux espèces intermédiaires apparaissant dans le mécanisme, c'est-à-dire B et C.
4. Montrer que si k_2 est petit devant $k_{-1} \times [\text{H}_2\text{O}]$, la vitesse de la réaction s'écrit :

$$v = \frac{k_1 k_2 [\text{A}] [\text{HO}^-]}{k_{-1} [\text{H}_2\text{O}]}$$

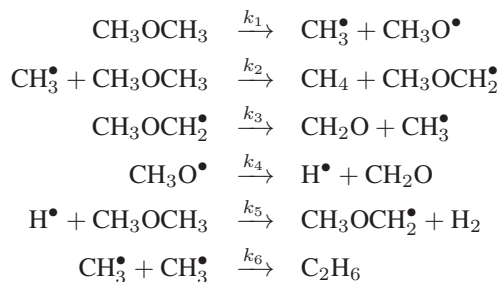
● **287** **Lycée Charlemagne, Paris**

15 min.

Mécanismes réactionnels

MPSI-PCSI-PTSI

Pour interpréter la pyrolyse du diméthyle-éther (CH_3OCH_3), on propose le mécanisme réactionnel suivant :



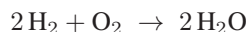
1. À l'aide de ce mécanisme, écrire l'équation-bilan de la pyrolyse.
2. Exprimer la vitesse v de formation de CH_4 , en fonction de $[\text{CH}_3\text{OCH}_3]$ et des constantes de vitesse k_i .

● **288** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

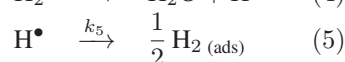
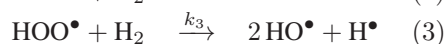
15 min.

Mécanismes réactionnels

MPSI-PCSI-PTSI

Soit v la vitesse de la réaction d'équation :

dont le mécanisme est décrit ci-dessous :



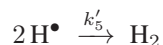
où $\text{H}_2(\text{ads})$ désigne l'hydrogène adsorbé sur une impureté du milieu réactionnel ; l'approximation de l'état quasi stationnaire pourra être appliqué aux intermédiaires H^\bullet , HOO^\bullet et HO^\bullet .

1. Montrer que la vitesse v se présente sous la forme :

$$v = \frac{k_1 [\text{H}_2] [\text{O}_2]}{k - [\text{O}_2]}$$

où l'on exprimera la constante k en fonction de k_1 et k_5 .

2. Si l'on remplace l'étape (5) par :



montrer que la vitesse s'écrit désormais :

$$v = k_2 [\text{O}_2] \times \frac{k_2 [\text{O}_2] + \sqrt{k_2^2 [\text{O}_2]^2 + 16 k_1 k'_5 [\text{H}_2]}}{4k'_5}$$

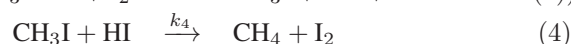
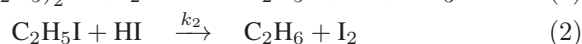
● **289** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

15 min.

Mécanismes réactionnels

MPSI-PCSI-PTSI

La réaction de décomposition de l'éthoxyéthane, $\text{C}_2\text{H}_5 - \text{O} - \text{C}_2\text{H}_5$, peut être effectuée en présence de diiode I_2 . Le mécanisme proposé est le suivant :



1. Quelle est l'équation-bilan de cette décomposition catalysée ?
2. On applique l'approximation de l'état quasi stationnaire à tous les intermédiaires réactionnels formés, ne faisant pas partie de l'équation-bilan. Quelle est la réaction la plus rapide du mécanisme ?

3. Établir la loi de vitesse.

● **290** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

20 min.

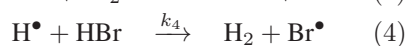
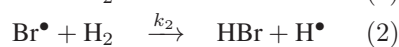
Mécanismes réactionnels

MPSI-PCSI-PTSI

Sous l'action de la lumière, le dibrome Br_2 peut réagir sur le dihydrogène selon l'équation-bilan :



On propose, pour cette réaction, le mécanisme réactionnel suivant :



1. En appliquant l'approximation de l'état quasi stationnaire sur les intermédiaires formés au cours de ce mécanisme, montrer que la vitesse de la réaction globale (19) se met sous la forme :

$$v = k \frac{[\text{H}_2] [\text{Br}_2]^{1/2}}{1 + k' \frac{[\text{HBr}]}{[\text{Br}_2]}}$$

où l'on exprimera les constantes k et k' en fonction des constantes de vitesse k_i ($i = 1, 2, 3, 4$ ou 5) des étapes du mécanisme.

2. H_2 et Br_2 sont introduits, initialement, à la même quantité dans un réacteur isochore et isotherme ; on note C_0 leur concentration initiale commune.

Exprimer, en fonction de C_0 et des k_i , le temps de demi-réaction de la réaction décrite par l'équation (19).

On rappelle les primitives suivantes :

$$\int \frac{d\chi}{(C_0 - \chi)^{3/2}} = 2 (C_0 - \chi)^{-1/2}$$

$$\text{et } \int \frac{\chi d\chi}{(C_0 - \chi)^{5/2}} = \frac{2\chi}{3} (C_0 - \chi)^{-3/2} - \frac{4}{3} (C_0 - \chi)^{-1/2}$$

● **291** ————— **Lycée Charlemagne, Paris**

20 min.

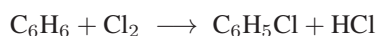
Mécanismes réactionnels

MPSI-PCSI-PTSI

Dans ce problème, les teneurs en gaz réagissants, supposés parfaits, sont exprimées en *volume par million*. Un gaz dont la teneur est de 1 v.p.m. dans un mélange a donc une pression partielle de $10^{-6} \times p_{\text{totale}}$.

Le benzène (C_6H_6), à l'état de vapeur, dilué dans un gaz inerte, réagit avec le dichlore. On admettra que les seuls produits de la réaction sont le monochlorobenzène et le

chlorure d'hydrogène. On se propose d'en étudier la cinétique.

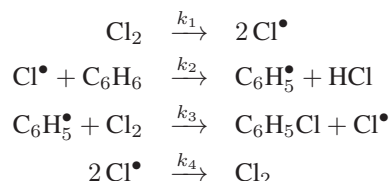


1. (a) On désigne par x , y , z les teneurs respectives du mélange gazeux en benzène, chlore et monochlorobenzène et par k la constante de vitesse de la réaction. En supposant celle-ci d'ordre 1 par rapport au chlore et au benzène, exprimer sa vitesse en fonction de x et y .
- (b) On enferme dans une enceinte de volume constant un gaz inerte contenant $x_0 = 5$ v.p.m. de benzène et $y_0 = 100$ v.p.m. de chlore. Cette dernière teneur est suffisante pour pouvoir être considérée comme constante au cours de la réaction. Le dosage du benzène, en fonction du temps, donne alors les résultats suivants :

t (min)	0	10	20	50	100	200	300
x (v.p.m.)	5	4,45	4	2,8	1,6	0,5	0,15

Montrer que ces résultats correspondent bien à une cinétique d'ordre 1 par rapport au benzène. En déduire la constante k introduite plus haut, en précisant la dimension de cette constante.

2. Une seconde expérience montrerait que l'ordre de la réaction par rapport au chlore est différent de 1. Pour interpréter ce résultat, on admet que la réaction de chloration du benzène ne s'effectue pas en une seule étape mais constitue, en fait, une réaction en chaîne avec formation primaire du radical Cl^\bullet . Le schéma en est le suivant :



- (a) Comment appelle-t-on ces différentes étapes ?
- (b) On désigne par k_1 , k_2 , k_3 et k_4 leurs constantes de vitesse, par x , y , z les teneurs (en v.p.m.) en benzène, chlore et monochlorobenzène, par $|\text{Cl}^\bullet|$ et $|\text{C}_6\text{H}_5^\bullet|$ les teneurs en radicaux Cl^\bullet et $\text{C}_6\text{H}_5^\bullet$.
Exprimer la vitesse de chloration du benzène en fonction de z .
- (c) En écrivant que le régime stationnaire est atteint (c'est-à-dire que la teneur en radicaux intermédiaires est constante), établir l'expression de cette vitesse en fonction de x et y .
- (d) On constatera que cette expression correspond bien à un ordre, par rapport au dichlore, différent de 1. Que vaut la constante globale k' , en fonction des constantes de vitesse des étapes élémentaires ?

● 292 ————— Olympiades internationales de chimie

45 min.

Mécanismes réactionnels

MPSI-PCSI-PTSI

I- Généralités

Les enzymes sont des substances protéiques qui agissent comme catalyseurs dans la régulation de la vitesse de nombreuses réactions impliquées dans le métabolisme des organismes vivants.

Dans le cas général, les réactions enzymatiques sont modélisées de la manière suivante :



dans laquelle E correspond à l'enzyme, S au substrat et P aux produits de la réaction.

1. Donner les principales caractéristiques d'un catalyseur.
2. Représenter¹, sur un même schéma, le profil réactionnel de la réaction non catalysée et le profil de celle dont on a donné l'équation générale.

II- Étude cinétique

On va s'intéresser à un type d'inhibition qui existe.

1. Cas classique



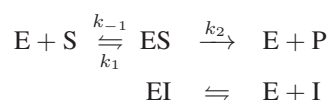
- (a) En appliquant l'approximation de l'état quasi stationnaire au complexe ES, exprimer la vitesse v de la formation de P en fonction de la concentration initiale en E. On pourra poser :

$$K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$$

- (b) Montrer que, lorsque la concentration initiale en substrat est très élevée ($[S] \gg K_M$), la vitesse de formation de P tend vers une valeur limite, notée v_M , que l'on exprimera en fonction de la concentration totale en enzyme.
- (c) Donner alors l'expression de la vitesse v de formation de P en fonction de K_M et de v_M .
- (d) Donner la signification physique de K_M et de v_M .
- (e) Représenter l'allure de la courbe $v = f([S])$.

2. Cas d'un inhibiteur compétitif

Un inhibiteur compétitif (noté I) se fixe sur l'enzyme dans le même site actif que le substrat.



Cette dernière réaction est caractérisée par une constante :

$$K_I = \frac{[E][I]}{[EI]}$$

- (a) Exprimer la vitesse v de la formation de P. On donnera à v une expression analogue à celle trouvée en II-1.(c), en introduisant $K_{M \text{ app}}$ que l'on exprimera en fonction de K_M , $[I]$ et K_I .
- (b) Donner finalement l'allure de la courbe $v = f([S])$ et la comparer à la précédente

¹Cette question n'est pas au programme de MPSI et de PTSI.

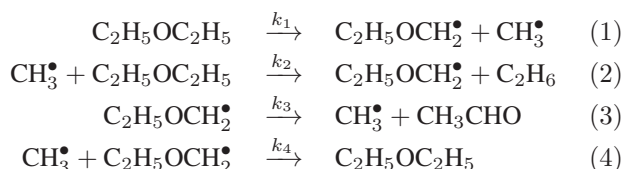
● **293** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

60 min.

Mécanismes réactionnels

MPSI-PCSI-PTSI

La vitesse de décomposition thermique de l'éthoxy-éthane $C_2H_5-O-C_2H_5$ (ou éther de pharmacie) se déroule selon le mécanisme suivant :



1. Qualifier le mécanisme et nommer les différentes étapes. Quelle en est l'équation-bilan ?
2. L'étape (1) est-elle facile ou difficile ? Justifier la réponse. Même question pour les étapes (2) et (4).
Peut-on, qualitativement, tracer le profil énergétique de ces trois phases du mécanisme ? le cas échéant, faites-le².
3. À partir de l'approximation de l'état quasi stationnaire appliquée aux différents intermédiaires réactionnels, donner l'expression de leurs concentrations dans le milieu. Discuter.
4. Définir la vitesse de réaction et établir sa loi. La vitesse de décomposition a-t-elle un ordre ?
5. Si l'on effectue cette réaction en phase gazeuse, dans un réacteur isochore et isotherme, montrer que, connaissant la pression p_0 à l'instant $t = 0$ et la pression totale p dans le réacteur à un instant quelconque t , on peut, par une linéarisation $f(p) = g(t)$, valider le mécanisme proposé, ou tout au moins l'ordre de la réaction auquel il aboutit ; déterminer la fonction de linéarisation.
6. Quelle relation y a-t-il entre l'énergie d'activation totale E^\ddagger de la réaction, et les énergies d'activation E_i^\ddagger des différentes étapes ? Montrer que cette expression peut être grossièrement simplifiée en analysant qualitativement les ordres de grandeur respectifs des différents E_i^\ddagger .

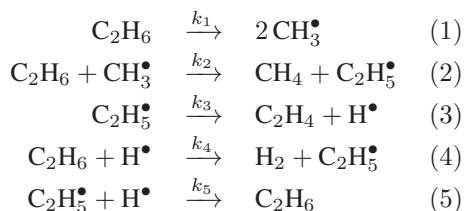
● **294** ————— **Lycée Saint-Louis, Paris**

90 min.

Mécanismes réactionnels

MPSI-PCSI-PTSI

Le craquage thermique de l'éthane fournit deux produits principaux, l'hydrogène et l'éthène. Son mécanisme réactionnel peut être décrit par les cinq réactions élémentaires suivantes, de constantes de vitesse respectives k_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) :



²Cette question ne concerne que les étudiants de PCSI.

Données numériques :

- expressions des constantes k_j , ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) :

$$\begin{aligned}k_1 &= 4.10^{16} e^{-\frac{366.000}{RT}} \text{ s}^{-1} \\k_2 &= 4.10^{11} e^{-\frac{60.000}{RT}} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \\k_3 &= 3.10^{13} e^{-\frac{165.000}{RT}} \text{ s}^{-1} \\k_4 &= k_2 \\k_5 &= 4.10^{10} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}\end{aligned}$$

- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- Les radicaux CH_3^\bullet , $\text{C}_2\text{H}_5^\bullet$ et H^\bullet , notés respectivement dans la suite R_1 , R_2 et R_3 , sont des espèces très réactives dont les concentrations demeurent quasi constantes et négligeables devant celles des autres espèces durant pratiquement toute la durée de la réaction. En conséquence, on admet qu'on peut appliquer à ces radicaux l'hypothèse de l'état quasi stationnaire $\frac{d[\text{R}_i]}{dt} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), en représentant désormais par $[\text{X}]$ la concentration (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) de l'espèce X.

(a) Traduire les trois équations $\frac{d[\text{R}_i]}{dt} = 0$ à l'aide des constantes k_j et des concentrations des diverses espèces chimiques en cause.

(b) Montrer que ces équations conduisent à l'égalité :

$$[\text{C}_2\text{H}_6]^2 = k [\text{C}_2\text{H}_5^\bullet] \times ([\text{C}_2\text{H}_5^\bullet] - k' [\text{C}_2\text{H}_6])$$

où k et k' sont des constantes que l'on déterminera en fonction des k_j .

- En supposant que, pendant tout le craquage, $k' [\text{C}_2\text{H}_6]$ est négligeable devant $[\text{C}_2\text{H}_5^\bullet]$, calculer les expressions des $[\text{R}_i]$ en fonction des k_j et de $[\text{C}_2\text{H}_6]$, et indiquer pour quelles températures le rapport $\frac{k' [\text{C}_2\text{H}_6]}{[\text{C}_2\text{H}_5^\bullet]}$ obtenu sous cette hypothèse est inférieur à $\frac{1}{100}$.

Dans toute la suite du problème, on supposera que la température vérifie la condition obtenue, et on négligera $k' [\text{C}_2\text{H}_6]$ devant $[\text{C}_2\text{H}_5^\bullet]$.

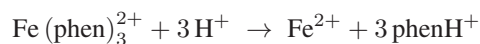
- On pose :

$$\frac{1}{\tau} = 3k_1 + \frac{k_3}{\sqrt{k}} \times \frac{k_2\sqrt{k} - k_5}{k_2\sqrt{k} + k_5}$$

- Vérifier que τ est positif.
- Déterminer l'expression de $[\text{C}_2\text{H}_6]$ en fonction du temps t lorsqu'à l'instant $t = 0$ on a de l'éthane pur, de concentration $[\text{C}_2\text{H}_6]_0 = C_0$. On exprimera $[\text{C}_2\text{H}_6](t)$ exclusivement en fonction de C_0 , t et τ .
- Exprimer, de même, les concentrations $[\text{CH}_4](t)$, $[\text{C}_2\text{H}_4](t)$ et $[\text{H}_2](t)$.

● **273** **Concours de la Banque PT**

1. Si la réaction :



est d'ordre 1 par rapport au complexe, sa vitesse s'écrit : $v = k [\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]$.

Aussi, la vitesse de formation du complexe $\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}$ est définie par :

$$\frac{d[\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]}{dt} = -v = -k [\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}] \Rightarrow \frac{d[\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]}{[\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]} = -k dt$$

En notant C_0 la concentration initiale de $\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}$ et C sa concentration à toute date t , l'équation différentielle s'intègre aisément :

$$\int_{C_0}^C \frac{d[\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]}{[\text{Fe}(\text{phen})_3^{2+}]} = -k \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{C}{C_0}\right) = -kt$$

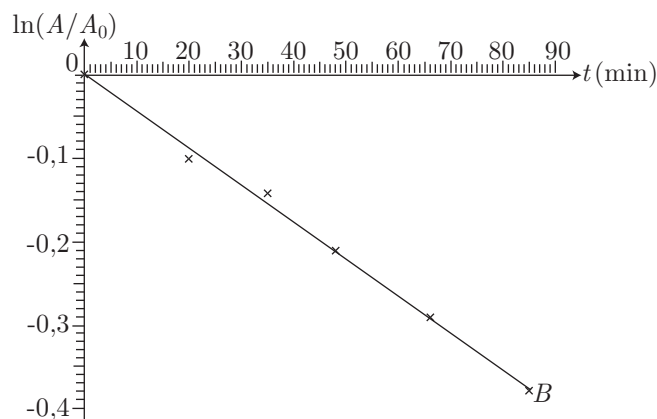
$$\Rightarrow C = C_0 e^{-kt}$$

2. (a) L'absorbance $A = \varepsilon \ell C$ étant proportionnelle à C , il s'ensuit que :

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\varepsilon \ell C}{\varepsilon \ell C_0} = \frac{C}{C_0} \Rightarrow \ln\left(\frac{C}{C_0}\right) = -kt$$

Aussi, la réaction est effectivement d'ordre 1 par rapport au complexe à condition que la courbe $\ln\left(\frac{C}{C_0}\right) = f(t)$ soit une droite, qui passe par l'origine et possède une pente négative.

t (min)	0	20	35	48	66	85
A	0,937	0,851	0,815	0,757	0,701	0,640
$\ln(A/0,937)$	0	-0,10	-0,14	-0,21	-0,29	-0,38



La courbe représentative de $\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = f(t)$ présentant les caractéristiques cherchées, elle confirme l'ordre 1 admis pour la réaction.

- (b) Le coefficient directeur $-k$ de cette droite s'obtient directement à partir des points $O(0, 0)$ et $B(85; -0,38)$ par lesquels elle passe :

$$-k = \frac{-0,38 - 0}{85 - 0} \Rightarrow k \simeq 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ min}^{-1}$$

● 274 Université Paris-Sud

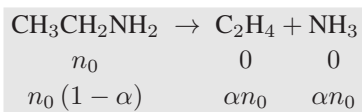
1. Soit n_0 le nombre initial de moles d'éthylamine, n_d celui de l'éthylamine dissociée et n_r celui d'éthylamine restante. Le coefficient α est défini par :

$$\alpha = \frac{n_d}{n_0} \Rightarrow n_d = \alpha n_0$$

tandis que la loi de conservation de la matière impose :

$$n_0 = n_d + n_r \Rightarrow n_r = n_0 - \alpha n_0 = n_0(1 - \alpha)$$

ce qui montre que l'avancement de la réaction vaut αn_0 . Par suite, le bilan molaire de la décomposition de l'éthylamine s'écrit :



Ce bilan montre qu'à une date t , le milieu contient des gaz parfaits, de quantité totale :

$$n_t = n_0(1 - \alpha) + \alpha n_0 + \alpha n_0 = n_0(1 + \alpha)$$

2. L'équation d'état du gaz parfait, contenu dans un volume V_0 et à la température T_0 constants, impose à $t = 0$ et à $t \neq 0$:

$$\begin{cases} p_0 V_0 = n_0 R T_0 \\ p V_0 = n_t R T_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \frac{n_t}{n_0} = 1 + \alpha \Rightarrow p = p_0(1 + \alpha) \quad (20)$$

3. (a) La concentration de l'éthylamine est définie par :

$$[\text{CH}_3\text{CH}_2\text{NH}_2] = \frac{n_r}{V_0} = \frac{n_0}{V_0}(1 - \alpha)$$

où α est accessible à partir du résultat (20) :

$$\frac{p}{p_0} = 1 + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{p - p_0}{p_0} \Rightarrow [\text{CH}_3\text{CH}_2\text{NH}_2] = \frac{2p_0 - p}{p_0} \times \frac{n_0}{V_0}$$

De fait, si la réaction est d'ordre 1, sa vitesse s'écrit :

$$v = k [\text{CH}_3\text{CH}_2\text{NH}_2] = k \times \frac{n_0}{p_0 V_0} \times (2p_0 - p)$$

tandis que la vitesse de formation de l'éthylamine est définie par :

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{CH}_3\text{CH}_2\text{NH}_2]}{dt} = -v &\Rightarrow -\frac{dp}{dt} \times \frac{n_0}{p_0 V_0} = -k \times \frac{n_0}{p_0 V_0} \times (2p_0 - p) \\ &\Rightarrow \frac{dp}{2p_0 - p} = k dt \end{aligned}$$

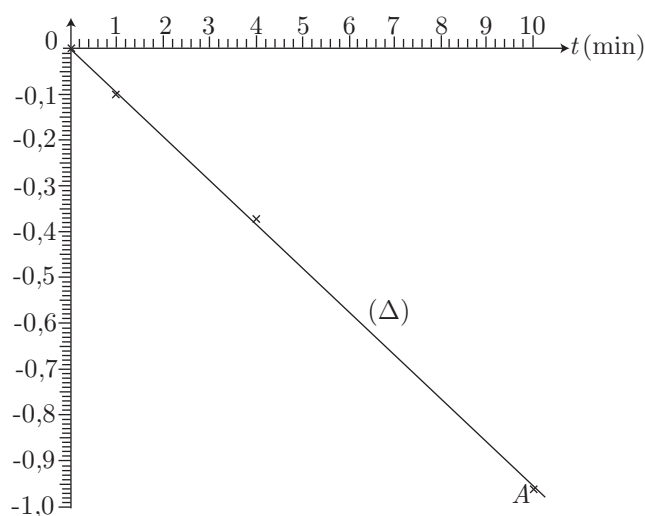
Sachant qu'à la date $t = 0$, p prend la valeur p_0 , cette équation différentielle conduit à :

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{2p_0 - p} = k \int_0^t dt \Rightarrow -\ln\left(\frac{2p_0 - p}{2p_0 - p_0}\right) = kt \quad (21)$$

$$\Rightarrow \ln\left(2 - \frac{p}{p_0}\right) = -kt \quad (22)$$

Représentons la courbe décrivant $\ln\left(2 - \frac{p}{p_0}\right) = f(t)$, avec $p_0 = 7240$ Pa :

t (min)	0	1	4	10
p (Pa)	7240	7900	9480	11720
$f(t)$	0	-0,10	-0,37	-0,96



La linéarité de cette courbe montre qu'il existe un nombre α (coefficient directeur) tel que :

$$\ln\left(2 - \frac{p}{p_0}\right) = \alpha t \text{ avec } \alpha = -k$$

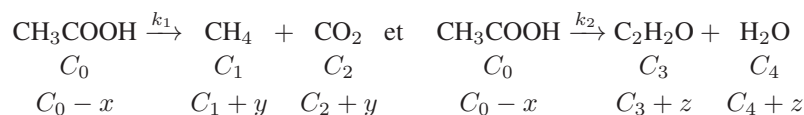
ce qui confirme la loi (22) et, par voie de conséquence, l'ordre 1 de la réaction.

- (b) Les points $O(0, 0)$ et $A(10; -0,96)$ étant situés sur la droite Δ , ils permettent le calcul de son coefficient directeur :

$$\alpha = \frac{-0,96 - 0}{10 - 0} = -0,096 \Rightarrow k = -\alpha = 0,096 \text{ min}^{-1}$$

● 275 **Concours des ENSI**

1. Un bilan des deux réactions permet d'expliciter les paramètres x , y , z et C_0 :



Soient :

$$v_1 = k_1 [\text{CH}_3\text{COOH}] = k_1 (C_0 - x) \text{ et } v_2 = k_2 [\text{CH}_3\text{COOH}] = k_2 (C_0 - x)$$

les vitesses de ces deux réactions, à partir desquelles sont définies les vitesses d'apparition de CH_4 et de $\text{C}_2\text{H}_2\text{O}$, de concentrations initiales respectives C_1 et C_3 :

$$\frac{d[\text{CH}_4]}{dt} = v_1 \Rightarrow \frac{d(C_1 + y)}{dt} = k_1 (C_0 - x) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = k_1 (C_0 - x)$$

et :

$$\frac{d[\text{C}_2\text{H}_2\text{O}]}{dt} = v_2 \Rightarrow \frac{d(C_3 + z)}{dt} = k_2 (C_0 - x) \Rightarrow \frac{dz}{dt} = k_2 (C_0 - x)$$

De même, la vitesse d'apparition de CH_3COOH est définie par :

$$\frac{d[\text{CH}_3\text{COOH}]}{dt} = -v_1 - v_2 \Rightarrow \frac{d(C_0 - x)}{dt} = -(k_1 + k_2) (C_0 - x) \quad (23)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = (k_1 + k_2) (C_0 - x) \quad (24)$$

2. Des trois résultats précédents, il ressort que :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} \Rightarrow x = y + z + \alpha$$

où α est une constante adaptée aux valeurs initialement nulles de x , y et z :

$$t = 0 \Rightarrow 0 = 0 + \alpha \Rightarrow x = y + z$$

3. L'équation (24) s'écrit aussi :

$$(k_1 + k_2) dt = \frac{dx}{C_0 - x}$$

qui s'intègre aisément, attendu que $x = 0$ à $t = 0$ et $x = 0,99 C_0$ à la date T :

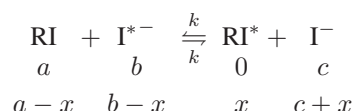
$$\begin{aligned} \int_0^T dt &= \frac{1}{k_1 + k_2} \int_0^{0,99 C_0} \frac{dx}{C_0 - x} = \frac{1}{k_1 + k_2} [-\ln(C_0 - x)]_0^{0,99 C_0} \\ &\Rightarrow T = \frac{1}{k_1 + k_2} \times \ln\left(\frac{C_0}{C_0 - 0,99 C_0}\right) \\ &\Rightarrow T = \frac{1}{k_1 + k_2} \times \ln(100) \end{aligned}$$

Application numérique :

$$T = \frac{\ln(100)}{3,75 + 4,65} \Rightarrow T = 0,55 \text{ s}$$

● 276 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Le bilan de la réaction :



permet d'exprimer la vitesse de la réaction :

$$\begin{aligned} v &= k[\text{RI}][\text{I}^{*-}] - k[\text{RI}^*][\text{I}^-] = k[(a-x)(b-x) - x(c+x)] \\ &= k[ab - (a+b+c)x] \end{aligned}$$

d'où se déduit la vitesse de formation de RI^* :

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{RI}^*]}{dt} = v &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = k[ab - (a+b+c)x] \\ &\Rightarrow dt = \frac{1}{k} \frac{dx}{ab - (a+b+c)x} \end{aligned}$$

Sachant qu'à la date $t = 0$, x est nul, l'intégration de cette équation différentielle fournit :

$$\begin{aligned} k \int_0^t dt &= \int_0^x \frac{dx}{ab - (a+b+c)x} \\ &\Rightarrow kt = -\frac{1}{a+b+c} \ln \left[\frac{ab - (a+b+c)x}{ab} \right] \end{aligned}$$

soit encore :

$$k = -\frac{1}{(a+b+c)t} \ln \left[1 - \frac{(a+b+c)x}{ab} \right] \quad (25)$$

2. Les activités de RI^* et de I^* sont définies par :

$$\begin{aligned} \frac{R_1}{R_2} &= \frac{[\text{RI}^*]}{[\text{RI}] + [\text{RI}^*]} \times \frac{[\text{I}^-] + [\text{I}^{*-}]}{[\text{I}^{*-}]} = \frac{x}{(a-x) + x} \times \frac{(c+x) + (b-x)}{b-x} \\ &\Rightarrow \gamma = \frac{R_1}{R_2} = \frac{(b+c)x}{a(b-x)} \Rightarrow ab\gamma - \gamma ax = (b+c)x \\ &\Rightarrow x = \frac{\gamma ab}{\gamma a + b + c} \end{aligned}$$

Le résultat (25) devient ainsi :

$$\begin{aligned}
 k &= -\frac{1}{(a+b+c)t} \ln \left(1 - \frac{a+b+c}{ab} \times \frac{\gamma ab}{\gamma a+b+c} \right) \\
 &= -\frac{1}{(a+b+c)t} \ln \left[1 - \frac{\gamma(a+b+c)}{\gamma a+b+c} \right] \\
 &= -\frac{1}{(a+b+c)t} \ln \left[\frac{(1-\gamma)(b+c)}{\gamma a+b+c} \right] \\
 \Rightarrow k &= \frac{1}{(a+b+c)t} \ln \left[\frac{\gamma a+b+c}{(1-\gamma)(b+c)} \right]
 \end{aligned}$$

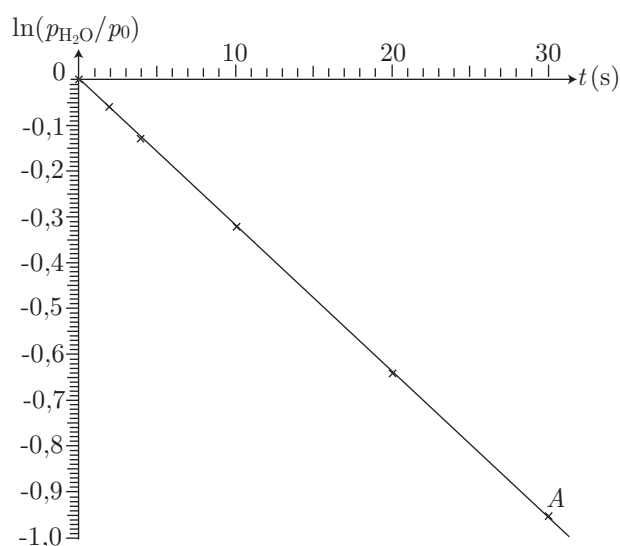
Application numérique :

$$\begin{aligned}
 k &= \frac{1}{(0,1377 + 0,16) \times 2100} \times \ln \left[\frac{0,39 \times 0,1377 + 0,16}{(1 - 0,39) \times 0,16} \right] \\
 \Rightarrow k &= 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ L} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}
 \end{aligned}$$

● 277 ————— Concours « Vétô »

1. Les données numériques fournies par l'énoncé permettent la représentation graphique de la fonction $\ln \left(\frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{p_0} \right)$ en fonction de t , où $p_0 = 20$ bar désigne $p_{\text{H}_2\text{O}}$ à l'instant $t = 0$.

t (s)	0	2	4	10	20	30
$p_{\text{H}_2\text{O}}$ (bars)	20	18,76	17,61	14,55	10,58	7,70
$\ln(p_{\text{H}_2\text{O}}/p_0)$	0	-0,06	-0,13	-0,32	-0,64	-0,95



La linéarité de cette courbe montre qu'il existe un nombre a (valeur absolue du coefficient directeur de la droite) tel que :

$$\ln\left(\frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{p_0}\right) = -at \Rightarrow p_{\text{H}_2\text{O}} = p_0 e^{-at} \quad (26)$$

La dérivation de cette relation par rapport à t fournit :

$$\ln(p_{\text{H}_2\text{O}}) - \ln p_0 = -at \Rightarrow \frac{1}{p_{\text{H}_2\text{O}}} \times \frac{dp_{\text{H}_2\text{O}}}{dt} = -a \Rightarrow \frac{dp_{\text{H}_2\text{O}}}{dt} = -a p_{\text{H}_2\text{O}} \quad (27)$$

où la pression partielle $p_{\text{H}_2\text{O}}$ est définie à partir de l'équation d'état des gaz parfaits, appliquée aux $n_{\text{H}_2\text{O}}$ moles d'eau gazeuse :

$$p_{\text{H}_2\text{O}}V = n_{\text{H}_2\text{O}}RT \Rightarrow p_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{n_{\text{H}_2\text{O}}}{V} RT = [\text{H}_2\text{O}] RT$$

Ce faisant, l'équation (27) devient :

$$RT \frac{d[\text{H}_2\text{O}]}{dt} = -a [\text{H}_2\text{O}] \times RT \Rightarrow \frac{d[\text{H}_2\text{O}]}{dt} = -a [\text{H}_2\text{O}] \quad (28)$$

En outre, la vitesse v de la réaction : $2\text{H}_2\text{O} \rightarrow 2\text{H}_2 + \text{O}_2$ est définie par :

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}]}{dt} = 2v \text{ avec } v = k [\text{H}_2\text{O}]^\alpha$$

où α représente l'ordre partiel par rapport à H_2O . L'identification avec le résultat (28) conduit à :

$$-a [\text{H}_2\text{O}] = -2k [\text{H}_2\text{O}]^\alpha \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ \alpha = 1 \end{cases}$$

La valeur $\alpha = 1$ confirme que la réaction est d'ordre 1 et la valeur $a = 2k$ permet, à l'aide de l'identité (26), d'obtenir : $p_{\text{H}_2\text{O}} = p_0 e^{-2kt}$

2. La droite $\ln\left(\frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{p_0}\right) = f(t)$ passe par les points $O(0, 0)$ et $A(30 \text{ s}; -0,95)$, en raison de quoi son coefficient directeur a pour valeur absolue :

$$a = \left| \frac{-0,95 - 0}{30 - 0} \right| = 0,032 \Rightarrow k = \frac{a}{2} = 0,016 \text{ s}^{-1}$$

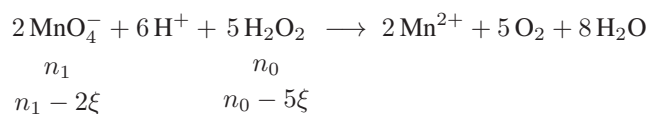
3. À la date $t = 0$, $[\text{H}_2\text{O}]$ prend la valeur $C_0 = \frac{n_0}{V}$, tandis qu'à la date τ cette concentration prend la valeur $\frac{C_0}{2}$. Compte tenu de la proportionnalité observée pour $p_{\text{H}_2\text{O}}$ et $[\text{H}_2\text{O}]$, la loi (26) devient :

$$\ln\left(\frac{[\text{H}_2\text{O}]}{C_0}\right) = -at = -2kt \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -2k\tau \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{2k} = 21,7 \text{ s}$$

● 278 ————— Lycée Condorcet, Paris

1. En introduisant $n_1 = C_1 \times v \cdot 10^{-3}$ mole d'ions MnO_4^- dans le milieu réactionnel, contenant $n_0 = 10 \cdot 10^{-3} \times C$ mole de H_2O_2 , on permet à la réaction de dosage de

se produire :



jusqu'à disparition simultanée de H_2O_2 et de MnO_4^- (le milieu réactionnel prend ensuite la teinte violette caractéristique des ions MnO_4^- restant en solution). Ceci se produit lorsque ξ vérifie :

$$\begin{cases} n_1 - 2\xi = 0 \\ n_0 - 5\xi = 0 \end{cases} \Rightarrow \xi = \frac{n_1}{2} = \frac{n_0}{5} \Rightarrow n_0 = \frac{5}{2} n_1 \Rightarrow 10^{-2} C = \frac{5}{2} C_1 \times v \times 10^{-3}$$

soit encore :

$$C = \frac{C_1}{4} \times v$$

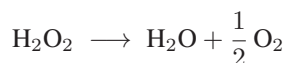
En notant $C_0 = \frac{C_1}{4} \times v_0$ la concentration initiale en H_2O_2 et $v_0 = 12,3 \text{ mL}$ la valeur de v à la date $t = 0$, cette relation devient aussi :

$$C = C_0 \times \frac{v}{v_0} \quad (29)$$

2. Si la réaction est d'ordre 1 par rapport à H_2O_2 , sa vitesse s'écrit :

$$v = k [\text{H}_2\text{O}_2] = k C$$

tandis que la vitesse d'apparition de H_2O_2 au cours de la réaction de dismutation :



est définie par :

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}_2]}{dt} = -v \Rightarrow \frac{dC}{dt} = -k C \Rightarrow \frac{dC}{C} = -k dt$$

Or, à la date $t = 0$, C prend la valeur C_0 , en conséquence de quoi :

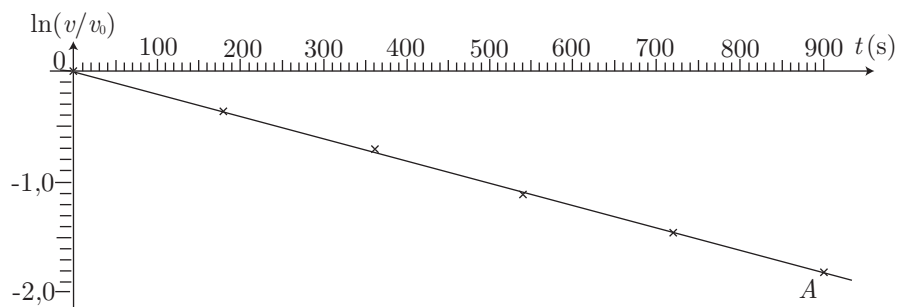
$$\int_{C_0}^C \frac{dC}{C} = -k \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{C}{C_0}\right) = -kt \quad (30)$$

c'est-à-dire, compte tenu du résultat (29) :

$$\frac{C}{C_0} = \frac{v}{v_0} \Rightarrow \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -kt$$

3. Si la loi précédente est exacte, la représentation graphique de $\ln\left(\frac{v}{v_0}\right)$ (avec $v_0 = 12,3 \text{ mL}$) en fonction de t doit être une droite, de coefficient directeur $a = -k$ et passant par l'origine. C'est pourquoi il convient de représenter graphiquement la fonction $\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = f(t)$.

t (s)	0	180	360	540	720	900
v (mL)	12,3	8,4	6,1	4,1	2,9	2,0
$\ln(v/v_0)$	0	-0,38	-0,70	-1,10	-1,44	-1,82



La linéarité de cette courbe confirme finalement l'ordre 1 adopté pour la réaction. En outre, la pente a de cette droite s'obtient aisément à l'aide des points $O(0, 0)$ et $A(900; -1,82)$ qui lui appartiennent :

$$a = \frac{-1,82}{900} = -k \Rightarrow k = 2,02 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$$

Quant à la relation (30), elle permet de trouver le temps de demi-réaction τ au bout duquel $C = \frac{C_0}{2}$:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -k\tau \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{k} = 343 \text{ s}$$

4. Au cours du dosage par le permanganate de potassium, la réaction $\text{H}_2\text{O}_2 \rightarrow \text{H}_2\text{O} + \frac{1}{2} \text{O}_2$ peut se poursuivre, ce qui fausserait inévitablement les résultats. Plusieurs solutions sont alors envisageables :

- la *trempe*, qui consiste à diluer tous les réactifs ; la vitesse $v = k [\text{H}_2\text{O}_2]$ de cette réaction est alors réduite .
- un abaissement brutal de la température du milieu réactionnel (la constante $k = A e^{-E_a/RT}$ diminue ainsi).
- la précipitation des ions Fe^{3+} ; l'absence de catalyseur annule pratiquement la vitesse de cette réaction.

● 279 ————— Concours des Ponts et Chaussées

1. Le temps de demi-réaction $t_{1/2}$ est le temps que met une réaction chimique pour consommer la moitié de son réactif en défaut.
2. La vitesse d'une réaction $\text{A} \xrightarrow{k} \text{B}$ est définie par :

$$v = k [\text{A}]^\alpha$$

où α est l'ordre partiel par rapport à A.

En outre, la vitesse d'apparition de A :

$$\frac{d[A]}{dt} = -v = -k [A]^\alpha$$

dépend étroitement de α .

- Pour une réaction d'ordre 0 ($\alpha = 0$) :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k \Rightarrow d[A] = -k dt$$

de sorte qu'à la date $t_{1/2}$, $[A] = \frac{[A]_0}{2}$ prend la moitié de la valeur initiale de $[A]_0$:

$$\int_{[A]_0}^{[A]_0/2} d[A] = -k \int_0^{t_{1/2}} dt \Rightarrow \frac{[A]_0}{2} - [A]_0 = -kt_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{[A]_0}{2k}$$

- Pour une réaction d'ordre 1 ($\alpha = 1$) :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k [A] \quad (31)$$

$$\Rightarrow \frac{d[A]}{[A]} = -k dt \Rightarrow \int_{[A]_0}^{[A]_0/2} \frac{d[A]}{[A]} = -k \int_0^{t_{1/2}} dt \quad (32)$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -kt_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \quad (33)$$

- Pour une réaction d'ordre 2 ($\alpha = 2$) :

$$\frac{d[A]}{dt} = -k [A]^2 \Rightarrow -\frac{d[A]}{[A]^2} = k dt \Rightarrow \int_{[A]_0}^{[A]_0/2} -\frac{d[A]}{[A]^2} = k \int_0^{t_{1/2}} dt$$

$$\Rightarrow \frac{2}{[A]_0} - \frac{1}{[A]_0} = kt_{1/2} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{1}{k [A]_0}$$

3. Les concentrations initiales $[RBr]_0 = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{HO}^-]_{01} = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ montrent que $[\text{HO}^-]_{01} \gg [RBr]_0$, si bien qu'au cours de la réaction de HO^- sur RBr , on pourra considérer $[\text{HO}^-]$ constant et égal à $[\text{HO}^-]_{01}$. Dès lors, si β désigne l'ordre de cette réaction par rapport à HO^- , la loi de vitesse se simplifie :

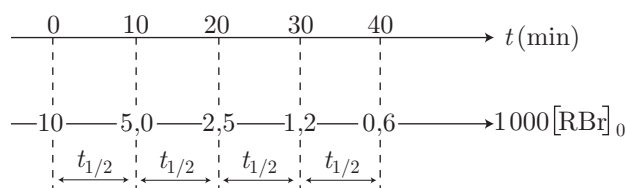
$$v = k [\text{HO}^-]_{01}^\beta [RBr]^\alpha \Rightarrow v = k_{\text{app}} [RBr]^\alpha$$

où :

$$k_{\text{app}} = k [\text{HO}^-]_{01}^\beta \quad (34)$$

désigne la constante apparente de la réaction (il y a dégénérescence de l'ordre).

Compte tenu des valeurs proposées par l'énoncé, on peut distinguer plusieurs valeurs du temps de demi-réaction, selon que $[RBr]_0$ vaille $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ou $1,2 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ (temps au bout duquel la moitié de RBr est consommé) :



Dans tous les cas, le temps de demi-réaction prend la même valeur :

$$t_{1/2} = 10 \text{ min}$$

Cette étude montre que le temps de demi-réaction ne dépend pas de $[\text{RBr}]_0$ ce qui signifie que, conformément aux résultats de la question 2., la réaction est d'ordre 1 par rapport à RBr :

$$v = k_{\text{app}} [\text{RBr}] \text{ avec } k_{\text{app}} = k [\text{HO}^-]_{01}^\beta$$

Quant à la constante k_{app} , sa valeur numérique s'obtient grâce au résultat (33) :

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_{\text{app}}} \Rightarrow k_{\text{app}} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \quad (35)$$

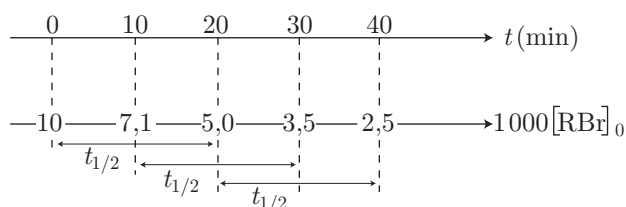
Application numérique :

$$k_{\text{app}} = \frac{\ln 2}{10} = 6,93 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1}$$

4. (a) À nouveau, les concentrations $[\text{RBr}]_0 = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \ll [\text{HO}^-]_{02} = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ permettent d'affirmer qu'il existe une dégénérescence de l'ordre :

$$v = k'_{\text{app}} [\text{RBr}]^\alpha \text{ avec } k'_{\text{app}} = k [\text{HO}^-]_{02}^\beta$$

En outre, les valeurs numériques proposées permettent de distinguer trois temps de demi-réaction, au bout desquels $[\text{RBr}]$ est divisé par 2 :



Ces temps de demi-réaction admettent une valeur commune :

$$t_{1/2} = 20 \text{ min}$$

indépendante de la valeur choisie pour $[\text{RBr}]_0$. Conformément aux résultats de la question 2., un tel comportement confirme que la réaction est d'ordre 1 par rapport à RBr :

$$v = k'_{\text{app}} [\text{RBr}] \text{ avec } k'_{\text{app}} = k [\text{HO}^-]_{02}^\beta$$

où k'_{app} est accessible à partir de l'identité (35) :

$$k'_{\text{app}} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{20} \Rightarrow k'_{\text{app}} = 3,47 \cdot 10^{-2} \text{ min}^{-1}$$

(b) Les définitions des constantes apparentes :

$$\begin{cases} k_{\text{app}} = k [\text{HO}^-]_{01}^\beta \text{ avec } [\text{HO}^-]_{01} = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ k'_{\text{app}} = k [\text{HO}^-]_{02}^\beta \text{ avec } [\text{HO}^-]_{02} = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{cases}$$

conduisent à :

$$\frac{k_{\text{app}}}{k'_{\text{app}}} = \frac{[\text{HO}^-]_{01}^\beta}{[\text{HO}^-]_{02}^\beta} = \left(\frac{1}{0,5}\right)^\beta = 2^\beta$$

où les valeurs numériques de k_{app} et de k'_{app} sont connues :

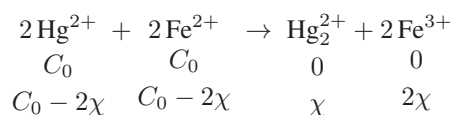
$$\begin{cases} k_{\text{app}} = \frac{\ln 2}{10} \\ k'_{\text{app}} = \frac{\ln 2}{20} \end{cases} \Rightarrow \frac{k_{\text{app}}}{k'_{\text{app}}} = \frac{20}{10} = 2 \Rightarrow 2^\beta = 2 \Rightarrow \beta = 1$$

Finalement, la réaction entre RBr et HO^- admet pour loi de vitesse :

$$v = k [\text{RBr}] [\text{HO}^-]$$

● 280 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. En notant $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, le bilan de la réaction :



révèle que $[\text{Hg}^{2+}] = [\text{Fe}^{2+}]$, de sorte que la vitesse de la réaction s'écrit :

$$-\frac{1}{2} \frac{d[\text{Hg}^{2+}]}{dt} = k [\text{Hg}^{2+}]^q [\text{Fe}^{2+}]^p = k [\text{Hg}^{2+}]^{p+q} = k [\text{Hg}^{2+}]^n \quad (36)$$

En outre, les résultats de la première expérience révèlent que le temps de demi-réaction varie inversement à la concentration initiale (pour une concentration initiale de $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, ce temps vaut 10^5 s , tandis que pour une concentration initiale de $0,50 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, il vaut $3 \cdot 10^5 - 10^5 = 2 \cdot 10^5 \text{ s}$), ce qui suggère un ordre 2. Si tel est le cas, la loi (36) devient :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \frac{d[\text{Hg}^{2+}]}{dt} &= k [\text{Hg}^{2+}]^2 \Rightarrow -\frac{d[\text{Hg}^{2+}]}{[\text{Hg}^{2+}]^2} = 2k dt \\ &\Rightarrow \int_{[\text{Hg}^{2+}]_0}^{[\text{Hg}^{2+}]} -\frac{d[\text{Hg}^{2+}]}{[\text{Hg}^{2+}]^2} = 2k \int_0^t dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{[\text{Hg}^{2+}]} - \frac{1}{[\text{Hg}^{2+}]_0} = 2kt \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{[\text{Hg}^{2+}]_0}{[\text{Hg}^{2+}]} - 1 = 2k [\text{Hg}^{2+}]_0 t = 2kC_0 t \Rightarrow \frac{[\text{Hg}^{2+}]_0}{[\text{Hg}^{2+}]} = 1 + 2kC_0 t$$

Ce résultat signifie également que si $n = 2$, la courbe représentative de la fonction $\frac{[\text{Hg}^{2+}]_0}{[\text{Hg}^{2+}]} = f(t)$ est une droite de pente $a = 2kC_0$.

t (s)	0	10^5	$2 \cdot 10^5$	$3 \cdot 10^5$
$\frac{[\text{Hg}^{2+}]_0}{[\text{Hg}^{2+}]}$	1	2	3	4

La linéarité de ces résultats paraît évidente dans ce tableau, ce qui permet de conclure que :

$$n = p + q = 2 \quad (37)$$

et :

$$2kC_0 = a = \frac{4 - 1}{3 \cdot 10^5} = 10^{-5} \Rightarrow k = \frac{10^{-5}}{2 \times 0,1} \Rightarrow k = 5 \cdot 10^{-5} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (38)$$

Quant aux concentrations initiales de la seconde expérience :

$$[\text{Fe}^{2+}]_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \gg [\text{Hg}^{2+}]_0 = 0,001 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

elles suggèrent que $[\text{Fe}^{2+}]$ s'écarte peu de sa valeur initiale, en conséquence de quoi l'approximation : $[\text{Fe}^{2+}] \simeq [\text{Fe}^{2+}]_0$ provoque la dégénérescence de l'ordre de la réaction :

$$v = k [\text{Fe}^{2+}]^p \times [\text{Hg}^{2+}]^q = k [\text{Fe}^{2+}]_0^p \times [\text{Hg}^{2+}]^q = k_{\text{app}} \times [\text{Hg}^{2+}]^q$$

ce qui introduit une constante apparente : $k_{\text{app}} = k [\text{Fe}^{2+}]_0^p$. Par suite, la loi de vitesse s'écrit :

$$v = -\frac{1}{2} \frac{d[\text{Hg}^{2+}]}{dt} = k_{\text{app}} \times [\text{Hg}^{2+}]^q$$

Si l'on suppose que q vaut 1, cette loi devient :

$$\frac{d[\text{Hg}^{2+}]}{[\text{Hg}^{2+}]} = -2k_{\text{app}} dt \Rightarrow \int_{[\text{Hg}^{2+}]_0}^{[\text{Hg}^{2+}]} \frac{d[\text{Hg}^{2+}]}{[\text{Hg}^{2+}]} = -2k_{\text{app}} \int_0^t dt$$

ce qui conduit à :

$$\ln \left(\frac{[\text{Hg}^{2+}]}{[\text{Hg}^{2+}]_0} \right) = -2k_{\text{app}} \times t$$

Ce résultat signifie que, si $q = 1$, la courbe représentative de $f = \ln \left(\frac{[\text{Hg}^{2+}]}{[\text{Hg}^{2+}]_0} \right)$ en fonction de t est une droite de pente $a' = -2k_{\text{app}}$.

$10^{-5}t$ (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0
f	0	-0,54	-1,06	-1,58	-2,10

La linéarité de cette courbe permet de confirmer que :

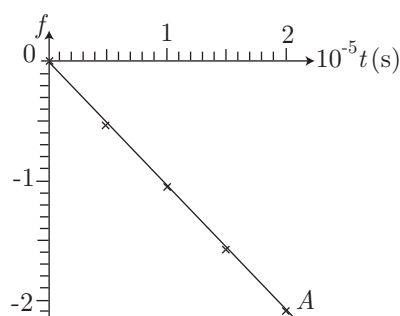
$$q = 1$$

tandis que le résultat (37) révèle que :

$$p + q = 2 \Rightarrow p = 2 - q \Rightarrow p = 1$$

Aussi, la loi de vitesse de la réaction adopte la forme :

$$v = -\frac{1}{2} \frac{d[\text{Hg}^{2+}]}{dt} = k [\text{Hg}^{2+}] [\text{Fe}^{2+}]$$



2. Le point A (2.10⁵ ; -2,10) appartenant à la droite précédente, il est possible de calculer la pente a' de cette droite :

$$a' = \frac{-2,10}{2.10^5} = -1,05.10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

où la définition de la constante apparente : $k_{\text{app}} = k [\text{Fe}^{2+}]_0^p$ conduit à :

$$\begin{aligned} 2k_{\text{app}} = -a' &\Rightarrow 2k [\text{Fe}^{2+}]_0 = 1,05.10^{-5} \\ \Rightarrow k &= \frac{1,05.10^{-5}}{2 \times 0,1} \Rightarrow k = 5,25.10^{-5} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \quad (39) \end{aligned}$$

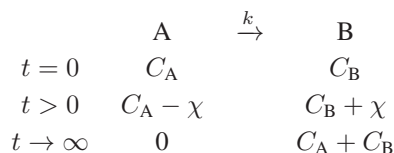
Finalement, les résultats (38) et (39) permettent de conclure que :

$$5.10^{-5} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \leq k \leq 5,25.10^{-5} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

● 281 ————— Lycée Fabert, Metz

1. Démonstration préliminaire

Soient C_A et C_B les concentrations initiales de A et B, impliqués dans l'équation-bilan :



La vitesse de la réaction (d'ordre 1 par rapport à A) : $v = k [A]$ est associée à la vitesse d'apparition de A, définie par :

$$\frac{d[A]}{dt} = -v = -k [A] \Rightarrow \frac{d[A]}{[A]} = -k dt \Rightarrow \int_{C_A}^{[A]} \frac{d[A]}{[A]} = -k \int_0^t dt$$

Cette équation révèle que :

$$\ln \left(\frac{[A]}{C_A} \right) = -k t \quad (40)$$

Or, à la date $t = 0$, la grandeur D vaut :

$$D_0 = D_S + \varepsilon_A [A]_0 + \varepsilon_B [B]_0 = D_S + \varepsilon_A C_A + \varepsilon_B C_B$$

tandis que, lorsque t tend vers l'infini, $[A]_{\infty} = 0$ et $[B]_{\infty} = C_A + C_B$ confèrent à D la valeur :

$$D_{\infty} = D_S + \varepsilon_B (C_A + C_B)$$

Par suite :

$$D_0 - D_{\infty} = (\varepsilon_A - \varepsilon_B) C_A \Rightarrow C_A = \frac{D_0 - D_{\infty}}{\varepsilon_A - \varepsilon_B} \quad (41)$$

De même, à toute date t :

$$D_t = D_S + \varepsilon_A [A] + \varepsilon_B [B] \Rightarrow D_t - D_{\infty} = \varepsilon_A [A] + \varepsilon_B ([B] - C_A - C_B)$$

où le bilan de la réaction révèle que :

$$\begin{aligned} [A] + [B] &= (C_A - \chi) + (C_B + \chi) = C_A + C_B \Rightarrow [B] - C_A - C_B = -[A] \\ &\Rightarrow D_t - D_{\infty} = (\varepsilon_A - \varepsilon_B) [A] \end{aligned}$$

en conséquence de quoi :

$$[A] = \frac{D_t - D_{\infty}}{\varepsilon_A - \varepsilon_B} \quad (42)$$

Compte tenu des identités (42) et (41), le résultat (40) devient :

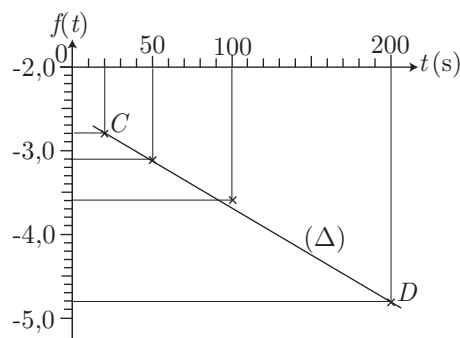
$$\ln \left| \frac{D_t - D_{\infty}}{D_0 - D_{\infty}} \right| = -kt \Rightarrow \ln |D_t - D_{\infty}| = \ln |D_0 - D_{\infty}| - kt \quad (43)$$

2. Étude de la réaction globale de la libération du fer par H^+

- (a) Si la réaction est d'ordre 1 par rapport à FeL, la loi précédente montre que le tracé de $\ln |D_t - D_{\infty}| = f(t)$ doit être une droite de coefficient directeur $a = -k$. Aussi en choisissant $D_{\infty} = 28.10^{-4}$, le tableau suivant :

t (s)	20	50	100	200	1 000
$10^4 \times D$	661	492	298	108	28
$f(t)$	-2,8	-3,1	-3,6	-4,8	-

confirme ce résultat, étant donné la linéarité de la courbe obtenue :



- (b) Compte tenu du mode opératoire : $[FeL]_0 \ll [H^+]_0$, la concentration $[H^+]$ varie peu, de sorte que si k_0 désigne la constante de vitesse de la réaction et α son ordre par rapport à $[H^+]$, la vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} v &= k_0 [H^+]^{\alpha} \times [FeL] \simeq k_0 [H^+]_0^{\alpha} \times [FeL] \text{ car } [H^+] \simeq [H^+]_0 \\ &= k_{app} \times [FeL] \text{ avec } k_{app} = k_0 [H^+]_0^{\alpha} \end{aligned}$$

C'est pourquoi k_{app} peut s'identifier à $k = -a$, où le coefficient directeur est accessible à partir des points $C(20; -2,8)$ et $D(200; -4,8)$ qui appartiennent à la droite (Δ) :

$$a = \frac{-4,8 + 2,8}{200 - 20} = -0,01 \Rightarrow k_{\text{app}} \simeq 0,01 \text{ s}^{-1}$$

- (c) Le temps de demi-réaction τ est le temps au bout duquel la concentration $[A]$ vaut la moitié de sa valeur initiale, c'est-à-dire $[A]_{\tau} = \frac{C_A}{2}$. Ce faisant, la relation (40) s'écrit :

$$\ln\left(\frac{[A]_{\tau}}{C_A}\right) = -k_{\text{app}} \tau \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -k_{\text{app}} \tau \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{k_{\text{app}}}$$

Application numérique :

$$\tau = \frac{\ln 2}{0,01} \Rightarrow \tau = 69,3 \text{ s}$$

Le temps est considéré comme infini dès qu'il atteint $10 \times \tau$, c'est-à-dire :

$$t_{\infty} = 693 \text{ s}$$

ce qui justifie qu'à la date $t = 1000 \text{ s}$, $D = 28.10^{-4}$ ait été assimilé à D_{∞} .

● 282 ————— Lycée Charlemagne, Paris

1. (a) A étant un gaz parfait, sa quantité de matière n_A vérifie l'équation d'état :

$$p_A V_0 = n_A R T_0 \Rightarrow \frac{n_A}{V_0} = \frac{1}{R T_0} p_A$$

où l'on reconnaît la définition de la concentration $[A] = \frac{n_A}{V_0}$. Par suite, la vitesse de formation de A est définie par :

$$\frac{d[A]}{dt} = \frac{1}{R T_0} \frac{dp_A}{dt}$$

et est liée à la vitesse $v = k [A]^{3/2}$ de la réaction :

$$\begin{aligned} \frac{d[A]}{dt} = -v &\Rightarrow \frac{1}{R T_0} \frac{dp_A}{dt} = -k [A]^{3/2} = -k \frac{p_A^{3/2}}{(R T_0)^{3/2}} \\ &\Rightarrow \frac{dp_A}{dt} = -\frac{k}{\sqrt{R T_0}} \times p_A^{3/2} \end{aligned}$$

Ce faisant, il est possible d'introduire une constante k_p telle que :

$$\frac{dp_A}{dt} = -k_p \times p_A^{3/2} \text{ avec } k_p = \frac{k}{\sqrt{R T_0}} \quad (44)$$

(b) Cette équation différentielle se présente aussi sous la forme suivante :

$$\frac{dp_A}{p_A^{3/2}} = -k_p dt$$

c'est-à-dire, compte tenu de la valeur initiale p_0 de p_A :

$$\int_{p_0}^{p_A} p_A^{-3/2} dp_A = -k_p \int_0^t dt \quad (45)$$

$$\Rightarrow \left[-2 p_A^{-1/2} \right]_{p_0}^{p_A} = -k_p \times t \quad (46)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p_A}} - \frac{1}{\sqrt{p_0}} = \frac{k_p}{2} t \quad (47)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{p_A}} = \frac{1}{\sqrt{p_0}} + \frac{k_p t}{2} = \frac{2 + k_p t \sqrt{p_0}}{2\sqrt{p_0}} \quad (48)$$

d'où découle l'expression de p_A en fonction du temps t :

$$p_A = \frac{4 p_0}{(2 + k_p t \sqrt{p_0})^2}$$

Initialement, n_0 moles de A ont été introduites dans le réacteur, sous une pression p_0 telle que :

$$p_0 V_0 = n_0 R T_0 \Rightarrow \frac{R T_0}{V_0} = \frac{p_0}{n_0}$$

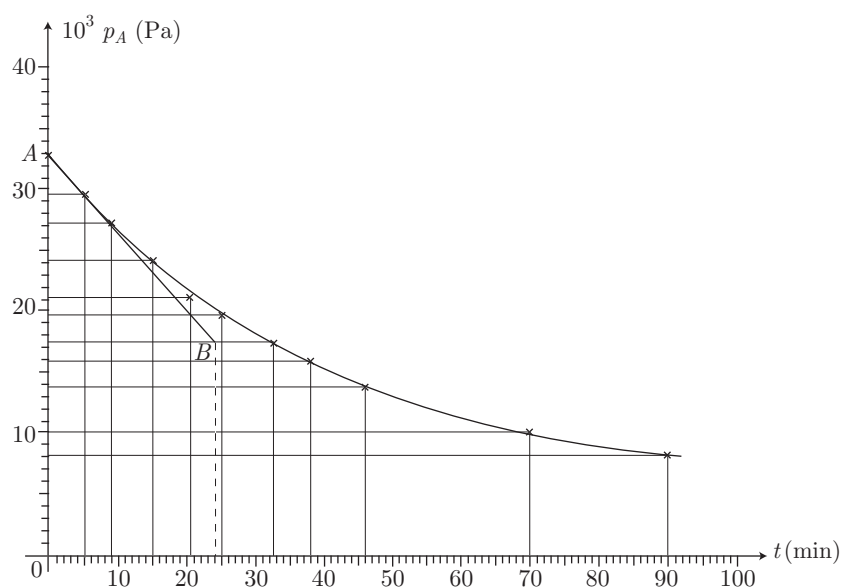
Quant au temps de demi-réaction, il représente le temps τ pour lequel la moitié de la quantité initiale de A reste dans le réacteur, soit $n_\tau = \frac{n_0}{2}$ moles, laquelle est associée à une pression partielle $p_A(\tau)$ en A telle que :

$$p_A(\tau) V_0 = n_\tau R T_0 \Rightarrow p_A(\tau) = \frac{n_0 R T_0}{2 V_0} = \frac{p_0}{2}$$

Ce faisant, à la date τ , l'identité (47) devient :

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{p_0}} - \frac{1}{\sqrt{p_0}} = \frac{k_p}{2} \tau \Rightarrow \tau = \frac{2(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{p_0} k_p}$$

2. (a) La représentation graphique de p_A en fonction de t :



permet d'accéder à la pente a de la tangente (AB) de la courbe, à la date $t = 0$, grâce aux points $A (0; 32,9 \cdot 10^3)$ et $B (24; 17,4 \cdot 10^3)$:

$$a = \frac{17,4 \cdot 10^3 - 32,9 \cdot 10^3}{24} = -646 \text{ Pa} \cdot \text{min}^{-1}$$

Or, étant donné que cette courbe représente également $p_A(t)$, la dérivée

$$\left. \frac{dp_A}{dt} \right|_{t=0} = -v_0 \text{ s'identifie à } a :$$

$$v_0 = -a \Rightarrow v_0 = 646 \text{ Pa} \cdot \text{min}^{-1}$$

(b) Si α désigne l'ordre de la réaction par rapport à A, sa vitesse est définie par :

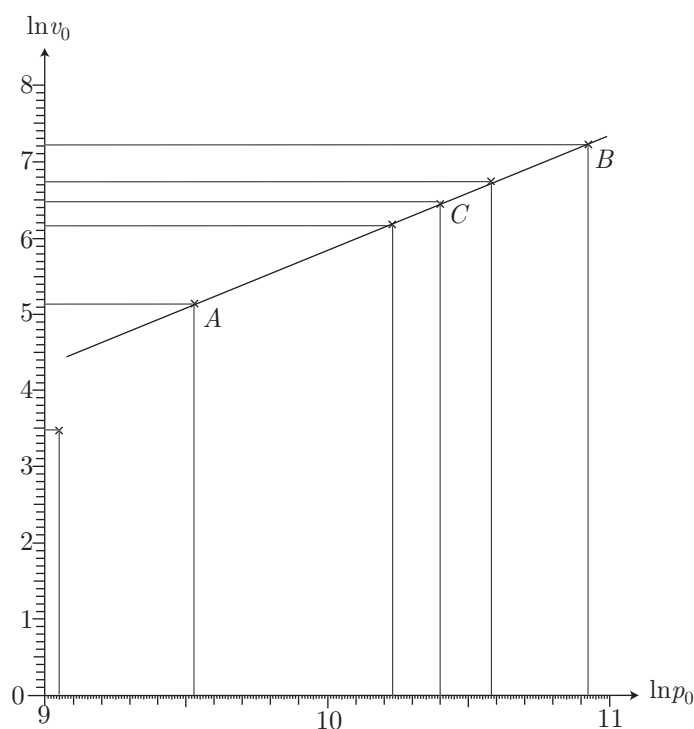
$$v_p = k_p \times p_A^\alpha \Rightarrow \ln v_p = \ln k_p + \alpha \ln p_A$$

ce qui devient à la date $t = 0$:

$$\ln v_0 = \ln k_p + \alpha \ln p_0$$

Aussi, la représentation graphique de la courbe $\ln v_0$ en fonction de $\ln p_0$ donne accès à α .

p_0 (10^3 Pa)	8,55	13,7	27,6	32,9	39,5	55,3
v_0 ($\text{Pa} \cdot \text{min}^{-1}$)	32,1	170	477	646	830	1 350
$\ln p_0$	9,05	9,53	10,23	10,40	10,58	10,92
$\ln v_0$	3,47	5,14	6,17	6,47	6,72	7,21



Les points $A(9,53; 5,14)$ et $B(10,92; 7,21)$ appartenant à cette droite (de même que le point C dont les coordonnées sont issues de la question précédente), fournissent son coefficient directeur :

$$\alpha = \frac{7,21 - 5,14}{10,92 - 9,53} \Rightarrow \alpha = 1,49 \simeq \frac{3}{2}$$

En outre, le point A (ou B) permet d'accéder à k_p :

$$\begin{aligned} v_0 &= k_p \times p_0^{3/2} \Rightarrow k_p = \frac{v_0}{p_0^{3/2}} = \frac{170}{(13,7 \cdot 10^3)^{3/2}} \\ &\Rightarrow k_p = 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ Pa}^{-1/2} \cdot \text{min}^{-1} \end{aligned}$$

Quant à la relation (44), elle donne accès à la constante k :

$$k = k_p \sqrt{RT_0}$$

où $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $T_0 = 504 + 273 = 777 \text{ K}$:

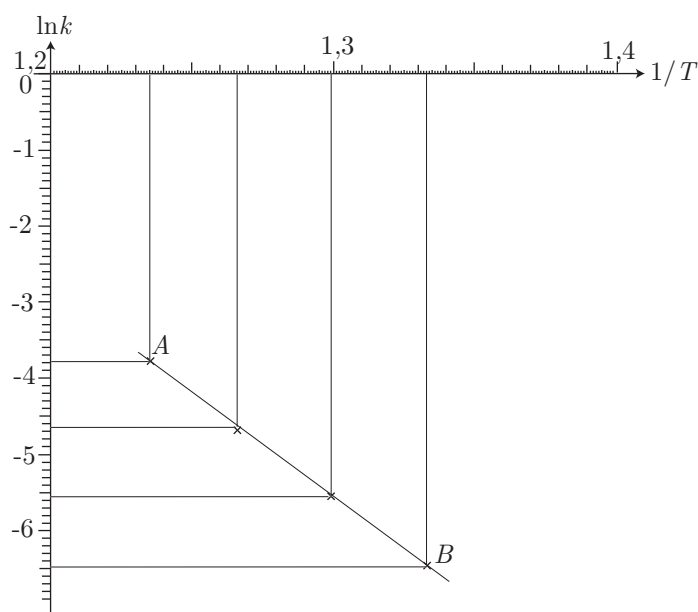
$$k = 1,06 \cdot 10^{-4} \times \sqrt{8,32 \times 777} \Rightarrow k = 8,52 \cdot 10^{-3} \text{ mol}^{-1/2} \cdot \text{L}^{1/2} \cdot \text{min}^{-1}$$

(c) La constante k obéit à la loi d'Arrhénius :

$$k = A e^{-E_a/RT} \Rightarrow \ln k = \ln A - \frac{E_a}{R} \times \frac{1}{T}$$

où E_a désigne l'énergie d'activation de la réaction. Aussi, le tracé de $\ln k$ en fonction de $\frac{1}{T}$ (en K^{-1}) doit être une droite de pente $b = -\frac{E_a}{R}$.

T ($^{\circ}\text{C}$)	477	497	517	537
T (K)	750	770	790	810
k ($10^{-3} \text{ mol}^{-1/2} \cdot \text{L}^{1/2} \cdot \text{s}^{-1}$)	1,53	3,94	9,61	22,51
$1/T$ (10^{-3} K^{-1})	1,333	1,299	1,266	1,235
$\ln k$	-6,48	-5,53	-4,64	-3,79



La courbe représentative de $\ln k$ en fonction de $\frac{1}{T}$ est une droite dont la pente b peut se calculer à l'aide des points $A(1,235 \cdot 10^{-3}; -3,79)$ et $B(1,333 \cdot 10^{-3}; -6,48)$ qui lui appartiennent :

$$b = \frac{-6,48 + 3,79}{1,333 \cdot 10^{-3} - 1,235 \cdot 10^{-3}} = -27,45 \cdot 10^3 \text{ K}$$

d'où l'on déduit la valeur de l'énergie d'activation :

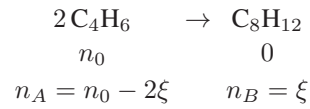
$$E_a = -b \times R = 27,45 \cdot 10^3 \times 8,32 \Rightarrow E_a = 228 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

● 283 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Initialement, n_0 moles de gaz (C_4H_6) ont été introduites dans le réacteur, en conséquence de quoi :

$$p_0 V = n_0 R T \Rightarrow \frac{n_0}{V} = \frac{p_0}{R T} \Rightarrow C_0 = \frac{p_0}{R T} \quad (49)$$

2. Si ξ désigne l'avancement de la réaction, le bilan de celle-ci s'écrit :



Aussi, les concentrations des espèces chimiques présentes dans le milieu réactionnel valent :

$$[\text{C}_4\text{H}_6] = \frac{n_A}{V} = \frac{n_0}{V} - \frac{2\xi}{V} \Rightarrow [\text{C}_4\text{H}_6] = C_0 - 2\xi_v \text{ et } [\text{C}_8\text{H}_{12}] = \frac{\xi}{V} = \xi_v$$

En outre, le réacteur contient $n = n_A + n_B = n_0 - \xi$ moles de gaz parfait, soumis à l'équation d'état :

$$pV = nRT = (n_0 - \xi) RT \Rightarrow p = \left(\frac{n_0}{V} - \frac{\xi}{V} \right) RT$$

où le résultat (49) fournit :

$$\frac{n_0 RT}{V} = p_0 \Rightarrow p = p_0 - \xi_v RT \Rightarrow \xi_v = \frac{p_0 - p}{RT}$$

Les concentrations $[\text{C}_4\text{H}_6]$ et $[\text{C}_8\text{H}_{12}]$ valent finalement :

$$[\text{C}_4\text{H}_6] = C_0 - 2 \times \frac{p_0 - p}{RT} = \frac{p_0}{RT} - 2 \times \frac{p_0 - p}{RT} \Rightarrow [\text{C}_4\text{H}_6] = \frac{2p - p_0}{RT}$$

et : $[\text{C}_8\text{H}_{12}] = \xi_v = \frac{p_0 - p}{RT}$

3. Compte tenu des deux résultats précédents, avec $p_0 = 101,3 \cdot 10^3$ Pa et $T = T_1 = 609$ K, les concentrations des constituants du milieu réactionnel sont connues à chaque date t :

t (min)	0	30	60	90	120	150
p (kPa)	101,3	77,8	69,2	64,7	62	60,2
$[\text{C}_4\text{H}_6]$ ($\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$)	20	10,72	7,33	5,55	4,48	3,77
$[\text{C}_8\text{H}_{12}]$ ($\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$)	0	4,64	6,34	7,23	7,76	8,12

4. Si la réaction $2 \text{C}_4\text{H}_6 \rightarrow \text{C}_8\text{H}_{12}$ est d'ordre 2, sa vitesse suit la loi :

$$v = k [\text{C}_4\text{H}_6]^2$$

tandis que la vitesse d'apparition de C_4H_6 est définie par :

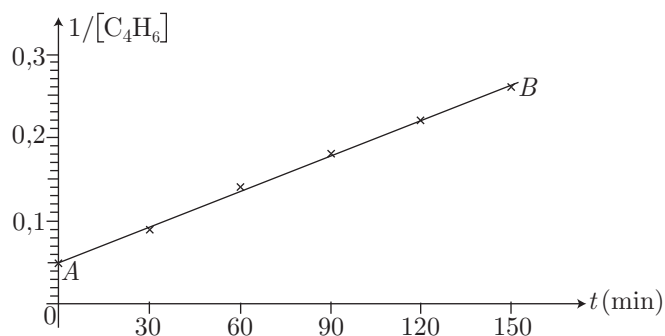
$$\begin{aligned} \frac{d[\text{C}_4\text{H}_6]}{dt} = -2v &= -2k [\text{C}_4\text{H}_6]^2 \Rightarrow -\frac{d[\text{C}_4\text{H}_6]}{[\text{C}_4\text{H}_6]^2} = 2k dt \\ \Rightarrow \int_{C_0}^{[\text{C}_4\text{H}_6]} -\frac{d[\text{C}_4\text{H}_6]}{[\text{C}_4\text{H}_6]^2} &= 2k \int_0^t dt \end{aligned}$$

soit encore :

$$\frac{1}{[\text{C}_4\text{H}_6]} = \frac{1}{C_0} + 2kt \quad (50)$$

Ce résultat signifie que si la réaction de dimérisation est d'ordre 2, la représentation graphique de $\frac{1}{[C_4H_6]}$ en fonction de t doit être une droite de coefficient directeur $a = 2k$.

t (min)	0	30	60	90	120	150
$1/[C_4H_6]$ ($m^3 \cdot mol^{-1}$)	0,05	0,09	0,14	0,18	0,22	0,26



La linéarité de cette courbe confirme finalement l'ordre 2 pour cette réaction. En outre, les points A (0 ; 0,05) et B (150 ; 0,26) appartenant à cette droite, ils en permettent le calcul du coefficient directeur :

$$2k = a = \frac{0,26 - 0,05}{150} \Rightarrow k = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

5. À la température $T_2 = 574,7 \text{ K}$, la connaissance de la pression aux dates $t = 0$ et $t = 150 \text{ min}$ permet à nouveau le calcul de $[C_4H_6]$:

$$C_0 = [C_4H_6]_{t=0} = \frac{2p_0 - p}{RT_2} = \frac{p_0}{RT_2} \Rightarrow C_0 = \frac{92,5 \cdot 10^3}{8,314 \times 574,7} = 19,36 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

et :

$$C_1 = [C_4H_6]_{t=150 \text{ min}} = \frac{2p - p_0}{RT_2} = \frac{2 \times 64,2 \cdot 10^3 - 92,5 \cdot 10^3}{8,314 \times 574,7} = 7,51 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

d'où l'on déduit la valeur de la constante k_2 , en utilisant le résultat (50) :

$$k_2 = \frac{1}{2t} \times \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_0} \right) = \frac{1}{2 \times 150} \times \left(\frac{1}{7,51} - \frac{1}{19,36} \right)$$

$$\Rightarrow k_2 = 2,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$

Aux températures T_1 et T_2 , les constantes k et k_2 vérifient la loi d'Arrhénius :

$$\begin{cases} k = A e^{-E_a/RT_1} \\ k_2 = A e^{-E_a/RT_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{k}{k_2} = \exp \left[\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \right] = \exp \left[\frac{E_a}{R} \times \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} \right]$$

$$\Rightarrow E_a = \frac{RT_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln \left(\frac{k_1}{k_2} \right)$$

Application numérique :

$$E_a = \frac{8,314 \times 609 \times 574,7}{609 - 574,7} \times \ln\left(\frac{7}{2,7}\right) \Rightarrow E_a = 81 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

● 284 ————— Concours du CAFEP

1. Soit ξ l'avancement de la réaction : $\text{S}_2\text{O}_8^{2-} + 2\text{I}^- \rightarrow 2\text{SO}_4^{2-} + \text{I}_{2(\text{aq})}$ en milieu aqueux homogène de volume V ; la vitesse de cette réaction est définie par :

$$v = \frac{1}{V} \times \frac{d\xi}{dt}$$

et, compte tenu des ordres partiels a et b par rapport à $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$ et à I^- , cette vitesse s'écrit :

$$v = k [\text{I}^-]^b [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]^a \quad (51)$$

2. (a) L'ion iodure introduit dans la burette ne peut réagir avec les ions thiosulfate, aussi leur introduction ici n'a qu'un seul but : les introduire régulièrement dans le bécher, dont le volume s'accroît de 1 mL après chaque incrément. De fait, la présence de I^- dans la burette vise vraisemblablement à compenser l'effet de dilution des ions I^- dans le bécher. En effet, abstraction faite des éventuelles réactions de I^- dans le bécher, N_n moles de I^- ont été introduites dans le bécher :

- soit initialement (20 mL d'iodure de potassium à $5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) :

$$N_1 = 20 \cdot 10^{-3} \times 5 \cdot 10^{-2} = 10^{-3} \text{ mole}$$

- soit après écoulement de n millilitres ($n \times 10^{-3} \text{ L}$) de la solution contenue dans la burette (I^- à la concentration $3,33 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) :

$$N_2 = 3,33 \cdot 10^{-2} \times n \times 10^{-3} = 3,33 \cdot 10^{-5} \times n \text{ mole}$$

Aussi, après n incréments dans le bécher, un nombre :

$$N_n = N_1 + N_2 = 10^{-3} \times (1 + 3,33 \cdot 10^{-2} \times n) \quad (52)$$

de moles de I^- a été introduit dans le bécher. Concomitamment, le volume du milieu réactionnel (20 mL d'iodure de potassium + 10 mL de peroxydisulfate de potassium + n mL de solution provenant de la burette) a atteint la valeur :

$$V_n = (30 + n) \times 10^{-3} \text{ L}$$

Par conséquent, la concentration des ions I^- introduits dans le bécher vaut :

$$C_n = \frac{N_n}{V_n} = \frac{1 + 3,33 \cdot 10^{-2} \times n}{30 + n} \quad (53)$$

tandis qu'initialement cette concentration prend la valeur :

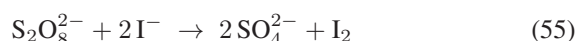
$$C_0 = \frac{1}{30} \Rightarrow \frac{C_n}{C_0} = 30 \times \frac{1 + 3,33 \cdot 10^{-2} n}{30 + n} = 1 \Rightarrow C_n = C_0 \quad (54)$$

Ce résultat confirme l'intérêt d'avoir ajouté des ions I^- dans la burette. En revanche, les ions I^- présents dans le bécher servent au déroulement de la réaction avec les ions $S_2O_8^{2-}$.

(b) Compte tenu de la réaction : $S_2O_8^{2-} + 2I^- \rightarrow 2SO_4^{2-} + I_{2(aq)}$, l'introduction de $S_2O_8^{2-}$ dans le bécher provoque l'apparition du diiode, I_2 , mis en évidence par l'emploi d'amidon.

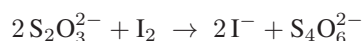
(c) Dans le bécher se déroulent essentiellement deux réactions :

- la réaction lente :



qui produit I_2 , décelable grâce à l'empois d'amidon, si toutefois aucun autre réactif n'agit sur I_2 .

- la réaction rapide :



qui consomme I_2 ; tant qu'il reste des ions thiosulfate dans le bécher, cette réaction dissimule le diiode produit par la réaction (55). En revanche, lorsque les ions $S_2O_3^{2-}$ ont totalement réagi, le diiode I_2 demeure en solution ; celle-ci devient bleue jusqu'à un nouvel ajout d'ions $S_2O_3^{2-}$.

(d) Déterminons les quantités de réactifs introduits au bout des n incréments de la solution contenue dans la burette :

- Compte tenu du résultat (52), la quantité d'ions I^- introduits vaut :

$$N_n = 10^{-3} \times (1 + 3,33 \cdot 10^{-3} \times n)$$

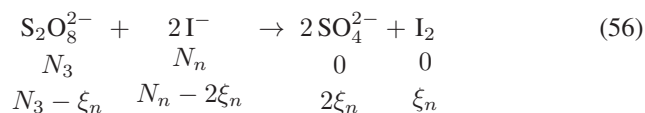
- 10 mL de solution contenant les ions $S_2O_8^{2-}$, à la concentration $5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, introduisent :

$$N_3 = 10 \cdot 10^{-3} \times 5 \cdot 10^{-2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mole d'ions } S_2O_8^{2-}$$

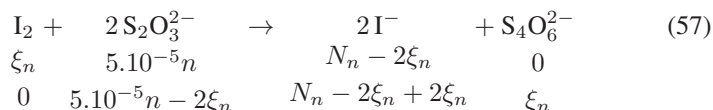
- n mL de solution contenue dans la burette ($S_2O_3^{2-}$ à la concentration $5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) ont été versés dans le milieu réactionnel, ce qui correspond à :

$$N_4 = n \times 10^{-3} \times 5 \cdot 10^{-2} = 5n \times 10^{-5} \text{ mole d'ions } S_2O_3^{2-}.$$

Effectuons maintenant le bilan des deux réactions (en notant ξ_n l'avancement de la première) :



En remarquant que la seconde réaction est totale et rapide (elle consomme la totalité de I_2 produit, pourvu qu'il reste des ions $S_2O_3^{2-}$, que l'on rajoute à cette fin) :



De cette étude, il ressort que le nombre de moles d'ions I^- vaut N_n , dans un volume de solution aqueuse : $V_n = (30 + n) \times 10^{-3}$ litre. Par suite, la concentration de I^- vaut, conformément au résultat (54) :

$$C_n = [I^-] = \frac{N_n}{V_n} = C_0 = 0,033 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad (58)$$

ce qui signifie que $[I^-]$ demeure constant.

- (e) La réaction (57) cesse dès que $[S_2O_3^{2-}] = 0$ (auquel cas la solution devient bleue, avant l'ajout d'un nouvel incrément de solution de thiosulfate de sodium). C'est pourquoi :

$$[S_2O_3^{2-}] = 0 \Rightarrow 5 \cdot 10^{-5} n - 2\xi_n = 0 \Rightarrow \xi_n = 2,5 \cdot 10^{-5} \times n$$

Compte tenu du bilan (56), il reste alors dans la solution :

$$N'_n = N_3 - \xi_n = 5 \cdot 10^{-4} - 2,5 \cdot 10^{-5} n \text{ moles d'ions } S_2O_8^{2-}$$

qui se trouvent ainsi à la concentration :

$$[S_2O_8^{2-}]_n = \frac{N'_n}{V_n} = \frac{5 \cdot 10^{-4} - 2,5 \cdot 10^{-5} n}{(30 + n) \times 10^{-3}} \Rightarrow [S_2O_8^{2-}] = \frac{0,5 - 0,025 n}{30 + n}$$

3. Si cette réaction est d'ordre 1 par rapport à $S_2O_8^{2-}$, sa vitesse s'écrit :

$$\begin{aligned} v = k_1 [S_2O_8^{2-}] &\Rightarrow \frac{d[S_2O_8^{2-}]}{dt} = -v = -k_1 [S_2O_8^{2-}] \\ &\Rightarrow \frac{d[S_2O_8^{2-}]}{[S_2O_8^{2-}]} = -k_1 dt \end{aligned}$$

Sachant qu'à la date $t = 0$, $[S_2O_8^{2-}]_0 = a_0 = \frac{0,5}{30}$, et qu'à la date t_n :

$$[S_2O_8^{2-}]_n = a_n = \frac{0,5 - 0,025 n}{30 + n}$$

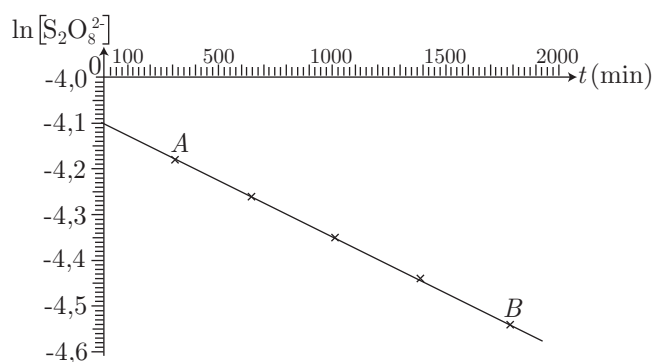
cette équation s'intègre aisément pour fournir :

$$\int_{a_0}^{a_n} \frac{d[S_2O_8^{2-}]}{[S_2O_8^{2-}]} = -k_1 \int_0^{t_n} dt \Rightarrow \ln a_n - \ln a_0 = -k_1 t_n \quad (59)$$

$$\Rightarrow \ln [S_2O_8^{2-}] = \ln a_0 - k_1 t_n \quad (60)$$

Aussi, la représentation graphique de $\ln \left(\frac{0,5 - 0,025 n}{30 + n} \right) = \ln [S_2O_8^{2-}]_n$ en fonction de t_n doit être une droite de coefficient directeur α négatif.

n (mL)	1	2	3	4	5
t_n (s)	314	645	1 016	1 384	1 785
$\ln [S_2O_8^{2-}]_n$	-4,18	-4,26	-4,35	-4,44	-4,54



La linéarité de cette courbe justifie l'ordre $a = 1$ de la réaction par rapport à $\text{S}_2\text{O}_8^{2-}$; il s'agit d'une droite de coefficient directeur $\alpha = -k_1$.

4. Compte tenu de ce qui précède, la loi de vitesse (51) s'écrit :

$$v = k [\text{I}]^b \times [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]$$

où le résultat (58) montre que la concentration $[\text{I}^-] = C_n$ demeure constante et égale à C_0 :

$$v = k C_{01}^b \times [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]$$

On appelle alors constante apparente la grandeur k_1 telle que :

$$v = k_1 \times [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}] \text{ avec } k_1 = k C_{01}^b$$

C_{01} désignant la concentration initiale de I^- au cours de l'expérience réalisée. Quant au temps de demi-réaction, il désigne la date τ_1 à laquelle $[\text{S}_2\text{O}_8^{2-}] = a_n$ vaut la moitié de a_0 , c'est-à-dire, compte tenu de l'identité (60) :

$$\ln\left(\frac{a_n}{a_0}\right) = -k_1 t_n \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -k_1 \tau_1 \Rightarrow \tau_1 = \frac{\ln 2}{k_1}$$

Pour préserver l'homogénéité de cette relation ($k_1 = \frac{\ln 2}{\tau_1}$, avec $[\tau_1] = \text{s}$), il est nécessaire que k_1 ait pour unité :

$$[k_1] = \text{s}^{-1}$$

Le coefficient directeur α s'obtient à l'aide des points A (314 s ; -4,18) et B (1785 s ; -4,54) qui appartiennent à la droite $\ln [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}] = f(t_n)$:

$$\alpha = \frac{-4,54 + 4,18}{1785 - 314} \Rightarrow k_1 = -\alpha = 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

ce qui signifie que le temps de demi-réaction vaut :

$$\tau_1 = \frac{\ln 2}{2,45 \cdot 10^{-4}} = 2829 \text{ s}$$

5. La constante de vitesse apparente : $k_1 = k \times C_{01}^b$ est calculée pour une concentration C_{01} en ions iodure, tandis qu'une concentration $C_{02} = 2 C_{01}$ fournit une constante apparente $k_2 = k \times C_{02}^b = 4,98.10^{-4} \text{ s}^{-1}$. Par conséquent :

$$\frac{k_2}{k_1} = \left(\frac{C_{02}}{C_{01}} \right)^b \Rightarrow \ln \left(\frac{k_2}{k_1} \right) = b \times \ln \left(\frac{C_{02}}{C_{01}} \right) \Rightarrow b = \frac{\ln(k_2/k_1)}{\ln(C_{02}/C_{01})}$$

Application numérique :

$$b = \frac{\ln(4,98.10^{-4}/2,45.10^{-4})}{\ln 2} \Rightarrow b = 1$$

De fait, la constante k de la réaction vaut :

$$k = \frac{k_1}{C_{01}} = \frac{2,45.10^{-4}}{3,33.10^{-2}} \Rightarrow k = 74.10^{-4} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

● 285 ————— Concours des Mines-Ponts

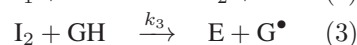
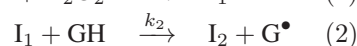
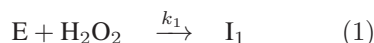
1. Les intermédiaires réactionnels I_1 , I_2 et G^\bullet sont consommés dans une étape ultérieure à celle de leur formation, sans être ensuite régénérés, en conséquence de quoi il s'agit d'un mécanisme par stade.
2. La réaction globale d'oxydation du gaïcol :



présente une vitesse v liée à celle de formation de P :

$$\frac{d[\text{P}]}{dt} = v$$

qui intervient dans l'étape (4) du mécanisme réactionnel :



C'est pourquoi :

$$\frac{d[\text{P}]}{dt} = k_4 [\text{G}^\bullet]^2 \Rightarrow v = k_4 [\text{G}^\bullet]^2$$

Or, l'approximation de l'état quasi stationnaire peut s'appliquer aux intermédiaires réactionnels :

$$\frac{d[\text{I}_1]}{dt} = 0 \Rightarrow k_1 [\text{E}] [\text{H}_2\text{O}_2] - k_2 [\text{I}_1] [\text{GH}] = 0 \Rightarrow k_2 [\text{I}_1] [\text{GH}] = k_1 [\text{E}] [\text{H}_2\text{O}_2] \quad (61)$$

$$\frac{d[\text{I}_2]}{dt} = 0 \Rightarrow k_2 [\text{I}_1] [\text{GH}] - k_3 [\text{I}_2] [\text{GH}] = 0 \Rightarrow k_3 [\text{I}_2] [\text{GH}] = k_2 [\text{I}_1] [\text{GH}] \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[G^\bullet]}{dt} = 0 &\Rightarrow k_2 [I_1] [GH] + k_3 [I_2] [GH] - 2k_4 [G^\bullet]^2 = 0 \\ &\Rightarrow k_2 [I_1] [GH] + k_3 [I_2] [GH] = 2k_4 [G^\bullet]^2 \end{aligned}$$

Cette dernière équation montre que v peut aussi se mettre sous la forme :

$$v = k_4 [G^\bullet]^2 = \frac{1}{2} (k_2 [I_1] [GH] + k_3 [I_2] [GH])$$

où le résultat (62) permet de poser :

$$k_2 [I_1] [GH] + k_3 [I_2] [GH] = 2k_2 [I_1] [GH] \Rightarrow v = k_2 [I_2] [GH]$$

Enfin, l'équation (61) fournit :

$$k_2 [I_1] [GH] = k_1 [E] [H_2O_2] \Rightarrow v = k_1 [E] [H_2O_2] \quad (63)$$

3. L'enzyme E intervient au cours des étapes (1) et (3), auquel cas sa vitesse de formation est définie par :

$$\frac{d[E]}{dt} = k_3 [I_2] [GH] - k_1 [E] [H_2O_2]$$

où les identités (61) et (62) se traduisent par :

$$k_3 [I_2] [GH] = k_1 [E] [H_2O_2] \Rightarrow \frac{d[E]}{dt} = 0 \quad (64)$$

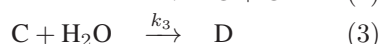
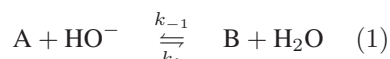
Le résultat (63) montre que la présence de l'enzyme E accélère la réaction d'équation :



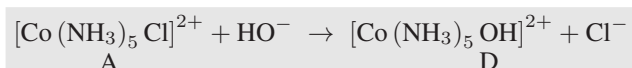
sans intervenir dans l'équation-bilan. Il s'agit là des caractéristiques d'un catalyseur, d'autant plus que l'identité (64) confirme que la quantité d'enzyme ne varie pas dans le milieu réactionnel.

● 286 ————— Concours de l'E.N.S.

1. Un acte élémentaire est une équation qui rend compte d'un processus qui se produit à l'échelle microscopique. Outre une faible molécularité, un tel acte doit respecter le critère de Van't Hoff.
2. Le mécanisme réactionnel, présenté de la manière suivante :



montre que A et HO^- sont les réactifs, tandis que D et Cl^- sont les produits, ce qui justifie que l'équation-bilan de la réaction d'échange de ligands s'écrit :



3. La vitesse de formation de D est liée à la vitesse v de cette réaction :

$$v = \frac{d[D]}{dt}$$

où D apparaît au cours de l'étape (3) :

$$\frac{d[D]}{dt} = k_3 [C] [H_2O] \Rightarrow v = k_3 [C] [H_2O]$$

Quant à l'approximation de l'état quasi stationnaire, elle s'applique à B et à C :

$$\frac{d[B]}{dt} = k_1 [A] [HO^-] - k_{-1} [B] [H_2O] - k_2 [B] = 0 \quad (65)$$

$$\Rightarrow [B] = \frac{k_1 [A] [HO^-]}{k_{-1} [H_2O] + k_2} \quad (66)$$

et :

$$\frac{d[C]}{dt} = 0 \Rightarrow k_2 [B] - k_3 [C] [H_2O] = 0 \Rightarrow k_3 [C] [H_2O] = k_2 [B]$$

C'est pourquoi l'expression de v est aussi donnée par :

$$v = k_2 [B]$$

où [B] est fourni par le résultat (66) :

$$v = \frac{k_1 k_2 [A] [HO^-]}{k_{-1} [H_2O] + k_2}$$

4. En supposant que $k_2 \ll k_{-1} [H_2O]$, on admet que :

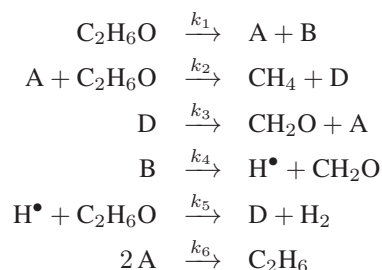
$$k_2 + k_{-1} [H_2O] \simeq k_{-1} [H_2O] \Rightarrow v \simeq \frac{k_1 k_2 [A] [HO^-]}{k_{-1} [H_2O]}$$

● 287 ————— Lycée Charlemagne, Paris

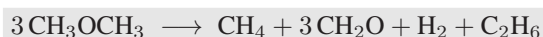
1. Afin de simplifier la présentation du mécanisme réactionnel, nous adopterons les notations suivantes :



de manière à faire clairement apparaître les intermédiaires réactionnels qui sont formés puis consommés au cours des différentes étapes :



De cette manière, il apparaît que C_2H_6O est le seul réactif qui évolue vers les produits : CH_4 , CH_2O , H_2 et C_2H_6 . C'est pourquoi l'équation-bilan (équilibrée) de cette réaction s'écrit :



2. L'approximation de l'état quasi stationnaire peut s'appliquer aux intermédiaires radicalaires (très réactifs) A, B, D et H^\bullet .

$$\frac{d[A]}{dt} = 0 \Rightarrow k_1 [C_2H_6O] - k_2 [A] [C_2H_6O] + k_3 [D] - 2k_6 [A]^2 = 0 \quad (67)$$

$$\frac{d[B]}{dt} = 0 \Rightarrow k_1 [C_2H_6O] - k_4 [B] = 0 \quad (68)$$

$$\frac{d[D]}{dt} = 0 \Rightarrow k_2 [A] [C_2H_6O] - k_3 [D] + k_5 [H^\bullet] [C_2H_6O] = 0 \quad (69)$$

et :

$$\frac{d[H^\bullet]}{dt} = 0 \Rightarrow k_4 [B] - k_5 [H^\bullet] [C_2H_6O] = 0 \quad (70)$$

Par définition, la vitesse de formation de CH_4 vaut :

$$\frac{d[CH_4]}{dt} = v \text{ avec } \frac{d[CH_4]}{dt} = k_2 [A] [C_2H_6O] \quad (71)$$

Il convient alors d'exprimer [A] en fonction de $[C_2H_6O]$ et des constantes k_i du mécanisme. Pour cela, remarquons que les relations (68) et (70) fournissent :

$$\begin{cases} k_4 [B] = k_1 [C_2H_6O] \\ k_4 [B] = k_5 [H^\bullet] [C_2H_6O] \end{cases} \Rightarrow k_5 [H^\bullet] [C_2H_6O] = k_1 [C_2H_6O]$$

Par conséquent, l'équation (69) s'écrit aussi :

$$k_2 [A] [C_2H_6O] - k_3 [D] + k_1 [C_2H_6O] = 0$$

qui, additionnée à l'équation (67), conduit à :

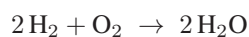
$$2k_1 [C_2H_6O] - 2k_6 [A]^2 = 0 \Rightarrow [A] = \sqrt{\frac{k_1}{k_6}} [C_2H_6O]^{1/2}$$

Finalement, la vitesse de la réaction s'obtient à partir des identités (71) :

$$v = \frac{d[CH_4]}{dt} = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_6}} [C_2H_6O]^{3/2}$$

● 288 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

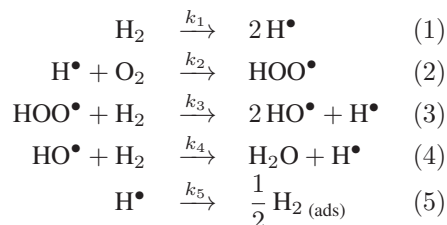
1. Compte tenu de l'équation-bilan de la synthèse de l'eau :



sa vitesse peut s'exprimer à partir des vitesses d'apparition des produits et réactifs :

$$\frac{d[O_2]}{dt} = -v \quad \frac{d[H_2]}{dt} = -2v \quad \frac{d[H_2O]}{dt} = 2v$$

Or, H_2O n'intervenant que dans l'étape (4) du mécanisme réactionnel :



sa vitesse de formation s'écrit aussi :

$$\frac{d[\text{H}_2\text{O}]}{dt} = k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] = 2v \quad (72)$$

Quant à l'approximation de l'état quasi stationnaire, il s'applique aux divers intermédiaires réactionnels :

$$\frac{d[\text{H}^\bullet]}{dt} = 2k_1 [\text{H}_2] - k_2 [\text{H}^\bullet] [\text{O}_2] + k_3 [\text{HOO}^\bullet] [\text{H}_2] + k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] - k_5 [\text{H}^\bullet] = 0 \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{HOO}^\bullet]}{dt} &= k_2 [\text{H}^\bullet] [\text{O}_2] - k_3 [\text{HOO}^\bullet] [\text{H}_2] = 0 \\ &\Rightarrow k_3 [\text{HOO}^\bullet] [\text{H}_2] = k_2 [\text{H}^\bullet] [\text{O}_2] \quad (74) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{HO}^\bullet]}{dt} &= 2k_3 [\text{HOO}^\bullet] [\text{H}_2] - k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] = 0 \\ &\Rightarrow k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] = 2k_3 [\text{HOO}^\bullet] [\text{H}_2] \quad (75) \end{aligned}$$

Des équations (74) et (75) il ressort que :

$$k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] = 2k_2 [\text{H}^\bullet] [\text{O}_2] \Rightarrow [\text{H}^\bullet] = \frac{1}{2k_2 [\text{O}_2]} \times k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] \quad (76)$$

Quant à la relation (74), elle permet de simplifier l'équation (73) :

$$2k_1 [\text{H}_2] + k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] - k_5 [\text{H}^\bullet] = 0$$

c'est-à-dire :

$$2k_1 [\text{H}_2] + k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] - \frac{k_5}{2k_2 [\text{O}_2]} \times k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] = 0$$

d'où il s'ensuit que :

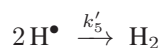
$$k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] = \frac{2k_1 [\text{H}_2]}{\frac{k_5}{2k_2 [\text{O}_2]} - 1} = \frac{2k_1 [\text{H}_2] [\text{O}_2]}{\frac{k_5}{2k_2} - [\text{O}_2]}$$

Par suite, l'expression (72) devient :

$$v = \frac{1}{2} \times k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] = \frac{k_1 [\text{H}_2] [\text{O}_2]}{\frac{k_5}{2k_2} - [\text{O}_2]}$$

soit encore : $v = \frac{k_1 [\text{H}_2] [\text{O}_2]}{k - [\text{O}_2]}$ avec $k = \frac{k_5}{2k_2}$

2. En remplaçant l'étape (5) par le processus :



L'équation (73) doit être remplacée par :

$$\frac{d[\text{H}^\bullet]}{dt} = 0 \Rightarrow 2k_1 [\text{H}_2] - k_2 [\text{H}^\bullet] [\text{O}_2] + k_3 [\text{HOO}^\bullet] [\text{H}_2] + k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] - 2k'_5 [\text{H}^\bullet]^2 = 0$$

tandis que les relations (74) et (75) demeurent utilisables et conduisent par conséquent à :

$$\begin{cases} k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] = 2k_3 [\text{HOO}^\bullet] [\text{H}_2] \\ k_3 [\text{HOO}^\bullet] [\text{H}_2] = k_2 [\text{H}^\bullet] [\text{O}_2] \end{cases} \Rightarrow k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] = 2k_2 [\text{H}^\bullet] [\text{O}_2]$$

Il s'ensuit que :

$$2k_1 [\text{H}_2] + k_2 [\text{H}^\bullet] [\text{O}_2] - 2k'_5 [\text{H}^\bullet]^2 = 0$$

Il apparaît une équation du second degré en $[\text{H}^\bullet]$:

$$2k'_5 [\text{H}^\bullet] - k_2 [\text{O}_2] [\text{H}^\bullet] - 2k_1 [\text{H}_2] = 0$$

dont le discriminant :

$$\Delta = k_2^2 [\text{O}_2]^2 + 16 k_1 k'_5 [\text{H}_2] > 0$$

révèle l'existence de deux solutions :

$$[\text{H}^\bullet] = \frac{k_2 [\text{O}_2] \pm \sqrt{\Delta}}{4k'_5} \text{ avec } \sqrt{\Delta} > k_2 [\text{O}_2]$$

dont seule la positive présente une signification physique :

$$[\text{H}^\bullet] = \frac{k_2 [\text{O}_2] + \sqrt{k_2^2 [\text{O}_2]^2 + 16 k_1 k'_5 [\text{H}_2]}}{4k'_5}$$

Par conséquent, la vitesse v vérifie :

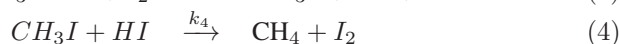
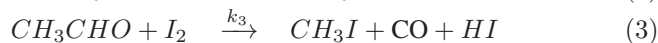
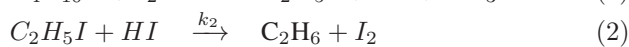
$$2v = k_4 [\text{HO}^\bullet] [\text{H}_2] = 2k_2 [\text{O}_2] [\text{H}^\bullet]$$

c'est-à-dire :

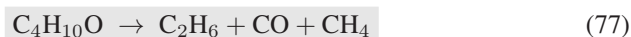
$$v = k_2 [\text{O}_2] \times \frac{k_2 [\text{O}_2] + \sqrt{k_2^2 [\text{O}_2]^2 + 16 k_1 k'_5 [\text{H}_2]}}{4k'_5}$$

● 289 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Afin de repérer les produits et réactifs de la réaction de décomposition, localisons (en italique) les espèces qui, une fois produites au cours d'une étape, sont consommées à l'issue d'une étape ultérieure :



d'où ressort l'équation-bilan globale de cette réaction :



2. De fait, l'approximation de l'état quasi stationnaire peut s'appliquer à chacun des intermédiaires impliqués dans les étapes, de vitesses respectives :

$$v_1 = k_1 [\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}] [\text{I}_2]$$

$$v_2 = k_2 [\text{C}_2\text{H}_5\text{I}] [\text{HI}]$$

$$v_3 = k_3 [\text{CH}_3\text{CHO}] [\text{I}_2]$$

$$v_4 = k_4 [\text{CH}_3\text{I}] [\text{HI}]$$

d'où il découle que :

$$\frac{d[\text{C}_2\text{H}_5\text{I}]}{dt} = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$$

$$\frac{d[\text{CH}_3\text{CHO}]}{dt} = 0 \Rightarrow v_1 - v_3 = 0 \Rightarrow v_1 = v_3$$

$$\frac{d[\text{CH}_3\text{I}]}{dt} = 0 \Rightarrow v_3 - v_4 = 0 \Rightarrow v_3 = v_4$$

Ces résultats montrent que :

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4$$

ce qui signifie également que les différentes étapes se déroulent à la même vitesse.

3. La vitesse d'apparition de C_2H_6 peut être définie à partir de la vitesse v de la réaction globale (77) :

$$\frac{d[\text{C}_2\text{H}_6]}{dt} = v$$

où C_2H_6 est produit au cours de l'étape (2) :

$$\frac{d[\text{C}_2\text{H}_6]}{dt} = v_2 = k_2 [\text{C}_2\text{H}_5\text{I}] [\text{HI}]$$

et, compte tenu de l'identité : $v_1 = v_2$:

$$\frac{d[\text{C}_2\text{H}_6]}{dt} = v_1 = k_1 [\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}] [\text{I}_2]$$

d'où il ressort que :

$$v = k_1 [\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}] [\text{I}_2]$$

Cette loi montre que I_2 accélère la réaction de décomposition de l'éther, en dépit de l'absence de I_2 dans l'équation-bilan ; par définition, il s'agit alors d'un catalyseur.

● **290** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

1. Dans le mécanisme réactionnel, H_2 est l'espèce qui intervient dans le plus petit nombre d'étapes et c'est pour cette raison qu'il convient de définir la vitesse d'apparition de H_2 d'une part à l'aide du bilan :



et d'autre part à l'aide des étapes (2) et (4) dans lesquelles intervient H_2 :

$$\frac{d[H_2]}{dt} = -k_2 [H_2] [Br^\bullet] + k_4 [H^\bullet] [HBr] \Rightarrow v = k_2 [H_2] [Br^\bullet] - k_4 [H^\bullet] [HBr] \quad (78)$$

Quant à l'approximation de l'état quasi stationnaire, son application aux intermédiaires Br^\bullet et H^\bullet se traduit par :

$$\frac{d[Br^\bullet]}{dt} = 2k_1 [Br_2] - k_2 [Br^\bullet] [H_2] + k_3 [H^\bullet] [Br_2] + k_4 [H^\bullet] [HBr] - 2k_5 [Br^\bullet]^2 = 0 \quad (79)$$

et :

$$\frac{d[H^\bullet]}{dt} = 0 \Rightarrow k_2 [Br^\bullet] [H_2] - k_3 [H^\bullet] [Br_2] - k_4 [H^\bullet] [HBr] = 0 \quad (80)$$

Cette équation :

$$k_2 [H_2] [Br^\bullet] - k_4 [H^\bullet] [HBr] = k_3 [H^\bullet] [Br_2]$$

associée à l'équation (78), conduit à :

$$v = k_3 [H^\bullet] [Br_2] \quad (81)$$

tandis qu'associée à l'équation (79), elle fournit :

$$2k_1 [Br_2] - 2k_5 [Br^\bullet]^2 = 0 \Rightarrow [Br^\bullet] = \sqrt{\frac{k_1}{k_5}} [Br_2]^{1/2}$$

Enfin, l'équation (80) permet d'isoler $[H^\bullet]$:

$$k_3 [H^\bullet] [Br_2] + k_4 [H^\bullet] [HBr] = k_2 [H_2] [Br^\bullet] \Rightarrow [H^\bullet] = \frac{k_2 [H_2]}{k_3 [Br_2] + k_4 [HBr]} \times [Br^\bullet]$$

soit encore :

$$[H^\bullet] = \sqrt{\frac{k_1}{k_5}} \times \frac{k_2 [H_2] [Br_2]^{1/2}}{k_3 [Br_2] + k_4 [HBr]}$$

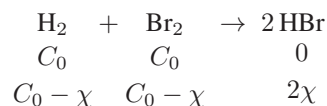
Par conséquent, la vitesse donnée par l'identité (81) s'écrit aussi :

$$v = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_5}} \times \frac{k_3 [Br_2] \times [H_2] [Br_2]^{1/2}}{k_3 [Br_2] + k_4 [HBr]} \quad (82)$$

ou encore, après simplification par $k_3 [Br_2]$:

$$v = k \times \frac{[H_2] [Br_2]^{1/2}}{1 + k' \frac{[HBr]}{[Br_2]}} \text{ avec } k = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_5}} \text{ et } k' = \frac{k_4}{k_3}$$

2. Soit χ l'avancement de la réaction de H_2 avec Br_2 :



à partir duquel est définie la vitesse $v = \frac{d\chi}{dt}$. Aussi, l'identité (82) devient, en

posant $k = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_5}}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\chi}{dt} = k \times \frac{k_3 [\text{H}_2] [\text{Br}_2]^{3/2}}{k_3 [\text{Br}_2] + k_4 [\text{HBr}]} &\Rightarrow k dt = d\chi \times \frac{k_3 [\text{Br}_2] + k_4 [\text{HBr}]}{k_3 [\text{H}_2] [\text{Br}_2]^{3/2}} \\ &\Rightarrow k dt = d\chi \times \left(\frac{1}{[\text{H}_2] [\text{Br}_2]^{1/2}} + \frac{k_4}{k_3} \frac{[\text{HBr}]}{[\text{H}_2] [\text{Br}_2]^{3/2}} \right) \end{aligned}$$

où l'on remarque que : $[\text{Br}_2] = [\text{H}_2] = C_0 - \chi$ tandis que $[\text{HBr}] = 2\chi$:

$$k dt = \frac{d\chi}{(C_0 - \chi)^{3/2}} + \frac{2k_4}{k_3} \times \frac{\chi d\chi}{(C_0 - \chi)^{5/2}}$$

Or, par définition, le temps de demi-réaction désigne la date $t = \tau$ pour laquelle χ vaut $\frac{C_0}{2}$, en raison de quoi :

$$k \int_0^\tau dt = \int_0^{C_0/2} \frac{d\chi}{(C_0 - \chi)^{3/2}} + \frac{2k_4}{k_3} \int_0^{C_0/2} \frac{\chi d\chi}{(C_0 - \chi)^{5/2}} = I_1 + \frac{2k_4}{k_3} \times I_2$$

où les intégrales I_1 et I_2 sont immédiatement calculables à partir des primitives rappelées dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{C_0/2} \frac{d\chi}{(C_0 - \chi)^{3/2}} = 2 \left[(C_0 - \chi)^{-1/2} \right]_0^{C_0/2} \\ &= 2 \left[\sqrt{\frac{2}{C_0}} - \frac{1}{\sqrt{C_0}} \right] = \frac{2\sqrt{2} - 2}{\sqrt{C_0}} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{C_0/2} \frac{\chi d\chi}{(C_0 - \chi)^{5/2}} = \left[\frac{2\chi}{3} \times \frac{1}{(C_0 - \chi)^{3/2}} - \frac{4}{3} \times \frac{1}{\sqrt{C_0 - \chi}} \right]_0^{C_0/2} \\ &= \frac{C_0}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{C_0\sqrt{C_0}} - \frac{4}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{C_0}} + \frac{4}{3\sqrt{C_0}} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{C_0}} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} k\tau &= \frac{2\sqrt{2} - 2}{\sqrt{C_0}} + \frac{2k_4}{k_3} \times \frac{4 - 2\sqrt{2}}{3\sqrt{C_0}} \text{ avec } k = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_5}} \\ &= \frac{2\sqrt{2} - 2}{\sqrt{C_0}} \left(1 + \frac{2\sqrt{2} k_4}{3k_3} \right) \end{aligned}$$

soit encore :

$$\tau = \frac{\sqrt{k_5} (2\sqrt{2} - 2)}{k_2 \sqrt{k_1} C_0} \times \left(1 + \frac{2\sqrt{2} k_4}{3k_3} \right)$$

● **291** ————— **Lycée Charlemagne, Paris**

1. (a) Si la réaction est d'ordre 1 par rapport à C_6H_6 et par rapport à Cl_2 , la vitesse de la réaction se présente sous la forme :

$$v = k \times x \times y$$

- (b) En supposant que y demeure égal à $y_0 = 100$ v.p.m., cette loi devient :

$$v = k y_0 \times x = k_{app} \times x$$

où $k_{app} = k y_0$ est une constante apparente, liée à la dégénérescence de l'ordre. En outre, la vitesse d'apparition du benzène est définie à partir de sa teneur $x = [C_6H_6]$, dont la variation vaut :

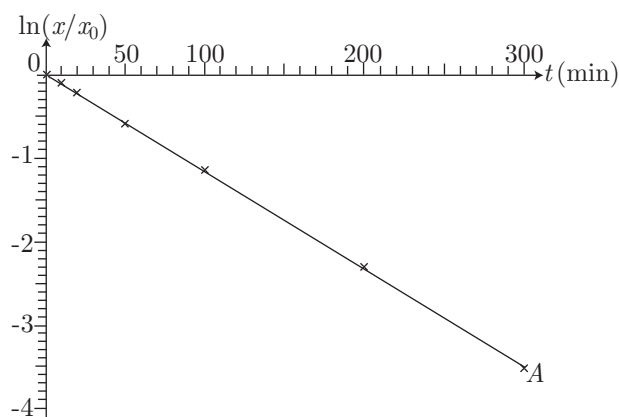
$$\frac{d[C_6H_6]}{dt} = -v \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -k_{app} x \Rightarrow \frac{dx}{x} = -k_{app} dt$$

En connaissant la valeur initiale de x : $x_0 = 5$ v.p.m., l'intégration de cette équation différentielle fournit :

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = -k_{app} \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -k_{app} \times t$$

Aussi, si la réaction est vraiment d'ordre 1 par rapport à C_6H_6 , le tracé de la courbe $\ln\left(\frac{x}{x_0}\right)$ doit être une droite passant par l'origine, et de coefficient directeur $a = -k_{app}$.

t (min)	0	10	20	50	100	200	300
x (v.p.m)	5	4,45	4	2,8	1,6	0,5	0,15
$\ln(x/x_0)$	0	-0,12	-0,22	-0,58	-1,14	-2,30	-3,51

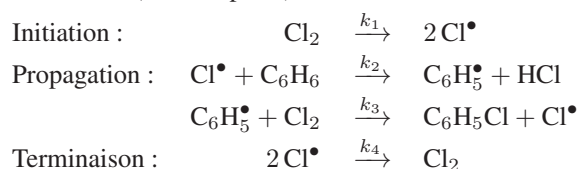


La linéarité de cette courbe confirme l'ordre 1 choisi, par rapport à x , tandis que l'appartenance du point $A(300; -3,51)$ à la droite permet le calcul de la pente $a = -k_{\text{app}} = -k y_0$:

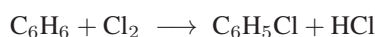
$$a = \frac{-3,51}{300} \Rightarrow k y_0 = \frac{3,51}{300}$$

$$\Rightarrow k = \frac{3,51}{300 \times 100} = 11,7 \cdot 10^{-5} \text{ min}^{-1} (\text{v.p.m.})^{-1}$$

2. (a) La première étape forme le radical Cl^\bullet , qui sert ensuite d'intermédiaire ; il s'agit de l'initiation. Quant aux deux étapes suivantes, elles utilisent (et régénèrent) Cl^\bullet afin de produire HCl et $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$ (c'est-à-dire les produits de la réaction). Ces étapes constituent la propagation. Enfin, la quatrième étape fait disparaître le radical Cl^\bullet du milieu réactionnel, en conséquence de quoi elle s'apparente à la phase de terminaison (ou de rupture) :



- (b) La vitesse v de la réaction de chloration du benzène :



peut s'exprimer à partir de la vitesse de formation du monochlorobenzène : $\text{C}_6\text{H}_5\text{Cl}$:

$$\frac{dz}{dt} = v$$

- (c) L'approximation du régime quasi stationnaire peut s'appliquer aux radicaux intermédiaires Cl^\bullet et $\text{C}_6\text{H}_5^\bullet$:

$$\frac{d[\text{Cl}^\bullet]}{dt} = 0 \Rightarrow 2k_1 y - k_2 |\text{Cl}^\bullet| x + k_3 |\text{C}_6\text{H}_5^\bullet| y - 2k_4 |\text{Cl}^\bullet|^2 = 0 \quad (83)$$

$$\frac{d[\text{C}_6\text{H}_5^\bullet]}{dt} = 0 \Rightarrow k_2 |\text{Cl}^\bullet| x - k_3 |\text{C}_6\text{H}_5^\bullet| y = 0 \Rightarrow k_2 |\text{Cl}^\bullet| x = k_3 |\text{C}_6\text{H}_5^\bullet| y \quad (84)$$

L'utilisation de ce dernier résultat dans l'équation (83) fournit également :

$$2k_1 y = 2k_4 |\text{Cl}^\bullet|^2 \Rightarrow k_1 y = k_4 |\text{Cl}^\bullet|^2 \Rightarrow |\text{Cl}^\bullet| = \sqrt{\frac{k_1}{k_4}} \times y^{1/2} \quad (85)$$

Or, le monochlorobenzène n'étant produit qu'au cours de la troisième étape, il s'ensuit que :

$$\frac{dz}{dt} = k_3 |\text{C}_6\text{H}_5^\bullet| y$$

c'est-à-dire, compte tenu des résultats (84) et (85) :

$$\frac{dz}{dt} = k_2 |\text{Cl}^\bullet| x = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_4}} y^{1/2} x \Rightarrow v = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_4}} \times y^{1/2} \times x$$

- (d) Cette relation révèle d'une part que l'ordre de la réaction, par rapport à y , vaut $\frac{1}{2}$, et d'autre part que la constante k' a pour expression :

$$k' = k_2 \sqrt{\frac{k_1}{k_4}}$$

● 292 — Olympiades internationales de chimie

I- Généralités

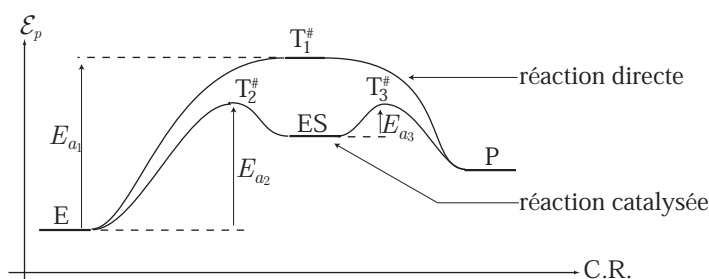
1. Un catalyseur est caractérisé par sa capacité à accélérer une réaction, bien que n'intervenant pas directement dans l'équation-bilan d'une réaction. Par exemple :



peut être catalysée par une enzyme E, auquel cas le mécanisme réactionnel correspondant fait apparaître un complexe enzyme-substrat (ES), qui régénère E en fin de réaction :



2. Désignons par T_1^\ddagger l'état de transition de la réaction : $S \rightarrow P$, et par T_2^\ddagger et T_3^\ddagger ceux intervenant dans les étapes (1) et (2) du mécanisme réactionnel. L'accélération de la réaction par l'emploi de l'enzyme s'explique par une plus grande stabilité de T_2^\ddagger et T_3^\ddagger par rapport à T_1^\ddagger ; les énergies d'activation E_{a_2} et E_{a_3} des étapes (1) et (2) étant ainsi abaissées par rapport à celle, E_{a_1} , de la réaction directe, chacune des étapes (1) et (2) se déroule aussi plus vite.



II- Étude cinétique

1. Cas classique

- (a) La vitesse v de formation de P, au cours de la réaction $S \rightarrow P$ est définie par :

$$v = \frac{d[P]}{dt}$$

où P n'intervient que dans la seconde étape du mécanisme réactionnel :



C'est pourquoi :

$$\frac{d[P]}{dt} = k_2 [ES] \Rightarrow v = k_2 [ES]$$

En outre l'application de l'approximation de l'état quasi stationnaire à ES se traduit par :

$$\begin{aligned} \frac{d[ES]}{dt} = 0 &\Rightarrow k_1 [E] [S] - k_{-1} [ES] - k_2 [ES] = 0 \\ &\Rightarrow [ES] = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} [E] [S] \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en introduisant la constante (de Michaëlis-Menten) :

$$K_M = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1} \Rightarrow [ES] = \frac{[E] [S]}{K_M} \quad (88)$$

la vitesse s'écrit finalement :

$$v = \frac{k_2}{K_M} \times [E] [S]$$

- (b) Soit $[E]_0$ la concentration totale en enzyme (qui se présente soit sous forme libre E, soit sous forme de complexe ES) :

$$[E]_0 = [E] + [ES]$$

où, conformément au résultat (88) :

$$\begin{aligned} [ES] = \frac{[E] [S]}{K_M} &\Rightarrow [E]_0 = [E] + \frac{[E] [S]}{K_M} = \frac{[E]}{K_M} \times (K_M + [S]) \\ &\Rightarrow \frac{[E]}{K_M} = \frac{[E]_0}{K_M + [S]} \end{aligned}$$

ce qui conduit à une nouvelle expression de v :

$$v = \frac{k_2 [E]_0 [S]}{K_M + [S]} \quad (89)$$

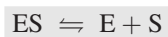
Notamment, lorsque $[S] \gg K_M \Rightarrow K_M + [S] \simeq [S]$, cette expression admet une limite :

$$v_M = \frac{k_2 [E]_0 [S]}{[S]} \Rightarrow v_M = k_2 [E]_0$$

- (c) Ce faisant, l'identité (89) devient :

$$v = v_M \times \frac{[S]}{K_M + [S]} \quad (90)$$

- (d) L'expression (88) de $K_M = \frac{[E] [S]}{[ES]}$ désigne la constante de l'équilibre :



ce qui signifie que plus la constante K_M est élevée, moins le complexe ES est stable.

En outre, la vitesse limite : $v_M = k_2 [E]_0$ étant proportionnelle à $[E]_0$, elle correspond au cas où le facteur cinétiquement limitant est $[E]_0$; toutes les molécules d'enzymes sont sollicitées dans le milieu réactionnel (S étant en large excès), dont la vitesse ne peut plus dépendre que de la quantité de ces molécules E introduites initialement.

(e) L'expression (90) révèle que :

$$\lim_{[S] \rightarrow 0} v \simeq \lim_{[S] \rightarrow 0} \left(\frac{v_M}{K_M} \times [S] \right) = 0$$

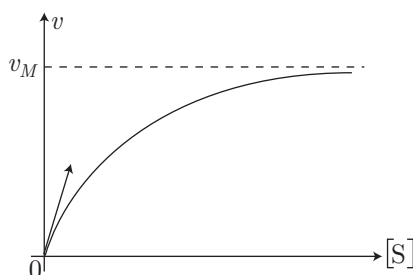
ce qui signifie qu'au voisinage de l'origine, la courbe $v = f([S])$ prend l'allure d'une droite de coefficient directeur :

$$a_0 = \frac{v_M}{K_M} = \frac{k_2 [E]_0}{K_M}$$

tandis que la limite :

$$\lim_{[S] \rightarrow \infty} v = v_M = k_2 [E]_0$$

révèle l'existence d'une asymptote horizontale pour la courbe $v = f([S])$.

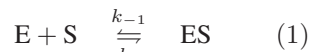


2. Cas d'un inhibiteur compétitif

(a) La vitesse de formation de P, au cours de la réaction $S \rightarrow P$, est à nouveau définie par :

$$v' = \frac{d[P]}{dt}$$

tandis que P intervient dans la deuxième étape du mécanisme :



C'est pourquoi :

$$\frac{d[P]}{dt} = k_2 [ES] \Rightarrow v' = k_2 [ES] \quad (91)$$

Enfin, L'approximation de l'état quasi stationnaire s'applique toujours à l'intermédiaire ES, en raison de quoi :

$$\frac{d[\text{ES}]}{dt} = 0 \Rightarrow k_1 [\text{E}] [\text{S}] = (k_{-1} + k_2) [\text{ES}] \Rightarrow [\text{ES}] = \frac{[\text{E}] [\text{S}]}{K_M} \quad (92)$$

Quant à la concentration totale de l'enzyme (qui se présente sous forme libre, E, et sous les formes complexées ES et EI), elle s'écrit désormais :

$$[\text{E}]_0 = [\text{E}] + [\text{ES}] + [\text{EI}]$$

où la dernière étape du mécanisme réactionnel est caractérisée par :

$$K_I = \frac{[\text{E}] [\text{I}]}{[\text{EI}]} \Rightarrow [\text{EI}] = \frac{[\text{E}] [\text{I}]}{K_I}$$

et, conformément à la relation (92) :

$$\begin{aligned} [\text{E}]_0 &= [\text{E}] + \frac{[\text{E}] [\text{S}]}{K_M} + \frac{[\text{E}] [\text{I}]}{K_I} = [\text{E}] \times \left(1 + \frac{[\text{S}]}{K_M} + \frac{[\text{I}]}{K_I} \right) \\ \Rightarrow [\text{E}] &= \frac{[\text{E}]_0}{1 + \frac{[\text{S}]}{K_M} + \frac{[\text{I}]}{K_I}} \end{aligned}$$

Aussi, les identités (91) et (92) conduisent à :

$$\begin{aligned} v' &= k_2 [\text{ES}] = \frac{k_2 [\text{E}] [\text{S}]}{K_M} = \frac{k_2 [\text{S}]}{K_M} \times \frac{[\text{E}]_0}{1 + \frac{[\text{S}]}{K_M} + \frac{[\text{I}]}{K_I}} \\ &= k_2 [\text{E}]_0 \times \frac{[\text{S}]}{[\text{S}] + \left(K_M + \frac{K_M}{K_I} [\text{I}] \right)} \end{aligned}$$

soit, en définissant la constante :

$$K_{M \text{ app}} = K_M \left(1 + \frac{[\text{I}]}{K_I} \right) > K_M$$

cette loi se présente aussi sous la forme :

$$v' = k_2 [\text{E}]_0 \times \frac{[\text{S}]}{[\text{S}] + K_{M \text{ app}}}$$

(b) L'analogie avec l'expression (89) :

$$v = k_2 [\text{E}]_0 \times \frac{[\text{S}]}{K_M + [\text{S}]}$$

permet d'en déduire les conclusions suivantes :

- au voisinage de l'origine, $[\text{S}] \simeq 0$ permet de poser :

$$v' \simeq \frac{k_2 [\text{E}]_0}{K_{M \text{ app}}} \times [\text{S}]$$

ce qui signifie que la courbe $v' = f([S])$ s'y présente comme une droite de coefficient directeur :

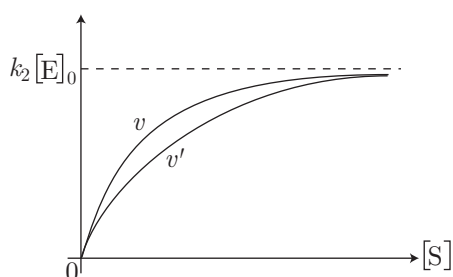
$$a_1 = \frac{k_2 [E]_0}{K_{M \text{ app}}} < a_0 = \frac{k_2 [E]_0}{K_M} \text{ car } K_{M \text{ app}} > K_M$$

Par suite, la pente à l'origine de $v' = f([S])$ est plus faible que celle de la courbe décrivant $v = f([S])$.

- lorsque $[S]$ devient très grand ($[S] \gg K_{M \text{ app}}$), la valeur limite :

$$v'_M = k_2 [E]_0$$

prend la même valeur que v_M , ce qui signifie également que les courbes $v' = f([S])$ et $v = f([S])$ présentent la même asymptote horizontale.

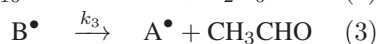
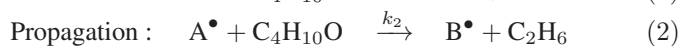


● 293 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Afin de simplifier les notations du mécanisme réactionnel, on posera :



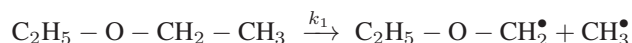
de manière à présenter le mécanisme réactionnel de la manière suivante :



où l'on remarque que les intermédiaires réactionnels A^\bullet et B^\bullet , issus de l'étape d'initiation sont consommés et régénérés aux cours des étapes (2) et (3) de propagation. Ils disparaissent néanmoins au cours de la phase (4) de terminaison. Aussi, ce mécanisme décrit une réaction en chaîne, de surcroît convergente étant donné l'identité des quantités d'intermédiaires réactifs ($2A^\bullet + 2B^\bullet$) et d'intermédiaires produits ($2A^\bullet + 2B^\bullet$). Du reste, de cette présentation ressort l'équation-bilan de la réaction :

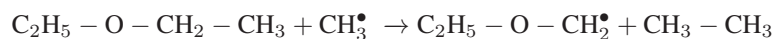


2. Au cours de la première étape :



une liaison C - C est rompue ; les produits obtenus (radicaux) sont alors moins stables que l'éther initial ; cette réaction est malaisée.

En revanche, au cours de l'étape (2) :



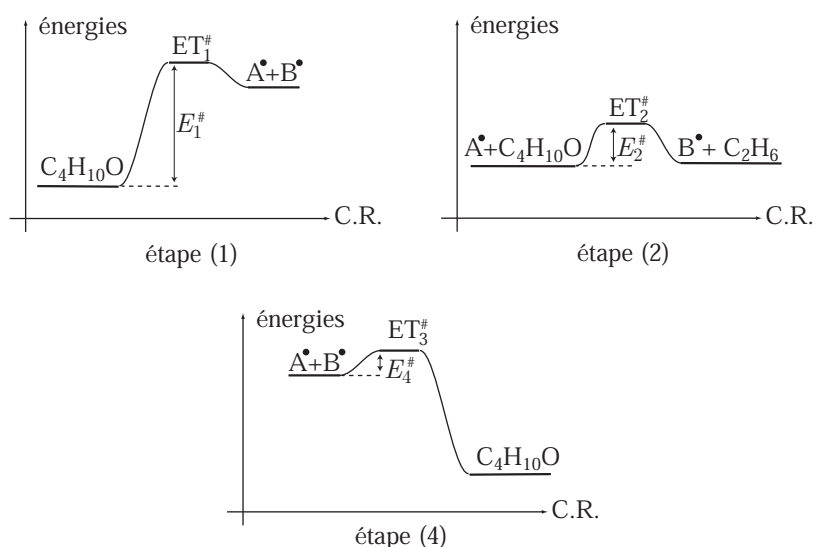
on assiste à la formation et à la rupture simultanée d'une liaison C - C, tandis que le nombre de radicaux produits correspond exactement à celui des radicaux qui disparaissent ; produits et réactifs étant d'énergie équivalente, cette réaction est plus rapide que la précédente.

Enfin, l'étape (4) :



fait disparaître des radicaux (très instables car très énergétiques) au profit d'un produit stable ; cette réaction est très rapide.

Conformément au postulat de Hammond, l'état de transition (ET_i^\ddagger) de chacune des étapes présente une énergie légèrement supérieure à l'énergie des espèces les moins stables, ce qui permet de représenter qualitativement les profils énergétiques des trois étapes (où figurent également les énergies d'activation correspondantes E_i^\ddagger) :



3. Les intermédiaires réactionnels A^\bullet et B^\bullet sont soumis à l'approximation de l'état quasi stationnaire, en conséquence duquel :

$$\frac{d[\text{A}^\bullet]}{dt} = 0 \Rightarrow k_1 [\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}] - k_2 [\text{A}^\bullet] [\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}] + k_3 [\text{B}^\bullet] - k_4 [\text{A}^\bullet] [\text{B}^\bullet] = 0$$

et :

$$\frac{d[\text{B}^\bullet]}{dt} = 0 \Rightarrow k_1 [\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}] + k_2 [\text{A}^\bullet] [\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}] - k_3 [\text{B}^\bullet] - k_4 [\text{A}^\bullet] [\text{B}^\bullet] = 0$$

L'addition de ces équations fournit :

$$2k_1 [\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}] - 2k_4 [\text{A}^\bullet] [\text{B}^\bullet] = 0 \Rightarrow k_1 [\text{C}_4\text{H}_{10}\text{O}] = k_4 [\text{A}^\bullet] [\text{B}^\bullet] \quad (93)$$

tandis que leur différence conduit à :

$$-2k_2 [A^\bullet] [C_4H_{10}O] + 2k_3 [B^\bullet] = 0 \Rightarrow k_2 [A^\bullet] [C_4H_{10}O] = k_3 [B^\bullet] \quad (94)$$

Quant au rapport des équations (93) et (94), il permet d'obtenir :

$$\frac{k_1 [C_4H_{10}O]}{k_2 [A^\bullet] [C_4H_{10}O]} = \frac{k_4 [A^\bullet] [B^\bullet]}{k_3 [B^\bullet]} \Rightarrow \frac{k_1}{k_2 [A^\bullet]} = \frac{k_4 [A^\bullet]}{k_3}$$

d'où l'on déduit finalement que :

$$[A^\bullet] = \sqrt{\frac{k_1 k_3}{k_2 k_4}}$$

En outre, l'équation (94) mène directement à l'expression de $[B^\bullet]$:

$$[B^\bullet] = \frac{k_2}{k_3} [A^\bullet] [C_4H_{10}O] = \frac{k_2}{k_3} \sqrt{\frac{k_1 k_3}{k_2 k_4}} \times [C_4H_{10}O] \Rightarrow [B^\bullet] = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3 k_4}} [C_4H_{10}O]$$

L'expression de $[A^\bullet]$ montre que cette concentration demeure constante, ce qui justifie l'application du principe de Bodenstein sur A^\bullet . En revanche, l'expression obtenue pour B^\bullet pourrait sembler paradoxale car $[C_4H_{10}O]$ varie dans le temps. Cependant, il est apparu au cours de la deuxième question que la vitesse de l'étape (4) est très supérieure à celle de l'étape (1), ce qui se traduit par :

$$k_4 \gg k_1$$

tandis que les étapes (2) et (3) ont des vitesses du même ordre de grandeur (on pourrait appliquer à l'étape (3) le raisonnement déjà développé pour l'étape (2), ce qui conduirait à $k_3 \simeq k_1$). Aussi :

$$\frac{k_1}{k_4} \ll 1 \Rightarrow \frac{d[B^\bullet]}{dt} = \sqrt{\frac{k_2}{k_3}} \times \underbrace{\sqrt{\frac{k_1}{k_4}}}_{\simeq 0} \times \frac{d[C_4H_{10}O]}{dt} \Rightarrow \frac{d[B^\bullet]}{dt} \simeq 0$$

ce qui lève le paradoxe apparent concernant l'application de l'approximation de l'état quasi stationnaire à B^\bullet .

4. La réaction $C_4H_{10}O \rightarrow C_2H_6 + CH_3CHO$ présente une vitesse globale v que l'on peut associer à la vitesse de formation de CH_3CHO :

$$\frac{d[CH_3CHO]}{dt} = v$$

où l'étape (3) fournit directement :

$$\frac{d[CH_3CHO]}{dt} = k_3 [B^\bullet] = k_3 \times \sqrt{\frac{k_1 k_2}{k_3 k_4}} [C_4H_{10}O]$$

soit encore :

$$v = k [C_4H_{10}O], \text{ avec } k = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3}{k_4}} \quad (95)$$

ce qui montre que la réaction de décomposition de l'éther est d'ordre 1.

5. La vitesse de formation de $C_4H_{10}O$ est définie par :

$$\frac{d[C_4H_{10}O]}{dt} = -v = -k [C_4H_{10}O] \Rightarrow \frac{d[C_4H_{10}O]}{[C_4H_{10}O]} = -k dt$$

Soit C_0 la valeur initiale de $[C_4H_{10}O]$ et soit C sa valeur à toute date t , vérifiant :

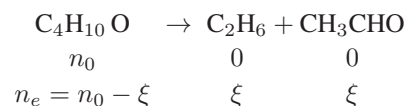
$$\int_{C_0}^C \frac{d[C_4H_{10}O]}{[C_4H_{10}O]} = -k \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{C}{C_0}\right) = -kt$$

Notamment, si on note n_e la quantité d'éther à une date t et n_0 celle introduite initialement dans le réacteur (de volume V_0 constant), les concentrations $C = \frac{n_e}{V_0}$

et $C_0 = \frac{n_0}{V_0}$ permettent de déduire que :

$$\ln\left(\frac{n_e}{n_0}\right) = -kt \quad (96)$$

Enfin, le bilan de la réaction :



montre qu'à toute date t le milieu réactionnel contient $n = n_0 + \xi$ moles de gaz parfait, soumis à l'équation d'état :

$$pV_0 = nRT_0 = (n_0 + \xi) RT_0$$

qui devient, à la date $t = 0$:

$$p_0V_0 = n_0RT_0$$

d'où il découle que :

$$\frac{pV_0}{p_0V_0} = \frac{n_0 + \xi}{n_0} = 1 + \frac{\xi}{n_0} \Rightarrow \xi = n_0 \times \left(\frac{p}{p_0} - 1\right)$$

De fait, la quantité d'éther vaut, à toute date t :

$$n_e = n_0 - \xi = n_0 \times \left(2 - \frac{p}{p_0}\right)$$

ce qui donne, à l'aide de l'identité (96), la linéarisation cherchée :

$$\ln\left(2 - \frac{p}{p_0}\right) = -kt$$

Si le tracé de la courbe $\ln\left(2 - \frac{p}{p_0}\right) = g(t)$ fournit une droite passant par l'origine, l'expérience confirmera l'ordre 1 prévu par le mécanisme réactionnel.

6. La constante de chaque étape s'écrivant : $k_i = A_i e^{-E_i^\ddagger/RT}$, la loi (95) montre que la constante globale vaut :

$$k = \sqrt{\frac{k_1 k_2 k_3}{k_4}} = \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{A_4}} \times \exp\left[-\frac{1}{2RT} (E_1^\ddagger + E_2^\ddagger + E_3^\ddagger - E_4^\ddagger)\right]$$

c'est-à-dire :

$$k = A e^{-E^\ddagger/RT}$$

où le facteur pré-exponentiel s'écrit :

$$A = \sqrt{\frac{A_1 A_2 A_3}{A_4}}$$

et l'énergie d'activation E^\ddagger totale s'exprime en fonction de celles des étapes du mécanisme :

$$E^\ddagger = \frac{E_1^\ddagger + E_2^\ddagger + E_3^\ddagger - E_4^\ddagger}{2} \quad (97)$$

En outre, la première étape étant beaucoup plus lente que les autres, cela se traduit par :

$$k_1 \ll k_2, k_1 \ll k_3 \text{ et } k_1 \ll k_4$$

c'est-à-dire (si les facteurs pré-exponentiels sont du même ordre de grandeur) :

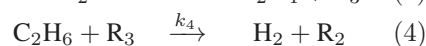
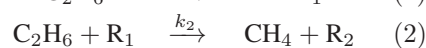
$$E_1^\ddagger \gg E_2^\ddagger, E_1^\ddagger \gg E_3^\ddagger \text{ et } E_1^\ddagger \gg E_4^\ddagger$$

ce qui simplifie l'expression (97) de l'énergie d'activation E^\ddagger :

$$E^\ddagger \simeq \frac{E_1^\ddagger}{2}$$

● 294 ————— Lycée Saint-Louis, Paris

1. (a) En notant R_1 , R_2 et R_3 les radicaux CH_3^\bullet , $\text{C}_2\text{H}_5^\bullet$ et H^\bullet , le mécanisme réactionnel s'écrit :



L'application de l'approximation de l'état quasi stationnaire aux radicaux conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{R}_1]}{dt} = 0 &\Rightarrow 2k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] - k_2 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_1] = 0 \\ &\Rightarrow k_2 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_1] = 2k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] \quad (98) \end{aligned}$$

$$\frac{d[\text{R}_2]}{dt} = 0 \Rightarrow k_2 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_1] - k_3 [\text{R}_2] + k_4 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_3] - k_5 [\text{R}_2] [\text{R}_3] = 0 \quad (99)$$

et :

$$\frac{d[\text{R}_3]}{dt} = 0 \Rightarrow k_3 [\text{R}_2] - k_4 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_3] - k_5 [\text{R}_2] [\text{R}_3] = 0 \quad (100)$$

(b) L'addition des équations (99) et (100) se traduit par :

$$k_2 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_1] = 2k_5 [\text{R}_2] [\text{R}_3] \quad (101)$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'équation (98) :

$$2k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] = 2k_5 [\text{R}_2] [\text{R}_3] \Rightarrow [\text{R}_3] = \frac{k_1}{k_5} \frac{[\text{C}_2\text{H}_6]}{[\text{R}_2]} \quad (102)$$

Compte tenu des identités (98) et (102) :

$$k_2 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_1] - k_5 [\text{R}_1] [\text{R}_3] = 2k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] - k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] = k_1 [\text{C}_2\text{H}_6]$$

De sorte que l'équation (99) se présente aussi sous la forme :

$$k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] - k_3 [\text{R}_2] + k_4 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_3] = 0$$

dans laquelle $[\text{R}_3]$ peut être remplacé par son expression (102) :

$$k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] - k_3 [\text{R}_2] + k_4 [\text{C}_2\text{H}_6] \times \frac{k_1}{k_5} \frac{[\text{C}_2\text{H}_6]}{[\text{R}_2]} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \frac{k_1 k_4}{k_5} \times \frac{[\text{C}_2\text{H}_6]^2}{[\text{R}_2]} &= k_3 [\text{R}_2] - k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] = k_3 \left([\text{R}_2] - \frac{k_1}{k_3} [\text{C}_2\text{H}_6] \right) \\ \Rightarrow [\text{C}_2\text{H}_6]^2 &= \frac{k_3 k_5}{k_1 k_4} [\text{R}_2] \left([\text{R}_2] - \frac{k_1}{k_3} [\text{C}_2\text{H}_6] \right) \end{aligned}$$

En notant :

$$k = \frac{k_3 k_5}{k_1 k_4} \text{ et } k' = \frac{k_1}{k_3} \quad (103)$$

cette équation s'écrit également :

$$[\text{C}_2\text{H}_6]^2 = k [\text{C}_2\text{H}_5^\bullet] \times ([\text{C}_2\text{H}_5^\bullet] - k' [\text{C}_2\text{H}_6]) \text{ car } [\text{R}_2] = [\text{C}_2\text{H}_5^\bullet] \quad (104)$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} k &= \frac{3 \cdot 10^{13} \times 4 \cdot 10^{10}}{4 \cdot 10^{16} \times 4 \cdot 10^{11}} \times \exp \left[-\frac{1}{RT} \times (165\,000 - 366\,000 - 60\,000) \right] \\ &\Rightarrow k = 75 \cdot 10^{-6} \times \exp \left(\frac{261 \cdot 10^3}{RT} \right) \quad (105) \end{aligned}$$

et :

$$k' = \frac{4 \cdot 10^{16}}{3 \cdot 10^{13}} \times \exp \left[-\frac{1}{RT} (366\,000 - 165\,000) \right] = 1,3 \cdot 10^3 e^{-\frac{201 \cdot 10^3}{RT}} \quad (106)$$

2. L'équation (98) indique directement, si $[\text{C}_2\text{H}_6] \neq 0$, que :

$$k_2 [\text{R}_1] = 2 k_1 \Rightarrow [\text{R}_1] = \frac{2 k_1}{k_2}$$

De plus, en négligeant $k' [\text{C}_2\text{H}_6]$ devant $[\text{C}_2\text{H}_5^\bullet] = [\text{R}_2]$, le résultat (104) se simplifie :

$$[\text{C}_2\text{H}_6]^2 = k [\text{R}_2]^2 \Rightarrow [\text{C}_2\text{H}_6] = \sqrt{k} [\text{R}_2] \Rightarrow [\text{R}_2] = \frac{[\text{C}_2\text{H}_6]}{\sqrt{k}} \quad (107)$$

Quant à l'équation (100), elle permet d'isoler $[\text{R}_3]$:

$$[\text{R}_3] = \frac{k_3 [\text{R}_2]}{k_4 [\text{C}_2\text{H}_6] + k_5 [\text{R}_2]}$$

où le résultat précédent conduit à :

$$[\text{R}_3] = \frac{k_3}{k_4 \frac{[\text{C}_2\text{H}_6]}{[\text{R}_2]} + k_5} = \frac{k_3}{k_4 \sqrt{k} + k_5}$$

c'est-à-dire, en remarquant que $k_4 = k_2$:

$$[\text{R}_3] = \frac{k_3}{k_2 \sqrt{k} + k_5} \quad (108)$$

L'approximation (107) permet le calcul du rapport :

$$r = \frac{k' [\text{C}_2\text{H}_6]}{[\text{C}_2\text{H}_5^\bullet]} = k' \sqrt{k}$$

à l'aide des expressions numériques (105) et (106) :

$$r = 1,3 \cdot 10^3 e^{-\frac{201 \cdot 10^3}{RT}} \times \sqrt{75 \cdot 10^{-6}} e^{\frac{130,5 \cdot 10^3}{RT}} = 11,3 \times e^{-\frac{70,5 \cdot 10^3}{RT}}$$

Aussi, la condition $r < \frac{1}{100}$ se traduit-elle par :

$$\begin{aligned} 11,3 \times e^{-\frac{70,5}{RT}} < \frac{1}{100} &\Rightarrow e^{-\frac{70,5 \cdot 10^3}{RT}} < \frac{1}{1130} \\ &\Rightarrow \frac{-70,5 \cdot 10^3}{RT} < -\ln(1130) \Rightarrow \frac{70,5 \cdot 10^3}{RT} > \ln(1130) \\ &\Rightarrow T < \frac{70,5 \cdot 10^3}{8,3 \times \ln(1130)} \Rightarrow T < 1208 \text{ K} \end{aligned}$$

3. (a) Le coefficient τ est défini par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} &= 3k_1 + \frac{k_2 k_3 \sqrt{k} - k_3 k_5}{k_2 k + k_5 \sqrt{k}} \\ &= \frac{3k_1 k_2 k + k_2 k_3 \sqrt{k} + 3k_1 k_5 \sqrt{k} - k_3 k_5}{k_2 k + k_5 \sqrt{k}} \\ &= \frac{\sqrt{k} (k_2 k_3 + 3k_1 k_5) + 3k_1 k_2 k - k_3 k_5}{k_2 k + k_5 \sqrt{k}} \end{aligned}$$

où le résultat (103) indique que :

$$\begin{aligned} k &= \frac{k_3 k_5}{k_1 k_4} = \frac{k_3 k_5}{k_1 k_2} \Rightarrow k k_1 k_2 = k_3 k_5 \\ &\Rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{\sqrt{k} (k_2 k_3 + 3k_1 k_5) + 2 k_3 k_5}{k_2 k + k_5 \sqrt{k}} > 0 \\ &\Rightarrow \tau > 0 \end{aligned}$$

(b) L'éthane intervient dans les étapes (1), (2), (4) et (5), en conséquence de quoi sa vitesse d'apparition vaut :

$$\frac{d[\text{C}_2\text{H}_6]}{dt} = -k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] - k_2 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_1] - k_4 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_3] + k_5 [\text{R}_2] [\text{R}_3]$$

Compte tenu de l'identité (98) :

$$k_2 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_1] = 2k_1 [\text{C}_2\text{H}_6]$$

et de l'expression (108) de $[\text{R}_3]$:

$$[\text{R}_3] = \frac{k_3}{k_2 \sqrt{k} + k_5}$$

cette équation différentielle se présente également sous la forme :

$$\begin{aligned} -\frac{d[\text{C}_2\text{H}_6]}{dt} &= 3k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] + [\text{R}_3] (k_4 [\text{C}_2\text{H}_6] - k_5 [\text{R}_2]) \\ &= 3k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] + \frac{k_3}{k_2 \sqrt{k} + k_5} (k_2 [\text{C}_2\text{H}_6] - k_5 [\text{R}_2]) \text{ car } k_4 = k_2 \end{aligned}$$

où le résultat (107) :

$$[\text{R}_2] = \frac{[\text{C}_2\text{H}_6]}{\sqrt{k}}$$

conduit à :

$$\begin{aligned} -\frac{d[\text{C}_2\text{H}_6]}{dt} &= 3k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] + \frac{k_3}{k_2 \sqrt{k} + k_5} \left(k_2 - \frac{k_5}{\sqrt{k}} \right) [\text{C}_2\text{H}_6] \\ &= \left(3k_1 + \frac{k_3}{\sqrt{k}} \times \frac{k_2 \sqrt{k} - k_5}{k_2 \sqrt{k} + k_5} \right) [\text{C}_2\text{H}_6] \end{aligned}$$

soit encore :

$$-\frac{d[\text{C}_2\text{H}_6]}{dt} = \frac{1}{\tau} [\text{C}_2\text{H}_6] \Rightarrow \frac{d[\text{C}_2\text{H}_6]}{[\text{C}_2\text{H}_6]} = -\frac{1}{\tau} dt$$

Connaissant la concentration initiale $[\text{C}_2\text{H}_6]_0 = C_0$, l'intégration de cette équation produit :

$$\int_{C_0}^{[\text{C}_2\text{H}_6]} \frac{d[\text{C}_2\text{H}_6]}{[\text{C}_2\text{H}_6]} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \left(\frac{[\text{C}_2\text{H}_6]}{C_0} \right) = -\frac{t}{\tau}$$

d'où l'on déduit que :

$$[\text{C}_2\text{H}_6] = C_0 e^{-t/\tau} \quad (109)$$

(c) CH_4 n'étant produit qu'à l'issue de l'étape (2), sa vitesse d'apparition vaut :

$$\frac{d[\text{CH}_4]}{dt} = k_2 [\text{R}_1] [\text{C}_2\text{H}_6]$$

où l'équation (98) procure immédiatement :

$$\begin{aligned} k_2 [\text{R}_1] [\text{C}_2\text{H}_6] &= 2k_1 [\text{C}_2\text{H}_6] = 2k_1 C_0 e^{-t/\tau} \\ \Rightarrow \frac{d[\text{CH}_4]}{dt} &= 2k_1 C_0 e^{-t/\tau} \\ \Rightarrow d[\text{CH}_4] &= 2k_1 C_0 e^{-t/\tau} dt \end{aligned}$$

Or, l'énoncé précise qu'à l'instant $t = 0$, l'éthane (C_2H_6) est pur, ce qui signifie que $[\text{CH}_4] = 0$ à $t = 0$, en raison de quoi :

$$\begin{aligned} \int_0^{[\text{CH}_4]} d[\text{CH}_4] &= 2k_1 C_0 \int_0^t e^{-t/\tau} dt \Rightarrow [\text{CH}_4] = 2k_1 C_0 \times \left[-\tau e^{-t/\tau} \right]_0^t \\ \Rightarrow [\text{CH}_4] &= 2k_1 C_0 \tau \times \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \end{aligned}$$

De même, l'étape (3) est la seule à produire C_2H_4 , en conséquence de quoi :

$$\frac{d[\text{C}_2\text{H}_4]}{dt} = k_3 [\text{R}_2]$$

avec : $[\text{R}_2] = \frac{[\text{C}_2\text{H}_6]}{\sqrt{k}}$. Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{d[\text{C}_2\text{H}_4]}{dt} &= \frac{k_3}{\sqrt{k}} [\text{C}_2\text{H}_6] = \frac{k_3}{\sqrt{k}} \times C_0 e^{-t/\tau} \\ \Rightarrow d[\text{C}_2\text{H}_4] &= \frac{k_3}{\sqrt{k}} C_0 e^{-t/\tau} dt \\ \Rightarrow \int_0^{[\text{C}_2\text{H}_4]} d[\text{C}_2\text{H}_4] &= \frac{k_3 C_0}{\sqrt{k}} \int_0^t e^{-t/\tau} dt \text{ car } [\text{C}_2\text{H}_4]_{(t=0)} = 0 \end{aligned}$$

Finalement :

$$[\text{C}_2\text{H}_4] = \frac{k_3 C_0}{\sqrt{k}} \times \left[-\tau e^{-t/\tau} \right]_0^t \Rightarrow [\text{C}_2\text{H}_4] = \frac{k_3 C_0 \tau}{\sqrt{k}} \times \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

Quant à H_2 , qui n'est produit qu'au cours de l'étape (4), sa vitesse d'apparition est définie par :

$$\frac{d[\text{H}_2]}{dt} = k_4 [\text{C}_2\text{H}_6] [\text{R}_3]$$

où $[R_3]$ est donné par le résultat (108) :

$$\begin{aligned}\frac{d[H_2]}{dt} &= \frac{k_3 k_4}{k_2 \sqrt{k} + k_5} \times [C_2H_6] = \frac{k_3 k_4 C_0}{k_2 \sqrt{k} + k_5} e^{-t/\tau} \\ \Rightarrow \int_0^{[H_2]} d[H_2] &= \frac{k_3 k_4 C_0}{k_2 \sqrt{k} + k_5} \int_0^t e^{-t/\tau} dt \\ \Rightarrow [H_2] &= \frac{k_3 k_4 C_0 \tau}{k_2 \sqrt{k} + k_5} \times (1 - e^{-t/\tau})\end{aligned}$$

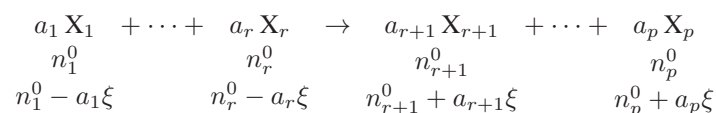
Chapitre 9

Réactions en solution aqueuse

9.1 L'équilibre chimique

9.1.1 Évolution d'une réaction

Une réaction chimique :



est caractérisée par son avancement ξ et ses coefficients stœchiométriques a_i , auxquels sont associés les coefficients stœchiométriques algébriques ν_i tels que :

$$\nu_i = -a_i \text{ pour } i \in [1, r] \text{ et } \nu_i = a_i \text{ pour } i \in [r + 1, p]$$

Ce faisant, la composition du milieu réactionnel est décrite par l'ensemble des nombres de moles $n_i = n_i^0 + \nu_i \xi$.

Définition 1 Si p désigne la pression totale d'un mélange de gaz, n_i le nombre de moles d'un de ces gaz, (X_i) et $\sum_i n_i$ le nombre total de moles de gaz, la pression partielle p_i du gaz X_i est définie par :

$$p_i = \frac{n_i}{n} \times p = x_i \times p$$

où $x_i = \frac{n_i}{n}$ est la fraction molaire de l'espèce X_i .

Remarque – La pression partielle p_i peut aussi être définie comme représentant la pression qu'aurait le gaz X_i , si ses n_i moles occupaient, seules, le volume V du milieu, à la température T :

$$p_i V = n_i RT \Rightarrow p_i = \frac{n_i RT}{V}$$

À chaque espèce chimique X_i est attribuée une *activité chimique*, notée $|X_i|$, étroitement liée à la nature de cette espèce.

- Pour un gaz, l'activité chimique s'identifie au rapport de sa pression partielle p_i et d'une pression *standard* p_0 (conventionnellement choisie égale à 1 bar = 10^5 Pa) :

$$|X_i|_{(\text{gaz})} = \frac{p_i}{p_0}$$

Si la pression p_i est exprimée en bars, cette activité peut également être écrite :

$$|X_i|_{(\text{gaz})} = p_i \text{ (sans unité si } p_i \text{ est en bars).}$$

- Pour un soluté dilué, l'activité chimique est assimilée au rapport de sa concentration molaire volumique $[X_i]$ par une concentration *standard* C_0 :

$$|X_i|_{(\text{soluté})} = \frac{[X_i]}{C_0}$$

Par convention, C_0 est choisi égale à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, de sorte que :

$$|X_i|_{(\text{soluté})} = [X_i] \text{ (sans unité si } [X_i] \text{ est en } \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}\text{).}$$

- Pour un corps pur (précipité, métal, solide, ...) ou un solvant (par exemple l'eau), l'activité vaut 1 :

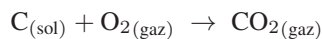
$$|X_i|_{(\text{pur, solvant})} = 1$$

△ Si l'espèce chimique est absente du milieu réactionnel (bien que son symbole apparaisse dans l'équation-bilan, son activité est nulle, quelle que soit la nature de cette espèce.

Définition 2 On appelle *quotient de réaction* la grandeur :

$$Q = \prod_{i=1}^p |X_i|^{\nu_i} = \frac{\prod_{i=r+1}^p |X_i|^{a_i}}{\prod_{j=1}^r |X_j|^{a_j}}$$

Par exemple, le quotient de réaction correspondant à l'équation-bilan :



vaut :

$$Q = \frac{|\text{CO}_2|}{|\text{C}| \times |\text{O}_2|} = \frac{p_{\text{CO}_2}}{p_{\text{O}_2}}$$

9.1.2 Loi d'action des masses

La définition du quotient de réaction montre que deux cas extrêmes peuvent se présenter :

- si la réaction est totale, le produit $\prod_{j=1}^r |X_j|^{a_j}$ s'annule car l'un des réactifs est appelé à disparaître. C'est pourquoi :

$$Q \rightarrow \infty \text{ pour une réaction totale.}$$

- si la réaction est nulle, aucun produit ne se forme, de sorte que : $\prod_{i=r+1}^p |X_i|^{a_i} = 0$.

Par suite :

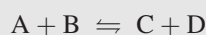
$$Q = 0 \text{ pour une réaction nulle.}$$

Entre ces deux situations se situent les équilibres chimiques, à propos desquels la *loi d'action des masses* précise qu'à l'équilibre, le quotient de réaction adopte une valeur K (qui ne dépend que de la température) :

$$\frac{\prod_{i=r+1}^p |X_i|^{a_i}}{\prod_{j=1}^r |X_j|^{a_j}} = K \text{ à l'équilibre.}$$

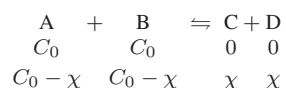


On s'intéresse à une réaction :



en phase aqueuse homogène, où les produits et réactifs sont des solutés dilués. Si l'on admet que la réaction est presque totale lorsque 99,9% de A et B (introduits initialement à la même concentration C_0) ont réagi, quelle valeur minimale doit posséder la constante K de cet équilibre ?

RÉPONSE Soit C_0 la concentration initiale des réactifs et χ l'avancement de la réaction :



On note α la proportion de réactifs ayant réagi (avec $\alpha \geq 99,9\%$), définie par :

$$\alpha = \frac{\chi}{C_0} \Rightarrow \chi = \alpha C_0$$

d'où découlent les expressions des concentrations :

$$[A] = [B] = C_0 (1 - \alpha) \text{ et } [C] = [D] = \alpha C_0$$

Les produits et réactifs étant des solutés dilués, leurs activités se confondent avec leurs concentrations (à condition toutefois que ces dernières soient exprimées en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$) :

$$|A| = |B| = C_0 (1 - \alpha) \text{ et } |C| = |D| = \alpha C_0$$

Par suite, à l'équilibre, la loi d'action des masses stipule que la constante d'équilibre vaut :

$$K = \frac{|C| \times |D|}{|A| \times |B|} = \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha)^2} \geq \left(\frac{0,999}{1 - 0,999} \right)^2 = 9,98 \cdot 10^5$$

ce qui signifie également qu'une réaction dont la constante K excède 10^6 peut être considérée comme totale.

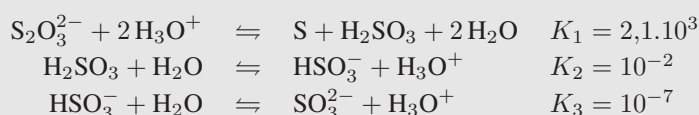
Remarque – Dans la pratique, on peut également considérer qu'une constante d'équilibre $K \geq 10^4$ caractérise une réaction totale (ou quasi quantitative), puisqu'elle conduit à un taux de transformation de l'ordre de 99%.

La loi d'action des masses joue un rôle modérateur sur les contraintes imposées au système chimique, qui se traduit par un déplacement des équilibres :

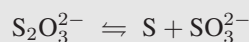
- en phase gazeuse, une augmentation de la pression totale fait évoluer l'équilibre dans le sens de la diminution de cette pression, c'est-à-dire qu'elle favorise la réaction qui libère le moins de gaz ;
- En phase aqueuse, la disparition d'une espèce chimique déplace l'équilibre dans le sens de la formation de cette espèce (cet effet modérateur est mis à profit lors des distillations).



On donne, pour les équilibres suivants (en milieu aqueux), les valeurs numériques des constantes K_1 , K_2 et K_3 :



En déduire la valeur numérique de la constante K_4 associée à l'équilibre suivant :



RÉPONSE En notant $|X|$ l'activité d'une espèce X, la constante K_4 est définie par :

$$K_4 = \frac{|S| |\text{SO}_3^{2-}|}{|\text{S}_2\text{O}_3^{2-}|}$$

L'activité $|S|$ est alors introduite par la constante d'équilibre K_1 :

$$K_1 = \frac{|S| |\text{H}_2\text{SO}_3| |\text{H}_2\text{O}|^2}{|\text{S}_2\text{O}_3^{2-}| |\text{H}_3\text{O}^+|^2} \Rightarrow |S| = \frac{K_1 |\text{S}_2\text{O}_3^{2-}| |\text{H}_3\text{O}^+|^2}{|\text{H}_2\text{SO}_3| |\text{H}_2\text{O}|^2}$$

et $|\text{SO}_3^{2-}|$ l'est par la constante K_3 :

$$K_3 = \frac{|\text{SO}_3^{2-}| |\text{H}_3\text{O}^+|}{|\text{HSO}_3^-| |\text{H}_2\text{O}|} \Rightarrow |\text{SO}_3^{2-}| = \frac{K_3 |\text{HSO}_3^-| |\text{H}_2\text{O}|}{|\text{H}_3\text{O}^+|}$$

C'est pourquoi :

$$K_4 = \frac{1}{|\text{S}_2\text{O}_3^{2-}|} \times \frac{K_1 |\text{S}_2\text{O}_3^{2-}| |\text{H}_3\text{O}^+|^2}{|\text{H}_2\text{SO}_3| |\text{H}_2\text{O}|^2} \times \frac{K_3 |\text{HSO}_3^-| |\text{H}_2\text{O}|}{|\text{H}_3\text{O}^+|} = K_1 K_3 \times \frac{|\text{H}_3\text{O}^+| |\text{HSO}_3^-|}{|\text{H}_2\text{SO}_3| |\text{H}_2\text{O}|}$$

où l'on reconnaît la définition de la constante K_2 :

$$K_2 = \frac{|\text{HSO}_3^-| |\text{H}_3\text{O}^+|}{|\text{H}_2\text{SO}_3| |\text{H}_2\text{O}|} \Rightarrow K_4 = K_1 \times K_2 \times K_3$$

c'est-à-dire :

$$K_4 = 2,1 \cdot 10^3 \times 10^{-7} \times 10^{-2} = 2,1 \cdot 10^{-6}$$

Considérons une espèce X susceptible de réagir avec deux composés A et A' pour produire B et B', selon les équilibres suivants, de constantes K et K' :

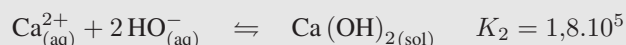
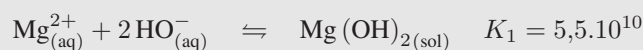


Si, dans le même milieu réactionnel X, A et A' sont introduits en quantité du même ordre de grandeur, les produits B et B' peuvent *a priori* être obtenus. Cependant, si la première réaction est prépondérante, la production de B' peut être négligée par rapport à celle de B.

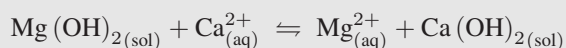
On peut admettre que la première réaction est prépondérante lorsque $K \geq 10^4 \times K'$.



Un milieu réactionnel contient des ions Mg^{2+} , Ca^{2+} et HO^- dans des conditions telles que les deux équilibres suivants peuvent se produire :



1. Laquelle des deux réactions paraît prépondérante ? Quelle conséquence cela peut-il avoir sur les concentrations de Mg^{2+} et de Ca^{2+} à l'équilibre ?
2. En calculant la constante de l'équilibre :



peut-on confirmer la réponse à la question précédente ?

RÉPONSE

1. Étant donné que $K_1 \gg K_2$, la première réaction est prépondérante, ce qui signifie que des deux réactions c'est celle qui présente le plus grand avancement, ce qui se traduit par une disparition des ions Mg^{2+} plus grande que celle des ions Ca^{2+} :

$$[\text{Mg}^{2+}] \ll [\text{Ca}^{2+}]$$

2. La loi d'action des masses définit la constante de l'équilibre proposé :

$$K = \frac{|\text{Mg}^{2+}| |\text{Ca}(\text{OH})_2|}{|\text{Ca}^{2+}| |\text{Mg}(\text{OH})_2|} \quad (1)$$

où les activités des espèces solides $\text{Ca}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ et $\text{Mg}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ valent 1, tandis que les activités des solutés Mg^{2+} et Ca^{2+} valent :

$$\begin{cases} |\text{Mg}^{2+}| = \frac{[\text{Mg}^{2+}]}{C_0} \\ |\text{Ca}^{2+}| = \frac{[\text{Ca}^{2+}]}{C_0} \end{cases} \quad \text{avec } C_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

en conséquence de quoi :

$$K = \frac{[\text{Mg}^{2+}]}{[\text{Ca}^{2+}]}$$

En outre, les constantes d'équilibre K_1 et K_2 sont définies par :

$$K_1 = \frac{|\text{Mg}(\text{OH})_2|}{|\text{Mg}^{2+}| |\text{HO}^-|^2} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{|\text{Ca}(\text{OH})_2|}{|\text{Ca}^{2+}| |\text{HO}^-|^2}$$

d'où l'on déduit que :

$$\frac{K_2}{K_1} = \frac{|\text{Ca}(\text{OH})_2| |\text{Mg}^{2+}|}{|\text{Ca}^{2+}| |\text{Mg}(\text{OH})_2|}$$

La comparaison avec la relation (1) conduit directement à :

$$K = \frac{K_2}{K_1} \Rightarrow \frac{[\text{Mg}^{2+}]}{[\text{Ca}^{2+}]} = \frac{K_2}{K_1} = \frac{1,8 \cdot 10^5}{5,5 \cdot 10^{10}} = 3,3 \cdot 10^{-6} \ll 1$$

$$\Rightarrow [\text{Mg}^{2+}] \ll [\text{Ca}^{2+}]$$

ce qui confirme les conclusions de la question précédente.

9.2 Équilibres acido-basiques

9.2.1 couple acide-base

9.2.1.1 Définitions

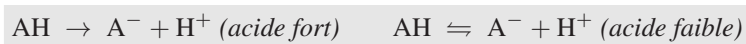
Définition 3 Selon Brønsted, un acide AH est susceptible de libérer un proton H^+ :



tandis qu'une espèce basique B peut capter un proton :



Définition 4 Un acide est fort si sa dissociation est totale, sinon il est faible :



De même, une base forte est totalement protonée, tandis que la réaction donne lieu à un équilibre pour une base faible :



Par exemple, HCl est un acide fort dans l'eau :



tandis que l'acide éthanoïque est un acide faible :



et l'ammoniac, NH_3 , est une base faible :



Définition 5 Lorsqu'un acide AH est faible, l'équation :



montre que la réaction inverse peut se produire :



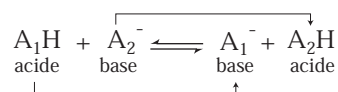
si bien que AH est un acide et A^- est une base ; on note AH/A^- le couple acide-base ainsi constitué.

Par exemple CH_3COOH/CH_3COO^- et NH_4^+/NH_3 sont des couples acides-bases.

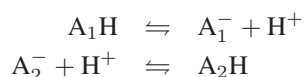
⚠ Aucun couple acide-base ne peut être associé à un acide fort (ou à une base forte). Ainsi, HCl/Cl^- est une notation erronée car elle signifierait que Cl^- , par son caractère basique, peut capter un proton, ce qu'interdit la simple flèche de l'équation :



Deux couples acides-bases A_1H/A_1^- et A_2H/A_2^- peuvent réagir par transfert de protons, à condition que l'acide de l'un soit au contact de la base de l'autre :



ce que l'on peut développer en écrivant les deux demi-équations :



👉 L'acide chlorhydrique (solution aqueuse de chlorure d'hydrogène) peut réagir sur l'ammoniaque. Rendez compte de cette réaction à l'aide d'une (ou plusieurs) équation(s) chimique(s) ; on distinguera avec soin les réactions totales des équilibres chimiques.

RÉPONSE HCl étant un acide fort, sa mise en solution provoque sa dissociation totale :



Les ions H^+ ainsi libérés peuvent réagir sur la base faible NH_3 :



⚠ Les deux équations :



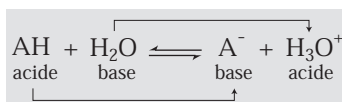
sont fausses ; la première parce qu'elle n'admet pas que NH_3 puisse subsister dans le milieu réactionnel et la seconde parce qu'elle admet l'existence de HCl dans le milieu aqueux.

9.2.1.2 Couples acido-basiques de l'eau

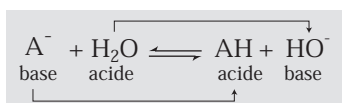
L'eau H_2O possède à la fois des propriétés acides et des propriétés basiques ; les couples acides-bases correspondants sont :



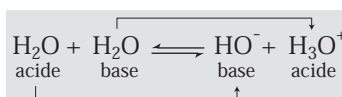
La dissolution d'un acide faible AH dans l'eau se traduit par une réaction acido-basique :



de même que la mise en solution d'une base faible dans l'eau provoque une réaction acido-basique :



Pour cette raison, les deux couples acides-bases de l'eau sont à l'origine d'un équilibre appelé *autoprotolyse* de l'eau :



Les activités des espèces impliquées dans cet équilibre sont :

$$|\text{H}_2\text{O}| = 1 \quad |\text{H}_3\text{O}^+| = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{C_0} \quad |\text{HO}^-| = \frac{[\text{HO}^-]}{C_0} \text{ avec } C_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

d'où se déduit l'expression de la constante associée à l'autoprotolyse de l'eau :

$$K_i = \frac{|\text{H}_3\text{O}^+| |\text{HO}^-|}{|\text{H}_2\text{O}|} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-]}{C_0^2}$$

Notamment, si les concentrations $[\text{H}_3\text{O}^+]$ et $[\text{HO}^-]$ sont exprimées en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$, K_i est appelé *produit ionique de l'eau*, et vaut 10^{-14} à 25°C :

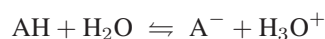
$$K_i = [\text{H}_3\text{O}^+] \times [\text{HO}^-] = 10^{-14}$$

Remarque – Avec ses propriétés acides et basiques, l'eau est un ampholyte, qui présente des propriétés amphotères.

9.2.2 Constante d'acidité

9.2.2.1 Définitions

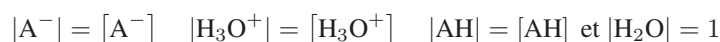
L'équilibre de mise en solution d'un acide AH :



est associé à une constante :

$$K_a = \frac{|\text{A}^-| |\text{H}_3\text{O}^+|}{|\text{AH}| |\text{H}_2\text{O}|}$$

Lorsque les concentrations s'expriment en mol · L⁻¹ :



d'où découle la définition de la *constante d'acidité* :

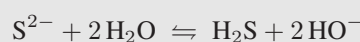
$$K_a = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]}$$

ou de son cologarithme :

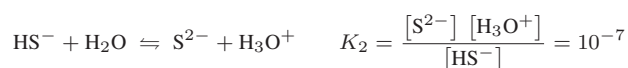
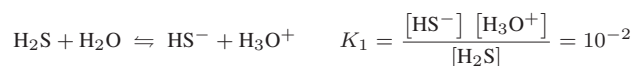
$$pK_a = -\log K_a \Rightarrow K_a = 10^{-pK_a}$$



Les constantes d'acidité des couples H₂S/HS⁻ et HS⁻/S²⁻ valent respectivement pK_{a1} = 2 et pK_{a2} = 7 ; calculer la valeur de la constante de l'équilibre :



RÉPONSE Les constantes K₁ et K₂ sont définies à partir des équilibres :



d'où se déduisent les concentrations :

$$[H_2S] = \frac{[HS^-][H_3O^+]}{K_1} \text{ et } [S^{2-}] = \frac{K_2 [HS^-]}{[H_3O^+]}$$

Or, l'équilibre proposé a pour constante :

$$K = \frac{[H_2S][HO^-]^2}{[S^{2-}]}$$

c'est-à-dire :

$$K = \frac{[HS^-][H_3O^+]}{K_1} \times [HO^-]^2 \times \frac{[H_3O^+]}{K_2 [HS^-]} = \frac{([H_3O^+] \times [HO^-])^2}{K_1 K_2}$$

où l'on reconnaît la définition du produit ionique de l'eau : [H₃O⁺][HO⁻] = K_i :

$$K = \frac{K_i^2}{K_1 K_2} = \frac{(10^{-14})^2}{10^{-2} \times 10^{-7}} \Rightarrow K = 10^{-19}$$

Définition 6 Le cologarithme de [H₃O⁺] est conventionnellement défini par :

$$pH = -\log [H_3O^+] \Leftrightarrow [H_3O^+] = 10^{-pH}$$

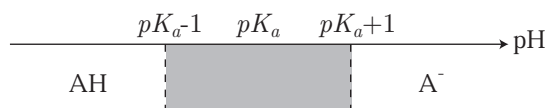
À partir de la définition de la constante K_a :

$$K_a = \frac{[A^-][H_3O^+]}{[AH]}$$

on retrouve très rapidement la *relation de Henderson* :

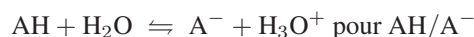
$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \left(\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \right)$$

En convenant que A^- est prédominant lorsque $[\text{A}^-] \geq 10 \times [\text{AH}]$ et que AH l'est pour $[\text{AH}] \geq 10 \times [\text{A}^-]$, la relation de Henderson permet d'établir le diagramme de prédominance suivant :

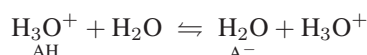


9.2.2.2 Constantes d'acidité de l'eau

Les constantes d'acidité associées aux couples acides-bases de l'eau s'obtiennent aisément en écrivant les équations des équilibres liés à la mise en solution des formes acides respectives :



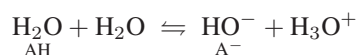
- Pour le couple $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$:



la constante est définie par :

$$K_{a1} = \frac{|\text{H}_3\text{O}^+| |\text{H}_2\text{O}|}{|\text{H}_2\text{O}| |\text{H}_3\text{O}^+|} = 1 \Rightarrow \text{p}K_{a1} = 0 \text{ pour } \text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$$

- Pour le couple $\text{H}_2\text{O}/\text{HO}^-$:



la loi d'action des masses définit la constante :

$$K_{a2} = \frac{|\text{HO}^-| |\text{H}_3\text{O}^+|}{|\text{H}_2\text{O}|^2} = [\text{HO}^-] [\text{H}_3\text{O}^+] = K_i = 10^{-14}$$

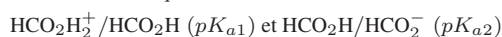
$$\Rightarrow \text{p}K_{a2} = 14 \text{ pour } \text{H}_2\text{O}/\text{HO}^-$$

Étant donné que l'eau est le solvant dans lequel s'étudieront tous les équilibres, les deux valeurs de $\text{p}K_a$ trouvées ci-dessus constitueront des valeurs limites.

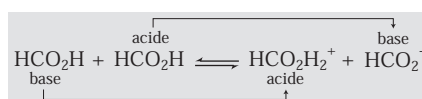


La constante d'autoprotolyse de l'acide méthanoïque (acide formique) est égale à $10^{-6,2}$. Écrire l'équation d'autoprotolyse et donner l'expression de la constante. Comparer les échelles de pH dans l'eau et dans l'acide méthanoïque (on admettra que les limites de l'échelle s'obtiennent quand l'activité est égale à l'unité pour l'une des espèces chimiques correspondant à la forme acide ou à la forme basique du solvant).

RÉPONSE Les couples de l'acide formique sont :



C'est pourquoi l'équation d'autoprotolyse s'écrit :

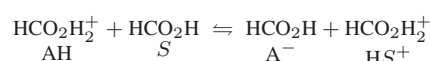


dont la constante vaut :

$$K = \frac{[\text{HCO}_2\text{H}_2^+][\text{HCO}_2^-]}{[\text{HCO}_2\text{H}]^2} \Rightarrow K = 10^{-6,2} = [\text{HCO}_2\text{H}_2^+][\text{HCO}_2^-]$$

car l'activité du solvant vaut 1 : $[\text{HCO}_2\text{H}] = 1$.

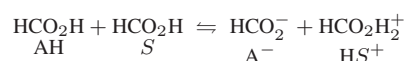
La réaction de dissociation de HCO_2H_2^+ dans le solvant HCO_2H (S) :



définit la constante d'acidité :

$$K_{a1} = \frac{[\text{HCO}_2\text{H}][\text{HCO}_2\text{H}_2^+]}{[\text{HCO}_2\text{H}_2^+][\text{HCO}_2\text{H}]} = 1 \Rightarrow pK_{a1} = 0 \text{ pour } \text{HCO}_2\text{H}_2^+/\text{HCO}_2\text{H}$$

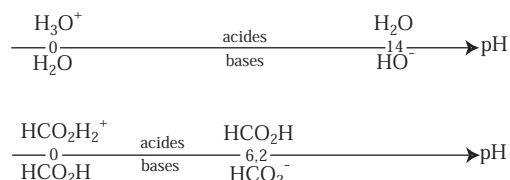
Quant à la réaction de dissociation de l'acide HCO_2H dans le solvant (S) :



sa constante d'acidité vaut :

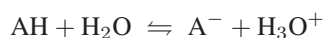
$$\begin{aligned} K_{a2} &= \frac{[\text{HCO}_2^-][\text{HCO}_2\text{H}_2^+]}{[\text{HCO}_2\text{H}]^2} \Rightarrow K_{a2} = K = 10^{-6,2} \\ &\Rightarrow pK_{a2} = 6,2 \text{ pour } \text{HCO}_2\text{H}/\text{HCO}_2^- \end{aligned}$$

Par conséquent, les échelles de pH de l'eau et de l'acide formique sont :



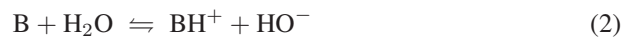
9.2.2.3 Force d'un acide

Un acide AH est d'autant plus fort que l'équilibre :



favorise la formation de A^- , rendant la constante d'acidité $K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]}$ d'autant plus grande ; $pK_a = -\log K_a$ est alors petit.

De même, la mise en solution d'une base B d'un couple BH^+/B se traduit par l'équilibre :



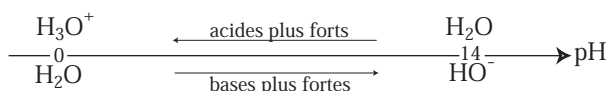
de constante :

$$K_b = \frac{[\text{BH}^+][\text{HO}^-]}{[\text{B}]} = \frac{[\text{BH}^+]}{[\text{B}]} \frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$$

où l'on reconnaît la définition de la constante d'acidité K_a du couple BH^+/B :

$$K_a = \frac{[\text{B}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{BH}^+]} \Rightarrow K_b = \frac{K_i}{K_a} \Rightarrow K_a = \frac{K_i}{K_b}$$

La base B est d'autant plus forte que l'équilibre (2) est favorable à la formation de BH^+ , c'est-à-dire que K_b est important. Par suite K_a prend une valeur faible, attribuant à pK_a une valeur importante.

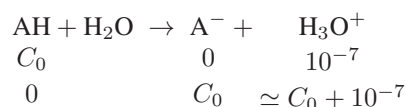


9.2.3 Calculs simples de pH

Cette partie ne s'adresse qu'aux étudiants de PCSI ayant suivi, en deuxième période, l'option PC.

9.2.3.1 Acides forts et bases fortes

La mise en solution d'un acide fort AH, à la concentration C_0 , se traduit par la réaction d'équation-bilan :

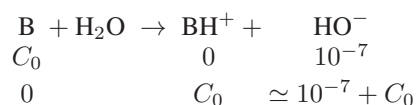


S'il est possible de négliger l'autoprotolyse de l'eau, c'est-à-dire si $\text{pH} \leq 6$, il est légitime de poser :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \simeq C_0 \Rightarrow \text{pH} = -\log C_0 \text{ si } \text{pH} \leq 6$$

Si l'hypothèse $\text{pH} \leq 6$ n'est pas vérifiée, il convient de tenir compte de l'autoprotolyse de l'eau, comme l'illustre l'exercice ci-après.

De même, la mise en solution d'une base forte B suit l'équation-bilan :



Si $\text{pH} \geq 8$, l'autoprotolyse de l'eau peut être négligée, de sorte que :

$$[\text{HO}^-] \simeq C_0 \Rightarrow \text{pH} = 14 + \log C_0 \text{ pour } \text{pH} \geq 8$$

Dans le cas contraire, l'autoprotolyse de l'eau sera prise en compte (comme l'illustre l'exemple ci-dessous).



Calculer le pH des solutions suivantes, en prenant soin de vérifier les hypothèses nécessaires aux calculs :

1. Une solution d'acide chlorhydrique à $C_1 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
2. Une solution d'acide chlorhydrique à $C_2 = 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
3. Une solution de soude (NaOH) à $C_1 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
4. Une solution de soude à $C_2 = 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

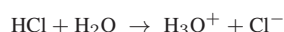
RÉPONSE

1. L'application de la relation : $\text{pH} = -\log C_1$, avec $C_1 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ conduit directement à :

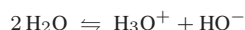
$$\text{pH} = 2$$

puisque la condition $\text{pH} \leq 6$ est confirmée.

2. En revanche, avec $C_2 = 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, la loi : $\text{pH} = -\log C_2$ fournirait $\text{pH} = 8$. Cette valeur est pour le moins suspecte puisque non seulement elle ne respecte par la condition : $\text{pH} \leq 6$, mais de surcroît elle prédit un pH basique pour une solution... d'acide chlorhydrique. C'est pourquoi il convient d'écrire que la réaction :



a mis en solution des ions Cl^- à la concentration C_2 , tandis que les ions H_3O^+ sont déjà présents, étant donné l'autoprotolyse de l'eau :



La loi de conservation des charges impose :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{HO}^-] + [\text{Cl}^-] \Rightarrow [\text{HO}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] - [\text{Cl}^-] = h - C_2 \text{ avec } h = [\text{H}_3\text{O}^+]$$

et le produit ionique de l'eau est défini par :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] [\text{HO}^-] = K_i \Rightarrow h \times (h - C_2) = K_i \Rightarrow h^2 - C_2 h - K_i = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = C_2^2 + 4K_i$$

suggère l'existence de deux solutions réelles : $h = \frac{C_2 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, dont seule la positive peut correspondre à la concentration $h = [\text{H}_3\text{O}^+]$:

$$h = \frac{C_2 + \sqrt{C_2^2 + 4K_i}}{2} = \frac{10^{-8} + \sqrt{10^{-16} + 4 \times 10^{-14}}}{2} = 1,05 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = -\log h = 6,98$$

3. Le pH d'une solution de soude à $C_1 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ est directement accessible à partir de la loi :

$$\text{pH} = 14 + \log C_2 = 12$$

car la condition : $\text{pH} \geq 8$ est respectée.

4. En revanche, pour une concentration $C_2 = 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, cette même loi fournirait le résultat $\text{pH} = 6$, qui ne peut être accepté parce qu'il transgresse la condition : $\text{pH} \geq 8$ (d'autre part, une solution de soude ne peut être une solution de pH acide). C'est pourquoi il faut non seulement tenir compte de la réaction de dissociation de l'hydroxyde de sodium :



qui libère des ions Na^+ à la concentration : $[\text{Na}^+] = C_2$, mais aussi de la réaction d'autoprotolyse de l'eau, à l'origine du produit ionique :

$$K_i = [\text{H}_3\text{O}^+] [\text{HO}^-] \quad (3)$$

Or, la neutralité électrique du milieu est maintenue à condition que :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{Na}^+] = [\text{HO}^-] \Rightarrow [\text{HO}^-] = h + C_2$$

d'où il découle que :

$$K_i = h \times (h + C_2) \Rightarrow h^2 + C_2h - K_i = 0$$

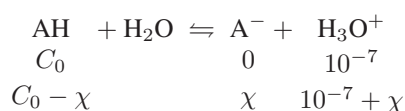
Le discriminant de cette équation : $\Delta = C_2^2 + 4K_i$ génère à nouveau deux solutions : $h = \frac{-C_2 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$
dont seule la positive présente une signification physique :

$$h = \frac{-C_2 + \sqrt{C_2^2 + 4K_i}}{2} = \frac{-10^{-8} + \sqrt{10^{-16} + 4 \times 10^{-14}}}{2} = 9,51 \cdot 10^{-8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = -\log h = 7,02$$

9.2.3.2 Acides et bases faibles

La mise en solution d'un acide AH, à la concentration $C_0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ provoque sa dissociation partielle :



En négligeant l'autoprotolyse de l'eau et en supposant, d'autre part, que $\text{pH} \leq 6$ (de sorte que $\chi \gg 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$), on obtient :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \simeq \chi \Rightarrow [\text{A}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+]$$

En outre, si $\text{pH} \leq \text{p}K_a - 1$, l'inégalité : $[\text{A}^-] \ll [\text{AH}]$ permet de négliger χ devant C_0 , d'où il découle que :

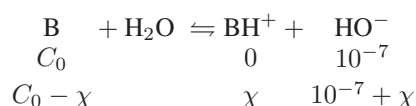
$$[\text{AH}] = C_0 - \chi \simeq C_0$$

Ce faisant, la définition de la constante d'acidité devient :

$$K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{C_0} \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{K_a C_0}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = \frac{1}{2} (\text{p}K_a - \log C_0) \text{ si } \text{pH} \leq \text{p}K_a - 1 \text{ et } \text{pH} \leq 6$$

De même, une base faible, BH, réagit avec l'eau selon l'équation-bilan :



Sous couvert que $\text{pH} \geq 8$ et que $\text{pH} \geq \text{p}K_a + 1$, certaines approximations peuvent être faites :

$$[\text{HO}^-] \simeq \chi \Rightarrow [\text{BH}^+] = [\text{HO}^-] \text{ et } [\text{B}] \simeq C_0$$

C'est pourquoi la constante de cet équilibre vaut :

$$K = \frac{[\text{BH}^+][\text{HO}^-]}{[\text{B}]} = \frac{[\text{HO}^-]^2}{C_0} \Rightarrow [\text{HO}^-] = \sqrt{K C_0}$$

où la constante K s'écrit aussi :


$$K = \frac{[\text{BH}^+][\text{HO}^-]}{[\text{B}]} = \frac{[\text{BH}^+]}{[\text{B}]} \frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_i}{K_a} \Rightarrow [\text{HO}^-] = \sqrt{\frac{K_i C_0}{K_a}}$$

d'où on tire l'expression de :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_i}{[\text{HO}^-]} = \sqrt{\frac{K_i K_a}{C_0}}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = 7 + \frac{1}{2} (pK_a + \log C_0) \text{ si } \text{pH} \geq 8 \text{ et } \text{pH} \geq pK_a + 1$$

⚠ L'utilisation de ces expressions du pH doit nécessairement être suivie du contrôle des hypothèses qui les accompagnent. Si l'une des hypothèses n'est pas vérifiée *a posteriori*, elle invalide cette expression du pH.

 Calculer le pH d'une solution de fluorure de sodium à la concentration $C_0 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le pK_a du couple HF/F⁻ vaut 3,2.

RÉPONSE Si l'on applique directement la relation du cours, on obtient :

$$\text{pH} = 7 + \frac{1}{2} (pK_a + \log C_0) = 7 + \frac{1}{2} (3,2 - 3) = 7,1$$

Si cette valeur confirme l'hypothèse selon laquelle $\text{pH} > pK_a + 1$, c'est-à-dire rend légitime l'approximation :

$$C_0 = [\text{HF}] + [\text{F}^-] \simeq [\text{F}^-] \text{ car } [\text{F}^-] \geq [\text{HF}]$$

elle invalide cependant l'approximation : $[\text{HO}^-] \simeq [\text{HF}]$ car $\text{pH} \geq 8$ n'est pas vérifiée. C'est pourquoi il est nécessaire d'écrire, d'une part, la définition de la constante d'acidité :

$$K_a = \frac{[\text{F}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HF}]} = \frac{C_0[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HF}]} \Rightarrow [\text{HF}] = \frac{C_0}{K_a} [\text{H}_3\text{O}^+] \quad (4)$$

et d'autre part l'équation qui rend compte de la neutralité électrique de la solution :

$$[\text{HO}^-] + [\text{F}^-] = [\text{Na}^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] \quad (5)$$

Or, Na⁺ provient de la dissociation totale de NaF dans l'eau :



ce qui fournit : $[\text{Na}^+] = C_0$, tandis que la conservation de l'élément fluor impose :

$$C_0 = [\text{HF}] + [\text{F}^-] \Rightarrow [\text{Na}^+] = [\text{HF}] + [\text{F}^-]$$

Ce faisant, l'équation (5) s'écrit aussi :

$$[\text{HO}^-] + [\text{F}^-] = [\text{HF}] + [\text{F}^-] + [\text{H}_3\text{O}^+] \Rightarrow [\text{HO}^-] = [\text{HF}] + [\text{H}_3\text{O}^+] \quad (6)$$

Remarque – Cette équation s'écrit aussi :

$$[\text{HF}] = [\text{HO}^-] - [\text{H}_3\text{O}^+]$$

et c'est pour cette raison que lorsque $\text{pH} \geq 8$, on peut simplifier cette expression :

$$[\text{HO}^-] \gg [\text{H}_3\text{O}^+] \Rightarrow [\text{HF}] \simeq [\text{HO}^-]$$

Ici, cette approximation n'est cependant pas justifiée.

Sachant que $[\text{HO}^-] = \frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$ et en tenant compte de la relation (4), l'équation (6) fournit :

$$\frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{C_0}{K_a} [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]^2 \left(1 + \frac{C_0}{K_a} \right) = K_i$$

$$\Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{\frac{K_i}{1 + C_0/K_a}}$$

Application numérique :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{\frac{10^{-14}}{1 + 10^{-3+3,2}}} = 6,22 \cdot 10^{-8} \Rightarrow \text{pH} = 7,21$$

L'hypothèse $\text{pH} \geq pK_a + 1$ étant vérifiée, cette valeur du pH est tout à fait crédible.

9.2.3.3 Mélanges tampons et ampholytes

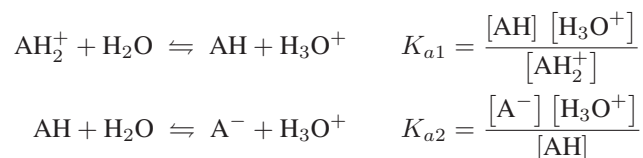
Un mélange constitué d'un acide AH, à la concentration C_A , et de sa base conjuguée, à la concentration C_B , présente un pH directement calculable à l'aide de la relation de Henderson :

$$\text{pH} = pK_a + \log \left(\frac{C_B}{C_A} \right)$$

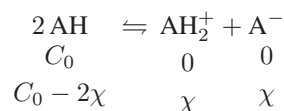
Tant que le pH demeure voisin de pK_a , un tel mélange présente des propriétés *tampons* :

- le pH est peu sensible à la dilution du mélange ;
- un ajout d'acide fort ou de base forte, en faible quantité, n'apporte pas de modification significative à la valeur du pH.

Soit une espèce AH, présentant des propriétés amphotères, c'est à dire se comportant comme une base et comme un acide (par exemple H_2O , dans les couples $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$ et $\text{H}_2\text{O}/\text{HO}^-$ ou HS^- dans les couples $\text{H}_2\text{S}/\text{HS}^-$ et $\text{HS}^-/\text{S}^{2-}$) :



La mise en solution de AH est décrite par une réaction d'autoprotolyse :



ce qui conduit à : $[\text{AH}_2^+] = [\text{A}^-]$, d'où il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} K_{a1} \times K_{a2} &= \frac{[\text{AH}][\text{A}^-]}{[\text{AH}_2^+][\text{AH}]} \times [\text{H}_3\text{O}^+]^2 = [\text{H}_3\text{O}^+]^2 \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = \sqrt{K_{a1} \times K_{a2}} \\ \Rightarrow & \text{pH} = \frac{1}{2} (pK_{a1} + pK_{a2}) \end{aligned}$$

9.3 Équilibres de complexation

9.3.1 Couple donneur/accepteur de ligands

9.3.1.1 Définitions

Définition 7 On appelle *ligand* une espèce chimique possédant un site riche en électrons ; ce site peut être une charge (par exemple dans HO^-) ou un doublet électronique (comme dans les molécules H_2O ou NH_3).

Chaque ligand est désigné par son nom :

- Ligands neutres :

NH ₃	ammine
H ₂ O	aqua
CO	carbonyl

• Ligands anioniques :

Cl ⁻	chloro
F ⁻	fluoror
CN ⁻	cyano
SCN ⁻	thiocyanato

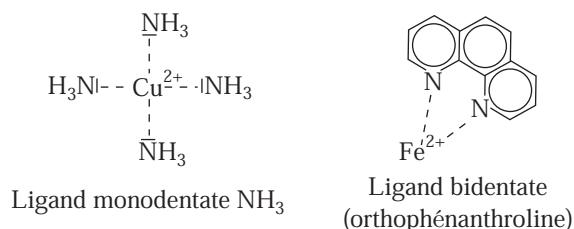
Définition 8 Un ion complexe est constitué d'un atome central (un ion métallique dans le cadre du programme de CPGE) et d'un ou plusieurs ligands.

Par exemple :

Fe (CN) ₆ ⁴⁻	ion hexacyanoferrate (III)
Al (H ₂ O) ₆ ³⁺	ion hexaaquaaluminium (III)
CuCl ₄ ²⁻	ion tétrachlorocuprate (II)
Cu (NH ₃) ₄ ²⁺	ion tétraamminecuivre (II)

Remarque – Dans la nomenclature d'un complexe, on tient compte de la charge globale de ce complexe : s'il est globalement négatif, son nom finit par le suffixe « ate » qui n'apparaît pas lorsque le complexe est neutre ou chargé positivement.

Définition 9 Lorsque le ligand forme une seule liaison avec l'atome central, il est dit monodentate, sinon on le qualifie de polydentate.



9.3.1.2 Constantes de formation et de dissociation

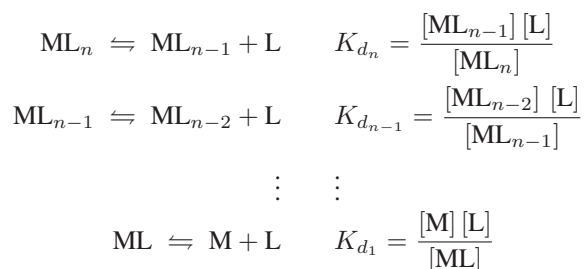
Définition 10 Soient M un ion métallique et L un ligand ; on appelle constante de formation globale, β_n , du complexe ML_n , la constante de l'équilibre :



De même, on définit la constante de dissociation globale K_d celle associée à l'équilibre :



La dissociation du complexe peut également se réaliser par pertes successives d'un ligand, lesquelles sont des équilibres de constantes K_{d_i} (constantes de dissociation) :



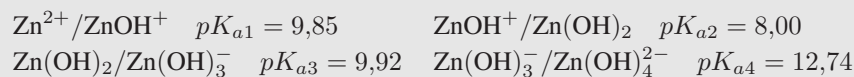
On montre alors que :

$$K_{d_1} \times K_{d_2} \times \cdots \times K_{d_n} = \frac{1}{\beta_n} \Rightarrow \log \beta_n = \sum_{i=1}^n pK_{d_i} \text{ avec } pK_{d_i} = -\log(K_{d_i}) \quad (7)$$

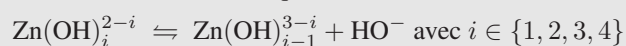


Les ions zinc (II), Zn^{2+} , sont susceptibles de réagir, en milieu aqueux, avec des ions HO^- pour former les complexes solubles ZnOH^+ , $\text{Zn}(\text{OH})_2$, $\text{Zn}(\text{OH})_3^-$, $\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}$.

On donne les constantes d'acidité des couples acido-basiques suivants :



- À l'aide de ces valeurs et de celle du produit ionique de l'eau : $K_i = 10^{-14}$, calculer la valeur numérique de $\log \beta_3$, où β_3 désigne la constante de formation globale de $\text{Zn}(\text{OH})_3^-$.
- Chaque équilibre de dissociation, d'équation :



est caractérisé par une constante de dissociation pK_{d_i} .

(a) Donner les valeurs numériques de pK_{d_1} , pK_{d_2} , pK_{d_3} , pK_{d_4} .

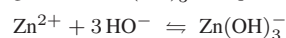
(b) Calculer la somme $\sum_{i=1}^3 pK_{d_i}$ et conclure.

RÉPONSE

- Les constantes d'acidité des couples acido-basiques concernés sont définies par :

$$\begin{aligned} K_{a1} &= \frac{[\text{ZnOH}^+] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Zn}^{2+}]} & K_{a2} &= \frac{[\text{Zn}(\text{OH})_2] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{ZnOH}^+]} \\ K_{a3} &= \frac{[\text{Zn}(\text{OH})_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Zn}(\text{OH})_2]} & K_{a4} &= \frac{[\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Zn}(\text{OH})_3^-]} \end{aligned}$$

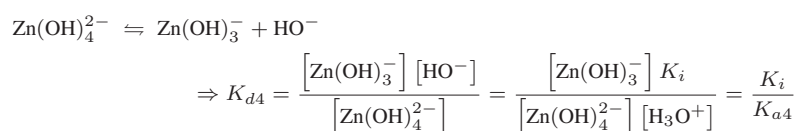
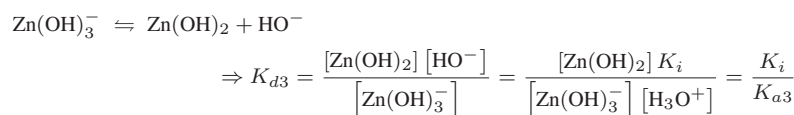
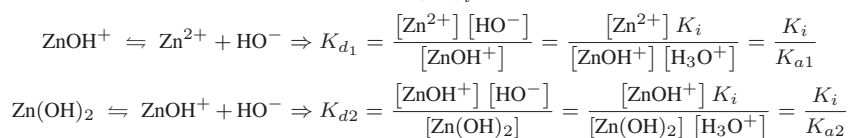
tandis que la réaction de formation globale de $\text{Zn}(\text{OH})_3^-$, d'équation :



est associée à la constante :

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \frac{[\text{Zn}(\text{OH})_3^-]}{[\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^3} = \frac{[\text{Zn}(\text{OH})_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]^3}{[\text{Zn}^{2+}] K_i^3} \text{ car } K_i = [\text{H}_3\text{O}^+] [\text{HO}^-] \\ &= \frac{[\text{Zn}(\text{OH})_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Zn}(\text{OH})_2]} \times \frac{[\text{Zn}(\text{OH})_2] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{ZnOH}^+]} \times \frac{[\text{ZnOH}^+] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Zn}^{2+}]} \times \frac{1}{K_i^3} \\ &= k_{a3} \times K_{a2} \times K_{a1} \times \frac{1}{K_i^3} = 10^{-9,92-8-9,85+3 \times 14} = 10^{14,23} \end{aligned}$$

2. (a) Les réactions de dissociation des complexes $\text{Zn}(\text{OH})_i^{2-i}$ vérifient successivement les équations :



ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} K_{d1} &= 10^{-14+9,85} = 10^{-4,15} \Rightarrow pK_{d1} = -\log(K_{d1}) = 4,15 \\ K_{d2} &= 10^{-14+8} = 10^{-6} \Rightarrow pK_{d2} = -\log(K_{d2}) = 6 \\ K_{d3} &= 10^{-14+9,92} = 10^{-4,08} \Rightarrow pK_{d3} = -\log(K_{d3}) = 4,08 \\ K_{d4} &= 10^{-14+12,74} = 10^{-1,26} \Rightarrow pK_{d4} = -\log(K_{d4}) = 1,26 \end{aligned}$$

(b) De ces calculs il ressort que :

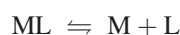
$$pK_{d1} + pK_{d2} + pK_{d3} = 14,23 = \log(\beta_3)$$

ce qui confirme la loi (7), en vertu de laquelle :

$$\log(\beta_3) = \sum_{i=1}^3 pK_{d_i}$$

9.3.2 Diagramme de prédominance

La définition de la constante de dissociation $K_d = \frac{[\text{M}][\text{L}]}{[\text{ML}]}$ associée à l'équilibre :



conduit à :

$$\log(K_d) = \log\left(\frac{[\text{M}]}{[\text{ML}]}\right) + \log[\text{L}]$$

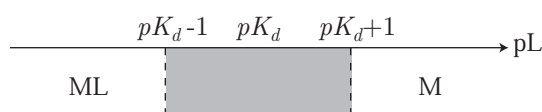
c'est-à-dire, en introduisant $pK_d = -\log(K_d)$ et $pL = -\log[\text{L}]$:

$$pL = pK_d + \log \left(\frac{[M]}{[ML]} \right)$$

Le cation libre est prédominant lorsque $\frac{[M]}{[ML]} \geq 10$, c'est-à-dire lorsque $pL \geq pK_d + 1$, tandis que ML devient prépondérant lorsqu'il est possible de poser :

$$\frac{[ML]}{[M]} \geq 10 \Rightarrow \frac{[M]}{[ML]} \leq 10^{-1} \Rightarrow pL \leq pK_d - 1$$

Ainsi, la valeur relative de pL par rapport à pK_d détermine les intervalles dans lesquels M ou ML prédominent :



9.4 Équilibres de précipitation

9.4.1 Condition de précipitation

9.4.1.1 Produit de solubilité

Soit $AB_{(sol)}$ un composé solide peu soluble en solution aqueuse, selon l'équilibre d'équation :



On appelle *produit de solubilité* cette constante ou encore son cologarithme :

$$pK_s = -\log K_s$$

Deux cas peuvent se présenter :

- Si les concentrations $[A]$ et $[B]$ sont assez faibles pour que le quotient de réaction $Q = [A] \times [B]$ demeure inférieur à K_s , le solide $AB_{(sol)}$ ne peut apparaître car l'équilibre ne s'établit pas ;
- si les concentrations initiales $[A]_0$ et $[B]_0$ sont suffisamment importantes pour que Q atteigne ou excède K_s , à l'équilibre :

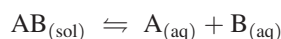
$$[A] \times [B] = K_s$$

permet au solide d'apparaître ; il s'agit généralement d'un *précipité* et la solution est dite *saturée*.

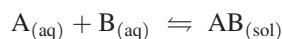
En aucun cas, lorsque l'équilibre chimique est atteint, le quotient de réaction Q ne peut excéder la valeur de K_s .



Afin de manipuler facilement les équations relatives aux équilibres de précipitation, écrivez toujours ces équilibres dans le sens du mode opératoire ; s'il s'agit de dissoudre le composé $AB_{(sol)}$:

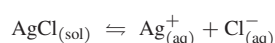


tandis que s'il s'agit de former le précipité :



Le chlorure d'argent, $AgCl_{(sol)}$, est un sel peu soluble dans l'eau, de produit de solubilité $pK_s = 9,8$ et de masse molaire $M = 143,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. On cherche à dissoudre une masse $m = 0,01 \text{ g}$ de ce sel dans un volume d'eau V . À partir de quelle valeur de V cette dissolution est-elle totale ?

RÉPONSE La dissolution de $AgCl_{(sol)}$ se traduit par l'équation :



qui révèle que $[Ag^+] = [Cl^-]$. En outre, le précipité de $AgCl_{(sol)}$ disparaît lorsque le quotient de réaction $Q = [Ag^+][Cl^-]$ vérifie :

$$Q < K_s \Rightarrow [Ag^+]^2 < K_s \Rightarrow [Ag^+] < \sqrt{K_s}$$

Par ailleurs, une masse m de $AgCl_{(sol)}$ contient $n = \frac{m}{M}$ mole de sel, que l'on cherche à dissoudre totalement. Lorsque cette dissolution est réalisée, la quantité d'ions Ag^+ en solution s'identifie à n , de sorte que leur concentration vaut $[Ag^+] = \frac{n}{V}$. Par suite :

$$\frac{n}{V} < \sqrt{K_s} \Rightarrow \frac{m}{MV} < \sqrt{K_s} \Rightarrow V > \frac{m}{M\sqrt{K_s}}$$

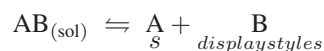
Application numérique :

$$V > \frac{0,01}{143,5 \times \sqrt{10^{-9,8}}} \Rightarrow V > 5,5 \text{ L}$$

9.4.1.2 Solubilité d'un sel

Définition 11 On appelle solubilité d'une espèce $AB_{(sol)}$ le nombre de moles de ce sel qu'il est possible de dissoudre dans un litre de solution.

Dans l'eau pure, la solubilité $AB_{(sol)}$ s'obtient aisément en remarquant que chaque molécule de $AB_{(sol)}$ passée en solution se transforme en A ou B :




en raison de quoi :

$$[A][B] = K_s \Rightarrow s^2 = K_s \Rightarrow s = \sqrt{K_s}$$



Si d'autres réactions peuvent engager B en le transformant en B_1, B_2, \dots, B_n , la solubilité s s'écrit :

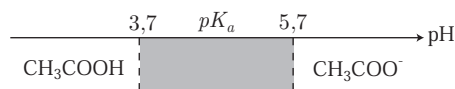
$$s = [A] \text{ et } s = [B] + [B_1] + [B_2] + \dots + [B_n]$$

 L'éthanoate d'argent CH_3COOAg est un sel peu soluble, dont le produit de solubilité vaut $pK_s = 7,7$. De plus la constante d'acidité du couple $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-$ vaut $pK_a = 4,7$.

1. Tracer succinctement le diagramme de prédominance du couple $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-$.
2. On met en solution CH_3COOAg . Que peut-on dire du pH ? en déduire l'expression de CH_3COO^- en fonction de la solubilité s . Calculer s .
3. En écrivant l'équation traduisant la neutralité électrique de cette solution, trouver une relation entre $[\text{CH}_3\text{COOH}]$, $[\text{H}_3\text{O}^+]$ et $[\text{HO}^-]$.
4. Calculer le pH de la solution saturée d'éthanoate d'argent et vérifier que l'hypothèse de la question 2. est justifiée.

RÉPONSE

1. Le diagramme de prédominance du couple $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-$, de constante $pK_a = 4,7$, présente l'allure suivante :



2. La mise en solution de l'acétate d'argent libère des ions CH_3COO^- .



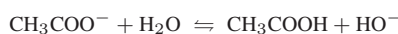
dont les propriétés basiques attribuent à la solution un pH qui ne peut être inférieur à 7 :

$$\text{pH} \geq 7$$

Dans ces conditions, le diagramme de prédominance montre que :

$$[\text{CH}_3\text{COO}^-] \gg [\text{CH}_3\text{COOH}] \quad (9)$$

Enfin, les ions CH_3COO^- libérés en solution peuvent réagir avec l'eau, conformément à l'équation :



à la suite de quoi la solubilité s de l'éthanoate d'argent s'écrit :

$$[\text{Ag}^+] = s \text{ et } [\text{CH}_3\text{COO}^-] + [\text{CH}_3\text{COOH}] = s \quad (10)$$

où la relation (9) apporte une simplification :

$$[\text{CH}_3\text{COO}^-] = s \quad (11)$$

Enfin, les concentrations $[\text{CH}_3\text{COO}^-]$ et $[\text{Ag}^+]$ vérifient :

$$[\text{CH}_3\text{COO}^-] [\text{Ag}^+] = K_s \Rightarrow s^2 = K_s \Rightarrow s = \sqrt{K_s} = \sqrt{10^{-7,7}} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

3. La neutralité électrique de la solution se traduit par :

$$[\text{CH}_3\text{COO}^-] + [\text{HO}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{Ag}^+]$$

où les relations (10) permettent de poser :

$$\begin{aligned} [\text{Ag}^+] &= [\text{CH}_3\text{COOH}] + [\text{CH}_3\text{COO}^-] \\ \Rightarrow [\text{CH}_3\text{COO}^-] + [\text{HO}^-] &= [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{CH}_3\text{COOH}] + [\text{CH}_3\text{COO}^-] \\ \Rightarrow [\text{HO}^-] &= [\text{H}_3\text{O}^+] + [\text{CH}_3\text{COOH}] \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que :

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] = [\text{HO}^-] - [\text{H}_3\text{O}^+] \quad (12)$$

4. La définition de la constante d'acidité du couple $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-$:

$$K_a = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]}$$

associée aux résultats (11) et (12), devient :

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{s [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HO}^-] - [\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{s [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{K_i - [\text{H}_3\text{O}^+]^2} \text{ car } [\text{HO}^-] [\text{H}_3\text{O}^+] = K_i \\ \Rightarrow K_i K_a - K_a [\text{H}_3\text{O}^+]^2 &= s [\text{H}_3\text{O}^+]^2 \\ \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] &= \sqrt{\frac{K_i K_a}{s + K_a}} = \sqrt{\frac{10^{-14} \times 10^{-4,7}}{1,4 \cdot 10^{-4} + 10^{-4,7}}} = 3,5 \cdot 10^{-8} \\ \Rightarrow \text{pH} &= 7,4 \end{aligned}$$

Ce résultat confirme l'hypothèse selon laquelle $\text{pH} \geq 7$, ce qui valide alors l'approximation selon laquelle :

$$[\text{CH}_3\text{COO}^-] \gg [\text{CH}_3\text{COOH}] \Rightarrow s \simeq [\text{CH}_3\text{COO}^-]$$

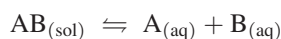
9.4.2 Domaine d'existence d'un précipité

Définition 12 On appelle domaine d'existence d'un précipité la limite d'apparition de ce précipité.



Dans la pratique, la détermination du domaine d'absence du précipité est plus aisée car elle se traduit par une inéquation entre le quotient de réaction et le produit de solubilité : $Q < K_s$.

Soit $\text{AB}_{(\text{sol})}$ un sel peu soluble dont l'équilibre de dissolution :



est caractérisé par le produit de solubilité K_s .

Un milieu aqueux contient initialement A, à la concentration C_0 et l'on introduit B de manière à faire varier continuellement la concentration de B. Deux situations peuvent se présenter :

- le précipité n'apparaît pas, auquel cas la totalité de A demeure en solution à la concentration $[\text{A}] = C_0$. Le quotient de réaction $Q = [\text{A}] [\text{B}] = C_0 [\text{B}]$ doit alors demeurer inférieur à K_s :

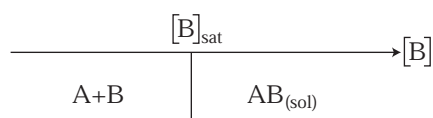
$$C_0 [\text{B}] < K_s \Rightarrow [\text{B}] < \frac{K_s}{C_0} = [\text{B}]_{\text{sat}} \text{ (A et B en solution).}$$


- Le précipité apparaît dès que $Q = K_s$; la concentration $[\text{A}]$ demeure alors voisine de C_0 (le précipité AB a consommé une infime quantité de A). Par suite :

$$C_0 [\text{B}] = K_s \Rightarrow [\text{B}] = [\text{B}]_{\text{sat}} \text{ (apparition du précipité).}$$

Si $[\text{B}] > [\text{B}]_{\text{sat}}$, le précipité demeure évidemment dans la solution, déjà saturée pour $[\text{B}] = [\text{B}]_{\text{sat}}$.

Cette étude peut se résumer à l'aide d'un diagramme d'existence du précipité :

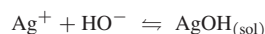


 On dispose de 100 mL d'une solution de nitrate d'argent AgNO_3 à la concentration $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, entièrement dissocié en solution aqueuse. Ag^+ donne, avec les ions HO^- , un précipité de produit de solubilité $K_s = 1,6 \cdot 10^{-8}$ ($pK_s = 7,8$).

1. Écrire l'équation-bilan de la réaction de précipitation et calculer sa constante.
2. On verse 2,5 mL d'une solution de soude (NaOH) à la concentration $C_1 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ dans ces 100 mL de solution. Y a-t-il précipitation ?
Le produit ionique de l'eau vaut $pK_i = 14,0$ à 25°C .
3. Tracer les diagrammes de prédominance (ou d'existence) des espèces Ag^+ et $\text{AgOH}_{(\text{sol})}$ en fonction du pH pour les concentrations en Ag^+ respectivement égales à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Conclure.
4. Soit pH_1 le pH à partir duquel l'argent précipite si $[\text{Ag}^+] = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Exprimer $\log [\text{Ag}^+]$ en fonction du pH pour $\text{pH} \geq \text{pH}_1$.

RÉPONSE

1. Les ions Ag^+ peuvent former un précipité d'hydroxyde d'argent $\text{AgOH}_{(\text{sol})}$ conformément à l'équation :



dont la constante d'équilibre vaut :

$$K = \frac{|\text{AgOH}_{(\text{sol})}|}{|\text{Ag}^+||\text{HO}^-|} = \frac{1}{K_s} = 10^{7,8} \Rightarrow K = 6,3 \cdot 10^7$$

2. Dans le volume $V = 100 + 2,5 = 102,5 \text{ mL}$, les ions Ag^+ ont une concentration initiale :

$$[\text{Ag}^+]_0 = C_0 \times \frac{100}{102,5} = 9,76 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

tandis que l'introduction de 2,5 mL de soude, contenant des ions HO^- à la concentration $C_1 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, se traduit par dilution qui ramène cette concentration à la valeur :

$$[\text{HO}^-]_0 = C_1 \times \frac{2,5}{102,5} = 2,44 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Aussi, le quotient de réaction vaut initialement :

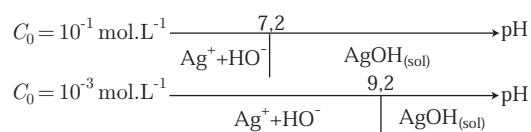
$$Q_0 = [\text{HO}^-]_0 \times [\text{Ag}^+]_0 \simeq 2,38 \cdot 10^{-3} \gg K_s = 1,6 \cdot 10^{-8}$$

Cette inégalité suffit à prédire la formation du précipité $\text{AgOH}_{(\text{sol})}$.

3. Dans une solution contenant $C_0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ions Ag^+ et des ions HO^- , le précipité n'apparaît pas tant que $Q = [\text{Ag}^+][\text{HO}^-] < K_s$. Dans ces conditions les ions Ag^+ conservent leur concentration, si bien que l'absence de précipité est assurée lorsque :

$$\begin{aligned}
 C_0 [\text{HO}^-] < K_s &\Rightarrow C_0 \times \frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]} < K_s \\
 &\Rightarrow \log C_0 - pK_i + \text{pH} < -pK_s \\
 &\Rightarrow \text{pH} < pK_i - pK_s - \log C_0 = 6,2 - \log C_0
 \end{aligned}$$

Pour $C_0 = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, ce résultat de vient : $\text{pH} < 7,2$ alors que pour $C_0 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, il conduit à : $\text{pH} < 9,2$. Les diagrammes d'existence du précipité prennent ainsi l'allure suivante :



Le premier de ces diagrammes révèle que les ions Ag^+ peuvent être totalement dissous dans une solution à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, pour $\text{pH} \leq 7$ (c'est ce qui se produit lors de la fabrication d'une solution de nitrate d'argent à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$). La valeur du pH peut néanmoins être accrue, sans formation du précipité, à condition toutefois de diminuer la concentration du nitrate d'argent.

4. Des calculs précédents, il ressort que pour $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, le précipité $\text{AgOH}_{(\text{sol})}$ se forme à partir de $\text{pH} = \text{pH}_1 = 7,2$. Au delà de cette valeur, la concentration $[\text{Ag}^+]$ s'ajuste de manière à ce que le quotient de réaction demeure égal à K_s :

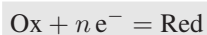
$$\begin{aligned}
 [\text{Ag}^+][\text{HO}^-] = K_s &\Rightarrow [\text{Ag}^+] \times \frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = K_s \\
 &\Rightarrow \log [\text{Ag}^+] - \text{p}K_i + \text{pH} = -\text{p}K_s \\
 &\Rightarrow \log [\text{Ag}^+] = \text{p}K_i - \text{p}K_s - \text{pH} = 6,2 - \text{pH}
 \end{aligned}$$

9.5 Équilibres d'oxydo-réduction

9.5.1 Réactions d'oxydo-réduction

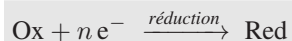
9.5.1.1 Définitions

Définition 13 On appelle oxydant (noté Ox) une espèce chimique susceptible de gagner un ou plusieurs électrons. Un réducteur (noté Red) est une espèce capable de céder un ou plusieurs électrons :

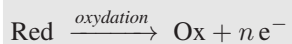


L'oxydant et le réducteur associés à un même élément chimique constitue un couple oxydant/réducteur : Ox/Red (aussi appelé couple *redox*). Par exemple Zn^{2+}/Zn et H^+/H_2 sont des couples redox associés au zinc et à l'hydrogène.

Définition 14 Une réduction est une réaction au cours de laquelle une espèce gagne un ou plusieurs électrons :

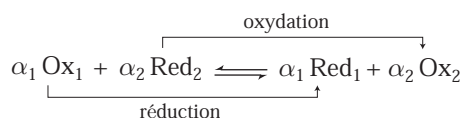


Une oxydation est une réaction qui traduit la perte d'un ou plusieurs électrons par une espèce :

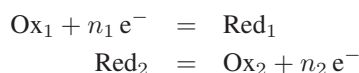


Par exemple : $2\text{H}^+ + 2e^- \rightarrow \text{H}_2$ caractérise la réduction des ions H^+ , tandis que : $\text{Zn} \rightarrow \text{Zn}^{2+} + 2e^-$ traduit l'oxydation du zinc métallique.

Définition 15 Une réaction d'oxydo-réduction consiste en un transfert d'un ou plusieurs électrons entre un oxydant (par exemple du couple Ox_1/Red_1) et un réducteur (par exemple du couple Ox_2/Red_2) :



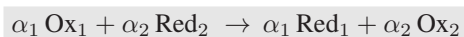
Pour déterminer les coefficients α_1 et α_2 , il convient d'écrire des *demi-équations* traduisant le passage de l'oxydant au réducteur de chaque couple :



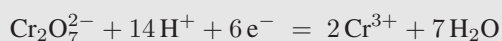
Les coefficients α_1 et α_2 sont alors choisis de manière à ce que :

$$\alpha_1 \times n_1 = \alpha_2 \times n_2 = \text{PPCM} \{n_1, n_2\}$$

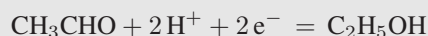
Ce faisant, cette combinaison linéaire des demi-équations conduit à l'équation d'oxydo-réduction :



Les ions dichromate ($\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$), en milieu acide, peuvent oxyder l'éthanol ($\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$). Les demi-équations correspondantes s'écrivent :

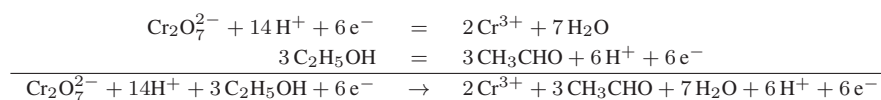


et :

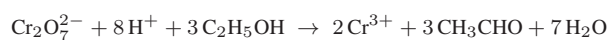


Écrire l'équation-bilan traduisant l'action de $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ sur $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$.

RÉPONSE Il suffit de multiplier par 3 la demi-équation d'oxydation de l'éthanol pour qu'apparaissent autant d'électrons dans les deux demi-équations :



ce qui donne, après simplification par 6H^+ et $6e^-$:



9.5.1.2 Degré d'oxydation

Définition 16 Soient deux éléments *A* et *B* associés par une (ou plusieurs) liaison(s) covalente(s). On appelle degré d'oxydation d'un élément neutre, le nombre de liaisons qui peuvent basculer, théoriquement, vers l'élément le plus avide d'électrons.

Remarque – Une autre définition du degré d'oxydation d'un élément est fournie à la page 1197.

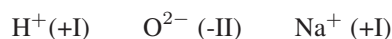
L'avidité d'un élément à l'égard des électrons est mesurée par son *électronégativité*¹ χ , d'autant plus grande que l'élément se trouve en haut et à droite dans la classification périodique des éléments :

élément	P	H	C	S	I	Br	N	Cl	O	F
χ	2,19	2,20	2,55	2,58	2,66	2,96	3,04	3,16	3,44	3,98

Par exemple, dans la molécule H_2O , où $\chi(\text{O}) > \chi(\text{H})$, deux liaisons O – H peuvent basculer vers l'oxygène : $\text{H} \overset{\curvearrowright}{\text{O}} \overset{\curvearrowleft}{\text{H}}$. C'est pourquoi le degré d'oxydation de l'oxygène y vaut (-II) tandis que celui de l'hydrogène prend la valeur (+I).

Pour déterminer le degré d'oxydation d'un élément, on peut plus simplement utiliser les règles suivantes :

- le degré d'oxydation d'un élément dans un corps simple neutre (par exemple H_2 , O_2 , O_3) vaut 0 ;
- le degré d'oxydation d'un élément dans un ion monoatomique s'identifie à sa charge :



- l'hydrogène présente généralement le degré d'oxydation (+I) sauf dans H_2 (0) ou dans les hydrures métalliques (NaH , $\text{LiH}\dots$) où il vaut (-I) ;
- l'oxygène se rencontre très fréquemment au degré d'oxydation (-II), excepté dans les corps simples (O_2 , O_3) ou dans les peroxydes (par exemple H_2O_2) où il vaut (-I) ;
- dans une molécule (neutre ou ionique), la somme des degrés d'oxydation des éléments constitutifs de cette molécule s'identifie à sa charge.

Ce dernier propos permet bien souvent de déterminer le degré d'oxydation d'un élément présent dans une molécule contenant H ou O. Par exemple, dans l'ion hydrogéné-sulfate HSO_4^- , les degrés d'oxydation (x) vérifient :

$$x_{\text{H}} + x_{\text{S}} + 4x_{\text{O}} = -1 \Rightarrow 1 + x_{\text{S}} + 4 \times (-2) = -1 \Rightarrow x_{\text{S}} = 6$$

⚠ Cette dernière méthode peut toutefois présenter un piège lorsqu'un élément, de degré d'oxydation inconnu, apparaît plusieurs fois. Par exemple, dans l'ion thiosulfate $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ le soufre présente les degrés d'oxydation $x_{1\text{S}} = 5$ et $x_{2\text{S}} = -1$. C'est pour cette raison qu'en écrivant :

$$2x_{\text{S}} + 3x_{\text{O}} = -2 \Rightarrow 2x_{\text{S}} + 3 \times (-2) = -2 \Rightarrow 2x_{\text{S}} = 4$$

on obtient un résultat erroné ; il faut alors poser :

$$x_{1\text{S}} + x_{2\text{S}} + 3 \times (-2) = -2 \Rightarrow x_{1\text{S}} + x_{2\text{S}} = 4$$

Remarque – Lors d'une réaction de réduction : $\text{Ox} + n e^- \rightarrow \text{Red}$, le degré d'oxydation d'un élément s'abaisse de n , tandis qu'il s'accroît de n au cours de son oxydation : $\text{Red} \rightarrow \text{Ox} + n e^-$.

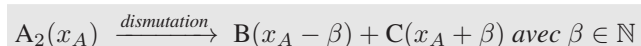
Si un élément est présent α fois dans la molécule Ox ou Red, le degré d'oxydation varie

¹La définition de l'électronégativité est précisée dans l'étude de la classification périodique des éléments.

de $\pm \frac{n}{\alpha}$.

Non seulement l'évaluation des degrés d'oxydation permet de déterminer si un élément subit une réaction d'oxydo-réduction, mais il permet également un contrôle rapide du nombre n d'électrons qui interviennent dans une demi-équation $\text{Ox} + n e^- = \text{Red}$.

Définition 17 Une dismutation est une réaction au cours de laquelle un élément, contenu dans une molécule, subit une oxydation et une réduction :



On s'intéresse à la réaction des ions HO^- sur le dichlore Cl_2 , selon l'équation-bilan :



1. Quels sont les degrés d'oxydation des éléments Cl, O et H dans les espèces chimiques de cette équation ?
2. En représentant les variations de ces nombres à l'aide de flèches, montrer qu'il s'agit d'une réaction de dismutation (et non acido-basique).
3. En déduire les couples redox impliqués.

RÉPONSE

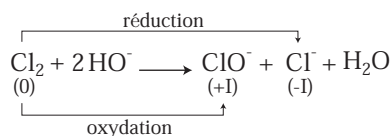
1. Dans le corps simple Cl_2 le chlore se présente avec le degré d'oxydation (0), tandis que l'oxygène et l'hydrogène ont pour degrés d'oxydation respectifs (-II) et (+I) dans HO^- , ClO^- et H_2O .

En notant x le degré d'oxydation du chlore dans ClO^- , de charge -1 , on obtient :

$$x + (-2) = -1 \Rightarrow x = 1$$

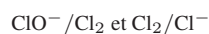
Quant à l'ion monoatomique Cl^- , son degré d'oxydation s'identifie à sa charge, c'est-à-dire (-I).

2. Compte tenu de ces résultats, il est possible de repérer les transformations subies par le chlore au cours de la réaction proposée :



Ce schéma révèle que l'élément chlore subit simultanément une oxydation et une réduction au cours de cette réaction qui réalise par conséquent une dismutation.

3. De même, en précisant les degrés d'oxydation du chlore, ce schéma permet de conclure que le chlore est réducteur et oxydant dans les couples :



9.5.1.3 Écriture d'une équation d'oxydo-réduction

Dans cette partie du cours, le proton en solution aqueuse sera noté simplement H^+ (et non H_3O^+) afin de faciliter l'écriture des équations (en notant H^+ , seul l'élément H intervient).

Pour équilibrer une demi-équation ($\text{Ox} + n e^- = \text{Red}$), il convient de suivre le protocole ci-dessous :

- équilibrer préalablement tous les éléments chimiques autres que H et O ;
- rajouter ensuite, sous forme de molécules H₂O, l'élément oxygène du côté de la demi-équation déficitaire en oxygène ;
- puis équilibrer, à l'aide de H⁺, l'élément hydrogène ;
- enfin, rajouter les électrons nécessaires à la conservation de la charge électrique.



On s'assurera que les électrons se trouvent toujours du côté de la demi-équation qui contient l'oxydant du couple.

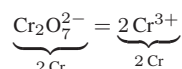
Remarque – Si la réaction est effectuée en milieu basique, la présence d'ions H⁺ dans la demi-équation est peu réaliste. C'est pourquoi on rajoute des ions HO⁻ des deux côtés de la demi-équation, de manière à remplacer la somme H⁺ + HO⁻ par H₂O.



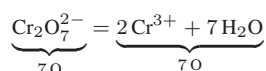
Écrire la demi-équation traduisant le passage : Cr₂O₇²⁻ → Cr³⁺, en milieu acide.

RÉPONSE L'équation traduisant ce passage doit être équilibrée :

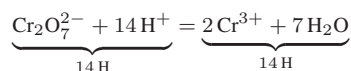
- à l'égard de l'élément chrome :



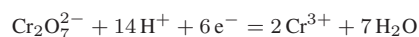
- pour l'élément oxygène, à l'aide de H₂O :



- pour l'élément hydrogène, grâce à H⁺ :



- enfin, vis-à-vis de la charge, avec e⁻ :

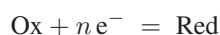


On s'assurera de la présence de e⁻ du côté de la demi-équation qui contient l'oxydant du couple Cr₂O₇²⁻/Cr³⁺.

9.5.2 Potentiels d'électrode

9.5.2.1 Formule de Nernst

Lorsque l'oxydant et le réducteur d'un couple, liés par la demi-équation :



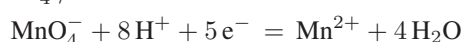
se trouvent en contact, ils produisent un potentiel E qui suit la *loi de Nernst* :

$$E(\text{Ox/Red}) = E^0(\text{Ox/Red}) + \frac{RT \ln 10}{n\mathcal{F}} \times \log \left[\frac{|\text{Ox}|}{|\text{Red}|} \right]$$

où $E^0(\text{Ox/Red})$ désigne le potentiel *standard* du couple Ox/Red (constante numérique généralement fournie par les énoncés), R est la constante molaire des gaz parfaits, T la température absolue du milieu et $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ le Faraday. De manière générale, la température T est prise égale à 298 K (25°C), auquel cas le facteur $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10$ est remplacé par 0,059 ou encore plus simplement par 0,06 :

$$E(\text{Ox/Red}) = E^0(\text{Ox/Red}) + \frac{0,06}{n} \log \left[\frac{|\text{Ox}|}{|\text{Red}|} \right]$$

Dans cette expression, le rapport $\frac{|\text{Ox}|}{|\text{Red}|}$ doit être identifié à l'inverse du quotient de réaction associé à la demi-équation, abstraction faite de la présence des électrons. Par exemple, le couple $\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$:



produit le potentiel :

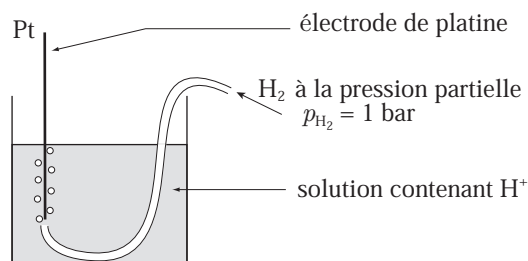
$$E(\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) = E^0(\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}) + \frac{0,06}{5} \log \left(\frac{[\text{MnO}_4^-] [\text{H}^+]^8}{[\text{Mn}^{2+}]} \right)$$

si les activités des solutés sont assimilables à leurs concentrations.

Remarque – *Lorsqu'une électrode métallique est plongée dans une solution où l'oxydant et le réducteur d'un couple coexistent, cette électrode adopte le potentiel $E(\text{Ox/Red})$; parfois l'électrode métallique constitue elle-même le réducteur du couple, dont l'oxydant se trouve en solution.*

9.5.2.2 Électrode standard à hydrogène

Il s'agit d'une électrode dont le potentiel E est choisi arbitrairement nul. Elle est composée d'une solution contenant des ions H^+ , d'activité $|\text{H}^+| = 1$, d'une électrode de platine, qui adopte le potentiel $E = 0 \text{ V}$ et sur laquelle barbote un flux de dihydrogène à la pression partielle $p_{\text{H}_2} = 1 \text{ bar}$; son activité vaut alors 1.



Le couple H^+/H_2 : $2 \text{H}^+ + 2 \text{e}^- = \text{H}_2$ impose ainsi le potentiel :

$$E = E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{|\text{H}^+|^2}{|\text{H}_2|} \right) = E^0(\text{H}^+/\text{H}_2)$$

d'où l'on déduit que :

$$E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0 \text{ V par convention.}$$

9.5.2.3 Calcul de potentiels standard

Cas de la complexation

Cette situation peut se présenter, par exemple, avec le couple $\text{Co}^{3+}/\text{Co}^{2+}$, de potentiel standard $E_1^0 = 1,83 \text{ V}$, où la demi-équation : $\text{Co}^{3+} + n e^- = \text{Co}^{2+}$ fournit :

$$E = E_1^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Co}^{3+}]}{[\text{Co}^{2+}]} \right) \quad (13)$$

Le problème consiste alors à chercher le potentiel standard du couple $\text{Co}(\text{CN})_6^{3-}/\text{Co}(\text{CN})_6^{4-}$, connaissant les équilibres de complexation :



Il suffit alors d'exprimer les constantes de dissociation :

$$K_d = \frac{[\text{Co}^{3+}] [\text{CN}^-]^6}{[\text{Co}(\text{CN})_6^{3-}]} \Rightarrow [\text{Co}^{3+}] = \frac{K_d [\text{Co}(\text{CN})_6^{3-}]}{[\text{CN}^-]^6}$$

et :

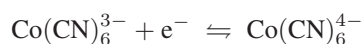
$$K'_d = \frac{[\text{Co}^{2+}] [\text{CN}^-]^6}{[\text{Co}(\text{CN})_6^{4-}]} \Rightarrow [\text{Co}^{2+}] = \frac{K'_d [\text{Co}(\text{CN})_6^{4-}]}{[\text{CN}^-]^6}$$

afin de remplacer $[\text{Co}^{3+}]$ et $[\text{Co}^{2+}]$ dans l'expression (13) de la formule de Nernst.

Ce faisant, le rapport $\frac{[\text{Co}^{3+}]}{[\text{Co}^{2+}]}$ devient :

$$\begin{aligned} \frac{[\text{Co}^{3+}]}{[\text{Co}^{2+}]} &= \frac{K_d}{K'_d} \times \frac{[\text{Co}(\text{CN})_6^{3-}]}{[\text{Co}(\text{CN})_6^{4-}]} \\ \Rightarrow E &= E_1^0 + 0,06 (pK'_d - pK_d) + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Co}(\text{CN})_6^{3-}]}{[\text{Co}(\text{CN})_6^{4-}]} \right) \\ \Rightarrow E &= E_2^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Co}(\text{CN})_6^{3-}]}{[\text{Co}(\text{CN})_6^{4-}]} \right) \\ \text{avec } E_2^0 &= E_1^0 + 0,06 (pK'_d - pK_d) = -0,87 \text{ V} \end{aligned}$$

On remarque aisément que la nouvelle expression de E est aussi l'application de la loi de Nernst à la demi-réaction :



dont le potentiel standard vaut par conséquent $E_2^0 = -0,87 \text{ V}$.

Utilisation de deux couples

Supposons connus les potentiels standard des couples $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+$ ($E_1^0 = 0,16 \text{ V}$) et Cu^+/Cu ($E_2^0 = 0,52 \text{ V}$). Le problème consiste alors à déterminer le potentiel standard E^0 du couple Cu^{2+}/Cu . Pour y parvenir, il suffit de considérer un milieu dans lequel

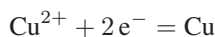
coexistent simultanément les espèces Cu , Cu^+ et Cu^{2+} . Les couples $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+$ et Cu^+/Cu y imposeraient chacun le potentiel :

$$E_1 = E_1^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Cu}^+]} \right) \text{ et } E_2 = E_2^0 + 0,06 \log [\text{Cu}^+]$$

Or, puisque le milieu ainsi constitué ne peut comporter deux potentiels distincts, cela signifie que $E_1 = E_2 = E$ constitue son potentiel, en conséquence de quoi :

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 = 2E &\Rightarrow E_1^0 + E_2^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Cu}^+]} \times [\text{Cu}^+] \right) = 2E \\ &\Rightarrow E = \frac{E_1^0 + E_2^0}{2} + 0,03 \log [\text{Cu}^{2+}] \end{aligned}$$

Or, on remarque que ce potentiel est aussi celui du milieu qui comporte le couple Cu^{2+}/Cu , de demi-équation :



La loi de Nernst indique alors que le potentiel *standard* de ce couple vaut :

$$E^0 = \frac{E_1^0 + E_2^0}{2} = 0,34 \text{ V}$$

9.5.2.4 Piles électrochimiques

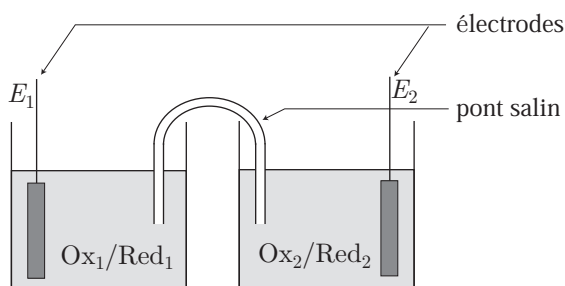
Une pile électrochimique est fréquemment constituée de deux compartiments, lesquels contiennent chacun l'oxydant et le réducteur d'un couple (par exemple Ox_1/Red_1 et Ox_2/Red_2), de potentiels *standard* respectifs E_1^0 et E_2^0 . Les deux compartiments contiennent en outre des électrodes qui adoptent les potentiels E_1 et E_2 prévus par la loi de Nernst :

$$\text{Ox}_1 + n_1 e^- = \text{Red}_1 \Rightarrow E_1 = E_1^0 + \frac{0,06}{n_1} \log \left(\frac{|\text{Ox}_1|}{|\text{Red}_1|} \right)$$

et :

$$\text{Ox}_2 + n_2 e^- = \text{Red}_2 \Rightarrow E_2 = E_2^0 + \frac{0,06}{n_2} \log \left(\frac{|\text{Ox}_2|}{|\text{Red}_2|} \right)$$

et sont également reliés par une jonction (pont salin ou paroi poreuse) qui assure leur neutralité électrique.



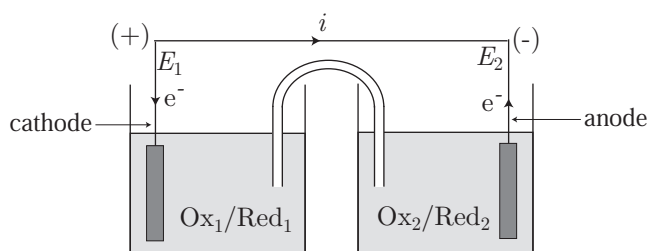
Définition 18 On appelle force électromotrice e de cette pile la valeur absolue :

$$e = |E_1 - E_2|$$

lorsque la pile ne débite pas.

Lorsque la pile débite (un conducteur C permet le passage d'un courant i entre les deux électrodes) des électrons circulent dans C de la borne négative vers la borne positive.

Définition 19 On appelle anode l'électrode où arrive i et cathode celle d'où part i .



Pour assurer ces transferts l'électrons, il se produit :



La réaction globale de fonctionnement de la pile est alors décrite par l'équation-bilan :



De ces définitions, il ressort que :

la pile cesse de débiter lorsque :

- $e = |E_1 - E_2| = 0$;
- la réaction (83) cesse de se produire (aucun électron ne circule dans C).

Enfin, la représentation formelle d'une pile obéit aux conventions suivantes :

- l'écriture de la pile commence par l'anode et finit par la cathode ;
- les espèces chimiques sont représentées par des symboles, séparés par de simples traits verticaux (|) lorsqu'elles constituent des phases distinctes (solide et soluté par exemple) ;
- un double trait (||) figure la séparation éventuelle des compartiments.



Une pile Daniell est composée de deux compartiments :

- dans l'un d'eux se trouve une solution aqueuse d'ions Cu^{2+} à la concentration $C_1 = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; une électrode de cuivre plonge dans ce compartiment.
- dans l'autre, une électrode de zinc plonge dans une solution aqueuse d'ions Zn^{2+} à la concentration C_2 .

On donne les potentiels *standard* des couples :

$$E^0 (\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = E_1^0 = 0,34 \text{ V} \quad \text{et} \quad E^0 (\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) = E_2^0 = -0,76 \text{ V}$$

1. Calculer C_2 sachant que la force électromotrice de cette pile vaut $e = 1,00$ V ; des deux valeurs trouvées, on ne gardera que la plus vraisemblable.
2. En déduire les valeurs numériques des potentiels E_1 et E_2 de chacune des électrodes. Distinguer l'anode et la cathode, puis en déduire les deux demi-équations qui se produisent aux électrodes, lorsque la pile débite.
3. Donner une représentation conventionnelle de cette pile.
4. Écrire l'équation globale du fonctionnement de la pile lorsqu'elle débite.
5. Calculer la concentration des ions Cu^{2+} restant dans un compartiment lorsque la pile cesse de débiter. Conclure.

RÉPONSE

1. La loi de Nernst appliquée aux couples Cu^{2+}/Cu et Zn^{2+}/Zn , de demi-équations :



donne les potentiels E_1 et E_2 des électrodes de cuivre et de zinc :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log [\text{Cu}^{2+}] = E_1^0 + 0,03 \log C_1$$

et

$$E_2 = E_2^0 + 0,03 \log [\text{Zn}^{2+}] = E_2^0 + 0,03 \log C_2$$

Aussi, la force électromotrice de cette pile est définie par :

$$\begin{aligned} e &= |E_2 - E_1| = \left| E_2^0 - E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \right| \\ &= \left| \Delta E^0 + 0,03 \log \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \right| \text{ en posant } \Delta E^0 = E_2^0 - E_1^0 \\ &\Rightarrow \Delta E^0 + 0,03 \log \left(\frac{C_2}{C_1} \right) = \pm e \\ &\Rightarrow \frac{C_2}{C_1} = 10^{\frac{-\Delta E^0 \pm e}{0,03}} \end{aligned}$$

où $\Delta E^0 = -0,76 - 0,34 = -1,1$ V et $e = 1,00$ V fournissent deux solutions :

$$C_2 = C_1 \times 10^{\frac{-\Delta E^0 - e}{0,03}} = 10^{-4} \times 10^{\frac{1,1-1}{0,03}} \Rightarrow C_2 = 10^{-0,67} = 0,21 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

ou :

$$C_2 = C_1 \times 10^{\frac{-\Delta E^0 + e}{0,03}} = 10^{-4} \times 10^{\frac{1,1+1}{0,03}} \Rightarrow C_2 = 10^{66} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Cette dernière solution n'étant pas raisonnable, on s'en tiendra à :

$$C_2 = 0,21 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

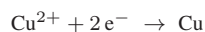
2. Les valeurs numériques de C_1 et C_2 permettent le calcul de E_1 et E_2 :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log C_1 = 0,34 + 0,03 \log (10^{-4}) \Rightarrow E_1 = 0,22 \text{ V}$$

et

$$E_2 = E_2^0 + 0,03 \log C_2 = -0,76 + 0,03 \log (0,21) \Rightarrow E_2 = -0,78 \text{ V}$$

Ces valeurs révèlent que $E_1 > E_2$, en conséquence de quoi l'électrode de cuivre constitue la cathode et l'anode est constituée par l'électrode de zinc. Ce faisant, lorsque la pile débite, le compartiment du cuivre subit une réduction :



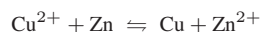
tandis que celui du zinc est le siège d'une oxydation :



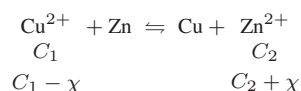
3. La connaissance de la polarité des bornes de la pile en permet la représentation conventionnelle :



4. Les demi-équations des réactions qui se produisent aux électrodes conduisent à l'équation-bilan globale du fonctionnement de la pile :



5. Soit χ l'avancement de cette réaction, dont le bilan s'écrit :



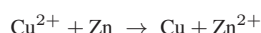
La pile cesse de débiter lorsque sa force électromotrice devient nulle, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} E_1 - E_2 = 0 &\Rightarrow E_1^0 - E_2^0 + 0,03 \log \left(\frac{[\text{Cu}^{2+}]}{[\text{Zn}^{2+}]} \right) = 0 \\ &\Rightarrow \log \left(\frac{C_1 - \chi}{C_2 + \chi} \right) = \frac{E_2^0 - E_1^0}{0,03} = -\frac{1,1}{0,03} = -36,7 \\ &\Rightarrow \frac{C_1 - \chi}{C_2 + \chi} = 10^{-36,7} \\ &\Rightarrow C_1 - \chi = C_2 \times 10^{-36,7} + \chi \times 10^{-36,7} \\ &\Rightarrow \chi = \frac{C_1 - C_2 \times 10^{-36,7}}{1 + 10^{-36,7}} \end{aligned}$$

c'est pourquoi :

$$\begin{aligned} [\text{Cu}^{2+}] &= C_1 - \chi = C_1 - \frac{C_1 - C_2 \times 10^{-36,7}}{1 + 10^{-36,7}} = 10^{-36,7} \times \frac{C_1 + C_2}{1 + 10^{-36,7}} \\ &= 10^{-36,7} \times \frac{10^{-4} + 0,21}{1 + 10^{-36,7}} \Rightarrow [\text{Cu}^{2+}] = 4.10^{-38} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

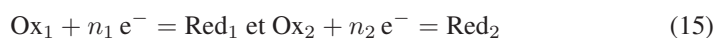
Ce résultat montre que la pile cesse de débiter lorsque la quasi-totalité des ions Cu^{2+} a disparu auquel cas l'équation-bilan du fonctionnement de la pile peut s'assimiler à une réaction totale :



9.5.3 Prédiction des réactions

9.5.3.1 Constante d'équilibre

Soient deux couples redox : Ox_1/Red_1 et Ox_2/Red_2 , de demi-équations :

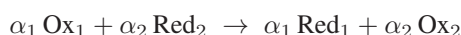


dont la loi de Nernst prévoit les potentiels respectifs :

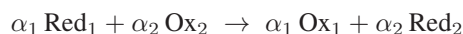
$$E_1 = E_1^0 + \frac{0,06}{n_1} \log \left(\frac{|\text{Ox}_1|}{|\text{Red}_1|} \right) \quad \text{et} \quad E_2 = E_2^0 + \frac{0,06}{n_2} \log \left(\frac{|\text{Ox}_2|}{|\text{Red}_2|} \right)$$

Si ces couples constituaient les compartiments d'une pile, celle-ci présenterait une force électromotrice e qui dépend des valeurs relatives de E_1 et E_2 :

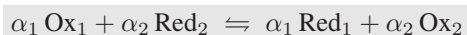
- Si $E_1 > E_2$, $e = E_1 - E_2$ et le fonctionnement de cette pile est décrit par l'équation-bilan :



- Si $E_2 > E_1$, $e = E_2 - E_1$ et son fonctionnement correspond à l'équation-bilan :



De fait, l'équilibre :



est atteint lorsque $E_1 = E_2$, c'est-à-dire :

$$E_1^0 + \frac{0,06}{n_1} \log \left[\frac{|\text{Ox}_1|_e}{|\text{Red}_1|_e} \right] = E_2^0 + \frac{0,06}{n_2} \log \left(\frac{|\text{Ox}_2|_e}{|\text{Red}_2|_e} \right)$$

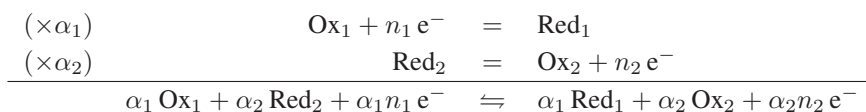
En multipliant de part et d'autre par $\eta = \alpha_1 n_1 = \alpha_2 n_2$, cette équation devient :

$$\frac{|\text{Red}_1|_e^{\alpha_1} |\text{Ox}_2|_e^{\alpha_2}}{|\text{Ox}_1|_e^{\alpha_1} |\text{Red}_2|_e^{\alpha_2}} = 10^{\frac{\eta}{0,06} (E_1^0 - E_2^0)}$$


ce qui montre que la constante de cet équilibre vaut :

$$K = 10^{\frac{\eta}{0,06} (E_1^0 - E_2^0)}$$

où η désigne le P.P.C.M. de n_1 et n_2 , ou encore le nombre d'électrons ($\alpha_1 n_1 = \alpha_2 n_2$) mis en jeu dans l'équilibre, dont l'équation s'obtient par combinaison linéaire des demi-équations (15) :



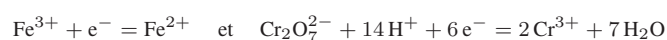
⚠ Dans l'expression de K intervient la différence des potentiels *standard* $E_1^0 - E_2^0$; le premier de ces potentiels est celui qui correspond à celle des demi-équations (15) écrite dans le sens de la réduction pour former la combinaison linéaire.

 Les couples $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ et $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$ ont pour potentiels *standard* respectifs $E_1^0 = 0,77 \text{ V}$ et $E_2^0 = 1,33 \text{ V}$.

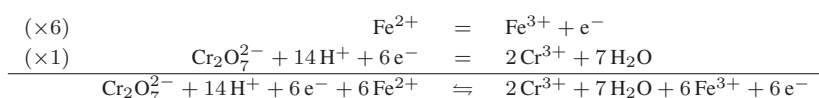
1. Écrire les demi-équations correspondantes.
2. Donner l'équation de l'équilibre qui rend compte de l'action des ions $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ sur les ions Fe^{2+} .
3. Calculer la constante de cet équilibre.

RÉPONSE

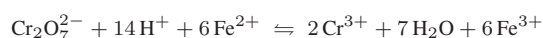
1. Les demi-équations correspondant aux couples $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ et $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$ s'écrivent :



2. Une combinaison linéaire de ces demi-équations conduit à l'équation de l'équilibre entre les ions $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ et Fe^{2+} :



c'est-à-dire, après simplification :



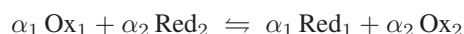
3. Au cours de ce processus, $n = 6$ électrons sont mis en jeu, tandis que la réaction de potentiel *standard* E_2^0 est écrite dans le sens de la réduction de $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$. C'est pourquoi la constante de cet équilibre vaut :

$$K = 10^{\frac{n}{0,06} (E_2^0 - E_1^0)} = 10^{\frac{6}{0,06} (1,33 - 0,77)} = 10^{56}$$

L'ordre de grandeur de cette constante révèle que la réaction d'oxydation de Fe^{2+} par $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ peut être considérée comme totale.

9.5.3.2 La règle du « gamma »

Si les potentiels *standard* E_1^0 et E_2^0 des couples Ox_1/Red_1 et Ox_2/Red_2 sont tels que $E_1^0 - E_2^0 \geq 0,3 \text{ V}$, la constante $K = 10^{\frac{n}{0,06} (E_1^0 - E_2^0)}$ de l'équilibre :

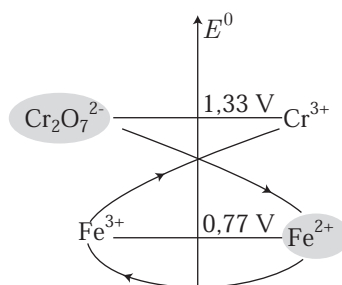
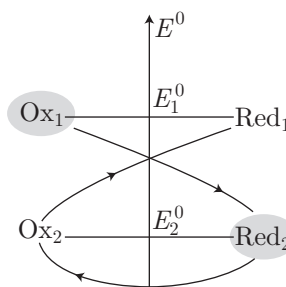


excède $(10^5)^n$, avec $n \geq 1$. Avec une telle valeur, $K \gg 1$ révèle que cette réaction est presque totale.

On rend compte de ce phénomène en classant, sur un axe vertical, les couples redox par potentiels *standard* croissants.

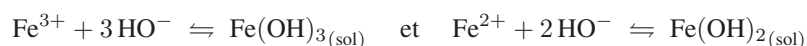
Si, en joignant les réactifs (Ox_1 et Red_2) on peut tracer un « gamma » (γ) dans le sens des aiguilles d'une montre, alors la réaction peut se produire entre ces réactifs.

Par exemple, en classant les couples $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ ($E_1^0 = 0,77 \text{ V}$) et $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$ ($E_2^0 = 1,33 \text{ V}$) dans le sens des potentiels *standard* croissants, on peut prédire la possibilité d'une réaction entre les ions $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ et Fe^{2+} :



⚠ La règle du « gamma » ne peut être utilisée qu'à partir des potentiels *standard* des couples réellement présents dans le milieu réactionnel (la précipitation, la complexation et le pH peuvent modifier l'aspect de ce diagramme en impliquant une espèce chimique).

Par exemple, en milieu basique, les ions Fe^{3+} et Fe^{2+} forment des précipités $\text{Fe}(\text{OH})_3$ et $\text{Fe}(\text{OH})_2$, selon les équilibres :



caractérisés par des produits de solubilité :

$$K_s = 10^{-38} = [\text{Fe}^{3+}] [\text{HO}^-]^3 \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = \frac{K_s}{[\text{HO}^-]^3}$$

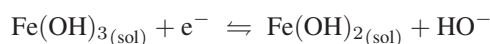
et :

$$K'_s = 10^{-15} = [\text{Fe}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K'_s}{[\text{HO}^-]^2}$$

Or, le potentiel *standard* du couple $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$: $E_1^0 = 0,77 \text{ V}$ est associé à la loi de Nernst :

$$\begin{aligned} E &= E^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = E^0 + 0,06 \log \left(\frac{K_s}{K'_s} \times \frac{1}{[\text{HO}^-]} \right) \\ &= E^0 + 0,06 (pK'_s - pK_s) + 0,06 \log \left(\frac{1}{[\text{HO}^-]} \right) \end{aligned}$$

qui correspond, ce faisant, à la demi-équation :



dont le potentiel *standard* vaut par conséquent :

$$E_1^0 = E^0 + 0,06 (pK'_s - pK_s)$$

et qui fait intervenir les précipités $\text{Fe}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$ et $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ réellement présents en milieu basique.



Les potentiels *standard* des couples $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ et $\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}^-$ valent respectivement $E_1^0 = 0,77 \text{ V}$ et $E_2^0 = 0,62 \text{ V}$. On réalise les expériences suivantes :

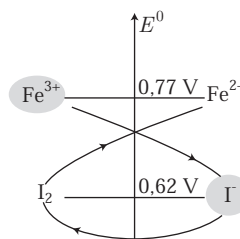
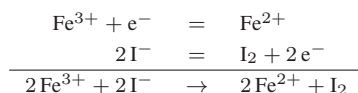
- Dans un bécher, contenant une solution de sulfate de fer III ($2 \text{Fe}^{3+} + 3 \text{SO}_4^{2-}$), on verse quelques gouttes d'une solution d'iodure de potassium ($\text{K}^+ + \text{I}^-$) ; une coloration brune apparaît, trahissant la formation de $\text{I}_{2(\text{sol})}$.
- Un bécher contient initialement une solution de sulfate de fer (III) et de fluorure de potassium ($\text{K}^+ + \text{F}^-$). Après addition de quelques gouttes de la solution d'iodure de potassium, aucune coloration n'est observée.

Interpréter les résultats de ces expériences, sachant que la constante de dissociation du complexe FeF^{2+} vaut $pK_d = 5,2$.

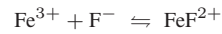
RÉPONSE

- Dans le bécher se trouvent les ions Fe^{3+} et I^- , respectivement oxydants et réducteurs des couples $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ et I_2/I^- .

Les valeurs des potentiels *standard* de ces couples permettent l'emploi de la règle du « gamma » qui prévoit alors la réaction des ions Fe^{3+} avec les ions I^- :



1. Dans le bécher, les ions Fe^{3+} forment un complexe avec les ions F^- également présents :



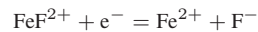
dont la constante de dissociation est définie par :

$$K_d = \frac{[\text{Fe}^{3+}][\text{F}^-]}{[\text{FeF}^{2+}]} \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = \frac{K_d [\text{FeF}^{2+}]}{[\text{F}^-]}$$

Aussi, le potentiel du fer (II) et (III) suit la loi de Nernst :

$$\begin{aligned} E &= E_1^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = E_1^0 + 0,06 \log \left(\frac{K_d [\text{FeF}^{2+}]}{[\text{Fe}^{2+}][\text{F}^-]} \right) \\ &= E_1^0 - 0,06 pK_d + 0,06 \log \left(\frac{[\text{FeF}^{2+}]}{[\text{Fe}^{2+}][\text{F}^-]} \right) \end{aligned}$$

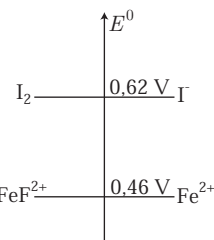
qui correspond à la demi-équation :



dont le potentiel *standard* vaut par conséquent :

$$E_3^0 = E_1^0 - 0,06 pK_d = 0,77 - 0,06 \times 5,2 = 0,46 \text{ V}$$

La règle du « gamma » prévoit alors l'absence de réaction entre les ions FeF^{2+} et Fe^{2+} que ce dernier contient.



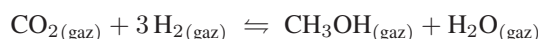
● **295** **Lycée Fénelon, Paris**

10 min.

Équilibres chimiques

MPSI-PCSI-PTSI

La réduction par l'hydrogène du dioxyde de carbone en méthanol est en principe possible selon la réaction équilibrée homogène en phase gazeuse :



1. Expliquer, de façon qualitative, l'influence de la pression totale sur cet équilibre.
2. En opérant à 298 K, sous la pression totale atmosphérique constante, à partir d'un mélange stœchiométrique initial en CO_2 et H_2 (3 moles de H_2 pour 1 mole de CO_2), le taux de conversion de CO_2 en CH_3OH devrait être égal à 46%. Calculer la valeur de la constante K_p de l'équilibre à 298 K. On rappelle que $1 \text{ atm} = 1,01325 \text{ bar}$.
3. En pratique, on peut envisager de réaliser cet équilibre en présence d'un catalyseur à la température de 600 K. Dans ces conditions, $K_p = 2,65 \cdot 10^{-4}$.
Pour quelle valeur de la pression totale pourrait-on obtenir un taux de conversion de CO_2 égal à 46% à partir d'un mélange initial stœchiométrique en CO_2 et H_2 ?

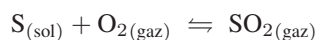
● **296** **Concours de la banque « Agro »**

10 min.

Équilibres chimiques

MPSI-PCSI-PTSI

Le dioxyde de soufre provient de la combustion du soufre solide en présence d'air, suivant l'équation-bilan :



La constante de cet équilibre dépend de la température, conformément à la loi :

$$K(T) = \exp\left(\frac{\alpha}{T} - \beta\right) \text{ avec } \alpha = 35,7 \text{ K et } \beta = 1,32 \cdot 10^{-3}$$

1. Indiquer l'influence de la pression sur cet équilibre.
2. Exprimer, en fonction de la composition initiale du système, de la température T , de α et de l'avancement ξ de la réaction, la dérivée $\frac{d\xi}{dT}$. En déduire l'influence de la température sur cet équilibre.

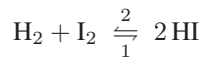
● **297** **Concours ESIM**

15 min.

Équilibres chimiques

MPSI-PCSI-PTSI

On se propose d'étudier ici la synthèse de l'iodure d'hydrogène selon l'équilibre en phase gazeuse :



Une expérience réalisée à 650 K, à partir d'un mélange de dihydrogène et de diiode équimolaire (de concentration C_0), conduit à un taux de conversion de 80%.

1. Calculer la constante d'équilibre de la réaction à 650 K.
2. Préciser l'influence de la pression sur un tel équilibre.

- Préciser l'influence d'un ajout élémentaire de dihydrogène à température fixe.
- Quelle relation lie les constantes de vitesse k_1 (réaction dans le sens 1), k_2 (réaction dans le sens 2) et la constante d'équilibre K , si la loi de Van't Hoff est vérifiée ?

● **298** ————— **Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine**

15 min.

Équilibres chimiques

MPSI-PCSI-PTSI

On met 0,5 mole de PCl_5 dans un récipient fermé de volume $V_0 = 2,05 \text{ L}$, à la température $T_0 = 455 \text{ K}$. On obtient l'équilibre homogène en phase gazeuse :



de constante d'équilibre $K_p = 8$; la pression *standard* est prise égale à $p_0 = 1 \text{ atm}$.

- Calculer le coefficient de dissociation α et la pression totale à l'équilibre.
- Combien faut-il ajouter de moles de dichlore au milieu réactionnel pour que la pression totale à l'équilibre soit 20 atm ?
Quel est alors le coefficient de dissociation de PCl_5 ?
On donne la constante molaire des gaz parfaits :

$$R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} = 0,082 \text{ L} \cdot \text{atm} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$$

● **299** ————— **Concours de la banque « Agro »**

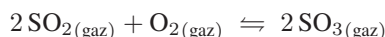
15 min.

Équilibres chimiques

MPSI-PCSI-PTSI

On donne la pression *standard* : $p_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

Le trioxyde de soufre est obtenu industriellement par oxydation du dioxyde, selon la réaction d'équation-bilan :



À la température $T = 740 \text{ K}$, la constante de cet équilibre vaut $K^0 = 8,1 \cdot 10^3$.

On part d'un mélange gazeux constitué initialement de n_1 moles de dioxyde de soufre, n_1 moles de dioxygène et $4n_1$ moles de diazote. Ce mélange est porté à la température $T = 740 \text{ K}$ fixée, sous une pression p fixée.

- Quel est le réactif limitant vis-à-vis de cette réaction, dans le mélange ?
- On souhaite obtenir un rendement de 90% en trioxyde de soufre à l'équilibre. En déduire les quantités de chaque gaz à l'équilibre, en fonction de n_1 . Exprimer alors les pressions partielles en chaque gaz, à l'équilibre, en fonction de p .
- Calculer la pression p pour obtenir un rendement de 90%.

● **300** ————— **Concours de l'ENS**

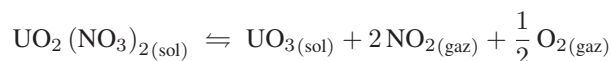
20 min.

Équilibres chimiques

MPSI-PCSI-PTSI

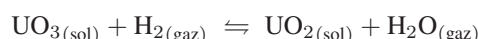
L'uranium est naturellement sous la forme d'uranite UO_2 ou de pechblende U_3O_8 . Le minerai est traité par des solutions acides ou basiques et oxydé pour passer en solution, sous forme d'uranate d'ammonium ($\text{U}_2\text{O}_7(\text{NH}_4)_2$, *yellow cake*), ou de nitrate d'uranyle ($\text{UO}_2(\text{NO}_3)_2$).

1. UO_3 est obtenu par calcination du diuranate d'ammonium ou du nitrate d'uranyle, selon la réaction :



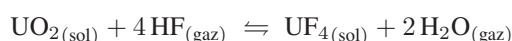
Cette réaction est effectuée à température fixe $T = 473 \text{ K}$, à laquelle la constante d'équilibre vaut $K_1^0 = 38$. Quelle est la pression totale $p_{\text{éq}}$ si l'équilibre chimique est atteint ?

2. Le trioxyde d'uranium est réduit par le dihydrogène à 700°C , selon la réaction :



Quelle est l'influence d'une variation de pression totale sur l'équilibre ?

3. Afin de pouvoir effectuer l'enrichissement isotopique, il est nécessaire de passer par l'hexafluorure d'uranium UF_6 . Le dioxyde d'uranium est transformé en tétrafluorure par la réaction suivante :



- (a) Quelle est l'influence d'une variation de pression sur cet équilibre ?
 (b) UO_2 est traité par un courant de fluorure d'hydrogène gazeux, sous pression $p = 1 \text{ bar}$, à 473 K . On mesure, en sortie du réacteur :

$$\frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{p_{\text{HF}}} = 70$$

En déduire la constante K_2^0 de cet équilibre.

● 301 ————— Concours ENSI

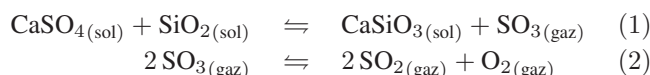
25 min.

Équilibres chimiques

MPSI-PCSI-PTSI

Le problème étudie la décomposition thermique du gypse (sulfate de calcium $\text{CaSO}_4(\text{sol})$) en présence de sable (constitué de silice $\text{SiO}_2(\text{sol})$) conduisant au silicate de calcium $\text{CaSiO}_3(\text{sol})$. Le ciment de Portland peut être obtenu par cette voie, en chauffant le mélange précédent en présence de charbon et d'argile.

Ce procédé met en jeu les deux équilibres simultanés :



À la température $T = 1400 \text{ K}$, les constantes des équilibres (1) et (2) sont respectivement $K_1 = 0,95$ et $K_2 = 400$.

- (a) En partant uniquement de $\text{CaSO}_4(\text{sol})$ et de $\text{SiO}_2(\text{sol})$, exprimer K_1 et K_2 en fonction des seules pressions partielles p_{SO_3} et p_{O_2} à l'équilibre et de la pression standard $p_0 = 1 \text{ bar}$.
 (b) En déduire alors les valeurs de p_{SO_3} , p_{O_2} et p_{SO_2} à l'équilibre, à 1400 K .
- Dans un récipient de volume fixé $V = 10 \text{ L}$, initialement vide, on introduit 1 mole de $\text{CaSO}_4(\text{sol})$ et une mole de $\text{SiO}_2(\text{sol})$, à la température $T = 1400 \text{ K}$ maintenue constante. On constate que les solides $\text{CaSiO}_4(\text{sol})$ et $\text{SiO}_2(\text{sol})$ sont présents à l'équilibre.

- (a) Calculer, à l'équilibre, les avancements respectifs ξ_1 et ξ_2 des réactions (1) et (2) puis en déduire le nombre de moles de $\text{CaSO}_4(\text{sol})$ et de $\text{SiO}_2(\text{sol})$ présents à l'équilibre.
- (b) Quel est l'effet d'un ajout de $\text{CaSO}_4(\text{sol})$ sur l'équilibre du système ?
3. On augmente le volume du récipient en maintenant la température fixée à 1 400 K. À partir de quelle valeur du volume observera-t-on la décomposition totale de 1 mole de $\text{CaSO}_4(\text{sol})$ et de 1 mole de $\text{SiO}_2(\text{sol})$ à 1 400 K ?

Données : 1 bar = 10^5 Pa et $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

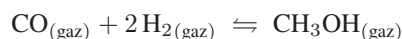
● 302 ————— Lycée Hoche, Versailles

30 min.

Équilibres chimiques

MPSI-PCSI-PTSI

Le méthanol est préparé, industriellement, en présence d'un catalyseur, par la réaction (en phase gazeuse) :



On admettra que tous les gaz suivent la loi des gaz parfaits.

On désignera $\text{CO}_{(\text{gaz})}$ par A, $\text{H}_{2(\text{gaz})}$ par B, $\text{CH}_3\text{OH}_{(\text{gaz})}$ par C, la réaction précédente étant symbolisée par l'équation :



Ainsi, les nombres de moles des trois constituants sont n_A pour CO, n_B pour H_2 et n_C pour CH_3OH .

Si a est le nombre initial de moles de CO, b celui de H_2 et c celui de CH_3OH , l'avancement ξ de la réaction est :

$$\xi = -\frac{n_A - a}{1} = -\frac{n_B - b}{2} = \frac{n_C - c}{1}$$

Lors d'une expérience à 309°C, à la pression constante p de 172,2 bar, la composition du mélange à l'équilibre est, en pourcentage molaire :

oxyde de carbone	13,5%
dihydrogène	60,9%
méthanol	21,3%
gaz inerte	4,3%

- Calculer la constante K_p relative aux pressions partielles à l'équilibre, pour 309°C. L'état *standard* correspond à la pression $p^0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.
- Quelle serait la valeur de K_p si l'on choisissait pour pression de l'état *standard* $P^0 = 101\,325 \text{ Pa}$?
- Le mélange précédent, à l'équilibre, a été obtenu à partir des nombres de moles initiaux suivants :

$$a = 1 \quad c = 0 \quad b \text{ non précisé}$$

Calculer l'avancement de la réaction à l'équilibre et le nombre de moles η de gaz inerte.

4. Quel est, sur le déplacement de l'équilibre :
- l'influence de la pression totale p à température constante ?
 - l'influence de la présence des gaz inertes à température et pression constantes ?
- Les réponses devront être justifiées à partir d'une des expressions de la loi d'action de masse.

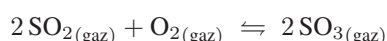
● **303** _____ **Concours ESIM**

30 min.

Équilibres chimiques

MPSI-PCSI-PTSI

Soit l'équilibre homogène gazeux :



Les industriels travaillent vers 420°C , sous $p = 1$ bar, avec un léger excès de dioxygène provenant de l'air, par rapport à la quantité stœchiométrique 2SO_2 pour 1O_2 .

1. **Choix de la composition**

- Partons de λ moles de O_2 pur et de $1 - \lambda$ moles de SO_2 . Dresser un bilan d'avancement de la réaction et donner la relation reliant, à l'équilibre, le paramètre de composition λ , l'avancement ξ , la constante d'équilibre K^0 et la pression totale p .
- À T et p fixés, pour quelle valeur de λ a-t-on un avancement ξ maximal ?
- Nous supposons que nous partons désormais des proportions stœchiométriques, 2 moles de SO_2 pour 1 mole de O_2 pur, et que l'équilibre est atteint. Quelle est l'influence d'un ajout de diazote, à T et p fixés, sur l'état d'équilibre ?

2. **Choix de la pression**

Préciser, en justifiant quantitativement la réponse, l'influence de la pression sur l'équilibre étudié.

● **304** _____ **Lycée Henri Wallon, Valenciennes**

5 min.

Équilibres acido-basiques

MPSI-PCSI-PTSI

Une solution d'acide benzoïque $\text{C}_6\text{H}_5\text{COOH}$, de concentration $C = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, a un pH de 3,1.

- Montrer que cet acide est faible.
- Déterminer le pK_a du couple acide-base.

● **305** _____ **Lycée Berthelot, Saint-Maur-des-Fossés**

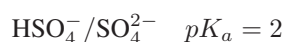
10 min.

Équilibres acido-basiques

MPSI-PCSI-PTSI

Une solution (A), de volume $V_a = 100 \text{ mL}$, contient de l'acide sulfurique à la concentration C_a (en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$). Cette solution est dosée par une solution (B) de soude, à la concentration $C_b = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

L'acide sulfurique est fort pour sa première acidité, mais faible pour sa seconde :



- Écrire les réactions de dissolution de l'acide sulfurique H_2SO_4 et de l'hydroxyde de sodium NaOH dans l'eau. En déduire les quantités en ions HSO_4^- et H_3O^+ dans (A), et d'autre part la quantité d'ions HO^- dans un volume V_b de solution (B).
- On verse un volume $V_b = 20 \text{ mL}$ de (B) dans (A).
 - Écrire les équations des réactions susceptibles de se produire dans le mélange.
 - En déterminant les constantes de ces équilibres, déterminer l'ordre dans lequel s'effectuent ces réactions.
 - Sachant que pour $V_b = 20 \text{ mL}$, l'équivalence de la deuxième réaction est atteinte, en déduire la valeur de C_a .

● 306 Concours ENSTIM

10 min.

Équilibres acido-basiques

MPSI-PCSI-PTSI

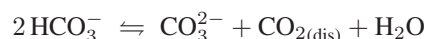
On s'intéresse aux différentes formes du dioxyde de carbone dissous dans l'eau : $\text{CO}_{2(\text{dis})}$, HCO_3^- (ion hydrogénocarbonate) et CO_3^{2-} (ion carbonate).

- Représenter le diagramme de prédominance de ces trois espèces.
- On relève sur l'étiquette d'une eau minérale les informations suivantes :

calcium	555 mg/L
magnésium	110 mg/L
sodium	14 mg/L
hydrogénocarbonates	403 mg/L
nitrates	3,9 mg/L
pH = 7	

On peut s'étonner de ce que l'étiquette ne mentionne pas la quantité d'ions CO_3^{2-} ; pour répondre à cette interrogation, calculer la concentration d'ions CO_3^{2-} dans cette eau, puis la masse correspondante, en milligrammes par litre. Conclure.

- Dans une eau de pH neutre, ou faiblement basique, on peut envisager la réaction de bilan :



Commenter le comportement de l'ion hydrogénosulfate dans cette réaction. Comment appelle-t-on les corps qui se comportent ainsi ?

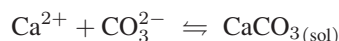
- Il y a lieu de penser que l'atmosphère primitive de notre planète était riche en dioxyde de carbone ; d'autre part, on observe de grandes quantités de cyanobactéries fossiles. Sachant que les cyanobactéries marines pratiquent la photosynthèse à partir du dioxyde de carbone, expliquer, sans aucun calcul, pourquoi :
 - les cyanobactéries fossiles sont associées à d'importants dépôts calcaires ;
 - le dioxyde de carbone n'est plus qu'un constituant minoritaire de l'atmosphère terrestre.

Données

- masses molaires : C : $12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ O : $16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ H : $1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- couples acides-bases :



- dissolution du dioxyde de carbone atmosphérique : $\text{CO}_{2(\text{gaz})} \rightleftharpoons \text{CO}_{2(\text{dis})}$
- formation du calcaire en solution aqueuse :



- pH moyen de l'eau de mer : 8,5.

● 307 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

15 min.

Équilibres acido-basiques

MPSI-PCSI-PTSI

Un couple acide-base AH/A^- possède une constante d'acidité pK_a comprise entre 3 et 7.

1. Dans une première expérience, on réalise le mélange de 100 mL d'une solution de AH, à la concentration $C_1 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, avec 1 mL d'une solution d'hydroxyde de sodium, de concentration $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. La mesure de la conductivité du mélange a fourni $\sigma_1 = 80.10^{-3} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ et celle du pH a fourni $\text{pH}_1 = 9$.

(a) Des équations-bilan :



dire celle qui correspond à une réaction prépondérante dans le milieu réactionnel.

(b) En déduire la valeur de la conductivité ionique molaire λ_{A^-} de l'ion A^- .

2. Au cours d'une seconde expérience, on réalise une solution de AH à la concentration $C_2 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. La conductivité de la solution vaut alors $\sigma_2 = 3,8.10^{-3} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

En déduire la valeur de pK_a .

Données : conductivités molaires ioniques :

$$\lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} = 350.10^{-4} \text{ S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\lambda_{\text{HO}^-} = 200 \text{ S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\lambda_{\text{Na}^+} = 50 \text{ S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$$

● 308 ————— Concours Centrale-Supélec

20 min.

Équilibres acido-basiques

MPSI-PCSI-PTSI

Placé en solution aqueuse, le bromure d'hydrogène, HBr, se comporte comme un acide fort. On se propose d'aborder deux modes de dosage d'une telle solution. Le proton en solution aqueuse sera simplement noté H^+ .

1. Dosage pH-métrique

On dispose d'une solution aqueuse de bromure d'hydrogène, ou acide bromhydrique, de concentration de l'ordre de $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On désire doser 20 mL de cette solution par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration égale à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le dosage est suivi par pH-métrie.

- (a) Proposer un protocole opératoire du dosage. Indiquer, dans l'ordre, les opérations effectuées ; préciser le nom des appareils de verrerie utilisés.

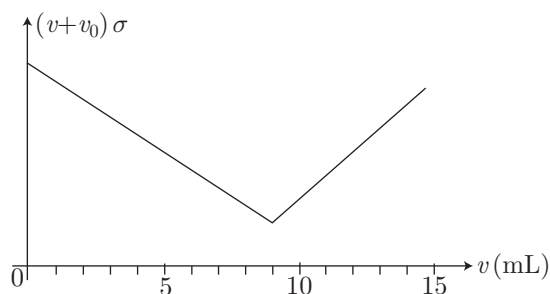
(b) Faire un schéma annoté de la courbe de dosage. Aucun calcul n'est demandé.

2. Dosage conductimétrique

On dose 20 mL de cette solution par une solution aqueuse d'hydroxyde de sodium de concentration égale à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Le dosage est suivi par conductimétrie. La cellule plongeant dans le milieu réactionnel fournit un signal proportionnel à la conductivité σ de la solution. On rappelle que la conductivité est donnée par la relation :

$$\sigma = \sum_{\text{ions}} \lambda_i [X_i]$$

où λ_i est la conductivité molaire de l'ion X_i , $[X_i]$ représente la concentration de X_i . La courbe de dosage représentant $(v + v_0) \times \sigma = f(v)$, où v est le volume de la solution d'hydroxyde de sodium versée et v_0 est le volume initial de la solution dosée, a l'allure donnée par la figure ci-dessous :



(a) Interpréter l'allure de la courbe.

(b) En déduire la concentration de la solution de bromure d'hydrogène.

Données : conductivités molaires ioniques :

ions	Na^+	H_3O^+	Br^-	HO^-
$\lambda_i \text{ (mS} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}\text{)}$	5,0	35,0	7,8	19,9

● 309 ————— Lycée Hoche, Versailles

30 min.

PCSI

Équilibres acido-basiques

On verse un volume v d'hydroxyde de sodium de concentration c dans un volume v_0 constitué d'un mélange d'acide chlorhydrique et d'acide éthanóïque de concentrations respectives c_1 et c_2 .

$$v_0 = 10 \text{ mL} \quad c_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad c_2 = c = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Le pK_a du couple $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^-$ vaut 4,8.

- Quel est l'acide qui sera dosé en premier ?
- Calculer le pH pour les valeurs suivantes du volume v :
 - $v = 0 \text{ mL}$.
 - $v = 5 \text{ mL}$.
 - $v = 10 \text{ mL}$.

(d) $v = 15$ mL.

(e) $v = 20$ mL.

Précisez avec soin, quelle est la solution équivalente considérée, lorsque vous utilisez cette méthode.

- Tracer l'allure de la courbe de dosage en utilisant les cinq points précédents.
- Donner une méthode de dosage de la solution acide en utilisant des indicateurs colorés.

On rappelle les domaines de virage de quelques indicateurs :

Phénolphthaléine	8–10
Bleu de bromothymol	6–8
Hélianthine	3–4,5

● 310 ————— Université Paris-Sud-Orsay

30 min.

PCSI

Équilibres acido-basiques

On dispose de 1 litre d'une solution comprenant 72 g de benzoate de sodium C_6H_5COONa , que l'on notera ANa (solution A). On ajoute à cette solution 12,2 g d'acide benzoïque, que l'on notera AH. On obtient ainsi une solution B.

- Écrire l'équation correspondant à la réaction d'équilibre pour la solution A.
- Calculer les concentrations des espèces à l'équilibre ainsi que le pH de la solution A (on négligera la dissociation de l'eau).
- Calculer le pH de la solution B (on négligera la variation de volume après l'ajout de l'acide).
- À 100 mL de la solution B on ajoute 10 mL d'une solution d'acide chlorhydrique à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; calculer le pH du mélange obtenu.
- À 100 mL de la solution B on ajoute 10 mL d'une solution d'hydroxyde de sodium à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; calculer le pH du mélange obtenu.
- Comment appelle-t-on la solution B ? quelles en sont les propriétés ?

Données :

- constantes d'équilibre :

$$pK_a (AH/A^-) = 4,8 \quad pK_i = (H_3O^+/HO^-)$$

- masses molaires atomiques :

$$M_{Na} = 23 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_O = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_H = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

● 311 ————— Lycée Henri Wallon, Valenciennes

30 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Équilibres acido-basiques

- Donner une définition du coefficient de dissociation α d'un mono-acide faible HA. Le pH d'une solution aqueuse d'acide benzoïque de $pK_a = 4,2$ est 2,5. Calculer α .

2. Pour le diacide H_2A , de concentration totale C_0 , on définit les rapports :

$$\alpha_1 = \frac{[HA^-]}{C_0} \text{ et } \alpha_2 = \frac{[A^{2-}]}{C_0}$$

Établir les expressions de α_1 et de α_2 en fonction de $h = [H_3O^+]$ et des constantes d'acidité K_1 , K_2 des couples respectifs H_2A/HA^- et HA^-/A^{2-} .

3. Pour l'acide carbonique en solution aqueuse, $pK_{a1} = 6,4$ et $pK_{a2} = 10,4$.

(a) Calculer les valeurs de α_1 et de α_2 pour les pH suivants : $pH = pK_i \pm 1$ et $pH = pK_i \pm 0,5$.

(b) Tracer, sur le même graphe, les courbes donnant α_1 et α_2 en fonction du pH. Après avoir donné les expressions de $\frac{d\alpha_1}{d\text{pH}}$ et de $\frac{d\alpha_2}{d\text{pH}}$, on déterminera le sens de variation des fonctions $\alpha_1(\text{pH})$ et $\alpha_2(\text{pH})$.

(c) Placer, sur l'axe des pH, les espèces prédominantes.

(d) Le sang a un pH de 7,4. Sous quelle espèce prédominante se trouve alors l'acide carbonique ?

Calculer le rapport $\frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]}$.

● 312 ————— Lyce Hoche, Versailles

30 min.

Équilibres acido-basiques

MPSI-PCSI-PTSI

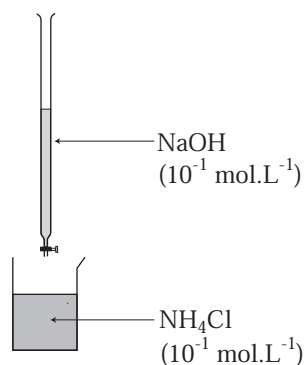
Les conductimètres sont des appareils qui donnent une grandeur proportionnelle à la conductivité σ d'une solution.

On verse, dans une solution de chlorure d'ammonium NH_4Cl , à la concentration $c_0 = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, de la soude à la concentration $c = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et on suit la valeur donnée par le conductimètre.

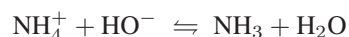
Données numériques :

- produit ionique de l'eau : $K_i = 10^{-14}$;
- constante d'acidité du couple NH_4^+/NH_3 : $pK_a = 9,2$;
- volume de la solution dosée : $v_0 = 20 \text{ mL}$;
- conductivités molaires ioniques (en $S \cdot \text{dm}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$).

$$\lambda_{H_3O^+} = 3,55 \quad \lambda_{HO^-} = 1,92 \quad \lambda_{NH_4^+} = 0,75 \quad \lambda_{Cl^-} = 0,76 \quad \lambda_{Na^+} = 0,58$$



1. Donner la dimension de la conductivité σ .
2. Donner, pour un mélange $NaOH + NH_4Cl$ quelconque, l'expression générale de la conductivité en fonction des concentrations et des conductivités molaires ioniques.
3. Donner la constante d'équilibre de la réaction de dosage :



4. On suppose que lorsque la soude est en défaut, dans certaines conditions, la réaction précédente peut être considérée comme totale. Donner alors l'expression de $[\text{NH}_4^+]$ et de $[\text{NH}_3]$ en fonction de c , v , c_0 et v_0 .
5. Pour $v = \frac{c_0 v_0}{2c}$, comparer $[\text{NH}_4^+]$ à $[\text{NH}_3]$ dans les conditions du (4). Que vaut alors le pH ?
Expliquer pourquoi, au voisinage de ce volume, on peut négliger dans l'expression de σ les termes dus à H_3O^+ et HO^- devant les autres.
6. Montrer que, dans les conditions du (4), on a :

$$f(v) = (v + v_0) \times \sigma = c_0 v_0 (\lambda_{\text{NH}_4^+} + \lambda_{\text{Cl}^-}) + cv (\lambda_{\text{Na}^+} - \lambda_{\text{NH}_4^+})$$

Déterminer numériquement la fonction $f(v)$ et la tracer pour $8 \text{ mL} \leq v \leq 12 \text{ mL}$.

7. Lorsque la soude est versée en excès, en considérant la réaction de dosage comme totale, exprimer $[\text{HO}^-]$ en fonction de c_0 , v_0 , c et v .
Montrer alors que :

$$f(v) = -c_0 v_0 (\lambda_{\text{Cl}^-} - \lambda_{\text{HO}^-}) + cv (\lambda_{\text{HO}^-} + \lambda_{\text{Na}^+})$$

Déterminer numériquement $f(v)$ et tracer sa courbe représentative pour $25 \text{ mL} \leq v \leq 30 \text{ mL}$.

8. Prolonger les deux droites précédentes. Pour quelle valeur de v se coupent-elles ?
Retrouver cette valeur en utilisant les expressions littérales de $f(v)$.
Conclure quant à une méthode de dosage possible des ions ammonium.

● 313 ————— Lycée Henri Wallon, Valenciennes

60 min.

Équilibres acido-basiques

PCSI

On considère le diacide H_2SO_3 pour lequel on donne les pK_a :

$$\text{H}_2\text{SO}_3/\text{HSO}_3^- : pK_1 = 1,8 \quad \text{et} \quad \text{HSO}_3^-/\text{SO}_3^{2-} : pK_2 = 7,2$$

- En utilisant les approximations au $\frac{1}{10}$, représenter le diagramme de prédominance des différentes espèces relatives à ce diacide, en fonction du pH.
- En déduire les équations des courbes $\log [\text{H}_2\text{SO}_3]$, $\log [\text{HSO}_3^-]$ et $\log [\text{SO}_3^{2-}]$ en fonction du pH, dans les différents domaines de pH.
Tracer ainsi le diagramme logarithmique des concentrations pour une concentration initiale en diacide $C = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
- En déduire, graphiquement, le pH d'une solution de H_2SO_3 à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
- Retrouver ce résultat par le calcul en précisant toutes les approximations effectuées et en les vérifiant *a posteriori*.
- Tracer, de même, le diagramme logarithmique de l'acide éthanöïque CH_3COOH , de concentration initiale $C = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On donne :

$$\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{COO}^- : pK_3 = 4,8$$

6. (a) Justifier comment la superposition des deux diagrammes permet de calculer le pH d'une solution contenant CH_3COOH à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et NaHSO_3 à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
On admettra que la réaction prépondérante dans un mélange d'acides et de bases est la réaction de l'acide le plus fort sur la base la plus forte.
- (b) Déterminer alors graphiquement le pH de cette solution.
- (c) Retrouver, par le calcul, cette valeur du pH.

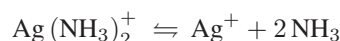
● **314** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

10 min.

Équilibres de complexation

MPSI-PCSI-PTSI

On considère que l'argent forme, avec l'ammoniac, un complexe dont l'équilibre de dissociation suit l'équation-bilan :



Dans une solution, quand on a transformé la moitié des ions diammineargent (I), la concentration de l'ammoniac présent à l'équilibre est $C = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Quelle est la quantité d'ammoniac présent à l'équilibre quand on a transformé 90% des ions argent en complexe ?

● **315** ————— **Concours ENSI**

10 min.

Équilibres de complexation

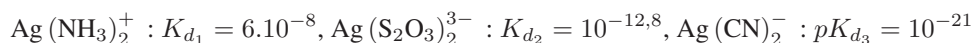
MPSI-PCSI-PTSI

Le rôle d'un fixateur est d'éliminer, à l'aide d'une solution aqueuse par formation de complexes, les ions Ag^+ qui n'ont pas été atteints par la lumière ou le révélateur (formation de zones transparentes). Pour complexer les ions Ag^+ , on envisage la formation de complexes avec plusieurs ligands, notés L : ammoniac NH_3 , thiosulfate $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$, cyanure CN^- .

On considère que l'argent à complexer est à une concentration de $10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en solution aqueuse. On ne considère que les complexes de type $\text{Ag}(\text{L})_2^+$.

1. Tracer les diagrammes de prédominance de l'argent sous ses différentes formes pour chaque ligand, en fonction de $\text{pL} = -\log[\text{L}]$.
2. Quel ligand choisir pour disposer du meilleur fixateur ?
3. En fait on utilise le thiosulfate. Pourquoi ?

Données : constantes globales de dissociation :



● **316** ————— **Concours Centrale-Supélec**

10 min.

Équilibres de complexation

MPSI-PCSI-PTSI

Les ions argent forment, en présence d'ammoniac, le complexe $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$.

1. Donner le nom de ce complexe.
2. Écrire l'équation-bilan de sa réaction de formation et donner l'expression de la constante de formation β associée. Commenter la valeur numérique de $\beta = 2,5 \cdot 10^7$.

3. Partant d'un litre de solution à $0,05 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ammoniac, on ajoute sans variation de volume une solution concentrée de nitrate d'argent. On désire transformer la moitié des ions Ag^+ en solution.
- (a) Quelle est la concentration en NH_3 à l'équilibre ?
- (b) Quelle quantité de nitrate d'argent a-t-il fallu ajouter ?

● 317 Concours ENSI

15 min.

Équilibres de précipitation

MPSI-PCSI-PTSI

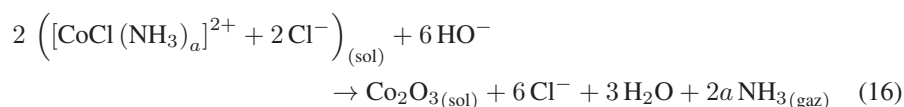
L'objectif de cet exercice est de déterminer la composition d'un complexe de cobalt (III), $[\text{CoCl}(\text{NH}_3)_a]^{2+}$, c'est-à-dire de déterminer le nombre a de ligands ammoniac NH_3 .

I- Décomposition du complexe

On introduit, dans un ballon, 2 g d'un composé solide $S : ([\text{CoCl}(\text{NH}_3)_a]^{2+} + 2 \text{Cl}^-)_{(\text{sol})}$

et 100 mL d'une solution d'hydroxyde de sodium ($\text{Na}^+ + \text{HO}^-$).

Le chauffage du mélange précédent permet de décomposer totalement le composé solide selon la réaction suivante :



L'ammoniac $\text{NH}_3_{(\text{gaz})}$, dégagé par la réaction précédente, est entraîné dans un flacon (F) où il réagit avec $V_1 = 50 \text{ mL}$ d'une solution d'acide chlorhydrique ($\text{H}_3\text{O}^+ + \text{Cl}^-$), de concentration $C_1 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en excès. L'acide chlorhydrique sera considéré comme un monoacide fort en solution aqueuse.

- Exprimer la masse molaire du composé solide S , en fonction du nombre a de ligands ammoniac.
En déduire le nombre de moles du composé S , n_S , introduites dans le ballon, en fonction de a .
- Exprimer le nombre de moles de $\text{NH}_3_{(\text{gaz})}$ formés par la réaction (16) en fonction de a et n_S .

II- Dosage acido-basique

- Écrire l'équation-bilan de la réaction acido-basique ayant lieu entre l'ammoniac dégagé par la réaction (16) et l'acide chlorhydrique contenu dans le flacon (F).
On suppose que tout l'ammoniac gazeux $\text{NH}_3_{(\text{gaz})}$, dégagé par la réaction, a réagi avec l'acide chlorhydrique en excès contenu dans le flacon (F).
- Quelles sont les espèces présentes en solution dans le flacon (F), à l'équilibre ?
Exprimer le nombre de moles de ces différentes espèces en fonction a , C_1 , V_1 et n_S .
- L'ammoniac ayant réagi avec l'acide chlorhydrique, la solution finale du flacon (F) est alors dosée par une solution d'hydroxyde de sodium ($\text{Na}^+ + \text{HO}^-$). L'hydroxyde de sodium sera alors considéré comme une base forte en solution aqueuse. Le dosage de l'excès d'acide chlorhydrique nécessite $V_2 = 10 \text{ mL}$ d'hydroxyde de sodium de concentration $C_2 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

- (a) Calculer le nombre de moles d'acide chlorhydrique restant dans le flacon (F) avant l'ajout d'hydroxyde de sodium.
- (b) Calculer le nombre de moles d'ammoniac dégagé au cours de la réaction de décomposition du complexe.
- (c) En déduire le nombre a de ligands ammoniac du complexe de cobalt (III).

Données numériques :

- masses molaires (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) :

$$M_{\text{Co}} = 58,9 \quad M_{\text{N}} = 14 \quad M_{\text{H}} = 1 \quad M_{\text{Cl}} = 35,5$$

- constante d'acidité du couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$, à 25°C : $pK_a = 9,2$

● 318 ————— Lycée Poincaré, Nancy

20 min.

Équilibres de complexation

PCSI

On dispose d'une solution contenant NH_3 et NH_4^+ , chacun à la concentration $C_0 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

- Que vaut le pH d'une telle solution ?
- On ajoute à cette solution, sans variation de volume, du nitrate d'argent (AgNO_3) à la concentration $C_1 = 0,4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
 - Écrire les équations-bilan des équilibres susceptibles de se produire dans le milieu réactionnel et calculer les constantes relatives à ces équilibres.
 - À l'aide des résultats ci-dessus, déduire la (les) réaction(s) qui se produi(sen)t.
 - En déduire la valeur du nouveau pH.

Données :

- constante de dissociation globale de $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$: $pK_d = 7,2$;
- constante d'acidité de $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$: $pK_a = 9,2$.

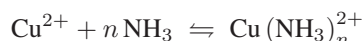
● 319 ————— Université d'Orsay

25 min.

Équilibres de complexation

MPSI-PCSI-PTSI

On définit les constantes de formation globale des complexes β_n comme étant les constantes d'équilibre pour les réactions :



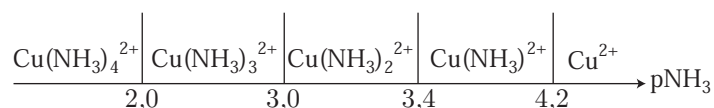
Les tables donnent :

	$\text{Cu}(\text{NH}_3)^{2+}$	$\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^{2+}$	$\text{Cu}(\text{NH}_3)_3^{2+}$	$\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$
$\log \beta_n$	4,2	7,6	10,6	12,6

On définit également les constantes de dissociation successives K_{d_j} pour les réactions ci-dessous, où j varie de 1 à 4 :



- Établir les relations entre les constantes de dissociation successives K_{d_j} et les constantes de formation globale β_n .
- Calculer les valeurs numériques de $pK_{d_j} = -\log(K_{d_j})$.
On en déduit alors le diagramme de prédominance des espèces des ions cuivre (II) en présence d'ammoniac, en fonction de $pNH_3 = -\log[NH_3]$.



- On considère un bécher de 50 mL contenant un mélange de 20 mL d'une solution d'ammoniaque à $1,00 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et de 20 mL d'une solution de sulfate de cuivre (II), CuSO_4 , de concentration $C_1 = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
 - Expliquer pourquoi $\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$ est majoritaire dans le bécher. Écrire l'équation de la réaction globale traduisant sa formation à partir des ions cuivre (II) et des molécules d'ammoniac.
 - Quelles sont les concentrations $[\text{NH}_3]$, $[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]$ et $[\text{Cu}^{2+}]$ à l'équilibre ?

● 320 ————— Concours de l'ENS

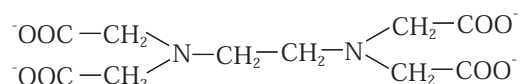
30 min.

Équilibres de complexation

MPSI-PCSI-PTSI

L'ion Mg^{2+} est présent en quantité variable dans l'eau du robinet, ainsi que dans la plupart des eaux minérales. Son dosage (ainsi que celui des ions Ca^{2+}) permet de déterminer la dureté de l'eau, qui est un paramètre important, notamment pour certaines utilisations domestiques ; en effet, une dureté excessive entraîne notamment la précipitation des savons et l'entartrage des canalisations d'eau chaude.

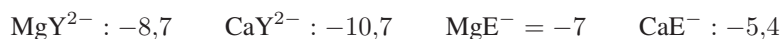
Pour doser l'ion magnésium, on met à profit son aptitude à former un complexe stable avec l'EDTA (ÉthylèneDiamineTétraAcétate = Y^{4-}) :



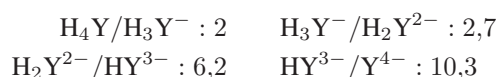
On opère généralement en milieu tamponné à $\text{pH} = 10$.

Données :

- masses molaires atomiques : $M(\text{Mg}) = 24,3 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M(\text{Ca}) = 40,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- constantes de formation des complexes (pK_f) à 298 K :



- pK_a successifs de l'EDTA :



- pK_a successifs du noir ériochrome T (NET) :



1. Calculer la proportion α de la forme Y^{4-} à $\text{pH} = 10$ (en l'absence de complexe), définie par :

$$\alpha = \frac{[Y^{4-}]}{c_T}$$

où c_T désigne la concentration molaire totale en EDTA.

2. Pour visualiser l'équivalence, on utilise un indicateur coloré : le noir ériochrome T (NET). Celui-ci présente des propriétés acido-basiques et forme avec l'ion magnésium un complexe rouge de formule MgE^- :

	3,9	6,4	11,5	
				→ pH
H_3E	H_2E^-	HE^{2-}	E^{3-}	
rouge	rouge	bleu	orange	

Écrire l'équation du dosage de l'ion magnésium par le sel disodique de l'EDTA ($\text{Na}_2\text{H}_2\text{Y}$) à $\text{pH} = 10$ en présence de NET, en faisant apparaître les espèces prédominantes dans ces conditions. Justifier la coloration de la solution avant et après l'équivalence.

3. Dans les conditions opératoires réelles, l'ion magnésium est généralement accompagné par l'ion calcium, qui forme également des complexes avec l'EDTA et le NET. Le dosage précédent ne permet alors que de déterminer la quantité totale magnésium + calcium.
- (a) En considérant que le virage de l'indicateur est obtenu lorsque les concentrations des deux formes colorées passent d'un rapport 10 à $\frac{1}{10}$, déterminer la plage de concentration en Mg^{2+} correspondant au virage, dans les conditions du 2.
- (b) Même question en remplaçant Mg^{2+} par Ca^{2+} .
- (c) En déduire pour lequel des deux ions l'indicateur NET est le mieux adapté.
4. L'étiquette d'une eau minérale de consommation courante fait apparaître la mention suivante :

$$\text{Calcium} = 202 \text{ mg/L} \quad \text{Magnésium} = 36 \text{ mg/L}$$

On dose 10 mL de cette eau par une solution à $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ du sel disodique de l'EDTA, en présence de NET et d'un tampon ammoniacal $\text{pH} = 10$.

Calculer le volume de titrant à ajouter pour observer le virage de l'indicateur.

● 321 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

40 min.

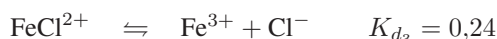
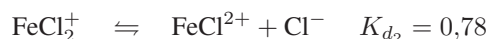
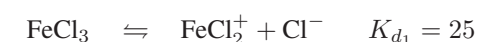
Équilibres de complexation

MPSI-PCSI-PTSI

À un litre de solution aqueuse d'acide chlorhydrique de $\text{pH} = 2$, on ajoute $C_0 = 0,01$ mole de chlorure ferrique (FeCl_3).

On admet qu'il n'y a pas de variation de pH , ni de volume.

On considère les équilibres suivants :



1. Tracer le diagramme simplifié donnant les espèces $\text{FeCl}_\alpha^{(3-\alpha)+}$ prédominantes en solution, en fonction de $p\text{Cl} = -\log[\text{Cl}^-]$.
2. Entre quelles valeurs limites varie $p\text{Cl}$ dans l'expérience ainsi réalisée ? En déduire les espèces prédominantes.
3. Écrire deux équations, l'une traduisant la conservation de l'élément fer et l'autre relative à l'élément chlore.
4. On posera $x = [\text{Fe}^{3+}]$ dans la suite de l'exercice. Donner les expressions de $[\text{Cl}^-]$ et des concentrations des espèces ferriques prédominantes, en fonction de C_0 et x .
5. En déduire une équation du second degré en x , la résoudre et en déduire la composition du mélange à l'équilibre, c'est-à-dire les concentrations $[\text{FeCl}_\alpha^{(3-\alpha)+}]_{\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}}$ et $[\text{Cl}^-]$.

● 322 Concours ENSI

10 min.

Équilibres de précipitation

MPSI-PCSI-PTSI

Le produit de solubilité de l'hydroxyde ferrique $\text{Fe}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$ est égal à $K_{s_1} = 2.10^{-37}$ et celui de l'hydroxyde ferreux $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ est égal à $K_{s_2} = 2.10^{-15}$.

Quelle quantité de soude (exprimée en moles) faut-il rajouter à 100 mL d'une solution contenant $C_0 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ de chlorure ferrique (FeCl_3) et $C_0 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ de nitrate ferreux ($\text{Fe}(\text{NO}_3)_2$) pour que le pH devienne égal à 10 ?

● 323 Concours « Agro »

10 min.

Équilibres de précipitation

MPSI-PCSI-PTSI

Pour récupérer l'argent dans un laboratoire de lycée, on propose de traiter 20 g de chlorure d'argent pulvérisé par 200 mL d'une solution aqueuse d'ammoniac de concentration égale à $6 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

1. Calculer la solubilité du chlorure d'argent dans l'eau.
2. Écrire l'équation-bilan de la réaction du chlorure d'argent avec l'ammoniac puis calculer la constante d'équilibre associée à la réaction.
3. Montrer que dans les conditions de réaction proposées, le chlorure d'argent n'est pas totalement dissous.
4. Dans quel volume d'ammoniac faudrait-il verser le chlorure d'argent pour le dissoudre totalement ?

Données :

- masse molaire de AgCl : $M = 143,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- produit de solubilité de $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$: $K_s = 10^{-9,8}$
- constante de formation globale de $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$: $\beta = 10^{7,2}$

● 324 Concours Centrale

10 min.

Équilibres de précipitation

MPSI-PCSI-PTSI

On met en suspension, dans un litre d'eau, $n_0 = 10^{-2}$ mole d'iodure d'argent AgI (solide peu soluble). On ajoute alors $n_1 = 0,1$ mole d'acide cyanhydrique HCN. Enfin, on ajoute petit à petit de la soude jusqu'à disparition du précipité de AgI_(sol).

1. Écrire l'équation correspondant à la dissolution du précipité.
2. Calculer la concentration des ions CN⁻ au moment de la disparition de ce précipité.
3. Que vaut alors le pH ?

Données :

- constante de dissociation globale de Ag(CN)₂⁻ : $\beta = 10^{21}$;
- produit de solubilité de AgI_(sol) : $pK_s = 16$;
- constante d'acidité du couple HCN/CN⁻ : $pK_a = 9,3$.

● 325 Concours ENSI

20 min.

Équilibres de précipitation

MPSI-PCSI-PTSI

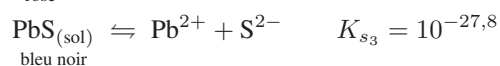
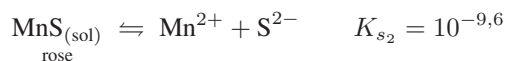
Le « jaune de chrome » est un pigment jaune obtenu par action du chromate CrO₄²⁻ sur un sel de plomb Pb²⁺. Par précipitation dans l'eau, on obtient PbCrO₄.

L'ion chromate a un caractère basique dans le couple HCrO₄⁻/CrO₄²⁻.

1. À quel pH opérer pour que CrO₄²⁻ soit prépondérant.
2. Après précipitation et filtration PbCrO₄ est lavé. Quelle est la teneur en plomb de cette eau de lavage (pH = 7) ? Cette eau dépasse-t-elle la norme légale de 50 μg · L⁻¹ en plomb ?
3. Dans les ouvrages de peinture, on déconseille de mélanger le jaune de chrome et le sulfure de manganèse rose, ce qui donne une teinte couleur chair (très utile pour peindre les visages). Pourquoi ?

Données :

- masse molaire du plomb : $M = 207 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$
- constante d'acidité du couple HCrO₄⁻/CrO₄²⁻ : $pK_a = 6,4$
- Produits de solubilité :



● 326 Lycée Camille Guérin, Poitiers

20 min.

Équilibres de précipitation

MPSI-PCSI-PTSI

On rappelle qu'une cellule de conductimétrie mesure la conductivité σ d'une solution associée à une résistance $R = \frac{k}{\sigma}$, où k est la constante de cellule.

À 25°C, on trouve que la résistance d'une cellule de conductimétrie vaut :

- $R_1 = 220\,000\ \Omega$ lorsqu'elle est remplie avec de l'eau ;
- $R_2 = 100\ \Omega$ lorsqu'elle est remplie avec du chlorure de potassium KCl (électrolyte fort) de concentration $C_2 = 0,02\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- $R_3 = 102\,000\ \Omega$ lorsqu'elle est remplie avec une solution saturée de chlorure d'argent AgCl (électrolyte dont la solubilité s est faible).

Les solutions ont été préparées avec la même eau et sont suffisamment diluées pour confondre conductivité molaire et conductivité limite.

1. Calculer la constante k de la cellule.
2. Évaluer le produit de solubilité pK_s de AgCl.

Données : conductivités molaires limites :

$$\Lambda_{\text{AgCl}} = \lambda_{\text{Ag}^+} + \lambda_{\text{Cl}^-} = 126,8 \cdot 10^{-4}\ \text{S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\Lambda_{\text{KCl}} = \lambda_{\text{K}^+} + \lambda_{\text{Cl}^-} = 138,3 \cdot 10^{-4}\ \text{S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$$

● 327 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

30 min.

Équilibres de précipitation

MPSI-PCSI-PTSI

Une solution aqueuse a été réalisée avec une concentration globale d'aluminium dissous égale à $C_0 = 10^{-4}\ \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

1. Déterminer les valeurs pH_1 et pH_2 du pH telles que respectivement :
 - le précipité d'hydroxyde d'aluminium $\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$ apparaisse ;
 - le précipité d'hydroxyde d'aluminium disparaisse.
2. Exprimer la solubilité s de $\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$ en fonction de pH dans le domaine $[\text{pH}_1 - 1, \text{pH}_2 + 1]$. Représenter, dans le même intervalle, la courbe $\log s = f(\text{pH})$.
3. Déterminer la valeur du pH lorsque la solubilité est minimale et calculer cette valeur minimale.

Données :

- produit de solubilité de $\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$: $pK_s = 32,0$
- constante globale de formation du complexe $\text{Al}(\text{OH})_4^-$: $\log \beta_4 = 34,0$
- produit ionique de l'eau : $K_i = 10^{-14}$

● 328 ————— Concours ENSTIM

40 min.

Équilibres de précipitation

MPSI-PCSI-PTSI

On étudie quelques propriétés de solutions aqueuses contenant des ions Ag^+ . On fera tous les calculs demandés en effectuant toutes les approximations nécessaires. On justifiera toutes ces approximations.

1. (a) Déterminer la solubilité de $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$ dans l'eau pure.
- (b) Déterminer la solubilité de $\text{Ag}_2\text{CrO}_{4(\text{sol})}$ dans l'eau pure. Comparer avec celle de $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$.

(c) Cette question s'adresse aux étudiants de PCSI.

Déterminer la solubilité de $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$ dans une solution d'ammoniac à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Montrer qu'il n'y a pas lieu de considérer la formation du complexe monocoordonné. Déterminer le pH de cette solution.

2. On verse progressivement une solution de nitrate d'argent, de concentration $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, dans un volume $V_0 = 20 \text{ mL}$ d'une solution contenant des ions Cl^- à la même concentration.

(a) Calculer le volume à verser pour voir apparaître le précipité.

(b) On introduit préalablement 0,01 mole de K_2CrO_4 , sans variation de volume, dans la solution, puis on ajoute progressivement AgNO_3 . Calculer la concentration en ions Ag^+ et le volume de AgNO_3 versé, lorsque le précipité de $\text{Ag}_2\text{CrO}_{4(\text{sol})}$ apparaît.

3. On souhaite doser un mélange contenant HCl de concentration C_1 et H_2SO_4 de concentration C_2 . Pour cela, on dose une première prise d'essai $V_0 = 20 \text{ mL}$ par de la soude à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, en utilisant du bleu de bromothymol. L'indicateur coloré vire pour un volume versé $V_{e1} = 24,2 \text{ mL}$.

On dose ensuite une seconde prise d'essai de même volume par du nitrate d'argent à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, en présence de 0,01 mole de K_2CrO_4 . Un précipité rouge apparaît pour un volume versé $V_{e2} = 10,4 \text{ mL}$.

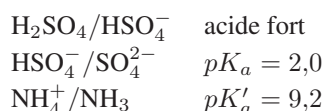
Déterminer les concentrations C_1 et C_2 , d'abord en fonction de V_{e1} , V_{e2} , V_0 et $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, puis numériquement.

Données :

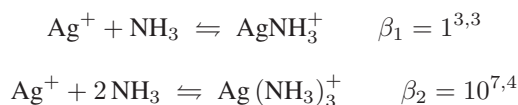
• Produits de solubilité :



• Constantes d'acidité :



• Constantes de formation globale des complexes :



● 329 ————— Lycée Champollion, Grenoble

60 min.

Équilibres de précipitation

MPSI-PCSI-PTSI

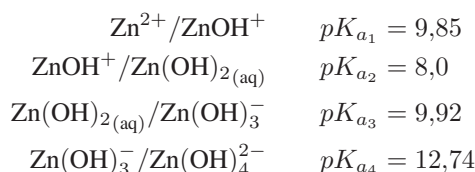
Le comportement amphotère de l'hydroxyde de zinc en milieu aqueux résulte d'une superposition d'équilibres. On admettra que les espèces concernant l'élément zinc et participant à ces équilibres, à 25°C , sont exclusivement :

- l'hydroxyde solide, en excès dans le milieu : $\text{Zn}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$;
- l'hydroxyde dissous et non dissocié : $\text{Zn}(\text{OH})_{2(\text{aq})}$;

- les ions Zn^{2+} , ZnOH^+ , Zn(OH)_3^- et Zn(OH)_4^{2-} .
1. Formuler les équilibres s'établissant entre l'hydroxyde solide d'une part, $\text{Zn(OH)}_{2(\text{aq})}$ ou l'un des ions précédents d'autre part (les seules autres espèces prises en compte dans ces écritures sont H_3O^+ et H_2O). Caractériser chacun de ces équilibres par une constante K_i que l'on calculera, l'indice i désignant le nombre d'hydroxydes (OH) de l'espèce considérée en solution.
 2. Exprimer la solubilité s de l'hydroxyde solide en fonction des concentrations des espèces en solution. Pour tout terme s_i de la somme s , donner $\log s_i$ en fonction du pH. Représenter les graphes $\log s_i = f(\text{pH})$ sur un même diagramme, dont l'échelle de pH s'étendra de 5 à 14 et l'échelle de $\log s_i$ de -10 à $+1$. Déterminer sous quelle espèce prédomine le zinc en solution, en précisant les bornes des intervalles de pH correspondants.
 3. Calculer le pH d'une solution saturée, obtenue par addition d'hydroxyde solide à de l'eau pure. Quelle est la valeur correspondante de $\log s$?

Données :

- pK_a des couples acido-basiques :



- produit de solubilité de $\text{Zn(OH)}_{2(\text{sol})}$: $pK_s = 17,15$
- produit ionique de l'eau : $K_i = 10^{-14}$

● 330 ————— Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

5 min.

Écriture d'une équation d'oxydo-réduction

MPSI-PCSI-PTSI

Équilibrer les demi-équations correspondant aux couples suivants :

1. $\text{PbO}_2/\text{PbSO}_4$ en milieu acide ;
2. $\text{Ag}_2\text{O}/\text{Ag}$ en milieu basique ;
3. CO_2/CH_4 en milieu acide puis en milieu basique.

● 331 ————— Lycée Amyot, Melun

10 min.

Écriture d'une équation d'oxydo-réduction

MPSI-PCSI-PTSI

1. Quel est le degré d'oxydation du soufre dans HSO_4^- et dans H_2SO_3 ?
2. Par quel type de réaction peut-on passer de l'un à l'autre ?
3. Écrire la demi-équation de la réaction liant HSO_4^- à H_2SO_3 .
4. Écrire l'équation-bilan de la réaction de MnO_4^- (qui donne $\text{MnO}_{2(\text{sol})}$) sur H_2SO_3 .

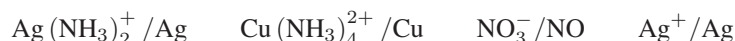
● **332** ————— **Concours « Agro »**
10 min.

Écriture d'une équation d'oxydo-réduction

MPSI-PCSI-PTSI

Un protocole pour récupérer l'argent dans un laboratoire de lycée propose de traiter du chlorure d'argent pulvérisé ($\text{AgCl}_{(\text{sol})}$) par une solution aqueuse d'ammoniac puis d'ajouter, à la solution, du cuivre en copeaux ; des cristaux d'argent apparaissent.

Les couples oxydants/réducteurs impliqués dans cet exercice sont :



1. Traduire, par une équation-bilan, l'action du cuivre sur les ions argent complexés.
2. Quelle est la couleur de la solution ?
3. Pour transformer l'argent en nitrate d'argent, on attaque le métal à l'aide d'acide nitrique concentré. Écrire l'équation-bilan de la réaction.

● **333** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**
10 min.

Écriture d'une équation d'oxydo-réduction

MPSI-PCSI-PTSI

On s'intéresse à l'élément mercure sous les formes suivantes : Hg_2^{2+} et Hg^{2+} en solution aqueuse, Hg à l'état liquide, et HgO à l'état solide.

1. Quels sont les degrés d'oxydation du mercure dans chacune de ces espèces ?
2. Écrire les demi-équations correspondant aux quatre couples redox : $\text{Hg}_2^{2+} / \text{Hg}_2^{2+}$, $\text{HgO} / \text{Hg}_2^{2+}$, $\text{Hg}_2^{2+} / \text{Hg}$ et HgO / Hg .
3. Le mercure, au degré d'oxydation (+I) peut se dismuter pour donner Hg (0) et Hg (+II) sous forme de HgO. Écrire l'équation de la réaction de dismutation correspondante.

● **334** ————— **Concours ESIM**
5 min.

Piles électrochimiques

MPSI-PCSI-PTSI

Un accumulateur cadmium-nickel peut être schématisé comme suit :



Le pôle (−) est une électrode de cadmium tandis que le pôle (+) est une électrode inerte de platine recouverte d'oxyde Ni_2O_3 . L'électrolyte utilisé est une solution aqueuse de potasse concentrée.

1. Quelles sont, en milieu basique, les demi-équations des couples en présence ?
2. Écrire l'équation-bilan lorsque l'accumulateur débite.

● **335** ————— **Lycée Carnot, Dijon**
10 min.

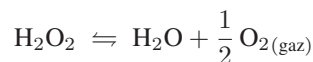
Calcul d'une constante d'équilibre

MPSI-PCSI-PTSI

On donne les potentiels *standard*, à 25°C :

$$E_1^0 (\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}_2) = 0,69 \text{ V} \quad E_2^0 (\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$$

1. Calculer le potentiel *standard* E_3^0 du couple $\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$.
2. Calculer la constante de l'équilibre :



● 336 ————— Concours de l'ESIM

15 min.

Calcul d'une constante d'équilibre

MPSI-PCSI-PTSI

1. Le diiode solide se dissout dans l'eau selon l'équilibre :



Quelle est la solubilité molaire volumique du diiode ?

2. On accroît fortement cette solubilité en dissolvant le diiode dans une solution d'iode de potassium en raison d'un équilibre de complexation :



- (a) Calculer la constante de formation du complexe connaissant les potentiels *standard* d'oxydo-réduction des couples $\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}^-$ et I_3^-/I^- .
 - (b) En déduire la solubilité molaire volumique du diiode dans un litre d'une solution de KI de concentration $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Comparer au résultat du 1.
3. Vérifier que le potentiel *standard* d'oxydo-réduction du couple $\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}_3^-$ vaut $E_3^0 = 0,78 \text{ V}$.

Données : potentiels *standard* à 25°C :

$$E_1^0 (\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}^-) = 0,62 \text{ V} \quad E_2^0 (\text{I}_3^-/\text{I}^-) = 0,54 \text{ V}$$

● 337 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

5 min.

Prévision des réactions d'oxydo-réduction

MPSI-PCSI-PTSI

On donne les potentiels *standard* des couples suivants :

$$\begin{aligned} E_1^0 (\text{NO}_3^-/\text{HNO}_2) &= 0,94 \text{ V} & E_3^0 (\text{NO}_3^-/\text{NO}) &= 0,96 \text{ V} \\ E_2^0 (\text{HNO}_2/\text{NO}) &= 0,99 \text{ V} & E_4^0 (\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) &= 0,34 \text{ V} \end{aligned}$$

1. Prévoir le comportement d'une lame de cuivre plongée dans une solution d'acide nitrique à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
2. Écrire l'équation-bilan de la réaction qui a lieu.
3. Donner l'expression de la constante associée et en calculer la valeur numérique.

● 338 ————— Lycée Champollion, Grenoble

15 min.

Prévision des réactions d'oxydo-réduction

MPSI-PCSI-PTSI

Interpréter, à l'aide des potentiels *standard* suivants :

$$E^0 (\text{I}_2/\text{I}^-) = E_1^0 = 0,54 \text{ V} \quad E^0 (\text{IO}_3^-/\text{I}_2) = E_2^0 = 1,19 \text{ V}$$

les réactions chimiques observées :

1. une solution aqueuse d'iode, en présence d'iodure de potassium, se décolore par dismutation en milieu basique, en ions iodure I^- et en ions iodate IO_3^- .
2. une solution aqueuse d'iode, en présence d'iodure de potassium, se dismute en présence de nitrate d'argent (sous forme de $AgI_{(sol)}$) et en iodate ($AgIO_{3(sol)}$).

On donne les produits de solubilité :

$$pK_{s_1} = 16,08 \text{ pour } AgI_{(sol)} \text{ et } pK_{s_2} = 7,52 \text{ pour } AgIO_{3(sol)}$$

● 339 _____ Concours de l'ENSAM

20 min.

Prévision des réactions d'oxydo-réduction

MPSI-PCSI-PTSI

1. Écrire les équilibres caractéristiques des couples Fe^{2+}/Fe et Fe^{3+}/Fe^{2+} .
Donner les expressions des potentiels d'oxydo-réduction E_1 et E_2 correspondants.
Le produit de solubilité de $Fe(OH)_{2(sol)}$ vaut $K_s = 10^{-15}$. Écrire l'équilibre correspondant et donner l'expression du produit de solubilité en fonction des concentrations des espèces mises en jeu.
2. On étudie la corrosion du fer dans une eau désaérée, telle que l'hydroxyde $Fe(OH)_{2(sol)}$ soit le seul produit de la corrosion.
 - (a) Écrire la demi-équation associée au couple $Fe(OH)_2/Fe$ en milieu acide.
Calculer son potentiel *standard*, soit E_3^0 , en traduisant l'équilibre entre Fe , Fe^{2+} et $Fe(OH)_2$.
 - (b) Montrer qu'il existe une valeur (à calculer) de la pression partielle d'hydrogène p_{H_2} , à partir de laquelle la corrosion est arrêtée.
3. On étudie maintenant la corrosion du fer dans une solution aqueuse de chlorure ferrique $FeCl_3$.
 - (a) Écrire la demi-équation du couple Fe^{3+}/Fe puis calculer son potentiel *standard* E_4^0 .
 - (b) Fe^{3+} est considéré comme le seul produit possible de la corrosion et l'on se place dans le cas où $[Fe^{3+}] = 1 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ et $pH = 0$. Montrer qu'il y a aussi une pression partielle d'hydrogène (à calculer) à partir de laquelle la corrosion est arrêtée.

Données : potentiels *standard* à $25^\circ C$:

$$E^0 (Fe^{2+}/Fe) = E_1^0 = -0,44 \text{ V} \quad E^0 (Fe^{3+}/Fe^{2+}) = E_2^0 = 0,77 \text{ V}$$

● 340 _____ Concours de l'ENS

30 min.

Prévision des réactions d'oxydo-réduction

MPSI-PCSI-PTSI

On cherche à savoir si le cuivre métallique et les ions cuivre (I) et (II) peuvent cohabiter en solution aqueuse.

1. Stabilité des ions cuivre (I)

- (a) Calculer le potentiel *standard* d'oxydo-réduction à $25^\circ C$ du couple Cu^{2+}/Cu^+ .
- (b) Donner l'équation-bilan de la réaction envisageable entre les trois espèces du cuivre.

- (c) Calculer la constante thermodynamique K associée, à 25°C. Commenter.
- (d) Calculer les potentiels *standard* d'oxydo-réduction des couples Cu (II)/Cu(I) et Cu(I)/Cu en présence d'ammoniac, à 25°C.
- (e) En déduire que le cuivre (I) est stabilisé en solution ammoniacale.
- (f) Une solution ammoniacale de cuivre (I) est incolore, mais on peut observer un bleuissement avec le temps. Expliquer et donner l'équation-bilan de la réaction mise en jeu.

2. Stabilité du cuivre métallique

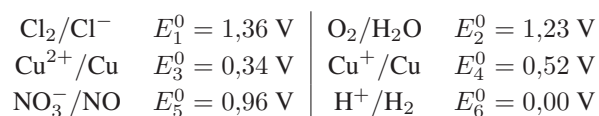
- (a) Le cuivre métallique est-il attaqué par une solution d'acide chlorhydrique, respectivement d'acide nitrique, à pH = 0 et à 25°C ? écrire, le cas échéant, l'équation-bilan de la réaction mise en jeu.

On considère maintenant une solution contenant des ions cuivre (II) à la concentration $C_0 = 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Par souci de simplification, on prendra en compte la présence possible de précipité d'hydroxyde de cuivre (II) mais pas de cuivre (I).

- (b) Quel est le potentiel d'une électrode de cuivre plongeant dans cette solution, en l'absence d'hydroxyde de cuivre (II) ?
- (c) À partir de quelle valeur du pH y aura-t-il précipitation de l'hydroxyde de cuivre (II) ?
- (d) Donner l'expression du potentiel de la solution en fonction du pH, en présence d'hydroxyde de cuivre (II).

Données :

- potentiels *standard* d'oxydo-réduction, à 25°C :



- constantes de formation globale des complexes :



- produit de solubilité de l'hydroxyde de cuivre (II) dans l'eau : $K_s = 10^{-20}$
- produit ionique de l'eau : $K_i = 10^{-14}$.

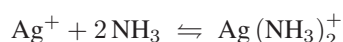
● 341 ————— Concours ENSTIM

15 min.

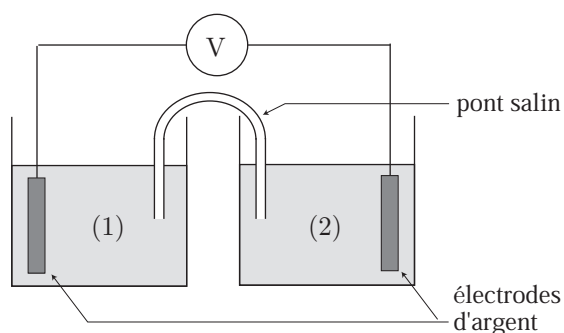
Formule de Nernst

MPSI-PCSI-PTSI

On souhaite déterminer expérimentalement la constante de formation globale β_2 du complexe $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$ à partir de l'ion Ag^+ , selon l'équation :



On réalise la pile suivante :



- le bécher (1) contient une solution aqueuse d'ammoniac, de concentration $C_0 = 2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et des ions complexes $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$ à la concentration $C_1 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- le bécher (2) contient une solution de nitrate d'argent ($\text{Ag}^+ + \text{NO}_3^-$), de concentration C_1 .

La mesure de la force électromotrice E de la pile donne $E = 0,45 \text{ V}$.

1. Exprimer le potentiel de l'électrode d'argent du compartiment (2) en fonction de C_1 .
2. Exprimer le potentiel de l'électrode d'argent (1) en fonction de C_0 , C_1 et β_2 .
3. Exprimer la force électromotrice de la pile en fonction de C_0 et β_2 .
4. En déduire la constante globale de formation, β_2 , de l'ion $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$.

Le potentiel *standard* du couple Ag^+/Ag vaut $E^0 = 0,80 \text{ V}$.

● 342 ————— Lycée Carnot, Dijon

15 min.

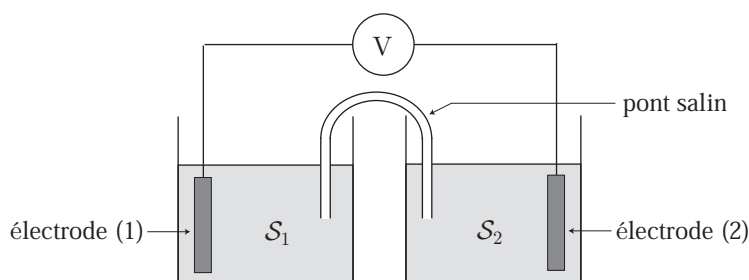
Formule de Nernst

MPSI-PCSI-PTSI

Les ions ferreux Fe^{2+} et ferriques Fe^{3+} donnent naissance, en milieu cyanure CN^- , à des complexes hexacyanés.

Dans toutes les questions, on négligera le caractère basique des ions cyanure et le milieu sera tel que la précipitation des hydroxydes ferreux et ferriques se soit pas à considérer.

1. Soit une solution \mathcal{S}_1 contenant $C_1 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ions Fe^{2+} et $C_2 = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ions Fe^{3+} .
Quel est le potentiel de cette solution \mathcal{S}_1 à 25°C ?
2. On verse, dans $V_0 = 100 \text{ mL}$ de la solution \mathcal{S}_1 , 100 mL d'une solution de cyanure CN^- de concentration $C = 3 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; on obtient une solution \mathcal{S}_2 .
Quelles sont les réactions qui se produisent ?
Calculer les concentrations des ions Fe^{2+} , Fe^{3+} et CN^- dans la solution \mathcal{S}_2 .
3. On réalise la pile suivante :



- Indiquer les polarités des deux électrodes et le sens de circulation du courant lorsqu'on les relie par un *resistor*.
- Écrire les réactions aux électrodes et la réaction-bilan de la pile.
- Calculer la force électromotrice de la pile.

Données numériques :

- potentiel *standard* du couple $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$: $E^0 = 0,77 \text{ V}$;
- constantes de dissociation globale des complexes :

$$K_d = 10^{-31} \text{ pour } \text{Fe}(\text{CN})_6^{4-} \text{ et } K'_d = 10^{-8,7} \text{ pour } \text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$$

● 343 ————— Lycée Pissaro, Pontoise

15 min.

Formule de Nernst

MPSI-PCSI-PTSI

On réalise la pile :



- Calculer le potentiel de chaque électrode.
- En déduire la polarité de chaque électrode.
- Écrire la pile selon la convention classique si nécessaire et en faire un schéma séparant les deux demi-cellules.
- Calculer la force électromotrice de cette pile.
- Si on relie les deux électrodes d'argent par un fil conducteur, la pile débite. Indiquer le sens du passage du courant.
Écrire la réaction qui a lieu et faire son bilan de matière.
- Quelle est la valeur de $[\text{Ag}^+]$ dans le compartiment (1) lorsque la pile cesse de débiter ?

On donne le potentiel *standard* du couple Ag^+/Ag : $E^0 = 0,80 \text{ V}$.

● 344 ————— Concours ESIM

15 min.

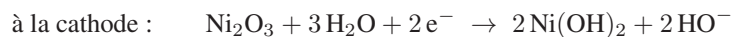
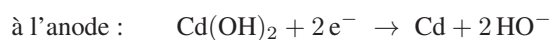
Formule de Nernst

MPSI-PCSI-PTSI

Un accumulateur cadmium-nickel peut être schématisé comme suit :



En milieu basique, les réactions aux électrodes sont :



Calculer, à 25°C, la force électromotrice e de cet accumulateur.

Données :

- potentiels *standard* à 25°C :

$$E_1^0 (\text{Ni}_2\text{O}_3/\text{Ni}^{2+}) = 1,74 \text{ V} \quad E_2^0 (\text{Cd}^{2+}/\text{Cd}) = -0,40 \text{ V}$$

- Produits de solubilité :

$$\text{Ni(OH)}_2 : pK_{s_1} = 16 \quad \text{Cd(OH)}_2 : pK_{s_2} = 14$$

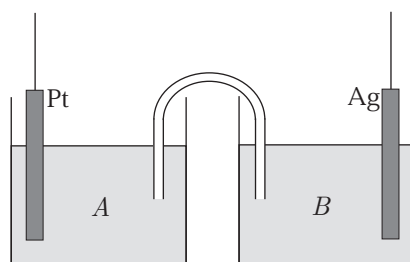
● 345 ————— Lycée Champollion, Grenoble

20 min.

Formule de Nernst

MPSI-PCSI-PTSI

On constitue la pile suivante :



- Le compartiment A comporte une électrode de platine plongeant dans une solution contenant, en quantité équimolaire, un sel ferreux (FeSO_4) et un sel ferrique (FeCl_3) à $C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- le compartiment B comporte une électrode d'argent plongeant dans une solution de nitrate d'argent à la concentration $C_1 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- les deux compartiments sont reliés par un pont contenant une solution gélifiée. On peut négliger la d.d.p. de cette jonction.

1. Indiquer le signe des pôles de la pile.

Écrire la réaction globale de fonctionnement de la pile, lorsqu'elle débite.

2. On ajoute progressivement $\text{FeSO}_4(\text{sol})$ dans le compartiment A . Montrer qualitativement que la force électromotrice de la pile peut s'annuler. Calculer le rapport $\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]}$ lorsque la f.é.m. de la pile est nulle.

3. On revient à la pile de la première question, on ajoute au compartiment A du cyanure de potassium solide (KCN) de telle sorte que les ions Fe^{2+} et Fe^{3+} soient presque totalement complexés en $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$ et $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$.

(a) Montrer qu'il y a inversion de la polarité de la pile.

(b) Écrire la réaction observée lorsque la pile débite.

4. On conserve cette pile et on ajoute au compartiment B du chlorure de potassium solide, de telle sorte que la concentration finale en ions chlorure soit de $10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
- (a) Montrer qu'il y a à nouveau inversion de la polarité de la pile.
- (b) Calculer la concentration finale en ions chlorure pour que la force électromotrice de la pile soit nulle.

Données numériques :

- potentiels *standard* :

$$E^0 (\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = E_1^0 = 0,77 \text{ V} \quad E^0 (\text{Ag}^+/\text{Ag}) = E_2^0 = 0,80 \text{ V}$$

- constantes de formation globale :

$$\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-} : \beta_6 = 10^{31} \quad \text{Fe}(\text{CN})_6^{4-} : \beta'_6 = 10^{24}$$

- Produit de solubilité de $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$: $pK_s = 10^{-10}$

● 346 ————— Concours de l'ESIM

30 min.

Formule de Nernst

MPSI-PCSI-PTSI

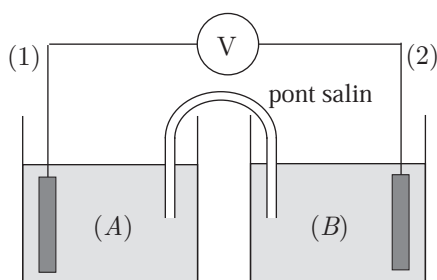
À $\text{pH} = 0$, à la température $T = 298 \text{ K}$ et à la pression atmosphérique, les valeurs des potentiels *standard* sont :

$$E_0 (\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) = E_1^0 = 0,77 \text{ V} \quad E^0 (\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) = E_2^0 = 1,33 \text{ V}$$

On considère les trois solutions aqueuses :

- une solution (A), contenant des ions Fe^{3+} et Fe^{2+} , de concentrations égales et qui ont pour valeur $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- une solution (B), contenant des ions Fe^{3+} de concentration égale à $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et des ions Fe^{2+} à une concentration inconnue x ;
- une solution (C) acidifiée, contenant des ions $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ et Cr^{3+} , de concentrations égales chacune à $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, le pH de cette solution étant égal à zéro.

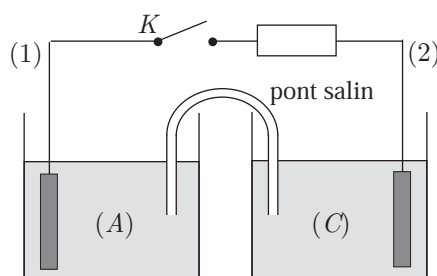
1. On constitue, à l'aide de la solution (A) et de la solution (B), la pile schématisée ci-dessous ; les électrodes sont en platine :



Initialement, lorsque la pile ne débite pas encore, la tension $|U_{12}|$ mesurée est égale à 18 mV .

Déterminer les valeurs de x pour lesquelles on peut avoir cette tension. On précisera :

- la polarité des électrodes ;
 - la nature des réactions qui se produisent au niveau des électrodes ;
 - l'équation de la demi-réaction.
2. On remplace la solution (B) par la solution (C) et le voltmètre par une résistance R :



- (a) Quelle est la valeur de la tension $U_{21} = V_2 - V_1$ aux bornes de la pile lorsque l'interrupteur K est ouvert ?
- (b) On ferme l'interrupteur K .
Écrire les réactions d'oxydo-réduction qui se passent aux électrodes.
Donner l'équation-bilan des transformations chimiques.
- (c) On admettra que la réaction associée à l'équation-bilan précédente est presque totale. Déterminer la concentration des différentes espèces dans les solutions lorsque la pile est « usée ».

● 347 ————— Lycée Carnot, Dijon

20 min.

PCSI

Titration par oxydo-réduction

1. Écrire l'équation du dosage des ions Fe^{2+} par les ions $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ et calculer sa constante d'équilibre.
2. On dose, dans un milieu tamponné à $\text{pH} = 0$, une solution d'ions Fe^{2+} (volume v_0 et concentration c_0) par du dichromate de concentration c . Exprimer le volume d'équivalence $v_{\text{éq}}$.
3. Quelle est la valeur du potentiel d'une électrode de platine plongeant dans la solution à l'équivalence ? Calculer la valeur numérique de ce potentiel.

Dans cet exercice, on ne négligera pas la dilution.

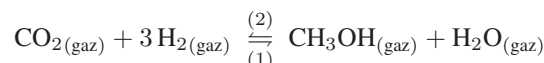
Données numériques :

- volumes et concentrations : $c_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $v_0 = 100 \text{ mL}$ et $v_{\text{éq}} = 10 \text{ mL}$
- potentiels *standard* à la température du dosage :

$$E_1^0 (\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} / \text{Cr}^{3+}) = 1,33 \text{ V} \quad E_2^0 (\text{Fe}^{3+} / \text{Fe}^{2+}) = 0,77 \text{ V}$$

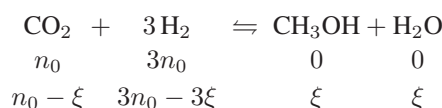
● **295** **Lycée Fénelon, Paris**

1. Toutes les espèces étant gazeuses, la réaction dans le sens (1) se traduit par un abaissement de la pression :



Or, l'effet modérateur de l'équilibre chimique déplace celui-ci dans le sens qui s'oppose à la contrainte qui lui est imposée. C'est pourquoi, une augmentation de la pression se traduit par un déplacement de la réaction dans le sens (1) de la formation du méthanol CH_3OH (le système contient ainsi moins de gaz, ce qui abaisse sa pression).

2. Soit n_0 le nombre initial de moles de CO_2 introduit (et $3n_0$ celui de H_2). Si la réaction était totale, elle produirait n_0 moles de CH_3OH . Or, la réaction n'étant pas totale, elle produit seulement ξ moles de CH_3OH :



Le taux de conversion de CO_2 en CH_3OH est alors défini par le rapport :

$$\alpha = \frac{\xi}{n_0} \Rightarrow \xi = \alpha n_0$$

à partir duquel s'expriment les nombres de moles de toutes les espèces qui participent à la réaction :

$$n_{\text{CO}_2} = n_0 (1 - \alpha) \quad n_{\text{H}_2} = 3n_0 (1 - \alpha) \quad n_{\text{CH}_3\text{OH}} = n_{\text{H}_2\text{O}} = \alpha n_0$$

Ce faisant, le nombre total de moles de gaz vaut :

$$n = n_0 (1 - \alpha + 3 - 3\alpha + \alpha + \alpha) \Rightarrow n_0 (4 - 2\alpha) = 2n_0 (2 - \alpha)$$

Par conséquent, les pressions partielles des gaz sont données par :

$$p_{\text{CO}_2} = \frac{1 - \alpha}{2(2 - \alpha)} p \quad p_{\text{H}_2} = \frac{3(1 - \alpha)}{2(2 - \alpha)} p \quad p_{\text{CH}_3\text{OH}} = p_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{\alpha}{2(2 - \alpha)} p$$

à l'origine de leurs activités respectives :

$$|\text{CO}_2| = \frac{1 - \alpha}{2(2 - \alpha)} \frac{p}{p_0} \quad |\text{H}_2| = \frac{3(1 - \alpha)}{2(2 - \alpha)} \frac{p}{p_0} \quad |\text{CH}_3\text{OH}| = |\text{H}_2\text{O}| = \frac{\alpha}{2(2 - \alpha)} \frac{p}{p_0}$$

où $p_0 = 1$ bar représente la pression *standard*. Il s'ensuit que la constante d'équilibre vaut :

$$K_p = \frac{|\text{H}_2\text{O}| |\text{CH}_3\text{OH}|}{|\text{CO}_2| |\text{H}_2|^3} \Rightarrow K_p = \frac{4\alpha^2 (2 - \alpha)^2}{27 (1 - \alpha)^4} \times \left(\frac{p_0}{p}\right)^2 \quad (17)$$

Application numérique : avec $\alpha = 46\% = 0,46$:

$$K_p = \frac{4 \times (0,46)^2 \times (2 - 0,46)^2}{27 \times (1 - 0,46)^4} \times \frac{1}{(1,01325)^2} \Rightarrow K_p = 0,85$$

3. À la température de 600 K, la constante K_p prend la valeur $K_p = 2,65 \cdot 10^{-4}$ sous une pression totale p vérifiant la relation (17) :

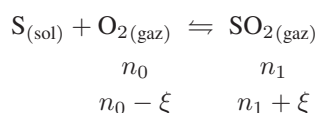
$$\sqrt{K_p} = \frac{2\alpha(2-\alpha)}{\sqrt{27}(1-\alpha)^2} \times \frac{p_0}{p} \Rightarrow p = \frac{2\alpha(2-\alpha)}{\sqrt{27K_p}(1-\alpha)^2} \times p_0$$

Application numérique :

$$p = \frac{2 \times 0,46 \times (2 - 0,46)}{\sqrt{27 \times 2,65 \cdot 10^{-4}} \times (1 - 0,46)^2} \times 1 \Rightarrow p = 57,44 \text{ bar}$$

● 296 ————— Concours de la banque « Agro »

1. Soit n_0 et n_1 les quantités initiales de $\text{O}_{2(\text{gaz})}$ et de $\text{SO}_{2(\text{gaz})}$. Le bilan de cette réaction s'exprime en fonction de son avancement ξ :



Si p désigne la pression totale du milieu réactionnel, comportant :

$$n = (n_0 - \xi) + (n_1 + \xi) = n_0 + n_1$$

moles de gaz, les pressions partielles des espèces gazeuses valent :

$$p_{\text{O}_2} = \frac{n_0 - \xi}{n} p \quad \text{et} \quad p_{\text{SO}_2} = \frac{n_1 + \xi}{n} p$$

Par suite, la constante de cet équilibre est définie à partir des activités des espèces gazeuses : $|\text{O}_2| = \frac{p_{\text{O}_2}}{p_0}$ et $|\text{SO}_2| = \frac{p_{\text{SO}_2}}{p_0}$ (où p_0 est la pression *standard*) et de l'activité du soufre : $|\text{S}| = 1$:

$$K = \frac{|\text{SO}_2|}{|\text{S}| \times |\text{O}_2|} = \frac{n_1 + \xi}{n_0 - \xi} \quad (18)$$

De cette relation, il découle que :

$$n_0 K - K \xi = n_1 + \xi \Rightarrow \xi = \frac{n_0 K - n_1}{1 + K}$$

où aucun des termes du membre de droite ne dépend de la pression p . En conclusion, p reste sans influence sur ξ , c'est-à-dire sur la composition du milieu réactionnel à l'équilibre.

2. De l'équation (18), il ressort que :

$$\begin{aligned} \ln K &= \ln(n_1 + \xi) - \ln(n_0 - \xi) \\ \Rightarrow d(\ln K) &= \frac{d\xi}{n_1 + \xi} + \frac{d\xi}{n_0 - \xi} = d\xi \times \frac{n}{(n_1 + \xi)(n_0 - \xi)} \quad (19) \end{aligned}$$

où $n_1 + \xi = n_{\text{SO}_2}$ et $n_0 - \xi = n_{\text{O}_2}$ sont des quantités de matière, nécessairement positives. En outre, la loi de variation de K en fonction de la température procure :

$$K = \exp\left(\frac{\alpha}{T} - \beta\right) \Rightarrow \ln K = \frac{\alpha}{T} - \beta \Rightarrow d(\ln K) = -\frac{\alpha}{T^2} dT$$

de sorte que l'équation (19) s'écrit aussi :

$$d\xi \times \frac{n}{(n_1 + \xi)(n_0 - \xi)} = -\frac{\alpha}{T^2} dT \Rightarrow \frac{d\xi}{dT} = -\frac{\alpha (n_1 + \xi)(n_0 - \xi)}{n \times T^2}$$

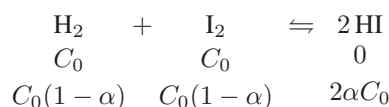
Le membre de droite de cette dernière identité étant négatif, il révèle que ξ décroît avec T , ce qui signifie qu'une augmentation de température n'est pas favorable à l'avancement de cette réaction, mais plutôt à la formation de $\text{S} + \text{O}_2$.

● 297 ————— Concours ESIM

1. Soit C_0 la concentration initiale en H_2 et I_2 et soit α le taux de conversion défini à partir de l'avancement χ de la réaction :

$$\alpha = \frac{\chi}{C_0} \Rightarrow \chi = \alpha C_0$$

Le bilan de la réaction :



donne les concentrations molaires volumiques des réactifs et produits gazeux. Du reste, dans un récipient de volume V , à température T , la pression partielle d'une espèce X_i est liée à sa quantité de matière n_i , à l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p_i V = n_i RT \Rightarrow C_i = \frac{n_i}{V} = \frac{1}{RT} \times p_i \Rightarrow p_i = RT C_i$$

où C_i désigne la concentration de X_i . Par suite, les pressions partielles des réactifs et produits valent :

$$p_{\text{H}_2} = p_{\text{I}_2} = RT C_0 (1 - \alpha) \text{ et } p_{\text{HI}} = 2RT C_0 \alpha$$

Ce faisant, la constante de l'équilibre :

$$K = \frac{|\text{HI}|^2}{|\text{H}_2| |\text{I}_2|}$$

s'exprime à partir des activités des entités gazeuses, c'est-à-dire de leurs pressions partielles :

$$K = \frac{p_{\text{HI}}^2}{p_{\text{H}_2} \times p_{\text{I}_2}} \Rightarrow K = \frac{4\alpha^2}{(1-\alpha)^2} = \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right)^2 \quad (20)$$

Enfin, $\alpha = 80\%$ mène à :

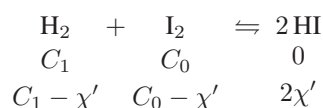
$$K = \left(\frac{2 \times 0,8}{1 - 0,8}\right)^2 \Rightarrow K = 64$$

2. La loi (20) montre que :

$$\frac{2\alpha}{1-\alpha} = \sqrt{K}$$

où K ne dépend que de la température, ce qui traduit l'indépendance de α à l'égard de la pression ; la pression est sans influence sur la composition du milieu réactionnel à l'équilibre.

3. Soit $C_1 = C_0 + dC$ la nouvelle concentration initiale en dihydrogène et $\chi' = \chi + d\chi$ l'avancement de la réaction, de bilan :



Les pressions partielles des espèces gazeuses :

$$p_{\text{H}_2} = RT (C_1 - \chi') \quad p_{\text{I}_2} = RT (C_0 - \chi') \quad p_{\text{HI}} = RT \times 2\chi'$$

permettent de formuler l'expression de la constante K , dont la valeur n'a pas varié puisque la température est fixée :

$$K = \frac{p_{\text{HI}}^2}{p_{\text{H}_2} \times p_{\text{I}_2}} = \frac{4\chi'^2}{(C_1 - \chi') (C_0 - \chi')}$$

La valeur initiale de $K = \frac{4\chi^2}{(C_0 - \chi)^2}$ impose de fait :

$$\frac{\chi'^2}{(C_1 - \chi') (C_0 - \chi')} = \frac{\chi^2}{(C_0 - \chi)^2} \quad (21)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\chi'}{\chi}\right)^2 = \frac{C_1 - \chi'}{C_0 - \chi} \times \frac{C_0 - \chi'}{C_0 - \chi} \quad (22)$$

$$\Rightarrow 2 \ln \left(\frac{\chi'}{\chi}\right) = \ln \left(\frac{C_1 - \chi'}{C_0 - \chi}\right) + \ln \left(\frac{C_0 - \chi'}{C_0 - \chi}\right) \quad (23)$$

avec :

$$\ln \left(\frac{\chi'}{\chi}\right) = \ln \left(\frac{\chi + d\chi}{\chi}\right) = \ln \left(1 + \frac{d\chi}{\chi}\right) \simeq \frac{d\chi}{\chi} \text{ car } d\chi \ll \chi$$

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{C_1 - \chi'}{C_0 - \chi}\right) &= \ln \left(\frac{C_0 - \chi + dC - d\chi}{C_0 - \chi}\right) = \ln \left(1 + \frac{dC - d\chi}{C_0 - \chi}\right) \\ &\simeq \frac{dC}{C_0 - \chi} - \frac{d\chi}{C_0 - \chi} \end{aligned}$$

et :

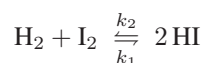
$$\ln \left(\frac{C_0 - \chi'}{C_0 - \chi}\right) = \ln \left(\frac{C_0 - \chi - d\chi}{C_0 - \chi}\right) = \ln \left(1 - \frac{d\chi}{C_0 - \chi}\right) \simeq -\frac{d\chi}{C_0 - \chi}$$

Par suite, l'équation (23) se linéarise :

$$\begin{aligned} 2 \frac{d\chi}{\chi} &= \frac{dC}{C_0 - \chi} - \frac{2d\chi}{C_0 - \chi} \Rightarrow 2d\chi \left(\frac{1}{\chi} + \frac{1}{C_0 - \chi} \right) = \frac{dC}{C_0 - \chi} \\ &\Rightarrow 2d\chi \times \frac{C_0}{\chi(C_0 - \chi)} = \frac{dC}{C_0 - \chi} \\ &\Rightarrow d\chi = \frac{\chi}{2C_0} \times dC \end{aligned}$$

Cette relation révèle qu'une augmentation de C ($dC > 0$) provoque une augmentation de χ , ce qui signifie aussi qu'un ajout élémentaire de dihydrogène provoque un déplacement de la réaction vers la formation de HI.

4. La vitesse de formation de H_2 , au cours de la réaction :



est définie par :

$$\frac{d[H_2]}{dt} = k_1 [H_2] [I_2] - k_2 [HI]^2$$

Or, lorsque l'équilibre est établi, $[H_2]$ ne varie plus, ce qui justifie que :

$$\frac{d[H_2]}{dt} = 0 \Rightarrow k_1 [H_2] [I_2] = k_2 [HI]^2 \Rightarrow \frac{[HI]^2}{[H_2] [I_2]} = \frac{k_1}{k_2}$$

où :

$$[HI] = \frac{p_{HI}}{RT} \quad [H_2] = \frac{p_{H_2}}{RT} \quad [I_2] = \frac{p_{I_2}}{RT}$$

Aussi, l'équilibre étant atteint, le rapport :

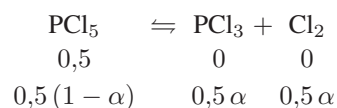
$$\frac{p_{HI}^2}{p_{H_2} p_{I_2}} = \frac{k_1}{k_2}$$

prend une valeur constante, qui s'identifie ainsi à la constante de l'équilibre :

$$K = \frac{k_1}{k_2}$$

● 298 ————— Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1. Le bilan de la réaction s'exprime en fonction du coefficient de dissociation α :



où les quantités de matière n_i de chaque espèce X_i donne accès à sa pression partielle p_i , grâce à l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p_i V_0 = n_i RT_0 \Rightarrow p_i = n_i \frac{RT_0}{V_0}$$

c'est-à-dire :

$$p_{\text{PCl}_5} = 0,5(1 - \alpha) \frac{RT_0}{V_0} \text{ et } p_{\text{PCl}_3} = p_{\text{Cl}_2} = 0,5\alpha \times \frac{RT_0}{V_0}$$

d'où se déduisent les activités des diverses espèces gazeuses :

$$|\text{PCl}_5| = \frac{p_{\text{PCl}_5}}{p_0} \quad |\text{PCl}_3| = \frac{p_{\text{PCl}_3}}{p_0} \quad |\text{Cl}_2| = \frac{p_{\text{Cl}_2}}{p_0}$$

Par suite, la constante de l'équilibre vaut :

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{|\text{PCl}_3| |\text{Cl}_2|}{|\text{PCl}_5|} = \frac{p_{\text{PCl}_3} \times p_{\text{Cl}_2}}{p_{\text{PCl}_5} \times p_0} = \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} \times \frac{0,5 RT_0}{V_0 p_0} \\ &\Rightarrow \frac{\alpha^2}{1 - \alpha} = \frac{K_p V_0 p_0}{0,5 RT_0} = \frac{8 \times 2,05 \times 1}{0,5 \times 0,082 \times 455} = 0,879 \\ &\Rightarrow \alpha^2 + 0,879 \alpha - 0,879 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = (0,879)^2 + 4 \times 0,879 = 4,289$$

génère deux solutions :

$$\alpha = \frac{-0,879 \pm \sqrt{4,289}}{2}$$

dont seule la positive peut être retenue :

$$\alpha = \frac{-0,879 + \sqrt{4,289}}{2} \Rightarrow \alpha = 0,596 = 59,6\%$$

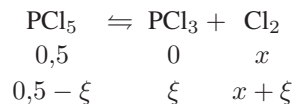
Ce faisant, le nombre total de moles de gaz :

$$n = 0,5(1 - \alpha) + 0,5\alpha + 0,5\alpha = 0,5 \times (1 + \alpha)$$

produit, dans le milieu réactionnel, une pression p vérifiant l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\begin{aligned} pV_0 = nRT_0 &\Rightarrow p = \frac{nRT_0}{V_0} = \frac{0,5 \times (1 + 0,596) \times 0,082 \times 455}{2,05} \\ &\Rightarrow p = 14,5 \text{ atm} \end{aligned}$$

2. Soit x la quantité de dichlore ajoutée au milieu réactionnel, dont l'avancement ξ décrit la composition :



Le nombre total de moles de gaz, à l'équilibre, vaut par conséquent :

$$n = (0,5 - \xi) + \xi + (x + \xi) = 0,5 + \xi + x$$

et sa valeur numérique est associée à la pression $p = 20$ atm du milieu réactionnel à l'équilibre :

$$pV_0 = nRT_0 \Rightarrow n = \frac{pV_0}{RT_0} = \frac{20 \times 2,05}{0,082 \times 455} = 1,099 \text{ mole}$$

ce qui permet de poser :

$$n = 0,5 + \xi + x = 1,099 \Rightarrow \xi + x = 0,599 \text{ mole} \quad (24)$$

Par suite, les pressions partielles des espèces gazeuses sont données par :

$$p_{\text{PCl}_5} = \frac{0,5 - \xi}{n} p \quad p_{\text{PCl}_3} = \frac{\xi}{n} p \quad p_{\text{Cl}_2} = \frac{x + \xi}{n} p = \frac{0,599}{1,099} p$$

d'où sont déduites les activités de ces gaz :

$$|\text{PCl}_5| = \frac{p_{\text{PCl}_5}}{p_0} \quad |\text{PCl}_3| = \frac{p_{\text{PCl}_3}}{p_0} \quad |\text{Cl}_2| = \frac{p_{\text{Cl}_2}}{p_0}$$

à l'origine de l'expression de constante de l'équilibre :

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{|\text{PCl}_3| |\text{Cl}_2|}{|\text{PCl}_5|} = \frac{\xi}{0,5 - \xi} \times \frac{p_{\text{Cl}_2}}{p_0} = \frac{\xi}{0,5 - \xi} \times \frac{0,599}{1,099} \times \frac{p}{p_0} \\ \Rightarrow \frac{\xi}{0,5 - \xi} &= K_p \times \frac{1,099}{0,599} \times \frac{p_0}{p} = 8 \times \frac{1,099}{0,599} \times \frac{1}{20} = 0,734 \\ \Rightarrow \xi &= 0,5 \times 0,734 - 0,734 \xi \\ \Rightarrow \xi &= \frac{0,5 \times 0,734}{1 + 0,734} = 0,212 \text{ mole} \end{aligned}$$

où l'avancement ξ est lié au coefficient de dissociation α :

$$0,5 \times \alpha = \xi \Rightarrow \alpha = \frac{\xi}{0,5} \Rightarrow \alpha = 0,423 = 42,3\%$$

Ce faisant, la relation (24) conduit à :

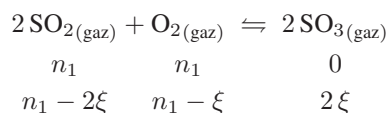
$$x = 0,599 - \xi = 0,599 - 0,212 = 0,387 \text{ mole}$$

ce qui signifie qu'il faut rajouter :

$$0,387 \text{ mole de Cl}_2.$$

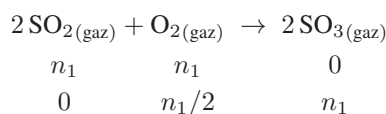
● 299 ————— Concours de la banque « Agro »

1. Soit ξ l'avancement de la réaction :



Compte tenu des coefficients stœchiométriques, SO_2 , et O_2 étant introduits en quantité égale, SO_2 est amené à disparaître en premier. Si la réaction était totale,

elle aurait pour bilan :



2. Si le rendement de la réaction était de 100%, elle fournirait n_1 moles de SO_3 . Aussi, un rendement de 90% correspond à $0,9 n_1$ moles de SO_3 produit, c'est-à-dire à un avancement ξ tel que :

$$2\xi = 0,9 n_1 \Rightarrow \xi = 0,45 n_1$$

Ce faisant, la composition finale du milieu réactionnel est :

$$n_{\text{SO}_2} = n_1 - 0,9 n_1 \Rightarrow n_{\text{SO}_2} = 0,1 n_1 \text{ moles}$$

$$n_{\text{O}_2} = n_1 - 0,45 n_1 \Rightarrow n_{\text{O}_2} = 0,55 n_1 \text{ moles}$$

$$n_{\text{SO}_3} = 2 \times 0,45 n_1 \Rightarrow n_{\text{SO}_3} = 0,9 n_1 \text{ moles}$$

et, compte tenu de l'inertie du diazote à l'égard de cette réaction :

$$n_{\text{N}_2} = 4 n_1 \text{ moles.}$$

Aussi, le nombre total de moles de gaz présentes, à l'équilibre, vaut :

$$n = n_{\text{SO}_2} + n_{\text{O}_2} + n_{\text{SO}_3} + n_{\text{N}_2} = 5,55 \text{ moles}$$

d'où se déduisent les pressions partielles des différents gaz :

$$p_{\text{SO}_2} = \frac{n_{\text{SO}_2}}{n} \times p \Rightarrow p_{\text{SO}_2} = \frac{0,1}{5,55} \times p$$

$$p_{\text{O}_2} = \frac{n_{\text{O}_2}}{n} \times p \Rightarrow p_{\text{O}_2} = \frac{0,55}{5,55} \times p$$

$$p_{\text{SO}_3} = \frac{n_{\text{SO}_3}}{n} \times p \Rightarrow p_{\text{SO}_3} = \frac{0,9}{5,55} \times p$$

$$p_{\text{N}_2} = \frac{n_{\text{N}_2}}{n} \times p \Rightarrow p_{\text{N}_2} = \frac{4}{5,55} \times p$$

3. Les pressions partielles ainsi calculées définissent les activités des gaz qui participent à la réaction :

$$|\text{SO}_2| = \frac{p_{\text{SO}_2}}{p_0} = \frac{0,1 p}{5,55 p_0} \quad |\text{O}_2| = \frac{0,55 p}{5,55 p_0} \quad |\text{SO}_3| = \frac{0,9 p}{5,55 p_0}$$

d'où se déduit l'expression de la constante K^0 :

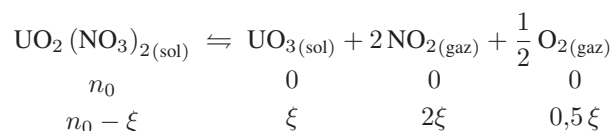
$$K^0 = \frac{|\text{SO}_3|^2}{|\text{SO}_2|^2 |\text{O}_2|} = \left(\frac{0,9}{0,1}\right)^2 \times \frac{5,55 p_0}{0,55 p} \Rightarrow p = 81 \times \frac{5,55 p_0}{0,55 K^0}$$

Application numérique :

$$p = 81 \times \frac{5,55 \times 1}{0,55 \times 8,1 \cdot 10^3} \Rightarrow p = 0,1 \text{ bar}$$

● 300 Concours de l'ENS

1. Soit n_0 le nombre initial de moles de nitrate d'uranyle et soit ξ l'avancement de la réaction :



De ce bilan découle la quantité totale de moles de gaz :

$$n = 2,5\xi$$

d'où se déduisent les pressions partielles des espèces gazeuses :

$$p_{\text{NO}_2} = \frac{2\xi}{2,5\xi} p_{\text{éq}} = \frac{2}{2,5} p_{\text{éq}} \text{ et } p_{\text{O}_2} = \frac{0,5\xi}{2,5\xi} p_{\text{éq}} = \frac{0,5}{2,5} p_{\text{éq}}$$

auxquelles sont associées les activités respectives :

$$|\text{NO}_2| = \frac{p_{\text{NO}_2}}{p_0} = \frac{2}{2,5} \frac{p_{\text{éq}}}{p_0} \text{ et } |\text{O}_2| = \frac{p_{\text{O}_2}}{p_0} = \frac{0,5}{2,5} \frac{p_{\text{éq}}}{p_0}$$

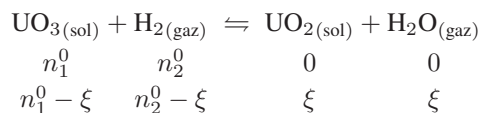
dans lesquelles $p_0 = 1$ bar représente la pression *standard*. Ce faisant, lorsque l'équilibre chimique est atteint, la loi d'action des masses stipule que :

$$\begin{aligned}
 K_1^0 &= |\text{NO}_2|^2 |\text{O}_2|^{1/2} = \left(\frac{2}{2,5}\right)^2 \times \sqrt{\frac{0,5}{2,5}} \times \left(\frac{p_{\text{éq}}}{p_0}\right)^{5/2} \\
 &\Rightarrow \left(\frac{p_{\text{éq}}}{p_0}\right)^{5/2} = \left(\frac{2,5}{2}\right)^2 K_1^0 \times \sqrt{\frac{2,5}{0,5}} \\
 &\Rightarrow p_{\text{éq}} = p_0 \times \left[\left(\frac{2,5}{2}\right)^2 K_1^0 \times \sqrt{\frac{2,5}{0,5}} \right]^{2/5}
 \end{aligned}$$

Application numérique :

$$p_{\text{éq}} = 1 \times \left[\left(\frac{2,5}{2}\right)^2 \times 38 \times \sqrt{\frac{2,5}{0,5}} \right]^{2/5} \Rightarrow p_{\text{éq}} = 7,06 \text{ bar}$$

2. Soient n_1^0 et n_2^0 les quantités initiales de moles de UO_3 et de H_2 introduites dans le réacteur :



L'avancement ξ de cette réaction permet de connaître d'une part la composition en gaz du mélange :

$$n_{\text{H}_2} = n_2 - \xi \text{ et } n_{\text{H}_2\text{O}} = \xi$$

et d'autre part la quantité totale de gaz qui le compose :

$$n = n_{\text{H}_2} + n_{\text{H}_2\text{O}} = n_2^0$$

Par suite, si p désigne la pression totale qui règne dans le réacteur, les pressions partielles de ces gaz sont définies par :

$$p_{\text{H}_2} = \frac{n_2^0 - \xi}{n} \times p = \frac{n_2^0 - \xi}{n_2^0} \times p \text{ et } p_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{\xi}{n_2^0} \times p$$

d'où se déduisent les activités des gaz :

$$|\text{H}_2| = \frac{n_2^0 - \xi}{n_2^0} \times \frac{p}{p_0} \text{ et } |\text{H}_2\text{O}| = \frac{\xi}{n_2^0} \times \frac{p}{p_0}$$

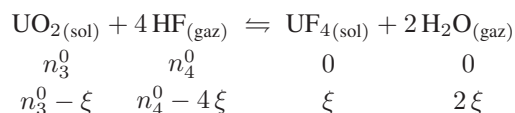
$p_0 = 1$ bar étant la pression *standard*.

En outre, les activités des solides $\text{UO}_3(\text{sol})$ et $\text{UO}_2(\text{sol})$ valant 1, l'équilibre est caractérisé par une constante K^0 telle que :

$$\begin{aligned} K^0 = \frac{|\text{UO}_2| |\text{H}_2\text{O}|}{|\text{UO}_3| |\text{H}_2|} &\Rightarrow K^0 = \frac{n_2^0 - \xi}{\xi} = \frac{n_2^0}{\xi} - 1 \Rightarrow \frac{n_2^0}{\xi} = 1 + K^0 \\ &\Rightarrow \xi = \frac{n_2^0}{1 + K^0} \end{aligned}$$

Puisque K_0 ne dépend que de la température, ce résultat montre que ξ ne dépend pas de la pression totale p , qui reste donc sans influence sur l'équilibre.

3. (a) À nouveau, notons n_3^0 et n_4^0 les quantités initiales de UO_2 et de HF introduites dans le réacteur :



Les quantités de gaz à tout instant valent :

$$n_{\text{HF}} = n_4^0 - 4\xi \text{ et } n_{\text{H}_2\text{O}} = 2\xi$$

ce qui représente un total de :

$$n = n_{\text{HF}} + n_{\text{H}_2\text{O}} = n_4^0 - 2\xi \text{ moles de gaz.}$$

Aussi, en désignant par p la pression totale du milieu réactionnel, les pressions partielles des gaz sont données par :

$$p_{\text{HF}} = \frac{n_4^0 - 4\xi}{n_4^0 - 2\xi} \times p \text{ et } p_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{2\xi}{n_4^0 - 2\xi} \times p$$

d'où se déduisent les expressions des activités des espèces gazeuses (avec $p_0 = 1$ bar) :

$$|\text{HF}| = \frac{n_4^0 - 4\xi}{n_4^0 - 2\xi} \times \frac{p}{p_0} \quad |\text{H}_2\text{O}| = \frac{2\xi}{n_4^0 - 2\xi} \times \frac{p}{p_0}$$

tandis que les activités $|\text{UO}_2(\text{sol})|$ et $|\text{UF}_4(\text{sol})|$ valent 1. La loi d'action des masses permet alors de poser :

$$K_2^0 = \frac{|\text{UF}_4| |\text{H}_2\text{O}|^2}{|\text{UO}_2| |\text{HF}|^4} = \frac{4\xi^2 (n_4^0 - 2\xi)^2}{(n_4^0 - 4\xi)^4} \times \frac{p_0^2}{p^2}$$

d'où il découle que :

$$\ln K_2^0 = \ln (4p_0^2) + 2 \ln \xi + 2 \ln (n_4^0 - 2\xi) - 4 \ln (n_4^0 - 4\xi) - 2 \ln p$$

une variation dp de la pression s'accompagne par conséquent d'une variation $d\xi$ de l'avancement, donnée par la différentielle de cette relation :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2 d\xi}{\xi} - \frac{4 d\xi}{n_4^0 - 2\xi} + \frac{16 d\xi}{n_4^0 - 4\xi} - \frac{2 dp}{p} \\ \Rightarrow \frac{dp}{p} &= d\xi \left(\frac{1}{\xi} - \frac{2}{n_4^0 - 2\xi} + \frac{8}{n_4^0 - 4\xi} \right) \end{aligned}$$

soit encore :

$$\frac{dp}{p} = d\xi \times \frac{(n_4^0)^2}{\xi (n_4^0 - 2\xi) (n_4^0 - 4\xi)} \Rightarrow \frac{d\xi}{dp} = \frac{\xi (n_4^0 - 2\xi) (n_4^0 - 4\xi)}{p \times (n_4^0)^2} > 0$$

Ce résultat révèle qu'une augmentation de la pression totale provoque une augmentation de ξ , et favorise alors la formation de UF_4 .

- (b) Lorsque UO_2 est traité par un courant de $\text{HF}_{(\text{gaz})}$, sous la pression $p = p_0 = 1$ bar, cela signifie que la pression totale demeure égale à p_0 . Il s'ensuit que :

$$p_{\text{H}_2\text{O}} + p_{\text{HF}} = p_0 \Rightarrow p_{\text{HF}} \left(\frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{p_{\text{HF}}} + 1 \right) = p_0 \Rightarrow p_{\text{HF}} \times 71 = p_0$$

De fait les pressions partielles des espèces gazeuses valent :

$$p_{\text{HF}} = \frac{p_0}{71} \text{ et } p_{\text{H}_2\text{O}} = 70 p_{\text{HF}} = \frac{70}{71} p_0$$

et sont associées aux activités :

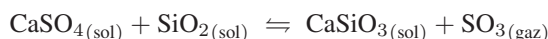
$$|\text{HF}| = \frac{p_{\text{HF}}}{p_0} = \frac{1}{71} \text{ et } |\text{H}_2\text{O}| = \frac{p_{\text{H}_2\text{O}}}{p_0} = \frac{70}{71}$$

Aussi, la constante de cet équilibre vaut :

$$K_2^0 = \frac{|\text{UF}_4| |\text{H}_2\text{O}|^2}{|\text{UO}_2| |\text{HF}|^4} = \left(\frac{70}{71} \right)^2 \times (71)^4 \Rightarrow K_2^0 = (70 \times 71)^2 = 2,47 \cdot 10^7$$

● 301 ————— Concours ENSI

1. (a) L'équation-bilan (1) :



est associée à la constante d'équilibre :

$$K_1 = \frac{|\text{CaSiO}_3| |\text{SO}_3|}{|\text{CaSO}_4| |\text{SiO}_2|}$$

où les activités des solides valent 1 :

$$|\text{CaSiO}_3| = |\text{CaSO}_4| = |\text{SiO}_2| = 1$$

tandis que celle de l'entité gazeuse vaut :

$$|\text{SO}_3| = \frac{p_{\text{SO}_3}}{p_0}$$

Par conséquent :

$$K_1 = \frac{p_{\text{SO}_3}}{p_0} \quad (25)$$

Quant à la réaction (2) :



sa constante suit la loi d'action des masses :

$$K_2 = \frac{|\text{SO}_2|^2 |\text{O}_2|}{|\text{SO}_3|^2}$$

où :

$$|\text{SO}_2| = \frac{p_{\text{SO}_2}}{p_0} \quad |\text{O}_2| = \frac{p_{\text{O}_2}}{p_0} \quad |\text{SO}_3| = \frac{p_{\text{SO}_3}}{p_0}$$

En outre, $p_{\text{SO}_2} = 2 p_{\text{O}_2}$ car, le milieu étant initialement dépourvu de SO_2 et de O_2 , il se forme deux fois plus de dioxyde de soufre que de dioxygène. C'est pourquoi :

$$K_2 = \frac{p_{\text{SO}_2}^2 \times p_{\text{O}_2}}{p_{\text{SO}_3}^2 \times p_0} \Rightarrow K_2 = \frac{4 p_{\text{O}_2}^3}{p_{\text{SO}_3}^2 \times p_0} \quad (26)$$

- (b) Compte tenu des valeurs numériques connues de $K_1 = 0,95$ et de $K_2 = 400$, les résultats (25) et (26) fournissent :

$$p_{\text{SO}_3} = K_1 \times p_0 = 0,95 \text{ bar} = 0,95 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

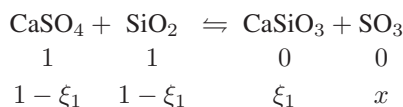
et :

$$\begin{aligned} K_2 = \frac{4 p_{\text{O}_2}^3}{p_{\text{SO}_3}^2 \times p_0} &\Rightarrow p_{\text{O}_2} = \sqrt[3]{\frac{K_2 p_{\text{SO}_3}^2 p_0}{4}} = \sqrt[3]{\frac{400 \times (0,95)^2}{4}} \\ &\Rightarrow p_{\text{O}_2} = 4,49 \text{ bars} = 4,49 \cdot 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

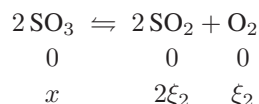
d'où l'on déduit que :

$$p_{\text{SO}_2} = 2 p_{\text{O}_2} = 8,97 \text{ bars} = 8,97 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

2. (a) Soit ξ_1 l'avancement de la réaction (1) et soit ξ_2 celui de la réaction (2). Le nombre de moles de SO_3 est noté x (SO_3 est produit par la première réaction et est consommé par la deuxième) :



et :



Ce nombre de moles peut être déterminé en traduisant la conservation de l'élément soufre (introduit à hauteur d'une mole, et qui se présente sous les formes CaSO_4 , SO_3 et SO_2 à l'équilibre) :

$$1 = n_{\text{CaSO}_4} + n_{\text{SO}_3} + n_{\text{SO}_2} \Rightarrow 1 = (1 - \xi_1) + x + 2\xi_2 \Rightarrow x = \xi_1 - 2\xi_2 \quad (27)$$

En considérant les gaz comme parfaits, la pression partielle de O_2 (au demeurant connue) est définie par :

$$p_{\text{O}_2} \times V = \xi_2 \times RT \Rightarrow \xi_2 = \frac{p_{\text{O}_2} V}{RT} \quad (28)$$

Application numérique :

$$\xi_2 = \frac{4,49 \cdot 10^5 \times 10 \cdot 10^{-3}}{8,314 \times 1400} \Rightarrow \xi_2 = 0,39 \text{ mole.}$$

De même, la pression partielle de SO_3 est définie par :

$$p_{\text{SO}_3} V = x RT \Rightarrow x = \frac{p_{\text{SO}_3} V}{RT} \quad (29)$$

Application numérique :

$$x = \frac{0,95 \cdot 10^5 \times 10 \cdot 10^{-3}}{8,314 \times 1400} \Rightarrow x = 0,08 \text{ mole.}$$

Aussi, l'identité (27) fournit-elle :

$$x = \xi_1 - 2\xi_2 \Rightarrow \xi_1 = x + 2\xi_2 = 0,08 + 2 \times 0,39 \Rightarrow \xi_1 = 0,86 \text{ mole.}$$

Ce faisant, les quantités de $\text{CaSO}_4(\text{sol})$ et de $\text{SiO}_2(\text{sol})$ à l'équilibre valent :

$$n_{\text{CaSO}_4} = n_{\text{SiO}_2} = 1 - \xi_1 = 0,14 \text{ mole}$$

- (b) L'activité du solide $\text{CaSO}_4(\text{sol})$ vaut 1, quelle que soit sa quantité non nulle. C'est pourquoi un ajout de $\text{CaSO}_4(\text{sol})$ reste sans influence sur l'équilibre.

3. Les grandeurs x et ξ_2 étant fournies par les identités (28) et (29), l'équation (27) devient :

$$x = \xi_1 - 2\xi_2 \Rightarrow \frac{p_{\text{SO}_3} V}{RT} = \xi_1 - \frac{2p_{\text{O}_2} V}{RT}$$

Or, la décomposition d'une mole de CaSO_4 et d'une mole de SiO_2 est totale lorsque x_1 prend la valeur 1, ce qui s'observe alors pour un volume V qui vérifie :

$$\frac{p_{\text{SO}_3} V}{RT} = 1 - \frac{2 p_{\text{O}_2} V}{RT} \Rightarrow V \times \frac{p_{\text{SO}_3} + 2 p_{\text{O}_2}}{RT} = 1 \Rightarrow V = \frac{RT}{p_{\text{SO}_3} + 2 p_{\text{O}_2}}$$

Application numérique :

$$V = \frac{8,314 \times 1\,400}{0,95 \cdot 10^5 + 2 \times 4,49 \cdot 10^5} \Rightarrow V = 0,012 \text{ m}^3 = 12 \text{ L}$$

● 302 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. Si n désigne le nombre total de moles de gaz, les fractions molaires des espèces participant à la réaction valent :

$$x_A = \frac{n_A}{n} = 0,135 \quad x_B = \frac{n_B}{n} = 0,609 \quad x_C = \frac{n_C}{n} = 0,213$$

où n_A , n_B et n_C représentent les nombres de moles de A, B et C respectivement, dont les pressions partielles sont alors données par :

$$p_A = x_A \times p \quad p_B = x_B \times p \quad p_C = x_C \times p$$

Par suite, les activités de ces gaz sont définies par :

$$|A| = \frac{p_A}{p^0} \quad |B| = \frac{p_B}{p^0} \quad |C| = \frac{p_C}{p^0}$$

où p^0 est la pression *standard* (ici $p^0 = 1 \text{ bar}$). Par conséquent, la constante de l'équilibre :



suit la loi d'action des masses :

$$K_p = \frac{|C|}{|A| |B|^2} \Rightarrow K_p = \frac{x_C}{x_A \times x_B^2} \times \left(\frac{p^0}{p}\right)^2 \quad (30)$$

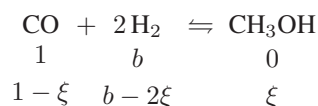
Application numérique :

$$K_p = \frac{0,213}{0,135 \times (0,609)^2} \times \left(\frac{1}{172,2}\right)^2 \Rightarrow K_p = 1,43 \cdot 10^{-4}$$

2. Si la pression de l'état *standard* valait $P^0 = 101\,325 \text{ Pa}$, la pression totale p serait exprimée avec la même unité, à savoir : $p = 172,2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, ce qui amènerait le résultat (30) à prendre la valeur numérique :

$$K_p = \frac{0,213}{0,135 \times (0,609)^2} \times \left(\frac{101\,325}{172,2 \cdot 10^5}\right)^2 \Rightarrow K_p = 1,47 \cdot 10^{-4}$$

3. La définition de l'avancement ξ de la réaction permet de donner la composition du milieu réactionnel :



Aussi, les fractions molaires x_A et x_C de CO et de CH_3OH valent :

$$x_A = \frac{1-\xi}{n} \text{ et } x_C = \frac{\xi}{n}$$

Par suite, le rapport de ces deux grandeurs fournit :

$$\frac{x_A}{x_C} = \frac{1-\xi}{\xi} = \frac{1}{\xi} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{x_A + x_C}{x_C} \Rightarrow \xi = \frac{x_C}{x_A + x_C}$$

Application numérique :

$$\xi = \frac{0,213}{0,135 + 0,213} \Rightarrow \xi = 0,612 \text{ mole}$$

Ce faisant, la fraction molaire des gaz inertes, $x_i = 0,043$, définie par le rapport $x_i = \frac{\eta}{n}$, permet le calcul de η :

$$\frac{x_i}{x_C} = \frac{\eta}{n} \times \frac{n}{\xi} = \frac{\eta}{\xi} \Rightarrow \eta = \xi \times \frac{x_i}{x_C}$$

Application numérique :

$$\eta = 0,612 \times \frac{0,043}{0,213} \Rightarrow \eta = 0,123 \text{ mole}$$

4. Le nombre total de moles de gaz :

$$n = n_A + n_B + n_C + \eta = (1 - \xi) + (b - 2\xi) + \xi + \eta = 1 + b + \eta - 2\xi$$

est à l'origine des définitions des fractions molaires :

$$x_A = \frac{1-\xi}{n} \quad x_B = \frac{b-2\xi}{n} \quad x_C = \frac{\xi}{n}$$

qui interviennent dans l'expression (30) :

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{x_C}{x_A x_B^2} \times \left(\frac{p^0}{p}\right)^2 = \frac{\xi n^2}{(1-\xi)(b-2\xi)^2} \times \left(\frac{p^0}{p}\right)^2 \\ &\Rightarrow \ln K_p = \ln \xi - \ln(1-\xi) - 2 \ln(b-2\xi) \\ &\quad + 2 \ln(1+b+\eta-2\xi) + 2 \ln p^0 - 2 \ln p \quad (31) \end{aligned}$$

(a) À température constante, K_p est constant, tandis qu'une variation dp de la pression provoque une variation $d\xi$ de l'avancement, que l'on retrouve dans la différentielle de la relation précédente :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d\xi}{\xi} + \frac{d\xi}{1-\xi} + \frac{4 d\xi}{b-2\xi} - \frac{4 d\xi}{1+b+\eta-2\xi} - 2 \frac{dp}{p} \\ &\Rightarrow 2 \frac{dp}{p} = d\xi \times \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{1-\xi} + \frac{4}{b-2\xi} - \frac{4}{1+b+\eta-2\xi} \right) \\ &\Rightarrow \frac{dp}{d\xi} = \frac{p}{2} \times \left[\frac{1}{\xi} + \frac{1}{1-\xi} + \frac{4(1+\eta)}{(b-2\xi)(1+b+\eta-2\xi)} \right] \end{aligned}$$

Les termes entre crochets étant tous positifs, cette identité montre que :

$$\frac{d\xi}{dp} > 0$$

ce qui traduit l'augmentation de l'avancement sous l'influence d'une augmentation de pression (à condition toutefois que η reste constant).

- (b) Sous l'influence d'une variation $d\eta$, T et p étant maintenus constants, l'avancement subit une variation $d\xi$ que l'on obtient grâce à la différentielle de l'équation (31) :

$$0 = \frac{d\xi}{\xi} + \frac{d\xi}{1-\xi} + \frac{4d\xi}{b-2\xi} - \frac{4d\xi}{1+b+\eta-2\xi} + \frac{2d\eta}{1+b+\eta-2\xi}$$

c'est-à-dire, en rappelant que $1+b+\eta-2\xi = n$:

$$d\xi \times \left[\frac{1}{\xi} + \frac{1}{1-\xi} + \frac{4(1+\eta)}{n(b-2\xi)} \right] = -2 \frac{d\eta}{n}$$

soit encore :

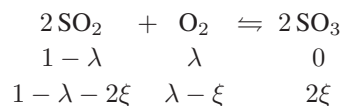
$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{2\xi(1-\xi)(b-2\xi)}{n(b-2\xi) + 4\xi(1-\xi)(1+\eta)} < 0$$

Ce résultat signifie que l'avancement ξ est une fonction décroissante de η , en raison de quoi l'introduction d'un gaz inerte provoque la diminution de l'avancement ξ .

● 303 ————— Concours ESIM

1. Choix de la composition

- (a) L'avancement ξ de la réaction permet de décrire la composition du mélange à l'équilibre :



Le nombre total de moles de gaz :

$$n = (1-\lambda-2\xi) + (\lambda-\xi) + 2\xi \Rightarrow n = 1-\xi$$

définit les pressions partielles des espèces gazeuses :

$$\begin{aligned} p_{\text{SO}_2} &= \frac{1-\lambda-2\xi}{n} \times p = \frac{1-\lambda-2\xi}{1-\xi} \times p \\ p_{\text{O}_2} &= \frac{\lambda-\xi}{1-\xi} \times p \text{ et } p_{\text{SO}_3} = \frac{2\xi}{1-\xi} \times p \end{aligned}$$

d'où se déduisent leurs activités en fonction de la pression standard $p_0 = 1 \text{ bar}$:

$$|\text{SO}_2| = \frac{1-\lambda-2\xi}{1-\xi} \frac{p}{p_0} \quad |\text{O}_2| = \frac{\lambda-\xi}{1-\xi} \frac{p}{p_0} \quad |\text{SO}_3| = \frac{2\xi}{1-\xi} \frac{p}{p_0}$$

Ce faisant, la loi d'action des masses définit la constante de cet équilibre :

$$K^0 = \frac{|\text{SO}_3|^2}{|\text{SO}_2|^2 \times |\text{O}_2|} = \left(\frac{2\xi}{1-\lambda-2\xi} \right)^2 \times \frac{1-\xi}{\lambda-\xi} \times \frac{p_0}{p}$$

c'est-à-dire, si p est exprimé en bars :

$$p \times K^0 = \left(\frac{2\xi}{1-\lambda-2\xi} \right)^2 \times \frac{1-\xi}{\lambda-\xi} \quad (32)$$

- (b) Si p et T sont fixés, le produit $p \times K^0$ est invariable, de sorte que la relation précédente s'écrit aussi :

$$2 \ln(2\xi) - 2 \ln(1-\lambda-2\xi) + \ln(1-\xi) - \ln(\lambda-\xi) = \ln(p \times K^0) = \text{cte}$$

Les paramètres ξ et λ étant susceptibles de varier de $d\xi$ et de $d\lambda$, la différentielle de cette équation s'écrit :

$$\frac{2 d\xi}{\xi} + 2 \frac{d\lambda + 2 d\xi}{1-\lambda-2\xi} - \frac{d\xi}{1-\xi} - \frac{d\lambda - d\xi}{\lambda-\xi} = 0$$

soit encore :

$$\begin{aligned} d\xi \times \left(\frac{2}{\xi} + \frac{4}{1-\lambda-2\xi} - \frac{1}{1-\xi} + \frac{1}{\lambda-\xi} \right) &= d\lambda \left(\frac{1}{\lambda-\xi} - \frac{2}{1-\lambda-2\xi} \right) \\ &= d\lambda \times \frac{1-3\lambda}{(\lambda-\xi)(1-\lambda-2\xi)} \end{aligned}$$

d'où l'on tire que :

$$\frac{d\xi}{d\lambda} \times \left(\frac{2}{\xi} + \frac{4}{1-\lambda-2\xi} - \frac{1}{1-\xi} + \frac{1}{\lambda-\xi} \right) = \frac{1-3\lambda}{(\lambda-\xi)(1-\lambda-2\xi)}$$

Aussi, l'avancement ξ est *maximum* pour une valeur de λ permettant d'annuler $\frac{d\xi}{d\lambda}$, c'est-à-dire pour :

$$\frac{1-3\lambda}{(\lambda-\xi)(1-\lambda-2\xi)} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

Dans ces conditions, la composition initiale du mélange réactionnel est :

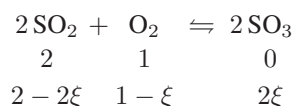
$$n_{\text{SO}_2}^0 = 1 - \lambda = 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow n_{\text{SO}_2}^0 = \frac{2}{3}$$

et :

$$n_{\text{O}_2}^0 = \lambda = \frac{1}{3}$$

ce qui signifie également que c'est en partant d'un mélange stœchiométrique qu'on obtient le meilleur avancement pour cette réaction.

- (c) Soit ξ l'avancement de la réaction à l'équilibre, dans les conditions stœchiométriques :



en notant x le nombre de moles de N_2 (inerte) dans le réacteur, ce dernier contient un nombre total de moles de gaz :

$$n = (2 - 2\xi) + (1 - \xi) + 2\xi + x = 3 - \xi + x$$

Ce faisant, les pressions partielles des réactifs et produits :

$$p_{SO_2} = \frac{2(1-\xi)}{n} \times p \quad p_{O_2} = \frac{1-\xi}{n} \times p = \frac{1}{2} p_{SO_2} \quad p_{SO_3} = \frac{2\xi}{n} \times p$$

sont associées aux activités :

$$|O_2| = \frac{1-\xi}{n} \times \frac{p}{p_0} \quad |SO_2| = 2 |O_2| \quad \text{et} \quad |SO_3| = \frac{2\xi}{n} \times \frac{p}{p_0}$$

à l'origine de l'expression de la constante de l'équilibre :

$$K^0 = \frac{|SO_3|^2}{|SO_2|^2 |O_2|} = \frac{(2\xi)^2}{4(1-\xi)^3} \times \frac{np_0}{p} \quad \text{avec } p_0 = 1 \text{ bar}$$

c'est-à-dire, en exprimant p en bars :

$$K^0 p = \frac{\xi^2}{(1-\xi)^3} \times (3 - \xi + x) \quad (33)$$

À T et p fixés, $K^0 p$ demeure constant, de sorte que :

$$2 \ln \xi - 3 \ln(1 - \xi) + \ln(3 - \xi + x) = \ln(K^0 p) = \text{cte}$$

Suite aux variations élémentaires $d\xi$ et dx de ξ et de x , la différentielle de cette relation fournit :

$$\frac{2 d\xi}{\xi} + \frac{3 d\xi}{1 - \xi} - \frac{d\xi}{3 - \xi + x} + \frac{dx}{3 - \xi + x} = 0$$

d'où il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} d\xi \times \left(\frac{2}{\xi} + \frac{3}{1-\xi} - \frac{1}{3-\xi+x} \right) &= -\frac{dx}{3-\xi+x} \\ \Rightarrow d\xi \times \frac{6+2x+x\xi}{\xi(1-\xi)(3-\xi+x)} &= -\frac{dx}{3-\xi+x} \end{aligned}$$

soit encore :

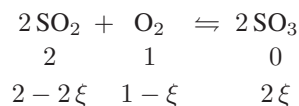
$$\frac{d\xi}{dx} = -\frac{\xi(1-\xi)}{6+2x+x\xi}$$

Or, $n_{O_2} = 1 - \xi$ devant rester positif, il s'ensuit que :

$$\frac{d\xi}{dx} < 0$$

ce qui signifie aussi qu'un ajout de gaz inerte diminue l'avancement de cette réaction.

2. En partant d'un mélange initial dans les proportions stœchiométriques :



la constante K^0 de cet équilibre vérifie l'identité (33), dans laquelle $x = 0$:

$$K^0 p = \frac{\xi^2}{(1-\xi)^3} \times (3-\xi) \Rightarrow \ln K^0 + \ln p = 2 \ln \xi - 3 \ln(1-\xi) + \ln(3-\xi)$$

Une variation de pression dp provoque une variation $d\xi$ de l'avancement (tandis que K^0 , qui ne dépend que de la température, demeure constant), telle que :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} &= \frac{2 d\xi}{\xi} + \frac{3 d\xi}{1-\xi} - \frac{d\xi}{3-\xi} = d\xi \times \frac{6}{\xi(1-\xi)(3-\xi)} \\ \Rightarrow \frac{d\xi}{dp} &= \frac{\xi(1-\xi)(3-\xi)}{6p} \end{aligned}$$

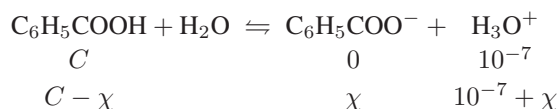
Or, le membre de droite étant positif, il s'ensuit que :

$$\frac{d\xi}{dp} > 0$$

En conclusion, l'avancement de la réaction est d'autant plus grand que la pression est élevée.

● 304 ————— Lycée Henri Wallon, Valenciennes

1. Soit χ l'avancement de la réaction de dissociation de l'acide benzoïque :



La valeur numérique du pH révèle que :

$$\begin{aligned} [\text{H}_3\text{O}^+] &= 10^{-\text{pH}} = 10^{-3,1} \simeq 7,94 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ \Rightarrow 10^{-7} + \chi &= 7,94 \cdot 10^{-4} \\ \Rightarrow \chi &= 7,94 \cdot 10^{-4} - 10^{-7} \simeq 7,94 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Aussi, l'inégalité :

$$\chi \neq C = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

suffit à montrer que la réaction n'est pas totale ; l'acide benzoïque est faible.

2. Le bilan précédent donne la composition de la solution d'acide benzoïque :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{C}_6\text{H}_5\text{COO}^-] = 7,94 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et :

$$[\text{C}_6\text{H}_5\text{COOH}] = C - \chi = 10^{-2} - 7,94 \cdot 10^{-4} = 9,21 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

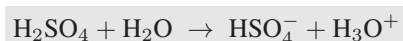
d'où l'on déduit que :

$$K_a = \frac{[\text{C}_6\text{H}_5\text{COO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{COOH}]} = \frac{(7,94 \cdot 10^{-4})^2}{9,21 \cdot 10^{-3}} \simeq 6,84 \cdot 10^{-5}$$

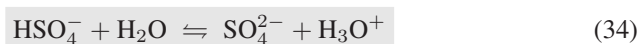
$$\Rightarrow pK_a = -\log K_a = 4,16$$

● 305 ————— Lycée Berthelot, Saint-Maur-des-Fossés

1. La première acidité de H_2SO_4 étant forte, sa dissociation est totale dans l'eau, conformément à l'équation :



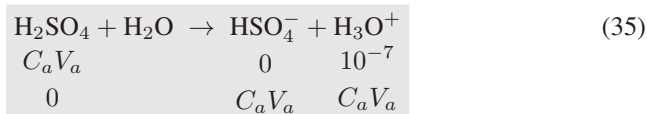
tandis que la deuxième acidité donne naissance à un équilibre :



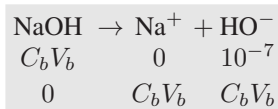
De même, la dissociation de NaOH dans l'eau est totale :



Par conséquent, ces équations conduisent aux bilans suivants :



et :



Quant à l'équilibre (34), sa constante est définie par :

$$K_1 = \frac{[\text{SO}_4^{2-}][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HSO}_4^-]} = K_a = 10^{-2} \ll 1$$

ce qui signifie également que son avancement est assez faible pour être négligé.

2. (a) Le mélange des solutions (A) et (B) met en contact les réactifs apportés par (A) et (B) : H_3O^+ , HO^- et HSO_4^- , auquel cas deux réactions acido-basiques peuvent être envisagées :



- (b) La loi d'action des masses conduit aux définitions des constantes respectives K_2 et K_3 associées à ces deux équilibres :

$$K_2 = \frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-]} = \frac{1}{K_i} \Rightarrow K_2 = 10^{14} \text{ pour } \text{H}_3\text{O}^+ + \text{HO}^- \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O}$$

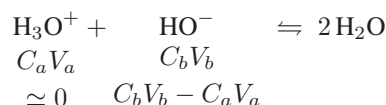
et :

$$K_3 = \frac{[\text{SO}_4^{2-}]}{[\text{HSO}_4^-] [\text{HO}^-]} = \frac{[\text{SO}_4^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HSO}_4^-] K_i} \text{ car } [\text{HO}^-] [\text{H}_3\text{O}^+] = K_i$$

$$\Rightarrow K_3 = \frac{K_a}{K_i} \Rightarrow K_3 = 10^{12} \text{ pour } \text{HSO}_4^- + \text{HO}^- \rightleftharpoons \text{SO}_4^{2-} + \text{H}_2\text{O}$$

Ces valeurs indiquent que, bien que ces réactions soient toutes les deux presque totales, la première se réalisera avant la deuxième.

(c) Le bilan de la réaction qui se produit en premier :



montre qu'il reste dans le milieu réactionnel $C_b V_b - C_a V_a$ moles d'ions HO^- susceptibles de participer à la deuxième réaction :



L'équivalence de cette réaction est atteinte lorsque :

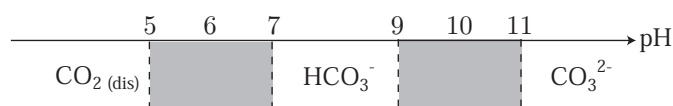
$$C_a V_a = C_b V_b - C_a V_a \Rightarrow 2 C_a V_a = C_b V_b \Rightarrow C_a = C_b \times \frac{V_b}{2 V_a}$$

Application numérique :

$$C_a = 0,1 \times \frac{20}{2 \times 100} \Rightarrow C_a = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

● 306 ————— Concours ENSTIM

1. Compte tenu des pK_a des couples $\text{CO}_2(\text{dis})/\text{HCO}_3^-$ et $\text{HCO}_3^-/\text{CO}_3^{2-}$, le diagramme de prédominance prend l'allure suivante :



2. Ce diagramme révèle qu'à $\text{pH} = 7$, le dioxyde de carbone se présente essentiellement sous forme d'ions HCO_3^- et c'est pour cette raison que la quantité d'ions CO_3^{2-} n'est pas mentionnée sur l'étiquette. Or, la masse molaire de l'ion hydrogencarbonate vaut :

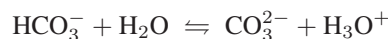
$$M_{\text{HCO}_3^-} = M_{\text{H}} + M_{\text{C}} + 3 M_{\text{O}} = 1 + 12 + 3 \times 16 = 61 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

de sorte que chaque litre l'eau, comportant une masse $m_{\text{HCO}_3^-} = 403 \cdot 10^{-3} \text{ g}$, contient également la quantité :

$$n_{\text{HCO}_3^-} = \frac{m_{\text{HCO}_3^-}}{M_{\text{HCO}_3^-}} = 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ mole d'ions } \text{HCO}_3^-$$

qui est associée à une concentration : $[\text{HCO}_3^-] = 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

De plus, l'équilibre :



a pour constante d'acidité :

$$K_{a2} = \frac{[\text{CO}_3^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HCO}_3^-]} \Rightarrow [\text{CO}_3^{2-}] = \frac{K_{a2}}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \times [\text{HCO}_3^-] \text{ avec } \text{pH} = 7$$

Application numérique :

$$[\text{CO}_3^{2-}] = \frac{10^{-10}}{10^{-7}} \times 6,6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow [\text{CO}_3^{2-}] = 6,6 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Ce résultat révèle que chaque litre d'eau contient $n_{\text{CO}_3^{2-}} = 6,6 \cdot 10^{-6}$ mole d'ions CO_3^{2-} , de masse molaire :

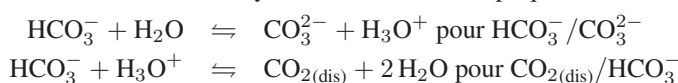
$$M_{\text{CO}_3^{2-}} = M_{\text{C}} + 3 M_{\text{O}} = 12 + 3 \times 16 = 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

c'est-à-dire une masse :

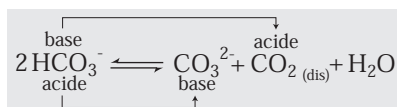
$$m_{\text{CO}_3^{2-}} = n_{\text{CO}_3^{2-}} \times M_{\text{CO}_3^{2-}} = 6,6 \cdot 10^{-6} \times 60 \Rightarrow m_{\text{CO}_3^{2-}} = 0,4 \text{ mg/L}$$

Une valeur aussi faible justifie l'absence d'indication, sur l'étiquette, concernant la quantité d'ions CO_3^{2-} , négligeable devant toutes les autres.

3. Les couples acides-bases du dioxyde de carbone sont impliqués dans les équilibres :

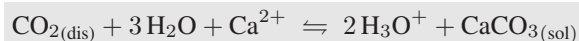


ce qui montre le caractère acide et basique de l'ion HCO_3^- :



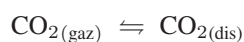
Une espèce qui présente simultanément ces caractères acide et basique est appelée un *ampholyte*.

4. • Pour survivre, les cyanobactéries se développent dans les milieux riches en CO_2 dissous. Si des ions Ca^{2+} sont également présents dans de tels milieux, il peut se produire la réaction d'équation :



à l'issue de laquelle du calcaire $\text{CaCO}_{3(\text{sol})}$ est formé ; des dépôts calcaires sont observés dans les milieux où ont vécu de nombreuses cyanobactéries.

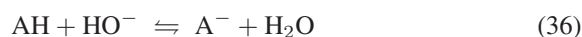
- Lorsque la réaction précédente se produit, $\text{CO}_{2(\text{dis})}$ disparaît au profit des dépôts solides de $\text{CaCO}_{3(\text{sol})}$, ce qui favorise la réaction de dissolution de $\text{CO}_{2(\text{gaz})}$:



provoquant de fait la raréfaction de l'atmosphère en CO_2 , au demeurant accentuée par le métabolisme des cyanobactéries qui convertissent CO_2 en O_2 .

● 307 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. (a) La réaction d'équation-bilan :



a pour constante :

$$K_1 = \frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}] [\text{HO}^-]} = \frac{[\text{A}^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}] K_i} = \frac{K_a}{K_i}$$

où $K_i = [\text{H}_3\text{O}^+] [\text{HO}^-] = 10^{-14}$ désigne le produit ionique de l'eau. Aussi :

$$K_1 = \frac{10^{-pK_a}}{10^{-14}} = 10^{14-pK_a}$$

et où :

$$pK_a < 7 \Rightarrow K_1 > 10^7 \text{ pour } \text{AH} + \text{HO}^- \rightleftharpoons \text{A}^- + \text{H}_2\text{O}$$

La valeur numérique de cette constante montre que si les réactifs sont mis en contact, cette réaction est presque totale.

En revanche, la constante de l'équilibre : $\text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{A}^- + \text{H}_3\text{O}^+$ s'identifie à K_a :

$$K_a < 10^{-3} \text{ pour } \text{AH} + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{A}^- + \text{H}_3\text{O}^+$$

La comparaison des constantes K_1 et K_a révèle que la réaction de AH avec HO^- peut être considérée comme totale et seule à se produire.

(b) En mélangeant 100 mL d'une solution de AH à $C_1 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ avec 1 mL d'une solution de soude ($\text{Na}^+ + \text{HO}^-$) à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, on réalise un mélange de composition :

$$n_1 = 100 \cdot 10^{-3} \times 10^{-2} = 10^{-3} \text{ mole de AH}$$

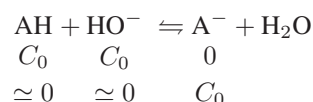
et :

$$n'_1 = 1 \cdot 10^{-3} \times 1 = 10^{-3} \text{ mole de HO}^-$$

c'est-à-dire de concentrations initiales :

$$[\text{AH}]_0 = [\text{HO}^-]_0 = C_0 = \frac{10^{-3}}{101 \cdot 10^{-3}} = 9,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Compte tenu des résultats de la question précédente, seule la réaction d'équation (36) peut se produire, avec pour bilan :



d'où l'on déduit que :

$$[\text{A}^-] = C_0 = 9,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 9,9 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

Quant aux ions Na^+ introduits en même temps que HO^- ($n'_1 = 10^{-3}$ mole), leur concentration dans le mélange de volume 101 mL vaut :

$$[\text{Na}^+] = \frac{10^{-3}}{101 \cdot 10^{-3}} = 9,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 9,9 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} = C_0$$

Enfin, la valeur numérique de pH_1 indique que :

$$h = [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow h = 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

et :

$$\begin{aligned} [\text{HO}^-] [\text{H}_3\text{O}^+] &= K_i \Rightarrow [\text{HO}^-] = oh = \frac{10^{-14}}{10^{-9}} = 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ &\Rightarrow oh = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

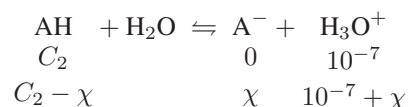
Par conséquent, les espèces ioniques présentes en solution (A^- , Na^+ , H_3O^+ , et HO^-) sont à l'origine de la conductivité mesurée :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \lambda_{\text{A}^-} [\text{A}^-] + \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+] + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} [\text{H}_3\text{O}^+] + \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}^-] \\ &= \lambda_{\text{A}^-} C_0 + \lambda_{\text{Na}^+} C_0 + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} h + \lambda_{\text{HO}^-} oh \\ &\Rightarrow \lambda_{\text{A}^-} = \frac{\sigma_1 - \lambda_{\text{Na}^+} C_0 - \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} h - \lambda_{\text{HO}^-} oh}{C_0} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{A}^-} &= \frac{80 \cdot 10^{-3} - 50 \cdot 10^{-4} \times 9,9 - 350 \cdot 10^{-4} \times 10^{-6} - 200 \cdot 10^{-4} \times 10^{-2}}{9,9} \\ &\Rightarrow \lambda_{\text{A}^-} = 3,06 \cdot 10^{-3} \text{ S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

2. La mise en solution de AH se traduit par l'équation-bilan suivante :



où l'on peut admettre qu'en milieu acide (mise en solution de l'acide AH) :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \gg 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow \chi \gg 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow \chi + 10^{-7} \simeq \chi \text{ et } [\text{HO}^-] \simeq 0$$

Dans ces conditions, la conductivité σ_2 provient de l'existence des ions A^- et H_3O^+ :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \lambda_{\text{A}^-} [\text{A}^-] + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} [\text{H}_3\text{O}^+] = (\lambda_{\text{A}^-} + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+}) \times \chi \\ &\Rightarrow \chi = \frac{\sigma_2}{\lambda_{\text{A}^-} + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+}} = \frac{3,8 \cdot 10^{-3}}{3,06 \cdot 10^{-3} + 350 \cdot 10^{-4}} \\ &\Rightarrow \chi = 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

Non seulement cette valeur confirme les hypothèses selon lesquelles :

$$\chi \gg 10^{-7} \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] \simeq \chi \text{ et } [\text{HO}^-] = \frac{K_i}{\chi} = 10^{-10} \ll 1$$

mais elle fournit également la composition du milieu réactionnel :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{A}^-] = \chi = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et :

$$[\text{AH}] = C_2 - \chi = 10^{-2} - 10^{-4} = 9,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

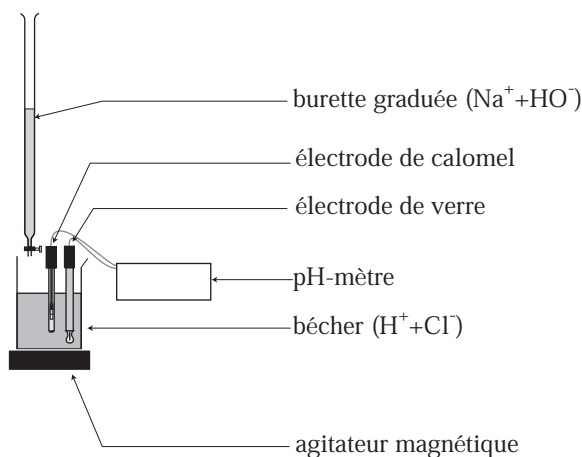
d'où découle la valeur de la constante d'acidité du couple AH/A^- :

$$K_a = \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]} = \frac{(10^{-4})^2}{9,9 \cdot 10^{-3}} = 1,01 \cdot 10^{-6} \Rightarrow pK_a = 6$$

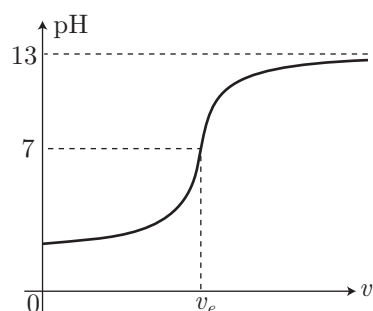
● 308 ————— Concours Centrale-Supélec

1. (a) Pour réaliser le dosage on verse, à l'aide d'une pipette jaugée, 20 mL d'acide bromhydrique dans un bécher de 100 mL, complété avec de l'eau distillée (le volume de liquide doit être suffisant pour assurer l'immersion des électrodes de mesure du pH). Un barreau aimanté est introduit dans le bécher ainsi préparé, dans lequel sont également plongées une électrode de verre (mesure du pH) et une électrode de référence au calomel. Ces électrodes sont électriquement reliées à un pH-mètre, tandis qu'un agitateur magnétique homogénéise la solution contenue dans le bécher.

La solution d'hydroxyde de sodium est alors introduite dans une burette graduée, d'où sont versés des incréments de 1 mL dans le bécher, à l'issue desquels est effectuée une mesure du pH.

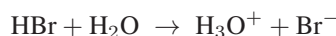


- (b) Initialement, le pH de la solution dans le bécher est faible (solution d'acide bromhydrique), mais ce pH croît au fur et à mesure qu'est introduite la soude. À l'équivalence (qui se produit pour un volume v_e voisin de 20 mL si la solution d'acide présente une concentration initiale de l'ordre de $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$), un saut permet au pH de prendre la valeur $\text{pH} = 7$. Ce pH croît ensuite jusqu'à une valeur asymptotique $\text{pH} = 13$ (qui correspond à celui de la soude à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$).



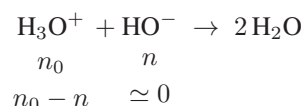
2. Dosage conductimétrique

- (a) Soit C_0 la concentration initiale d'acide bromhydrique qui contient initialement $n_0 = C_0 v_0$ moles d'ions H_3O^+ , issus de la dissociation totale :



À cette solution sont ajoutées $n = Cv$ moles d'ions HO^- ($C = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) et d'ions Na^+ . Deux cas doivent être distingués au cours du dosage :

- Avant l'équivalence, la composition du mélange est donnée par le bilan de la réaction :



Par suite, dans ce volume $v + v_0$ sont contenues $n_0 - n$ moles d'ions H_3O^+ , $C_0 v_0$ moles d'ions Br^- et Cv moles d'ions Na^+ , auxquelles correspondent les concentrations :

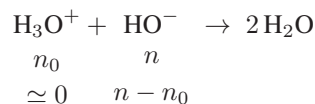
$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{n_0 - n}{v + v_0} = \frac{C_0 v_0 - Cv}{v + v_0} \quad [\text{Br}^-] = \frac{C_0 v_0}{v + v_0} \quad [\text{Na}^+] = \frac{Cv}{v + v_0}$$

Ce faisant, la conductivité de la solution prend la valeur :

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} [\text{H}_3\text{O}^+] + \lambda_{\text{Br}^-} [\text{Br}^-] + \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+] \\ &= \frac{1}{v + v_0} [\lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} (C_0 v_0 - Cv) + \lambda_{\text{Br}^-} C_0 v_0 + \lambda_{\text{Na}^+} Cv] \\ \Rightarrow & (v + v_0) \times \sigma = C_0 v_0 (\lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} + \lambda_{\text{Br}^-}) + C (\lambda_{\text{Na}^+} - \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+}) \times v \end{aligned}$$

Aussi, la courbe correspondant à $(v + v_0) \times \sigma$ en fonction de v est une droite de coefficient directeur $b = C (\lambda_{\text{Na}^+} - \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+})$ négatif car $\lambda_{\text{Na}^+} < \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+}$.

- Après l'équivalence, le bilan de la réaction :



permet de donner la composition du milieu réactionnel, de volume $v + v_0$:

$$[\text{HO}^-] = \frac{n - n_0}{v + v_0} = \frac{Cv - C_0 v_0}{v + v_0} \quad [\text{Br}^-] = \frac{C_0 v_0}{v + v_0} \quad [\text{Na}^+] = \frac{Cv}{v + v_0}$$

Aussi, la conductivité σ du mélange vaut :

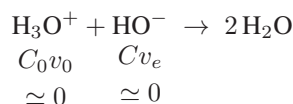
$$\begin{aligned}\sigma &= \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}^-] + \lambda_{\text{Br}^-} [\text{Br}^-] + \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+] \\ &= \frac{1}{v + v_0} [\lambda_{\text{HO}^-} (Cv - C_0v_0) + \lambda_{\text{Br}^-} C_0v_0 + \lambda_{\text{Na}^+} Cv] \\ \Rightarrow & (v + v_0) \times \sigma = C_0v_0 (\lambda_{\text{Br}^-} - \lambda_{\text{HO}^-}) + C (\lambda_{\text{HO}^-} + \lambda_{\text{Na}^+}) \times v\end{aligned}$$

que l'on peut également présenter sous la forme :

$$(v + v_0) \times \sigma = a' + b' \times v \text{ avec } b' = C (\lambda_{\text{HO}^-} + \lambda_{\text{Na}^+})$$

Par suite, la représentation graphique de $(v + v_0) \times \sigma = f(v)$ est une droite de coefficient directeur $b' > 0$.

- (b) De ce qui précède, il ressort que l'équivalence est repérée par un changement de pente des droites $(v + v_0) \times \sigma = f(v)$, ce qui se produit pour un volume $v = v_e = 9 \text{ mL}$. Or, à l'équivalence, la totalité des ions HO^- réagit sur la totalité des ions H_3O^+ :



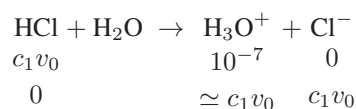
ce qui signifie aussi que :

$$C_0v_0 = Cv_e \Rightarrow C_0 = C \times \frac{v_e}{v_0} = 0,1 \times \frac{9}{20} \Rightarrow C_0 = 0,045 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

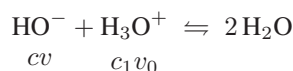
● 309 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. L'hydroxyde de sodium contient des ions HO^- et Na^+ en solution aqueuse, qui peuvent rencontrer des espèces acides présentes dans la solution à doser.

- Dans l'eau, HCl se dissocie totalement :



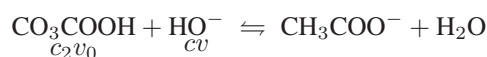
Aussi, les ions HO^- peuvent réagir avec les ions H_3O^+ ainsi libérés :



avec une constante d'équilibre :

$$K_1 = \frac{1}{[\text{HO}^-] [\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{1}{K_i} = 10^{14}$$

- En revanche, l'acide éthanóique étant faible, et en milieu acide, il libère peu d'ions H_3O^+ . C'est pourquoi l'espèce CH_3COOH est prédominante et est donc susceptible de réagir avec les ions HO^- introduits :



la constante de cet équilibre vaut :

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]}{[\text{CH}_3\text{COOH}][\text{HO}^-]} = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}] \times K_i} \text{ car } K_i = [\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-] \\ &= \frac{K_a}{K_i} = \frac{10^{-4,8}}{10^{-14}} \Rightarrow K_2 = 1,6 \cdot 10^9 \end{aligned}$$

Ces calculs révèlent que $K_1 \gg K_2$, ce qui signifie aussi que l'acide chlorhydrique sera dosé avant l'acide éthanóïque.

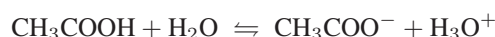
2. Recherchons préalablement le volume d'équivalence correspondant au dosage de l'acide chlorhydrique. Celui-ci est neutralisé pour un volume v_1 de soude versée tel que :

$$cv_1 = c_1v_0 \Rightarrow v_1 = \frac{c_1}{c} \times v_0 = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{10^{-1}} \times 10 \Rightarrow v_1 = 5 \text{ mL} \quad (37)$$

- (a) Lorsque $v = 0$ mL, si seul l'acide chlorhydrique était présent en solution, il libérerait $c_1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ions H_3O^+ , ce qui correspondrait à :

$$\text{pH} = -\log c_1 = 1,3$$

Or, une telle valeur de $\text{pH} < pK_a - 1 = 3,8$ correspond à un domaine où CH_3COOH est prédominant ; l'acide éthanóïque se dissocie peu selon l'équation :



et c'est pourquoi seul l'acide chlorhydrique participe au pH de la solution.



Un calcul plus précis consiste à admettre que la relation : $\text{pH} \simeq 1,3 < 3,8$ permet de simplifier la loi de conservation de l'élément carbone :

$$c_2 = [\text{CO}_3\text{COOH}] + [\text{CH}_3\text{COO}^-] \simeq [\text{CH}_3\text{COOH}]$$

conduisant à écrire la constante d'acidité K_a de cet acide sous la forme :

$$K_a = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]} = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-]h}{c_2} \text{ avec } h = [\text{H}_3\text{O}^+] \quad (38)$$

En outre, la neutralité électrique de la solution impose :

$$[\text{Cl}^-] + [\text{CH}_3\text{COO}^-] + [\text{HO}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+]$$

où $[\text{Cl}^-] = c_1$ et $[\text{HO}^-]$ est négligeable devant $[\text{Cl}^-]$ (car $\text{pH} < 7$). Aussi :

$$c_1 + [\text{CH}_3\text{COO}^-] = h \Rightarrow [\text{CH}_3\text{COO}^-] = h - c_1$$

de sorte que l'équation (38) devient :

$$K_a = \frac{h^2 - c_1h}{c_2} \Rightarrow h^2 - c_1h - K_a c_2 = 0$$

Le discriminant de cette équation du second degré :

$$\Delta = c_1^2 + 4K_a c_2 > 0$$

gène deux solutions réelles :

$$h = \frac{c_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

dont seule la positive peut s'identifier à la concentration $h = [\text{H}_3\text{O}^+]$:

$$\begin{aligned} h &= \frac{c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4K_a c_2}}{2} = \frac{5 \cdot 10^{-2} + \sqrt{25 \cdot 10^{-4} + 4 \times 10^{-4,8} \times 0,1}}{2} \\ \Rightarrow h &= [\text{H}_3\text{O}^+] = 5,003 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ \Rightarrow \text{pH} &= 1,3 \end{aligned}$$

Ce résultat confirme celui obtenu en négligeant l'influence de l'acide éthanoïque, sans réellement apporter d'amélioration dans ce résultat.

- (b) Conformément au résultat (37), lorsque $v = 5 \text{ mL} = v_1$, l'acide chlorhydrique est totalement neutralisé, si bien que la solution est assimilée à une solution d'acide éthanoïque, de concentration :

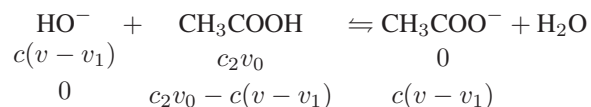
$$c'_2 = \frac{c_2 v_0}{v_1 + v_0} = \frac{0,1 \times 10}{5 + 10} = 6,67 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

dont le pH est donné directement par :

$$\text{pH} = \frac{1}{2} (pK_a - \log c'_2) = \frac{4,8 - \log(6,67 \cdot 10^{-2})}{2} \Rightarrow \text{pH} = 3$$

La condition $\text{pH} < pK_a - 1$ étant vérifiée, elle valide *a posteriori* ce résultat.

- (c) Lorsque $v = 10 \text{ mL}$, l'équation-bilan de la réaction de dosage de l'acide éthanoïque s'écrit :



Compte tenu de la valeur de la constante de cet équilibre ($K_2 = 1,6 \cdot 10^9 \gg 1$), cette réaction est presque totale, ce qui fournit la composition du milieu réactionnel :

$$\begin{aligned} [\text{CH}_3\text{COOH}] &= \frac{c_2 v_0 - c(v - v_1)}{v + v_0} = \frac{0,1 \times 10 - 0,1 \times (10 - 5)}{10 + 10} \\ &= 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

et :

$$[\text{CH}_3\text{COO}^-] = \frac{c(v - v_1)}{v + v_0} = \frac{0,1 \times (10 - 5)}{10 + 10} = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

La solution contient par conséquent CH_3COOH et sa base conjuguée CH_3COO^- en même quantité, auquel cas il s'agit d'une solution tampon pour laquelle : $\text{pH} = pK_a = 4,8$

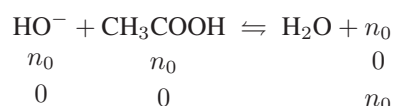
- (d) Lorsque $v = 15$ mL, la quantité d'ions HO^- disponibles pour neutraliser CH_3COOH vaut :

$$n_0 = c(v - v_1) = 0,1 \times (15 \cdot 10^{-3} - 5 \cdot 10^{-3}) = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

tandis que la quantité initiale de CH_3COOH valait :

$$n_{\text{CH}_3\text{COOH}} = c_2 v_0 = 0,1 \times 10 \cdot 10^{-3} = 10^{-3} \text{ mole} = n_0$$

Par conséquent, $v = 15$ mL correspond à l'équivalence de l'acide éthanóïque :



Elle se comporte alors comme une solution de base faible (CH_3COO^-) de concentration :

$$c_2'' = \frac{n_0}{v + v_0} = \frac{10^{-3}}{15 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

dont le pH vaut par conséquent :

$$\text{pH} = 7 + \frac{1}{2} (pK_a + \log c_2'') = 7 + \frac{4,8 + \log(0,04)}{2} \Rightarrow \text{pH} = 8,7$$

La condition $\text{pH} > pK_a + 1 = 5,8$ valide du reste ce résultat.

- (e) En versant $v = 20$ mL de solution de soude, il a été introduit dans le milieu réactionnel :

$$N = cv = 10^{-1} \times 20 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mole d'ions } \text{HO}^-$$

parmi lesquels n_1 ont permis la neutralisation de l'acide chlorhydrique :

$$n_1 = c_1 v_0 = 5 \cdot 10^{-2} \times 10 \cdot 10^{-3} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ mole}$$

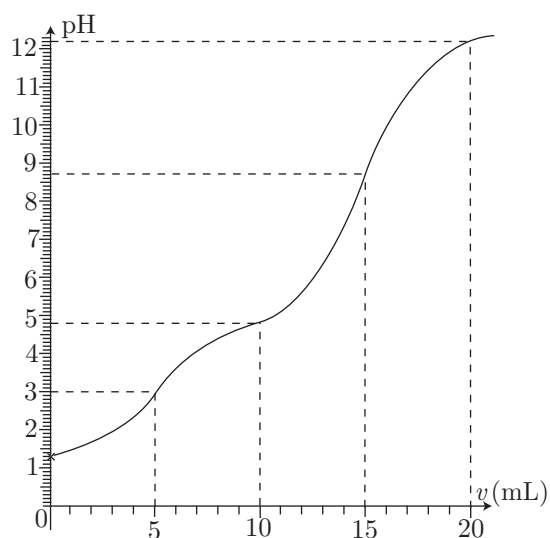
et $n_2 = n_0 = 10^{-3}$ mole a permis la neutralisation de l'acide éthanóïque. Par suite, il reste dans le milieu des ions HO^- à la concentration :

$$\begin{aligned} [\text{HO}^-] &= \frac{N - n_1 - n_2}{v + v_0} \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-3} - 1,5 \cdot 10^{-3}}{20 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3}} \\ &= 1,67 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

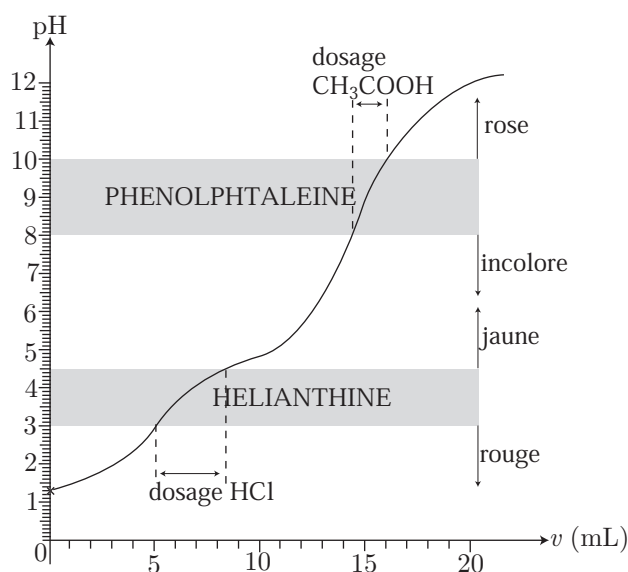
qui correspond à :

$$\text{pH} = 14 + \log [\text{HO}^-] \Rightarrow \text{pH} = 12,2$$

3. Les résultats précédents conduisent à la courbe de dosage représentée ci-dessous :



4. Représentons, sur un même schéma, la courbe de dosage et les domaines de virage des indicateurs colorés mentionnés dans l'énoncé :



Cette figure montre que l'introduction d'hélianthine et de phénolphtaléine dans la solution acide permet le dosage du mélange :

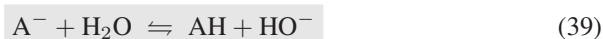
- l'équivalence de l'acide chlorhydrique est repérée par le changement de couleur de l'hélianthine qui vire du rouge au jaune ;
- l'équivalence de l'acide éthanóique est repérée par le virage de l'incolore au rose fuchsia de la phénolphtaléine. Par suite, vers 15 mL, le milieu passe du jaune au rose fuchsia.

● **310** _____ **Université Paris-Sud-Orsay**

1. La solution A est obtenue par la mise en solution de ANa, totalement dissocié :



les ions A^- réagissant ensuite avec l'eau :



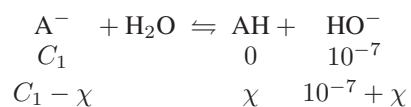
2. La masse molaire du benzoate de sodium $\text{C}_6\text{H}_5\text{COONa}$ vaut :

$$\begin{aligned} M_1 &= 7 M_C + 5 M_H + 2 M_O + M_{\text{Na}} \\ &= 7 \times 12 + 5 \times 1 + 2 \times 16 + 23 = 144 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

auquel cas une masse $m_1 = 72 \text{ g}$ correspond à :

$$N_1 = \frac{m_1}{M_1} = 0,5 \text{ mole de ANa}$$

dans un litre d'eau. La concentration correspondante : $C_1 = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ permet de décrire l'avancement de la réaction (39) :



avec une constante :

$$K_1 = \frac{[\text{AH}][\text{HO}^-]}{[\text{A}^-]} = \frac{[\text{AH}]}{[\text{A}^-]} \frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_i}{K_a} = 10^{-14+4,8} = 10^{-9,2}$$

dont la valeur numérique suggère que $\chi \ll C_1$, auquel cas :

$$[\text{A}^-] \simeq C_1 = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En outre, la solution est basique, ce qui amène à supposer que :

$$\chi \gg 10^{-7} \Rightarrow [\text{HO}^-] \simeq \chi \text{ si } \text{pH} \geq 8$$

Ce faisant, la constante K_1 se simplifie :

$$K_1 = \frac{[\text{AH}][\text{HO}^-]}{[\text{A}^-]} = \frac{\chi^2}{C_1} \Rightarrow \chi = \sqrt{C_1 \times K_1} = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

La composition du milieu réactionnel est dès lors connue :

$$[\text{AH}] = [\text{HO}^-] = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{K_i}{[\text{HO}^-]} = 5,6 \cdot 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

d'où découle la valeur du pH :

$$\text{pH} = -\log [\text{H}_3\text{O}^+] \Rightarrow \text{pH} = 9,2$$

Cette valeur justifie *a posteriori* les hypothèses de calcul :

- $\chi = 1,8 \cdot 10^{-5} \gg 10^{-7} \Rightarrow \chi + 10^{-7} \simeq \chi \Rightarrow [\text{HO}^-] \simeq \chi$;
- $\text{pH} > \text{p}K_a + 1 = 5,8 \Rightarrow [\text{A}^-] \gg [\text{AH}] \Rightarrow C_1 \gg \chi$.

3. La masse molaire de l'acide benzoïque $\text{C}_6\text{H}_5\text{COOH}$ valant :

$$M_2 = 7 M_C + 6 M_H + 2 M_O = 7 \times 12 + 6 \times 1 + 2 \times 16 = 122 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

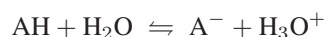
une masse $m_2 = 12,2 \text{ g}$ de cet acide correspond à :

$$n_2 = \frac{m_2}{M_2} = \frac{12,2}{122} = 0,1 \text{ mole}$$

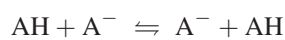
dans un volume de 1 litre. La concentration initiale de AH vaut donc :

$$C_2 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Étant donné que l'acide AH est faible, on peut négliger la dissociation de AH selon la réaction :



si bien que la seule réaction éventuelle entre A^- et AH serait représentée par l'équation :



qui ne modifie pas la composition du mélange :

$$[\text{AH}] = c_2 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ et } [\text{A}^-] = c_1 = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Aussi, la définition de K_a :

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{[\text{A}^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]} \Rightarrow \log K_a = \log \left(\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \right) + \log [\text{H}_3\text{O}^+] \\ &\Rightarrow -\text{p}K_a = \log \left(\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \right) - \text{pH} \end{aligned}$$

conduit à la relation de Henderson :

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \left(\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \right) \quad (40)$$

d'où se déduit la valeur du pH du milieu :

$$\text{pH}_1 = 4,8 + \log \left(\frac{0,5}{0,1} \right) \Rightarrow \text{pH}_1 = 5,5$$

4. Dans un échantillon ($V = 100 \text{ mL}$) de solution B sont contenues :

$$n_a = c_2 \times V = 0,1 \times 0,1 = 10^{-2} \text{ mole de AH}$$

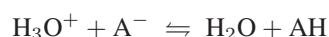
et :

$$n_b = c_1 \times V = 0,5 \times 0,1 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ mole de } A^-$$

tandis que $v_0 = 10 \text{ mL}$ de solution d'acide chlorhydrique ($H_3O^+ + Cl^-$), à la concentration $c_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot L^{-1}$, contient :

$$n_0 = c_0 \times V_0 = 0,1 \times 10 \cdot 10^{-3} = 10^{-3} \text{ mole d'ions } H_3O^+.$$

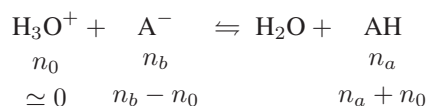
Dans la solution B (contenant l'acide AH et la base A^-), les ions H_3O^+ peuvent réagir avec A^- , selon l'équation-bilan :



dont la constante :

$$K_2 = \frac{[AH]}{[H_3O^+][A^-]} = \frac{1}{K_a} = 10^{4,8}$$

justifie que la réaction soit considérée comme totale :



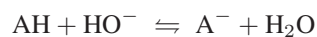
Aussi, dans le volume $V_0 + V = 110 \text{ mL}$ se trouvent A^- et AH aux concentrations :

$$[A^-] = \frac{n_b - n_0}{V_0 + V} \text{ et } [AH] = \frac{n_a + n_0}{V_0 + V}$$

Par suite, la relation (40) fournit :

$$\begin{aligned} \text{pH} &= pK_a + \log \left(\frac{[A^-]}{[AH]} \right) = pK_a + \log \left(\frac{n_b - n_0}{n_a + n_0} \right) \\ &= 4,8 + \log \left(\frac{5 \cdot 10^{-2} - 10^{-3}}{10^{-2} + 10^{-3}} \right) \\ &\Rightarrow \text{pH}_2 = 5,4 \end{aligned}$$

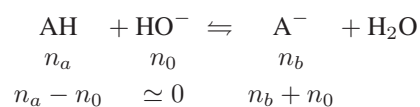
5. En revanche, l'introduction de $n_0 = c_0 V_0 = 10^{-3}$ mole d'ions HO^- (contenus dans la solution d'hydroxyde de sodium) permet la réaction de l'acide AH :



dont la constante d'équilibre :

$$K_3 = \frac{[A^-]}{[AH][HO^-]} = \frac{1}{K_1} = 10^{9,2}$$

montre que cette réaction est presque totale :



Les concentrations de AH et A^- :

$$[AH] = \frac{n_a - n_0}{V + V_0} \text{ et } [A^-] = \frac{n_b + n_0}{V + V_0}$$

associées à la loi (40), conduisent à :

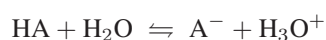
$$\begin{aligned} \text{pH}_3 &= \text{p}K_a + \log \left(\frac{[A^-]}{[AH]} \right) = \text{p}K_a + \log \left(\frac{n_b + n_0}{n_a - n_0} \right) \\ &= 4,8 + \log \left(\frac{5 \cdot 10^{-2} + 10^{-3}}{10^{-2} - 10^{-3}} \right) \\ &\Rightarrow \text{pH}_3 = 5,5 \end{aligned}$$

6. La solution B, constituée des deux composantes du couple AH/ A^- , est une solution tampon dont les propriétés sont illustrées par les valeurs de pH_1 , pH_2 et pH_3 :

- le pH est peu sensible à la dilution (ici d'un facteur $\frac{100}{110} = 0,91$);
- le pH varie peu à l'issue d'un ajout d'un acide fort ($\text{pH}_1 \simeq \text{pH}_2$) ou d'une base forte ($\text{pH}_1 \simeq \text{pH}_3$).

● 311 ————— Lycée Henri Wallon, Valenciennes

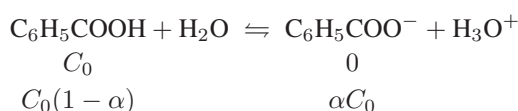
1. En appelant $[\text{HA}]_{\text{dis}}$ la quantité d'acide HA dissocié dans l'eau selon l'équation :



il apparaît que $[\text{HA}]_{\text{dis}} = [A^-]$. C'est ainsi que le coefficient de dissociation α est défini, à partir de la concentration initiale d'acide C_0 :

$$\alpha = \frac{[\text{HA}]_{\text{dis}}}{C_0} = \frac{[A^-]}{C_0} \Rightarrow [A^-] = \alpha C_0$$

Dans le cas de l'acide benzoïque, l'équation-bilan :



permet d'exprimer la constante d'acidité :

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{[\text{C}_6\text{H}_5\text{COO}^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{C}_6\text{H}_5\text{COOH}]} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} [\text{H}_3\text{O}^+] \\ &\Rightarrow \frac{1 - \alpha}{\alpha} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a} = \frac{K_a + [\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a} \\ &\Rightarrow \alpha = \frac{K_a}{K_a + [\text{H}_3\text{O}^+]} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\alpha = \frac{10^{-4,2}}{10^{-4,2} + 10^{-2,5}} \Rightarrow \alpha = 0,02$$

2. Les constantes d'acidité des couples $\text{H}_2\text{A}/\text{HA}^-$ et $\text{HA}^-/\text{A}^{2-}$ sont définies par :

$$K_1 = \frac{[\text{HA}^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_2\text{A}]} \Rightarrow [\text{H}_2\text{A}] = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_1} [\text{HA}^-] = \frac{h}{K_1} [\text{HA}^-]$$

et :

$$K_2 = \frac{[\text{A}^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HA}^-]} \Rightarrow [\text{A}^{2-}] = \frac{K_2}{[\text{H}_3\text{O}^+]} [\text{HA}^-] = \frac{K_2}{h} [\text{HA}^-]$$

tandis que la conservation de l'espèce A impose :

$$C_0 = [\text{H}_2\text{A}] + [\text{HA}^-] + [\text{A}^{2-}] = [\text{HA}^-] \times \left(\frac{h}{K_1} + 1 + \frac{K_2}{h} \right)$$

où :

$$\alpha_1 = \frac{[\text{HA}^-]}{C_0} \Rightarrow [\text{HA}^-] = \alpha_1 C_0 \Rightarrow C_0 = \alpha_1 C_0 \left(\frac{h}{K_1} + 1 + \frac{K_2}{h} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{\frac{h}{K_1} + 1 + \frac{K_2}{h}}$$

En posant : $[\text{A}^{2-}] = \alpha_2 C_0$ et $[\text{HA}^-] = \alpha_1 C_0$, la définition de K_2 conduit à :

$$\alpha_2 C_0 = \frac{K_2}{h} \times \alpha_1 C_0 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{\frac{h}{K_2}} = \frac{1}{\frac{h}{K_2} \left(\frac{h}{K_1} + 1 + \frac{K_2}{h} \right)}$$

$$\Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{\frac{h^2}{K_1 K_2} + \frac{h}{K_2} + 1}$$

3. (a) En prenant $pK_1 = 6,4 \Rightarrow K_1 = 10^{-6,4}$ et $pK_2 = 10,4 \Rightarrow K_2 = 10^{-10,4}$, il convient de calculer α_1 et α_2 pour $\text{pH} = pK_1 \pm 1$ (c'est-à-dire $\text{pH} = 5,4$ et $\text{pH} = 7,4$) et pour $\text{pH} = pK_2 \pm 1$ (soit : $\text{pH} = 9,4$ et $\text{pH} = 11,4$) de même pour $\text{pH} = pK_1 \pm 0,5$ ($\text{pH} = 5,9$ et $\text{pH} = 6,9$) et enfin pour $\text{pH} = pK_2 \pm 0,5$ ($\text{pH} = 9,9$ et $\text{pH} = 10,9$) :

pH	5,4	5,9	6,9	7,4	9,4	9,9	10,9	11,4
α_1	0,09	0,24	0,76	0,91	0,91	0,76	0,24	0,09
α_2	$9,1 \cdot 10^{-7}$	$7,6 \cdot 10^{-6}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$9,1 \cdot 10^{-4}$	0,09	0,24	0,76	0,91

(b) Les expressions de α_1 et α_2 permettent de calculer :

$$\begin{aligned} \ln \alpha_1 &= -\ln \left(\frac{h}{K_1} + 1 + \frac{K_2}{h} \right) \Rightarrow \frac{1}{\alpha_1} \frac{d\alpha_1}{dh} = \left(-\frac{1}{K_1} + \frac{K_2}{h^2} \right) \alpha_1 \\ &\Rightarrow \frac{d\alpha_1}{dh} = \frac{K_1 K_2 - h^2}{K_1 h^2} \alpha_1^2 \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \ln \alpha_2 &= -\ln \left(1 + \frac{h}{K_2} + \frac{h^2}{K_1 K_2} \right) \Rightarrow \frac{1}{\alpha_2} \frac{d\alpha_2}{dh} = - \left(\frac{1}{K_2} + \frac{2h}{K_1 K_2} \right) \alpha_2 \\ &\Rightarrow \frac{d\alpha_2}{dh} = -\frac{K_1 + 2h}{K_1 K_2} \alpha_2^2 \end{aligned}$$

avec :

$$\text{pH} = -\log h = -\frac{\ln h}{\ln 10} \Rightarrow d \text{pH} = -\frac{1}{\ln 10} \frac{dh}{h}$$

C'est pourquoi :

$$\frac{d\alpha_1}{d \text{pH}} = -h \ln 10 \frac{d\alpha_1}{dh} \Rightarrow \frac{d\alpha_1}{d \text{pH}} = \frac{h^2 - K_1 K_2}{K_1 h} \times \alpha_1^2 \ln 10$$

et :

$$\frac{d\alpha_2}{d \text{pH}} = -h \ln 10 \frac{d\alpha_2}{dh} \Rightarrow \frac{d\alpha_2}{d \text{pH}} = \frac{K_1 + 2h}{K_1 K_2} \times h \alpha_2^2 \ln 10$$

Ces expressions montrent que :

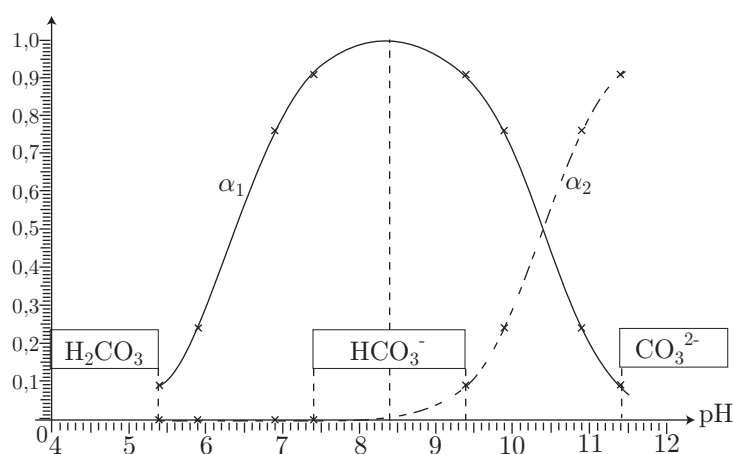
- la dérivée $\frac{d\alpha_1}{d \text{pH}}$ s'annule pour :

$$h_0 = \sqrt{K_1 K_2} \Rightarrow \text{pH}_0 = \frac{pK_1 + pK_2}{2} = 8,4$$

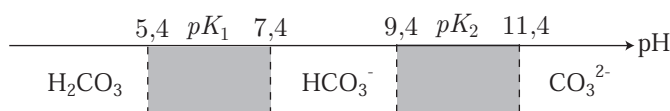
ce qui montre que α_1 admet un *maximum* pour $\text{pH} = 8,4$.

- la dérivée $\frac{d\alpha_2}{d \text{pH}}$ est toujours positive, en conséquence de quoi la courbe représentative de $\alpha_2(\text{pH})$ est monotone croissante.

En associant ces résultats à ceux du tableau précédent, on obtient l'allure des courbes décrivant α_1 et α_2 en fonction du pH :



(c) Le diagramme de prédominance des espèces carbonatées :



a permis de placer, sur le graphique, les espèces prédominantes.

(d) Avec $\text{pH} = 7,4$, le sang contient essentiellement l'ion HCO_3^- . En outre :

$$K_1 = \frac{[\text{HCO}_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} \Rightarrow \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} = \frac{K_1}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-6,4}}{10^{-7,4}}$$

$$\Rightarrow \frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} = 10$$

● 312 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. Dans le système international d'unités, les conductivités molaires ioniques λ_i s'expriment en $\text{S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$, tandis que les concentrations molaires volumiques c_i sont exprimées en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$. C'est pourquoi :

$$\sigma = \sum_i \lambda_i c_i \Rightarrow [\sigma] = [\lambda_i] \times [c_i] = \text{S} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\Rightarrow [\sigma] = \text{S} \cdot \text{m}^{-1}$$

2. En solution aqueuse, NaOH et NH_4Cl sont totalement dissociés :



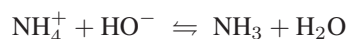
tandis que l'autoprotolyse de l'eau libère des ions H_3O^+ et HO^- :



Aussi, la présence des ions Na^+ , Cl^- , HO^- , H_3O^+ et NH_4^+ est à l'origine de la conductivité de la solution :

$$\sigma = \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+] + \lambda_{\text{Cl}^-} [\text{Cl}^-] + \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}^-] + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} [\text{H}_3\text{O}^+] + \lambda_{\text{NH}_4^+} [\text{NH}_4^+] \quad (41)$$

3. L'équilibre :

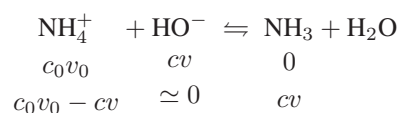


présente une constante définie par :

$$\begin{aligned} K &= \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HO}^-]} = \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} \frac{1}{K_i} \text{ car } [\text{HO}^-] = \frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \\ &= \frac{K_a}{K_i} = \frac{10^{-9,2}}{10^{-14}} \Rightarrow K = 10^{4,8} \gg 1 \end{aligned}$$

Cette valeur est suffisamment importante pour que la réaction de dosage soit considérée comme totale.

4. Dans ces conditions, le bilan du dosage est donné par :



si HO^- est en défaut.

Ce faisant, dans la solution de volume $v + v_0$, les concentrations en NH_4^+ et NH_3 valent approximativement :

$$[\text{NH}_4^+] = \frac{c_0 v_0 - cv}{v + v_0} \quad \text{et} \quad [\text{NH}_3] = \frac{cv}{v + v_0}$$

5. Lorsque $v = \frac{c_0 v_0}{2c}$, on observe que :

$$\begin{aligned} cv = \frac{c_0 v_0}{2} &\Rightarrow c_0 v_0 - cv = \frac{c_0 v_0}{2} = cv \Rightarrow \frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} = \frac{cv}{c_0 v_0 - cv} = 1 \\ &\Rightarrow [\text{NH}_3] = [\text{NH}_4^+] \end{aligned}$$

alors que la relation de Henderson fournit directement :

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \left(\frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} \right) \Rightarrow \text{pH} = \text{p}K_a = 9,2$$

Aussi, au voisinage de ce volume :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] \simeq 10^{-9,2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ et } [\text{HO}^-] \simeq \frac{10^{-14}}{10^{-9,2}} = 10^{-4,8} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et ces valeurs varient peu car, lorsque $\text{pH} \simeq \text{p}K_a$, une solution tampon a été réalisée.

En outre :

$$v = \frac{c_0 v_0}{2c} = \frac{0,1 \times 20}{2 \times 0,1} = 10 \text{ mL} \Rightarrow v + v_0 = 10 + 20 = 30 \text{ mL}$$

mène aux concentrations des autres espèces ioniques :

$$[\text{NH}_4^+] = \frac{c_0 v_0}{2(v + v_0)} = \frac{0,1 \times 20}{2 \times 30} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{Cl}^-] = \frac{c_0 v_0}{v + v_0} = \frac{0,1 \times 20}{30} = 6,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{Na}^+] = \frac{cv}{v + v_0} = \frac{0,1 \times 10}{30} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

ces valeurs numériques montrent que $[\text{H}_3\text{O}^+]$ et $[\text{HO}^-]$ sont très inférieures aux autres concentrations (d'un facteur $5 \cdot 10^{-4}$), tandis que les conductivités molaires ioniques sont toutes du même ordre de grandeur. Par conséquent, les termes relatifs à H_3O^+ et à HO^- dans σ sont négligeables devant les autres termes.

6. Compte tenu de ce qui précède, l'identité (41) se simplifie :

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+] + \lambda_{\text{Cl}^-} [\text{Cl}^-] + \lambda_{\text{NH}_4^+} [\text{NH}_4^+] \\ &= \lambda_{\text{Na}^+} \frac{cv}{v + v_0} + \lambda_{\text{Cl}^-} \frac{c_0 v_0}{v + v_0} + \lambda_{\text{NH}_4^+} \frac{c_0 v_0 - cv}{v + v_0} \end{aligned}$$

d'où il ressort que :

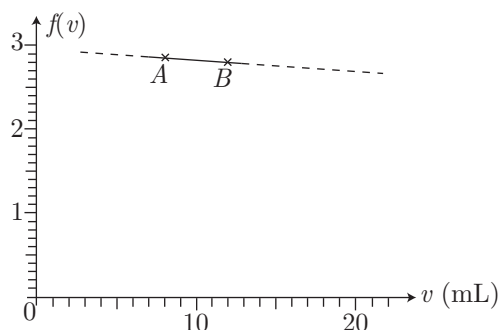
$$f(v) = (v + v_0) \times \sigma = c_0 v_0 \times (\lambda_{\text{NH}_4^+} + \lambda_{\text{Cl}^-}) + cv \times (\lambda_{\text{Na}^+} - \lambda_{\text{NH}_4^+})$$

En adoptant les unités de l'énoncé (λ_i en $\text{S} \cdot \text{dm}^2 \cdot \text{mol}^{-1}$ et les volumes en mL), l'application numérique conduit à :

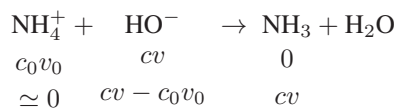
$$\begin{aligned} f(v) &= 0,1 \times 20 \times (0,75 + 0,76) + 0,1 \times (0,58 - 0,75) \times v \\ &\Rightarrow f(v) = 3,02 - 0,017 \times v \end{aligned}$$

La représentation graphique de $f(v)$ est alors une portion de droite qui passe par les points :

$$A \left(\begin{array}{l} v = 8 \text{ mL} \\ f = 2,88 \end{array} \right) \text{ et } B \left(\begin{array}{l} v = 12 \text{ mL} \\ f = 2,82 \end{array} \right)$$



7. Lorsque HO^- est versé en excès, le bilan de la réaction du dosage est donné par :



qui décrit la composition du milieu réactionnel :

$$[\text{NH}_4^+] \simeq 0 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad [\text{HO}^-] = \frac{cv - c_0 v_0}{v + v_0} \quad [\text{Na}^+] = \frac{cv}{v + v_0} \quad [\text{Cl}^-] = \frac{c_0 v_0}{v + v_0}$$

Dans ces conditions, l'identité (41) devient :

$$\begin{aligned} \sigma &= \lambda_{\text{Na}^+} [\text{Na}^+] + \lambda_{\text{Cl}^-} [\text{Cl}^-] + \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}^-] \\ &= \lambda_{\text{Na}^+} \frac{cv}{v + v_0} + \lambda_{\text{Cl}^-} \frac{c_0 v_0}{v + v_0} + \lambda_{\text{HO}^-} \frac{cv - c_0 v_0}{v + v_0} \end{aligned}$$

d'où il ressort que :

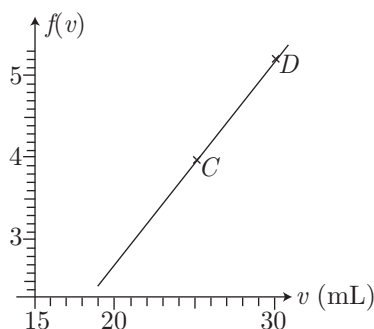
$$f(v) = (v + v_0) \times \sigma \Rightarrow f(v) = c_0 v_0 (\lambda_{\text{Cl}^-} - \lambda_{\text{HO}^-}) + cv (\lambda_{\text{HO}^-} + \lambda_{\text{Na}^+})$$

soit encore :

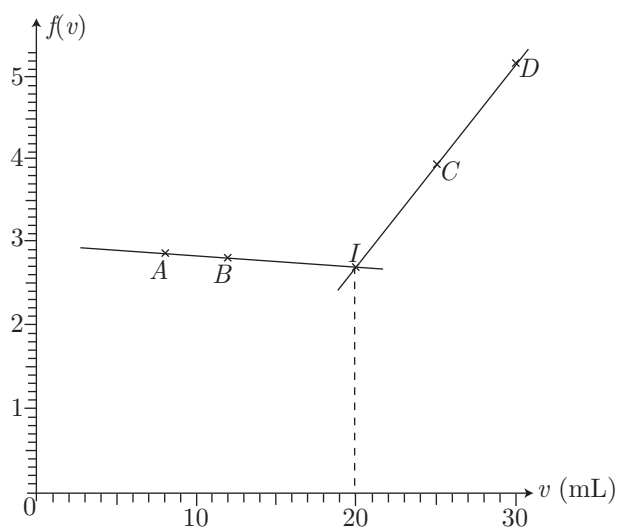
$$\begin{aligned} f(v) &= 0,1 \times 20 \times (0,76 - 1,92) + 0,1 \times (1,92 + 0,58) \times v \\ \Rightarrow & f(v) = -2,32 + 0,25 \times v \end{aligned}$$

À nouveau, la représentation graphique de $f(v)$ conduit à un segment de droite passant par :

$$C \left(\begin{array}{l} v = 25 \text{ mL} \\ f = 3,93 \end{array} \right) \text{ et } D \left(\begin{array}{l} v = 30 \text{ mL} \\ f = 5,18 \end{array} \right)$$



8. La superposition des deux courbes précédentes :



montre que leurs prolongements se croisent pour :

$$v = v_e \simeq 20 \text{ mL}$$

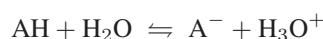
La confirmation de ce résultat peut être obtenue analytiquement, en remarquant que l'abscisse v_e du point d'intersection est solution de l'équation :

$$\begin{aligned} 3,02 - 0,017 v_e &= -2,32 + 0,25 v_e \Rightarrow v_e = \frac{3,02 + 2,32}{0,25 + 0,017} \\ &\Rightarrow v_e = 20 \text{ mL} \end{aligned}$$

En remarquant que $c_0 v_0 = c v_e$, il ressort que ce point d'intersection fournit le volume d'équivalence, c'est-à-dire le volume de solution de soude juste nécessaire à la neutralisation des ions NH_4^+ . Ce constat offre un moyen rapide de dosage de ces ions : la mesure simultanée de v et de σ permet le calcul de $f(v) = (v_0 + v) \times \sigma$, que l'on peut alors représenter graphiquement. La courbe présente deux portions linéaires dont les prolongements se coupent en un point I , dont l'abscisse fournit directement le volume d'équivalence.

● 313 ————— Lycée Henri Wallon, Valenciennes

1. Soit AH un acide susceptible de se dissocier selon l'équation :



dont la constante d'acidité est définie par :

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{[\text{A}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{AH}]} \Rightarrow \log K_a = \log \left(\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \right) + \log [\text{H}_3\text{O}^+] \\ &\Rightarrow \text{pH} - \text{p}K_a = \log \left(\frac{[\text{A}^-]}{[\text{AH}]} \right) \end{aligned}$$

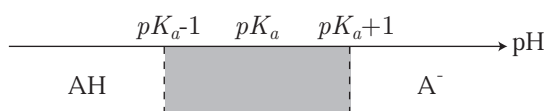
On admet que AH est l'espèce prédominante lorsque $[AH] \gg 10 \times [A^-]$, c'est-à-dire pour :

$$\text{pH} - \text{p}K_a \leq \log\left(\frac{1}{10}\right) = -1 \Rightarrow \text{pH} \leq \text{p}K_a - 1$$

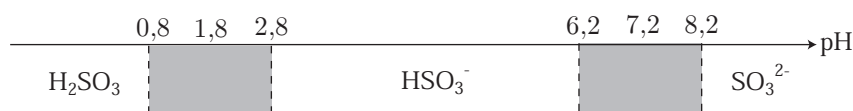
De même, on admet que A^- est l'espèce prédominante lorsque $[A^-] \geq 10 \times [AH]$, soit encore :

$$\text{pH} - \text{p}K_a \geq \log(10) = 1 \Rightarrow \text{pH} \geq \text{p}K_a + 1$$

ce qui conduit au diagramme de prédominance suivant :



Appliquée au diacide H_2SO_3 , cette étude conduit au diagramme ci-dessous :



2. Remarquons préalablement que la loi de conservation de l'élément soufre contraint à poser :

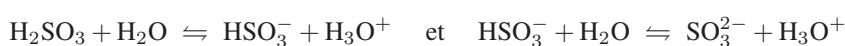
$$C = [\text{H}_2\text{SO}_3] + [\text{HSO}_3^-] + [\text{SO}_3^{2-}] \quad (42)$$

et, compte tenu du diagramme de la question précédente, il convient de distinguer trois domaines de pH.

- Pour $\text{pH} \leq 0,8$, H_2SO_3 étant l'espèce prédominante, l'équation (42) se simplifie :

$$[\text{H}_2\text{SO}_3] = C \Rightarrow \log [\text{H}_2\text{SO}_3] = \log C$$

En outre, les équilibres de dissociation :



sont à l'origine des constantes d'acidité :

$$K_1 = \frac{[\text{HSO}_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_2\text{SO}_3]} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{[\text{SO}_3^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HSO}_3^-]} \quad (43)$$

Ce faisant, il ressort que :

$$\begin{aligned} [\text{HSO}_3^-] &= \frac{K_1 \times [\text{H}_2\text{SO}_3]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_1 C}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \\ \Rightarrow \log [\text{HSO}_3^-] &= \log K_1 + \log C - \log [\text{H}_3\text{O}^+] \end{aligned}$$

que l'on peut aussi écrire sous la forme :

$$\log [\text{HSO}_3^-] = \text{pH} + \log C - \text{p}K_1$$

De même, l'expression de K_2 fournit :

$$\begin{aligned} [\text{SO}_3^{2-}] &= \frac{K_2 [\text{HSO}_3^-]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_1 K_2 C}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2} \\ \Rightarrow \log [\text{SO}_3^{2-}] &= \log K_1 + \log K_2 + \log C - 2 \log [\text{H}_3\text{O}^+] \end{aligned}$$

soit encore :

$$\log [\text{SO}_3^{2-}] = 2 \text{pH} + \log C - pK_1 - pK_2$$

- Pour $2,8 \leq \text{pH} \leq 6,2$, HSO_3^- étant prédominant, les autres espèces soufrées sont en quantités assez faibles pour être négligées dans l'identité (42) :

$$[\text{HSO}_3^-] = C \Rightarrow \log [\text{HSO}_3^-] = \log C$$

Aussi, l'expression de K_1 conduit à :

$$\begin{aligned} [\text{H}_2\text{SO}_3] &= \frac{[\text{HSO}_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{K_1} = \frac{C \times [\text{H}_3\text{O}^+]}{K_1} \\ \Rightarrow \log [\text{H}_2\text{SO}_3] &= \log C + \log [\text{H}_3\text{O}^+] - \log K_1 \\ \Rightarrow \log [\text{H}_2\text{SO}_3] &= pK_1 + \log C - \text{pH} \end{aligned}$$

tandis que l'expression de K_2 fournit :

$$\begin{aligned} [\text{SO}_3^{2-}] &= \frac{K_2 [\text{HSO}_3^-]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_2 \times C}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \\ \Rightarrow \log [\text{SO}_3^{2-}] &= \log K_2 + \log C - \log [\text{H}_3\text{O}^+] \\ \Rightarrow \log [\text{SO}_3^{2-}] &= \text{pH} - pK_2 + \log C \end{aligned}$$

- Enfin, lorsque $\text{pH} \geq 8,2$, les espèces H_2SO_3 et HSO_3^- sont en quantité négligeable devant celle de SO_3^{2-} , ce qui se traduit pour l'équation (42) par :

$$[\text{SO}_3^{2-}] = C \Rightarrow \log [\text{SO}_3^{2-}] = \log C$$

La constante d'acidité K_2 permet alors d'exprimer :

$$\begin{aligned} [\text{HSO}_3^-] &= \frac{[\text{SO}_3^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{K_2} = \frac{C \times [\text{H}_3\text{O}^+]}{K_2} \\ \Rightarrow \log [\text{HSO}_3^-] &= \log C + \log [\text{H}_3\text{O}^+] - \log K_2 \\ \Rightarrow \log [\text{HSO}_3^-] &= pK_2 + \log C - \text{pH} \end{aligned}$$

et, de même, la constante K_1 fournit :

$$\begin{aligned} [\text{H}_2\text{SO}_3] &= \frac{[\text{HSO}_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{K_1} = \frac{C \times [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{K_1 K_2} \\ \Rightarrow \log [\text{H}_2\text{SO}_3] &= \log C + 2 \log [\text{H}_3\text{O}^+] - \log K_1 - \log K_2 \\ \Rightarrow \log [\text{H}_2\text{SO}_3] &= pK_1 + pK_2 + \log C - 2 \text{pH} \end{aligned}$$

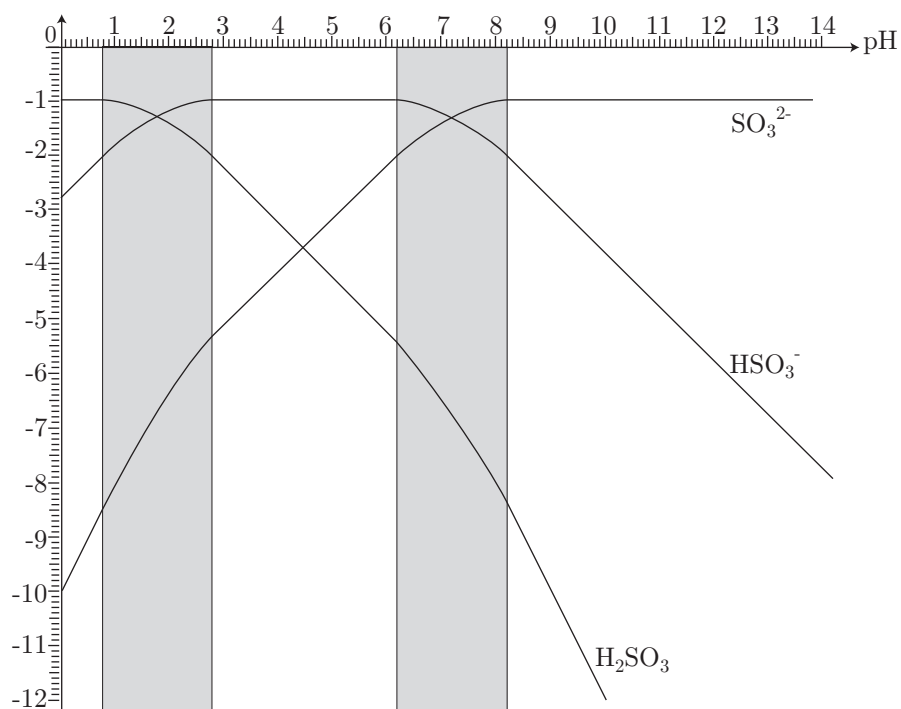
Ce faisant, compte tenu des valeurs numériques : $pK_1 = 1,8$, $pK_2 = 7,2$ et $\log C = -1$, les diagrammes logarithmiques de $[\text{H}_2\text{SO}_3]$, $[\text{HSO}_3^-]$ et $[\text{SO}_3^{2-}]$ sont décrits par les équations cartésiennes :

$$\begin{array}{ll} \log [\text{H}_2\text{SO}_3] = -1 & \text{pour } \text{pH} \leq 0,8 \\ \log [\text{H}_2\text{SO}_3] = 0,8 - \text{pH} & \text{pour } 2,8 \leq \text{pH} \leq 6,2 \\ \log [\text{H}_2\text{SO}_3] = 8 - 2 \text{ pH} & \text{pour } \text{pH} \geq 8,2 \end{array}$$

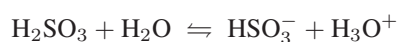
$$\begin{array}{ll} \log [\text{HSO}_3^-] = \text{pH} - 2,8 & \text{pour } \text{pH} \leq 0,8 \\ \log [\text{HSO}_3^-] = -1 & \text{pour } 2,8 \leq \text{pH} \leq 6,2 \\ \log [\text{HSO}_3^-] = 6,2 - \text{pH} & \text{pour } \text{pH} \geq 8,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \log [\text{SO}_3^{2-}] = 2 \text{ pH} - 10 & \text{pour } \text{pH} \leq 0,8 \\ \log [\text{SO}_3^{2-}] = \text{pH} - 8,2 & \text{pour } 2,8 \leq \text{pH} \leq 6,2 \\ \log [\text{SO}_3^{2-}] = -1 & \text{pour } \text{pH} \geq 8,2 \end{array}$$

ce qui mène aux courbes suivantes :



3. L'équation-bilan de la réaction de dissociation de H_2SO_3 :

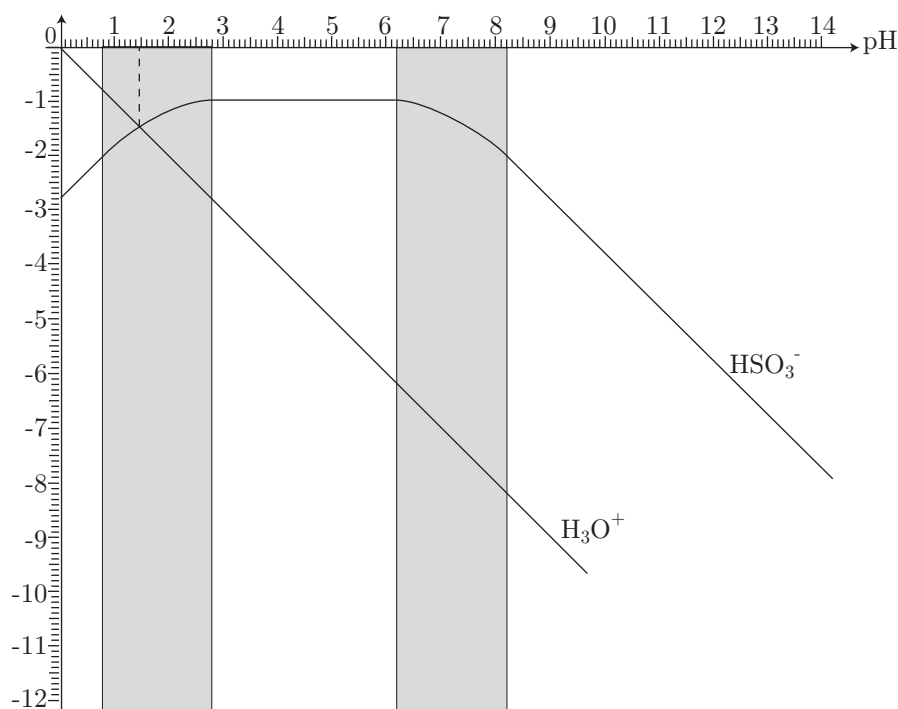


révèle qu'en première approximation : $[\text{HSO}_3^-] = [\text{H}_3\text{O}^+]$. Il suffit alors de tracer le diagramme logarithmique de $[\text{H}_3\text{O}^+]$:

$$\log [\text{H}_3\text{O}^+] = -\text{pH}$$

et de le superposer à celui de $[\text{HSO}_3^-]$; le point d'intersection de ces deux diagrammes présente alors un pH qui vérifie l'équation :

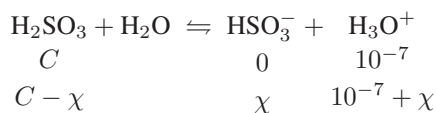
$$\log [\text{HSO}_3^-] = \log [\text{H}_3\text{O}^+]$$



Cette courbe révèle que :

$$\text{pH} \simeq 1,5 \quad (44)$$

4. Le résultat précédent est entâché d'une incertitude liée à la position du point d'intersection des diagrammes logarithmiques de $[\text{H}_3\text{O}^+]$ et de $[\text{HSO}_3^-]$; ce point se situe dans un domaine (grisé) où $\log [\text{HSO}_3^-] = f(\text{pH})$ ne peut être linéarisé. En effet, $\text{pH} \in [0,8; 2,8]$ révèle qu'il est hasardeux d'écrire que $[\text{H}_2\text{SO}_3] = C$. En revanche, il est toujours légitime de négliger la présence de SO_3^{2-} (à condition que $\text{pH} \leq 6,2$) Aussi, l'équation-bilan de la réaction de dissociation :



fournit :

$$[\text{H}_2\text{SO}_3] = C - \chi \quad [\text{HSO}_3^-] = \chi \quad [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7} + \chi$$

le caractère acide de la solution (d'acide sulfureux) permet néanmoins de supposer que $\text{pH} \leq 6$, ce qui revient à admettre que :

$$\begin{aligned} [\text{H}_3\text{O}^+] \geq 10^{-6} &\Rightarrow 10^{-7} + \chi \geq 10^{-6} \Rightarrow \chi \geq 10^{-7} \\ &\Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] \simeq \chi \end{aligned}$$

Ce faisant, $[\text{HSO}_3^-] \simeq [\text{H}_3\text{O}^+]$ donne à la constante d'acidité la forme suivante :

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{[\text{HSO}_3^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_2\text{SO}_3]} = \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}{C - [\text{H}_3\text{O}^+]} \\ &\Rightarrow K_1 = \frac{h^2}{C - h} \text{ en posant } h = [\text{H}_3\text{O}^+] \\ &\Rightarrow h^2 + K_1 h - CK_1 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de cette équation du second degré : $\Delta = K_1^2 + 4K_1C$ est à l'origine de deux solutions réelles :

$$h = \frac{-K_1 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

dont seule la positive présente une signification physique :

$$\begin{aligned} h &= \frac{-K_1 + \sqrt{K_1^2 + 4K_1C}}{2} \\ &= \frac{-10^{-1,8} + \sqrt{10^{-3,6} + 4 \times 10^{-1,8} \times 10^{-1}}}{2} \simeq 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

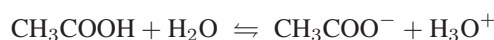
d'où il ressort que :

$$\text{pH} = -\log h = 1,48$$

Cette valeur confirme celle du résultat (44) et justifie *a posteriori* les hypothèses émises :

- $\text{pH} < 6 \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] \simeq [\text{HSO}_3^-]$;
- $\text{pH} < 6,2 \Rightarrow C \simeq [\text{H}_2\text{SO}_3] + [\text{HSO}_3^-]$.

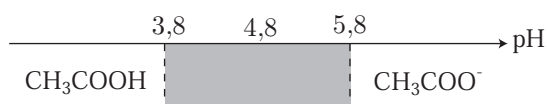
5. L'acide éthanóïque se dissocie selon l'équation :



de sorte que :

$$C = [\text{CH}_3\text{COOH}] + [\text{CH}_3\text{COO}^-] \quad (45)$$

À nouveau, le diagramme de prédominance de cet acide fait apparaître deux domaines de pH autour de $\text{p}K_3 = 4,8$:



- Pour $\text{pH} \leq 3,8$, CH_3COOH étant l'espèce prédominante, l'identité (45) indique que :

$$[\text{CH}_3\text{COOH}] \simeq C \Rightarrow \log [\text{CH}_3\text{COOH}] = \log C$$

Quant à la constante d'acidité K_3 , elle est définie par :

$$K_3 = \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]}$$

d'où l'on déduit que :

$$\begin{aligned} [\text{CH}_3\text{COO}^-] &= \frac{K_3 [\text{CH}_3\text{COOH}]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_3 \times C}{h} \\ \Rightarrow \log [\text{CH}_3\text{COO}^-] &= \log K_3 + \log C - \log h \\ \Rightarrow \log [\text{CH}_3\text{COO}^-] &= \text{pH} + \log C - \text{p}K_3 \end{aligned}$$

- Lorsque $\text{pH} \geq 5,8$ l'espèce prédominante est CH_3COO^- , en conséquence de quoi l'équation (45) se simplifie :

$$[\text{CH}_3\text{COO}^-] \simeq C \Rightarrow \log [\text{CH}_3\text{COO}^-] = \log C$$

tandis que de la constante K_3 il ressort que :

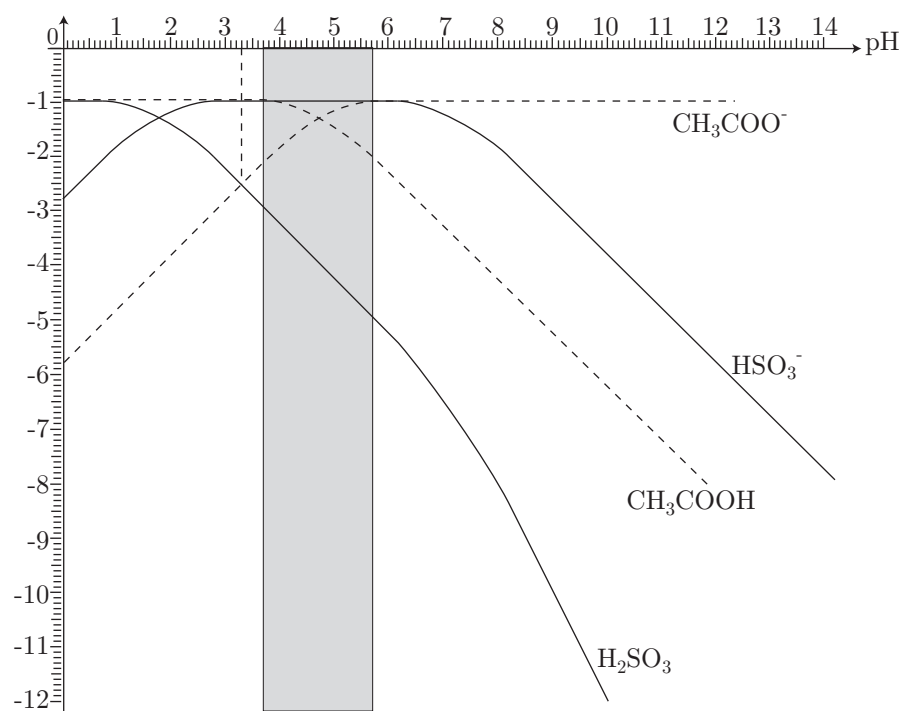
$$\begin{aligned} [\text{CH}_3\text{COOH}] &= \frac{[\text{CH}_3\text{COO}^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{K_3} = \frac{C \times [\text{H}_3\text{O}^+]}{K_3} \\ \Rightarrow \log [\text{CH}_3\text{COOH}] &= \log C + \log [\text{H}_3\text{O}^+] - \log K_3 \\ \Rightarrow \log [\text{CH}_3\text{COOH}] &= \log C + \text{p}K_3 - \text{pH} \end{aligned}$$

Application numérique :

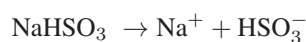
$$\begin{cases} \log [\text{CH}_3\text{COOH}] = -1 \text{ pour } \text{pH} \leq 3,8 \\ \log [\text{CH}_3\text{COOH}] = 3,8 - \text{pH} \text{ pour } \text{pH} \geq 5,8 \end{cases}$$

et :

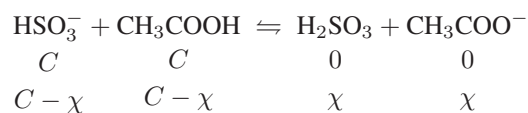
$$\begin{cases} \log [\text{CH}_3\text{COO}^-] = \text{pH} - 5,8 \text{ pour } \text{pH} \leq 3,8 \\ \log [\text{CH}_3\text{COO}^-] = -1 \text{ pour } \text{pH} \geq 5,8 \end{cases}$$



6. (a) La mise en solution de NaHSO_3 libère l'ion hydrogénéosulfite HSO_3^- :



espèce basique susceptible de réagir avec l'acide éthanóïque à la concentration $C = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, selon l'équation-bilan :



Ce bilan montre que :

$$[\text{HSO}_3^-] = [\text{CH}_3\text{COOH}] \text{ et } [\text{H}_2\text{SO}_3] = [\text{CH}_3\text{COO}^-]$$

c'est-à-dire :

$$\log [\text{HSO}_3^-] = \log [\text{CH}_3\text{COOH}] \text{ et } \log [\text{H}_2\text{SO}_3] = \log [\text{CH}_3\text{COO}^-]$$

Ce faisant, il existe *a priori* deux méthodes graphiques permettant d'obtenir le pH de cette solution :

- la superposition des diagrammes logarithmiques de $[\text{HSO}_3^-]$ et de $[\text{CH}_3\text{COOH}]$ présentent un point d'intersection dont le pH coïncide avec le résultat cherché ;
- la superposition des diagrammes logarithmiques de $[\text{H}_2\text{SO}_3]$ et de $[\text{CH}_3\text{COO}^-]$ présentent également un point d'intersection fournissant le pH souhaité.

- (b) La superposition des divers diagrammes montre que la deuxième solution proposée précédemment fournit un point d'intersection pour :

$$\text{pH} = 3,3$$

En revanche, la superposition des diagrammes logarithmiques de $[\text{HSO}_3^-]$ et de $[\text{CH}_3\text{COOH}]$ ne peut être exploitée car leurs points d'intersection sont compris dans l'intervalle :

$$2,8 \leq \text{pH} \leq 3,8$$

qui valide cependant la valeur $\text{pH} = 3,3$.

- (c) Étant donné que le pH attendu vérifie simultanément les conditions : $2,8 \leq \text{pH} \leq 6,2$ et $\text{pH} \leq 3,8$, les expressions linéarisées de $\log [\text{H}_2\text{SO}_3]$ et de $\log [\text{CH}_3\text{COO}^-]$ peuvent être exploités :

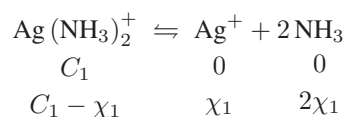
$$\log [\text{H}_2\text{SO}_3] = 0,8 - \text{pH} \quad \text{et} \quad \log [\text{CH}_3\text{COO}^-] = \text{pH} - 5,8$$

le pH s'obtient en résolvant l'équation :

$$\begin{aligned} \log [\text{CH}_3\text{COO}^-] = \log [\text{H}_2\text{SO}_3] &\Rightarrow \text{pH} - 5,8 = 0,8 - \text{pH} \\ &\Rightarrow 2 \text{pH} = 0,8 + 5,8 \\ &\Rightarrow \text{pH} = 3,3 \end{aligned}$$

● 314 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

Soit C_1 la concentration initiale en complexe $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$ et soit χ_1 l'avancement de sa réaction de dissociation, à l'équilibre :



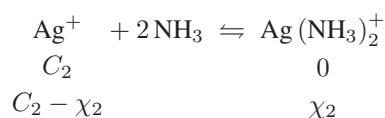
Lorsque la moitié des ions diammineargent (I) est transformée :

$$C_1 - \chi_1 = \frac{C_1}{2} \Rightarrow \chi_1 = \frac{C_1}{2} \Rightarrow [\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+] = [\text{Ag}^+]$$

tandis que l'énoncé précise que $[\text{NH}_3] = C = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ à l'équilibre. La constante de dissociation du complexe est alors donnée par :

$$K_d = \frac{[\text{Ag}^+][\text{NH}_3]^2}{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]} \Rightarrow K_d = C^2 \quad (46)$$

Quant à la réaction de formation du complexe, à partir d'une concentration C_2 d'ions Ag^+ , elle est décrite par l'équation-bilan :



dont χ_2 désigne l'avancement. Aussi, la transformation de 90% des ions Ag^+ en ions $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$ se traduit par :

$$\chi_2 = 0,90 C_2 \Rightarrow C_2 - \chi_2 = 0,1 C_2 \Rightarrow \begin{cases} [\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+] = 0,9 C_2 \\ [\text{Ag}^+] = 0,1 C_2 \end{cases}$$

La constante de dissociation de ce complexe est alors définie par :

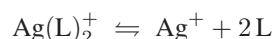
$$K_d = \frac{[\text{Ag}^+][\text{NH}_3]^2}{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]} = \frac{1}{9} [\text{NH}_3]^2 \Rightarrow [\text{NH}_3] = \sqrt{9 K_d} = 3\sqrt{K_d}$$

où la valeur de K_d est fournie par le résultat (46) :

$$[\text{NH}_3] = 3 C = 6 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

● 315 ————— Concours ENSI

1. La réaction de dissociation d'un complexe $\text{Ag}(\text{L})_2^+$ se fait conformément à l'équation :



de constante :

$$\begin{aligned} K_d &= \frac{[\text{Ag}^+][\text{L}]^2}{[\text{Ag}(\text{L})_2^+]} \Rightarrow \log K_d = \log \left(\frac{[\text{Ag}^+]}{[\text{Ag}(\text{L})_2^+]} \right) + 2 \log [\text{L}] \\ &\Rightarrow \text{pL} = \frac{1}{2} \left\{ \text{p}K_d + \log \left(\frac{[\text{Ag}^+]}{[\text{Ag}(\text{L})_2^+]} \right) \right\} \end{aligned}$$

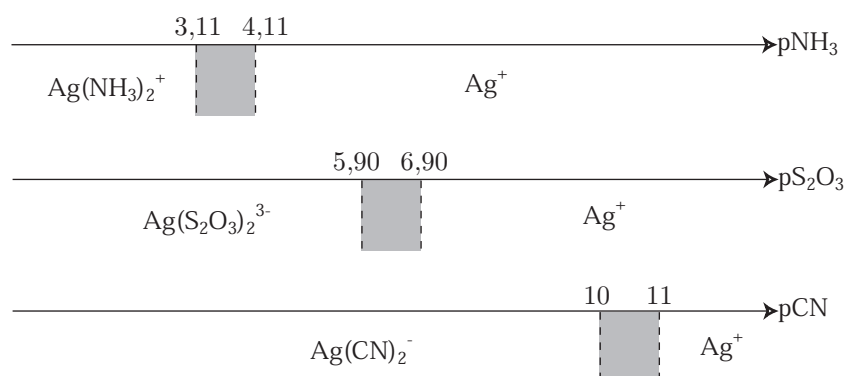
L'espèce Ag^+ est prédominante si l'on observe $[\text{Ag}^+] \geq 10 [\text{Ag}(\text{L})_2^+]$, c'est-à-dire :

$$\text{pL} \geq \frac{\text{p}K_d + 1}{2}$$

En revanche, $\text{Ag}(\text{L})_2^+$ est l'espèce prédominante lorsque $[\text{Ag}(\text{L})_2^+] \geq 10 [\text{Ag}^+]$ permet de poser :

$$\text{pL} \leq \frac{\text{p}K_d - 1}{2}$$

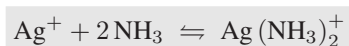
Compte tenu des valeurs de $\text{p}K_{d1} = 7,22$, $\text{p}K_{d2} = 12,8$ et $\text{p}K_{d3} = 21$, cette étude permet le tracé des diagrammes de prédominance des diverses espèces :



- Le meilleur fixateur est celui qui permet de former le complexe $\text{Ag}(\text{L})_2^+$ avec la plus grande efficacité. Or, les diagrammes de prédominance précédents montrent que pour $pL \simeq 10$ c'est-à-dire $[\text{L}] \simeq 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, le complexe $\text{Ag}(\text{CN})_2^-$ est déjà formé alors que les autres complexes sont presque absents. C'est pourquoi le meilleur fixateur est composé d'ions cyanure.
- La toxicité des ions cyanure limite leur utilisation, de sorte que le fixateur est formé par les ions $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ qui permettent de complexer Ag^+ dès $pL = 5,9$, c'est-à-dire $[\text{L}] = 10^{-5,9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ (tandis qu'avec NH_3 , la complexation est observée à partir de $[\text{L}] \geq 10^{-3,11} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$).

● 316 ————— Concours Centrale-Supélec

- Le complexe de formule $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$ s'appelle l'ion diammineargent (I).
- La formation de cet ion suit l'équation-bilan :

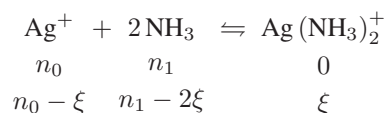


dont la constante de formation globale est définie par :

$$\beta = \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{Ag}^+][\text{NH}_3]^2} \quad (47)$$

La valeur numérique de $\beta = 2,5 \cdot 10^7 \gg 1$ montre que cette réaction peut être considérée comme totale.

- (a) Soit $n_1 = 0,05$ mole la quantité d'ammoniac présent dans le litre d'eau, n_0 la quantité d'ions Ag^+ introduits et ξ l'avancement de la réaction de formation du complexe :



Lorsque la moitié des ions Ag^+ sont transformés en complexe, cela signifie que, dans le volume $V_0 = 1 \text{ L}$:

$$[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+] = \frac{\xi}{V_0} = \frac{n_0}{2V_0} \text{ et } [\text{Ag}^+] = \frac{n_0 - \xi}{V_0} = \frac{n_0}{2V_0} \text{ car } \xi = \frac{n_0}{2}$$

Aussi, en remarquant que $[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+] = [\text{Ag}^+]$, la définition (47) devient :

$$\beta = \frac{1}{[\text{NH}_3]^2} \Rightarrow [\text{NH}_3] = \frac{1}{\sqrt{\beta}} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

(b) Pour atteindre une telle concentration, avec $\xi = \frac{n_0}{2}$, il convient de choisir n_1 tel que :

$$\begin{aligned} [\text{NH}_3] &= \frac{n_1 - 2\xi}{V_0} = \frac{n_1 - n_0}{V_0} \Rightarrow n_1 = [\text{NH}_3] \times V_0 + n_0 \\ &\Rightarrow n_1 = 2 \cdot 10^{-4} \times 1 + 0,05 \\ &\Rightarrow n_1 = 5,02 \cdot 10^{-2} \text{ mole de NH}_3 \end{aligned}$$

● 317 ————— Concours ENSI

I- Décomposition du complexe

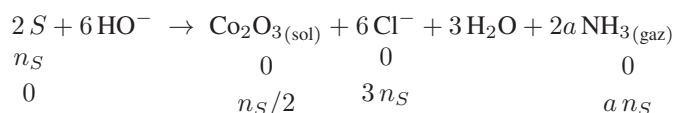
1. La masse molaire M_S du solide S , de formule $\{[\text{CoCl}(\text{NH}_3)_a]^{2+} + 2\text{Cl}^-\}$ vaut :

$$\begin{aligned} M_S &= M_{\text{Co}} + M_{\text{Cl}} + a \times (M_{\text{N}} + 3 M_{\text{H}}) + 2 M_{\text{Cl}} \\ &= 58,9 + 3 \times 35,5 + a \times (14 + 3) \\ &\Rightarrow 165,4 + 17 a \text{ (en g} \cdot \text{mol}^{-1}\text{)} \end{aligned}$$

Aussi, la masse $m_S = 2 \text{ g}$ a permis d'introduire dans le ballon un nombre de moles n_S , tel que :

$$n_S = \frac{m_S}{M_S} = \frac{2}{165,4 + 17 a} \text{ (en moles)} \quad (48)$$

2. Le bilan de la réaction de décomposition du solide S :

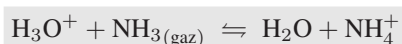


permet de conclure qu'il s'est formé :

$$n_0 = a n_S \text{ mole de NH}_3(\text{gaz}). \quad (49)$$

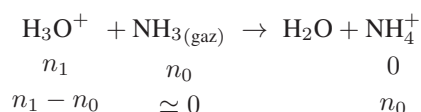
II- Dosage acido-basique

1. Les ions H_3O^+ de la solution d'acide chlorhydrique réagissent avec $\text{NH}_3(\text{gaz})$ selon l'équation :



2. Si $n_1 = C_1 V_1$ désigne la quantité initiale d'ions H_3O^+ réagissant sur $\text{NH}_3(\text{gaz})$ et si, de surcroît, on suppose que la réaction précédente est totale, elle présente le

bilan suivant :



Aussi, à l'équilibre, seuls demeurent H_3O^+ et NH_4^+ dont les quantités sont :

$$n_{\text{H}_3\text{O}^+} = n'_1 = n_1 - n_0 = C_1 V_1 - a n_S \quad \text{et} \quad n_{\text{NH}_4^+} = n_0 = a n_S \quad (50)$$

3. (a) Dans le volume $V_2 = 10 \text{ mL}$ d'hydroxyde de sodium, à la concentration $C_2 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, se trouvent $n_2 = C_2 V_2$ moles d'ions HO^- , qui neutralisent les ions H_3O^+ restant en excès :



L'équivalence est alors obtenue pour :

$$n'_1 = n_2 = C_2 V_2 = 1 \times 10 \cdot 10^{-3} \Rightarrow n'_1 = 10^{-2} \text{ mole d'ions } \text{H}_3\text{O}^+.$$

- (b) Le résultat (50) montre que :

$$n'_1 = n_1 - n_0 \Rightarrow n_0 = n_1 - n'_1 = C_1 V_1 - n'_1 = 1 \times 50 \cdot 10^{-3} - 10^{-2}$$

ce qui signifie qu'il s'est dégagé :

$$n_0 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ mole de } \text{NH}_3(\text{gaz}).$$

- (c) Associée aux résultats (49) et (48), la valeur numérique de n_0 conduit à :

$$\begin{aligned} n_0 = a n_S = \frac{2a}{165,4 + 17a} &\Rightarrow 4 \cdot 10^{-2} = \frac{2a}{165,4 + 17a} \\ &\Rightarrow 6,616 + 0,68 a = 2a \\ &\Rightarrow a = \frac{6,616}{2 - 0,68} = 5 \end{aligned}$$

● 318 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. Les réactions d'équations :



ont des constantes d'équilibre respectives :

$$K = \frac{[\text{NH}_4^+][\text{HO}^-]}{[\text{NH}_3]} = \frac{[\text{NH}_4^+]}{[\text{NH}_3]} \frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{K_i}{K_a} = \frac{10^{-14}}{10^{-9,2}} = 10^{-4,8}$$

et :

$$K_a = \frac{[\text{NH}_3][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{NH}_4^+]} = 10^{-9,8}$$

trop faibles pour être appréciables. C'est pourquoi les concentrations $[\text{NH}_4^+]$ et $[\text{NH}_3]$ restent égales à leur valeur initiale C_0 , de sorte que :

$$\text{pH} = \text{p}K_a + \log \left(\frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} \right) = \text{p}K_a \Rightarrow \text{pH} = 9,8$$

2. (a) Initialement, le milieu réactionnel contient les espèces :



susceptibles de réagir selon les équations suivantes :

- $\text{NH}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{NH}_4^+ + \text{HO}^-$ de constante $K = 10^{-4,8}$
- $2\text{NH}_3 + \text{Ag}^+ \rightleftharpoons \text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$ de constante :

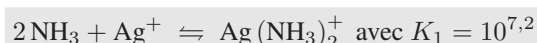
$$K_1 = \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{NH}_3]^2 [\text{Ag}^+]} = \frac{1}{K_d} \Rightarrow K_1 = 10^{7,2}$$

- $\text{NH}_4^+ + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{NH}_3 + \text{H}_3\text{O}^+$ avec $K_a = 10^{-9,8}$
- $2\text{NH}_4^+ + \text{Ag}^+ + 2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+ + 2\text{H}_3\text{O}^+$ dont la loi d'action des masses prévoit une constante :

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+] [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{[\text{Ag}^+] [\text{NH}_4^+]^2} \\ &= \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{Ag}^+] [\text{NH}_3]^2} \times \left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+] [\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]} \right)^2 \\ &= \frac{1}{K_d} \times K_a^2 = 10^{7,2-18,4} \Rightarrow K_2 = 10^{-11,2} \end{aligned}$$

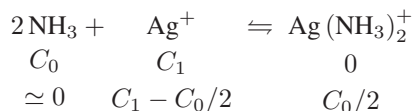
- $2\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}_3\text{O}^+ + \text{HO}^-$ de constante $K_i = 10^{-14}$

(b) Les résultats précédents montrent que la seule réaction susceptible de se produire de manière significative est :



Du reste, $K_1 \gg 1$ autorise à considérer cette réaction comme presque totale.

(c) En choisissant $C_0 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $C_1 = 0,4 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, le bilan de cette réaction s'écrit :



et fournit la composition du mélange à l'équilibre :

$$[\text{Ag}^+] = C_1 - \frac{C_0}{2} = 0,4 - \frac{10^{-3}}{2} = 3,995 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et :

$$[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+] = \frac{C_0}{2} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Quant à $[\text{NH}_3]$, sa valeur s'obtient directement à l'aide de l'expression de la constante K_1 :

$$\begin{aligned} K_1 = \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{NH}_3]^2 [\text{Ag}^+]} &\Rightarrow [\text{NH}_3] = \sqrt{\frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{K_1 [\text{Ag}^+]}} \\ &\Rightarrow [\text{NH}_3] = \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-4}}{10^{7,2} \times 3,995 \cdot 10^{-1}}} \\ &\Rightarrow [\text{NH}_3] = 8,9 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

Par suite, le pH de la solution vaut :

$$\text{pH} = pK_a + \log\left(\frac{[\text{NH}_3]}{[\text{NH}_4^+]}\right) = 9,2 + \log\left(\frac{8,9 \cdot 10^{-6}}{10^{-3}}\right) \Rightarrow \text{pH} = 7,1$$

● 319 ————— Université d'Orsay

1. Les équilibres : $\text{Cu}^{2+} + n \text{NH}_3 \rightleftharpoons \text{Cu}(\text{NH}_3)_n^{2+}$ sont caractérisés par les constantes :

$$\beta_n = \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_n^{2+}]}{[\text{Cu}^{2+}] [\text{NH}_3]^n}$$

d'où découlent :

$$\beta_{j-1} = \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_{j-1}^{2+}]}{[\text{Cu}^{2+}] [\text{NH}_3]^{j-1}} \text{ et } \beta_j = \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_j^{2+}]}{[\text{Cu}^{2+}] [\text{NH}_3]^j} \quad (51)$$

Quant aux équilibres d'équations :



ils ont pour constantes :

$$K_{d_j} = \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_{j-1}^{2+}] [\text{NH}_3]}{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_j^{2+}]}$$

Or des relations (51) il ressort que :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{j-1}}{\beta_j} &= \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_{j-1}^{2+}] \times [\text{Cu}^{2+}] [\text{NH}_3]^j}{[\text{Cu}^{2+}] [\text{NH}_3]^{j-1} \times [\text{Cu}(\text{NH}_3)_j^{2+}]} \\ &= \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_{j-1}^{2+}] \times [\text{NH}_3]}{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_j^{2+}]} \\ \Rightarrow \frac{\beta_{j-1}}{\beta_j} &= K_{d_j} \Rightarrow K_{d_n} = \frac{\beta_{n-1}}{\beta_n} \text{ avec } K_{d_1} = \frac{1}{\beta_1} \end{aligned}$$

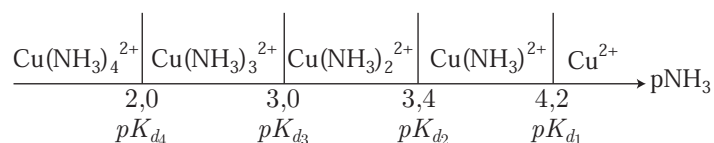
2. Ce résultat fournit directement :

$$\log(K_{d_n}) = \log \beta_{n-1} - \log \beta_n \Rightarrow pK_{d_n} = \log \beta_n - \log \beta_{n-1} \text{ avec } pK_{d_1} = \log \beta_1$$

Ces lois générales fournissent une méthode d'obtention des constantes pK_{d_n} :

$$\begin{aligned} pK_{d_1} &= \log \beta_1 = 4,2 & pK_{d_2} &= 7,6 - 4,2 = 3,4 \\ pK_{d_3} &= 10,6 - 7,6 = 3,0 & pK_{d_4} &= 12,6 - 10,6 = 2,0 \end{aligned}$$

ce qui justifie le diagramme de prédominance proposé par l'énoncé :



3. (a) Dans le bécher se trouve de l'ammoniac à la concentration initiale de $0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, auquel cas, initialement :

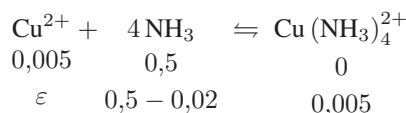
$$p\text{NH}_3 = -\log(0,5) = 0,3 \ll pK_{d_4}$$

Or, la valeur de $p\text{NH}_3$ s'écartera peu de 0,3, compte tenu de la faible quantité d'ions Cu^{2+} introduits. C'est pourquoi, dès le début de la réaction, le protocole expérimental se place dans un domaine où prédomine le complexe tétracoordonné ; il peut être considéré comme seul produit de la réaction : $\text{Cu}^{2+} + 4\text{NH}_3 \rightleftharpoons \text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$

(b) Initialement, les réactifs sont introduits aux concentrations :

$$[\text{NH}_3]_0 = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ et } [\text{Cu}^{2+}] = \frac{0,01}{2} = 0,005 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En outre, la réaction : $\text{Cu}^{2+} + 4\text{NH}_3 \rightleftharpoons \text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}$ a pour constante $\beta_4 = 10^{12,6}$, dont l'ordre de grandeur justifie qu'elle soit considérée comme totale ; son bilan s'écrit :



d'où l'on déduit immédiatement les concentrations :

$$[\text{NH}_3] = 0,48 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ et } [\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Quant à la constante β_4 , sa définition fournit :

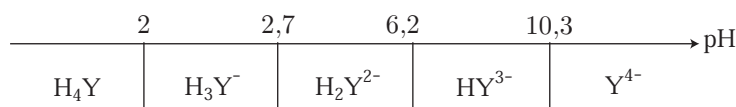
$$\begin{aligned} \beta_4 &= \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]}{[\text{Cu}^{2+}] [\text{NH}_3]^4} \\ \Rightarrow [\text{Cu}^{2+}] &= \frac{[\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}]}{\beta_4 \times [\text{NH}_3]^4} = \frac{5 \cdot 10^{-3}}{10^{12,6} \times (0,48)^4} \\ \Rightarrow [\text{Cu}^{2+}] &= 2,4 \cdot 10^{-14} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

● 320 ————— Concours ENS Cachan

1. La concentration totale en EDTA est définie par :

$$c_T = [\text{Y}^{4-}] + [\text{HY}^{3-}] + [\text{H}_2\text{Y}^{2-}] + [\text{H}_3\text{Y}^-] + [\text{H}_4\text{Y}]$$

Or, le diagramme de prédominance de l'EDTA :



montre qu'à pH = 10 seules les espèces HY³⁻ et Y⁴⁻ présentent des concentrations non négligeables :

$$c_T \simeq [\text{Y}^{4-}] + [\text{HY}^{3-}]$$

Enfin, la constante d'acidité $K_4 = 10^{-10,3}$ du couple HY³⁻/Y⁴⁻ conduit à :

$$K_4 = \frac{[\text{Y}^{4-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HY}^{3-}]} \Rightarrow [\text{HY}^{3-}] = [\text{Y}^{4-}] \times \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_4}$$

C'est pourquoi :

$$c_T = [\text{Y}^{4-}] \left(1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_4} \right) \Rightarrow \alpha = \frac{[\text{Y}^{4-}]}{c_T} = \frac{1}{1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_4}}$$

Application numérique :

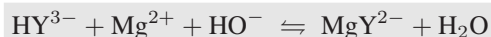
$$\alpha = \frac{1}{1 + 10^{-10+10,3}} \Rightarrow \alpha = 0,33$$

2. À pH = 10, les espèces prédominantes de l'EDTA et du NET sont respectivement : HY³⁻ et HE²⁻. Il convient ainsi de distinguer deux cas :

- Avant l'équivalence, la présence des ions Mg²⁺, en excès dans le milieu réactionnel, permet la réaction de complexation avec HE²⁻ :



L'absence de HE^- justifie la couleur rouge de la solution, tandis que chaque incrément d'EDTA versé permet la réaction de complexation des ions Mg^{2+} :



- À l'équivalence, l'EDTA ne peut plus réagir avec Mg^{2+} , absent du milieu réactionnel. Cependant, le magnésium complexé par le NET peut changer de ligand, conformément à l'équation :



La solution vire ainsi du rouge au bleu à l'équivalence.

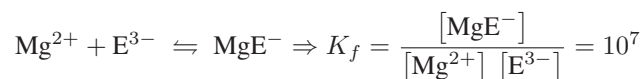
3. (a) La constante de l'équilibre (52) vaut :

$$\begin{aligned} K &= \frac{[\text{MgE}^-]}{[\text{HE}^{2-}] [\text{Mg}^{2+}] [\text{HO}^-]} = \frac{[\text{MgE}^-]}{[\text{E}^{3-}] [\text{Mg}^{2+}]} \times \frac{[\text{E}^{3-}]}{[\text{HE}^{2-}] [\text{HO}^-]} \\ &= \frac{[\text{MgE}^-]}{[\text{E}^{3-}] [\text{Mg}^{2+}]} \times \frac{[\text{E}^{3-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HE}^{2-}] K_i} \end{aligned}$$

où $K_i = [\text{H}_3\text{O}^+] [\text{HO}^-]$ désigne le produit ionique de l'eau.

Dans cette relation apparaissent alors :

- la constante de formation de MgE^- :



- la constante d'acidité du couple $\text{HE}^{2-}/\text{E}^{3-}$:

$$K'_3 = \frac{[\text{E}^{3-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HE}^{2-}]} = 10^{-11,5}$$

Par suite :

$$K = \frac{K_f K'_3}{K_i} = \frac{10^7 \times 10^{-11,5}}{10^{-14}} \Rightarrow K = 10^{9,5}$$

avec :

$$K = \frac{[\text{MgE}^-]}{[\text{HE}^{2-}] [\text{Mg}^{2+}] [\text{HO}^-]} \Rightarrow [\text{Mg}^{2+}] = \frac{[\text{MgE}^-]}{[\text{HE}^{2-}]} \times \frac{1}{K [\text{HO}^-]}$$

où :

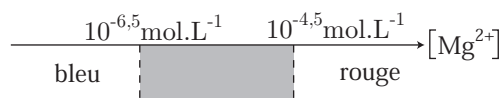
$$\begin{aligned} \text{pH} = 10 \Rightarrow [\text{HO}^-] &= 10^{-4} \Rightarrow K \times [\text{HO}^-] = 10^{9,5-4} = 10^{5,5} \\ &\Rightarrow [\text{Mg}^{2+}] = \frac{[\text{MgE}^-]}{[\text{HE}^{2-}]} \times \frac{1}{10^{5,5}} \end{aligned}$$

- La solution est rouge lorsque $[\text{MgE}^-] \geq 10 [\text{HE}^{2-}]$, c'est-à-dire pour :

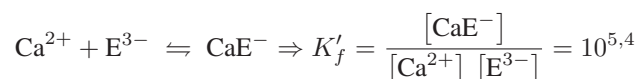
$$[\text{Mg}^{2+}] \geq \frac{10}{10^{5,5}} = 10^{-4,5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

- La solution est bleue pour : $[\text{HE}^{2-}] \geq 10 [\text{MgE}^-]$, ou encore :

$$[\text{Mg}^{2+}] \leq \frac{0,1}{10^{5,5}} = 10^{-6,5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$



- (b) En considérant la complexation des ions Ca^{2+} , il convient de s'intéresser à l'équilibre :



auquel cas l'équilibre :



a pour constante :

$$K' = \frac{K'_f K'_3}{K_i} = \frac{10^{5,4} \times 10^{-11,5}}{10^{-14}} = 10^{7,9}$$

définie par :

$$K' = \frac{[\text{CaE}^-]}{[\text{HE}^{2-}] [\text{Ca}^{2+}] [\text{HO}^-]}$$

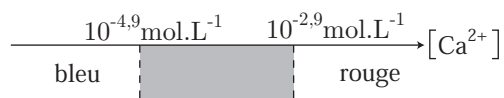
$$\Rightarrow [\text{Ca}^{2+}] = \frac{[\text{CaE}^-]}{[\text{HE}^{2-}]} \times \frac{1}{K' [\text{HO}^-]} = \frac{[\text{CaE}^-]}{[\text{HE}^{2-}]} \times \frac{1}{10^{3,9}}$$

- La solution est rouge lorsque $[\text{CaE}^-] \geq 10 [\text{HE}^{2-}]$, ce qui signifie que :

$$[\text{Ca}^{2+}] \geq \frac{10}{10^{3,9}} = 10^{-2,9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

- Elle devient bleue dès que $[\text{HE}^{2-}] \geq 10 [\text{CaE}^-]$:

$$[\text{Ca}^{2+}] \leq \frac{0,1}{10^{3,9}} = 10^{-4,9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$



- (c) Les résultats précédents montrent que le virage du rouge au bleu se produit pour une concentration en ions Mg^{2+} très inférieure à celle des ions Ca^{2+} . Par conséquent, le NET est plus sensible avec le magnésium.
4. Les masses molaires du calcium et du magnésium valant respectivement $M_{\text{Ca}} = 40,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{Mg}} = 24,3 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, chaque litre d'eau minérale contient :

$$n_{\text{Ca}} = \frac{202 \cdot 10^{-3}}{40,1} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mole d'ions } \text{Ca}^{2+}$$

et

$$n_{\text{Mg}} = \frac{36 \cdot 10^{-3}}{24,3} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ mole d'ions Mg}^{2+}$$

auxquels correspondent des concentrations :

$$C_{\text{Ca}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ et } C_{\text{Mg}} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Aussi, un échantillon de volume $V = 10 \text{ mL}$ de cette eau contient :

$$n'_{\text{Ca}} = C_{\text{Ca}} V = 5 \cdot 10^{-5} \text{ mole de Ca}^{2+} \text{ et } n'_{\text{Mg}} = C_{\text{Mg}} V = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ mole de Mg}^{2+}$$

L'équivalence est alors atteinte lorsque sont versées n_{EDTA} moles d'EDTA, telles que :

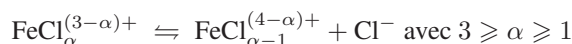
$$n_{\text{EDTA}} = n'_{\text{Ca}} + n'_{\text{Mg}} = 6,5 \cdot 10^{-5} \text{ mole}$$

Avec une concentration en EDTA : $C_{\text{EDTA}} = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, il conviendra donc de verser un volume V_{EDTA} d'EDTA tel que :

$$\begin{aligned} V_{\text{EDTA}} \times C_{\text{EDTA}} = n_{\text{EDTA}} &\Rightarrow V_{\text{EDTA}} = \frac{n_{\text{EDTA}}}{C_{\text{EDTA}}} = \frac{6,5 \cdot 10^{-5}}{10^{-2}} = 6,5 \cdot 10^{-3} \text{ L} \\ &\Rightarrow V_{\text{EDTA}} = 6,5 \text{ mL} \end{aligned}$$

● 321 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

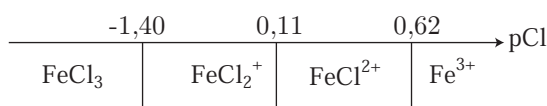
1. Soit K_{d_α} la constante associée à l'équilibre de dissociation :



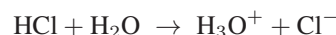
définie par :

$$\begin{aligned} K_{d_\alpha} &= \frac{[\text{FeCl}_{\alpha-1}^{(4-\alpha)+}] [\text{Cl}^-]}{[\text{FeCl}_\alpha^{(3-\alpha)+}]} \\ &\Rightarrow \log K_{d_\alpha} = \log \left(\frac{[\text{FeCl}_{\alpha-1}^{(4-\alpha)+}]}{[\text{FeCl}_\alpha^{(3-\alpha)+}]} \right) + \log [\text{Cl}^-] \\ &\Rightarrow \log \left(\frac{[\text{FeCl}_{\alpha-1}^{(4-\alpha)+}]}{[\text{FeCl}_\alpha^{(3-\alpha)+}]} \right) = p\text{Cl} - pK_{d_\alpha} \end{aligned}$$

Aussi, lorsque $p\text{Cl} > pK_{d_\alpha}$, $\text{FeCl}_{\alpha-1}^{(4-\alpha)+}$ est l'espèce prédominante, tandis que $\text{FeCl}_\alpha^{(3-\alpha)+}$ le devient pour $p\text{Cl} < pK_{d_\alpha}$, où $pK_{d_\alpha} = -\log K_{d_\alpha}$. Par suite, le diagramme de prédominance des complexes du fer prend l'allure suivante :



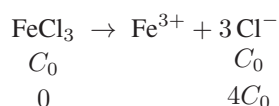
2. Initialement, la solution d'acide chlorhydrique a été obtenue par la dissociation de HCl dans l'eau :



à l'issue de laquelle $[\text{Cl}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}$. C'est pourquoi en l'absence de chlorure ferrique, pCl prend la valeur :

$$\text{pCl}_{\text{max}} = -\log(10^{-2}) = 2$$

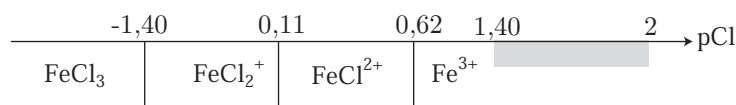
Quant à FeCl_3 , c'est lors de sa dissociation totale qu'il libère le *maximum* d'ions Cl^- dans la solution d'acide chlorhydrique qui contient préalablement $C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ions Cl^- :



Ce faisant, la valeur *minimum* de pCl est :

$$\text{pCl}_{\text{min}} = -\log(0,04) = 1,40$$

Associé au diagramme de prédominance précédent :



les valeurs de pCl_{max} et de pCl_{min} révèlent que Fe^{3+} est l'espèce prédominante. Cependant, les valeurs relatives de pCl_{min} et de $\text{p}K_{d_3} + 1 = 1,62$ ne permet pas de négliger la présence des ions FeCl^{2+} . En revanche, on pourra légitimement ignorer la présence des ions FeCl_2^+ et de FeCl_3 .

3. Ayant été introduit initialement à la concentration $C_0 = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, sous forme de FeCl_3 , le fer doit se retrouver sous toutes ses formes (libre ou complexées) :

$$C_0 = [\text{FeCl}_3] + [\text{FeCl}_2^+] + [\text{FeCl}^{2+}] + [\text{Fe}^{3+}]$$

où l'on peut négliger $[\text{FeCl}_3]$ et de $[\text{FeCl}_2^+]$ afin d'obtenir :

$$C_0 = [\text{FeCl}^{2+}] + [\text{Fe}^{3+}] \Rightarrow [\text{FeCl}^{2+}] = C_0 - [\text{Fe}^{3+}] \quad (53)$$

De même, la solution de FeCl_3 dans l'acide chlorhydrique, à la concentration C_0 , contient au total $4C_0 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ de l'élément chlore, sous formes libre ou complexées :

$$4C_0 = 3[\text{FeCl}_3] + 2[\text{FeCl}_2^+] + [\text{FeCl}^{2+}] + [\text{Cl}^-]$$

où $[\text{FeCl}_3]$ et $[\text{FeCl}_2^+]$ peuvent être ignorées :

$$4C_0 = [\text{FeCl}^{2+}] + [\text{Cl}^-] \quad (54)$$

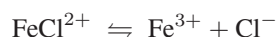
4. En posant : $[\text{Fe}^{3+}] = x$, l'équation (53) devient :

$$[\text{FeCl}^{2+}] = C_0 - x \quad (55)$$

de sorte que l'équation (54) fournit :

$$4C_0 = C_0 - x + [\text{Cl}^-] \Rightarrow [\text{Cl}^-] = 3C_0 + x \quad (56)$$

5. L'équilibre de dissociation :



est caractérisé par la constante $K_{d_3} = 0,24$ définie par :

$$K_{d_3} = \frac{[\text{Fe}^{3+}] [\text{Cl}^-]}{[\text{FeCl}^{2+}]}$$

c'est-à-dire, compte tenu des identités (55) et (56) :

$$\begin{aligned} K_{d_3} &= \frac{x \times (3C_0 + x)}{C_0 - x} \Rightarrow C_0 K_{d_3} - K_{d_3} x = 3C_0 x + x^2 \\ &\Rightarrow x^2 + (3C_0 + K_{d_3}) x - C_0 K_{d_3} = 0 \end{aligned}$$

En choisissant $K_{d_3} = 0,24$ et $C_0 = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, cette équation admet également une expression numérique :

$$x^2 + 0,27x - 24 \cdot 10^{-4} = 0$$

Le discriminant de cette équation :

$$\Delta = (0,27)^2 + 4 \times 24 \cdot 10^{-4} = 8,25 \cdot 10^{-2}$$

génère deux solutions :

$$x = \frac{-0,27 + \sqrt{8,25 \cdot 10^{-2}}}{2} = 8,6 \cdot 10^{-3} \text{ ou } x = \frac{-0,27 - \sqrt{8,25 \cdot 10^{-2}}}{2} = -2,8 \cdot 10^{-1}$$

dont seule la positive peut représenter une concentration :

$$[\text{Fe}^{3+}] = x = 8,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Aussi, les relations (55) donnent directement :

$$[\text{FeCl}^{2+}] = C_0 - x = 10^{-2} - 8,6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow [\text{FeCl}^{2+}] = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et :

$$[\text{Cl}^-] = 3C_0 + x = 3 \times 0,01 + 8,6 \cdot 10^{-3} \Rightarrow [\text{Cl}^-] = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En outre, la constante $K_{d_2} = 0,78$ de l'équilibre : $\text{FeCl}_2^+ \rightleftharpoons \text{FeCl}^{2+} + \text{Cl}^-$ est définie par :

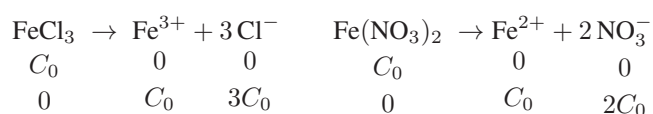
$$\begin{aligned} K_{d_2} &= \frac{[\text{FeCl}^{2+}] [\text{Cl}^-]}{[\text{FeCl}_2^+]} \\ \Rightarrow [\text{FeCl}_2^+] &= \frac{[\text{FeCl}^{2+}] [\text{Cl}^-]}{K_{d_2}} = \frac{1,4 \cdot 10^{-3} \times 3,9 \cdot 10^{-2}}{0,78} \\ \Rightarrow [\text{FeCl}_2^+] &= 7 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

tandis que l'équilibre : $\text{FeCl}_3 \rightleftharpoons \text{FeCl}_2^+ + \text{Cl}^-$ est caractérisé par la constante :

$$\begin{aligned} K_{d_1} = 25 &= \frac{[\text{FeCl}_2^+][\text{Cl}^-]}{[\text{FeCl}_3]} \\ \Rightarrow [\text{FeCl}_3] &= \frac{[\text{FeCl}_2^+][\text{Cl}^-]}{K_{d_1}} = \frac{7.10^{-5} \times 3,9.10^{-2}}{25} \\ \Rightarrow [\text{FeCl}_3] &= 1,1.10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

● 322 ————— Concours ENSI

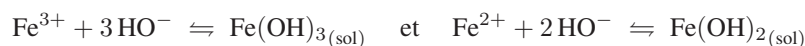
La dissociation du chlorure ferrique et du nitrate ferreux dans l'eau est totale, conformément aux équations-bilan suivantes :



Les ions Cl^- et NO_3^- ainsi libérés demeurent en solution avec les concentrations :

$$[\text{Cl}^-] = 3C_0 \text{ et } [\text{NO}_3^-] = 2C_0 \quad (57)$$

En revanche, les ions Fe^{3+} et Fe^{2+} peuvent réagir avec les ions HO^- introduits avec la soude, selon les équilibres :



de produits de solubilité :

$$K_{s_1} = [\text{Fe}^{3+}][\text{HO}^-]^3 \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = \frac{K_{s_1}}{[\text{HO}^-]^3} \quad (58)$$

et :

$$K_{s_2} = [\text{Fe}^{2+}][\text{HO}^-]^2 \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_{s_2}}{[\text{HO}^-]^2} \quad (59)$$

Outre ces ions, le milieu réactionnel contient également des ions H_3O^+ et Na^+ (libérés par la soude). Aussi, la neutralité électrique du mélange se traduit par :

$$[\text{Na}^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] + 2[\text{Fe}^{2+}] + 3[\text{Fe}^{3+}] = [\text{HO}^-] + [\text{Cl}^-] + [\text{NO}_3^-] \quad (60)$$

⚠ Dans l'écriture de la loi décrivant la neutralité des solutions, interviennent fréquemment des ions $\text{X}^{\alpha\pm}$. N'oubliez pas, dans ce cas, de multiplier leur concentration par la valeur absolue de la charge : $\alpha \times [\text{X}^{\alpha\pm}]$, ce qui rend compte que chaque $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ de $\text{X}^{\alpha\pm}$ apporte $\alpha \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ de charges.

En imposant $\text{pH} = 0$, on fixe également les concentrations :

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-10} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \text{ et } [\text{HO}^-] = \frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{10^{-14}}{10^{-10}} = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Aussi, les relations (58) et (59) fournissent :

$$[\text{Fe}^{3+}] = \frac{2 \cdot 10^{-37}}{10^{-12}} = 2 \cdot 10^{-25} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et :

$$[\text{Fe}^{2+}] = \frac{2 \cdot 10^{-15}}{10^{-8}} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

En tenant compte des identités (57), l'équation (60) devient :

$$[\text{Na}^+] + 10^{-10} + 4 \cdot 10^{-25} + 6 \cdot 10^{-7} = 10^{-4} + 5 C_0 \text{ avec } C_0 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

et se simplifie après élimination des termes négligeables :

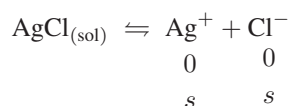
$$[\text{Na}^+] = 10^{-4} + 5 \cdot 10^{-3} = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Or, pour obtenir une telle concentration, il a fallu introduire un nombre n de moles de NaOH dans $V = 100 \text{ mL}$ d'eau :

$$[\text{Na}^+] = \frac{n}{V} \Rightarrow n = [\text{Na}^+] \times V = 5,1 \cdot 10^{-3} \times 0,1 \Rightarrow n = 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ mole}$$

● 323 ————— Concours de la banque « Agro »

1. Dans l'eau, la dissolution de AgCl se traduit par l'équation-bilan :



où $s = [\text{Ag}^+] = [\text{Cl}^-]$ désigne la solubilité de AgCl car Ag^+ et Cl^- n'ont pas d'autre origine que la dissolution de AgCl. C'est pourquoi le produit de solubilité s'écrit :

$$K_s = [\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-] = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{K_s} = 1,26 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2. La réaction du chlorure d'argent avec l'ammoniac peut produire l'ion complexe diammineargent (I), selon l'équation :



dont la constante est définie par :

$$K = \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+] [\text{Cl}^-]}{[\text{NH}_3]^2} = \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{NH}_3]^2 [\text{Ag}^+]} \times [\text{Cl}^-] [\text{Ag}^+]$$

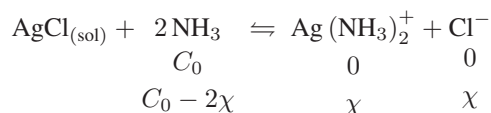
où l'on reconnaît les définitions des constantes :

$$K_s = [\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-] \text{ et } \beta = \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{Ag}^+] [\text{NH}_3]^2}$$

Par conséquent :

$$K = \beta \times K_s = 10^{7,2-9,8} \Rightarrow K = 10^{-2,6} \simeq 2,5 \cdot 10^{-3}$$

3. Soit $C_0 = 6 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ la concentration initiale en ammoniac et soit χ l'avancement de la réaction décrite par l'équation (61) :



La définition de la constante K amène à poser :

$$\begin{aligned} K &= \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+][\text{Cl}^-]}{[\text{NH}_3]^2} \Rightarrow K = \frac{\chi^2}{(C_0 - 2\chi)^2} \Rightarrow \sqrt{K} = \frac{\chi}{C_0 - 2\chi} \\ &\Rightarrow C_0\sqrt{K} - 2\sqrt{K}\chi = \chi \\ &\Rightarrow \chi = \frac{C_0\sqrt{K}}{1 + 2\sqrt{K}} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\chi = \frac{6 \times 10^{-1,3}}{1 + 2 \times 10^{-1,3}} \Rightarrow [\text{Cl}^-] = \chi = 2,73 \cdot 10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Par conséquent, le nombre de moles d'ions Cl^- contenus dans le volume $V_0 = 200 \text{ mL}$ de solution vaut :

$$n(\text{Cl}^-) = \chi \times V_0 = 2,73 \cdot 10^{-1} \times 0,2 = 5,46 \cdot 10^{-2} \text{ mole d'ions Cl}^-$$

tandis qu'initialement le milieu réactionnel contenait $m_0 = 20 \text{ g}$ de AgCl , c'est-à-dire :

$$n_0(\text{AgCl}) = \frac{m_0}{M} = \frac{20}{143,4} = 0,139 \text{ mole de AgCl}_{(\text{sol})}$$

En conclusion :

$$n(\text{Cl}^-) < n_0(\text{AgCl})$$

suffit à montrer que le chlorure d'argent n'est pas totalement dissous.

4. Pour dissoudre totalement $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$, il faudrait utiliser un volume V_1 d'ammoniac assurant :

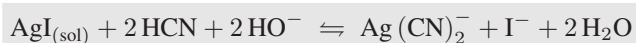
$$n(\text{Cl}^-) = n_0(\text{AgCl})$$

où $n_0(\text{AgCl}) = 0,139 \text{ mole}$ et $n(\text{Cl}^-) = \chi \times V_1$. Ce faisant :

$$\begin{aligned} \chi \times V_1 = n_0(\text{AgCl}) &\Rightarrow V_1 = \frac{n_0(\text{AgCl})}{\chi} = \frac{0,139}{2,73 \cdot 10^{-1}} \\ &\Rightarrow V_1 = 0,509 \text{ L} = 509 \text{ mL} \end{aligned}$$

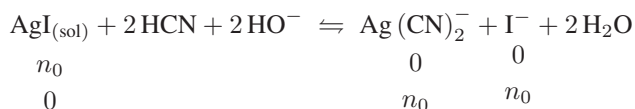
● 324 ————— Concours Centrale

1. Le précipité $\text{AgI}_{(\text{sol})}$ peut disparaître par formation du complexe $\text{Ag}(\text{CN})_2^-$. C'est pourquoi l'ajout de HCN dans le milieu réactionnel se traduit par la réaction d'équation :



à condition toutefois d'apporter des ions HO^- (avec de la soude).

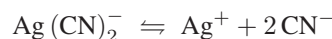
2. Lors de la disparition de AgI , le bilan de cette réaction s'écrit :



ce qui suffit à montrer que lorsque $\text{AgI}_{(\text{sol})}$ disparaît, la solution (de volume 1 L) contient des ions $\text{Ag}(\text{CN})_2^-$ et I^- à la même concentration :

$$[\text{Ag}(\text{CN})_2^-] = [\text{I}^-] = C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

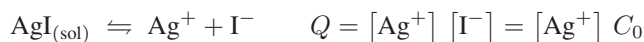
En outre, l'équilibre de dissociation du complexe diammineargent (I) :



est à l'origine de la définition de la constante :

$$K_d = \frac{[\text{Ag}^+][\text{CN}^-]^2}{[\text{Ag}(\text{CN})_2^-]} = \frac{[\text{Ag}^+][\text{CN}^-]^2}{C_0} \Rightarrow [\text{Ag}^+] = \frac{K_d C_0}{[\text{CN}^-]^2}$$

Enfin, le précipité disparaît dès que le quotient de réaction :



devient inférieur au produit de solubilité K_s :

$$[\text{Ag}^+] C_0 < K_s \Rightarrow \frac{K_d C_0^2}{[\text{CN}^-]^2} < K_s \Rightarrow [\text{CN}^-] > \sqrt{\frac{K_d}{K_s}} \times C_0$$

Aussi, le précipité de $\text{AgI}_{(\text{sol})}$ disparaît lorsque :

$$[\text{CN}^-] = \sqrt{\frac{K_d}{K_s}} \times C_0 \text{ avec } K_d = \frac{1}{\beta}$$

Application numérique :

$$[\text{CN}^-] = \sqrt{\frac{10^{-21}}{10^{-16}}} \times 10^{-2} \Rightarrow [\text{CN}^-] = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

3. Le cyanure CN^- se retrouve, dans le milieu réactionnel, sous forme de HCN , $\text{Ag}(\text{CN})_2^-$ et CN^- . Initialement introduit à la concentration $C_1 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, sa conservation se traduit par :

$$C_1 = [\text{HCN}] + [\text{CN}^-] + 2 [\text{Ag}(\text{CN})_2^-]$$

où $[\text{Ag}(\text{CN})_2^-] = C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{CN}^-] = 3,2 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} [\text{HCN}] &= C_1 - [\text{CN}^-] - 2 [\text{Ag}(\text{CN})_2^-] \\ &= 0,1 - 3,2 \cdot 10^{-5} - 2 \cdot 10^{-2} \simeq 8 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

Ce faisant, le pH de cette solution est donné par la relation de Henderson :

$$\text{pH} = pK_a + \log \left(\frac{[\text{CN}^-]}{[\text{HCN}]} \right) = 9,3 + \log \left(\frac{3,2 \cdot 10^{-5}}{8 \cdot 10^{-2}} \right) \Rightarrow \text{pH} = 5,9$$

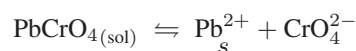
● 325 ————— Concours ENSI

1. Le diagramme de prédominance du couple $\text{HCrO}_4^-/\text{CrO}_4^{2-}$ ($pK_a = 6,4$) :



montre que CrO_4^{2-} est prépondérant pour $\text{pH} \geq 7,4$.

2. Soit s la solubilité de PbCrO_4 , qui se dissout dans l'eau de lavage, conformément à l'équation :



La concentration $[\text{Pb}^{2+}]$ s'identifie à s car la présence des ions Pb^{2+} a pour unique origine la dissolution du chromate de plomb. En revanche, pour $\text{pH} = 7 < 7,4$, l'élément chrome se présente simultanément sous forme de CrO_4^{2-} et de HCrO_4^- . C'est pourquoi :

$$s = [\text{CrO}_4^{2-}] + [\text{HCrO}_4^-]$$

Or, la constante d'acidité du couple $\text{HCrO}_4^-/\text{CrO}_4^{2-}$:

$$K_a = \frac{[\text{CrO}_4^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{HCrO}_4^-]} \Rightarrow [\text{HCrO}_4^-] = [\text{CrO}_4^{2-}] \times \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a}$$

conduit à :

$$\begin{aligned} s &= [\text{CrO}_4^{2-}] + [\text{CrO}_4^{2-}] \times \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a} = [\text{CrO}_4^{2-}] \left(1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a} \right) \\ \Rightarrow [\text{CrO}_4^{2-}] &= \frac{s}{1 + [\text{H}_3\text{O}^+]/K_a} = \frac{[\text{Pb}^{2+}]}{1 + [\text{H}_3\text{O}^+]/K_a} \end{aligned}$$

Par suite, le produit de solubilité de PbCrO_4 devient :

$$K_{s_1} = [\text{CrO}_4^{2-}] [\text{Pb}^{2+}] = \frac{[\text{Pb}^{2+}]^2}{1 + [\text{H}_3\text{O}^+]/K_a}$$

$$\Rightarrow [\text{Pb}^{2+}] = \sqrt{K_{s_1} \times \left(1 + \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]}{K_a}\right)}$$

Application numérique : pour $\text{pH} = 7 \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+] = 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$:

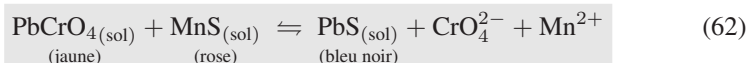
$$[\text{Pb}^{2+}] = \sqrt{10^{-13} \times \left(1 + \frac{10^{-7}}{10^{-6,4}}\right)} \Rightarrow [\text{Pb}^{2+}] = 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

ce qui signifie que chaque litre de solution contient $n = 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ions Pb^{2+} , c'est-à-dire une masse :

$$m = n \times M = 3,5 \cdot 10^{-7} \times 207 \Rightarrow m = 7,2 \cdot 10^{-5} \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} = 72 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$$

cette eau dépasse donc la norme légale de $50 \mu\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ions Pb^{2+} .

3. Les données numériques fournies par l'énoncé montrent qu'en solution, la présence simultanée d'ions S^{2-} (provenant de MnS) et d'ions Pb^{2+} (provenant de PbCrO_4) peut générer un précipité de PbS . En fait, ce précipité s'obtient par réaction de MnS avec PbCrO_4 , selon l'équation :



dont la constante d'équilibre vaut :

$$K = [\text{CrO}_4^{2-}] [\text{Mn}^{2+}] = [\text{CrO}_4^{2-}] [\text{Pb}^{2-}] \times [\text{Mn}^{2+}] [\text{S}^{2-}] \times \frac{1}{[\text{S}^{2-}] [\text{Pb}^{2-}]}$$

où l'on reconnaît les définitions des constantes :

$$K_{s_1} = [\text{Pb}^{2+}] [\text{CrO}_4^{2-}] \quad K_{s_2} = [\text{Mn}^{2+}] [\text{S}^{2-}] \quad K_{s_3} = [\text{Pb}^{2+}] [\text{S}^{2-}]$$

Par conséquent :

$$K = \frac{K_{s_1} K_{s_2}}{K_{s_3}} = \frac{10^{-13} \times 10^{-9,6}}{10^{-27,8}} \Rightarrow K = 1,6 \cdot 10^5$$

La grande valeur de K montre que la réaction d'équation (62) est presque totale : le mélange des pigments jaune et rose conduit à un pigment bleu-noir !

● 326 ————— Lycée Camille Guérin, Poitiers

1. L'eau contient, à 25°C , des ions HO^- et H_3O^+ à la même concentration :

$$[\text{HO}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] = C_1 = 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

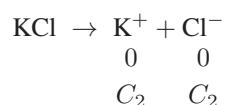
C'est pour cette raison que sa conductivité n'est pas nulle :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} [\text{H}_3\text{O}^+] + \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}^-] = (\lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} + \lambda_{\text{HO}^-}) C_1 \\ &= \Lambda_{\text{H}_2\text{O}} \times C_1 \text{ en posant } \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} + \lambda_{\text{HO}^-} = \Lambda_{\text{H}_2\text{O}}\end{aligned}$$

et affecte une résistance R_1 à la cellule de conductimétrie :

$$R_1 = \frac{k}{\sigma_1} = \frac{k}{\Lambda_{\text{H}_2\text{O}} C_1} \Rightarrow \frac{1}{R_1} = \frac{\Lambda_{\text{H}_2\text{O}} C_1}{k} \quad (63)$$

En revanche, la dissolution du chlorure de potassium, à la concentration $C_2 = 0,02 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 20 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$ est totale :



et libère des ions K^+ et Cl^- dans l'eau, à la concentration :

$$[\text{K}^+] = [\text{Cl}^-] = C_2 = 20 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$$

Aussi, une solution aqueuse de KCl présente une conductivité :

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} [\text{H}_3\text{O}^+] + \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}^-] + \lambda_{\text{K}^+} [\text{K}^+] + \lambda_{\text{Cl}^-} [\text{Cl}^-] \\ &= (\lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} + \lambda_{\text{HO}^-}) C_1 + (\lambda_{\text{K}^+} + \lambda_{\text{Cl}^-}) C_2 \\ &= \Lambda_{\text{H}_2\text{O}} C_1 + \Lambda_{\text{KCl}} C_2\end{aligned}$$

associée à la résistance :

$$R_2 = \frac{k}{\sigma_2} \Rightarrow \frac{1}{R_2} = \frac{\sigma_2}{k} = \frac{\Lambda_{\text{H}_2\text{O}} C_1}{k} + \frac{\Lambda_{\text{KCl}} C_2}{k}$$

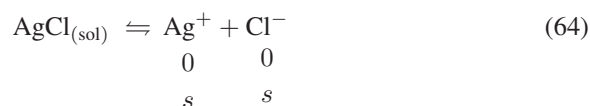
où apparaît l'expression (63) de R_1 :

$$\begin{aligned}\frac{\Lambda_{\text{H}_2\text{O}} C_1}{k} = \frac{1}{R_1} &\Rightarrow \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{\Lambda_{\text{KCl}} C_2}{k} \\ &\Rightarrow \frac{\Lambda_{\text{KCl}} C_2}{k} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} = \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2} \\ &\Rightarrow k = \Lambda_{\text{KCl}} C_2 \times \frac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}\end{aligned}$$

Application numérique :

$$k = 138,3 \cdot 10^{-4} \times 20 \times \frac{22 \cdot 10^4 \times 100}{22 \cdot 10^4 - 100} \Rightarrow k = 27,67 \text{ m}^{-1}$$

2. La solution saturée en AgCl est obtenue par dissolution partielle du sel :



où $s = [\text{Ag}^+] = [\text{Cl}^-]$ désigne la solubilité du chlorure d'argent. Aussi, sa conductivité vaut :

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= \lambda_{\text{Ag}^+} [\text{Ag}^+] + \lambda_{\text{Cl}^-} [\text{Cl}^-] + \lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} [\text{H}_3\text{O}^+] + \lambda_{\text{HO}^-} [\text{HO}^-] \\ &= (\lambda_{\text{Ag}^+} + \lambda_{\text{Cl}^-}) s + (\lambda_{\text{H}_3\text{O}^+} + \lambda_{\text{HO}^-}) C_1 \\ &= \Lambda_{\text{AgCl}} \times s + \Lambda_{\text{H}_2\text{O}} C_1\end{aligned}$$

laquelle est responsable de la résistance R_3 de la cellule de conductimétrie :

$$R_3 = \frac{k}{\sigma_3} \Rightarrow \frac{1}{R_3} = \frac{\Lambda_{\text{AgCl}} \times s}{k} + \frac{\Lambda_{\text{H}_2\text{O}} C_1}{k}$$

soit, compte tenu du résultat (63) :

$$\begin{aligned}\frac{\Lambda_{\text{H}_2\text{O}} C_1}{k} = \frac{1}{R_1} &\Rightarrow \frac{1}{R_3} = \frac{\Lambda_{\text{AgCl}}}{k} \times s + \frac{1}{R_1} \\ &\Rightarrow \frac{\Lambda_{\text{AgCl}}}{k} \times s = \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1} \\ &\Rightarrow s = \frac{k}{\Lambda_{\text{AgCl}}} \times \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1} \right)\end{aligned}$$

Application numérique :

$$s = \frac{27,67}{126,8 \cdot 10^{-4}} \times \left(\frac{1}{102 \cdot 10^3} - \frac{1}{22 \cdot 10^4} \right) \simeq 1,1 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Ce faisant, la constante de l'équilibre (64) :

$$K_s = [\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-] = s^2$$

conduit au produit de solubilité de AgCl :

$$pK_s = -\log(s^2) \Rightarrow pK_s = 9,9$$

● 327 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Considérons deux situations extrêmes :

- Si l'aluminium est totalement dissous sous forme d'ions Al^{3+} , il s'ensuit que $[\text{Al}^{3+}] = C_0$ tandis que l'absence de précipité $\text{Al}(\text{OH})_3(\text{sol})$ repose sur la condition :

$$\begin{aligned}[\text{Al}^{3+}] [\text{HO}^-]^3 < K_s &\Rightarrow C_0 \times \left(\frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \right)^3 < K_s \\ &\Rightarrow \log C_0 - 3 pK_i + 3 \text{pH} < -pK_s \\ &\Rightarrow \text{pH} < pK_i - \frac{1}{3} (pK_s + \log C_0)\end{aligned}$$

Il existe donc une valeur de pH :

$$\text{pH}_1 = pK_i - \frac{1}{3} (pK_s + \log C_0) = 14 - \frac{32 - 4}{3} \Rightarrow \text{pH}_1 = 4,7$$

telle que pour $\text{pH} < \text{pH}_1$ l'aluminium se présente sous la seule forme d'ions Al^{3+} . Par suite, dès que $\text{pH} = \text{pH}_1$, le précipité $\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$ apparaît.

- Si l'aluminium est totalement dissous sous forme de complexe $\text{Al}(\text{OH})_4^-$, cela signifie que $[\text{Al}(\text{OH})_4^-] = C_0$. Du reste, la réaction de formation de ce complexe est décrite par l'équation :



dont la constante d'équilibre est définie par :

$$\beta_4 = \frac{[\text{Al}(\text{OH})_4^-]}{[\text{Al}^{3+}] [\text{HO}^-]^4} = \frac{C_0}{[\text{Al}^{3+}] [\text{HO}^-]^4} \Rightarrow [\text{Al}^{3+}] = \frac{C_0}{\beta_4 [\text{HO}^-]^4}$$

Enfin, l'absence de précipité $\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$ est conditionnée par l'inégalité :

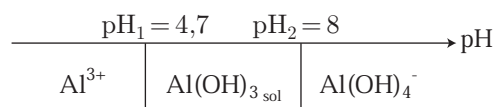
$$\begin{aligned} [\text{Al}^{3+}] [\text{HO}^-]^3 < K_s &\Rightarrow \frac{C_0}{\beta_4 [\text{HO}^-]} < K_s \Rightarrow \frac{C_0 [\text{H}_3\text{O}^+]}{\beta_4 K_i} < K_s \\ &\Rightarrow \log C_0 - \text{pH} - \log \beta_4 + \text{p}K_i < -\text{p}K_s \\ &\Rightarrow \text{pH} > \log C_0 - \log \beta_4 + \text{p}K_i + \text{p}K_s \end{aligned}$$

Par conséquent, il existe une valeur du pH :

$$\text{pH}_2 = \log C_0 - \log \beta_4 + \text{p}K_i + \text{p}K_s = -4 - 34 + 14 + 32 \Rightarrow \text{pH}_2 = 8$$

au delà de laquelle l'aluminium est totalement dissous en solution sous forme de complexe $\text{Al}(\text{OH})_4^-$; il s'agit également du pH à partir duquel $\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$ disparaît.

Ces résultats sont résumés sur le diagramme ci-dessous :



2. L'aluminium ne peut se présenter en solution que sous la forme d'ions Al^{3+} et $\text{Al}(\text{OH})_4^-$, c'est pourquoi la solubilité de $\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$ s'écrit :

$$s = [\text{Al}^{3+}] + [\text{Al}(\text{OH})_4^-] \quad (65)$$

Trois cas doivent alors être distingués :

- Lorsque $\text{pH} \in [3,7; 4,7[$, seul Al^{3+} est présent en solution, à la concentration $C_0 = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, en raison de quoi :

$$s = [\text{Al}^{3+}] = C_0 = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow \log s = -4 \quad (66)$$

- Lorsque $\text{pH} \in [4,7; 8]$, la présence de $\text{Al}(\text{OH})_{3(\text{sol})}$ se traduit par l'équation :

$$[\text{Al}^{3+}] [\text{HO}^-]^3 = K_s \Rightarrow [\text{Al}^{3+}] = \frac{K_s}{[\text{HO}^-]^3} = \frac{K_s}{K_i^3} [\text{H}_3\text{O}^+]^3 = \frac{K_s}{K_i^3} h^3$$

en posant $h = [\text{H}_3\text{O}^+]$. Du reste, l'équilibre de complexation impose :

$$\begin{aligned}\beta_4 &= \frac{[\text{Al}(\text{OH})_4^-]}{[\text{Al}^{3+}] [\text{HO}^-]^4} \Rightarrow [\text{Al}(\text{OH})_4^-] = \beta_4 [\text{Al}^{3+}] [\text{HO}^-]^4 \\ &\Rightarrow [\text{Al}(\text{OH})_4^-] = \beta_4 [\text{Al}^{3+}] \frac{K_i^4}{[\text{H}_3\text{O}^+]^4} \\ &\Rightarrow [\text{Al}(\text{OH})_4^-] = \beta_4 \times \frac{K_s h^3}{K_i^3} \times \frac{K_i^4}{h^4} \\ &\Rightarrow [\text{Al}(\text{OH})_4^-] = \beta_4 K_s K_i \times \frac{1}{h}\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$s = \frac{K_s}{K_i^3} h^3 + \beta_4 K_s K_i \times \frac{1}{h} \quad (67)$$

Les fonctions $s_1 = \frac{K_s}{K_i^3} h^3$ et $s_2 = \beta_4 K_s K_i \times \frac{1}{h}$ sont égales lorsque :

$$\begin{aligned}\frac{K_s}{K_i^3} h_0^3 &= \beta_4 K_s K_i \times \frac{1}{h_0} \Rightarrow h_0 = \sqrt[4]{\beta_4 K_i^4} = 10^{-14} \sqrt[4]{10^{34}} \\ &\Rightarrow h_0 = 3,16 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ &\Rightarrow \text{pH}_0 = -\log h_0 = 5,5\end{aligned}$$

Lorsque $h > h_0$, c'est-à-dire $\text{pH} < \text{pH}_0 = 5,5$, $s_1 > s_2$ permet de poser :

$$s \simeq s_1 = \frac{K_s}{K_i^3} h^3 \Rightarrow \log s \simeq 3 pK_i - pK_s - 3 \text{ pH} \quad (68)$$

$$\Rightarrow \log s \simeq 10 - 3 \text{ pH pour } \text{pH} \in [4,7; 5,5[\quad (69)$$

En revanche, lorsque $h < h_0$ (soit encore $\text{pH} > \text{pH}_0$), l'inégalité $s_2 > s_1$ apporte une simplification à l'expression de s :

$$s \simeq s_2 = \beta_4 K_s K_i \times \frac{1}{h} \quad (70)$$

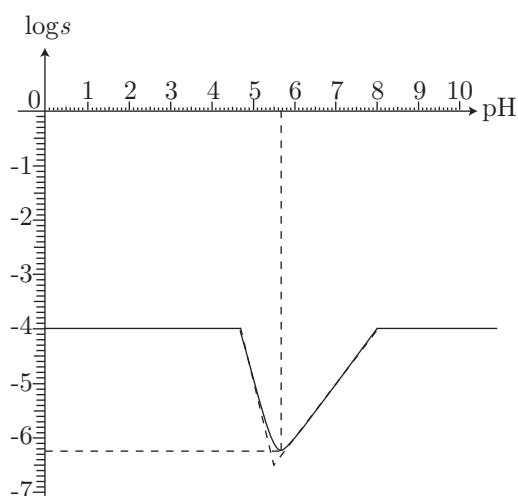
$$\Rightarrow \log s \simeq \log \beta_4 - pK_s - pK_i + \text{pH} \quad (71)$$

$$\Rightarrow \log s \simeq -12 + \text{pH pour } \text{pH} \in]5,5; 8[\quad (72)$$

- Lorsque $\text{pH} \in]8, 9]$, l'aluminium est totalement dissous sous la forme d'ions $\text{Al}(\text{OH})_4^-$, auquel cas la relation (65) devient :

$$s = [\text{Al}(\text{OH})_4^-] = C_0 \Rightarrow s = 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow \log s = -4 \quad (73)$$

Les résultats (66), (69), (72) et (73) conduisent à la représentation graphique de la courbe $\log s = f(\text{pH})$:



3. La solubilité s dépend de $h = [\text{H}_3\text{O}^+]$ conformément à la loi (67) :

$$s = \frac{K_s}{K_i^3} h^3 + \beta_4 K_s K_i \times \frac{1}{h} \Rightarrow \frac{ds}{dh} = \frac{3K_s}{K_i^3} h^2 - \frac{\beta_4 K_s K_i}{h^2}$$

Aussi, la solubilité est maximale pour une valeur h_1 de h , solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \left. \frac{ds}{dh} \right|_{h_1} = 0 &\Rightarrow \frac{3K_s}{K_i^3} h_1^2 = \frac{\beta_4 K_s K_i}{h_1^2} \Rightarrow h_1 = \sqrt[4]{\frac{\beta_4 K_i^4}{3}} = K_i \sqrt[4]{\frac{\beta_4}{3}} \\ &\Rightarrow h_1 = 10^{-14} \times \sqrt[4]{\frac{10^{34}}{3}} = 2,4 \cdot 10^{-6} \\ &\Rightarrow \text{pH}_1 = 5,62 \end{aligned}$$

En remarquant que :

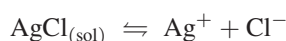
$$\frac{K_s}{K_i^3} = 10^{-32+3 \times 14} = 10^{10} \text{ et } \beta_4 K_s K_i = 10^{34-32-14} = 10^{-12}$$

la solubilité *minimum* vaut :

$$\begin{aligned} s_{\min} &= \frac{K_s}{K_i^3} h_1^3 + \beta_4 K_s K_i \times \frac{1}{h_1} = 10^{10-3 \times 5,62} + 10^{-12+5,62} \\ &\Rightarrow s_{\min} = 5,55 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow \log(s_{\min}) = -6,25 \end{aligned}$$

● 328 ————— Concours ENSTIM

1. (a) Dans l'eau pure, la réaction de dissociation de $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$:



indique que $[\text{Ag}^+] = [\text{Cl}^-]$. De fait, la solubilité s s'identifie à ces concentrations :

$$s = [\text{Ag}^+] = [\text{Cl}^-]$$

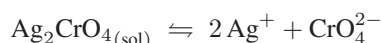
de sorte que le produit de solubilité fournit :

$$K_{s_1} = [\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-] = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{K_{s_1}}$$

Application numérique :

$$s = \sqrt{10^{-9,8}} \Rightarrow s = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

(b) De même, la réaction de dissociation de $\text{Ag}_2\text{CrO}_4(\text{sol})$:



montre que la solubilité s' du chromate d'argent s'identifie à $[\text{CrO}_4^{2-}]$. L'équation-bilan ci-dessus révèle en outre que : $[\text{Ag}^+] = 2 [\text{CrO}_4^{2-}] = 2s'$. C'est pourquoi le produit de solubilité s'écrit :

$$K_{s_2} = [\text{CrO}_4^{2-}] [\text{Ag}^+]^2 = s' \times (2s')^2 = 4s'^3 \Rightarrow s' = \sqrt[3]{\frac{K_{s_2}}{4}}$$

Application numérique :

$$s' = \sqrt[3]{\frac{10^{-11,7}}{4}} \Rightarrow s' = 7,9 \cdot 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

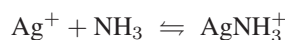
De ces deux résultats, il ressort que AgCl et Ag_2CrO_4 présentent des solubilités comparables dans l'eau pure.

(c) Une solution contenant NH_3 , à la concentration $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, peut être le siège de quatre réactions (en plus de l'autoprotolyse de l'eau qu'on négligera ici), dont la détermination préalable des constantes est recommandée.

- L'équilibre : $\text{AgCl}(\text{sol}) + \text{NH}_3 \rightleftharpoons \text{AgNH}_3^+ + \text{Cl}^-$ a pour constante :

$$K_1 = \frac{[\text{AgNH}_3^+] [\text{Cl}^-]}{[\text{NH}_3]} = \frac{[\text{AgNH}_3^+]}{[\text{NH}_3] [\text{Ag}^+]} \times \underbrace{[\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-]}_{K_{s_1}}$$

où l'on reconnaît la constante de formation $\beta_1 = \frac{[\text{AgNH}_3^+]}{[\text{NH}_3] [\text{Ag}^+]}$, associée à l'équilibre :



C'est pourquoi :

$$K_1 = \beta_1 K_{s_1} = 10^{3,3} \times 10^{-9,8} \Rightarrow K_1 = 3,16 \cdot 10^{-7}$$

- L'équilibre : $\text{AgCl}(\text{sol}) + 2 \text{NH}_3 \rightleftharpoons \text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+ + \text{Cl}^-$ présente, quant à lui, une constante :

$$K_2 = \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+] [\text{Cl}^-]}{[\text{NH}_3]^2} = \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{Ag}^+] [\text{NH}_3]^2} \times \underbrace{[\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-]}_{K_{s_1}}$$

À nouveau, la constante β_2 de formation globale du complexe $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$:

$$\beta_2 = \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+]}{[\text{Ag}^+][\text{NH}_3]^2} \text{ pour } \text{Ag}^+ + 2\text{NH}_3 \rightleftharpoons \text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$$

conduit à :

$$K_2 = \beta_2 K_{s_1} = 10^{7,4} \times 10^{-9,8} \Rightarrow K_{s_2} = 4.10^{-3}$$

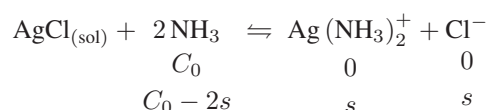
- La dissociation de AgCl : $\text{AgCl}_{(\text{sol})} \rightleftharpoons \text{Ag}^+ + \text{Cl}^-$ est caractérisée par la constante :

$$K_3 = K_{s_1} = 10^{-9,8}$$

- L'action de l'ammoniac avec l'eau : $\text{NH}_3 + \text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{NH}_4^+ + \text{HO}^-$ a pour constante d'équilibre :

$$\begin{aligned} K_4 &= \frac{[\text{NH}_4^+][\text{HO}^-]}{[\text{NH}_3]} = \frac{[\text{NH}_4^+]}{[\text{NH}_3]} \frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \text{ car } K_i = \frac{[\text{HO}^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{H}_2\text{O}]} \\ &= \frac{K_i}{K'_a} \text{ avec } K'_a = \frac{[\text{NH}_3][\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{NH}_4^+]} \\ &= 10^{-14+9,2} \Rightarrow K_4 = 1,6.10^{-5} \end{aligned}$$

Tous ces calculs indiquent que la deuxième réaction est prépondérante puisqu'elle présente une constante $K_2 = 4.10^{-3}$ très supérieure aux autres constantes. Il n'y a donc pas lieu de tenir compte de la formation du complexe monocoordonné AgNH_3^+ , mais seulement celle d'équation-bilan :



où $s = [\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+] = [\text{Cl}^-]$ désigne la solubilité de $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$. La loi d'action des masses stipule alors que :

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{[\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+][\text{Cl}^-]}{[\text{NH}_3]^2} = \frac{s^2}{(C_0 - 2s)^2} \\ \Rightarrow K_2 (C_0 - 2s)^2 - s^2 &= 0 \\ \Rightarrow \left[\sqrt{K_2} (C_0 - 2s) - s \right] \left[\sqrt{K_2} (C_0 - 2s) + s \right] &= 0 \end{aligned}$$

Le signe d'une des deux solutions :

$$\sqrt{K_2} (C_0 - 2s) + s = 0 \Rightarrow s = \frac{\sqrt{K_2} C_0}{2\sqrt{K_2} - 1} < 0$$

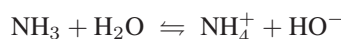
ne permet pas de la retenir, contrairement à :

$$\sqrt{K_2} (C_0 - 2s) - s = 0 \Rightarrow s = \frac{\sqrt{K_2} C_0}{1 + 2\sqrt{K_2}}$$

Application numérique :

$$s = \frac{\sqrt{4 \cdot 10^{-3}} \times 0,1}{1 + 2\sqrt{4 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow s = 5,61 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Lorsque cette réaction est achevée, la quatrième devient prépondérante avec une constante $K_4 = 1,6 \cdot 10^{-5}$ c'est-à-dire $pK_4 = 4,8$:

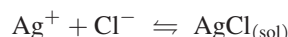


Si $\text{pH} \geq pK_{a_1} + 1$ et $\text{pH} \geq 7,5$, le pH de cette solution est celui imposé par une base faible dans l'eau :

$$\begin{aligned} \text{pH} &= 7 + \frac{1}{2} [pK_{a_1} + \log(C_0 - 2s)] \\ &= 7 + \frac{1}{2} [9,2 + \log(0,1 - 2 \times 5,61 \cdot 10^{-3})] \Rightarrow \text{pH} = 11,1 \end{aligned}$$

Les deux hypothèses ($\text{pH} > 10,2$ et $\text{pH} > 7,5$) se trouvent immédiatement validées.

2. (a) La réaction de précipitation est décrite par l'équation :



Aussi, la précipitation se produit lorsqu'un volume V d'ions Ag^+ a été versé. Les concentrations :

$$[\text{Ag}^+] = \frac{C_0 V}{V + V_0} \simeq \frac{C_0 V}{V_0} \text{ si } V \ll V_0 \text{ et } [\text{Cl}^-] = \frac{C_0 V_0}{V + V_0} \simeq C_0$$

définissent le quotient de réaction :

$$Q = [\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-] = \frac{C_0^2 V}{V_0}$$

qui s'identifie au produit de solubilité K_{s_1} , dès que la précipitation se produit :

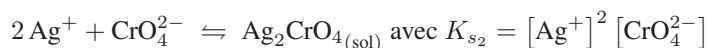
$$Q = K_{s_1} \Rightarrow \frac{C_0^2 V}{V_0} = K_{s_1} \Rightarrow V = K_{s_1} \times \frac{V_0}{C_0^2}$$

Application numérique :

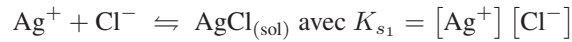
$$V = 10^{-9,8} \times \frac{20}{(0,1)^2} \Rightarrow V = 3,2 \cdot 10^{-7} \text{ mL}$$

Cette valeur confirme évidemment l'hypothèse $V \ll V_0$.

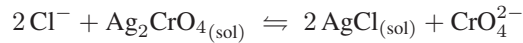
(b) L'introduction d'ions CrO_4^{2-} (à la concentration $C'_0 = \frac{0,01}{20 \cdot 10^{-3}} = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) provoque la précipitation du chromate d'argent, conformément à l'équation :



Or, la présence des ions Cl^- provoque l'apparition du précipité $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$:



Il semble donc se produire une compétition entre ces deux réactions, les ions Cl^- et CrO_4^{2-} pouvant réagir avec Ag^+ . Calculons alors la constante de la réaction d'équation :



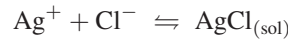
avec :

$$K = \frac{[\text{CrO}_4^{2-}]}{[\text{Cl}^-]^2} = [\text{CrO}_4^{2-}][\text{Ag}^+]^2 \times \frac{1}{[\text{Cl}^-]^2[\text{Ag}^+]^2} = \frac{K_{s2}}{(K_{s1})^2}$$

$$\Rightarrow K = 10^{-11,7+2 \times 9,8} \gg 1$$

Une telle constante révèle que cette réaction est presque totale, si bien que $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$ se forme de préférence à $\text{Ag}_2\text{CrO}_{4(\text{sol})}$. Ainsi, deux situations se présentent :

- Les ions Ag^+ introduits dans le récipient réagissent de préférence avec Cl^- :



où $K_5 = \frac{1}{[\text{Ag}^+][\text{Cl}^-]} = \frac{1}{K_{s1}} = 10^{9,8}$ montre que cette réaction est

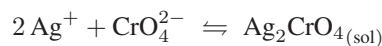
totale, c'est-à-dire cesse dès que tous les ions Cl^- ont réagi avec Ag^+ . Or, la solution contient initialement un volume $V_0 = 20 \text{ mL}$ d'ions Cl^- à la concentration $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Après l'introduction d'un volume V d'ions Ag^+ , cette concentration passe à la valeur $\frac{C_0 V_0}{V + V_0}$.

L'équivalence est donc atteinte lorsque la concentration en ions Ag^+ :

$$[\text{Ag}^+] = \frac{C_0 V}{V + V_0} \text{ devient égale à } \frac{C_0 V_0}{V + V_0} :$$

$$C_0 V = C_0 V_0 \Rightarrow V = V_0 = 20 \text{ mL}$$

- Un ajout supplémentaire d'ions Ag^+ provoque alors la précipitation de $\text{Ag}_2\text{CrO}_{4(\text{sol})}$:



qui se manifeste par la formation d'un précipité rouge de chromate d'argent. À cet instant, la concentration en ions CrO_4^{2-} vaut :

$$[\text{CrO}_4^{2-}] = \frac{C'_0 V_0}{V + V_0} = \frac{C'_0 V_0}{V_0 + V_0} = \frac{C'_0}{2} \text{ avec } C'_0 = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Par conséquent :

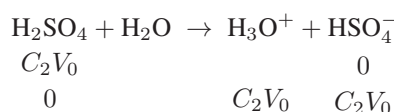
$$K_{s2} = [\text{Ag}^+]^2 [\text{CrO}_4^{2-}] = [\text{Ag}^+]^2 \times \frac{C'_0}{2} \Rightarrow [\text{Ag}^+] = \sqrt{\frac{2K_{s2}}{C'_0}}$$

Application numérique :

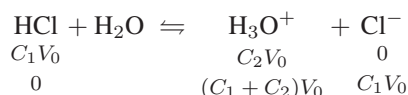
$$[\text{Ag}]^+ = \sqrt{\frac{2 \times 10^{-11,7}}{0,5}} \Rightarrow [\text{Ag}^+] = 2,8 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Remarque – Ces résultats montrent qu'en ajoutant des ions chromate CrO_4^{2-} au milieu réactionnel on met en évidence l'équivalence par le rougissement de la solution ; les ions Ag^+ sont dosés à $2,8 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ près.

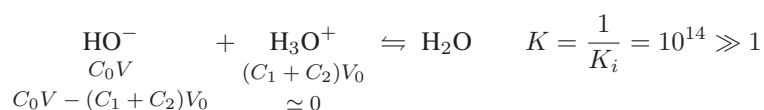
3. L'acide sulfurique, H_2SO_4 , présente une première acidité forte :



ce qui laisse, dans la solution, des ions H_3O^+ et HSO_4^- à la même concentration C_2 . De même la mise en solution de $C_1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'acide chlorhydrique HCl :



libère $C_1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ d'ions H_3O^+ dans la solution qui contient, ce faisant, des ions H_3O^+ et HSO_4^- aux concentrations $[\text{H}_3\text{O}^+] = C_1 + C_2$ et $[\text{HSO}_4^-] = C_2$. Aussi, la soude ($\text{Na}^+ + \text{HO}^-$) peut réagir non seulement sur les ions H_3O^+ :



mais également sur les ions HSO_4^- : $\text{HO}^- + \text{HSO}_4^- \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O} + \text{SO}_4^{2-}$. La constante de cet équilibre :

$$K_6 = \frac{[\text{SO}_4^{2-}]}{[\text{HO}^-][\text{HSO}_4^-]} = \frac{[\text{HSO}_4^-][\text{H}_3\text{O}^+]}{K_i[\text{HSO}_4^-]} = \frac{K_a}{K_i} = 10^{-2+14} = 10^{12} \gg 1$$

montre que cette réaction est presque totale :



Aussi, l'équivalence, repérée par le bleu de bromothymol (qui devient bleu), se produit pour un volume V_{e1} de soude tel que :

$$C_0V_{e1} - (C_1 + C_2)V_0 = C_2V_0 \Rightarrow C_0V_{e1} = 2C_2V_0 + C_1V_0 \quad (74)$$

En revanche, le mélange d'ions Cl^- avec CrO_4^{2-} peut être dosé à l'aide des ions Ag^+ : conformément à la question 2., le précipité rouge se forme dès que la réaction : $\text{Ag}^+ + \text{Cl}^- \rightleftharpoons \text{AgCl}_{(\text{sol})}$ s'achève. Il s'agit donc d'introduire autant d'ions Ag^+ (de concentration $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) que d'ions Cl^- (de concentration C_1) :

$$C_0V_{e2} = C_1V_0 \Rightarrow C_1 = \frac{V_{e2}}{V_0} C_0 \quad (75)$$

Les équations (74) et (75) composent un système d'équations :

$$\begin{cases} C_0 V_{e1} = 2C_2 V_0 + C_1 V_0 \\ C_0 V_{e2} = C_1 V_0 \end{cases} \Rightarrow C_0 (V_{e1} - V_{e2}) = 2C_2 V_0$$

$$\Rightarrow C_2 = \frac{C_0}{2} \times \frac{V_{e1} - V_{e2}}{V_0}$$

Application numérique :

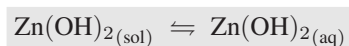
$$C_1 = \frac{10,4}{20} \times 0,1 \Rightarrow C_1 = 0,052 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$C_2 = \frac{0,1}{2} \times \frac{24,2 - 10,4}{20} \Rightarrow C_2 = 0,0345 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

● 329 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Les équilibres possibles entre $\text{Zn(OH)}_2(\text{sol})$ et les différentes espèces en solution sont :

- avec $\text{Zn(OH)}_2(\text{aq})$:



dont la constante s'écrit :

$$K_2 = [\text{Zn(OH)}_2] = \frac{[\text{Zn(OH)}_2] [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{[\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2} \times \frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2 [\text{HO}^-]^2} \times [\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2$$

où l'on reconnaît les définitions des constantes K_i et K_s :

$$K_i = [\text{H}_3\text{O}^+] [\text{HO}^-] \text{ et } K_s = [\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2$$

En outre, les constantes d'acidité des couples $\text{Zn}^{2+}/\text{ZnOH}^+$ et $\text{ZnOH}^+/\text{Zn(OH)}_2(\text{aq})$ sont définies par :

$$K_{a1} = \frac{[\text{ZnOH}^+] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Zn}^{2+}]} \text{ et } K_{a2} = \frac{[\text{Zn(OH)}_2] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{ZnOH}^+]}$$

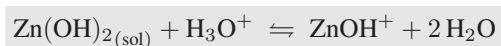
en conséquence de quoi :

$$K_{a1} \times K_{a2} = \frac{[\text{Zn(OH)}_2] [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{[\text{Zn}^{2+}]} \quad (76)$$

Par suite :

$$K_2 = \frac{K_{a1} K_{a2} K_s}{K_i^2} = 10^{-9,85-8-17,15+28} = 10^{-7} \Rightarrow \log K_2 = -7$$

- avec ZnOH^+ :



de constante :

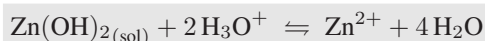
$$K_1 = \frac{[\text{ZnOH}^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \underbrace{\frac{[\text{ZnOH}^+]}{[\text{Zn}^{2+}]}}_{K_{a_1}} \times \underbrace{\frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2 [\text{HO}^-]^2}}_{1/K_i^2} + \underbrace{[\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2}_{K_s}$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{K_{a_1} K_s}{K_i^2}$$

Application numérique :

$$K_1 = 10^{-9,85-17,15+28} \Rightarrow K_1 = 10 \Rightarrow \log K_1 = 1$$

• avec Zn^{2+} :



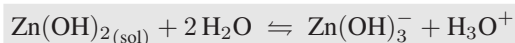
dont la constante est définie par :

$$K_0 = \frac{[\text{Zn}^{2+}]}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2} = \frac{[\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2 [\text{HO}^-]^2} \Rightarrow K_0 = \frac{K_s}{K_i^2}$$

Application numérique :

$$K_0 = 10^{-17,15+28} \Rightarrow K_0 = 10^{10,85} \Rightarrow \log K_0 = 10,85$$

• avec Zn(OH)_3^- :



La loi d'action des masses prévoit, pour cet équilibre, une constante :

$$K_3 = \frac{[\text{Zn(OH)}_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Zn}^{2+}]}$$

$$= \frac{[\text{Zn(OH)}_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]^3}{[\text{Zn}^{2+}]} \times \underbrace{\frac{1}{[\text{HO}^-]^2 [\text{H}_3\text{O}^+]^2}}_{1/K_i^2} \times \underbrace{[\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2}_{K_s}$$

La constante d'acidité K_{a_3} du couple $\text{Zn(OH)}_2/\text{Zn(OH)}_3^-$:

$$K_{a_3} = \frac{[\text{Zn(OH)}_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Zn(OH)}_2]}$$

associée au résultat (76), conduit à :

$$K_{a_1} K_{a_2} \times K_{a_3} = \frac{[\text{Zn(OH)}_2] [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{[\text{Zn}^{2+}]} \times \frac{[\text{Zn(OH)}_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Zn(OH)}_2]}$$

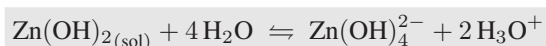
$$= \frac{[\text{Zn(OH)}_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]^3}{[\text{Zn}^{2+}]}$$

$$\Rightarrow K_3 = \frac{K_{a_1} K_{a_2} K_{a_3} K_s}{K_i^2}$$

Application numérique :

$$K_3 = 10^{-9,85-8-9,92-17,15+28} \Rightarrow K_3 = 10^{-16,92} \Rightarrow \log K_3 = -16,92$$

- avec Zn(OH)_4^{2-} :



Cet équilibre a pour constante :

$$\begin{aligned} K_4 &= \frac{[\text{Zn(OH)}_4^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]^2}{[\text{Zn}^{2+}]} \\ &= \frac{[\text{Zn(OH)}_4^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]^4}{[\text{Zn}^{2+}]} \times \underbrace{\frac{1}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2 [\text{HO}^-]^2}}_{K_i^2} \times \underbrace{[\text{Zn}^{2+}] [\text{HO}^-]^2}_{K_s} \end{aligned}$$

Enfin, la constante d'acidité K_{a4} du couple $\text{Zn(OH)}_3^- / \text{Zn(OH)}_4^{2-}$ valant :

$$K_{a4} = \frac{[\text{Zn(OH)}_4^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Zn(OH)}_3^-]}$$

il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} K_{a1} K_{a2} K_{a3} \times K_{a4} &= \frac{[\text{Zn(OH)}_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+]^3}{[\text{Zn}^{2+}]} \times \frac{[\text{Zn(OH)}_4^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]}{[\text{Zn(OH)}_3^-]} \\ &= \frac{[\text{Zn(OH)}_4^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]^4}{[\text{Zn}^{2+}]} \\ \Rightarrow K_4 &= \frac{K_{a1} K_{a2} K_{a3} K_{a4} K_s}{K_i^2} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$K_4 = 10^{-9,85-8-9,92-12,74-17,15+28} \Rightarrow K_4 = 10^{-29,66} \Rightarrow \log K_4 = -29,66$$

2. La dissolution de $\text{Zn(OH)}_{2(\text{sol})}$ met en solution $\text{Zn(OH)}_{2(\text{aq})}$ ainsi que les ions Zn^{2+} , ZnOH^+ , Zn(OH)_3^- et Zn(OH)_4^{2-} . C'est pourquoi la solubilité de l'hydroxyde de zinc solide vaut :

$$s = [\text{Zn}^{2+}] + [\text{ZnOH}^+] + [\text{Zn(OH)}_2] + [\text{Zn(OH)}_3^-] + [\text{Zn(OH)}_4^{2-}]$$

que l'on peut aussi écrire :

$$s = s_0 + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 \text{ avec } s_i = [\text{Zn(OH)}_i^{(2-i)+}]$$

La définition des diverses constantes K_i :

$$K_0 = \frac{[\text{Zn}^{2+}]}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2} = \frac{s_0}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2}$$

$$K_1 = \frac{[\text{ZnOH}^+]}{[\text{H}_3\text{O}^+]} = \frac{s_1}{[\text{H}_3\text{O}^+]}$$

$$K_2 = [\text{Zn}(\text{OH})_2] = s_2$$

$$K_3 = [\text{Zn}(\text{OH})_3^-] [\text{H}_3\text{O}^+] = s_3 [\text{H}_3\text{O}^+]$$

$$K_4 = [\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}] [\text{H}_3\text{O}^+]^2 = s_4 [\text{H}_3\text{O}^+]^2$$

permet d'exprimer les termes s_i :

$$s_0 = K_0 [\text{H}_3\text{O}^+]^2 \Rightarrow \log s_0 = \log K_0 - 2 \text{ pH} = 10,85 - 2 \text{ pH}$$

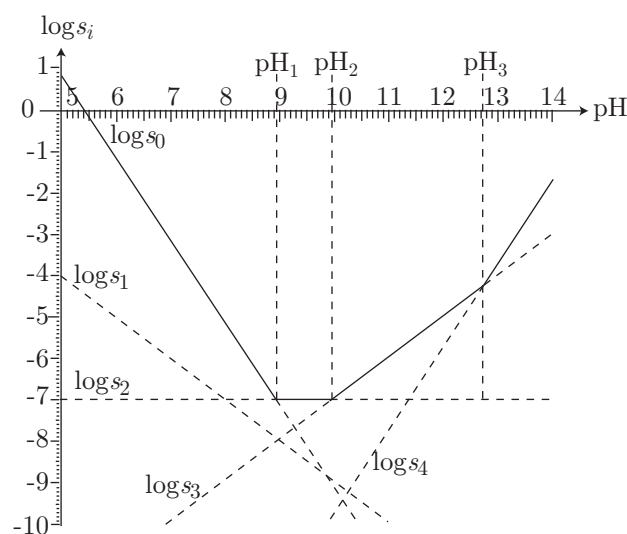
$$s_1 = K_1 [\text{H}_3\text{O}^+] \Rightarrow \log s_1 = \log K_1 - \text{pH} = 1 - \text{pH}$$

$$s_2 = K_2 \Rightarrow \log s_2 = \log K_2 = -7$$

$$s_3 = \frac{K_3}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \Rightarrow \log s_3 = \log K_3 + \text{pH} = -16,92 + \text{pH}$$

$$s_4 = \frac{K_4}{[\text{H}_3\text{O}^+]^2} \Rightarrow \log s_4 = \log K_4 + 2 \text{ pH} = -29,66 + 2 \text{ pH}$$

dont les représentations graphiques prennent l'allure suivante :



Ce diagramme révèle l'existence d'intervalles de pH dans lesquels prédominent certaines espèces.

- Zn^{2+} est l'espèce prédominante pour $\text{pH} < \text{pH}_1$, tel que, pour $\text{pH} = \text{pH}_1$:

$$\log s_0 = \log s_2 \Rightarrow 10,85 - 2 \text{ pH}_1 = -7 \Rightarrow \text{pH}_1 = \frac{10,85 + 7}{2}$$

$$\Rightarrow \text{pH}_1 = 8,92$$

- $\text{Zn}(\text{OH})_2$ devient majoritaire pour $\text{pH} \in]\text{pH}_1, \text{pH}_2[$, où pH_2 est solution de l'équation :

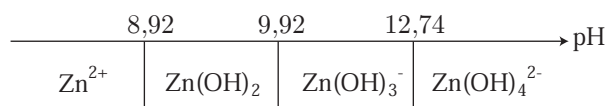
$$\log s_2 = \log s_3 \Rightarrow -7 = -16,92 + \text{pH}_2 \Rightarrow \text{pH}_2 = 9,92$$

- $\text{Zn}(\text{OH})_3^-$ prédomine lorsque $\text{pH} \in]\text{pH}_2, \text{pH}_3[$, pH_3 étant l'abscisse du point d'intersection des courbes $\log s_3 = f(\text{pH})$ et $\log s_4 = f(\text{pH})$:

$$\begin{aligned} \log s_3 = \log s_4 &\Rightarrow -16,92 + \text{pH}_3 = -29,66 + 2 \text{pH}_3 \\ &\Rightarrow \text{pH}_3 = 12,74 \end{aligned}$$

- Pour $\text{pH} > \text{pH}_3$, $\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}$ devient l'espèce prédominante.

Ces résultats peuvent finalement se résumer par le diagramme de prédominance suivant :



3. La mise en solution de $\text{Zn}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ n'affecte pas la neutralité électrique du milieu aqueux, ce qui se traduit par :

$$2 [\text{Zn}^{2+}] + [\text{ZnOH}^+] + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{HO}^-] + [\text{Zn}(\text{OH})_3^-] + 2 [\text{Zn}(\text{OH})_4^{2-}]$$

soit encore :

$$2s_0 + s_1 + [\text{H}_3\text{O}^+] = [\text{HO}^-] + s_3 + 2s_4 \quad (77)$$

Or, l'hydroxyde solide étant peu soluble, il ne peut libérer une quantité d'ions HO^- importante, de sorte que le pH de la solution doit rester voisin de 7 (et légèrement supérieur à 7) ; les courbes représentant $\log s_i = f(\text{pH})$ révèlent alors que dans cette gamme de pH, Zn^{2+} est l'espèce prédominante, auquel cas s_1 , s_3 et s_4 peuvent être négligés dans l'équation (77) :

$$2s_0 + [\text{H}_3\text{O}^+] \simeq [\text{HO}^-]$$

De même, la libération d'ions HO^- dans la solution rend celle-ci basique, auquel cas $[\text{H}_3\text{O}^+]$ peut vraisemblablement être négligé devant $[\text{HO}^-]$ (à condition toutefois que $\text{pH} \geq 8$). Cette nouvelle simplification conduit à :

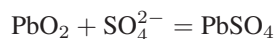
$$\begin{aligned} 2s_0 \simeq [\text{HO}^-] &= \frac{K_i}{[\text{H}_3\text{O}^+]} \Rightarrow \log 2 + \log s_0 = -pK_i + \text{pH} \\ &\Rightarrow \log 2 + 10,85 - 2 \text{pH} = -14 + \text{pH} \\ &\Rightarrow 3 \text{pH} = \log 2 + 10,85 + 14 \\ &\Rightarrow \text{pH} = 8,38 \end{aligned}$$

Avec une telle valeur de pH, on s'assure qu'il est légitime de négliger $[\text{H}_3\text{O}^+]$ devant $[\text{HO}^-]$ et, qu'à ce pH, s_1 , s_3 et s_4 peuvent être négligés face à s_0 . Ce faisant :

$$\begin{aligned} \log s_0 &= 10,85 - 2 \text{pH} = 10,85 - 2 \times 8,38 = -5,91 \\ &\Rightarrow s_0 = 10^{-5,91} = 1,23 \cdot 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

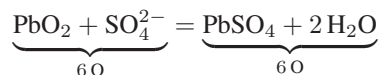
● 330 ————— Lycée Pasteur, Neuilly-sur-Seine

1. Pour transformer PbO_2 en PbSO_4 , il est nécessaire d'apporter des ions SO_4^{2-} :

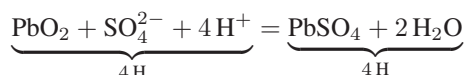


Cependant, cette équation doit être équilibrée :

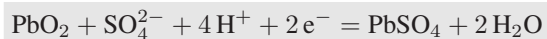
- à l'égard de l'oxygène, à l'aide de H_2O :



- vis-à-vis de l'hydrogène, grâce à H^+ :

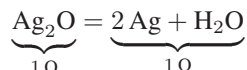


- pour les charges, grâce à e^- :

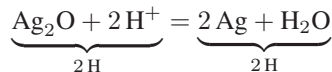


2. L'équation traduisant le passage : $\text{Ag}_2\text{O} \rightarrow 2\text{Ag}$ doit être équilibrée :

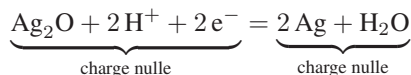
- pour l'élément oxygène, grâce à H_2O :



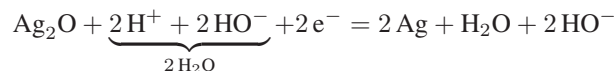
- pour l'élément hydrogène, avec H^+ :



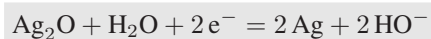
- au niveau des charges, avec e^- :



Cependant, la présence des ions H^+ est incompatible avec la basicité du milieu ; ces ions sont neutralisés par autant d'ions HO^- :

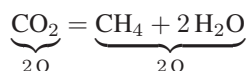


ce qui donne, après simplification par H_2O :

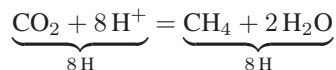


3. La transformation $\text{CO}_2 \rightarrow \text{CH}_4$ fait intervenir :

- L'élément oxygène, grâce à H_2O :



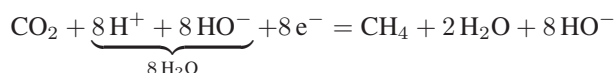
- l'élément hydrogène, que l'on peut équilibrer avec H^+ :



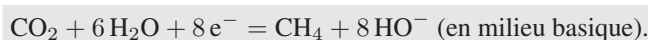
- des charges électriques qui se compensent grâce à e^- :



Or, en milieu basique, les ions H^+ sont neutralisés par les ions HO^- :



c'est-à-dire, après simplification par $2 H_2O$:



● 331 ————— Lycée Amyot, Melun

1. Choisissons comme degrés d'oxydation (+I) pour H, -II pour O dans HSO_4^- et H_2SO_3 , puis x comme nombre d'oxydation de S. La somme des degrés d'oxydation s'identifiant à la charge globale de ces espèces, il s'ensuit que :

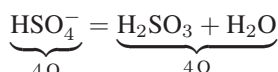
$$1 + x + 4 \times (-2) = -1 \Rightarrow x = 6 \text{ dans } HSO_4^-$$

et :

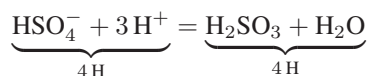
$$2 \times 1 + x + 3 \times (-2) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ dans } H_2SO_3$$

2. Le passage de HSO_4^- à H_2SO_3 se traduit par une diminution du degré d'oxydation ; le couple HSO_4^-/H_2SO_3 est un couple redox.
3. La transformation $HSO_4^- \rightarrow H_2SO_3$ est décrite par une demi-équation qui doit être équilibrée :

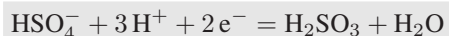
- pour l'élément oxygène, grâce à H_2O :



- pour l'élément H, grâce à H^+ :

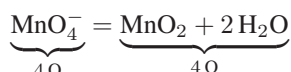


- pour les charges, grâce à e^- :

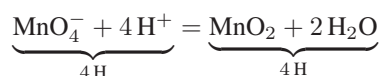


4. Le passage $MnO_4^{2-} \rightarrow MnO_2$ peut être représenté par une demi-équation qui doit également être équilibrée à l'égard de :

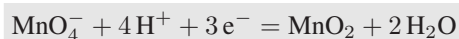
- l'élément oxygène, grâce à H_2O :



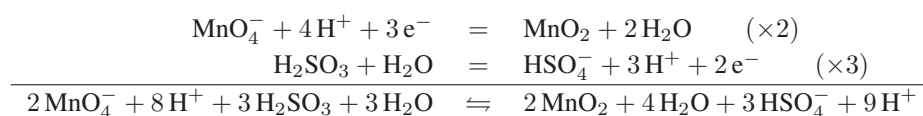
- l'élément H, grâce à H^+ :



- pour la charge, grâce à e^- :



La réaction de MnO_4^- sur H_2SO_3 est par conséquent une réaction d'oxydo-réduction qui se traduit par une oxydation de H_2SO_3 et une réduction de MnO_4^- ; Les demi-équations précédentes permettent d'écrire l'équation-bilan de cette réaction, grâce à une combinaison linéaire visant à simplifier e^- :

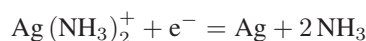


soit, après simplification par $8H^+$ et par $3H_2O$:

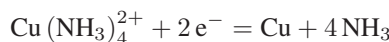


● 332 ————— Concours de la banque « Agro »

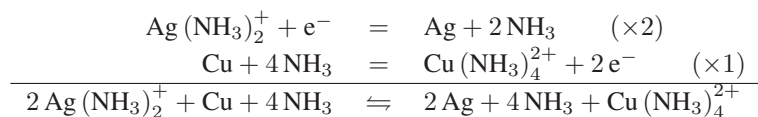
1. La demi-équation relative au couple $Ag(NH_3)_2^+ / Ag$ s'écrit :



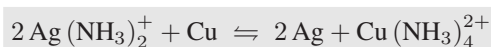
tandis que celle associée au couple $Cu(NH_3)_4^{2+} / Cu$ est :



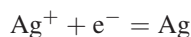
Une combinaison linéaire de ces deux équations fournit l'équation de la réaction de Cu avec $Ag(NH_3)_2^+$:



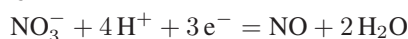
soit, après simplification par $4NH_3$:



2. La présence de l'ion complexe $Cu(NH_3)_4^{2+}$ confère à la solution une vive couleur bleu-marine caractéristique de l'eau céleste.
3. Le couple Ag^+ / Ag est associé à la demi-équation :



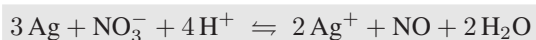
alors que le couple NO_3^- / NO l'est à :



Aussi, l'action de NO_3^- sur Ag est décrite par une équation-bilan issue d'une combinaison linéaire de ces deux demi-équations :



c'est-à-dire :



● 333 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Le degré d'oxydation d'un élément simple, comme Hg, est nul tandis que celui de l'ion Hg^{2+} s'identifie à sa charge (+II). En notant x_1 le degré d'oxydation du mercure dans Hg_2^{2+} , dont la charge vaut +2, il vient :

$$2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = +1$$

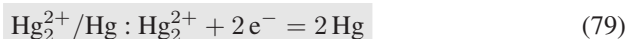
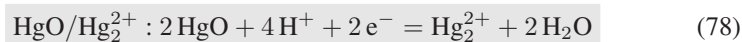
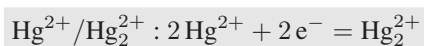
Quant à la molécule HgO, neutre, elle contient du mercure au degré d'oxydation x_2 et de l'oxygène au degré d'oxydation (-II), tels que :

$$x_2 - 2 = 0 \Rightarrow x_2 = +2$$

C'est pourquoi l'élément mercure présente les degrés d'oxydation suivants :



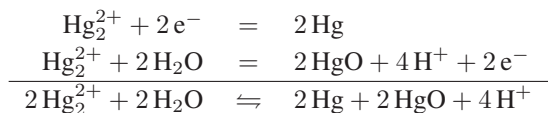
2. Les demi-équations correspondant aux couples indiqués par l'énoncé sont :



3. Le mercure au degré d'oxydation (+I) : Hg_2^{2+} se dismute en Hg(0) : Hg et Hg(+II) : HgO car il appartient simultanément aux deux couples :



Conformément aux demi-équations (79) et (78), Hg_2^{2+} se comporte à la fois comme un oxydant et comme un réducteur :



Après simplification par 2, l'équilibre de dismutation de Hg_2^{2+} peut aussi s'écrire :



● 334 Concours ESIM

1. À l'anode se trouve le cadmium sous les formes Cd et Cd(OH)₂. Soit x_1 le degré d'oxydation du cadmium dans le solide Cd(OH)₂, électriquement neutre :

$$x_1 + 2 \times (-2 + 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2$$

Ce degré d'oxydation étant supérieur à celui de Cd (0), le couple oxydant/réducteur mis en jeu à l'anode est :

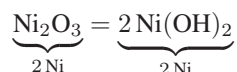


Soient x_2 et x_3 les degrés d'oxydation du nickel dans Ni(OH)₂ et Ni₂O₃ respectivement. La neutralité électrique de ces espèces implique que :

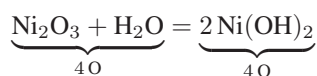
$$x_2 + 2 \times (-2 + 1) = 0 \Rightarrow x_2 = 2 \text{ et } 2x_3 + 3 \times (-2) = 0 \Rightarrow x_3 = 3$$

Par suite, Ni₂O₃ est l'oxydant du couple Ni₂O₃/Ni(OH)₂ dont la demi-équation doit être équilibrée :

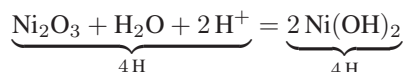
- pour l'élément nickel :



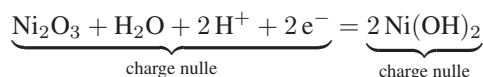
- à l'égard de l'élément oxygène, grâce à H₂O :



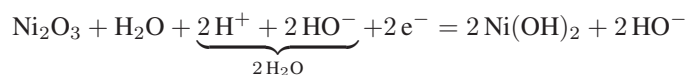
- pour l'élément hydrogène, avec H⁺ :



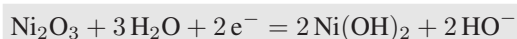
- vis-à-vis des charges :



Cependant, en milieu basique, les ions HO⁻ neutralisent les ions H⁺ :



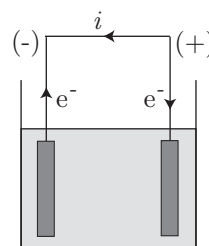
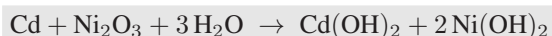
soit encore :



2. Lorsque l'accumulateur débite, l'anode (-) reçoit le courant cédé par la cathode (+), ce qui signifie que les électrons passent de l'anode à la cathode ; ce transfert électronique s'interprète à l'aide des demi-équations :



d'où découle l'équation-bilan (après simplification par 2e^- et par 2HO^-) :



● 335 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. Les demi-équations :



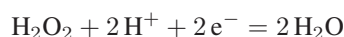
sont associées aux potentiels de la loi de Nernst :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{|\text{O}_2| |\text{H}^+|^2}{|\text{H}_2\text{O}_2|} \right) \quad \text{et} \quad E_2 = E_2^0 + 0,015 \log \left(\frac{|\text{O}_2| |\text{H}^+|^4}{|\text{H}_2\text{O}|^2} \right)$$

où $|X|$ désigne l'activité de l'espèce X . Or, si les entités O_2 , H_2O_2 et H_2O sont simultanément présentes, les potentiels E_1 et E_2 prennent une valeur commune E , de sorte que :

$$\begin{aligned} 2E_2 - E_1 = E &= 2E_2^0 - E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{|\text{O}_2| |\text{H}^+|^4}{|\text{H}_2\text{O}|^2} \times \frac{|\text{H}_2\text{O}_2|}{|\text{O}_2| |\text{H}^+|^2} \right) \\ \Rightarrow E &= 2E_2^0 - E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{|\text{H}_2\text{O}_2| |\text{H}^+|^2}{|\text{H}_2\text{O}|^2} \right) \end{aligned}$$

ce qui traduit la loi de Nernst appliquée à la demi-équation :



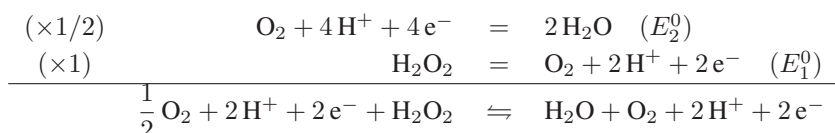
dont le potentiel *standard* vaut par conséquent :

$$E_3^0 = 2E_2^0 - E_1^0$$

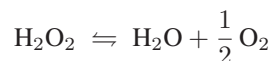
Application numérique :

$$E_3^0 = 2 \times 1,23 - 0,69 \Rightarrow E_3^0 = 1,77 \text{ V}$$

2. L'équation : $\text{H}_2\text{O}_2 \rightleftharpoons \text{H}_2\text{O} + \frac{1}{2}\text{O}_2$ peut être obtenue par combinaison linéaire des deux demi-équations associées aux couples $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ et $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}_2$



soit encore, après simplification par $\frac{1}{2}\text{O}_2$, 2e^- et 2H^+ :

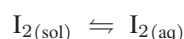


Étant donné que $\eta = 2$ électrons sont mis en jeu au cours de ce processus, la constante de cet équilibre vaut :

$$\begin{aligned} K &= 10^{\frac{\eta}{0,06}(E_2^0 - E_1^0)} = 10^{\frac{2}{0,06}(1,23 - 0,69)} \\ &\Rightarrow K = 10^{18} \end{aligned}$$

● 336 Concours ESIM

1. Dans l'eau pure, la présence de chaque molécule $\text{I}_{2(\text{aq})}$ provient de la dissolution d'une molécule $\text{I}_{2(\text{sol})}$, selon l'équation :



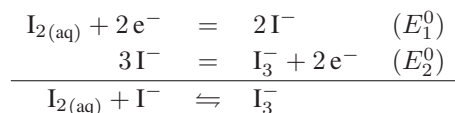
Par conséquent, la solubilité de $\text{I}_{2(\text{sol})}$ vaut $s_0 = [\text{I}_{2(\text{aq})}]$, tandis que la saturation de la solution assure que : $K_s = \frac{|\text{I}_{2(\text{aq})}|}{|\text{I}_{2(\text{sol})}|}$, où $|\text{I}_{2(\text{aq})}| = [\text{I}_{2(\text{aq})}]$ et $|\text{I}_{2(\text{sol})}| = 1$ désignent les activités des espèces chimiques. C'est pourquoi :

$$K_s = [\text{I}_{2(\text{aq})}] = s_0 \Rightarrow s_0 = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

2. (a) Les demi-équations associées aux couples $\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}^-$ et I_3^-/I^- :



peuvent subir une combinaison linéaire :



permettant d'exprimer l'équilibre de formation du complexe, dont la constante vaut :

$$\begin{aligned} K_f &= 10^{\frac{2}{0,06}(E_1^0 - E_2^0)} = 10^{\frac{1}{0,03}(0,62 - 0,54)} \\ &\Rightarrow K_f = \frac{[\text{I}_3^-]}{[\text{I}_2][\text{I}^-]} = 10^{2,67} = 464 \end{aligned}$$

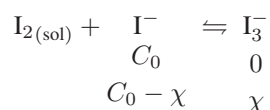
- (b) Les calculs précédents montrent que $\text{I}_{2(\text{sol})}$ peut réagir avec les ions I^- en solution, afin de former le complexe I_3^- :



La constante de cette réaction vaut alors :

$$\begin{aligned} K &= \frac{[\text{I}_3^-]}{[\text{I}^-]} = \frac{[\text{I}_3^-]}{[\text{I}_2][\text{I}^-]} \times [\text{I}_2] = K_f \times K_s \\ &\Rightarrow K = 464 \times 1,3 \cdot 10^{-3} = 0,603 \end{aligned}$$

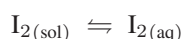
Le bilan de la réaction (80)



montre que $[\text{I}^-] = C_0 - \chi$ et $[\text{I}_3^-] = \chi$, de sorte que :

$$\begin{aligned} K &= \frac{[\text{I}_3^-]}{[\text{I}^-]} = \frac{\chi}{C_0 - \chi} \Rightarrow C_0 K - K\chi = \chi \Rightarrow \chi = \frac{C_0 K}{1 + K} \\ &\Rightarrow \chi = \frac{0,1 \times 0,603}{1 + 0,603} = 37,6 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

En outre $\text{I}_{2(\text{sol})}$ peut également passer en solution par la réaction d'équation :



avec :

$$K_s = [\text{I}_{2(\text{sol})}] = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

C'est pourquoi la nouvelle solubilité du diiode vaut :

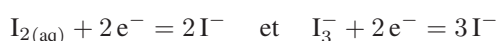
$$s_1 = [\text{I}_3^-] + [\text{I}_{2(\text{sol})}] = 37,6 \cdot 10^{-3} + 1,3 \cdot 10^{-3} \Rightarrow s_1 = 38,9 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

d'où il ressort que :

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{38,9 \cdot 10^{-3}}{1,3 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow s_1 \simeq 30 \times s_0$$

ce qui signifie aussi que la présence d'ions I^- a permis de multiplier par 30 la solubilité du diiode.

3. Les couples $\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}^-$ et I_3^-/I^- sont associés aux demi-réactions :



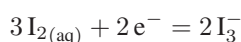
auxquelles la loi de Nernst prévoit les potentiels :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2} \right) \quad \text{et} \quad E_2 = E_2^0 + 0,03 \log \left(\frac{[\text{I}_3^-]}{[\text{I}^-]^3} \right)$$

Or, si $\text{I}_{2(\text{aq})}$, I^- et I_3^- sont présents simultanément dans la même solution, les potentiels E_1 et E_2 adoptent une valeur commune E_3 , de sorte que :

$$\begin{aligned} 3E_1 - 2E_2 = E_3 &= 3E_1^0 - 2E_2^0 + 0,03 \log \left(\frac{[\text{I}_2]^3}{[\text{I}^-]^6} \times \frac{[\text{I}^-]^6}{[\text{I}_3^-]^2} \right) \\ &= 3E_1^0 - 2E_2^0 + 0,03 \log \left(\frac{[\text{I}_2]^3}{[\text{I}_3^-]^2} \right) \end{aligned}$$

Or, cette relation constitue l'expression de la loi de Nernst pour le couple $\text{I}_{2(\text{aq})}/\text{I}_3^-$, de demi-équation :



et donc de potentiel *standard* :

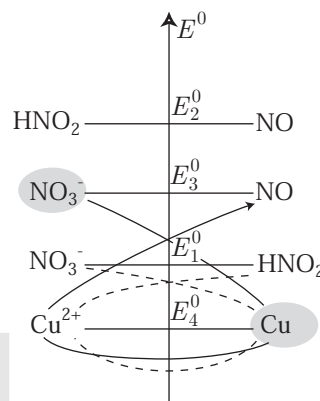
$$E_3^0 = 3E_1^0 - 2E_2^0 \Rightarrow E_3^0 = 3 \times 0,62 - 2 \times 0,54 \Rightarrow E_3^0 = 0,78 \text{ V}$$

● 337 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

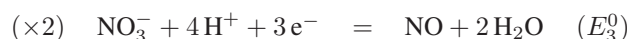
1. À la concentration de $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, l'acide nitrique contient essentiellement des ions H^+ et NO_3^- .

Or, le diagramme ci-contre montre que le cuivre métallique, en réagissant avec NO_3^- , pourrait conduire à la formation de HNO_2 ou de NO . La différence des potentiels *standard* $E_3^0 - E_4^0$ étant sensiblement la même que $E_1^0 - E_4^0$, ces deux réactions peuvent *a priori* se produire. Cependant, les positions respectives des couples HNO_2/NO et $\text{NO}_3^-/\text{HNO}_2$ révèlent que si HNO_2 est produit, il subit une dismutation en NO et NO_3^- (et donc il disparaît). C'est pourquoi on peut considérer que :

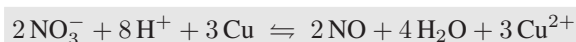
le cuivre réagit avec NO_3^- pour se transformer en ions Cu^{2+} , tandis que NO est produit.



2. Les deux demi-équations associées aux couples correspondants :



montre que leur combinaison linéaire conduit à l'équilibre :



3. La combinaison linéaire ainsi effectuée permet d'associer à cet équilibre la constante :

$$K = 10^{\frac{6}{0,06} (E_3^0 - E_4^0)}$$

car 6 électrons sont impliqués dans cet équilibre.

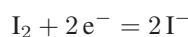
Application numérique :

$$K = 10^{\frac{0,96 - 0,34}{0,01}} \Rightarrow K = 10^{62}$$

Un telle valeur justifierait que cette réaction soit considérée comme totale.

● 338 ————— Lycée Champollion, Grenoble

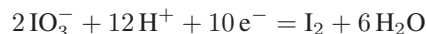
1. La demi-équation du couple I_2/I^- :



permet d'affecter à ce couple le potentiel :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2} \right) \text{ avec } E_1^0 = 0,54 \text{ V}$$

indépendant du pH de la solution. En revanche, le couple IO_3^-/I_2 est associé à la demi-équation :



La loi de Nernst lui prévoit alors le potentiel :

$$E_2 = E_2^0 + \frac{0,06}{10} \log \left(\frac{[\text{IO}_3^-]^2 [\text{H}^+]^{12}}{[\text{I}_2]} \right) \text{ avec } E_2^0 = 1,19 \text{ V}$$

Cependant, en milieu basique, les ions H^+ réagissent avec les ions HO^- , selon une réaction inverse de l'autoprotolyse, dont la constante est définie par :

$$\begin{aligned} K_i &= 10^{-14} = [\text{H}^+] [\text{HO}^-] \Rightarrow [\text{H}^+] = \frac{K_i}{[\text{HO}^-]} \\ \Rightarrow E_2 &= E_2^0 + \frac{0,06}{10} \times \log \left(\frac{[\text{IO}_3^-]^2 K_i^{12}}{[\text{I}_2] [\text{HO}^-]^{12}} \right) \\ \Rightarrow E_2 &= E_2^0 - \frac{0,06}{10} \times 12 pK_i + \frac{0,06}{10} \log \left(\frac{[\text{IO}_3^-]^2}{[\text{I}_2] [\text{HO}^-]^{12}} \right) \end{aligned}$$

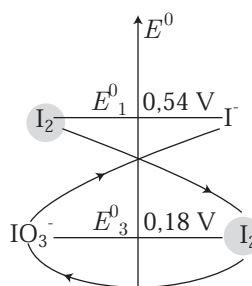
Or, ce potentiel représente la loi de Nernst appliquée à la demi-équation :



dont le potentiel apparent, en milieu basique, vaut par conséquent :

$$\begin{aligned} E_3^0 &= E_2^0 - \frac{0,06}{10} \times 12 pK_i \\ &= 1,19 - 0,006 \times 12 \times 14 = 0,18 \text{ V} \end{aligned}$$

Les valeurs relatives de E_1^0 et de E_3^0 permettent d'expliquer la dismutation de I_2 , conformément à l'équation-bilan :



2. À nouveau, les couples mis en jeu sont I_2/I^- et IO_3^-/I_2 avec, pour potentiels respectifs :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{[\text{I}_2]}{[\text{I}^-]^2} \right) \text{ et } E_2 = E_2^0 + 0,006 \log \left(\frac{[\text{IO}_3^-]^2 [\text{H}^+]^{12}}{[\text{I}_2]} \right)$$

Cependant, en présence d'ions Ag^+ , les ions I^- et IO_3^- sont susceptibles de former des précipités, selon les équations :



caractérisés par les produits de solubilité :

$$K_{s1} = [\text{Ag}^+] [\text{I}^-] \Rightarrow [\text{I}^-] = \frac{K_{s1}}{[\text{Ag}^+]}$$

et :

$$K_{s_2} = [\text{Ag}^+] [\text{IO}_3^-] \Rightarrow [\text{IO}_3^-] = \frac{K_{s_2}}{[\text{Ag}^+]}$$

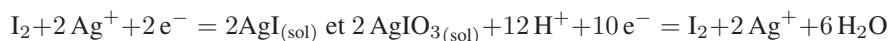
Par suite, les potentiels E_1 et E_2 deviennent :

$$\begin{aligned} E_1 &= E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{[\text{I}_2] [\text{Ag}^+]^2}{K_{s_1}^2} \right) \\ \Rightarrow E_1 &= \underbrace{E_1^0 + 0,06 pK_{s_1}}_{E_4^0} + 0,03 \log ([\text{I}_2] [\text{Ag}^+]^2) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E_2 &= E_2^0 + 0,006 \log \left(\frac{K_{s_2}^2 [\text{H}^+]^{12}}{[\text{Ag}^+]^2 [\text{I}_2]} \right) \\ \Rightarrow E_2 &= \underbrace{E_2^0 - 0,012 pK_{s_2}}_{E_5^0} + 0,006 \log \left(\frac{[\text{H}^+]^{12}}{[\text{Ag}^+]^2 [\text{I}_2]} \right) \end{aligned}$$

Ces expressions traduisent simplement la loi de Nernst appliquée aux demi-équations :



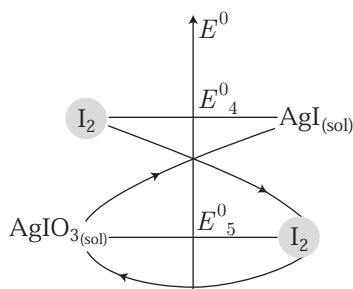
auquel cas les grandeurs :

$$E_4^0 = E_1^0 + 0,06 pK_{s_1} = 0,54 + 0,06 \times 16,08 = 1,50 \text{ V}$$

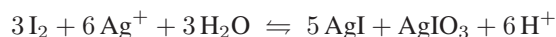
et :

$$E_5^0 = E_2^0 - 0,006 pK_{s_2} = 1,19 - 0,012 \times 7,52 = 1,10 \text{ V}$$

représentent les potentiels *standard* des couples respectifs $\text{I}_2/\text{AgI}_{(\text{sol})}$ et $\text{AgIO}_3_{(\text{sol})}/\text{I}_2$.



La règle du « gamma » permet alors d'interpréter la dismutation de I_2 en présence d'ions Ag^+ , conformément à l'équation :



● 339 Concours de l'ENSAM

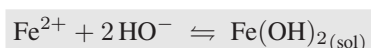
1. Les demi-équations associées aux couples Fe^{2+}/Fe et $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ sont :



Les potentiels correspondants s'obtiennent en appliquant simplement la loi de Nernst :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log [\text{Fe}^{2+}] \quad \text{et} \quad E_2 = E_2^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$$

Quant à l'équilibre de précipitation de $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$, il est décrit par l'équation :

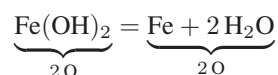


Le produit de solubilité de $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ est alors défini par :

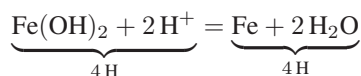
$$K_s = [\text{Fe}^{2+}] [\text{HO}^-]^2$$

2. (a) En milieu acide, la demi-équation correspondant au couple $\text{Fe}(\text{OH})_2/\text{Fe}$ doit être équilibrée :

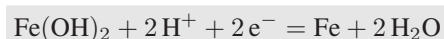
- à l'égard de l'élément oxygène, grâce à H_2O :



- pour l'élément hydrogène, avec H^+ :



- vis-à-vis des charges, à l'aide de e^- :



Soit E_3^0 le potentiel *standard* du couple $\text{Fe}(\text{OH})_2/\text{Fe}$, auquel la loi de Nernst attribue le potentiel :

$$E = E_3^0 + 0,03 \log [\text{H}^+]^2 \quad (81)$$

Or, ce potentiel est également celui du couple Fe^{2+}/Fe :

$$E = E_1^0 + 0,03 \log [\text{Fe}^{2+}] \quad (82)$$

où, en présence d'ions HO^- , les ions Fe^{2+} donnent naissance au précipité $\text{Fe}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$, avec :

$$K_s = [\text{Fe}^{2+}] [\text{HO}^-]^2 \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_s}{[\text{HO}^-]^2} = \frac{K_s}{K_i^2} [\text{H}^+]^2$$

car le produit ionique de l'eau impose : $K_i = 10^{-14} = [\text{H}^+] [\text{HO}^-]$. Ce faisant, la relation (82) devient :

$$E = E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{K_s}{K_i^2} [\text{H}^+]^2 \right) = E_1^0 + 0,03 \times (2pK_i - pK_s) + 0,03 \log [\text{H}^+]^2$$

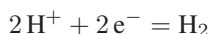
La comparaison avec l'identité (81) conduit à :

$$E_3^0 = E_1^0 + 0,03 \times (2pK_i - pK_s)$$

Application numérique :

$$E_3^0 = -0,44 + 0,03 \times (2 \times 14 - 15) \Rightarrow E_3^0 = -0,05 \text{ V}$$

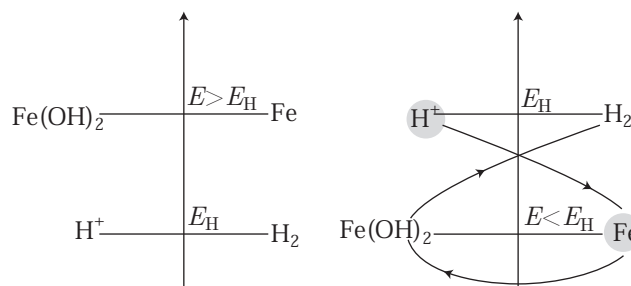
(b) Le couple H^+/H_2 (de potentiel standard $E_{\text{H}}^0 = 0 \text{ V}$) a pour demi-équation :



et donc pour potentiel :

$$E_{\text{H}} = 0,03 \log \left(\frac{[\text{H}^+]^2}{p_{\text{H}_2}} \right) = 0,03 \log [\text{H}^+]^2 - 0,03 \log p_{\text{H}_2}$$

Selon les valeurs relatives de E et de E_{H} , deux situations peuvent se produire :



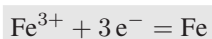
La seconde figure rend compte de la corrosion du fer : les ions H^+ contenus dans l'eau (acide) peuvent réagir avec le fer. En revanche, la première figure montre que cette corrosion ne peut plus se produire dès que $E > E_{\text{H}}$, c'est-à-dire :

$$E_3^0 + 0,03 \log [\text{H}^+]^2 > 0,03 \log [\text{H}^+]^2 - 0,03 \log p_{\text{H}_2}$$

soit encore :

$$0,03 \log p_{\text{H}_2} > -E_3^0 = 0,05 \Rightarrow p_{\text{H}_2} > 10^{5/3} = 46 \text{ bars}$$

3. (a) Le couple Fe^{3+}/Fe est associé à la demi-équation :



d'où découle l'expression du potentiel :

$$E_4 = E_4^0 + 0,02 \log [\text{Fe}^{3+}] \quad (83)$$

que posséderait une électrode plongeant dans un milieu contenant Fe^{3+} et Fe . Or, un tel milieu, contenant également des ions Fe^{2+} , posséderait également les potentiels des couples Fe^{2+}/Fe et $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$, auquel cas :

$$E_4 = E_1^0 + 0,03 \log [\text{Fe}^{2+}] \quad \text{et} \quad E_4 = E_2^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$$

Ces deux relations montrent que :

$$\begin{aligned} 2E_4 + E_4 &= 2E_1^0 + E_2^0 + 0,06 \left\{ \log [\text{Fe}^{2+}] + \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) \right\} \\ \Rightarrow 3E_4 &= 2E_1^0 + E_2^0 + 0,06 \log [\text{Fe}^{3+}] \\ \Rightarrow E_4 &= \frac{2E_1^0 + E_2^0}{3} + 0,02 \log [\text{Fe}^{3+}] \end{aligned}$$

La comparaison avec le résultat (83) fournit finalement :

$$E_4^0 = \frac{2E_1^0 + E_2^0}{3}$$

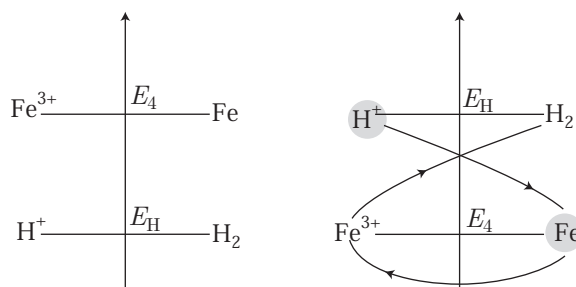
Application numérique :

$$E_4^0 = \frac{-0,88 + 0,77}{3} \Rightarrow E_4^0 = -0,04 \text{ V}$$

(b) À nouveau, le potentiel du couple H^+/H_2 :

$$E_{\text{H}} = 0,03 \log \left(\frac{[\text{H}^+]^2}{p_{\text{H}_2}} \right)$$

détermine si le fer peut subir une corrosion en ions Fe^{3+} :



Les schémas précédents révèlent que cette réaction ne peut se produire que si $E_{\text{H}} > E_4$, tandis qu'elle est inhibée lorsque $E_4 > E_{\text{H}}$, c'est-à-dire :

$$E_4^0 + 0,02 \log [\text{Fe}^{3+}] > 0,03 \log \left(\frac{[\text{H}^+]^2}{p_{\text{H}_2}} \right)$$

Avec $[\text{Fe}^{3+}] = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $\text{pH} = 0 \Rightarrow [\text{H}^+] = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, cette inégalité devient :

$$\begin{aligned} E_4^0 > -0,03 \log p_{\text{H}_2} &\Rightarrow \log p_{\text{H}_2} > \frac{-E_4^0}{0,03} = \frac{0,04}{0,03} \\ &\Rightarrow p_{\text{H}_2} > 10^{4/3} = 21,5 \text{ bars} \end{aligned}$$

● 340 ————— Concours de l'ENS

1. Stabilité des ions cuivre (I)

(a) Les potentiels des couples Cu^{2+}/Cu et Cu^+/Cu , associés aux demi-équations :



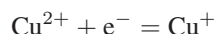
sont donnés par la loi de Nernst, exprimée en fonction des activités $|X_i|$ de chaque espèce X_i :

$$E_3 = E_3^0 + 0,03 \log \left(\frac{|\text{Cu}^{2+}|}{|\text{Cu}|} \right) \quad \text{et} \quad E_4 = E_4^0 + 0,06 \log \left(\frac{|\text{Cu}^+|}{|\text{Cu}|} \right)$$

Si les espèces Cu^{2+} , Cu^+ et Cu sont présentes simultanément dans le même milieu réactionnel, ces potentiels prennent une valeur commune E_7 , telle que :

$$\begin{aligned} 2E_3 - E_4 &= 2E_7 - E_7 = 2E_3^0 - E_4^0 + 0,06 \log \left(\frac{|\text{Cu}^{2+}|}{|\text{Cu}|} \times \frac{|\text{Cu}|}{|\text{Cu}^+|} \right) \\ \Rightarrow E_7 &= 2E_3^0 - E_4^0 + 0,06 \log \left(\frac{|\text{Cu}^{2+}|}{|\text{Cu}^+|} \right) \end{aligned}$$

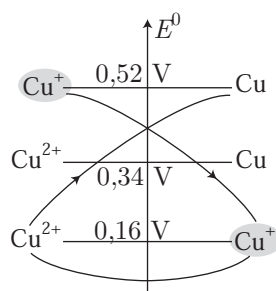
et qui correspond à l'expression de la loi de Nernst sur la demi-équation :



C'est pourquoi le potentiel *standard* du couple $\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+$ vaut :

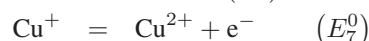
$$E_7^0 (\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}^+) = 2E_3^0 - E_4^0 = 2 \times 0,34 - 0,52 = 0,16 \text{ V}$$

(b) Compte tenu des valeurs des potentiels *standard* de ces trois couples, la règle du « gamma » :

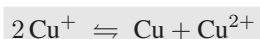


prédit que :

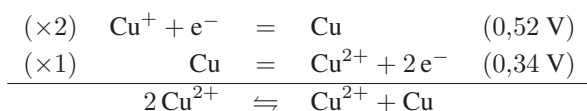
- l'ion Cu^+ se dismute selon deux demi-équations :



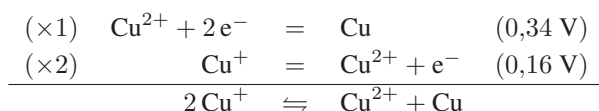
c'est-à-dire selon l'équation-bilan :



- Deux autres réactions peuvent également se produire :



et :



mais elles conduisent au même équilibre de dismutation de Cu^+

- (c) La constante de l'équilibre de dismutation de Cu^+ est donnée par la loi :

$$K = 10^{\frac{1}{0,06} (E_4^0 - E_7^0)} = 10^{\frac{0,52 - 0,16}{0,06}} \Rightarrow K = 10^6$$

ce qui suffit à conclure que l'ion Cu^+ n'est pas stable dans ces conditions opératoires.

- (d) En présence d'ammoniac, les ions Cu^+ et Cu^{2+} peuvent former des complexes, selon les équations :



dont les constantes de formation globale sont définies respectivement par :

$$\beta_2 = \frac{|\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+|}{|\text{Cu}^+| |\text{NH}_3|^2} \Rightarrow |\text{Cu}^+| = \frac{|\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+|}{\beta_2 |\text{NH}_3|^2}$$

et :

$$\beta_4 = \frac{|\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}|}{|\text{Cu}^{2+}| |\text{NH}_3|^4} \Rightarrow |\text{Cu}^{2+}| = \frac{|\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}|}{\beta_4 |\text{NH}_3|^4}$$

Par suite, les potentiels des couples Cu(II)/Cu(I) et Cu(I)/Cu :

$$E_7 = E_7^0 + 0,06 \log \left(\frac{|\text{Cu}^{2+}|}{|\text{Cu}^+|} \right) \quad \text{et} \quad E_4 = E_4^0 + 0,06 \log \left(\frac{|\text{Cu}^+|}{|\text{Cu}|} \right)$$

valent, en milieu ammoniacal (où le cuivre Cu(I) et Cu(II) se présente sous des formes complexées) :

$$\begin{aligned} E_7 &= E_7^0 + 0,06 \log \left(\frac{|\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}|}{\beta_4 |\text{NH}_3|^4} \times \frac{\beta_2 |\text{NH}_3|^2}{|\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+|} \right) \\ &= E_7^0 + 0,06 \log \left(\frac{\beta_2}{\beta_4} \right) + 0,06 \log \left(\frac{|\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+}|}{|\text{NH}_3|^2 |\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+|} \right) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} E_4 &= E_4^0 + 0,06 \log \left(\frac{|\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+|}{\beta_2 |\text{Cu}| |\text{NH}_3|^2} \right) \\ &= E_4^0 - 0,06 \log \beta_2 + 0,06 \log \left(\frac{|\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+|}{|\text{Cu}| |\text{NH}_3|^2} \right) \end{aligned}$$

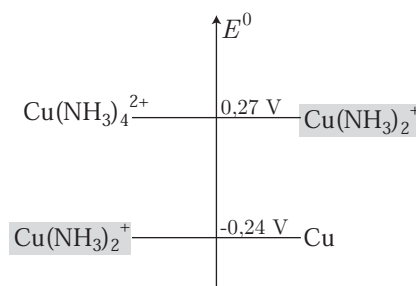
Par suite, les potentiels *standard* des couples Cu(II)/Cu(I) et Cu(I)/Cu, en milieu ammoniacal, valent :

$$\begin{aligned} E_8^0 &= E_7^0 + 0,06 \log \left(\frac{\beta_2}{\beta_4} \right) = 0,16 + 0,06 \log \left(\frac{4,10^{12}}{6,3 \cdot 10^{10}} \right) \\ \Rightarrow E_8^0 [\text{Cu}(\text{NH}_3)_4^{2+} / \text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+] &= 0,27 \text{ V} \end{aligned}$$

et :

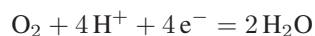
$$\begin{aligned} E_9^0 &= E_4^0 - 0,06 \log \beta_2 = 0,52 - 0,06 \log (4,10^{12}) \\ \Rightarrow E_9^0 [\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+ / \text{Cu}] &= -0,24 \text{ V} \end{aligned}$$

(e) La règle du « gamma », appliquée à ces deux couples :



permet de prévoir l'absence de dismutation du complexe $\text{Cu}(\text{NH}_3)_2^+$; le cuivre Cu(I) est stabilisé en milieu ammoniacal.

(f) Le couple $\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$ est impliqué dans la demi-équation :



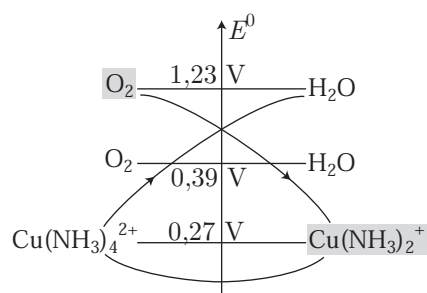
dont le potentiel dépend du pH et de l'activité $|\text{O}_2|$ du dioxygène :

$$E_2 = E_2^0 + \frac{0,06}{4} \log \left([\text{H}^+]^4 \times |\text{O}_2| \right) = E_2^0 - 0,06 \text{ pH} + \frac{0,03}{2} \log |\text{O}_2|$$

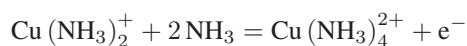
Le potentiel apparent de ce couple :

$$E_{\text{app}}(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = E_2^0 - 0,06 \text{ pH} = 1,23 - 0,06 \text{ pH}$$

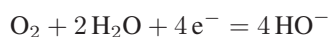
varie entre 1,23 V et 0,39 V lorsque le pH de la solution est compris entre 0 et 14.



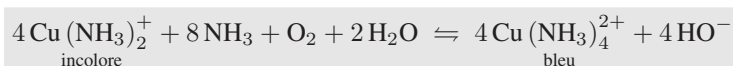
La règle du « gamma » montre que l'oxygène dissous dans l'eau peut réagir avec l'ion $Cu(NH_3)_2^+$, qui s'oxyde selon les demi-équations :



et, en milieu basique :



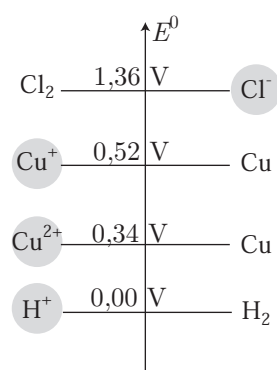
Aussi, l'équation-bilan de cette réaction :



permet d'interpréter le bleuissement d'une solution ammoniacale de cuivre (I).

2. Stabilité du cuivre métallique

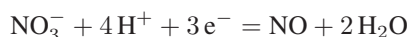
- (a) À $pH = 0$, les couples du cuivre métallique sont Cu^{2+}/Cu ($E_3^0 = 0,34\text{ V}$) et Cu^+/Cu ($E_4^0 = 0,52\text{ V}$) tandis qu'une solution d'acide chlorhydrique contient les ions H^+ et Cl^- , impliqués dans les couples H^+/H_2 ($E_6^0 = 0,00\text{ V}$) et Cl_2/Cl^- ($E_1^0 = 1,36\text{ V}$).



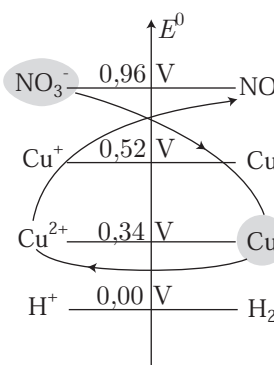
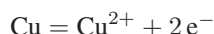
La règle du « gamma » révèle que Cl_2 pourrait éventuellement réagir avec Cu , mais en aucun cas Cl^- ou H^+ ne peuvent attaquer Cu .

En revanche, une solution d'acide nitrique contient des ions H^+ et NO_3^- associés aux couples H^+/H_2 ($E_6^0 = 0,00 \text{ V}$) et NO_3^-/NO ($E_5^0 = 0,96 \text{ V}$).

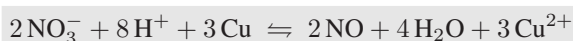
La règle du « gamma » prédit une réaction possible des ions NO_3^- avec Cu conduisant à la formation de Cu^{2+} et à NO (l'action des ions NO_3^- sur Cu ne peut produire d'ions Cu^+ , particulièrement instables en milieu acide). Les demi-équations :



et



mènent à l'équation-bilan de cette réaction :



- (b) Une solution de cuivre (II), dépourvue d'hydroxyde de cuivre (II), contient des ions Cu^{2+} à la concentration $C_0 = 10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. L'immersion d'une électrode de cuivre met au contact Cu^{2+} et Cu, impliqués dans la demi-équation :

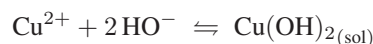


qui impose le potentiel :

$$E_9 = E_3^0 + 0,03 \log \left(\frac{|Cu^{2+}|}{|Cu|} \right) = 0,34 + 0,03 \log (10^{-6})$$

$$\Rightarrow E_9 = 0,16 \text{ V}$$

- (c) La réaction de précipitation du cuivre (II) est décrite par l'équation :



ce qui signifie que le précipité n'apparaît par tant que le quotient réactionnel $Q = [Cu^{2+}] [HO^-]^2$ demeure inférieur à K_s , alors que $[Cu^{2+}] = C_0$. En d'autres termes, le précipité de $Cu(OH)_2$ apparaît dès que :

$$[Cu^{2+}] [HO^-]^2 = K_s \Rightarrow C_0 \times \left(\frac{K_i}{[H^+]} \right)^2 = K_s \text{ car } K_i = [HO^-] [H^+]$$

$$\Rightarrow \log C_0 + 2 \text{ pH} - 2 pK_i = -pK_s$$

$$\Rightarrow \text{pH} = pK_i - \frac{1}{2} (pK_s + \log C_0)$$

Application numérique :

$$\text{pH} = 14 - \frac{1}{2} (20 - 6) \Rightarrow \text{pH} = 7$$

- (d) Dès que l'hydroxyde de cuivre est formé, les ions Cu^{2+} ont pour concentration :

$$[Cu^{2+}] = \frac{K_s}{[HO^-]^2} = \frac{K_s}{K_i^2} [H^+]^2$$

auquel cas le potentiel E_{10} de la solution est donné par la loi de Nernst appliquée à la demi-équation (84) :

$$\begin{aligned} E_{10} &= E_3^0 + 0,03 \log \left(\frac{K_s}{K_i^2} [\text{H}^+]^2 \right) \\ &= E_3^0 + 0,03 \log (2pK_i - pK_s) + 0,06 \log [\text{H}^+] \\ &= 0,34 + 0,03 (2 \times 14 - 20) - 0,06 \text{ pH car } \text{pH} = -\log [\text{H}^+] \\ &\Rightarrow E_{10} = 0,58 - 0,06 \text{ pH} \end{aligned}$$

● 341 ————— ENSTIM

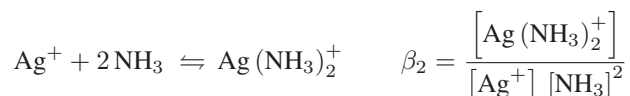
1. Le compartiment (2) contient le couple Ag^+/Ag : $\text{Ag}^+ + e^- = \text{Ag}$, auquel est associé le potentiel E_2 donné par la loi de Nernst :

$$\begin{aligned} E_2 &= E^0 + 0,06 \log [\text{Ag}^+] \text{ avec } [\text{Ag}^+] = C_1 \\ &\Rightarrow E_2 = 0,8 + 0,06 \log C_1 \end{aligned}$$

2. Le même couple oxydant-réducteur produit, sur l'électrode (1), le potentiel :

$$E_1 = E^0 + 0,06 \log [\text{Ag}^+]$$

où la concentration $[\text{Ag}^+]$ est accessible grâce à la constante β_2 de l'équilibre :



Par conséquent :

$$\beta_2 = \frac{C_1}{[\text{Ag}^+] C_0^2} \Rightarrow [\text{Ag}^+] = \frac{C_1}{\beta_2 C_0^2} \Rightarrow E_1 = 0,8 + 0,06 \log \left(\frac{C_1}{\beta_2 C_0^2} \right)$$

3. La force électromotrice de la pile est alors définie par :

$$E = |E_2 - E_1| = 0,06 \left| \log C_1 - \log \left(\frac{C_1}{\beta_2 C_0^2} \right) \right| \Rightarrow E = 0,06 |\log (\beta_2 C_0^2)|$$

4. L'équation précédente a pour solution :

$$\begin{aligned} \log (\beta_2 C_0^2) &= \pm \frac{E}{0,06} = \pm \frac{0,45}{0,06} = \pm 7,5 \\ &\Rightarrow \beta_2 C_0^2 = 10^{\pm 7,5} \\ &\Rightarrow \beta_2 = \frac{10^{\pm 7,5}}{4} \end{aligned}$$

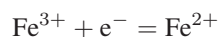
Deux solutions apparaissent ainsi :

$$\beta_2 = 7,9 \cdot 10^6 \text{ ou } \beta_2 = 7,9 \cdot 10^{-9}$$

mais cette seconde valeur ne convient pas dans le cas du complexe $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$, particulièrement stable.

● 342 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. Dans la solution \mathcal{S}_1 se trouve le couple $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$, lié à la demi-équation :



d'où se déduit le potentiel de l'électrode (1) :

$$\begin{aligned} E_1 &= E^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = E^0 + 0,06 \log \left(\frac{C_2}{C_1} \right) \\ &= 0,77 + 0,06 \log \left(\frac{2 \cdot 10^{-2}}{10^{-2}} \right) \Rightarrow E_1 = 0,79 \text{ V} \end{aligned}$$

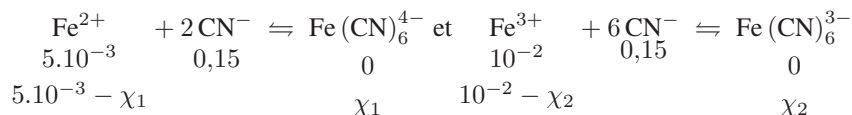
2. Le mélange de 100 mL de \mathcal{S}_1 avec 100 mL d'une solution d'ions cyanure CN^- provoque une dilution par 2 de toutes les espèces, dont les concentrations initiales deviennent :

$$\begin{aligned} [\text{Fe}^{2+}]_0 &= \frac{10^{-2}}{2} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = C'_1 \\ [\text{Fe}^{3+}]_0 &= \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2} = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = C'_2 \\ [\text{CN}^-]_0 &= \frac{3 \cdot 10^{-1}}{2} = 0,15 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

Les ions CN^- se trouvant en excès par rapport aux ions Fe^{2+} et Fe^{3+} , ils participent à la formation des ions complexes, selon les équations :



En notant χ_1 et χ_2 les avancements de ces réactions, leur bilan est donné par :



où la concentration résiduelle des ions CN^- respecte la conservation de l'élément carbone :

$$\begin{aligned} 0,15 &= [\text{CN}^-] + 6 [\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}] + 6 [\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}] = [\text{CN}^-] + 6 (\chi_1 + \chi_2) \\ \Rightarrow [\text{CN}^-] &= 0,15 - 6 (\chi_1 + \chi_2) \end{aligned}$$

Enfin, les constantes de dissociation K_d et K'_d , définies par :

$$K_d = \frac{[\text{Fe}^{2+}] [\text{CN}^-]^6}{[\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}]} = 10^{-31} \quad \text{et} \quad K'_d = \frac{[\text{Fe}^{3+}] [\text{CN}^-]^6}{[\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}]} = 10^{-8,7} \quad (85)$$

montrent que les réactions de formation des complexes (réactions inverses de la dissociation) sont presque totales, ce qui se traduit par :

$$\chi_1 \simeq 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow [\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}] = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\chi_2 \simeq 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \Rightarrow [\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}] = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{CN}^-] = 0,15 - 6 \times (5 \cdot 10^{-3} + 10^{-2}) \Rightarrow [\text{CN}^-] = 6 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Par suite, les définitions (85) révèlent que :

$$[\text{Fe}^{2+}] = \frac{K_d [\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}]}{[\text{CN}^-]^6} = 10^{-31} \times \frac{5 \cdot 10^{-3}}{(6 \cdot 10^{-2})^6} \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = 1,1 \cdot 10^{-26} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

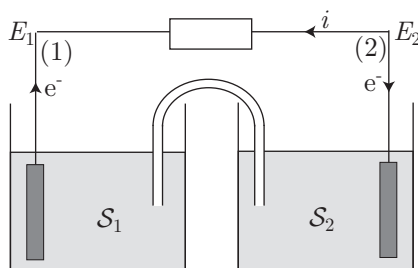
et :

$$[\text{Fe}^{3+}] = \frac{K'_d [\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}]}{[\text{CN}^-]^6} = 10^{-8,7} \times \frac{10^{-2}}{(6 \cdot 10^{-2})^6} \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = 4,3 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

3. (a) Dans la solution \mathcal{S}_2 , les ions Fe^{2+} et Fe^{3+} sont présents aux concentrations précédemment calculées, auquel cas le potentiel de l'électrode (2) vaut :

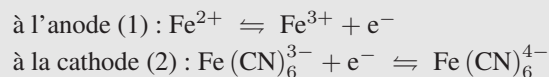
$$E_2 = E^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = 0,77 + 0,06 \log \left(\frac{4,3 \cdot 10^{-4}}{1,1 \cdot 10^{-26}} \right) = 2,13 \text{ V}$$

L'inégalité : $E_2 > E_1$ suffit à montrer que l'électrode (2) est la borne positive (cathode) de la pile, dont la borne négative (anode) est constituée par l'électrode (1).

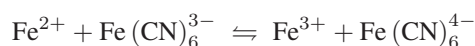


Lorsque ces électrodes sont reliées par un *resistor*, un courant (i) circule de l'électrode (2) vers l'électrode (1), ce qui signifie que des électrons sont émis par l'électrode (1) et récupérés par l'électrode (2).

- (b) Compte tenu du résultat précédent, il se produit les réactions suivantes :



d'où découle l'équation-bilan :

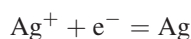


- (c) Par définition, la force électromotrice e de la pile est la différence de potentiel entre ses bornes, lorsqu'elle ne débite aucun courant, c'est-à-dire :

$$e = E_2 - E_1 = 2,13 - 0,79 \Rightarrow e = 1,34 \text{ V}$$

● 343 Lycée Pissaro, Pontoise

1. Dans les deux cellules, le couple Ag^+/Ag , de demi-équation :



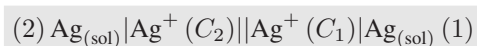
est responsable de l'apparition d'un potentiel :

$$E_i = E^0 + 0,06 \log [\text{Ag}^+]_i = E^0 + 0,06 \log C_i$$

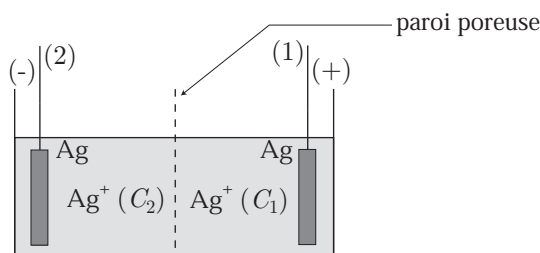
Application numérique :

$$\begin{cases} E_1 = 0,80 + 0,06 \log (10^{-1}) \\ E_2 = 0,80 + 0,06 \log (10^{-4}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = 0,74 \text{ V} \\ E_2 = 0,56 \text{ V} \end{cases}$$

2. Ces valeurs montrent que l'électrode (1) est la borne positive (cathode) de la pile tandis que l'électrode (2) en est la borne négative (anode).
 3. Selon la convention classique, la représentation de la pile commence par l'anode, c'est-à-dire, compte tenu de la question précédente :



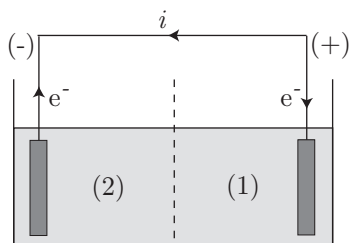
Schématiquement, cette pile se présente alors comme suit :



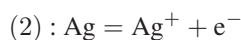
4. Par définition, la force électromotrice de cette pile vaut :

$$e = E_1 - E_2 = 0,18 \text{ V}$$

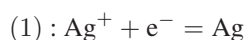
5. Un fil reliant les deux électrodes permet le passage du courant (i) de la cathode vers l'anode (les électrons e^- circulent alors en sens inverse dans le fil).



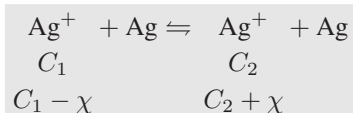
Ce transfert d'électrons s'interprète aisément par une oxydation à l'anode :



et une réduction à la cathode :



Le bilan global de cette pile est ainsi décrit par le bilan ci-dessous, dans lequel χ désigne l'avancement de la réaction :



6. La pile cesse de débiter dès que $E_1 = E_2$, soit encore :

$$E^0 + 0,06 \log [\text{Ag}^+]_1 = E^0 + 0,06 \log [\text{Ag}^+]_2$$

ce qui signifie également que, dans les deux compartiments, la concentration en ions Ag^+ est identique :

$$\begin{aligned} C_1 - \chi &= C_2 + \chi \Rightarrow 2\chi = C_1 - C_2 \Rightarrow \chi = \frac{C_1 - C_2}{2} \\ &\Rightarrow [\text{Ag}^+]_1 = C_1 - \chi = \frac{C_1 + C_2}{2} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$[\text{Ag}^+]_1 = \frac{10^{-1} + 10^{-4}}{2} = 5,005 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

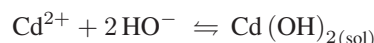
● 344 ————— Concours ESIM

La présence du couple Cd^{2+}/Cd : $\text{Cd}^{2+} + 2\text{e}^- = \text{Cd}$ affecte à l'anode le potentiel :

$$E_2 = E_2^0 + 0,03 \log \left(\frac{|\text{Cd}^{2+}|}{|\text{Cd}|} \right)$$

où $|X|$ désigne l'activité de X.

Or, en milieu basique, les ions Cd^{2+} réagissent avec les ions HO^- pour former le précipité de $\text{Cd}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$, conformément à l'équation :



dont le produit de solubilité est défini par :

$$K_{s_2} = \frac{|\text{Cd}^{2+}| |\text{HO}^-|^2}{|\text{Cd}(\text{OH})_2|} \Rightarrow |\text{Cd}^{2+}| = \frac{K_{s_2} |\text{Cd}(\text{OH})_2|}{|\text{HO}^-|^2}$$

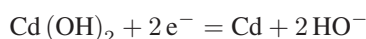
C'est pourquoi le potentiel E_2 vaut :

$$\begin{aligned} E_2 &= E_2^0 + 0,03 \log \left(\frac{K_{s_2} |\text{Cd}(\text{OH})_2|}{|\text{Cd}| |\text{HO}^-|^2} \right) \\ &= E_2^0 - 0,03 pK_{s_2} + 0,03 \log \left(\frac{|\text{Cd}(\text{OH})_2|}{|\text{Cd}| |\text{HO}^-|^2} \right) \end{aligned}$$

avec :

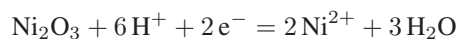
$$\begin{aligned} E_2^0 - 0,03 pK_{s_2} &= -0,40 - 0,03 \times 14 = -0,82 \text{ V} \\ \Rightarrow E_2 &= -0,82 + 0,03 \log \left(\frac{|\text{Cd}(\text{OH})_2|}{|\text{Cd}| |\text{HO}^-|^2} \right) \end{aligned}$$

Remarque – Cette expression représente la formule de Nernst associée à la demi-équation :



qui se réalise à l'anode.

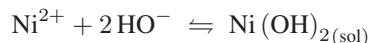
En revanche, à la cathode, le couple $\text{Ni}_2\text{O}_3/\text{Ni}^{2+}$ a pour demi-équation (en milieu acide) :



qui provoquerait l'apparition d'un potentiel :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{|\text{Ni}_2\text{O}_3| |\text{H}^+|^6}{|\text{Ni}^{2+}|^2 |\text{H}_2\text{O}|^3} \right) \quad (86)$$

Cependant, en milieu basique, les ions Ni^{2+} sont minoritaires car ils précipitent pour former $\text{Ni}(\text{OH})_2$, conformément à l'équilibre :



Aussi, le produit de solubilité de $\text{Ni}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ conduit à :

$$\begin{aligned} K_{s_1} &= \frac{|\text{Ni}^{2+}| |\text{HO}^-|^2}{|\text{Ni}(\text{OH})_2|} \Rightarrow |\text{Ni}^{2+}|^2 = \frac{K_{s_1}^2 |\text{Ni}(\text{OH})_2|^2}{|\text{HO}^-|^4} \\ \Rightarrow \frac{|\text{Ni}_2\text{O}_3| |\text{H}^+|^6}{|\text{Ni}^{2+}|^2 |\text{H}_2\text{O}|^3} &= \frac{|\text{Ni}_2\text{O}_3| |\text{H}^+|^6 |\text{HO}^-|^4}{K_{s_1}^2 |\text{Ni}(\text{OH})_2|^2 |\text{H}_2\text{O}|^3} \end{aligned}$$

En outre, le produit ionique de l'eau est défini par :

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{|\text{H}^+| |\text{HO}^-|}{|\text{H}_2\text{O}|} \\ \Rightarrow |\text{H}^+|^6 &= \frac{K_i^6 |\text{H}_2\text{O}|^6}{|\text{HO}^-|^6} \\ \Rightarrow \frac{|\text{H}^+|^6 |\text{HO}^-|^4}{|\text{H}_2\text{O}|^3} &= \frac{K_i^6 |\text{H}_2\text{O}|^3}{|\text{HO}^-|^2} \\ \Rightarrow \frac{|\text{Ni}_2\text{O}_3| |\text{H}^+|^6}{|\text{Ni}^{2+}|^2 |\text{H}_2\text{O}|^3} &= \frac{|\text{Ni}_2\text{O}_3| K_i^6 |\text{H}_2\text{O}|^3}{K_{s_1}^2 |\text{Ni}(\text{OH})_2|^2 |\text{HO}^-|^2} \end{aligned}$$

De fait, le potentiel E_1 exprimé par la relation (86) devient :

$$E_1 = E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{K_i^6}{K_{s_1}^2} \right) + 0,03 \log \left(\frac{|\text{Ni}_2\text{O}_3| |\text{H}_2\text{O}|^3}{|\text{Ni}(\text{OH})_2|^2 |\text{HO}^-|^2} \right)$$

avec :

$$\begin{aligned} E_1^0 + 0,03 \log \left(\frac{K_i^6}{K_{s_1}^2} \right) &= E_1^0 + 0,03 (2pK_{s_1} - 6pK_i) \\ &= 1,74 + 0,03 \times (2 \times 16 - 6 \times 14) = 0,18 \text{ V} \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$E_1 = 0,18 + 0,03 \log \left(\frac{|\text{Ni}_2\text{O}_3| |\text{H}_2\text{O}|^3}{|\text{Ni}(\text{OH})_2|^2 |\text{HO}^-|^2} \right)$$

Les activités des solides $\text{Cd}(\text{OH})_2$, Cd , Ni_2O_3 , $\text{Ni}(\text{OH})_2$ ainsi que celle de l'eau valant 1, les expressions des potentiels E_1 et E_2 se simplifient :

$$E_1 = 0,18 - 0,06 \log [\text{HO}^-] \quad \text{et} \quad E_2 = -0,82 - 0,06 \log [\text{HO}^-]$$

ce qui confère à l'accumulateur la force électromotrice :

$$e = E_1 - E_2 = 0,18 + 0,82 \Rightarrow e = 1,00 \text{ V}$$

● 345 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Dans le compartiment A, le couple $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ ($\text{Fe}^{3+} + e^- = \text{Fe}^{2+}$) génère le potentiel :

$$E_A = E_1^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = 0,77 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) \quad (87)$$

c'est-à-dire, avec $[\text{Fe}^{3+}] = [\text{Fe}^{2+}] = C_0$:

$$E_A = 0,77 \text{ V}$$

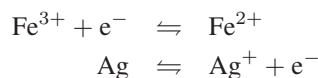
De même, le potentiel E_B de l'électrode d'argent est imposé par le couple Ag^+/Ag ($\text{Ag}^+ + e^- = \text{Ag}$) pour lequel la formule de Nernst indique que :

$$E_B = E_2^0 + 0,06 \log [\text{Ag}^+] = 0,80 + 0,06 \log [\text{Ag}^+] \quad (88)$$

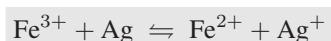
c'est-à-dire, avec $[\text{Ag}^+] = C_1 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$:

$$E_B = 0,80 + 0,06 \times \log (10^{-3}) = 0,62 \text{ V}$$

Ces calculs révèlent que : $E_A > E_B$ ce qui signifie que l'électrode de platine constitue la cathode (il s'y produit une réduction des ions Fe^{2+}) tandis que l'électrode d'argent est l'anode de la pile (l'électrode d'argent subit une oxydation) :



La réaction globale de fonctionnement de la pile est alors décrite par l'équation :



2. En ajoutant FeSO_4 dans le compartiment A , on augmente la concentration des ions Fe^{2+} , libérés lors de la dissociation (totale) du sulfate ferreux :



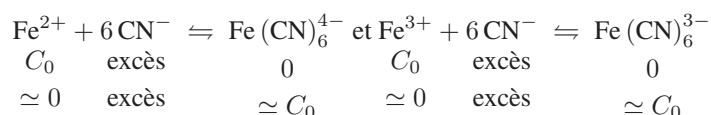
Par suite, le potentiel E_A , donné par l'expression (87) :

$$E_A = 0,77 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right)$$

décroît depuis sa valeur initiale de 0,77 V. Cette décroissance peut l'amener à prendre la valeur $E_B = 0,62$ V du potentiel de la cellule B , auquel cas la f.é.m. $e = |E_A - E_B|$ de la pile deviendra nulle. Ce résultat est atteint lorsque :

$$\begin{aligned} E_A = E_B &\Rightarrow 0,77 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = 0,62 \\ &\Rightarrow \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = \frac{0,62 - 0,77}{0,06} = -2,5 \\ &\Rightarrow \frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} = 10^{-2,5} = 3,16 \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

3. (a) L'apport d'ions CN^- dans le compartiment A provoque la complexation (presque totale) des ions Fe^{2+} et Fe^{3+} , conformément aux équations-bilans :



Du reste, les constantes de formation β'_6 et β_6 associées à ces équilibres sont définies par :

$$\beta'_6 = \frac{[\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}]}{[\text{Fe}^{2+}] [\text{CN}^-]^6} \Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = \frac{[\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}]}{\beta'_6 [\text{CN}^-]^6} = \frac{C_0}{\beta'_6 [\text{CN}^-]^6}$$

et :

$$\beta_6 = \frac{[\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}]}{[\text{Fe}^{3+}] [\text{CN}^-]^6} = \frac{C_0}{[\text{Fe}^{3+}] [\text{CN}^-]^6} \Rightarrow [\text{Fe}^{3+}] = \frac{C_0}{\beta_6 [\text{CN}^-]^6}$$

Ce faisant :

$$\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} = \frac{C_0}{\beta_6 [\text{CN}^-]^6} \times \frac{\beta'_6 [\text{CN}^-]^6}{C_0} = \frac{\beta'_6}{\beta_6} = \frac{10^{24}}{10^{31}} = 10^{-7}$$

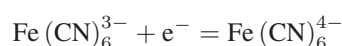
ce qui confère au potentiel E_A la valeur donnée par la relation (87) :

$$E_A = 0,77 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = 0,77 - 0,42$$

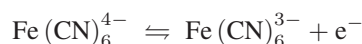
$$\Rightarrow E_A = 0,35 \text{ V} < E_B = 0,62 \text{ V}$$

Cette inégalité confirme donc l'inversion de polarité observée pour les bornes de la pile.

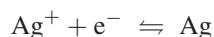
- (b) Les ions Fe^{2+} et Fe^{3+} ont presque totalement disparu de la cellule A , au profit des complexes $\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$ et $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}$. C'est pourquoi la demi-réaction qui rend compte de l'oxydo-réduction en A s'écrit :



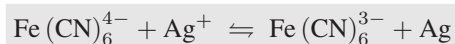
Or, l'inégalité $E_A < E_B$ signifie qu'en A se produit une oxydation :



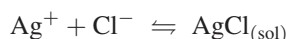
et une réduction en B :



Finalement, l'équation-bilan qui décrit le fonctionnement de la pile est :



4. (a) Initialement, les ions Ag^+ se trouvent à la concentration $C_1 = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en B , tandis que les ions Cl^- , libérés par la mise en solution de KCl , se trouvent à une concentration au moins égale à $10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Aussi, la réaction de précipitation de $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$:



présente initialement un quotient de réaction :

$$Q_0 = [\text{Ag}^+]_0 [\text{Cl}^-]_0 \geq 10^{-3} \times 10^{-1} = 10^{-4}$$

Par conséquent, l'inégalité : $Q_0 \gg K_s = 10^{-10}$ suffit à prédire la formation du précipité de $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$ soumis à l'équation :

$$[\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-] = K_s \Rightarrow [\text{Ag}^+] = \frac{K_s}{[\text{Cl}^-]} = \frac{10^{-10}}{10^{-1}} = 10^{-9} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Par suite, le potentiel E_B fourni par la relation (88), devient :

$$E_B = 0,80 + 0,06 \log (10^{-9}) \Rightarrow E_B = 0,26 \text{ V} < 0,35 \text{ V} = E_A$$

À nouveau, cette inégalité montre que la polarité des bornes de la pile a été inversée.

- (b) La f.é.m. de la pile est nulle lorsque :

$$E_A = E_B \Rightarrow 0,35 = 0,80 + 0,06 \log [\text{Ag}^+]$$

$$\Rightarrow \log [\text{Ag}^+] = \frac{0,35 - 0,80}{0,06} = -7,5$$

$$\Rightarrow [\text{Ag}^+] = 10^{-7,5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Du reste, la précipitation de $\text{AgCl}_{(\text{sol})}$ impose :

$$\begin{aligned} [\text{Ag}^+] [\text{Cl}^-] = K_s &\Rightarrow [\text{Cl}^-] = \frac{K_s}{[\text{Ag}^+]} = \frac{10^{-10}}{10^{-7,5}} \\ &\Rightarrow [\text{Cl}^-] = 10^{-2,5} = 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

● 346 ————— Concours de l'ESIM

1. La demi-équation : $\text{Fe}^{3+} + \text{e}^- = \text{Fe}^{2+}$ indique que l'électrode (1) se trouve au potentiel :

$$E_1 = E_1^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = E_1^0 \text{ car } [\text{Fe}^{3+}] = [\text{Fe}^{2+}] = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

De même, la solution contenant des ions Fe^{2+} et Fe^{3+} aux concentrations $[\text{Fe}^{2+}] = x$ et $[\text{Fe}^{3+}] = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, elle porte l'électrode (2) au potentiel :

$$E_2 = E_1^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = E_1^0 + 0,06 \log \left(\frac{10^{-2}}{x} \right)$$

Aussi, la tension U_{12} aux bornes de cette pile vaut :

$$U_{12} = E_1 - E_2 = 0,06 \log \left(\frac{x}{10^{-2}} \right)$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} 0,06 \log \left(\frac{x}{10^{-2}} \right) &= \pm |U_{12}| = \pm 18 \cdot 10^{-3} \\ \Rightarrow \log \left(\frac{x}{10^{-2}} \right) &= \pm 0,3 \\ \Rightarrow x &= 10^{-2} \times 10^{\pm 0,3} \end{aligned}$$

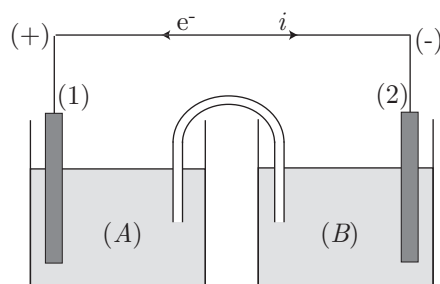
C'est pourquoi deux valeurs de x permettent d'atteindre $|U_{12}| = 18 \text{ mV}$:

- $x_1 = 10^{-2} \times 10^{0,3} = 2 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en conséquence de quoi :

$$E_2 = E_1^0 + 0,06 \log \left(\frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} \right) = E_1^0 - 18 \cdot 10^{-3} < E_1^0 = E_1$$

ce qui suffit à montrer que, dans ce cas :

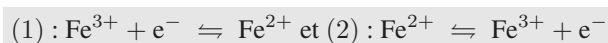
l'électrode (1) est la borne positive et la borne (2) est la borne négative.



Cette polarité justifie que lorsque la pile débite :

à l'électrode (1) se produit une réduction et l'électrode (2) est le siège d'une oxydation.

Cette conclusion permet d'interpréter le transfert d'électrons de l'électrode (2) vers l'électrode (1) :

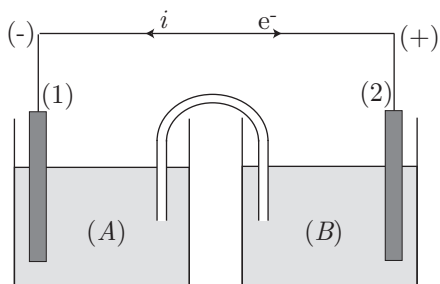


- $x_2 = 10^{-2} \times 10^{-0,3} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, d'où il découle que :

$$E_2 = E_1^0 + 0,06 \log \left(\frac{10^{-2}}{5 \cdot 10^{-3}} \right) = E_1^0 + 18 \cdot 10^{-3} > E_1^0 = E_1$$

ce qui signifie que :

l'électrode (2) est la borne positive tandis que la borne (1) est la borne négative.



C'est pourquoi :

à l'électrode (1) se produit une oxydation et une réduction est observée à l'électrode (2).

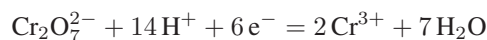
ce qui rend compte des transferts électroniques :



2. (a) L'électrode (1) plongeant dans la même solution (A), elle y adopte le potentiel :

$$V_1 = E_1 = E_1^0 = 0,77 \text{ V}$$

En revanche, l'électrode (2) plonge dans une solution contenant le couple $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$, de demi-équation :



dont le potentiel est donné par la formule de Nernst :

$$V_2 = E_2^0 + \frac{0,06}{6} \log \left(\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] [\text{H}^+]^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]^2} \right)$$

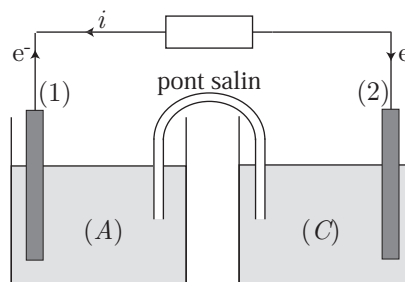
avec : $[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] = [\text{Cr}^{3+}] = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et $[\text{H}^+] = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$:

$$V_2 = 1,33 + 0,01 \log \left(\frac{10^{-2}}{10^{-4}} \right) = 1,35 \text{ V}$$

C'est pourquoi :

$$U_{21} = V_2 - V_1 = 1,35 - 0,77 \Rightarrow U_{21} = 0,58 \text{ V}$$

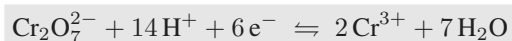
- (b) Étant donné que $V_2 > V_1$, lorsque K est fermé le courant passe de l'électrode (2) à l'électrode (1), ce qui signifie que les électrons sont émis par l'électrode (1) et récupérés par l'électrode (2).



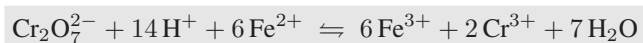
La solution (A) est le siège d'une oxydation :



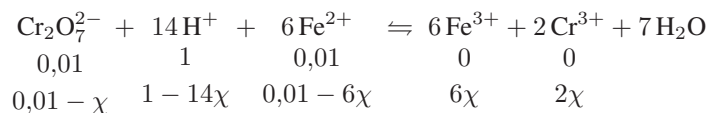
tandis qu'une réduction des ions dichromate se produit dans la solution (C) :



L'équation-bilan des transformations chimiques s'écrit par conséquent :



- (c) Initialement, la concentration en $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$, Fe^{2+} et H^+ vaut $10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, celle en H^+ vaut $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ tandis que celle des ions Fe^{3+} et Cr^{3+} est nulle. Lorsque l'interrupteur est fermé, la circulation du courant électrique rend possible la réaction d'équation-bilan :



où χ en désigne l'avancement.

En supposant la réaction presque totale, on admet qu'elle cesse lorsque le réactif en défaut a presque disparu ; la pile cesse de débiter lorsque :

$$[\text{Fe}^{2+}] \simeq 0 \Rightarrow 0,01 - 6\chi = 0 \Rightarrow \chi = \frac{0,01}{6} \simeq 1,67 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

À cet instant :

$$[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] = 0,01 - \chi = 8,33 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{Fe}^{3+}] = 6\chi = 0,01 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{Cr}^{3+}] = 2\chi = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+] = 1 - 14\chi = 0,98 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \simeq 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Enfin, lorsque la pile est « usée », la tension entre ses bornes devient nulle :

$$U_{12} = 0 \Rightarrow V_1 = V_2$$

$$\Rightarrow E_1^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) = E_2^0 + 0,01 \log \left(\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] [\text{H}^+]^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]^2} \right)$$

$$\Rightarrow E_1^0 - E_2^0 = 0,01 \log \left(\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] [\text{H}^+]^{14} [\text{Fe}^{2+}]^6}{[\text{Cr}^{3+}]^2 [\text{Fe}^{3+}]^6} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] [\text{H}^+]^{14} [\text{Fe}^{2+}]^6}{[\text{Cr}^{3+}]^2 [\text{Fe}^{3+}]^6} = 10^{\frac{E_1^0 - E_2^0}{0,01}} = 10^{\frac{0,77 - 1,33}{0,01}} = 10^{-56}$$

soit encore :

$$[\text{Fe}^{2+}] = [\text{Fe}^{3+}] \times \left(10^{-56} \times \frac{[\text{Cr}^{3+}]^2}{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] [\text{H}^+]^{14}} \right)^{1/6}$$

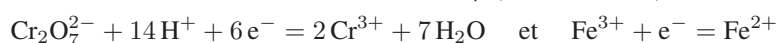
Application numérique :

$$\begin{aligned} [\text{Fe}^{2+}] &= 0,01 \times \left[10^{-56} \times \frac{(3,33 \cdot 10^{-3})^2}{8,33 \cdot 10^{-3} \times 1} \right]^{1/6} \\ &\Rightarrow [\text{Fe}^{2+}] = 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

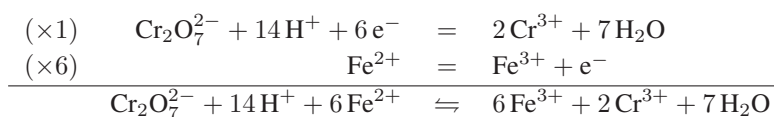
Remarque – Cette valeur numérique justifie a posteriori l'hypothèse selon laquelle $[\text{Fe}^{2+}] \simeq 0$ lorsque la pile est « usée ».

● 347 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. Des demi-équations associées aux couples $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$ et $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$:



ressort l'équation-bilan du dosage, par combinaison linéaire :

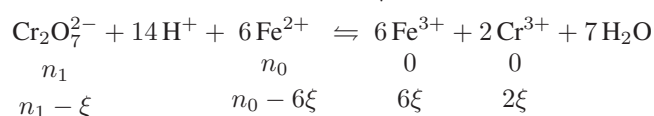


Étant donné que $\eta = 6$ électrons sont impliqués dans cet équilibre, sa constante vaut :

$$K = 10^{\frac{\eta}{0,06}(E_1^0 - E_2^0)} = 10^{\frac{6}{0,06}(1,33 - 0,77)} \Rightarrow K = 10^{56}$$

Avec une telle constante, la réaction pourra être assimilée à une réaction totale, et c'est pour cette raison qu'elle peut être utilisée pour un titrage.

2. Initialement, le milieu réactionnel contient $n_0 = c_0 v_0$ moles d'ions Fe^{2+} tandis qu'on y introduit $n_1 = cv$ moles d'ions $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$:



Les coefficients stœchiométriques révèlent alors que l'équivalence est atteinte lorsque :

$$n_1 = \frac{n_0}{6} \Rightarrow cv_{\text{éq}} = \frac{c_0 v_0}{6} \Rightarrow v_{\text{éq}} = \frac{c_0 v_0}{6c}$$

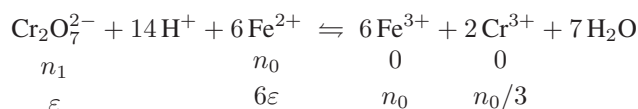
3. La réaction n'étant pas parfaitement totale, à l'équivalence il reste une très faible quantité de réactifs ; on note ε celle de $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ et ξ_e la valeur de ξ à l'équivalence :

$$n_1 - \xi_e = \varepsilon \Rightarrow \xi_e = n_1 - \varepsilon \Rightarrow n_0 - 6\xi_e = \underbrace{n_0 - 6n_1}_{=0} + 6\varepsilon = 6\varepsilon$$

En outre, en remarquant que $n_1 = \frac{n_0}{6}$, il vient :

$$\begin{cases} 6\xi_e = 6(n_1 - \varepsilon) \simeq 6n_1 = n_0 \\ 2\xi_e = 2(n_1 - \varepsilon) \simeq 2n_1 = \frac{n_0}{3} \end{cases}$$

Par suite, le bilan du dosage à l'équivalence s'écrit :



ce qui conduit aux concentrations des diverses espèces contenues dans le milieu réactionnel, de volume $V = v_0 + v_{\text{éq}} = 110$ mL :

$$[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] = \frac{\varepsilon}{V} \quad [\text{Fe}^{2+}] = \frac{6\varepsilon}{V} \quad [\text{Fe}^{3+}] = \frac{n_0}{V} \quad [\text{Cr}^{3+}] = \frac{n_0}{3V}$$

et $[\text{H}^+] = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ en milieu tamponné à $\text{pH} = 0$.

Toutes les espèces chimiques se trouvant réunies dans le même mélange, les couples $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$ et $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$ présentent le même potentiel E (mesuré par

une électrode) :

$$\begin{cases} E = E_1^0 + \frac{0,06}{6} \log \left(\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] [\text{H}^+]^{14}}{[\text{Cr}^{3+}]^2} \right) \\ E = E_2^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Fe}^{2+}]} \right) \end{cases}$$

d'où il découle que :

$$\underbrace{6E + E}_{7E} = 6E_1^0 + E_2^0 + 0,06 \log \left(\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] [\text{H}^+]^{14} [\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Cr}^{3+}]^2 [\text{Fe}^{2+}]} \right)$$

avec :

$$\frac{[\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}] [\text{H}^+]^{14} [\text{Fe}^{3+}]}{[\text{Cr}^{3+}]^2 [\text{Fe}^{2+}]} = \frac{\frac{\varepsilon}{V} \times 1 \times \frac{n_0}{V}}{\left(\frac{n_0}{3V}\right)^2 \times \frac{6\varepsilon}{V}} = \frac{3V}{2n_0}$$

C'est pourquoi :

$$E = \frac{6E_1^0 + E_2^0}{7} + \frac{0,06}{7} \log \left(\frac{3V}{2c_0v_0} \right)$$

Application numérique :

$$E = \frac{6 \times 1,33 + 0,77}{7} + \frac{0,06}{7} \log \left(\frac{3 \times 110}{2 \cdot 10^{-2} \times 100} \right) \Rightarrow E = 1,27 \text{ V}$$

Chapitre 10

Architecture de la matière

10.1 Structure électronique de l'atome

10.1.1 Niveaux d'énergie électronique de l'atome

10.1.1.1 L'atome d'hydrogène

Définition 1 Un rayonnement électromagnétique de longueur d'onde λ (c'est-à-dire de fréquence ν) présente une énergie :

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda} = h\nu$$

où $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ désigne la constante de Planck et $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ la célérité de la lumière dans le vide.

Définition 2 L'impulsion d'une particule de masse m et de vitesse v est définie par :

$$p = mv \text{ (pour une particule matérielle massive)}$$

alors que l'impulsion d'un photon associé à un rayonnement de longueur d'onde λ vaut :

$$p = \frac{h}{\lambda} = \hbar k \text{ (pour une onde)}$$

où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ est la constante de Planck réduite et $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ désigne le nombre d'onde.

La loi de De Broglie stipule qu'une particule présente simultanément des propriétés corpusculaires et ondulatoires, ce qui se traduit par :

$$mv = \frac{h}{\lambda} \text{ (pour une particule de masse non nulle).}$$

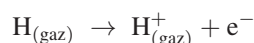
L'énergie d'un électron lié au proton, dans l'atome d'hydrogène, est quantifiée par :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ avec } E_0 = 13,6 \text{ eV et } n \in \mathbb{N}^*$$

Rappelons que l'électron-volt est une unité d'énergie telle que :

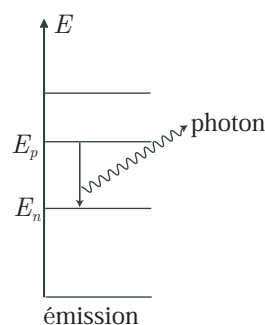
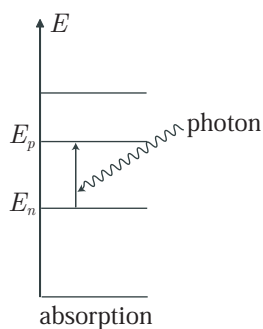
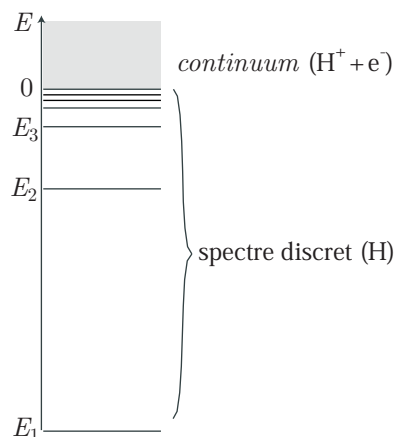
$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

En revanche, lorsque l'électron se libère de l'atome d'hydrogène, à l'issue d'une réaction d'ionisation :



son énergie peut prendre toutes les valeurs positives possibles ; il s'agit d'un *continuum* d'énergie. Cette distribution énergétique est représentée sur le schéma ci-contre où figurent les niveaux discrets ainsi que le *continuum*.

Le niveau d'énergie $E_1 = -13,6 \text{ eV}$ est appelé *niveau fondamental* ; l'atome d'hydrogène le plus stable possède un électron d'énergie E_1 . L'atome peut cependant être excité, par exemple en absorbant un photon. De même, un atome excité peut se stabiliser en émettant un rayonnement électromagnétique.



L'absorption ou l'émission d'un rayonnement électromagnétique ne peut se réaliser que si la longueur d'onde λ de ce rayonnement, d'énergie $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, correspond exactement à la différence d'énergie entre deux niveaux d'énergie :

$$\varepsilon = E_p - E_n \Rightarrow \varepsilon = E_1 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \text{ avec } n < p$$

De cette identité découle la *formule de Ritz* :

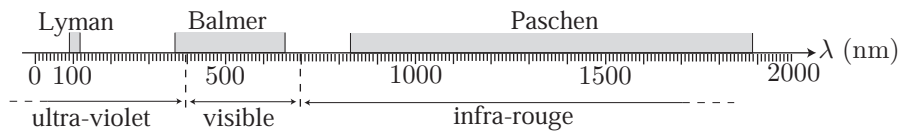
$$\frac{1}{\lambda} = \mathcal{R}_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

où $\mathcal{R}_H = 1,09 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$ désigne la *constante de Rydberg* de l'hydrogène.

⚠ La constante de Rydberg prend des valeurs spécifiques à chaque élément et à chaque isotope.

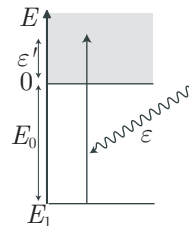
Selon la valeur prise par n , plusieurs séries sont distinguées :

- la série de Lyman correspond à $n = 1$ et présente ainsi un spectre dont les longueurs d'onde sont comprises entre 92 nm et 122 nm ;
- la série de Balmer part du niveau $n = 2$, auquel cas son spectre comprend des longueurs d'onde entre 367 nm et 660 nm ;
- la série de Paschen commence au niveau $n = 3$ et les longueurs d'onde de son spectre sont comprises entre 826 nm et 1 887 nm.



D'autres séries existent également (Brackett : $n = 4$, Pfundt : $n = 5, \dots$) mais seule la série de Balmer contient des rayonnements visibles.

Un atome d'hydrogène stable, qui reçoit un rayonnement d'énergie supérieure à E_0 , subit une ionisation. L'électron ainsi libéré possède une énergie $\varepsilon' = \varepsilon - E_0$, souvent sous forme cinétique.



👉 Un atome d'hydrogène subit une ionisation sous l'influence d'un rayonnement de longueur d'onde $\lambda = 364,95$ nm. L'électron s'échappe avec une vitesse $v = 2.10^4$ m · s⁻¹. En déduire le niveau d'énergie qu'occupait cet électron dans l'atome (c'est-à-dire n).

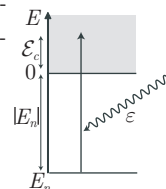
Données :

- constante de Planck : $h = 6,62.10^{-34}$ J · s ;
- célérité de la lumière : $c = 3.10^8$ m · s⁻¹ ;
- énergie du niveau fondamental : $E_1 = -E_0 = -13,6$ eV ;
- masse de l'électron : $m = 9,1.10^{-31}$ kg.

RÉPONSE

Le rayonnement apporte une énergie $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ qui sert non seulement à provoquer l'ionisation de l'atome (dont l'électron occupe le niveau d'énergie E_n), mais qui est également convertie sous forme d'énergie cinétique pour l'électron :

$$\begin{aligned} \varepsilon = |E_n| + \mathcal{E}_c &\Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = \frac{E_0}{n^2} + \frac{1}{2}mv^2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{n^2} = \frac{1}{E_0} \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{mv^2}{2} \right) \end{aligned}$$



Application numérique :

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} \times \left[\frac{6,62 \cdot 19^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{364,95 \cdot 10^{-9}} - \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \times (2 \cdot 10^4)^2}{2} \right]$$

$$\simeq 0,25 \Rightarrow n = 2$$

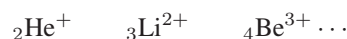
Dans le cadre semi-classique du *modèle de Bohr* (voir exercice de la page 1212) l'électron décrit des orbites circulaires dont le rayon r est quantifié par :

$$r = n \times r_0, n \in \mathbb{N}^*$$

où $r_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m est appelé *rayon de Bohr*.

10.1.1.2 Les ions hydrogénoïdes

Définition 3 Un ion hydrogénoïde est un atome, de numéro atomique $Z \geq 2$ (contenant donc au moins deux protons), auquel n est associé qu'un électron ; par exemple :



Dans le cadre du modèle de Bohr (voir page 1212), on démontre que :

- l'énergie de l'électron confiné dans l'atome est quantifiée par :

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \times E_0 \text{ où } E_0 = 13,6 \text{ eV et } n \in \mathbb{N}^*$$

- lorsque l'électron décrit une orbite circulaire autour du noyau, son rayon r est quantifié par :

$$r = \frac{n^2}{Z} \times r_0 \text{ avec } r_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

10.1.2 Dégénérescence des niveaux d'énergie

Définition 4 Un niveau d'énergie est dit *dégénéré*, s'il existe plusieurs états qui présentent cette même énergie.

10.1.2.1 Les nombres quantiques

On montre que l'état de l'électron, dans l'atome, est décrit par quatre nombres quantiques :

- le *nombre quantique principal*, noté n , qui prend les valeurs entières :

$$n \in \mathbb{N}^*$$

et qui définit une *couche quantique*.

- le *nombre quantique secondaire* (ou *azimutal*), ℓ , tel que :

$$0 \leq \ell < n \text{ avec } \ell \in \mathbb{N}$$

Par exemple, si $n = 3$, ℓ peut prendre les valeurs 0, 1 et 2.

À chaque valeur de ℓ est associée une lettre, permettant la dénomination de l'état correspondant :

ℓ	0	1	2	3	4	...
état	s	p	d	f	g	...

- le nombre quantique magnétique, m_ℓ , défini à partir de la valeur de ℓ :

$$-\ell \leq m_\ell \leq \ell \text{ et } m_\ell \in \mathbb{Z}$$

Dans l'exemple précédent, ℓ prenant les valeurs 0, 1 et 2, le nombre quantique m_ℓ peut prendre les valeurs suivantes :

ℓ	0	1	2
m_ℓ	0	-1, 0, +1	-2, -1, 0, +1, +2

- le quantique de spin, m_s , qui peut prendre les valeurs $+\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$ pour l'électron ; symboliquement, la valeur de ce nombre sera représentée par une flèche : \uparrow ou \downarrow , orientée selon le signe de m_s .

Un état quantique est alors caractérisé par la donnée du quadruplet $\{n, \ell, m_\ell, m_s\}$, que l'on représente également sous forme de « case quantique » (ou *orbitale*). Une case quantique correspond à un triplet donné $\{n, \ell, m_\ell\}$, tandis que le nombre de spin m_s y est figuré par une flèche :

$$\left\{ n, \ell, m_\ell, \frac{1}{2} \right\} \equiv \boxed{\uparrow} \quad \left\{ n, \ell, m_\ell, -\frac{1}{2} \right\} \equiv \boxed{\downarrow}$$



1. Compter le nombre des « cases quantiques » correspondant au nombre quantique principal n , lorsque celui-ci prend respectivement les valeurs $n = 1, 2$ et 3.
2. Démontrer qu'à un nombre quantique principal n correspondent $N = n^2$ « cases quantiques ».

RÉPONSE

1. Compte tenu des inégalités :

$$0 \leq \ell < n \text{ et } -\ell \leq m_\ell \leq \ell \tag{1}$$

à chaque valeur de n correspondent N_n « cases » quantiques désignées par les triplets $\{n, \ell, m_\ell\}$.

- Pour $n = 1$:

$$0 \leq \ell < 1 \Rightarrow \ell = 0$$

et :

$$-\ell \leq m_\ell \leq \ell \Rightarrow 0 \leq m_\ell \leq 0 \Rightarrow m_\ell = 0$$

Aussi, seul l'état $\{0, 0, 0\}$ peut être associé à $n = 1$, et c'est pourquoi $N_1 = 1$.

- Pour $n = 2$, les inégalités (1) fournissent les valeurs possibles de ℓ et m_ℓ :

ℓ	m_ℓ	état
0	0	$\{2, 0, 0\}$
1	-1	$\{2, 1, -1\}$
	0	$\{2, 1, 0\}$
	+1	$\{2, 1, 1\}$

ce qui montre qu'à $n = 2$ sont associés $N_2 = 4$ états possibles.

- Pour $n = 3$, les niveaux quantiques disponibles sont assujettis aux relations (1) :

ℓ	m_ℓ	état
0	0	{3, 0, 0}
1	-1	{3, 1, -1}
	0	{3, 1, 0}
	+1	{3, 1, 1}

ℓ	m_ℓ	état
2	-2	{3, 2 - 2}
	-1	{3, 2 - 1}
	0	{3, 2, 0}
	+1	{3, 2, 1}
	+2	{3, 2, 2}

d'où il ressort qu'à $n = 3$ correspondent $N_3 = 9$ états possibles.

2. L'étude précédente admet une généralisation : pour une valeur donnée de n peuvent exister n valeurs de ℓ ($\ell = 0, 1, \dots, n - 1$) tandis qu'à chacune de ces valeurs sont associées $2\ell + 1$ valeurs de m_ℓ ($m_\ell = -\ell, -\ell + 1, \dots, 0, \dots, \ell - 1, \ell$). C'est pourquoi le nombre total d'états de nombre quantique principal n vaut :

$$\begin{aligned}
 N_n &= 1 \text{ valeur de } m_\ell \text{ (pour } \ell = 0 \text{)} \\
 &+ 3 \text{ valeurs de } m_\ell \text{ (pour } \ell = 1 \text{)} \\
 &+ 5 \text{ valeurs de } m_\ell \text{ (pour } \ell = 2 \text{)} \\
 &\vdots \\
 &+ 2\ell_{\max} + 1 \text{ valeurs de } m_\ell \text{ (pour } \ell_{\max} = n - 1 \text{)}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 N_n &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2\ell_{\max} + 1) \\
 &= \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell + 1) = 2 \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \ell + \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} 1 \\
 &= 2 \times \frac{\ell_{\max} (\ell_{\max} + 1)}{2} + \ell_{\max} + 1 \\
 &= (\ell_{\max} + 1)^2
 \end{aligned}$$

avec :

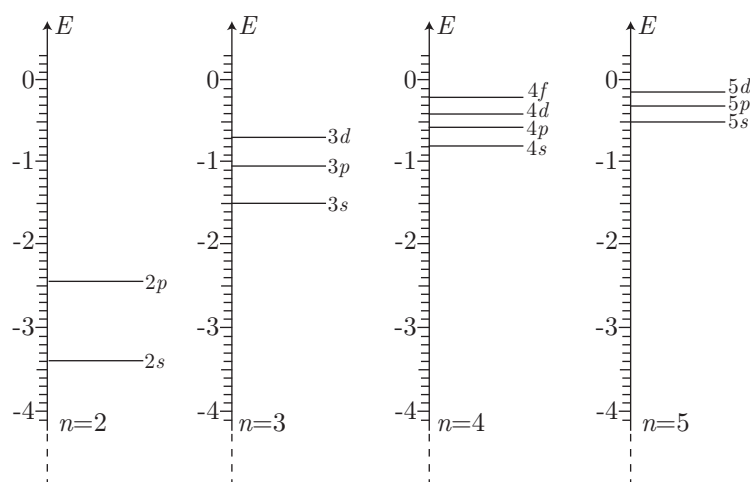
$$\ell_{\max} = n - 1 \Rightarrow N_n = n^2$$

10.1.2.2 Énergie des niveaux quantiques

L'énergie d'un état quantique dépend essentiellement des nombres n et ℓ :

- l'énergie est d'autant plus élevée que n est grand ;
- pour un nombre quantique principal n donné, l'énergie croît avec ℓ .

Cette dépendance de l'énergie est illustrée ci-dessous pour les valeurs $n = 2, 3, 4$ et 5 :



Remarque – On rappelle que les niveaux $ns, np, nd, nf\dots$ correspondent aux nombres quantiques $\{n, \ell\}$:

$$\{n, 0\} \quad \{n, 1\}, \quad \{n, 2\} \quad \{n, 3\}$$

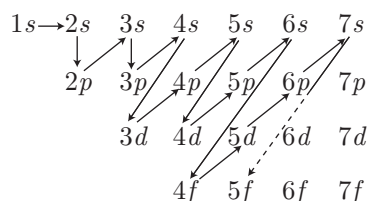
La superposition de ces niveaux d'énergie révèle que :

- l'énergie d'un niveau croît avec $n + \ell$;
- pour deux niveaux différents, conduisant à la même somme $n + \ell$, celui qui possède le plus grand nombre n est le plus énergétique.

Ainsi, on remarque que l'énergie des niveaux quantiques croît selon la séquence :

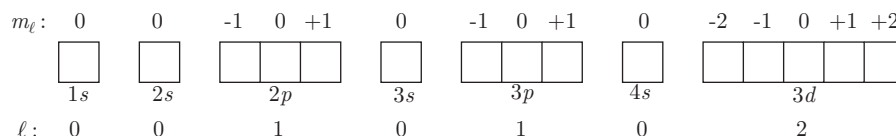
$$1s \rightarrow 2s \rightarrow 2p \rightarrow 3s \rightarrow 3p \rightarrow 4s \rightarrow 3d \rightarrow 4p \rightarrow 5s \rightarrow 4d \rightarrow 5p \dots$$

ce que l'on représente couramment sous la forme d'un diagramme :



qui permet de retrouver rapidement cette séquence.

En l'absence d'interaction extérieure, pour une même valeur de ℓ , les $2\ell + 1$ états quantiques de nombres $m_\ell = -\ell, \dots, 0, \dots, +\ell$ sont dégénérés (par exemple les états $\{3, 2, 0\}$ et $\{3, 2, -1\}$ possèdent la même énergie). C'est pourquoi les orbitales sont souvent représentées par des cases, qui possèdent la même énergie si elles sont collées, mais dont l'énergie croît vers la droite lorsqu'elles sont séparées :



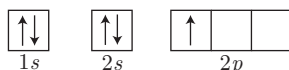
Cependant, dans un champ magnétique d'intensité B , les états quantiques de nombres m_ℓ différents présentent des énergies différentes; il y a *levée de dégénérescence* (l'énergie croît avec m_ℓ). Dans la suite de ce cours, cet effet sera néanmoins ignoré.

10.1.3 Configuration électronique de l'atome

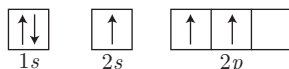
10.1.3.1 Règles de remplissage

Dans un atome polyélectronique, les électrons se répartissent dans les orbitales en respectant les règles suivantes :

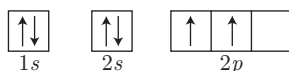
- le *principe d'exclusion de Pauli*, selon lequel deux électrons ne peuvent posséder le même jeu de nombres quantiques $\{n, \ell, m_\ell, m_s\}$; au moins un de ces nombres doit distinguer les états des électrons. Par exemple $\boxed{\uparrow\downarrow}$ est possible, tandis que $\boxed{\uparrow\uparrow}$ ne l'est pas. La conséquence de ce principe est qu'un même niveau quantique ne peut être partagé que par deux électrons au *maximum* (de *spin* opposés).
- la *règle de Klechkowski*, précise que les électrons occupent de préférence les états d'énergie *minimum*. Par exemple, la configuration :



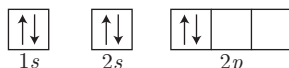
respecte cette règle, tandis que la suivante la transgresse (un électron occupe un niveau $2p$ sans que l'orbitale $2s$ soit saturée) :



- la *règle de Hund*, en vertu de laquelle des niveaux de même énergie sont tous occupés avant l'appariement des électrons. Par exemple, la structure ci-dessous respecte cette règle :



ce qui n'est pas le cas de la structure suivante :



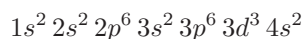
La structure électronique d'un élément s'établit comme suit :

- classer, par ordre d'énergie croissante, les orbitales de l'atome :

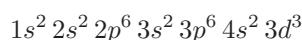
$$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, \dots$$

- remplir ces orbitales en respectant les trois règles mentionnées précédemment ;
- indiquer, à l'aide d'exposants, l'état d'occupation de ces orbitales; $1s^1$ signifie qu'un électron occupe le niveau $1s$, alors que $1s^2$ révèle la présence de deux électrons sur cette orbitale ;
- ne pas représenter les orbitales vacantes (si aucune orbitale $3d$ n'est occupée, ce niveau n'est pas représenté dans la configuration électronique de l'atome) ;

- présenter, sur une ligne, l'ensemble des états occupés, en les classant par ordre croissant du nombre quantique principal n . Ainsi, la configuration électronique du vanadium ($Z = 23$) est :



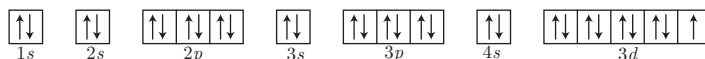
et non :



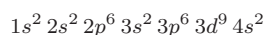
- Énoncer la règle de Klechkowski. Donner la configuration électronique qui en découle dans le cas du cuivre ($Z = 29$).
- En fait la structure électronique du cuivre se termine par $3d^{10} 4s^2$. Proposer une explication.

RÉPONSE

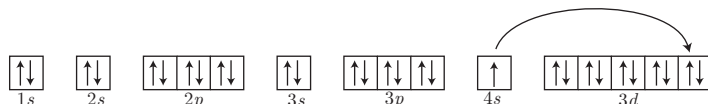
- La règle de Klechkowski précise que les électrons occupent en priorité les états d'énergie la plus faible. Pour le cuivre, cette règle conduirait au remplissage suivant :



c'est-à-dire à la configuration électronique :



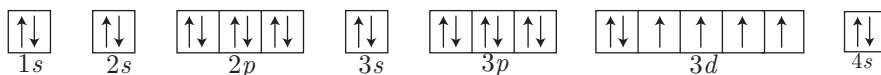
- En fait, on observe une transition électronique du niveau $4s$ vers le niveau $3d$:



Ce faisant, le niveau $3d$ devient saturé et le niveau $4s$ est à moitié saturé, ce qui stabilise l'atome.

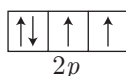
Définition 5 On appelle électrons de valence ceux qui occupent les niveaux de plus grand nombre quantique principal n . Les autres électrons sont les électrons de cœur.

Lors d'une ionisation d'un élément, les électrons de valence sont les premiers affectés. Par exemple, le fer ($Z = 26$) a pour configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$:

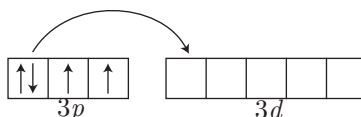


L'ionisation du fer peut atteindre les deux électrons du niveau $4s$ (l'ion Fe^{2+} est alors formé) ou se poursuivre avec l'un des deux électrons appariés du niveau $3d$ (à moitié saturé, ce niveau devient stable) ; l'ion Fe^{3+} est ainsi obtenu.

Remarque – Si les électrons de valence occupent les niveaux $2p$, il leur est impossible de transiter vers un niveau d'énergie supérieure. Ainsi, dans la structure :



les électrons ne peuvent pas se désappairier. En revanche, si ces électrons occupent des niveaux $3p$, le désappariement est rendu possible par une transition électronique sur un niveau $3d$; il y a extension de la couche de valence :



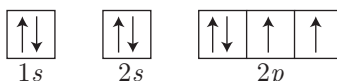
10.1.3.2 Valence de l'atome

Deux atomes, A et B, peuvent s'associer à l'aide d'une liaison covalente ; chacun des atomes investit un électron (non apparié) dans cette liaison.

⚠ Aucun électron apparié à un autre dans l'atome ne peut s'engager dans une liaison covalente.

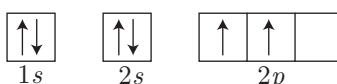
Définition 6 On appelle valence de l'atome le nombre de liaisons covalentes qu'il peut réaliser.

Par exemple, l'oxygène ($Z = 8$) :

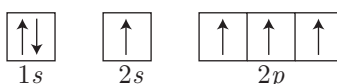


présente deux électrons « célibataires » et peut donc réaliser deux liaisons covalentes (par exemple dans la molécule d'eau : $\text{H} - \text{O} - \text{H}$).

Une augmentation de la valence, observée expérimentalement, peut se justifier par la transgression de la règle de Klechkovski. Par exemple, le carbone ($Z = 6$) :

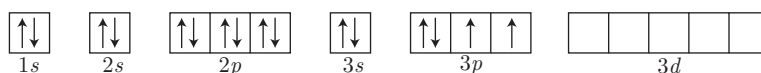


peut réaliser deux liaisons covalentes (dans le cas du carbène : CH_2), mais c'est sous sa forme tétravalente qu'il est le plus souvent rencontré. Cette extension de valence s'interprète aisément en admettant une transition électronique d'un électron du niveau $2s$ vers une orbitale $2p$ vacante :



Ce faisant, quatre électrons « célibataires » peuvent s'engager dans autant de liaisons covalentes (par exemple : CH_4).

Un autre cas d'extension de valence s'observe dans l'atome de soufre ($Z = 16$) :



Dans son état fondamental, seuls deux électrons désappariés peuvent participer aux liaisons covalentes ; la valence du soufre vaut 2 (par exemple dans H_2S : $\text{H} - \text{S} - \text{H}$). Cependant, l'existence d'un niveau $3d$ vacant permet la transition électronique d'un niveau $3p$ et d'un électron du niveau $2s$:



Ce faisant, le soufre acquiert les valences 4 et 6 (par exemple dans les molécules SO_2 et SO_3) :



⚠ L'extension de valence ne peut s'effectuer que par la transition d'un électron de nombre quantique n vers une orbitale vacante de même nombre quantique n . Cette restriction justifie l'absence d'extension de valence pour l'oxygène.

10.1.3.3 Énergie de l'atome polyélectronique

Cette partie est réservée aux étudiants de PCSI ayant choisi l'option PC.

Soit Z le numéro atomique d'un élément et E_n l'énergie d'un électron occupant un état de nombre quantique principal n ; cette énergie est donnée par la *formule de Slater* :

$$E_n = -13,6 \times \left(\frac{Z^*}{n^*} \right)^2 \quad (\text{en eV})$$

où :

- n^* est le *nombre quantique principal effectif*, déduit de n :

n	1	2	3	4	5	6
n^*	1	2	3	3,7	4	4,2

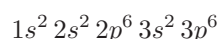
- Z^* est la *charge effective* du noyau :

$$Z^* = Z - \sigma$$

où σ est une constante d'écran : l'électron (\mathcal{E}), dont on calcule l'énergie, est séparé du noyau par un nuage électronique qui fait ainsi écran au noyau. Chacun des électrons de ce nuage agit de manière à diminuer l'influence du noyau et c'est pourquoi il convient de tenir compte de toutes les interactions produites par les électrons situés entre le noyau et (\mathcal{E}). Ces interactions (rappelées dans le tableau ci-dessous) s'additionnent pour constituer σ .

$\sigma_{i/j}$	1s	2s 2p	3s 3p	3d	4s 4p	4d	4f
1s	0,3						
2s 2p	0,85	0,35					
3s 3p	1,00	0,85	0,35				
3d	1,00	1,00	1,00	0,35			
4s 4p	1,00	1,00	0,85	0,85	0,35		
4d	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,35	
4f	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,35

Par exemple, l'ion K^+ ($Z = 19$) a pour structure électronique :



Il convient alors de regrouper les niveaux contenant des électrons ayant la même influence, et d'y dénombrer les électrons :

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1s \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 8 \\ \hline 2s2p \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 7+1 \\ \hline 3s3p \\ \hline \end{array}$$

Un des électrons des niveaux 3s 3p subit ainsi :

- un écran $\sigma_{1s/3s3p} = 1,00$ de la part des deux électrons de l'orbitale 1s ;
- un écran $\sigma_{2s2p/3s3p} = 0,85$ de la part des huit électrons des niveaux 2s, 2p ;
- un écran $\sigma_{3s3p/3s3p} = 0,35$ de la part des sept autres électrons des mêmes niveaux 3s, 3p.

Ce faisant, la constante d'écran associée à un tel électron vaut :

$$\begin{aligned} \sigma &= 2 \times \sigma_{1s/3s3p} + 8 \times \sigma_{2s2p/3s3p} + 7 \times \sigma_{3s3p/3s3p} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 0,85 + 7 \times 0,35 = 11,25 \end{aligned}$$

Aussi, la charge effective du noyau, pour un électron situé sur une orbitale 3p, vaut :

$$Z^* = Z - \sigma = 19 - 11,25 = 7,75$$

⚠ Un électron ne peut se faire écran à lui-même et c'est la raison pour laquelle l'occupation des niveaux 3s, 3p a été représentée sous la forme : 7 + 1 (sept électrons font écran au huitième) et non 8, qui aurait pu suggérer une interaction de $8 \times \sigma_{3s3p/3s3p}$.

Remarque – Les électrons d'un niveau quantique ne sont pas affectés par ceux des niveaux supérieurs. Par exemple, la constante d'écran pour un électron occupant un niveau 2s2p vaut :

$$\sigma = 2 \times \sigma_{1s/2s2p} + 7 \times \sigma_{2s2p/2s2p}$$

Définition 7 Soit un atome qui possède N_n électrons sur chacun des niveaux d'énergie $\varepsilon_n = -13,6 \times \left(\frac{Z^*}{n^*}\right)^2$. L'énergie totale du nuage électronique de cet atome vaut :

$$E = \sum_n N_n \times \varepsilon_n$$



Il est souvent superflu de calculer l'énergie des électrons de cœur (qui sont rarement sollicités au cours des réactions chimiques). C'est pourquoi on peut appeler \mathcal{E}_0 cette énergie et se satisfaire du calcul de l'énergie des seuls électrons de valence. Par exemple dans le cas de l'ion K^+ , qui possède 8 électrons de valence (en $3s\ 3p$) et 10 électrons de cœur (sur les niveaux $1s, 2s, 2p$), l'énergie du nuage électronique de l'ion s'écrit :

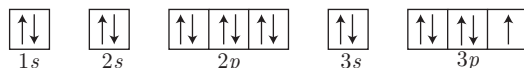
$$\begin{aligned} E(\text{K}^+) &= \mathcal{E}_0 + 8 \times \varepsilon_{3s3p} \\ &= \mathcal{E}_0 - 8 \times 13,6 \times \left(\frac{7,75}{3}\right)^3 \text{ car } n^* = 3 \text{ pour } n = 3 \end{aligned}$$



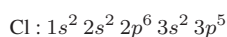
1. Donner la configuration électronique du chlore dans son état fondamental.
2. Déterminer l'énergie de ses électrons de valence.
3. Calculer l'énergie des électrons de valence de l'ion Cl^- puis comparer la stabilité du chlore et de l'ion chlorure.

RÉPONSE

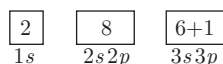
1. Les 17 électrons du chlore se répartissent sur les niveaux $1s, 2s, 2p, 3s$ et $3p$:



ce qui lui confère la configuration électronique suivante :



2. Les électrons de valence, situés sur les niveaux $3s$ et $3p$, possèdent chacun une énergie ε_{3p} accessible à partir de la configuration électronique :



d'où découle le facteur d'écran de la règle de Slater :

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\sigma_{1s/3s3p} + 8\sigma_{2s2p/3s3p} + 6\sigma_{3s3p/3s3p} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 0,85 + 6 \times 0,35 = 10,9 \\ \Rightarrow Z^* &= Z - \sigma = 17 - 10,9 = 6,1 \end{aligned}$$

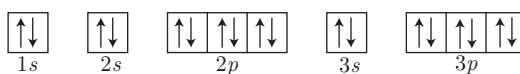
Ainsi :

$$\varepsilon_{3p} = -13,6 \times \left(\frac{Z^*}{n^*}\right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{6,1}{3}\right)^2 \Rightarrow \varepsilon_{3p} = -56,23 \text{ eV}$$

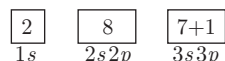
Ce faisant, en notant \mathcal{E}_0 l'énergie des électrons de cœur (sur les niveaux $1s, 2s$ et $2p$), l'énergie $E(\text{Cl})$ implique également celle de chacun des 7 électrons de valence :

$$E(\text{Cl}) = \mathcal{E}_0 + 7 \times \varepsilon_{3p} = \mathcal{E}_0 - 393,6 \text{ (eV)} \quad (2)$$

3. De même, la configuration électronique de l'ion Cl^- :



peut aussi se présenter sous la forme suivante :



qui fournit la valeur du facteur d'écran de chaque électron de valence :

$$\begin{aligned} \sigma' &= 2\sigma_{1s/3s3p} + 8\sigma_{2s2p/3s3p} + 7\sigma_{3s3p/3s3p} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 0,85 + 7 \times 0,35 = 11,25 \\ &\Rightarrow Z^* = Z - \sigma' = 17 - 11,25 = 5,75 \end{aligned}$$

Chacun des 8 électrons des niveaux 3s, 3p présentent donc une énergie :

$$\varepsilon'_{3p} = -13,6 \times \left(\frac{Z^*}{n^*}\right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{5,75}{3}\right)^2 = -49,96 \text{ eV}$$

C'est pourquoi l'énergie de l'ion Cl^- vaut :

$$E(\text{Cl}^-) = \mathcal{E}_0 + 8 \times \varepsilon'_{3p} = \mathcal{E}_0 - 399,7 \text{ (eV)} \quad (3)$$

Quant aux résultats (2) et (3), leur comparaison :

$$E(\text{Cl}) - E(\text{Cl}^-) = -393,6 + 399,7 = 6,1 \text{ eV} > 0 \Rightarrow E(\text{Cl}) > E(\text{Cl}^-)$$

montre que l'ion Cl^- est plus stable que l'atome Cl.

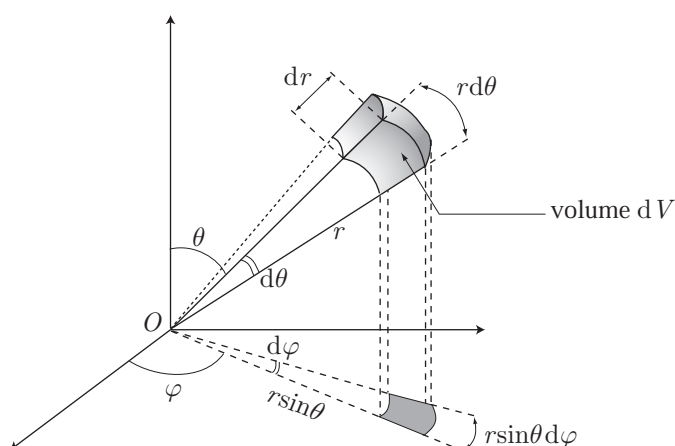
10.1.4 Probabilité de présence d'un électron

10.1.4.1 Densité de probabilité

Cette partie n'est exigible que des étudiants en PCSI ayant choisi l'option PC en deuxième période.

En coordonnées sphériques, un électron est repéré par le triplet $\{r, \theta, \varphi\}$, où r désigne sa distance au centre de l'atome. Un volume élémentaire dV , dans ce système de coordonnées, est donné par :

$$dV = r^2 dr \times \sin \theta d\theta \times d\varphi$$



Définition 8 Soit $\delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$ la probabilité de présence d'un électron dans un volume dV centré sur un point de coordonnées sphériques (r, θ, φ) . On appelle densité de probabilité $P(r, \theta, \varphi)$ le rapport :

$$P(r, \theta, \varphi) = \frac{\delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)}{dV} \Rightarrow \delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi) = P(r, \theta, \varphi) \times dV$$

La connaissance de la densité de probabilité $P(r, \theta, \varphi)$ entraîne celle de la densité $\delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$. La fonction $P(r, \theta, \varphi)$ présente une fonction radiale $R_{n, \ell}(r)$ (qui ne dépend que de r et des nombres quantiques n, ℓ) et une fonction angulaire $Y_{n, \ell, m_\ell}(\theta, \varphi)$ (qui dépend des coordonnées d'espace θ, φ et des nombres quantiques n, ℓ et m_ℓ). Le rayon de Bohr : $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m est impliqué dans l'expression de $R(r)$.

$$n = 1$$

n	ℓ	m_ℓ	orbitale	$R(r)$	$Y(\theta, \varphi)$
1	0	0	1s	$4a_0^{-3} e^{-2r/a_0}$	$\frac{1}{4\pi}$

$$n = 2$$

n	ℓ	m_ℓ	orbitale	$R(r)$	$Y(\theta, \varphi)$
2	0	0	$2s$	$\frac{1}{2a_0^3} e^{-r/a_0} \left(1 - \frac{r}{a_0}\right)^2$	$\frac{1}{4\pi}$
2	1	0	$2p_z$	$\frac{r^2}{24a_0^5} e^{-r/a_0}$	$\frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta$
2	1	1	$2p_x$	$\frac{r^2}{24a_0^5} e^{-r/a_0}$	$\frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$
2	1	-1	$2p_y$	$\frac{r^2}{24a_0^5} e^{-r/a_0}$	$\frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$

$$n = 3$$

n	ℓ	m_ℓ	orbitale	$R(r)$	$Y(\theta, \varphi)$
3	0	0	$3s$	$\frac{4}{243a_0^3} \left(3 - \frac{2r}{a_0} + \frac{2r^2}{9a_0^2}\right)^2 e^{-2r/3a_0}$	$\frac{1}{4\pi}$
3	1	0	$3p_z$	$\frac{8r^2}{2187a_0^5} \left(2 - \frac{r}{3a_0}\right)^2 e^{-2r/3a_0}$	$\frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta$
3	1	1	$3p_x$	$\frac{8r^2}{2187a_0^5} \left(2 - \frac{r}{3a_0}\right)^2 e^{-2r/3a_0}$	$\frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$
3	1	-1	$3p_y$	$\frac{8r^2}{2187a_0^5} \left(2 - \frac{r}{3a_0}\right)^2 e^{-2r/3a_0}$	$\frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$
3	2	0	$3d_{z^2}$	$\frac{8r^4}{98415a_0^7} e^{-2r/3a_0}$	$\frac{15}{16\pi} (3 \cos^2 \theta - 1)^2$
3	2	1	$3d_{xz}$	$\frac{8r^4}{98415a_0^7} e^{-2r/3a_0}$	$\frac{15}{16\pi} \sin^2(2\theta) \cos^2 \varphi$
3	2	-1	$3d_{yz}$	$\frac{8r^4}{98415a_0^7} e^{-2r/3a_0}$	$\frac{15}{16\pi} \sin^2(2\theta) \sin^2 \varphi$
3	2	2	$3d_{x^2-y^2}$	$\frac{8r^4}{98415a_0^7} e^{-2r/3a_0}$	$\frac{15}{16\pi} \sin^4 \theta \cos^2(2\varphi)$
3	2	-2	$3d_{xy}$	$\frac{8r^4}{98415a_0^7} e^{-2r/3a_0}$	$\frac{15}{16\pi} \sin^4 \theta \sin^2(2\varphi)$

10.1.4.2 Probabilité de présence de l'électron

La définition de la densité de probabilité $P(r, \theta, \varphi)$

$$\delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi) dV \text{ avec } \begin{cases} P(r, \theta, \varphi) = R(r) \times Y(\theta, \varphi) \\ dV = r^2 dr \times \sin \theta \times d\varphi \end{cases}$$

permet de retrouver la probabilité de présence $\delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$ au voisinage d'un point de coordonnées polaires (r, θ, φ) à dr , $d\theta$ et $d\varphi$ près :

$$\delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi) = r^2 R(r) dr \times Y(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (4)$$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi) = F(r) dr \times Y(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \quad (5)$$

où $F(r) = r^2 \times R(r)$ représente la *probabilité radiale* et $Y(\theta, \varphi)$ la *probabilité angulaire*. Par exemple, dans l'état 1s, ces probabilités valent :

$$F(r) = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \text{ et } Y(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}$$

Définition 9 La probabilité $\delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$ est normalisée, c'est-à-dire que la somme de toutes les probabilités, dans l'espace, vaut l'unité. Cette normalisation traduit la présence de l'électron dans l'espace et impose :

$$\int_{\text{espace}} \delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi) = 1 \Leftrightarrow \int_{r=0}^{\infty} F(r) dr \times \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} Y(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 1$$

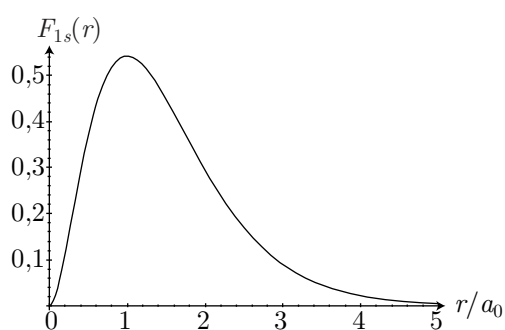
Étude de la probabilité radiale

La relation (5) montre que, dans une direction déterminée (θ et φ sont fixés), la probabilité de présence de l'électron à une distance r du noyau est d'autant plus importante que $F(r)$ est grand.

Les tableaux de la section précédente donne les expressions de $F(r)$ pour les niveaux 1s, 2s et 3s :

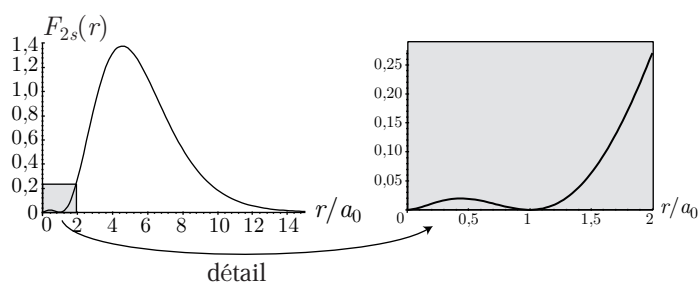
- **Orbitale 1s :**

$$F_{1s}(r) = \frac{4}{a_0^3} r^2 e^{-2r/a_0}$$



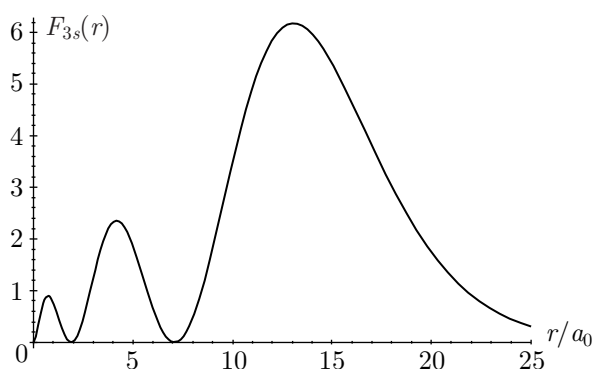
- **Orbitale 2s :**

$$F_{2s}(r) = \frac{1}{2a_0^3} \times r^2 \left(1 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0}$$



• **Orbitale 3s :**

$$F_{3s}(r) = \frac{4}{243 a_0^3} \left(3r - \frac{2r^2}{a_0} + \frac{2r^3}{9a_0^2} \right)^2 e^{-2r/3a_0}$$



Les représentations graphiques des probabilités radiales $P(r)$ permettent de localiser clairement les positions où l'électron ne peut se trouver ($P(r) = 0$) et les positions où sa présence est la plus probable ($P(r)$ est *maximum*).

Étude de la probabilité angulaire

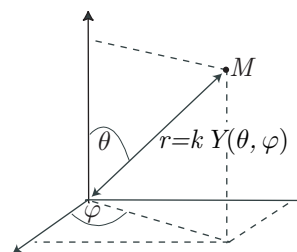
Les tableaux de la section précédente permettent le calcul des probabilités angulaires $Y(\theta, \varphi)$:

• **Orbitales 1s, 2s, 3s**

La probabilité angulaire vaut simplement :

$$Y(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}$$

La représentation polaire de $Y(\theta, \varphi)$ consiste à dessiner des surfaces sur lesquelles les points $M(\theta, \varphi)$ se trouvent à une distance r proportionnelle à $Y(\theta, \varphi)$ du centre de l'atome.

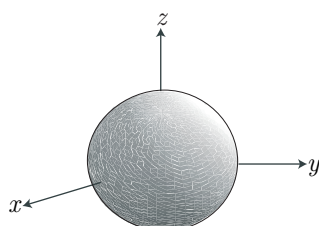


Plus cette distance est importante, plus $Y(\theta, \varphi)$ l'est aussi et par conséquent la probabilité de présence de l'électron, dans une direction repérée par θ et φ , est d'autant plus grande que r est grand ; cette représentation offre ainsi un moyen de

repérer les directions de l'espace où l'électron a la plus grande probabilité de se trouver. Par exemple, les orbitales ns , caractérisées par :

$$Y(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \Rightarrow r \propto Y(\theta, \varphi) = \text{cte}$$

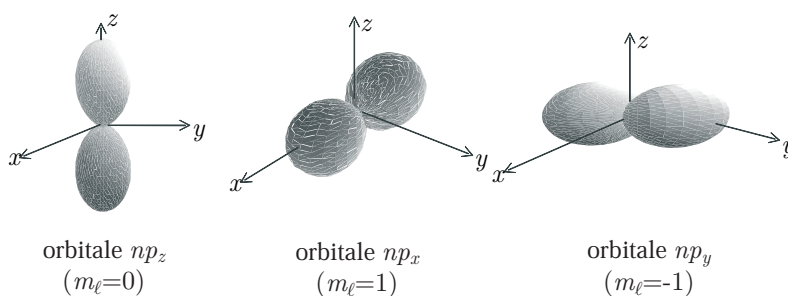
sont des sphères centrées sur le noyau :



- **Orbitales np**

La probabilité angulaire $Y_{nl}(\theta, \varphi)$ des orbitales $2p$ et $3p$ dépendent étroitement de la valeur du nombre quantique magnétique m_ℓ ; on les distingue ainsi en les nommant np_z ($m_\ell = 0$), np_x ($m_\ell = 1$) et np_y ($m_\ell = -1$) car leurs représentations graphiques ont pour axes de révolution respectifs (Oz), (Ox) et (Oy).

m_ℓ	Orbitale	Probabilité angulaire $Y_{nl}(\theta, \varphi)$
0	np_z	$\frac{3}{4\pi} \cos^2 \theta$
1	np_x	$\frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \varphi$
-1	np_y	$\frac{3}{4\pi} \sin^2 \theta \sin^2 \varphi$

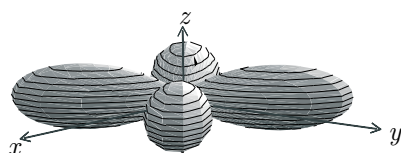


- **Orbitales $3d$**

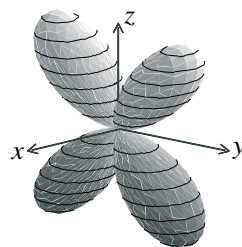
Dans ce cas également les valeurs de m_ℓ déterminent l'allure des orbitales :

m_ℓ	Orbitale	Probabilité angulaire $Y_{3d}(\theta, \varphi)$
-2	$3d_{xy}$	$\frac{15}{16\pi} \sin^4 \theta \sin^2(2\varphi)$
-1	$3d_{yz}$	$\frac{15}{16\pi} \sin^2(2\theta) \sin^2 \varphi$
0	$3d_{z^2}$	$\frac{15}{16\pi} (3 \cos^2 \theta - 1)^2$
+1	$3d_{xz}$	$\frac{15}{16\pi} \sin^2(2\theta) \cos^2 \varphi$
+2	$3d_{x^2-y^2}$	$\frac{15}{16\pi} \sin^4 \theta \cos^2(2\varphi)$

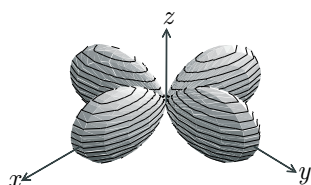
Ces orbitales ont pour représentations graphiques :



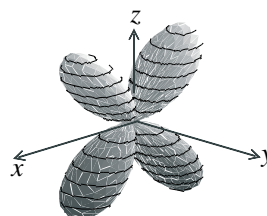
orbitale d_{xy}
($m_\ell = -2$)



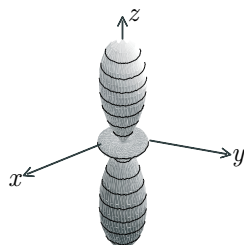
orbitale d_{yz}
($m_\ell = -1$)



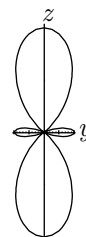
orbitale $d_{x^2-y^2}$
($m_\ell = 2$)



orbitale d_{xz}
($m_\ell = +1$)



orbitale d_{z^2}
($m_\ell = 0$)



10.2 La classification périodique des éléments

10.2.1 Familles chimiques

La classification périodique des éléments se présente sous la forme d'un tableau où les éléments sont rangés par ordre croissant de leur numéro atomique Z . On y distingue plusieurs familles regroupées en colonnes : les métaux alcalins (bien que l'hydrogène se trouve dans cette colonne, ce n'est pas un métal alcalin), les alcalino-terreux (ou terres alcalines), les métaux de transition, les halogènes et les gaz inertes (ou *nobles*, ou *rare*s).

																		numéro atomique																																					
																		H 1 1,008																				He 2 4,003																	
																		Li 3 6,941		Be 4 9,012																				B 5 10,81		C 6 12,01		N 7 14,01		O 8 16,00		F 9 19,00		Ne 10 20,18					
																		Na 11 23,00		Mg 12 24,30																				Al 13 26,98		Si 14 28,08		P 15 30,97		S 16 32,07		Cl 17 35,45		Ar 18 39,95					
																		K 19 39,10		Ca 20 40,08		Sc 21 44,95		Ti 22 47,87		V 23 50,94		Cr 24 52,00		Mn 25 54,94		Fe 26 55,85		Co 27 58,93		Ni 28 58,69		Cu 29 63,55		Zn 30 65,39		Ga 31 69,72		Ge 32 72,61		As 33 74,92		Se 34 78,96		Br 35 79,90		Kr 36 83,80			
																		Rb 37 85,47		Sr 38 87,62		Y 39 88,90		Zr 40 91,22		Nb 41 92,91		Mo 42 95,94		Tc 43 (98)		Ru 44 101,1		Rh 45 102,9		Pd 46 106,4		Ag 47 107,9		Cd 48 112,4		In 49 114,8		Sn 50 118,7		Sb 51 121,8		Te 52 127,6		I 53 126,9		Xe 54 131,3			
																		Cs 55 132,9		Ba 56 137,3		La 57 138,9		Hf 72 178,5		Ta 73 180,9		W 74 183,8		Re 75 186,2		Os 76 190,2		Ir 77 192,2		Pt 78 195,1		Au 79 197		Hg 80 200,6		Tl 81 204,4		Pb 82 207,2		Bi 83 209		Po 84 (209)		At 85 (210)		Rn 86 (222)			
																		Fr 87 (223)		Ra 88 (226)		Ac 89 (227)		Unq 104 (261)		Unp 105 (262)		Unh 106 (263)		Uns 107 (262)		Uno 108 (265)		Une 109 (266)		Uun 110 (269)																			

Lanthanides	Ce ⁵⁸ 140,1	Pr ⁵⁹ 140,9	Nd ⁶⁰ 144,2	Pm ⁶¹ (145)	Sm ⁶² 150,4	Eu ⁶³ 152	Gd ⁶⁴ 157,2	Tb ⁶⁵ 158,9	Dy ⁶⁶ 162,5	Ho ⁶⁷ 164,9	Er ⁶⁸ 167,3	Tm ⁶⁹ 168,9	Yb ⁷⁰ 173	Lu ⁷¹ 175
Actinides	Th ⁹⁰ 232	Pa ⁹¹ 231	U ⁹² 238	Np ⁹³ (237)	Pu ⁹⁴ (244)	Am ⁹⁵ (243)	Cm ⁹⁶ (247)	Bk ⁹⁷ (247)	Cf ⁹⁸ (251)	Es ⁹⁹ (252)	Fm ¹⁰⁰ (257)	Md ¹⁰¹ (258)	No ¹⁰² (259)	Lr ¹⁰³ (262)

Les éléments d'une même famille présentent des analogies chimiques.

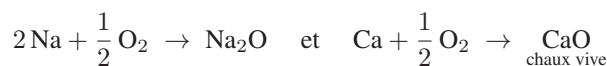
Les familles situées à gauche du tableau (métaux alcalins et alcalino-terreux) comportent des éléments réducteurs, comme :



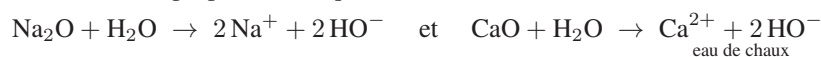
tandis que les familles situées à droite du tableau comportent des éléments oxydants (exceptés les gaz inertes) :



De même, les éléments des familles situées à gauche du tableau forment des oxydes (par réaction avec l'oxygène) :



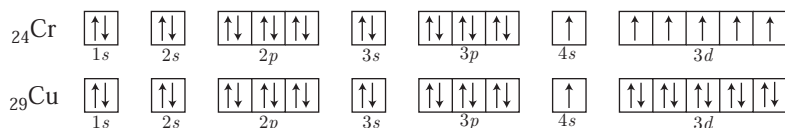
qui manifestent des propriétés basiques au contact de l'eau :



En revanche, les éléments des familles situées à droite de la classification périodique forment des oxydes (par combustion dans l'oxygène) :



On observe cependant une transition singulière d'un électron du niveau $4s$ vers un niveau $3d$ encore accessible :



Ce phénomène peut s'interpréter par un argument qui sera fréquemment évoqué pour justifier d'autres irrégularités : les orbitales saturées ou à moitié saturées sont plus stables que les autres (ce même argument est à l'origine de la grande inertie chimique des gaz inertes).



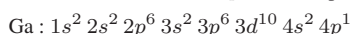
1. Le gallium (Ga) est un élément de numéro atomique $Z = 31$. Donner sa configuration électronique et en déduire sa position dans la classification périodique.
2. Quel est alors le numéro atomique de l'élément situé en dessous de Ga dans cette classification ?

RÉPONSE

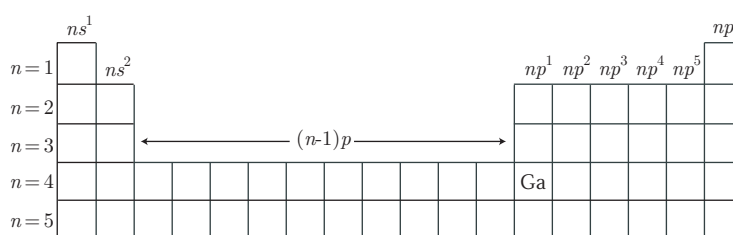
1. Pour trouver la configuration électronique d'un atome de numéro atomique Z supérieur à 20, il est recommandé de dresser un tableau dans lequel :
 - les orbitales sont rangées par ordre croissant d'énergie ;
 - une ligne présentant le nombre *maximum* n_{max} d'électrons pouvant occuper chaque orbitale ;
 - une dernière ligne montre le cumul des électrons, c'est-à-dire le nombre *maximum* d'électrons que peut posséder un élément jusqu'à saturer chacune de ses orbitales.

Orbitales	1s	2s	2p	3s	3p	4s	3d	4p	...
n_{max}	2	2	6	2	6	2	10	6	...
Cumul	2	4	10	12	18	20	30	36	...

Ce faisant, le gallium présente un électron sur le niveau $4p$ et a donc pour configuration électronique :



Cette configuration permet la localisation de Ga dans la classification périodique : il se trouve sur la 4^{ème} ligne (les niveaux de valence sont $4s$ et $4p$) et sur la 13^{ème} colonne (colonne correspondant à np^1) :



2. La configuration électronique de l'élément situé juste sous le gallium se termine par $5p^1$. Il suffit alors de poursuivre le tableau précédent pour obtenir le numéro atomique Z de cet élément :

Orbitales	1s	2s	2p	3s	3p	4s	3d	4p	5s	4d	5p	...
n_{max}	2	2	6	2	6	2	10	6	2	10	1	...
Cumul	2	4	10	12	18	20	30	36	38	48	49	...

On obtient ainsi immédiatement $Z = 49$, qui correspond à l'indium.

10.2.3 Évolution de quelques propriétés

10.2.3.1 Énergie d'ionisation

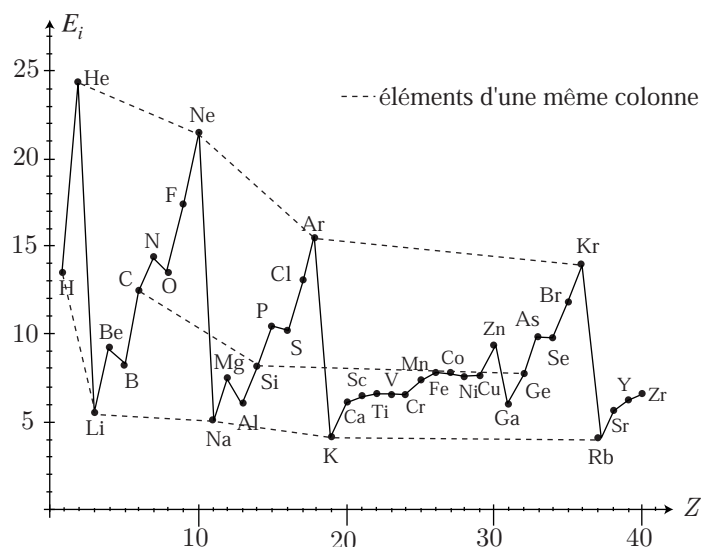
Définition 10 On appelle énergie de première ionisation E_i l'énergie nécessaire au départ d'un électron d'un atome X : $X_{(\text{gaz})} \xrightarrow{E_i} X_{(\text{gaz})}^+ + e^-$

Remarque – L'élément est pris sous sa forme atomique gazeuse afin de s'affranchir des éventuelles énergies de cohésion que cet élément pourrait présenter sous une forme moléculaire, liquide ou solide.

Pour les 39 premiers éléments de la classification périodique, l'énergie de première ionisation est donnée (en eV) dans le tableau suivant :

Z	élément	E_i	Z	élément	E_i	Z	élément	E_i
1	H	13,6	14	Si	8,1	27	Co	7,88
2	He	24,6	15	P	10,5	28	Ni	7,6
3	Li	5,4	16	S	10,4	29	Cu	7,7
4	Be	9,3	17	Cl	13,0	30	Zn	9,4
5	B	8,3	18	Ar	15,6	31	Ga	6,0
6	C	11,3	19	K	4,3	32	Ge	7,8
7	N	14,5	20	Ca	6,1	33	As	9,8
8	O	13,6	21	Sc	6,6	34	Se	9,7
9	F	17,4	22	Ti	6,8	35	Br	11,8
10	Ne	21,6	23	V	6,7	36	Kr	14,0
11	Na	5,1	24	Cr	6,8	37	Rb	4,2
12	Mg	7,6	25	Mn	7,4	38	Sr	5,7
13	Al	6,0	26	Fe	7,9	39	Y	6,2

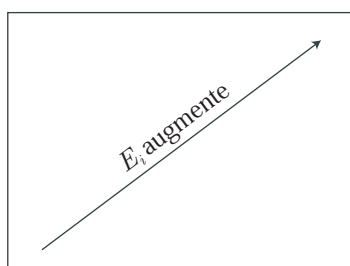
et son évolution est représentée graphiquement en fonction de Z sur la figure suivante :



Ce diagramme met en évidence une évolution régulière de E_i dans la classification périodique :

- dans une même famille (He, Ne, Ar, Kr – F, Cl, Br – N, P, As...), l'énergie d'ionisation décroît avec Z . Cette tendance peut s'interpréter en termes d'écran : plus les électrons sont nombreux, plus ils se repoussent ; les électrons les plus externes étant de moins en moins attirés par l'atome, leur extraction est plus aisée (E_i est plus faible) ;
- sur une même ligne, l'énergie d'ionisation croît globalement avec Z . Dans ce cas, l'augmentation du nombre de protons (Z) dans le noyau exerce une influence plus importante que la répulsion des électrons ; ce faisant, l'attraction électrique accroît la stabilité des électrons, de plus en plus difficiles à extraire de l'atome (E_i augmente).

En conclusion, l'évolution de l'énergie de première ionisation évolue de la manière suivante dans la classification périodique :



Cependant, certaines irrégularités sont observées dans cette évolution (Be, B, N, O, Mg, Al, P, S,...). Pour interpréter ce phénomène, on peut représenter les configurations électroniques des atomes X et des ions X^+ pour la ligne du lithium ($n = 2$) :

	1s	2s	2p		1s	2s	2p
${}^3\text{Li}$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow		Li^+	$\uparrow\downarrow$		
${}^4\text{Be}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$		Be^+	$\uparrow\downarrow$	\uparrow	
${}^5\text{B}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow	B^+	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	
${}^6\text{C}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow \uparrow	C^+	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow
${}^7\text{N}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow \uparrow \uparrow	N^+	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow \uparrow
${}^8\text{O}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$ \uparrow \uparrow	O^+	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow \uparrow \uparrow
${}^9\text{F}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ \uparrow	F^+	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$ \uparrow \uparrow
${}^{10}\text{Ne}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	Ne^+	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ \uparrow

Dans cette représentation, les orbitales saturées ou à moitié saturées de certains éléments sont grisées, figurant l'effet stabilisateur :

- de la saturation des orbitales de même énergie ;
- à moindre échelle, de la demi-saturation des orbitales de même énergie.

C'est pourquoi on observe que les transformations :



sont peu favorisées (les énergies d'ionisation correspondantes sont relativement importantes), tandis que les transformations :



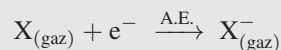
produisent des configurations plus stables ; E_i est relativement faible.

10.2.3.2 Affinité électronique

Définition 11 L'affinité électronique (A.E.) est l'énergie libérée par un atome, à l'état gazeux, suite à la capture d'un électron :



⚠ Cette convention n'est pas respectée par tous les auteurs (mais elle permet généralement d'obtenir l'affinité électronique positive). Certains la définissent comme l'énergie à fournir pour réaliser la capture d'un électron :



auquel cas les valeurs numériques de A.E. sont négatives, mais de même valeur absolue que celles définies par l'équation (6).

Certaines valeurs de A.E. sont connues :

H 0,75																	He PS				
Li 0,62	Be PS															B 0,28	C 1,26	N PS	O 1,46	F 3,40	Ne PS
Na 0,54	Mg PS															Al 0,44	Si 1,38	P 0,75	S 2,08	Cl 3,61	Ar PS
K 0,50	Ca 0,02	Sc 0,19	Ti 0,08	V 0,52	Cr 0,67	Mn PS	Fe 0,15	Co 0,66	Ni 1,16	Cu 1,23	Zn PS	Ga 0,30	Ge 1,23	As 0,81	Se 2,02	Br 3,36	Kr PS				
Rb 0,49	Sr 0,48	Y 0,31	Zr 0,43	Nb 0,89	Mo 0,75	Tc 0,55	Ru 1,05	Rh 1,14	Pd 0,56	Ag 1,30	Cd PS	In 0,03	Sn 1,11	Sb 1,05	Te 1,97	I 3,06	Xe PS				
Cs 0,47	Ba 0,15	La 0,50	Hf 0	Ta 0,32	W 0,81	Re 0,15	Os 1,10	Ir 1,56	Pt 2,13	Au 2,31	Hg PS	Tl 0,20	Pb 0,36	Bi 0,95	Po 1,90	At 2,80	Rn PS				

PS = pas stable

H
0,75

← Symbole

← Affinité électronique

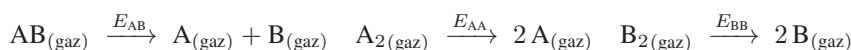
mais ce tableau montre que de nombreuses autres restent à ce jour indéterminées.

10.2.3.3 Électronégativité

Définition 12 Selon Pauling¹ la différence d'électronégativités $\chi_A - \chi_B$ de deux éléments A et B est définie à partir des énergies de liaison (nécessaires pour rompre les liaisons A - A, B - B et A - B) :

$$|\chi_A - \chi_B| = \sqrt{E_{AB} - \sqrt{E_{AA} \times E_{BB}}}$$

où E_{AB} , E_{AA} et E_{BB} sont exprimés en électron-volts :



Selon cette définition, les électronégativités des éléments sont représentées dans le tableau suivant :

H 2,20																	He ?				
Li 0,98	Be 1,57															B 2,04	C 2,55	N 3,04	O 3,44	F 3,98	Ne ?
Na 0,93	Mg 1,31															Al 1,61	Si 1,90	P 2,19	S 2,58	Cl 3,16	Ar ?
K 0,82	Ca 1,00	Sc 1,36	Ti 1,54	V 1,63	Cr 1,66	Mn 1,55	Fe 1,83	Co 1,88	Ni 1,91	Cu 1,90	Zn 1,65	Ga 1,81	Ge 2,01	As 2,18	Se 2,55	Br 2,96	Kr ?				
Rb 0,82	Sr 0,95	Y 1,22	Zr 1,33	Nb 1,6	Mo 2,16	Tc 2,10	Ru 2,2	Rh 2,28	Pd 2,20	Ag 1,93	Cd 1,69	In 1,78	Sn 1,96	Sb 2,05	Te 2,1	I 2,66	Xe 2,60				
Cs 0,79	Ba 0,89	La 1,10	Hf 1,3	Ta 1,5	W 1,7	Re 1,9	Os 2,2	Ir 2,2	Pt 2,2	Au 2,4	Hg 1,9	Tl 1,8	Pb 1,8	Bi 1,9	Po 2,0	At 2,2	Rn ?				
Fr 0,7	Ra 0,9																				

H
2,20

← Symbole

← Electronégativité

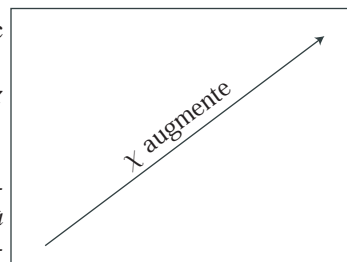
¹Cette définition n'est exigible que des étudiants de la filière PCSI.

qui montre que :

- généralement, χ augmente, sur une ligne, avec Z ;
- globalement, χ diminue, sur une colonne, avec Z

ce qui peut être résumé de la manière ci-contre.

Remarque – Certains auteurs fixent, arbitrairement, la valeur de l'électronégativité du fluor à $\chi_F = 4,00$ (c'est d'ailleurs la plus grande électronégativité).



Une autre échelle, celle de Mulliken, définit χ de manière plus intuitive :

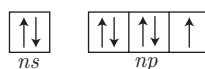
Définition 13 Selon Mulliken, l'électronégativité d'un élément s'exprime en fonction de son énergie de première ionisation E_i et de son affinité électronique (E.A.), exprimées en électron-volts :

$$\chi_{\text{Mulliken}} = \frac{E_i + \text{A.E.}}{2} \times \frac{1}{3,15} \text{ (en eV).}$$

De cette manière, l'électronégativité décrit la tendance qu'a un atome à attirer un électron (A.E.) et à le conserver (E_i). Cependant, cette échelle ne permet le calcul des électronégativités que des éléments dont E.A. est connu :

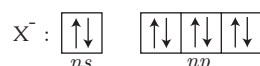
H	2,28	Si	1,50	Co	1,36
He	?	P	1,78	Ni	1,40
Li	0,96	S	1,98	Cu	1,42
Be	?	Cl	2,63	Zn	?
B	1,36	Ar	?	Ga	1,00
C	1,99	K	0,79	Ge	1,43
N	?	Ca	0,97	As	1,68
O	2,39	Sc	1,08	Se	1,87
F	3,30	Ti	1,09	Br	2,41
Ne	?	V	1,15	Kr	?
Na	0,89	Cr	1,18	Rb	0,74
Mg	?	Mn	?	Sr	0,98
Al	1,02	Fe	1,28	Y	1,03

Quelle que soit la définition de χ , son évolution dans la classification périodique reste la même.



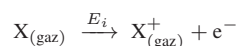
Chaque atome X possédant un tel électron, il peut l'engager avec un autre atome X pour former la liaison covalente X – X (mise en commun de deux électrons).

5. Dans la classification périodique, l'électronégativité augmente vers la droite. La place qu'occupent les halogènes les rend très électronégatifs (du reste, le fluor est le plus électronégatif des éléments). Par suite, les halogènes forment très facilement des ions X^- (F^- , Cl^- , Br^- , I^-), dont la structure de valence :



présente une grande stabilité (tous les niveaux sont saturés).

6. L'énergie d'ionisation d'un atome X est l'énergie E_i qu'il faut lui fournir, à l'état gazeux, pour lui arracher un électron :



Dans une même colonne, l'augmentation de Z s'accompagne d'une augmentation concomitante du nombre d'électrons de cœur, qui font écran entre le noyau (chargé positivement) et les électrons de valence. Ceux-ci étant moins fortement liés au noyau, leur départ en est d'autant plus aisé. C'est pourquoi E_i diminue du fluor à l'iode.

10.2.3.4 Rayons atomiques et rayons ioniques

Le rayon atomique (r) est une grandeur difficile à définir. Selon les auteurs, il peut s'agir :

- du **rayon covalent** dans une liaison covalente A – B, dont la distance d_{AB} est liée aux rayons r_A et r_B des atomes A et B :

$$d_{AB} = r_A + r_B \text{ (rayons covalents).}$$

Cette définition ne donne cependant que des résultats approximatifs puisque, pour un même atome A, la distance d_{AB} dépend de la nature de B.

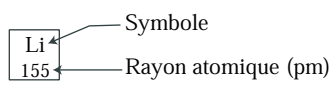
- du **rayon métallique** (étudié avec les cristaux), déterminé par la distance interatomique dans les cristaux ;
- de la valeur r_{\max} de r qui rend *maximum* la probabilité radiale $F(r)$ (présentée à la page 1177) de présence des électrons de valence ;
- de l'expression issue du modèle de Bohr appliqué aux atomes polyélectroniques :

$$r = (n^*)^2 \frac{a_0}{Z^*} \text{ avec } a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

où n^* désigne le nombre quantique principal effectif des électrons de valence, $Z^* = Z - \sigma$ la charge effective du noyau, perçue par les électrons de valence.

Cette dernière définition permet l'interprétation de l'évolution de r dans la classification périodique :

H																	He
Li 155	Be 112											B 98	C 91	N 92	O	F	Ne
Na 190	Mg 160											Al 143	Si 132	P 128	S 127	Cl	Ar
K 235	Ca 197	Sc 162	Ti 147	V 134	Cr 130	Mn 135	Fe 126	Co 125	Ni 124	Cu 128	Zn 138	Ga 141	Ge 137	As 139	Se 140	Br	Kr
Rb 248	Sr 215	Y 178	Zr 160	Nb 146	Mo 139	Tc 136	Ru 134	Rh 134	Pd 137	Ag 144	Cd 154	In 166	Sn 162	Sb 159	Te 160	I	Xe
Cs 267	Ba 222	La 187	Hf 167	Ta 149	W 141	Re 137	Os 135	Ir 136	Pt 139	Au 146	Hg 157	Tl 171	Pb 175	Bi 170	Po 176	At	Rn
Fr	Ra	Ac 188															



Lanthanides	Ce 182	Pr 182	Nd 182	Pm	Sm 181	Eu 199	Gd 179	Tb 180	Dy 180	Ho 179	Er 178	Tm 177	Yb 194	Lu 175
-------------	-----------	-----------	-----------	----	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

Actinides	Th 180	Pa 161	U 138	Np 130	Pu 151	Am 173	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lw
-----------	-----------	-----------	----------	-----------	-----------	-----------	----	----	----	----	----	----	----	----

- Sur une même ligne, r diminue globalement avec Z : le nombre n^* ne varie pas, tandis que le facteur d'écran σ augmente moins vite que Z ; $r = \frac{(n^*)^2 \times a_0}{Z - \sigma}$ est une fonction décroissante de Z .
- Sur une même colonne, r augmente avec Z . En effet, n^* est une fonction croissante de Z , de même que σ ; la fonction $r = \frac{(n^*)^2 \times a_0}{Z - \sigma}$ est croissante avec Z .

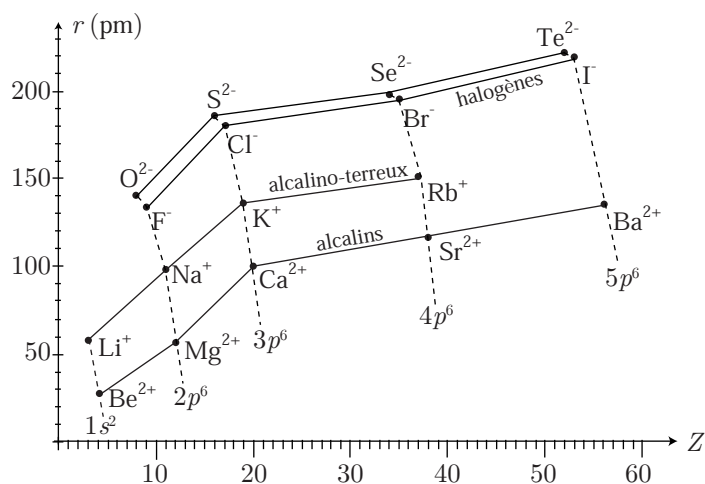
Définition 14 Soient A^- et B^+ deux ions, impliqués dans un cristal ionique, distants de d_{AB} . Les rayons ioniques $r_{ion}(A^-)$ et $r_{ion}(B^+)$ vérifient, par convention :

$$d_{AB} = r_{ion}(A^-) + r_{ion}(B^+)$$

Quelques valeurs de ces rayons ioniques sont fournies dans le tableau suivant :

Z	anions	rayons (pm)	Z	cations	rayons (pm)
9	F^-	133	3	Li^+	59
17	Cl^-	181	11	Na^+	99
35	Br^-	196	19	K^+	137
53	I^-	220	37	Rb^+	152
8	O^{2-}	140	4	Be^{2+}	27
16	S^{2-}	184	12	Mg^{2+}	57
34	Se^{2-}	198	20	Ca^{2+}	100
52	Te^{2-}	221	38	Sr^{2+}	118
			58	Ba^{2+}	135

dont la représentation graphique :



suggère les commentaires suivants :

- Dans une même famille (même colonne), le rayon ionique des ions de même charge croît avec Z ; l'interprétation reste la même que celle de l'évolution des rayons atomiques.
- Sur une même ligne (O^{2-} , F^- , Na^+ , Mg^{2+}), le rayon des ions isoélectroniques (c'est-à-dire de même configuration électronique) diminue avec Z ; le nombre Z de protons augmente, alors que σ et n^* demeurent constants, ce qui justifie la décroissance de $r = \frac{(n^*)^2 a_0}{Z - \sigma}$ avec Z .

Remarque – D'une manière générale le rayon d'un ion est d'autant plus petit que cet ion présente une forte charge positive.

De la loi : $r = \frac{(n^*)^2}{Z - \sigma} a_0$ découle la règle de Pauli :

Les rayons ioniques des deux ions isoélectroniques (ayant par conséquent n^* et σ en commun) sont inversement proportionnels à Z^* :

$$\frac{r_{\text{ion}}(B^+)}{r_{\text{ion}}(A^-)} = \frac{Z^*(A^-)}{Z^*(B^+)}$$



Le sodium et le fluor ont pour numéros atomiques respectifs $Z(\text{Na}) = 11$ et $Z(\text{F}) = 9$.

- Donner les configurations électroniques des ions Na^+ et F^- ; peut-on affirmer que ces ions sont isoélectroniques ?
- Calculer les numéros atomiques effectifs $Z^*(\text{Na}^+)$ et $Z^*(\text{F}^-)$ de ces ions, pour leurs électrons de valence.
- Comparer le rapport $\frac{Z^*(\text{Na}^+)}{Z^*(\text{F}^-)}$ à celui des rayons ioniques : $\frac{r_{\text{ion}}(\text{F}^-)}{r_{\text{ion}}(\text{Na}^+)}$.

Données :

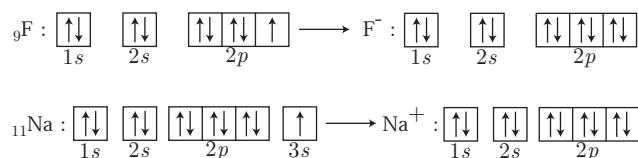
- facteur d'écran :

	1s	2s 2p
1s	0,30	
2s 2p	0,85	0,35

- rayons ioniques : $r_{\text{ion}}(\text{F}^-) = 133 \text{ pm}$ et $r_{\text{ion}}(\text{Na}^+) = 99 \text{ pm}$.

RÉPONSE

- Les électrons de ${}^9\text{F}$ et de ${}^{11}\text{Na}$ se répartissent sur les niveaux 1s, 2s, 2p et 3s :



Ces ions présentent donc la même configuration électronique : $1s^2 2s^2 2p^6$.

- Ces deux configurations présentent 8 électrons de valence (2s 2p) :

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 1s \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline 7+1 \\ \hline 2s2p \\ \hline \end{array}$$

Chacun d'eux subit alors l'écran :

$$\sigma = 2\sigma_{1s/2s2p} + 7\sigma_{2s2p/2s2p} = 2 \times 0,85 + 7 \times 0,35 = 4,15$$

d'où se déduisent les numéros atomiques effectifs :

$$Z^*(\text{F}^-) = Z(\text{F}^-) - \sigma = 9 - 4,15 = 4,85 \text{ et } Z^*(\text{Na}^+) = Z(\text{Na}^+) - \sigma = 11 - 4,15 = 6,85$$

- Ces valeurs fournissent le rapport :

$$\frac{Z^*(\text{Na}^+)}{Z^*(\text{F}^-)} = \frac{6,85}{4,85} = 1,41$$

tandis que :

$$\frac{r_{\text{ion}}(\text{F}^-)}{r_{\text{ion}}(\text{Na}^+)} = \frac{133}{99} = 1,34$$

confirme approximativement la règle de Pauling.

10.3 Structure des molécules


10.3.1 Formule de Lewis

10.3.1.1 Liaisons covalentes localisées

Définition 15 Une liaison covalente consiste en une mise en commun de deux électrons de valence, non appariés, entre deux atomes.

Définition 16 On appelle énergie de liaison l'énergie E_{AB} nécessaire pour rompre une liaison covalente A – B dans une molécule :



 L'énergie de liaison d'une liaison double A = B ne s'identifie pas au double de l'énergie de liaison simple A – B :

$$E_{A=B} \neq 2 \times E_{A-B}$$

La *formule de Lewis* d'une molécule fait apparaître, pour chaque atome, des informations concernant les électrons de valence :

- les électrons non appariés et n'intervenant pas dans des liaisons covalentes, par des points ;
- des doublets électroniques, par des traits autour de l'atome ;
- les liaisons covalentes par des traits liant deux atomes (une liaison covalente ne peut s'établir entre deux atomes que si chacun de ces atomes dispose d'au moins un électron non apparié) ;
- accessoirement les orbitales de valence vacantes, par des cases.



Pour décrire la formule de Lewis d'une molécule, il est nécessaire de connaître la configuration électronique de valence de chaque atome ou ion de la molécule.

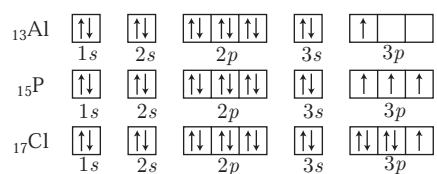


Les numéros atomiques de l'aluminium, du phosphore et du chlore valent respectivement $Z_{Al} = 13$, $Z_P = 15$ et $Z_{Cl} = 17$.

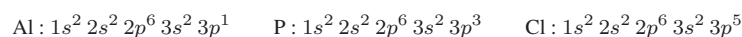
1. Donner les configurations électroniques de ces atomes, dans leur état fondamental.
2. En déduire les formules de Lewis des molécules PCl_3 et $AlCl_3$.
3. Décrire la structure des niveaux de valence de l'ion Al^- et en déduire la formule de Lewis de l'ion $AlCl_4^-$.

RÉPONSE

1. Les électrons de l'aluminium, du phosphore et du chlore se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$ et $3p$:

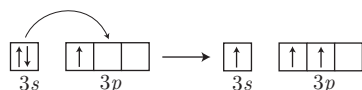


auquel cas leurs configurations électroniques sont :



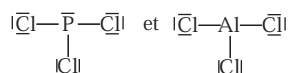
2. Les structures des niveaux de valence montrent que :

- le chlore peut former une liaison covalente à l'aide de son électron « célibataire », en conservant trois doublets électroniques ;
- le phosphore peut engager trois électrons dans autant de liaisons covalentes, et conserver un doublet électronique ;
- l'aluminium, dans son état fondamental, ne peut former qu'une seule liaison covalente, ce qui ne permettrait pas d'envisager l'existence de la molécule AlCl_3 . Pour y parvenir, l'aluminium doit réaliser une extension de sa valence, par transfert d'un électron du niveau $3s$ vers une orbitale vacante $3p$:

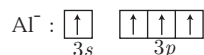


Ce faisant, l'aluminium peut engager ses trois électrons de valence dans des liaisons covalentes ; aucun doublet électronique ne reste autour de Al.

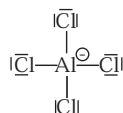
Ainsi, les formules de Lewis de PCl_3 et de AlCl_3 sont :



3. À l'issue de son extension de valence, l'atome d'aluminium présente trois électrons non appariés sur les niveaux $3s$ et $3p$. Par conséquent, une dernière orbitale $3p$ reste vacante et peut alors héberger l'électron supplémentaire de l'ion Al^- :



Ainsi peut-on justifier l'existence de l'ion AlCl_4^- :



Règle de l'octet

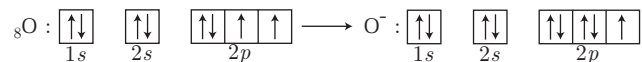
Lorsque la possibilité lui est donnée, l'atome engagé dans une molécule s'entoure de huit électrons (sous forme de doublets ou de liaisons covalentes, lesquelles sont équivalentes à des paires d'électrons).



1. Donner les configurations électroniques de ${}_{16}\text{S}$, ${}_8\text{O}$ et ${}_8\text{O}^-$.
2. En déduire la formule de Lewis de l'ion SO_3^{2-} , dans laquelle toutes les espèces respectent la règle de l'octet.

RÉPONSE

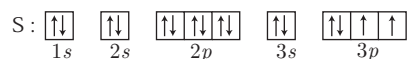
1. Les électrons de l'oxygène se répartissent sur les niveaux 1s, 2s et 2p :



d'où se déduisent les configurations électroniques :

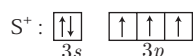


De même les 16 électrons du soufre se répartissent sur les niveaux 1s, 2s, 2p, 3s et 3p, dans son niveau fondamental :

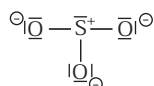


La configuration électronique correspondante est : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^4$.

En outre, cette représentation conduit à la configuration électronique de valence de l'ion S^+ :



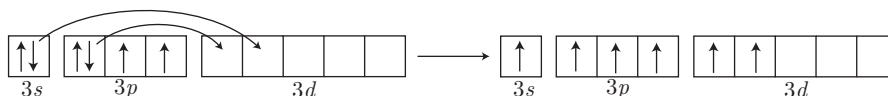
2. Dans l'ion SO_3^{2-} , il faut envisager la présence de l'ion S^+ , seul susceptible de former trois liaisons covalentes avec l'oxygène. Ce faisant un ion O^- est créé par récupération de l'électron perdu par le soufre, tandis que deux autres ions O^- sont issus des deux électrons responsables de la charge de SO_3^{2-} . Par conséquent, trois ions O^- sont liés à S^+ :



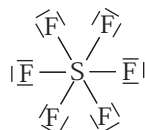
On s'assurera que, dans cette formule, tous les atomes vérifient la règle de l'octet.

Des transgressions à la règle de l'octet sont parfois inévitables ; par exemple :

- dans la molécule SF_6 , l'atome de soufre doit établir 6 liaisons covalentes, ce qui est rendu possible par l'extension de sa couche de valence ($3s^2 3p^4$) vers les niveaux 3d :

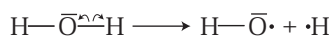


Ce faisant, le soufre s'entoure de 12 électrons (6 liaisons covalentes), ce qui est incompatible avec la règle de l'octet :



- dans les molécules contenant un nombre impair d'électrons ; la molécule NO relie ${}_7\text{N}$ à ${}_8\text{O}$, auquel cas il ne sera jamais possible d'apparier tous les électrons (un des deux atomes ne pourra pas être entouré de 8 électrons).

Remarque – *Le schéma de Lewis est à l'origine de la représentation des radicaux avec un point. Par exemple, la réaction : $\text{H}_2\text{O} \rightarrow \text{H}^\bullet + \text{HO}^\bullet$ peut être comprise comme une rupture de la liaison H – O :*



10.3.1.2 Calcul d'un degré d'oxydation

Pour calculer le degré d'oxydation d'un élément X, dans une molécule, il convient d'appliquer l'algorithme suivant :

- représenter la structure électronique de valence de l'élément X impliqué dans la molécule (parfois X est ionisé) ;
- construire la formule de Lewis de la molécule ;
- faire basculer tous les électrons des liaisons covalentes de X vers les éléments les plus électronégatifs (pour les liaisons X – X, aucun basculement n'est possible – une simple rupture de liaison laisse un électron sur chaque atome X) ;
- compter le nombre n_{app} d'électrons qui demeurent autour de X ;
- si n_0 désigne le nombre d'électrons de valence de X, son degré d'oxydation (d^0) est donné par la formule :

$$d^0 = n_0 - n_{app}$$

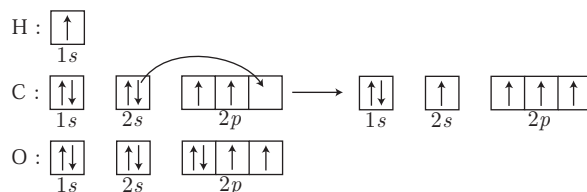


Les numéros atomiques de l'hydrogène, du carbone et de l'oxygène sont respectivement $Z_H = 1$, $Z_C = 6$ et $Z_O = 8$.

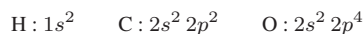
1. Donner les structures de valence de ces trois éléments, dans leur état fondamental.
2. Représenter la formule de Lewis de l'acide éthanoïque CH_3COOH et de l'éthanal CH_3CHO .
3. Comparer les électronégativités χ_H et χ_O de H et O à celle, χ_C , du carbone.
4. En déduire les degrés d'oxydation du carbone dans CH_3COOH et dans CH_3CHO .
5. En écrivant la demi-équation associée au couple $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{CHO}$, montrer que la variation du degré d'oxydation est confirmée par le nombre d'électrons mis en jeu.

RÉPONSE

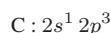
1. Les électrons de l'hydrogène, du carbone et de l'oxygène remplissent les niveaux $1s$, $2s$ et $2p$:



Aussi, dans leur état fondamental, les structures de valence de ces trois éléments sont :



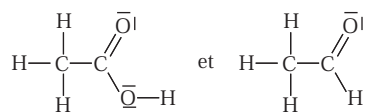
2. Cependant, la valence du carbone peut être étendue par transfert d'un électron apparié du niveau $2s$ vers le niveau $2p$ vacant, auquel cas la structure de valence du carbone devient :



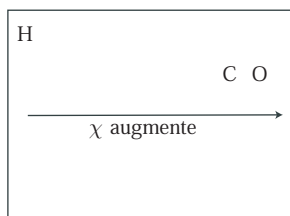
Compte tenu de ces structures de valence, les représentations de Lewis de ces éléments sont :



ce qui conduit aux formules de Lewis respectives de CH_3COOH et de CH_3CHO :

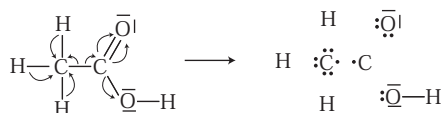


3. Compte tenu des positions respectives de H, C et O dans la classification périodique :



on peut prédire que $\chi_{\text{H}} < \chi_{\text{C}}$ et $\chi_{\text{O}} > \chi_{\text{C}}$.

4. Étant donné ce classement, il est possible de faire basculer les électrons des liaisons covalentes du carbone, dans CH_3COOH , vers l'élément le plus électro-négatif de chaque liaison (dans la liaison C – C, il y a alors simple rupture, chaque atome de carbone récupérant son électron) :



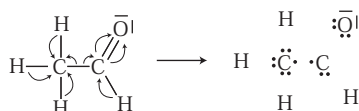
L'atome de carbone du groupe méthyle ($-\text{CH}_3$), possède ainsi $n_{1 \text{ app}} = 7$ électrons, alors que sa structure de valence en contient $n_0 = 4$; son degré d'oxydation vaut :

$$d_1^0 = n_0 - n_{1 \text{ app}} = 4 - 7 = -3$$

tandis que l'atome de carbone du groupe $-\text{COOH}$ possède, après transfert, $n_{2 \text{ app}} = 1$ électron, en conséquence de quoi son degré d'oxydation vaut :

$$d_2^0 = n_0 - n_{2 \text{ app}} = 4 - 1 = 3$$

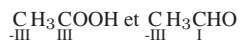
De la même manière, on réalise le basculement des électrons des liaisons C – O et C – H vers l'élément le plus électro-négatif, dans CH_3CHO :



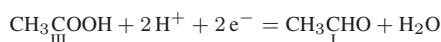
L'atome de carbone du groupe $-\text{CH}_3$ possède à nouveau le degré d'oxydation $d_1^0 = -3$ alors que celui du groupe $-\text{CHO}$ présente $n_{3 \text{ app}} = 3$ électrons ; son degré d'oxydation vaut ainsi :

$$d_3^0 = n_0 - n_{3 \text{ app}} = 4 - 3 = 1$$

Dans les molécules étudiées, les atomes de carbone ont donc pour degrés d'oxydation :



5. La demi-équation associée au couple $\text{CH}_3\text{COOH}/\text{CH}_3\text{CHO}$:



montre que la diminution du degré d'oxydation du carbone ($3 - 1 = 2$) correspond au nombre d'électrons engagés dans la réduction de CH_3COOH .

10.3.2 Géométrie des molécules

10.3.2.1 Règles de Gillespie

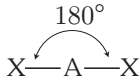
La géométrie des molécules suit des lois énoncées par la théorie V.S.E.P.R. (*Valence Shell Electronic Pair Repulsion*, ou : théorie de la répulsion des paires électroniques de la couche de valence), qui repose sur la représentation de Lewis des molécules :

- une liaison simple exerce, sur son environnement, le même effet qu'une liaison double ou triple ; on note n le nombre de liaisons (simples, doubles ou triples, indistinctement) autour d'un élément A.
- un doublet électronique est plus répulsif qu'une liaison (simple, double ou triple) ; on note p le nombre de doublets autour de A.
- les liaisons et doublets occupent, dans l'espace, une position qui leur assure l'éloignement *maximum* (lié à l'effet répulsif des électrons les uns sur les autres).

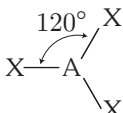
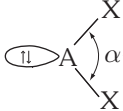
La notation AX_nE_p signifie qu'un atome A est entouré de n liaisons (simples, doubles ou triples) et de p doublets représentés, ci-dessous, par : $\textcircled{\text{||}}$.

La somme $n + p$ détermine la géométrie de la molécule :

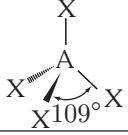
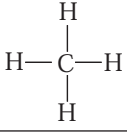
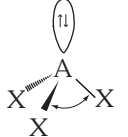
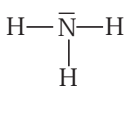
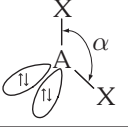
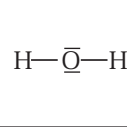
- $n + p = 2$

Structure	Géométrie	Exemple
AX_2	 Molécule linéaire	CO_2 $\langle O=C=O \rangle$

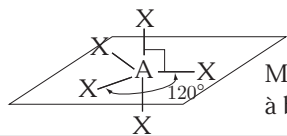
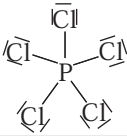
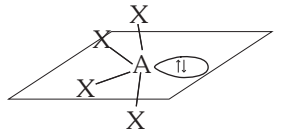

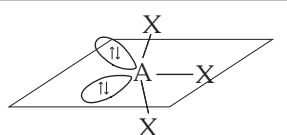
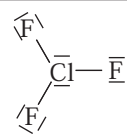
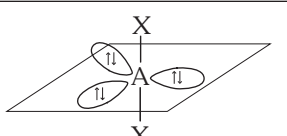
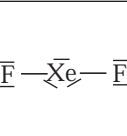
- $n + p = 3$

Structure	Géométrie	Exemples
AX_3	 Molécule triangulaire plane	BF_3 $\text{ }\bar{\text{F}}-\text{B}-\text{F}$
AX_2E_1	 Molécule plane coudée	SO_2 $\text{ }O=\bar{S}^+-\bar{O}^\ominus$

- $n + p = 4$

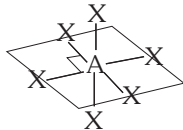
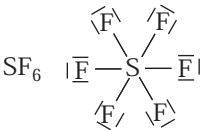
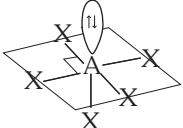
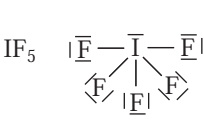
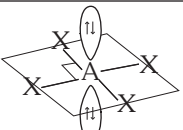
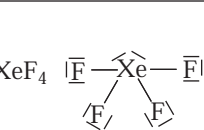
Structure	Géométrie	Exemples
AX_4	 Molécule tétraédrique	CH_4 
AX_3E_1	 Molécule pyramidale à base triangulaire ($\alpha < 109^\circ$)	NH_3 
AX_2E_2	 Molécule plane coudée	H_2O 

- $n + p = 5$ (seule la structure AX_5 est au programme des étudiants de MPSI et de PCSI).

Structure	Géométrie	Exemples
AX_5	 Molécule bipyramidale à base triangulaire	PCl_5 
AX_4E_1		SF_4 
AX_3E_2	 Molécule plane en T déformé	ClF_3 
AX_2E_3	 Molécule linéaire	XeF_2 

Δ Dans les composés de types AX_4E_1 , AX_3E_2 et AX_2E_3 , les doublets électroniques se placent dans le plan de la bipyramide afin de disposer d'un *maximum* d'éloignement des autres paires d'électrons ; l'angle entre le doublet et une liaison $A - X$ vaut 120° dans ce plan, tandis qu'il prend la valeur 90° si la liaison est perpendiculaire à ce plan.

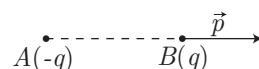
- $n + p = 6$ (seule la structure AX_6 est au programme des étudiants de MPSI et de PCSI).

Structure	Géométrie	Exemples
AX_6	 Octaèdre régulier	SF_6 
AX_5E_1	 Pyramide à base carrée	IF_5 
AX_4E_2	 Molécule carrée plane	XeF_4 

10.3.2.2 Moment dipolaire

Définition 17 Soient deux charges $-q < 0$ et $+q > 0$, situées aux points respectifs A et B . On appelle *moment dipolaire* la grandeur vectorielle :

$$\vec{p} = q \times \overrightarrow{AB}$$



Remarque – L'unité naturelle du moment dipolaire est le coulomb-mètre ($C \cdot m$) mais on lui préfère une unité mieux adaptée, le Debye (D) :

$$1 D = 3,33 \cdot 10^{-30} C \cdot m$$

S'il est possible de définir, dans une structure chimique, plusieurs moments dipolaires \vec{p}_i autour d'un atome, le moment dipolaire résultant est la somme vectorielle des \vec{p}_i :

$$\vec{p}_{\text{résultant}} = \sum_i \vec{p}_i$$

Définition 18 La différence d'électronégativité entre deux atomes A et B d'une liaison covalente fait apparaître des charges partielles ($\pm q = \pm \delta e$ où $\delta < 1$ et e désigne la charge élémentaire) en A et B ; un moment dipolaire \vec{p}_{exp} apparaît :

$$\vec{p}_{exp} = \delta e \times \vec{p}$$

La grandeur δ est appelée pourcentage ionique (ou ionicité) de la liaison.



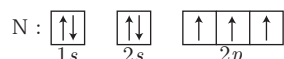
La molécule d'ammoniac NH_3 présente un moment dipolaire \vec{p} . On donne :

- la norme $\|\vec{p}\| = p = 1,47 \text{ D}$;
- la taille des liaisons N – H : $d = 102 \text{ pm}$;
- l'angle des liaisons H – N – H : $\alpha = 107^\circ$;
- la charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- les numéros atomiques : $Z(\text{H}) = 1$ et $Z(\text{N}) = 7$.

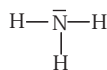
1. Quelle est la formule de Lewis de la molécule NH_3 . En déduire sa géométrie.
2. Exprimer p en fonction de α et du moment dipolaire p_0 de chaque liaison N – H.
3. Calculer le pourcentage ionique des liaisons N – H.
4. Expliquer comment l'existence d'un moment dipolaire non nul, dans NH_3 , confirme la présence d'un doublet électronique de valence sur l'atome d'azote.

RÉPONSE

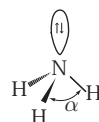
1. Les 7 électrons de l'azote se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$:



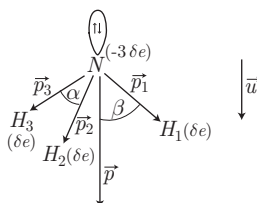
ce qui montre que la structure de valence de l'azote est composée d'un doublet électronique et de trois électrons non appariés. C'est pourquoi la formule de Lewis de NH_3 est :



Ce faisant, la molécule présente une géométrie de type AX_3E_1 ; l'azote est au sommet d'une pyramide à base triangulaire :



2. Soient N , H_1 , H_2 , H_3 les points coïncidant avec les centres des atomes d'azote et d'hydrogène. L'électronégativité de l'azote étant supérieure à celle de l'hydrogène (à cause de leurs positions relatives dans la classification périodique), des moments dipolaires apparaissent sur les liaisons N – H :



Compte tenu de la symétrie de la molécule, le moment dipolaire résultant \vec{p} est colinéaire au vecteur unitaire \vec{u} , de même direction que celle de l'orbitale qui contient le doublet électronique :

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = p \vec{u} \quad (7)$$

Le produit scalaire de cette équation par \vec{p}_1 fournit :

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_1 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 + \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = p \times \vec{p}_1 \cdot \vec{u}$$

avec $\|\vec{p}_i\| = p_0$. En remarquant que $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 = p_0^2 \cos \alpha$ et $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = p_0^2 \cos \alpha$ et en notant β l'angle (\vec{p}_1, \vec{u}) , cette relation devient :

$$p_0^2 + 2p_0^2 \cos \alpha = p \times p_0 \cos \beta \Rightarrow p_0 (1 + 2 \cos \alpha) = p \cos \beta \quad (8)$$

En outre le produit scalaire de l'équation (7) par \vec{u} conduit à :

$$\vec{p}_1 \cdot \vec{u} + \vec{p}_2 \cdot \vec{u} + \vec{p}_3 \cdot \vec{u} = p \vec{u} \cdot \vec{u} \Rightarrow 3 p_0 \cos \beta = p \Rightarrow \cos \beta = \frac{p}{3 p_0}$$

Aussi, l'identité (8) devient :

$$p_0 (1 + 2 \cos \alpha) = \frac{p^2}{3 p_0} \Rightarrow p = p_0 \sqrt{3 \times (1 + 2 \cos \alpha)}$$

3. La différence d'électronégativité entre l'azote et l'hydrogène fait apparaître des charges partielles $\pm \delta e$ sur N et H, à l'origine des moments dipolaires \vec{p}_i :

$$\vec{p}_i = \delta e \times \overrightarrow{NH}_i \Rightarrow \|\vec{p}_i\| = \delta e \times \|\overrightarrow{NH}_i\| \Rightarrow p_0 = \delta e \times d$$

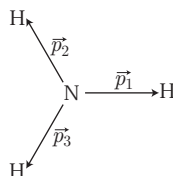
Par conséquent, l'identité de la question précédente s'écrit aussi :

$$p = \delta e d \sqrt{3 \times (1 + 2 \cos \alpha)} \Rightarrow \delta = \frac{p}{e d \sqrt{3 \times (1 + 2 \cos \alpha)}}$$

Application numérique :

$$\delta = \frac{1,47 \times 3,33 \cdot 10^{-30}}{1,6 \cdot 10^{-19} \times 102 \cdot 10^{-12} \times \sqrt{3 \times [1 + 2 \cos (107^\circ)]}} \Rightarrow \delta = 26,8\%$$

4. En l'absence de doublet électronique, la molécule NH_3 présenterait une géométrie de type AX_3 :



L'atome d'azote occupant le centre d'un triangle équilatéral, la somme $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3$ serait alors nulle ; l'existence d'un moment dipolaire non nul rejette une telle configuration et justifie *de facto* la géométrie tridimensionnelle de la molécule d'ammoniac.

10.4 Configuration électronique de la molécule

Cette section ne s'adresse qu'aux étudiants de PCSI ayant choisi l'option PC.

10.4.1 Orbitales moléculaires

Soient deux atomes A et B présentant des orbitales atomiques de géométrie similaire et d'énergie voisine, décrites par des densités de probabilité de présence électronique : $P_A = |\phi_A|^2$ et $P_B = |\phi_B|^2$ (les fonctions complexes ϕ_A et ϕ_B sont appelées *fonctions d'onde*). Lorsque ces deux atomes se rapprochent, ces densités de probabilité fusionnent, soit de manière constructive :

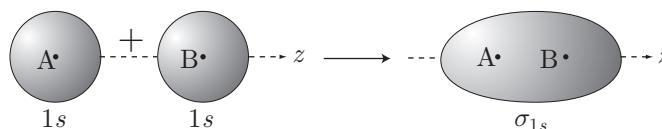
$$P_{AB}^+ = \frac{1}{2} |\phi_A + \phi_B|^2$$

soit de manière destructive :

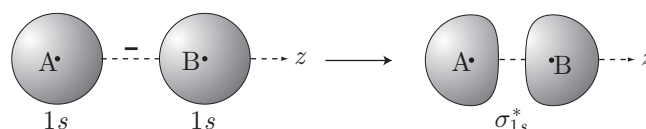
$$P_{AB}^- = \frac{1}{2} |\phi_A - \phi_B|^2$$

Ainsi, deux orbitales atomiques peuvent générer deux orbitales moléculaires, décrites par les densités de probabilité P_{AB}^+ et P_{AB}^- d'énergies respectives E_{AB}^+ et $E_{AB}^- > E_{AB}^+$.

- L'association de deux orbitales $1s$ permet la formation :
 - d'une orbitale σ_{1s} , stable, par fusion constructive :



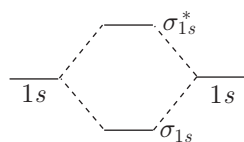
- d'une orbitale σ_{1s}^* , déstabilisée, par combinaison destructive :



Les orbitales moléculaires ainsi obtenues présentent une géométrie de révolution autour de l'axe interatomique Oz . C'est pourquoi elles sont désignées par la lettre σ .

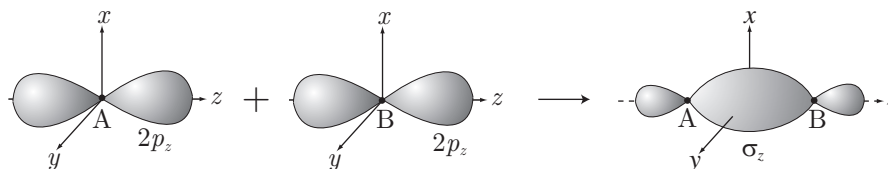
Tandis que l'orbitale σ_{1s} est liante (elle autorise la présence d'électrons entre A et B), l'orbitale σ_{1s}^* est anti-liante (l'existence d'un plan nodal, perpendiculaire à Oz entre A et B, interdit la mise en commun d'électrons entre A et B).

Le diagramme énergétique correspondant à la formation de ces orbitales moléculaires (O.M.) à partir des orbitales atomiques (O.A.) prend l'allure suivante :

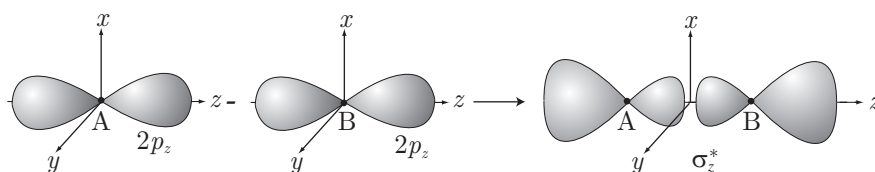


O.A. O.M. O.A.

- L'association de deux orbitales $2s$ conduit également à la formation de deux orbitales moléculaires : σ_{2s} et σ_{2s}^* qui jouissent des mêmes propriétés que les orbitales σ_{1s} et σ_{1s}^* (cependant, les O.M. σ_{2s} et σ_{2s}^* sont plus énergétiques que σ_{1s} et σ_{1s}^*).
- L'association de deux orbitales $2p_z$ conduit à :
 - la formation d'une orbitale σ_z (si l'association est constructive) :

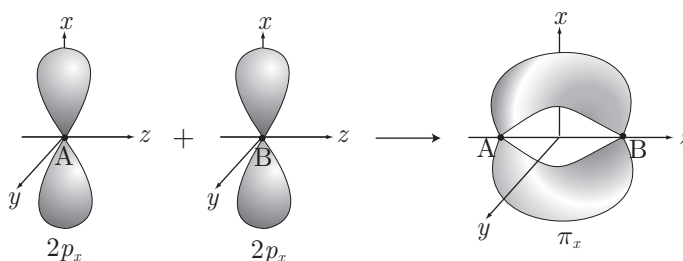


- la formation d'une orbitale σ_z^* , par combinaison destructive :



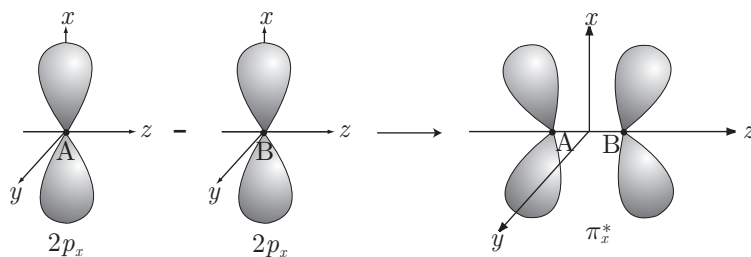
À nouveau, la présence d'un plan nodal entre A et B rend l'orbitale σ_z^* anti-liante, contrairement à l'orbitale σ_z qui autorise la mise en commun d'électrons entre A et B.

- L'association de deux orbitales $2p_x$ génère :
 - une orbitale π_x si l'association est constructive :



Cette orbitale n'ayant pas de symétrie de révolution autour de l'axe interatomique, elle est désignée par la lettre π . En outre, puisqu'elle permet la mise en commun d'électrons entre A et B, cette orbitale est liante.

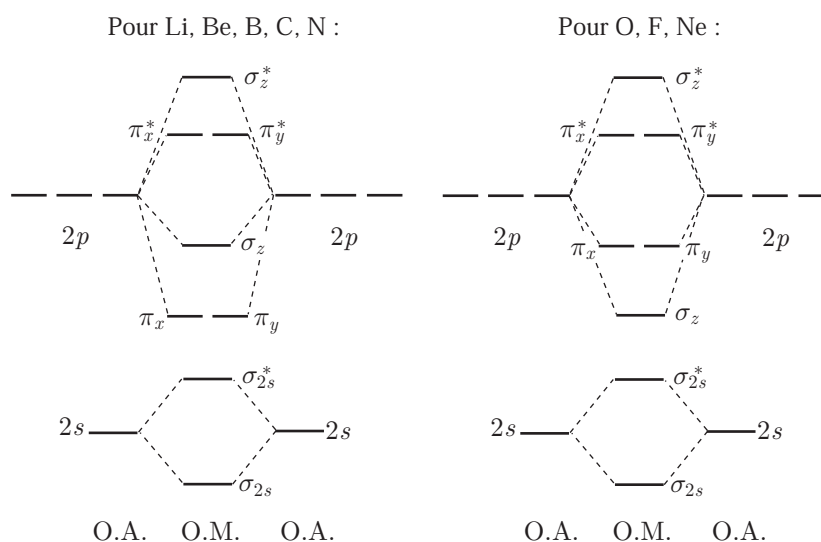
- une orbitale π_x^* si l'association est destructive :



Un plan nodal entre A et B interdit la mise en commun d'électrons dans une liaison covalente ; l'orbitale π_x^* est anti-liante.

- L'association de deux orbitales $2p_y$ fournit aussi deux orbitales moléculaires : π_y (liante) et π_y^* (anti-liante) qui présentent les mêmes caractéristiques et les mêmes énergies respectives que π_x et π_x^* .

Les diagrammes énergétiques des O.M. issues des O.A. $2s$ et $2p$ dépendent des éléments chimiques. On se limitera ici aux configurations électroniques des molécules diatomiques homonucléaires issues des éléments de la deuxième période de la classification périodique.



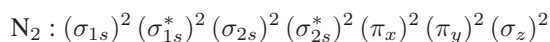
10.4.2 Configurations électroniques

La configuration électronique d'une molécule A – A s'obtient en remplissant les O.M. à partir de tous les électrons des atomes A, en respectant les règles suivantes :

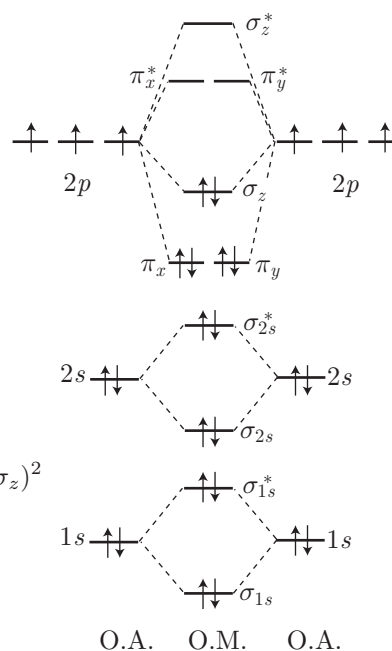
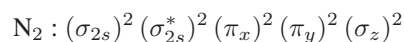
- les O.M. d'énergie la plus basse sont remplies les premières ;
- une orbitale ne peut contenir plus de deux électrons (principe d'exclusion de Pauli) ;
- les électrons occupent tous les niveaux de même énergie avant de s'apparier (règle de Hund)

L'exemple de la molécule de diazote est illustré ci-contre.

La configuration électronique de N₂ est alors :



mais on se satisfait souvent de la structure de valence de la molécule :



Définition 19 On appelle électrons anti-liants les électrons qui se trouvent sur des orbitales anti-liantes σ_{1s}^* , σ_{2s}^* , σ_z^* , π_x^* , π_y^* . Les électrons appartenant aux orbitales liantes (σ_{1s} , σ_{2s} , σ_z , π_x , π_y) sont appelés électrons liants.

Définition 20 L'indice de liaison (I) d'une molécule X₂ est défini par :

$$I = \frac{N_{\text{liants}} - N_{\text{anti-liants}}}{2}$$

où N_{liants} et $N_{\text{anti-liants}}$ représentent respectivement les nombres d'électrons liants et anti-liants de la molécule.

Par exemple, dans la molécule N_2 , $N_{\text{liants}} = 10$ et $N_{\text{anti-liants}} = 4$ fournissent :

$$I = \frac{10 - 4}{2} = 3$$

ce qui correspond à la liaison triple de la formule de Lewis : $\text{N} \equiv \text{N}$.

Définition 21 Les doublets non liants sont ceux qui, appartenant à une orbitale liante et à une orbitale anti-liante, se compensent dans le calcul de I . Par exemple les doublets des orbitales $\{\sigma_{1s}, \sigma_{1s}^*\}$ ou $\{\sigma_{2s}, \sigma_{2s}^*\}$ de la molécule N_2 .

Lorsqu'une molécule présente m électrons non appariés dans sa configuration électronique, elle possède un moment magnétique :

$$\mu = \sqrt{m(m+2)} \mu_B$$

où $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$ désigne le *magnéton de Bohr*. Une telle molécule est dite *paramagnétique*.

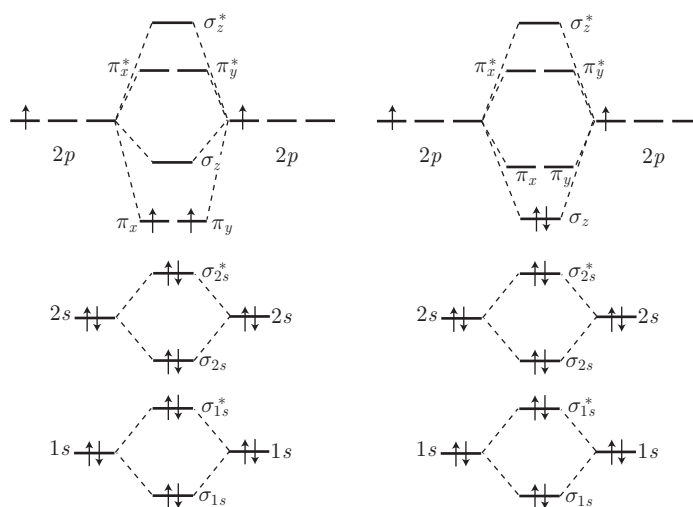


Le numéro atomique du bore est $Z(\text{B}) = 5$.

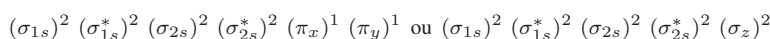
1. Développer sa configuration électronique dans les deux cas : les orbitales π_x et π_y sont moins énergétiques que σ_z et les orbitales π_x, π_y sont plus énergétiques que σ_z .
2. Expérimentalement, on mesure un moment magnétique non nul pour la molécule B_2 . En déduire laquelle des configurations électroniques précédentes rend compte de ce paramagnétisme.
3. Comparer avec les conclusions qu'aurait fourni la formule de Lewis de B_2 .

RÉPONSE

1. Avec une configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^1$, le bore peut former la molécule B_2 conformément aux deux diagrammes ci-dessous :



Selon la configuration adoptée, la molécule B₂ a donc pour structure électronique :



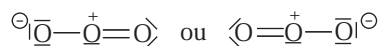
- La première configuration présente deux électrons non appariés, responsables de l'apparition d'un moment magnétique dans la molécule. En revanche la deuxième configuration ne présentant pas cette propriété, elle est rejetée par l'observation expérimentale d'un tel moment magnétique.
- L'indice de liaison I de la molécule B₂, qui contient $N_{\text{liants}} = 6$ électrons liants et $N_{\text{anti-liants}} = 4$ électrons anti-liants :

$$I = \frac{N_{\text{liants}} - N_{\text{anti-liants}}}{2} = \frac{6 - 4}{2} = 1$$

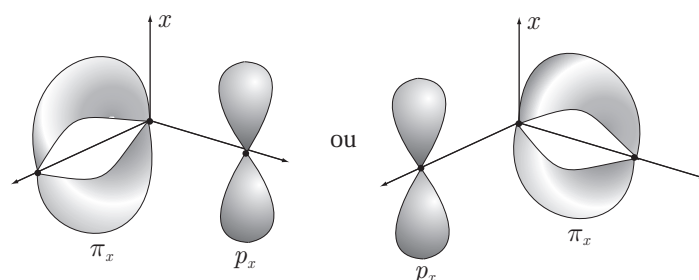
confirme la formation d'une liaison covalente simple entre les deux atomes de bore, prévue par la formule de Lewis : $|\text{B} - \text{B}|$. Cependant, une telle formule ne contient que des couples d'électrons appariés, et ne peut donc pas rendre compte du paramagnétisme observé dans B₂.

10.4.3 Liaisons délocalisées

Certaines molécules peuvent être décrites par plusieurs formules de Lewis. Par exemple, l'ozone :



Ces structures sont appelées *formes mésomères limites* et le phénomène autorisant le passage de l'une à l'autre s'appelle la *résonance*. Ce phénomène n'est rendu possible que parce que les orbitales p_x (ou p_y) des trois atomes sont parallèles et peuvent ainsi former des orbitales π_x (ou π_y) de part et d'autre de l'atome d'oxygène central :



Par conséquent, pour que la résonance se produise, il est nécessaire que les liaisons autour de l'atome central soient coplanaires.

La résonance, lorsqu'elle se produit, est figurée par des crochets entre lesquels les formes mésomères limites sont séparées par des flèches à double sens : \leftrightarrow . Par exemple :

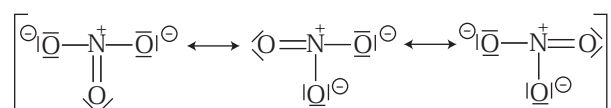
- pour l'ozone (O_3) :



- pour le dioxyde de soufre (SO_2) :

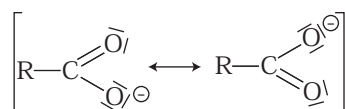


- pour l'ion nitrate NO_3^- :



Remarque – L'équiprobabilité des toutes les formes mésomères limites a pour conséquence une hybridation de la molécule ; chacune des liaisons est ni simple ni double, mais hybride (les trois liaisons NO de NO_3^- sont équivalentes).

- pour les carboxylates ($\text{R}-\text{COO}^-$) :



● **348** **QCM**

5 min.

Spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène

MPSI-PCSI-PTSI

Quelle est la différence d'énergie entre le premier et le deuxième niveau électronique dans l'atome d'hydrogène ?

On rappelle que l'énergie d'ionisation de l'hydrogène vaut $E_{\text{ion}} = 2,18 \cdot 10^{-18}$ J.

- (a) $\Delta E = 1,091 \cdot 10^{-18}$ J (b) $\Delta E = 1,635 \cdot 10^{-18}$ J
 (c) $\Delta E = 2,180 \cdot 10^{-18}$ J (d) $\Delta E = 2,360 \cdot 10^{-18}$ J

● **349** **Concours Centrale Supélec**

10 min.

Spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène

MPSI-PCSI-PTSI

La série de Balmer est une suite de longueurs d'onde vérifiant la relation discrète :

$$\frac{1}{\lambda} = A \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right)$$

où n est un entier supérieur à 2 et A est une constante.

1. L'énergie de l'état fondamental de l'atome d'hydrogène est égale à $-E_0$. Quelle hypothèse sur les niveaux de l'atome d'hydrogène permet d'expliquer l'observation de la série de Balmer ? En déduire l'expression de A en fonction de E_0 , de la constante de Planck h et de la célérité c de la lumière.
2. Les mesures de longueurs d'onde montrent que la série de Balmer présente une limite pour $\lambda_{\infty} = 364,56$ nm. Déterminer les longueurs d'onde émises par l'atome d'hydrogène dans le domaine visible. Vous proposerez une couleur pour chaque longueur d'onde proposée.

● **350** **Lycée Fabert, Metz**

10 min.

Spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène

MPSI-PCSI-PTSI

Les raies d'émission sont groupées en série. Pour une série donnée, n (voir les notations ci-après) est fixé et $p > n$.

1. Sachant que l'énergie électronique de l'atome d'hydrogène est quantifiée par :

$$E_m = -\frac{E_0}{m^2} \text{ où } m \in \mathbb{N}^* \text{ et } E_0 = 13,6 \text{ eV}$$

justifier la formule de Ritz donnant les nombres d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ en (cm^{-1}) associés aux raies :

$$\sigma = 109\,700 \times \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

On s'aidera d'un schéma.

2. Dans la série de Balmer ($n = 2$), quatre raies sont observées pour les nombres d'onde (en cm^{-1}) suivants :

15 250 20 570 23 040 24 380

Déterminer les valeurs de p pour cette série.

Données :

- constante de Planck : $h = 6,61 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;
- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- conversion : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

● 351 ————— Lycée Condorcet, Paris

10 min.

Spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène

MPSI-PCSI-PTSI

1. Le modèle de Bohr (voir exercice de la page 1212) appliqué à l'atome d'hydrogène, en considérant le noyau fixe, donne pour l'énergie de l'électron dans l'état fondamental :

$$E_n = -\frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2 n^2}$$

En déduire la valeur de la constante de Rydberg \mathcal{R}_H pour l'atome d'hydrogène.

2. Calculer, avec trois chiffres significatifs, les longueurs d'onde des raies limites de la série de Lyman (transition vers le niveau $n = 1$) de l'atome d'hydrogène. Préciser le domaine auquel appartiennent les radiations correspondantes.

Données :

- masse de l'électron : $m = 9,110 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- charge de l'électron : $-e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- constante de Planck : $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;
- permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$;
- célérité de la lumière dans le vide : $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

● 352 ————— Université Paris-Sud

30 min.

Spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène

MPSI-PCSI-PTSI

Des atomes d'hydrogène, à l'état fondamental, sont excités par un rayonnement U.V. de longueur d'onde 97,35 nm.

1. Quel est le nombre quantique principal n de l'état ainsi obtenu ?
2. Quelles sont les longueurs d'onde des différentes radiations que peuvent émettre ces atomes lorsqu'ils se dés excitent ?
3. Quelle est l'énergie nécessaire pour ioniser un atome d'hydrogène ?

Données :

- constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;
- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- niveaux d'énergie de H : $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ (en eV) ;
- $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

● **353** **Lycée Louis-le-Grand, Paris**

30 min.

Spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène

MPSI-PCSI-PTSI

1. On suppose que le noyau O de l'atome d'hydrogène, de charge $q_n = +e$ reste fixe et attire l'électron, de masse m et de charge $q_e = -e$, par interaction électrostatique. Dans le *modèle de Bohr*, qui s'appuie sur la mécanique classique, l'électron décrit une orbite circulaire de rayon r autour du noyau, à la vitesse angulaire ω constante.
- (a) Calculer ω^2 en fonction de e , m , ε_0 et r .
- (b) Donner l'expression de l'énergie cinétique \mathcal{E}_c en fonction de e , ε_0 et r .
- (c) On rappelle que le travail de la force électrostatique, δW_e , définit l'énergie potentielle \mathcal{E}_p de l'électron :

$$d\mathcal{E}_p = -\delta W_e$$

En admettant que $\mathcal{E}_p = 0$ lorsque r tend vers l'infini, déterminer l'expression de \mathcal{E}_p lorsque l'électron gravite autour du noyau. En déduire l'énergie mécanique E , en fonction de e , ε_0 et r .

2. Dans le modèle de Bohr, seules sont possibles les orbites circulaires pour lesquelles le rayon r et la vitesse v de l'électron vérifient :

$$mvr = n \times \frac{h}{2\pi}, n \in \mathbb{N}^*$$

En déduire que le rayon de ces orbites est donné par :

$$r = r_0 \times n^2$$

et l'énergie correspondante par :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$

Déterminer la valeur numérique de r_0 (rayon de Bohr) et celle de l'énergie E_0 (en joules et en électron-volts).

3. Un ion hydrogénoïde est composé d'un noyau de charge $q_n = Ze$ ($Z \in \mathbb{N}^*$ est le numéro atomique de l'élément) autour duquel gravite un électron. On reste dans le cadre du modèle de Bohr décrit ci-avant.

Montrer que r et E_n vérifient alors :

$$r = \frac{n^2}{Z} \times r_0 \text{ et } E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \times E_0$$

Données :

- constante de Planck : $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;
- masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- conversion : $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$;
- permittivité du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

● **354** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

30 min.

Spectre d'énergie d'un ion hydrogénoïde

PCSI

L'ion Li^{2+} est un ion hydrogénoïde de numéro atomique $Z = 3$, que l'on supposera immobile.

1. Donner la valeur de la constante \mathcal{R}_{Li} qui permet d'écrire son spectre d'émission sous la forme :

$$\frac{1}{\lambda} = \mathcal{R}_{\text{Li}} \times \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \text{ avec } p > n$$

2. On rappelle que le rayonnement visible est constitué d'ondes électromagnétiques dont les longueurs d'onde sont comprises entre $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$.
- (a) Montrer que les longueurs d'onde des rayonnements émis par l'ion Li^{2+} sont comprises dans un intervalle $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, dont on exprimera les bornes en fonction de n et de \mathcal{R}_{Li} .
- (b) Quelle valeur maximale peut prendre n pour que les rayonnements émis par Li^{2+} soient visibles ?
- (c) Trouver, de même, la valeur minimale de n assurant à Li^{2+} d'émettre des rayonnements visibles.
- (d) Combien de séries peuvent alors décrire les rayonnements visibles émis par Li^{2+} ?

Données :

- constante de Planck : $h = 6,61 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$;
- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- énergie fondamentale de l'hydrogène : $E_1 = -E_0 = -2,176 \cdot 10^{-18} \text{ J}$.

● **355** ————— **Lycée Pissaro, Pontoise**

5 min.

Configuration électronique de l'atome

MPSI-PCSI-PTSI

Le magnésium a pour numéro atomique $Z = 12$.

1. Quels sont, dans l'état fondamental, le numéro de la couche externe et le nombre d'électrons (dits périphériques) qu'elle contient ? Que valent les nombres quantiques de ces électrons ?
2. Pris dans l'état fondamental, le magnésium peut former un ion ; prévoir sa structure.

● **356** ————— **Concours Centrale-Supélec**

5 min.

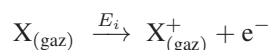
Configuration électronique de l'atome

MPSI-PCSI-PTSI

Une orbitale atomique est caractérisée par les nombres quantiques n , ℓ et m_ℓ .

1. Quels sont les noms respectifs de ces trois nombres quantiques ?
2. Donner les valeurs respectives du couple (n, ℓ) pour les orbitales $3d$ et $4p$.
3. Quelles sont les valeurs que peut prendre le nombre quantique m_ℓ pour une orbitale de type p et de type d ?

- Donner la configuration électronique de l'aluminium dans son état fondamental.
- On rappelle que l'énergie de première ionisation d'un atome est l'énergie E_i qui doit lui être fournie pour arracher un électron depuis l'état fondamental :



Pourquoi l'énergie de première ionisation du magnésium (7,64 eV) est-elle supérieure à celle de l'aluminium (5,98 eV) ?

Données : numéros atomiques : $Z_{\text{Al}} = 13$ et $Z_{\text{Mg}} = 12$.

● 357 ————— Concours des Mines-Ponts

5 min.

Configuration électronique de l'atome

MPSI-PCSI-PTSI

Le numéro atomique du fer est 26.

- Donner la configurations électronique du fer dans son état fondamental.
- Peut-on prévoir les ions les plus courants formés par cet atome ?

● 358 ————— Concours Centrale-Supélec

5 min.

Configuration électronique de l'atome

MPSI-PCSI-PTSI

- Quelle est la configuration électronique du manganèse ($Z = 25$) ?
- Donner la configuration électronique de l'ion Mn^{2+} .

● 359 ————— Concours ENSTIM

10 min.

Configuration électronique de l'atome

MPSI-PCSI-PTSI

Le numéro atomique de l'élément iode est $Z = 53$.

- En déduire sa configuration électronique dans son état fondamental.
- Combien cet atome possède-t-il d'électrons de valence ?
- Combien cet atome possède-t-il d'électrons de nombre quantique secondaire égal à 2 ?

● 360 ————— Concours Centrale-Supélec

15 min.

Configuration électronique de l'atome

MPSI-PCSI-PTSI

- Énoncer la règle de Klechkowski. Donner la configuration électronique qui en découle dans le cas du cuivre ($Z = 29$).
- En fait, le cuivre a une configuration électronique différente. Proposer une explication.
- Donner les configurations électroniques de ses principaux ions.

● 361 ————— Concours e3a

15 min.

Configuration électronique de l'atome

MPSI-PCSI-PTSI

- L'atome d'azote a pour numéro atomique $Z = 7$.

- (a) Donner sa configuration électronique.
 (b) Quels sont les électrons de valence
2. (a) On donne les énergies de première ionisation du carbone : $E_C = 11,3$ eV, de l'azote : $E_N = 14,5$ eV et de l'oxygène : $E_O = 13,6$ eV.
 En vous aidant des configurations électroniques, justifier cette évolution non monotone.
 (b) Calculer la longueur d'onde λ_1 associée aux rayonnements utilisés, à partir de laquelle il est possible d'ioniser un atome d'azote.

Données :

- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3.10^8$ m · s⁻¹ ;
- constante de Planck : $h = 6,6.10^{-34}$ J · s ;
- conversion : 1 eV = $1,6.10^{-19}$ J ;
- numéros atomiques : $Z_C = 6$ et $Z_O = 8$.

● 362 ————— Lycée Chateaubriand, Rennes

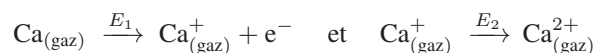
20 min.

PCSI

Règles de Slater

Le calcium a pour numéro atomique $Z = 20$.

1. Quelle est sa configuration électronique à l'état fondamental ?
 Sous quelle forme ionique le rencontre-t-on habituellement ?
2. À partir des valeurs des constantes d'écran, calculer les énergies de première et de deuxième ionisation, qui correspondent aux réactions respectives :



On donne les valeurs expérimentales :

$$E_1 = 6,11 \text{ eV} \text{ et } E_2 = 11,87 \text{ eV}$$

On rappelle l'approximation de Slater : l'énergie orbitale associée à l'électron i vaut :

$$E_i = -13,6 \times \left(\frac{Z_i^*}{n^*} \right)^2 \text{ (en eV)}$$

où n^* est le nombre quantique principal effectif et Z_i^* la charge effective du noyau.

n	1	2	3	4
n^*	1	2	3	3,7

Facteurs d'écran de l'électron j sur l'électron i ($\sigma_{j \rightarrow i}$) :

	1s	2s2p	3s3p	4s4p
1s	0,3			
2s2p	0,85	0,35		
3s3p	1	0,85	0,35	
4s4p	1	1	0,35	0,35

● 363 **Concours de la Banque PT**

20 min.

PCSI

Règles de Slater

1. Donner la configuration électronique, à l'état fondamental, de l'élément cobalt ainsi que des ions Co^{2+} et Co^{3+} .
2. Dans le cas des ions Co^{3+} , il est également possible d'envisager la configuration électronique qui se finit par $3d^5 4s^1$. À l'aide des règles de Slater, comparer la stabilité des deux configurations électroniques et conclure.

On rappelle que, dans le cadre de l'approximation de Slater, l'énergie $\varepsilon_{n,\ell}$ d'une orbitale est définie selon :

$$\varepsilon_{n,\ell} = -13,6 \left(\frac{Z^*}{n^*} \right)^2 \quad (\text{en eV})$$

où Z^* est la charge effective et n^* le nombre quantique principal effectif de l'électron de l'orbitale étudiée.

Données :

- numéro atomique du cobalt : $Z = 27$;
- règles de Slater :

$\sigma_{i/j}$	1s	2s2p	3s3p	3d	4s4p
1s	0,3				
2s2p	0,85	0,35			
3s3p	1	0,85	0,35		
3d	1	1	1	0,35	
4s4p	1	1	0,85	0,85	0,35

- nombres quantiques principaux effectifs :

n	1	2	3	4
n^*	1	2	3	3,7

● 364 **Concours e3a**

20 min.

PCSI

Règles de Slater

1. (a) Rappeler la règle de Hund.
(b) Donner la configuration électronique de l'atome d'oxygène et de l'atome de soufre.
2. (a) Définir la charge effective Z^* d'un noyau, vue par un électron de valence.
(b) On rappelle l'expression du rayon atomique ρ d'un élément en fonction du nombre quantique principal n , de Z^* et du rayon de Bohr a_0 :

$$\rho = \frac{n^2}{Z^*} \times a_0$$

En rappelant l'expression de l'énergie électrostatique de deux charges en interaction (énergie coulombienne), montrer que l'énergie électrostatique E d'un

électron périphérique, à une distance ρ du noyau, est proportionnelle à $(Z^*)^2$. On admet ensuite que l'énergie totale de l'électron (énergie orbitale) est alors égale à $\frac{1}{2} E$. Donner l'expression de E_{tot} .

(c) Calculer les charges effectives Z_{O}^* et Z_{S}^* pour l'oxygène et le soufre.

On rappelle que, pour un électron occupant une orbitale ns ou np , l'écran σ dû à un électron d'une couche n' est :

$$\begin{aligned} \sigma &= 1 & \text{si } n' < n - 1 \\ \sigma &= 0,85 & \text{si } n' = n - 1 \\ \sigma &= 0,35 & \text{si } n' = n \end{aligned}$$

(d) À l'aide des questions (b) et (c), peut-on calculer le rapport des énergies de première ionisation E_i des deux éléments ? Comparer avec les données expérimentales.

Données :

élément	Z	E_i (eV)
oxygène	8	13,6
soufre	16	10,4

● 365

Concours ESIM

20 min.

PCSI

Règles de Slater

Le nickel a pour numéro atomique $Z = 28$. On se propose de vérifier la règle de Klechkowski.

Calculer, dans le modèle de Slater, l'énergie orbitale du nickel (en se limitant à la somme des énergies des électrons des couches de valence) selon que l'on remplit d'abord les orbitales $3d$ ou d'abord les orbitales $4s$. Comparer la stabilité de l'atome dans ces deux configurations et conclure.

On rappelle les règles de Slater :

$$E_i = -13,6 \times \left(\frac{Z^*}{n^*} \right)^2 \quad (\text{en eV})$$

où Z^* est le numéro atomique effectif et n^* est le nombre quantique principal effectif. L'écran exercé sur un électron de type $(ns) - (np)$:

- par un autre électron $(ns) - (np)$ est de 0,35 ;
- par tout électron de la couche $(n - 1)$ est de 0,85 ;
- par tout électron des couches inférieures ou égales à $n - 2$ est de 1.

L'écran exercé sur un électron de type (nd) :

- par un autre électron (nd) est de 0,35 ;
- par tout électron des couches inférieures à $n - 1$ est de 1.

Le nombre quantique principal effectif pour $n = 3$ est $n^* = 3$ et pour $n = 4$ il est $n^* = 3,7$.

● 366 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

30 min.

PCSI

*Règles de Slater*Le béryllium a pour numéro atomique $Z = 4$.**1. Énergie de l'atome Be**

- Donner la configuration électronique de l'atome de béryllium Be.
- Déterminer, en utilisant les règles de Slater, l'énergie individuelle des électrons de valence de Be.
- Calculer, de la même manière, l'énergie individuelle des électrons de cœur de Be.
- En déduire l'énergie orbitalaire des électrons de Be.

2. Énergie de Be^{2+}

- Donner la configuration électronique de l'ion Be^{2+} .
- Que vaut l'énergie des électrons de l'ion Be^{2+} , dans le modèle de Slater ?
- En déduire l'énergie nécessaire à fournir pour effectuer, en phase gazeuse, la réaction d'ionisation :

*Données* : constantes d'écran dans le modèle de Slater :

	1s	2s2p
1s	0,3	
2s2p	0,35	0,85

● 367 ————— Lycée Carnot, Dijon

40 min.

PCSI

*Règles de Slater*Le cobalt ($Z = 27$) peut donner des ions cobalt (II) et cobalt (III) par perte de deux ou trois électrons de valence.

- Donner la configuration électronique du cobalt dans son état fondamental.
- Donner les trois configurations électroniques envisageables pour l'ion cobalt (II), selon que le cobalt perd deux électrons s , un électron s et un électron d , ou deux électrons d .
- L'énergie orbitalaire de l'ion cobalt (II) se présente sous la forme :

$$E(\text{Co}^{2+}) = E_c + E_e$$

où E_c est l'énergie orbitalaire des électrons de cœur (son calcul n'est pas demandé) et E_e celle des électrons externes.Déterminer $E(\text{Co}^{2+})$ pour les trois configurations envisagées pour Co^{2+} :

- perte de deux électrons s ;
- perte d'un électrons s et d'un électron d ;
- perte de deux électrons d .

En déduire la configuration électronique la plus stable pour l'ion cobalt (II).

Données :

- constantes d'écran, dans l'approximation de Slater :

	1s	2s2p	3s3p	3d	4s4p
1s	0,3				
2s2p	0,85	0,35			
3s3p	1	0,85	0,35		
3d	1	1	1	0,35	
4s4p	1	1	0,85	0,85	0,85

- nombre quantique principal effectif n^* dans l'approximation de Slater :

	1	2	3	4
n^*	1	2	3	3,7

● 368 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

15 min.

Probabilité de présence d'un électron

MPSI-PCSI-PTSI

Lorsque l'électron occupe le niveau $2p$ ($n = 2, \ell = 1, m_\ell = 0$), la probabilité de sa présence dans un volume $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$ de coordonnées sphériques (r, θ, φ) par rapport au centre du noyau, est :

$$\delta\mathcal{P} = A \times r^2 e^{-r/a_0} \cos^2 \theta dV$$

où $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m est le rayon de Bohr et A est une constante.

1. On appelle I_n l'intégrale :

$$I_n = \int_0^\infty r^n e^{-r/a_0} dr$$

Trouver l'expression de I_n en fonction de a_0 et de n .

2. En utilisant la condition de normalisation de la probabilité \mathcal{P} dans l'espace, démontrer que $A = \frac{1}{32 \pi a_0^5}$.
3. Donner l'expression de la valeur moyenne de r , définie par :

$$\langle r \rangle = \int_{\theta=0}^\pi \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^\infty r \times \delta\mathcal{P}(r)$$

● 369 ————— Concours e3a

20 min.

Probabilité de présence d'un électron

PCSI

1. Soit l'orbitale $1s$ de l'atome d'hydrogène, sur laquelle la densité de probabilité de présence d'un électron a pour partie radiale la fonction :

$$\mathcal{P}_{1s}(r) = A e^{-2r/a_0}$$

où A est une constante et $a_0 = 52$ pm le rayon de Bohr.

- (a) Donner l'expression du volume élémentaire dV compris entre deux sphères concentriques de rayons r et $r + dr$; on se limitera à l'ordre 1 en dr . Donner alors l'expression de la probabilité $\delta\mathcal{P}_r$ de trouver l'électron à une distance du noyau comprise entre r et $r + dr$.
- (b) En déduire l'expression de A , en fonction de a_0 .
- (c) On définit la densité de probabilité radiale par $F_{1s} = \frac{\delta\mathcal{P}_r}{dr}$; exprimer F_{1s} .
- (d) Étudier la fonction F_{1s} en fonction de r et montrer que la courbe passe par un *maximum* dont on interprétera l'existence.

On donne la primitive :

$$I = \int r^2 e^{\alpha r} dr = e^{\alpha r} \times \left(\frac{r^2}{\alpha} - \frac{2r}{\alpha^2} + \frac{2}{\alpha^3} \right)$$

où α est une constante.

2. L'orbitale $2s$ est associée à une densité de probabilité :

$$\mathcal{P}_{2s}(r) = B \times \left(2 - \frac{r}{a_0} \right)^2 e^{-r/a_0}$$

où B est une constante réelle.

- (a) Quelle est l'expression de la probabilité $\delta\mathcal{P}_r$ de trouver l'électron à une distance du noyau comprise entre r et $r + dr$? En déduire la densité de probabilité correspondante : $F_{2s} = \frac{\delta\mathcal{P}_r}{dr}$.
- (b) Étudier F_{2s} en fonction de r . Montrer que F_{2s} présente quatre *extrema* dont un *maximum* absolu. Commenter.

● 370 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

20 min.

Probabilité de présence d'un électron

MPSI-PCSI-PTSI

Dans l'état $1s$ l'électron présente une probabilité radiale $F_{1s}(r)$ et une probabilité angulaire $G_{1s}(\theta, \varphi)$ données par :

$$F_{1s}(r) = \frac{4r^2}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \text{ et } G_{1s}(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}$$

où $a_0 = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m est le rayon de Bohr.

On rappelle que la probabilité de présence d'un électron au voisinage d'un point $M(r, \theta, \varphi)$ suit la loi :

$$\delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi) = F_{1s}(r) dr \times G_{1s}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi$$

1. Montrer que la probabilité $\delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi)$ est normalisée, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\int_{\text{espace}} \delta\mathcal{P}(r, \theta, \varphi) = 1$$

2. Quelle est la probabilité de trouver l'électron à une distance $r \leq a_0$ du rayon ?

On donne la primitive :

$$I = \int r^2 e^{-2r/a_0} dr = -e^{-2r/a_0} \left(\frac{a_0 r^2}{2} + \frac{r a_0^2}{2} + \frac{a_0^3}{4} \right)$$

● **371** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

5 min.

Classification périodique des éléments

MPSI-PCSI-PTSI

L'atome d'azote a pour numéro atomique $Z_N = 7$.

- Donner la configuration électronique de l'atome d'azote dans son état fondamental.
- Le phosphore se trouve juste en dessous de l'azote dans la classification périodique.
 - Donner la configuration électronique de valence du phosphore.
 - Comparer l'électronégativité du phosphore avec celle de l'azote.

● **372** ————— **Concours Centrale-Supélec**

10 min.

Classification périodique des éléments

PCSI

Le tableau ci-dessous indique, dans le désordre, les valeurs numériques des rayons ioniques des ions Li^+ , Na^+ , K^+ , Rb^+ , Cs^+ :

r (pm) 149 167 102 59 138

- Donner la structure électronique des ions Li^+ , Na^+ et K^+ sachant que $Z_{\text{Li}} = 3$, $Z_{\text{Na}} = 11$, $Z_{\text{K}} = 19$.
- Indiquer la position des éléments chimiques dans la classification périodique de Mendeleïev. Donner le nom de la famille des métaux Li, Na, K, Rb et Cs.
- Que peut-on dire des rayons ioniques respectifs des éléments précédents ? Associer à chaque ion du tableau la valeur correspondante du rayon ionique.

● **373** ————— **Lycée Montesquieu, Le Mans**

10 min.

Classification périodique des éléments

MPSI-PCSI-PTSI

Le silicium a pour numéro atomique $Z = 14$.

- Donner la configuration électronique de l'atome de silicium. Quelle est sa valence ?
- Dans la colonne de quel élément (base de la chimie organique) se trouve le silicium ? D'après leur position relative dans la classification périodique, comparer qualitativement leurs rayons atomiques (PCSI) et leurs électronégativités.
- À l'état naturel, le silicium se trouve sous forme d'oxyde de formule SiO_2 , que l'on appelle silice. Justifier la stœchiométrie de cet oxyde en le supposant purement ionique.

● **374** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

15 min.

Classification périodique des éléments

MPSI-PCSI-PTSI

- Le fer a pour numéro atomique $Z = 26$.

- (a) Donner sa configuration électronique.
 (b) Localiser l'élément Fe dans la classification périodique.
 (c) Le ruthénium (Ru) est l'élément situé juste en dessous de Fe dans la classification périodique. En admettant que sa configuration électronique respecte la règle de Klechkowski, donner son numéro atomique.
2. (a) À partir de la configuration électronique du fer, quels ions peut-on prédire pour cet élément ?
 (b) En déduire les formules de trois oxydes de fer.

● 375 ————— Concours des Mines-Ponts

15 min.

Classification périodique des éléments

MPSI-PCSI-PTSI

1. Le chlore a pour numéro atomique $Z = 17$. À quoi correspond Z ? Donner la configuration électronique de l'atome de chlore dans son état fondamental.
2. Les énergies de première ionisation (E_i en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) des éléments de la ligne du chlore sont les suivantes :

Atome	Na	Mg	Al	Si	P	S	Cl	Ar
E_i	496	738	577	786	1 012	1 000	1 251	1 520

- (a) Définir l'énergie de première ionisation pour un atome.
 (b) Justifier l'évolution générale de ces valeurs et discuter les anomalies apparentes.

● 376 ————— Lycée Pissaro, Pontoise

15 min.

Classification périodique des éléments

PCSI

1. Donner la configuration électronique de l'atome d'oxygène et de l'atome de soufre.
 2. Positionner ces deux éléments dans la classification périodique.
 3. Comparer les rayons atomiques de l'oxygène et du soufre.
 4. Interpréter les données de polarisabilité.

Données :

- numéros atomiques : $Z(\text{O}) = 8$ et $Z(\text{S}) = 16$;
- polarisabilité : $3,92 \cdot 10^{-30}$ USI pour O et $10,3 \cdot 10^{-30}$ USI pour S.

● 377 ————— Concours des Ponts et Chaussées

20 min.

Classification périodique des éléments

PCSI

On donne les propriétés suivantes pour quelques éléments (numéros atomiques Z , rayons métalliques r , rayons ioniques r_{ion} , potentiels *standard* E^0 des couples M^{2+}/M) :

	Be (béryllium)	Mg (magnésium)	Ca (calcium)	Sr (strontium)	Ba (baryum)
Z	4	12	20	38	56
r (nm)	0,112	0,160	0,197	0,216	0,222
r_{ion} (nm)	0,032	0,065	0,099	0,113	0,135
E^0 (V)	-1,70	-2,34	-2,87	-2,89	-2,90

1. Donner la configuration électronique de l'élément baryum dans son état fondamental.
2. Dans quelle ligne et quelle colonne du tableau périodique se situe cet élément ?
3. Quel est le nom donné aux éléments de cette colonne ? Quelles sont leurs configurations électroniques ?
4. Justifier l'évolution des valeurs du tableau précédent.
5. Au XIX^{ème} siècle, avant l'établissement de la classification périodique, trois de ces éléments étaient groupés en « triade » : éléments aux propriétés très voisines ; de quels éléments s'agissait-il d'après vous ?

● **378** ————— **Lycée du Parc, Lyon**

20 min.

PCSI

Classification périodique des éléments

Soient les atomes ${}_5\text{B}$, ${}_{13}\text{Al}$, ${}_{31}\text{Ga}$, ${}_{49}\text{In}$ et ${}_{81}\text{Tl}$.

1. Donner les configurations électroniques de ces atomes.
2. Que peut-on dire quant à leur appartenance dans la classification périodique ?
3. Quel type d'évolution peut-on prévoir ?
4. On donne, pour ces atomes, le rayon atomique :

r (10^{-10} m)	B	Al	Ga	In	Tl
	0,82	1,18	1,26	1,44	1,48

Donner une explication à l'évolution de r .

5. Donner les configurations électroniques des ions Al^{3+} et Ga^{3+} .

● **379** ————— **Concours ENSTIM**

5 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Formules de Lewis

1. Donner la configuration électronique de ${}_8\text{O}$.
2. Le plus important des corps purs simples formés avec l'oxygène est le dioxygène. Proposer une formule de Lewis pour la molécule de dioxygène.
3. L'ozone O_3 est un gaz qui se caractérise par son odeur forte (ozone, du grec *ozein* : sentir). Proposer une formule de Lewis pour cette molécule non cyclique.
4. L'eau H_2O et le peroxyde d'hydrogène H_2O_2 sont deux molécules contenant l'élément oxygène. Proposer une formule de Lewis pour ces deux molécules.

● **380** ————— **Université Paris-Sud**

10 min.

MPSI-PCSI-PTSI

Formules de Lewis

1. Préciser la configuration électronique, dans l'état fondamental, de l'atome d'azote. Donner sa représentation de Lewis.
2. Écrire les structures de Lewis des espèces suivantes :



Dans les quatre derniers composés, l'atome d'azote est au centre de la structure.

On rappelle les numéros atomiques suivants :

$$Z(\text{H}) = 1 \quad Z(\text{N}) = 7 \quad Z(\text{O}) = 8 \quad Z(\text{F}) = 9$$

● **381** _____ **Lycée Fabert, Metz**

15 min.

Formules de Lewis

MPSI-PCSI-PTSI

- ${}^7\text{N}$ représente l'atome d'azote et ${}^8\text{O}$ celui d'oxygène. Donner leurs configurations électroniques.
- Donner les structures de Lewis de NO_2^- et NO_3^- .
- Montrer que les espèces NO et NO_2 ont des structures de Lewis qui présentent une anomalie que l'on précisera. Ces espèces sont-elles stables ?
- En déduire la structure, selon Lewis, des espèces : N_2O_2 , N_2O_4 , N_2O_3 et leur mode de formation.

● **382** _____ **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

15 min.

Formules de Lewis

MPSI-PCSI-PTSI

- Donner les configurations électroniques de ${}_{15}\text{P}$, ${}^8\text{O}$ et ${}^8\text{O}^-$.
- Quelles sont les formules de Lewis de H_3PO_3 et H_3PO_4 ?
- Le couple oxydant-réducteur $\text{H}_3\text{PO}_4/\text{H}_3\text{PO}_3$ a pour potentiel *standard* $E^0 = -0,276 \text{ V}$.
 - En utilisant les formules de Lewis précédentes trouver les degrés d'oxydation du phosphore dans ces deux composés.
 - Écrire la demi-équation relative au couple $\text{H}_3\text{PO}_4/\text{H}_3\text{PO}_3$ et vérifier que le transfert d'électrons est compatible avec la variation du degré d'oxydation du phosphore.

● **383** _____ **Concours des Mines-Ponts**

15 min.

Formules de Lewis

MPSI-PCSI-PTSI

- Le chlore a pour numéro atomique $Z = 17$. Donner la configuration électronique de l'atome de chlore dans son état fondamental.
- Donner les structures de Lewis des espèces suivantes : ClO_4^- , Cl_2 , ClO_3^- (le numéro atomique de l'oxygène vaut $Z = 8$).
- Préciser, dans chacun des cas, le degré d'oxydation du chlore.

● **384** _____ **Lycée Montesquieu, Le Mans**

20 min.

Formules de Lewis

MPSI-PCSI-PTSI

- Le numéro atomique du soufre est $Z = 16$. Donner sa configuration électronique. Comparer avec celle de l'oxygène ($Z = 8$).
- (a) Donner les formules de Lewis de SO_4^{2-} (les atomes d'oxygène sont tous équivalents vis-à-vis du soufre), HSO_4^- et H_2SO_4 .

- (b) Quel est le degré d'oxydation du soufre dans chacune de ces espèces ?
 (c) Quelle est la particule transférée de l'une à l'autre ?
 De quelle réaction s'agit-il ?
3. (a) Donner les formules de Lewis de SO_3^{2-} , HSO_3^- et H_2SO_3 .
 (b) Quel est, chaque fois, le degré d'oxydation du soufre ?
 (c) Par quel type de réaction peut-on passer d'un composé à l'autre ?
4. (a) Quelle est la particule échangée entre les espèces du 2. et celles du 3. ?
 De quel type de réaction s'agit-il ?
 (b) Écrire la demi-équation de la réaction liant HSO_4^- à H_2SO_3 .

● 385 Concours ENSTIM

5 min.

Géométrie des molécules

MPSI-PCSI-PTSI

- Écrire la configuration électronique, dans l'état fondamental, du silicium, de numéro atomique $Z = 14$.
Citer un élément de la même colonne.
- On rappelle que le numéro atomique de l'oxygène est $Z = 8$. Proposer alors un schéma de Lewis de la molécule SiO_2 . Quelle est la géométrie de cette molécule ?
Citer une molécule de géométrie analogue à celle de SiO_2 .
- L'altération d'une silice minérale par l'acide carbonique, présent dans les eaux de pluie, souterraines et fluviales, libère de la silice dissoute dont la formule chimique est H_2SiO_4 . Proposer une formule de Lewis de cette molécule et donner sa géométrie.

● 386 Concours de l'ENS

10 min.

Géométrie des molécules

MPSI-PCSI-PTSI

- L'acide phosphorique a pour formule H_3PO_4 . Proposer une structure de Lewis pour cette molécule.
- (a) Rappeler le principe de détermination de la géométrie des molécules de Gillespie (V.S.E.P.R.).
 (b) En déduire la géométrie de l'ion PO_4^{3-} .
 (c) Quelle est la géométrie de PCl_5 ?

Données numériques : numéros atomiques :

H : 1 O : 8 P : 15 Cl : 17

● 387 Concours ENSI

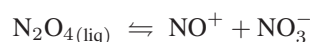
20 min.

Géométrie des molécules

MPSI-PCSI-PTSI

Le dioxyde d'azote NO_2 peut donner naissance aux ions nitronium NO_2^+ et nitrite NO_2^- .

1. En se limitant strictement au seul modèle de Lewis, représenter les structures de chacune de ces trois espèces. Dans le cas de NO_2 l'électron « célibataire » peut être localisé soit sur l'atome d'azote, soit sur l'atome d'oxygène. On rappelle que le numéro atomique de l'oxygène est $Z = 8$ et celui de l'azote est $Z = 7$.
2. Utiliser la méthode V.S.E.P.R. de répulsion des paires électroniques des couches de valence pour prévoir la géométrie de ces trois espèces. Justifier l'évolution des angles ONO : 134° dans NO_2 et 115° dans NO_2^- .
3. Montrer que les combinaisons des formes mésomères de NO_2 , vues à la première question, permettent de déterminer les différentes structures de Lewis possibles pour N_2O_4 . À partir de ces structures, expliquer l'autodissociation de N_2O_4 liquide :



● 388 ————— Lycée Condorcet, Paris

20 min.

Géométrie des molécules

MPSI-PCSI-PTSI

1. Donner les configurations électroniques de l'aluminium, du chlore et de l'oxygène dans leurs états fondamentaux.
En déduire les formules de Lewis de ${}_{13}\text{Al}$, Al^- , ${}_{17}\text{Cl}$, Cl^+ , ${}_{8}\text{O}$ et O^+ .
2. Le chlorure d'aluminium peut exister sous forme de monomère (AlCl_3) ou de dimère (Al_2Cl_6) selon le solvant utilisé.
 - (a) Donner la structure de Lewis de AlCl_3 qui respecte la règle de l'octet ; quelle est la géométrie de cette molécule ?
 - (b) Donner, dans les mêmes conditions de respect de la règle de l'octet la formule de Lewis de Al_2Cl_6 .
 - (c) Justifier pourquoi le monomère peut être stabilisé par l'oxyde de diéthyle ($\text{H}_3\text{C} - \text{O} - \text{CH}_3$) et dire sous quelle forme se trouve le chlorure d'aluminium dans l'hexane (C_6H_{14}).

● 389 ————— Concours « Agro »

20 min.

Géométrie des molécules

MPSI-PCSI-PTSI

1. Écrire les formules de Lewis de l'ammoniac (NH_3) et de l'acide nitrique HNO_3 (ou HONO_2).
2. Donner la géométrie (V.S.E.P.R.) de ces deux molécules autour de l'atome d'azote.
3. Écrire l'équation de la réaction entre l'ammoniac et l'acide nitrique.
4. Au cours de la synthèse de l'acide nitrique, les composés suivants apparaissent à des étapes différentes : NO , NO_2 , N_2O_4 , HNO_2 (ou HONO).
 - (a) Donner le nom de ces composés.
 - (b) Donner les structures de Lewis et les géométries (V.S.E.P.R.) de ces composés, sachant qu'il n'y a pas de liaison $\text{O} - \text{O}$.
5. Donner les degrés d'oxydation des atomes d'azote dans le nitrate d'ammonium. Expliquer pourquoi ce composé est instable.

Données : numéros atomiques des éléments :

$$Z(\text{H}) = 1 \quad Z(\text{N}) = 7 \quad Z(\text{O}) = 8$$

● 390 ————— Lycée Fermat, Toulouse

15 min.

Moment dipolaire

MPSI-PCSI-PTSI

L'oxygène et le carbone peuvent s'associer pour former le monoxyde de carbone CO.

1. Donner la formule de Lewis de CO qui vérifie la règle de l'octet et préciser les charges formelles.
2. Définir la notion d'électronégativité d'un élément. La localisation des charges est-elle en accord avec les électronégativités de l'oxygène et du carbone ?
3. On mesure un moment dipolaire :

$$\vec{\mu} = \varepsilon \vec{C\ddot{O}} \text{ où } \|\vec{C\ddot{O}}\| = 0,115 \text{ nm et } \varepsilon = 4,3 \cdot 10^{-21} \text{ C}$$

Évaluer $\|\vec{\mu}\|$ en Debye en justifiant l'intérêt de cette unité.

On rappelle que $1 \text{ D} = 0,33 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$.

4. En supposant que la liaison C – O soit parfaitement ionique, évaluer la valeur théorique du moment dipolaire $\|\vec{\mu}\|_{\text{théo}}$. Définir et calculer le pourcentage ionique de la liaison C – O (la charge élémentaire vaut $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$). Faire le lien avec la formule de Lewis.

Données :

	carbone	oxygène
numéro atomique	$Z_{\text{C}} = 6$	$Z_{\text{O}} = 8$
électronégativité (eV)	$\chi_{\text{C}} = 2,5$	$\chi_{\text{O}} = 3,5$

● 391 ————— Concours de l'ENS

10 min.

Configuration électronique des molécules

PCSI

1. Représenter les diagrammes d'énergie des orbitales moléculaires du dioxygène (O_2) et du diazote (N_2), construits à partir des orbitales atomiques des deux atomes d'oxygène ou d'azote liés. On précisera :
 - le nom et la nature (liante, non liante, anti-liante) des orbitales ;
 - la répartition des électrons dans les orbitales ;
 - l'indice de liaison dans les molécules de diazote et de dioxygène.
2. Quels changements d'indice de liaison – et donc de distance interatomique – accompagnent les processus d'ionisation suivants ?



On rappelle les numéros atomiques de l'oxygène : $Z_{\text{O}} = 8$ et de l'azote : $Z_{\text{N}} = 7$.

● 392 Concours Polytechnique

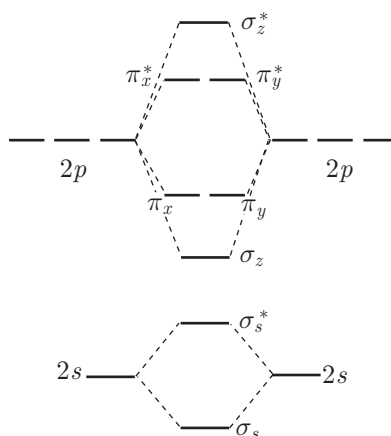
10 min.

PCSI

Configuration électronique des molécules

Le terme « dioxygène singulet », noté $^1\text{O}_2$, désigne le premier état excité de la molécule de dioxygène ; il possède un excès d'énergie par rapport au dioxygène fondamental (« triplet ») noté $^3\text{O}_2$ ou plus simplement O_2 . Les propriétés des états électroniques excités du dioxygène peuvent s'interpréter correctement en utilisant le diagramme des orbitales moléculaires de O_2 .

- Rappeler la configuration électronique de l'atome d'oxygène ($Z = 8$).
- On donne ci-dessous le diagramme simplifié des orbitales moléculaires diatomiques homonucléaires constituées à partir des éléments de la deuxième ligne de la classification périodique :



Préciser l'occupation de chacune des orbitales dans l'état fondamental de la molécule O_2 . Calculer l'indice de liaison associé à cette dernière.

- L'écriture de Lewis de la molécule O_2 respectant la règle de l'octet est-elle en accord avec la configuration électronique précédente ?
- Quelles configurations électroniques proches en énergie peut-on envisager *a priori* pour $^1\text{O}_2$?

● 393 Concours ENSI

15 min.

PCSI

Configuration électronique des molécules

- Construire le diagramme d'orbitales moléculaires pour la molécule O_2 ($Z = 8$) ; seules seront prises en compte les orbitales de valence.

Remarque : dans le cas de la molécule de dioxygène, les orbitales atomiques se combinent deux à deux avec une bonne approximation ; en particulier, il n'y a pas lieu d'envisager d'interaction entre l'orbitale $2s$ de l'un des atomes et l'une des orbitales $2p$ de l'autre.

- Cette molécule est-elle paramagnétique ou diamagnétique ?

3. Calculer les indices de liaison pour la molécule O_2 et pour les ions moléculaires O_2^- , O_2^{2-} et O_2^+ , sachant que l'indice de liaison, dans le cas d'une molécule homonucléaire diatomique, peut être défini simplement par : $\frac{N_{\text{liants}} - N_{\text{anti-liants}}}{2}$ où N_{liants} et $N_{\text{anti-liants}}$ sont respectivement les nombres d'électrons peuplant les orbitales moléculaires liantes et anti-liantes.

Justifier les valeurs expérimentales des longueurs de liaison données ci-après :

Espèce chimiques	O_2^{2-}	O_2^-	O_2	O_2^+
d (en pm)	149	126	121	112

● 394 Concours e3a

20 min.

PCSI

Configuration électronique des molécules

I- Représentation de Lewis

- Proposer une structure de Lewis du dioxygène O_2 ($Z_O = 8$).
 - Que savez-vous des propriétés magnétiques du dioxygène ?
- Pourriez-vous proposer une structure de Lewis qui rende compte de ces propriétés magnétiques ?
 - Au vu de cette structure, justifier la grande réactivité du dioxygène.
- Expérimentalement, on mesure la susceptibilité magnétique du dioxygène. On accède ainsi au moment magnétique $\mu = \sqrt{m(m+2)} \mu_B$, où μ_B est le magnéton de Bohr :

$$\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$$

- Calculer m sachant que $\mu = 2,59 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$.
- En vous aidant de la question 2.(a), à quelle caractéristique de la molécule reliez-vous m ?

II- Diagramme d'orbitales moléculaires (O.M.)

- Quelles sont les orbitales atomiques (O.A.) de valence en interaction ?
- Dresser qualitativement le diagramme d'orbitales moléculaires (O.M.) en notant y l'axe internucléaire. Donner simplement la forme des O.M.
- Effectuer le remplissage électronique.
 - Justifier la présence d'électrons « célibataires ».
 - Faire le lien avec la question I- 3.(b).

● 348 QCM

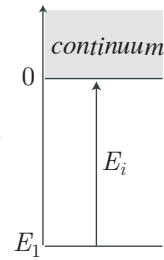
L'énergie d'un électron de l'atome d'hydrogène est quantifiée par : $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ où E_0 désigne une constante et $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque l'atome d'hydrogène est stable, l'électron adopte son énergie minimale (pour $n = 1$) : $E_{\min} = -E_0$, tandis que l'électron s'échappe de l'atome dès que l'électron adopte l'énergie $E_\infty = 0$ (l'électron passe alors dans le *continuum*, où il se libère de l'attraction du noyau).

Pour ioniser l'atome d'hydrogène depuis son état fondamental, il faut par conséquent lui communiquer une énergie :

$$E_{\text{ion}} = \underbrace{E_\infty}_{=0} - E_1 \Rightarrow E_{\text{ion}} = E_0$$

Ce faisant, la différence d'énergie entre le premier et le deuxième niveau électronique vaut :

$$\Delta E = E_2 - E_1 = -\frac{E_0}{4} + E_0 = E_0 \times \frac{3}{4}$$



c'est-à-dire :

$$\Delta E = \frac{3}{4} E_{\text{ion}} = \frac{3}{4} \times 2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} \Rightarrow \Delta E = 1,635 \cdot 10^{-18} \text{ (réponse b).}$$

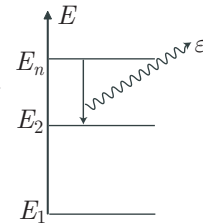
● 349 Concours Centrale-Supélec

1. L'existence d'un spectre discret des rayonnements émis par l'atome d'hydrogène s'interprète aisément si l'on suppose que l'énergie d'un électron est quantifiée selon la loi :

$$E_n = \frac{K}{n^2}$$

où K est une constante. Ce faisant, l'énergie de l'état fondamental de l'hydrogène vaut :

$$E_1 = K = -E_0 \Rightarrow E_n = -\frac{E_0}{n^2}$$



Aussi, au cours d'une transition d'un niveau d'énergie E_n vers le niveau d'énergie E_2 , un électron émet un rayonnement d'énergie $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ telle que :

$$\begin{aligned} \varepsilon = E_n - E_2 &\Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = -\frac{E_0}{n^2} + \frac{E_0}{4} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hc} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = A \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ avec } A = \frac{E_0}{hc} \end{aligned}$$

2. La valeur limite λ_∞ de λ est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{A}{4} \Rightarrow A = \frac{4}{\lambda_\infty} = \frac{4}{364,56 \cdot 10^{-9}} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

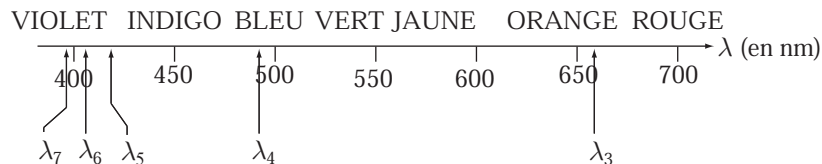
Il est possible de déterminer :

$$\frac{1}{\lambda} = A \times f(n) \text{ où } f(n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}$$

pour diverses valeurs de $n > 2$:

n	3	4	5	6	7	...	∞
$f(n)$	0,139	0,187	0,210	0,222	0,230	...	0,250
$1/\lambda$ (10^6 m^{-1})	1,524	2,057	2,304	2,438	2,519	...	2,743
λ (nm)	656,21	486,08	434,00	410,13	396,96	...	364,56
λ_n	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7	...	λ_∞

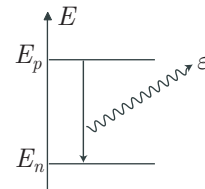
Sachant que la lumière visible correspond à des rayonnements de longueurs d'onde comprises entre 400 et 700 nm, seules les cinq premières longueurs d'onde sont visibles :



● **350** ————— **Lycée Fabert, Metz**

1. Lorsque l'électron passe d'un niveau d'énergie E_p à un niveau d'énergie $E_n < E_p$, il émet un rayonnement d'énergie $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, telle que :

$$\begin{aligned} \varepsilon = E_p - E_n &\Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = E_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \\ &\Rightarrow \sigma = \frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hc} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \end{aligned}$$



avec :

$$\frac{E_0}{hc} = \frac{13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{6,61 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Or, sachant que $1 \text{ m}^{-1} = (100 \text{ cm})^{-1} = 10^{-2} \text{ cm}^{-2}$, ce résultat devient :

$$\sigma = \mathcal{R}_H \times \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \text{ avec } \mathcal{R}_H = 1,097 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1}$$

2. La série de Balmer est caractérisée par :

$$n = 2 \Rightarrow \sigma = \mathcal{R}_H \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{p^2} \right) \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{p^2} = \frac{\sigma}{\mathcal{R}_H} \Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{1}{4} - \frac{\sigma}{\mathcal{R}_H}$$

c'est-à-dire, compte tenu des valeurs observées pour σ :

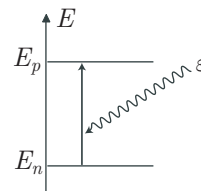
σ (cm ⁻¹)	15 250	20 570	23 040	24 380
$1/p^2$	0,111	0,062	0,040	0,028
p	3	4	5	6

● 351 ————— Lycée Condorcet, Paris

1. L'énergie de l'atome d'hydrogène est quantifiée par la relation : $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$, où :

$$\begin{aligned} E_0 &= \frac{me^4}{8\varepsilon_0 h^2} = \frac{m}{8\varepsilon_0} \times \left(\frac{e^2}{h}\right)^2 \\ &= \frac{9,11 \cdot 10^{-31}}{8 \times 8,854 \cdot 10^{-12}} \times \left[\frac{(1,602 \cdot 10^{-19})^2}{6,626 \cdot 10^{-34}}\right]^2 \\ &\simeq 2,179 2 \cdot 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

Par suite, pour effectuer une transition d'un niveau d'énergie $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$ vers un niveau d'énergie $E_p = -\frac{E_0}{p^2}$, l'électron doit absorber l'énergie $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda_{np}}$ d'un rayonnement électromagnétique, telle que :



$$\begin{aligned} \varepsilon = E_p - E_n &\Rightarrow \frac{hc}{\lambda_{np}} = E_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) \text{ avec } p > n \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{np}} = \frac{E_0}{hc} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) \end{aligned}$$

où l'on reconnaît la formule de Ritz :

$$\frac{1}{\lambda_{np}} = \mathcal{R}_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)$$

qui introduit la constante de Rydberg de l'atome d'hydrogène :

$$\mathcal{R}_H = \frac{E_0}{hc} = \frac{2,179 2 \cdot 10^{-18}}{6,626 \cdot 10^{-34} \times 2,998 \cdot 10^8} \Rightarrow \mathcal{R}_H = 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

2. La série de Lyman est caractérisée par $n = 1$, auquel cas son spectre d'absorption (ou d'émission) suit la formule de Ritz :

$$\frac{1}{\lambda_{1p}} = \mathcal{R}_H \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) = \mathcal{R}_H \times \frac{p^2 - 1}{p^2} \text{ avec } p \geq 2$$

La condition $p \geq 2$ montre qu'il existe deux raies limites pour cette série :

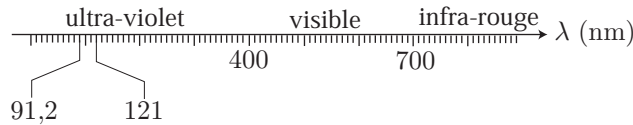
• Si $p = 2$:

$$\frac{1}{\lambda_{12}} = \mathcal{R}_H \times \frac{3}{4} \Rightarrow \lambda_{12} = \frac{4}{3 \times 1,097 \cdot 10^7} \Rightarrow \lambda_{12} = 121 \text{ nm}$$

- Si p tend vers l'infini :

$$\frac{1}{\lambda_{1\infty}} = \mathcal{R}_H \Rightarrow \lambda_{1\infty} = \frac{1}{1,097 \cdot 10^7} \Rightarrow \lambda_{1\infty} = 91,2 \text{ nm}$$

Le spectre de la lumière visible s'étendant entre 400 nm et 700 nm :



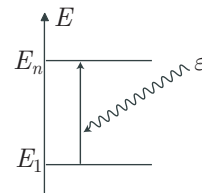
les rayonnements de la série de Lyman sont tous situés dans le domaine de l'ultra-violet.

● **352** Université Paris-Sud

1. En absorbant l'énergie $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ apportée par le rayonnement électromagnétique, l'énergie électronique de l'atome d'hydrogène passe de la valeur $E_1 = -E_0$ (avec $E_0 = 13,6 \text{ eV}$) à la valeur $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$, telle que :

$$E_n - E_1 = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow E_0 \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{hc}{\lambda E_0}$$

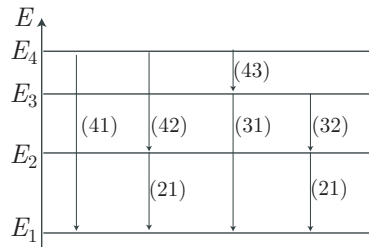


Application numérique :

$$\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{97,35 \cdot 10^{-9} \times 13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}} \simeq 6,25 \cdot 10^{-2}$$

$$\Rightarrow n = \frac{1}{\sqrt{0,0625}} = 4$$

2. Depuis le niveau d'énergie $n = 4$, l'électron présente trois manières de se désexciter jusqu'au niveau fondamental :



À chaque transition d'un niveau d'énergie E_n vers un niveau d'énergie E_p infé-

rière, l'atome d'hydrogène émet une radiation de longueur d'onde λ_{np} telle que :

$$\begin{aligned}\frac{hc}{\lambda_{np}} &= E_n - E_p = E_0 \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) \text{ avec } n > p \\ &= E_0 \times \frac{n^2 - p^2}{n^2 p^2} \\ \Rightarrow \lambda_{np} &= \frac{hc}{E_0} \times \frac{n^2 p^2}{n^2 - p^2}\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\lambda_{np} = \frac{hc}{E_0} \times \alpha_{np} \text{ avec } \alpha_{np} = \frac{n^2 p^2}{n^2 - p^2}$$

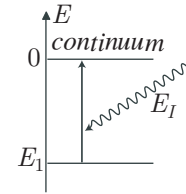
et $E_0 = 13,6 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,176 \cdot 10^{-18}$ J. Les longueurs d'onde ainsi obtenues valent :

(n, p)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(3, 1)	(3, 2)	(2, 1)
α_{np}	16/15	16/3	144/7	9/8	36/5	4/3
λ_{np} (nm)	97,35	486,76	1 877,52	102,68	657,13	121,69

3. L'atome d'hydrogène, dans son état le plus stable, possède un électron d'énergie :

$$E_1 = -13,6 \text{ eV}$$

Pour ioniser cet atome, il convient d'imposer la quantité d'énergie E_I nécessaire pour permettre à l'électron d'atteindre le *continuum* d'énergie positive. Par conséquent :



$$E_I = 0 - E_1 = 13,6 \text{ eV}$$

● 353 ————— Lycée Louis-le-Grand, Paris

1. (a) Si la force électrostatique :

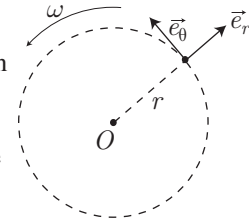
$$\vec{f} = \frac{q_n q_e}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

est la seule force subie par l'électron, la loi fondamentale de la dynamique impose :

$$m\vec{\gamma} = \vec{f}$$

où les composantes polaires de l'accélération s'écrivent :

$$\begin{cases} \gamma_r = \ddot{r} - r\omega^2 = -r\omega^2 \\ \gamma_\theta = 2\dot{r}\omega + r\dot{\omega} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{car } r = \text{cte et } \omega = \text{cte}$$



Par suite, la loi fondamentale de la dynamique devient :

$$mr\omega^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \omega^2 = \frac{e^2}{4\pi m\epsilon_0 r^3} \quad (9)$$

(b) En coordonnées polaires, la vitesse de l'électron :

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r\omega \vec{e}_\theta = r\omega \vec{e}_\theta \quad (10)$$

conduit à l'expression de son énergie cinétique :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2$$

c'est-à-dire, compte tenu de la relation (9)

$$\mathcal{E}_c = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (11)$$

(c) Au cours d'un déplacement élémentaire :

$$d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

la force électrostatique exerce un travail :

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \left(\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \right) \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta) = \frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \times \frac{dr}{r^2} \\ \Rightarrow d\mathcal{E}_p &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \frac{dr}{r^2} \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{r^2} \\ \Rightarrow \mathcal{E}_p &= -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \times \frac{1}{r} + K \end{aligned}$$

où K est une constante qui rend compte de l'hypothèse :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{E}_p = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + K \right) = 0 \Rightarrow K = 0$$

ce qui donne finalement :

$$\mathcal{E}_p = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (12)$$

Ainsi, l'énergie mécanique de l'électron est donnée par :

$$E = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow E = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 r} \quad (13)$$

2. L'expression (10) de la vitesse de l'électron :

$$\vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta \Rightarrow v = |\vec{v}| = r\omega$$

donne à l'hypothèse de Bohr la forme suivante :

$$mvr = n \times \frac{h}{2\pi} \Rightarrow mr^2\omega = n \times \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \omega = n \times \frac{h}{2\pi mr^2}$$

Par suite, l'identité (9) conduit à :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \frac{e^2}{4\pi m \epsilon_0 r^3} \Rightarrow n^2 \times \frac{h^2}{4\pi^2 m^2 r^4} = \frac{e^2}{4\pi m \epsilon_0 r^3} \\ \Rightarrow \frac{r^4}{r^3} &= n^2 \times \frac{h^2}{4\pi^2 m^2} \times \frac{4\pi m \epsilon_0}{e^2} = n^2 \times \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e^2} \end{aligned}$$

soit encore :

$$r = n^2 \times r_0 \text{ avec } r_0 = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m e^2} \quad (14)$$

Application numérique :

$$r_0 = \frac{(6,62 \cdot 10^{-34})^2 \times 8,85 \cdot 10^{-12}}{\pi \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times (1,6 \cdot 10^{-19})^2} \Rightarrow r_0 = 0,53 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Quant à l'énergie mécanique, son expression (13) devient ainsi :

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0} \times \frac{1}{n^2} \times \frac{\pi m e^2}{h^2 \varepsilon_0} = -\frac{1}{n^2} \times \frac{m e^4}{8 h^2 \varepsilon_0^2}$$

c'est-à-dire :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \text{ où } E_0 = \frac{m e^4}{8 h^2 \varepsilon_0^2} \quad (15)$$

Application numérique :

$$E_0 = \frac{1}{8} \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times \left[\frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{6,62 \cdot 10^{-34} \times 8,85 \cdot 10^{-12}} \right]^2 \Rightarrow E_0 = 2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

Or, sachant que :

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} \Rightarrow 1 \text{ J} = \frac{1}{1,6 \cdot 10^{-19}} \text{ eV}$$

la valeur numérique de E_0 est aussi donnée par :

$$E_0 = \frac{2,17 \cdot 10^{-18}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \Rightarrow E_0 = 13,6 \text{ eV}$$

3. Dans un ion hydrogénoïde, l'électron est soumis à la force électrostatique :

$$\vec{f}_e = \frac{q_n q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r = -\frac{Z e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

tandis que dans l'atome d'hydrogène, cette force vaut :

$$\vec{f}_e = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

C'est pourquoi on passe de l'atome d'hydrogène à l'ion hydrogénoïde en remplaçant e^2 par $Z e^2$, ce qui donne, compte tenu des résultats (14) et (15) :

$$r = n^2 \times \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m \times Z e^2} = \frac{n^2}{Z} \times \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m e^2} \Rightarrow r = \frac{n^2}{Z} \times r_0$$

et :

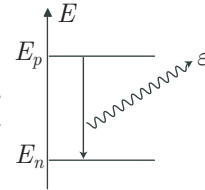
$$E_n = -\frac{1}{n^2} \times \frac{m (Z e^2)^2}{8 h^2 \varepsilon_0^2} = -\frac{Z^2}{n^2} \times \frac{m e^4}{8 h^2 \varepsilon_0^2} \Rightarrow E_n = -\frac{Z^2}{n^2} \times E_0$$

● **354** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

1. L'énergie de l'électron d'un ion hydrogénoïde, de numéro atomique Z , vérifie la loi :

$$E_n = -E_0 \times \frac{Z^2}{n^2}$$

Aussi, lorsque l'électron passe d'un niveau d'énergie E_p vers un niveau d'énergie E_n , l'atome libère un rayonnement d'énergie $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, telle que :



$$\begin{aligned} \varepsilon = E_p - E_n &\Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = Z^2 E_0 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{Z^2 E_0}{hc} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant :

$$\mathcal{R}_{\text{Li}} = \frac{Z^2 E_0}{hc} = \frac{9 \times 2,176 \cdot 10^{-18}}{6,61 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8} \Rightarrow \mathcal{R}_{\text{Li}} = 9,876 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

on obtient :

$$\frac{1}{\lambda} = \mathcal{R}_{\text{Li}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \quad (16)$$

2. (a) Étant donné que $\frac{1}{p^2}$ est positif :

$$\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \mathcal{R}_{\text{Li}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right) \leq \frac{\mathcal{R}_{\text{Li}}}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \leq \frac{\mathcal{R}_{\text{Li}}}{n^2}$$

ce qui traduit l'existence d'une longueur d'onde λ_{\min} telle que :

$$\lambda \geq \lambda_{\min} \text{ avec } \lambda_{\min} = \frac{n^2}{\mathcal{R}_{\text{Li}}}$$

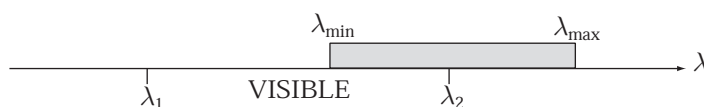
En outre, la contrainte : $p > n \Rightarrow p \geq n + 1$ conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} &\geq \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2 (n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \geq \mathcal{R}_{\text{Li}} \times \frac{2n+1}{n^2 (n+1)^2} \end{aligned}$$

ce qui suffit à prouver qu'il existe une valeur λ_{\max} telle que :

$$\lambda \leq \lambda_{\max} \text{ avec } \lambda_{\max} = \frac{n^2 (n+1)^2}{(2n+1) \mathcal{R}_{\text{Li}}}$$

- (b) Pour que le rayonnement émis soit visible, il est nécessaire que λ_{\min} soit inférieur à $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$.

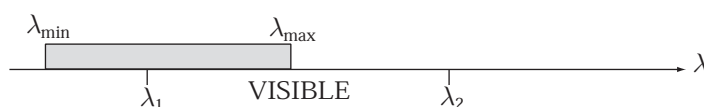


Cette condition impose également :

$$\frac{n^2}{\mathcal{R}_{\text{Li}}} < \lambda_2 \Rightarrow n < \sqrt{\mathcal{R}_{\text{Li}} \times \lambda_2} = \sqrt{9,876 \cdot 10^7 \times 700 \cdot 10^{-9}}$$

$$\Rightarrow n \leq 8$$

(c) De même, pour que le rayonnement soit visible, il faut que λ_{max} soit supérieur à $\lambda_1 = 400 \text{ nm}$:



ce qui s'écrit aussi :

$$\lambda_{\text{max}} = \frac{n^2 (n+1)^2}{(2n+1) \mathcal{R}_{\text{Li}}} \geq \lambda_1 \Rightarrow \frac{n^2 (n+1)^2}{2n+1} \geq \lambda_1 \times \mathcal{R}_{\text{Li}} = 400 \cdot 10^{-9} \times 9,876 \cdot 10^7$$

$$\Rightarrow \frac{n^2 (n+1)^2}{2n+1} \geq 40$$

Il convient alors de calculer la grandeur $A_n = \frac{n^2 (n+1)^2}{2n+1}$ pour les premières valeurs de n :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
A_n	1,3	7,2	20,6	44,4	81,8	135,7	209,1	305

Il apparaît ainsi que le rayonnement est visible si $n \geq 4$.

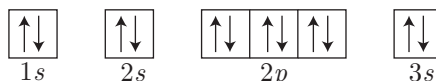
(d) Les calculs précédents montrent que le rayonnement, décrit par la loi :

$$\frac{1}{\lambda} = \mathcal{R}_{\text{Li}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$$

génère cinq séries (pour $n = 4, 5, 6, 7$ ou 8) de spectres visibles.

● 355 ————— Lycée Pissaro, Pontoise

1. Les 12 électrons du magnésium se répartissent sur les niveaux $1s, 2s, 2p, 3s$:



Cette structure finissant par $3s^2$, la couche externe a pour nombre quantique principal : $n = 3$ et elle possède deux électrons.

En outre, la lettre s montre que le nombre quantique orbital prend la valeur $\ell = 0$; ce faisant, le nombre quantique magnétique ($-\ell \leq m_\ell \leq +\ell$) ne prend que la valeur $m_\ell = 0$. Enfin, les deux électrons du niveau $3s$ doivent se distinguer par la

valeur de leur nombre de *spin* : $m_s = \pm \frac{1}{2}$, conformément au principe d'exclusion de Pauli. Il s'ensuit que ces électrons ont pour nombres quantiques (n, ℓ, m_ℓ, m_s) :

$$\left(3, 0, 0, \frac{1}{2}\right) \text{ et } \left(3, 0, 0, -\frac{1}{2}\right)$$

2. La couche externe peut perdre ses deux électrons pour former l'ion :

$$\text{Mg}^{2+} \text{ de configuration : } 1s^2 2s^2 2p^6.$$

● 356 ————— Concours Centrale - Supélec

1. Les trois nombres qui caractérisent un état quantique sont :

- le nombre quantique principal : $n \in \mathbb{N}^*$;
- le nombre quantique orbital ℓ , entier compris entre 0 et $n - 1$;
- le nombre quantique magnétique m_ℓ , entier relatif compris entre $-\ell$ et $+\ell$.

2. Les états $3d$ et $4p$ ont pour nombres quantiques principaux $n = 3$ et $n = 4$. En outre, les valeurs numériques de ℓ (0, 1, 2, 3...) sont associées aux lettres ($s, p, d, f \dots$). C'est pourquoi les deux états proposés sont :

$$3d (n = 3, \ell = 2) \text{ et } 4p (n = 4, \ell = 1)$$

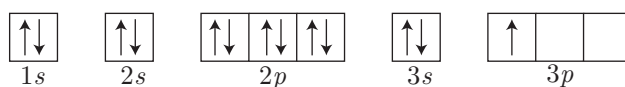
3. Une orbitale de type p correspond au nombre $\ell = 1$, auquel cas m_ℓ peut prendre les valeurs :

$$m_\ell \in \{-1, 0, +1\} \text{ pour un état } p.$$

De même, une orbitale de type d est associée à $\ell = 2$ et c'est pourquoi :

$$m_\ell \in \{-2, -1, 0, +1, +2\} \text{ pour un état } d.$$

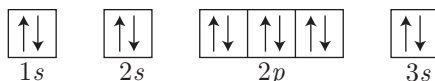
4. La configuration électronique de ${}_{13}\text{Al}$ s'obtient en répartissant 13 électrons dans les orbitales atomiques $1s, 2s, 2p, 3s$ et $3p$:



ce qui fournit :

$${}_{13}\text{Al} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$$

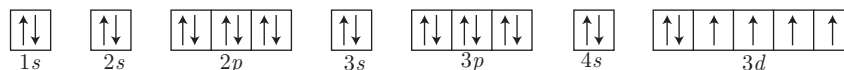
5. La configuration électronique de ${}_{12}\text{Mg}$ s'obtient de la même manière :



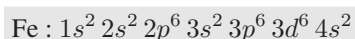
Les électrons de valence (du niveau $3s$) sont appariés de façon à saturer le niveau $3s$; cette configuration stabilise l'atome qui perd alors plus difficilement l'électron que l'aluminium. Ce dernier atome peut facilement libérer l'électron du niveau $3p$ et acquérir ainsi la même structure que Mg.

● 357 ————— Concours des Mines-Ponts

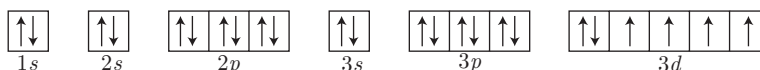
1. La configuration électronique de ${}_{26}\text{Fe}$ s'obtient d'une part en répartissant 26 électrons sur les niveaux $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d$:



et d'autre part en classant ces niveaux par ordre croissant du nombre quantique principal n :



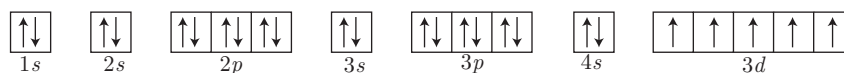
2. Le départ des deux électrons périphériques $4s$ peut s'effectuer aisément, auquel cas l'ion Fe^{2+} a pour configuration électronique :



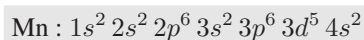
Dans cette structure, le départ d'un électron supplémentaire du niveau $3d$ permet de stabiliser ce niveau (alors à moitié saturé). On obtient ainsi : l'ion Fe^{3+} .

● 358 ————— Concours Centrale-Supélec

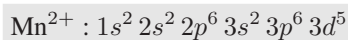
1. Il s'agit de répartir 25 électrons sur les niveaux $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s$ et $3d$ en respectant les diverses règles de remplissage de ces niveaux :



ce qui donne, après classement de ces niveaux par nombres quantiques principaux (n) croissants :



2. Le passage de l'atome Mn à l'ion Mn^{2+} s'opère en retirant deux électrons de son cortège électronique ; les électrons de valence ($4s$) sont ainsi affectés et la structure électronique de l'ion Mn^{2+} est :



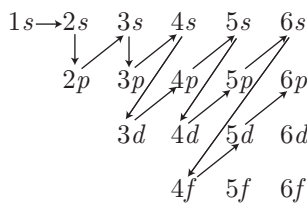
⚠ Cet exemple illustre la nécessité de ranger, dans la configuration électronique, les niveaux par ordre croissant du nombre quantique principal. Si cette opération avait été négligée, la structure de Mn ($1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^5$) aurait conduit à proposer, pour Mn^{2+} , la configuration erronée : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^3$.

● 359 ————— Concours ENSTIM

1. Pour établir une configuration électronique riche en électrons ($Z = 53$ pour l'iode), il convient de procéder comme suit :

- ranger les niveaux quantiques par énergie croissante, de manière à obtenir :

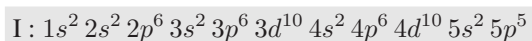
$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, 4d, 5p, 6s, \dots$



- faire apparaître, dans un même tableau, les niveaux électroniques, le nombre *maximum* (n_{\max}) que chacun d'eux peut contenir et leur somme (cumul) depuis le niveau $1s$:

	1s	2s	2p	3s	3p	4s	3d	4p	5s	4d	5p	6s	...
n_{\max}	2	2	6	2	6	2	10	6	2	10	6	2	...
cumul	2	4	10	12	18	20	30	36	38	48	54	56	...

- remarquer que le remplissage du niveau $5p$ correspond aux niveaux quantiques des éléments dont le numéro atomique est compris entre $Z = 49$ et $Z = 54$. Aussi, l'iode possède 5 électrons sur le niveau $5p$.
- présenter la configuration en classant les niveaux par ordre croissant du nombre quantique principal n :



2. La configuration électronique de I révèle la présence de 7 électrons sur les niveaux $5s$ et $5p$ de plus grand nombre quantique principal ($n = 5$). C'est pourquoi :

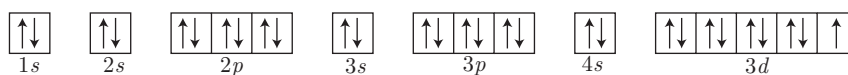
l'iode possède 7 électrons de valence.

3. Le nombre quantique secondaire (ou orbital) ℓ prend des valeurs associées à des lettres (0 pour s , 1 pour p et 2 pour d). Or, la configuration électronique précédente montre que les niveaux $3d$ et $4d$ contiennent chacun 10 électrons, en conséquence de quoi :

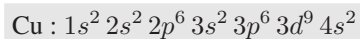
l'iode possède 20 électrons de nombre quantique $\ell = 2$.

● 360 ————— Concours Centrale - Supélec

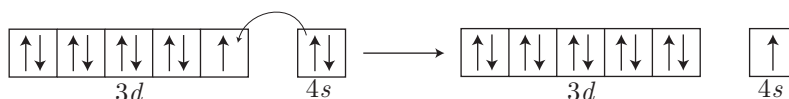
1. La règle de Klechkowski précise que les électrons saturent les niveaux de moindre énergie avant de remplir les niveaux d'énergie supérieure. Selon cette règle, les 29 électrons du cuivre se répartissent sur les niveaux $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s$ et $3d$ de la manière suivante :



Aussi, conformément à la règle de Klechkowski, le cuivre devrait présenter la configuration électronique :



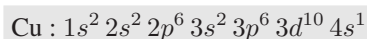
2. Le cuivre transgresse cependant cette règle : un électron du niveau $4s$ occupe une orbitale $3d$, de manière à saturer ce niveau :



Cette configuration stabilise l'atome de cuivre car :

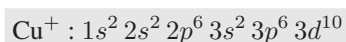
- les niveaux $3d$ sont tous saturés ;
- le niveau $4s$ est à moitié saturé.

C'est pourquoi le cuivre adopte finalement la configuration électronique :



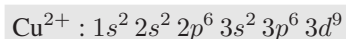
3. Les deux configurations envisagées précédemment pour le cuivre permettent d'en prévoir la structure des principaux ions :

- La configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^{10} 4s^1$ suggère le départ de l'électron $4s$ pour former l'ion :



notamment, dans l'oxyde Cu_2O .

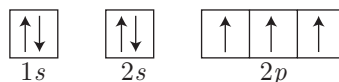
- La configuration $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^9 4s^2$ prédit le départ de deux électrons afin de former l'ion :



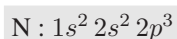
présent, notamment, dans l'oxyde CuO .

● 361 Concours e3a

1. (a) Les 7 électrons de l'atome d'azote se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$ et $2p$:

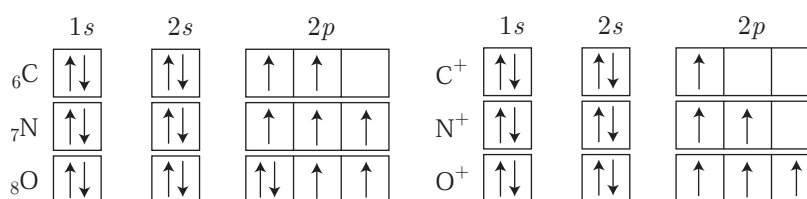


ce qui lui donne la configuration électronique :



(b) Cette configuration montre que les électrons de valence de l'azote sont ceux qui occupent les niveaux $2s$ et $2p$.

2. (a) Comparons les configurations électroniques des atomes C, N et O avec celles de leurs ions respectifs C^+ , N^+ et O^+ :



Cette comparaison montre que l'ionisation de l'azote : $\text{N} \rightarrow \text{N}^+ + e^-$ s'accompagne d'une déstabilisation des niveaux $2p$ (à moitié saturés dans N, ils présentent une lacune dans N^+) ; cette opération requiert donc une énergie d'ionisation E_{N} importante. En revanche, l'ionisation de l'oxygène : $\text{O} \rightarrow \text{O}^+ + e^-$ produit des orbitales $2p$ à moitié saturées et donc une configuration plus stable que celle de N^+ ; l'énergie d'ionisation requise au cours de cette opération est par conséquent plus faible que E_{N} . Ces remarques justifient l'évolution non monotone observée pour les énergies d'ionisation :

$$E_C < E_O < E_N \text{ alors que } Z(C) < Z(N) < Z(O)$$

- (b) Pour ioniser un atome d'azote, il faut lui apporter une énergie au moins égale à E_N ; celle-ci peut être apportée par un rayonnement de longueur d'onde λ et donc d'énergie $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ telle que :

$$\varepsilon \geq E_N \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} \geq E_N \Rightarrow \lambda \leq \frac{hc}{E_N}$$

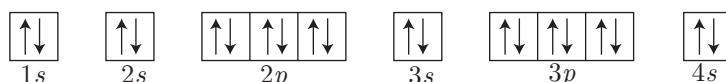
Application numérique :

En exprimant E_N en joules : $E_N = 14,5 \times 1,6 \cdot 10^{-19} = 2,32 \cdot 10^{-18} \text{ J}$, on obtient :

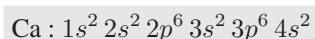
$$\lambda \leq \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \times 3 \cdot 10^8}{2,32 \cdot 10^{-18}} \Rightarrow \lambda \leq 8,53 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

● 362 ————— Lycée Chateaubriand, Rennes

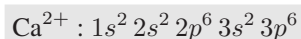
1. Les 20 électrons du calcium se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$ et $4s$:



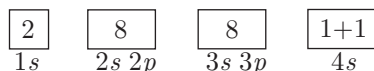
d'où découle la configuration électronique :



sous forme ionique, le calcium se rencontre alors sous la forme :



2. La configuration électronique du calcium peut aussi se présenter comme suit :



ce qui permet le calcul de la constante d'écran d'un électron du niveau $4s$:

$$\begin{aligned} \sigma_{4s} &= 2\sigma_{1s/4s} + 8\sigma_{2s2p/4s} + 8\sigma_{3s3p/4s} + 1 \times \sigma_{4s/4s} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 0,85 + 0,35 = 17,15 \\ \Rightarrow Z_{4s}^* &= Z - \sigma_{4s} = 20 - 17,15 = 2,85 \end{aligned}$$

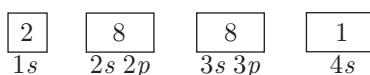
Un tel électron possède donc une énergie :

$$\varepsilon_{4s} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{4s}^*}{n^*} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{2,85}{3,7} \right)^2 = -8,07 \text{ eV}$$

Aussi, en notant \mathcal{E}_0 l'énergie des électrons de cœur (sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$) et en remarquant que deux électrons présentent la même énergie ε_{4s} , l'énergie du calcium vaut :

$$E(\text{Ca}) = \mathcal{E}_0 - 2 \times 8,07 = \mathcal{E}_0 - 16,14 \text{ (eV)} \quad (17)$$

De même, la configuration électronique de l'ion Ca^+ :



montre que l'électron du niveau 4s a pour facteur d'écran :

$$\begin{aligned} \sigma'_{4s} &= 2\sigma_{1s/4s} + 8\sigma_{2s2p/4s} + 8\sigma_{3s3p/4s} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 0,85 = 16,8 \\ \Rightarrow Z_{4s}^* &= Z - \sigma'_{4s} = 20 - 16,8 = 3,2 \end{aligned}$$

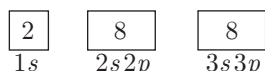
d'où découle son énergie :

$$\varepsilon'_{4s} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{4s}^*}{n^*} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{3,2}{3,7} \right)^2 = -10,17 \text{ eV}$$

Outre l'énergie \mathcal{E}_0 des électrons de cœur, ε'_{4s} participe à l'énergie de l'ion Ca^+ :

$$E(\text{Ca}^+) = \mathcal{E}_0 - 10,17 \text{ (eV)} \quad (18)$$

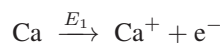
Enfin, la structure électronique de l'ion Ca^{2+} :



montre que l'énergie de cet ion provient de celle des électrons de cœur :

$$E(\text{Ca}^{2+}) = \mathcal{E}_0 \quad (19)$$

L'énergie de première ionisation, E_1 , est celle qu'il faut fournir pour effectuer la réaction :



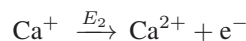
ce qui montre que :

$$E(\text{Ca}^+) = E(\text{Ca}) + E_1 \Rightarrow E_1 = E(\text{Ca}^+) - E(\text{Ca})$$

soit, compte tenu des résultats (17) et (18) :

$$E_1 = (\mathcal{E}_0 - 10,17) - (\mathcal{E}_0 - 16,14) \Rightarrow E_1 = 5,97 \text{ eV}$$

De la même manière, pour réaliser la seconde ionisation :



il faut apporter une énergie E_2 telle que :

$$E(\text{Ca}^{2+}) = E(\text{Ca}^+) + E_2 \Rightarrow E_2 = E(\text{Ca}^{2+}) - E(\text{Ca}^+)$$

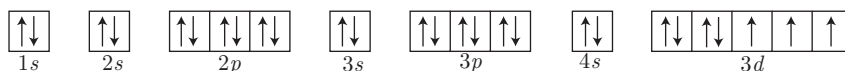
c'est-à-dire, en tenant compte des résultats (18) et (19) :

$$E_2 = \mathcal{E}_0 - (\mathcal{E}_0 - 10,17) \Rightarrow E_2 = 10,17 \text{ eV}$$

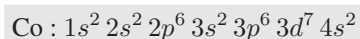
La comparaison avec les valeurs expérimentales : $E_1 = 6,11 \text{ eV}$ et $E_2 = 11,87 \text{ eV}$ révèle que le modèle de Slater donne ici de remarquables prévisions.

● **363** **Concours Filière PT**

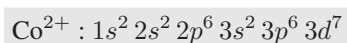
1. Les 27 électrons du cobalt se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$, $4s$ et $3d$:



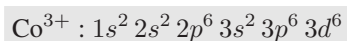
ce qui lui attribue la configuration électronique :



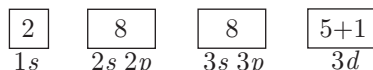
Pour devenir Co^{2+} , l'atome de cobalt perd ses deux électrons périphériques ; sa configuration devient :



De même, pour aboutir à l'ion Co^{3+} , l'ion Co^{2+} doit perdre un de ses électrons périphériques :



2. • Lorsque la configuration électronique de Co^{3+} se termine par $3d^6$, on peut dénombrer les électrons sur les différents niveaux :



Un des électrons des niveaux $3d$ subit alors l'écran σ_{3d} suivant :

$$\begin{aligned} \sigma_{3d} &= 2\sigma_{1s/3d} + 8\sigma_{2s2p/3d} + 8\sigma_{3s3p/3d} + 5\sigma_{3d/3d} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 1 + 5 \times 0,35 = 19,75 \end{aligned}$$

La charge effective du noyau perçue par un tel électron vaut alors :

$$Z^* = Z - \sigma_{3d} = 27 - 19,75 = 7,25$$

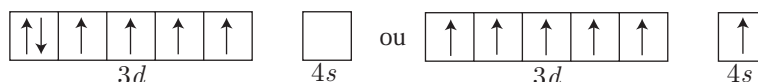
en conséquence de quoi son énergie vaut :

$$\varepsilon_{3d} = -13,6 \times \left(\frac{Z^*}{n^*}\right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{7,25}{3}\right)^2 = -79,42 \text{ eV}$$

En notant \mathcal{E}_0 l'énergie des électrons qui occupent les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$ et ε_{3d} l'énergie de chacun des 6 électrons du niveau $3d$, l'ion Co^{3+} a pour énergie :

$$E = \mathcal{E}_0 + 6 \times \varepsilon_{3d} = \mathcal{E}_0 - 476 \text{ (eV)} \quad (20)$$

- L'ion Co^{3+} peut également être supposé présenter une configuration électronique qui se termine par $3d^5 4s^1$, auquel cas la règle de Klechkowski est transgressée :



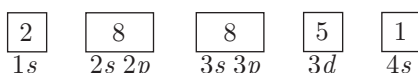
Dans ce deuxième cas, chacun des électrons du niveau $3d$ a pour constante d'écran :

$$\begin{aligned}\sigma'_{3d} &= 2\sigma_{1s/3d} + 8\sigma_{2s2p/3d} + 8\sigma_{3s3p/3d} + 4\sigma_{3d/3d} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 1 + 4 \times 0,35 = 19,4 \\ \Rightarrow Z_{3d}^* &= Z - \sigma'_{3d} = 27 - 19,4 = 7,6\end{aligned}$$

et donc pour énergie :

$$\varepsilon'_{3d} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{3d}^*}{n^*}\right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{7,6}{3}\right)^2 = -87,28 \text{ eV}$$

Quant à l'électron du niveau $4s$, il subit l'interaction des électrons situés sur tous les autres niveaux :



ce qui lui attribue pour constante d'écran :

$$\begin{aligned}\sigma'_4 &= 2\sigma_{1s/4s} + 8\sigma_{2s2p/4s} + 8\sigma_{3s3p/4s} + 5\sigma_{3d/4s} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 0,85 + 5 \times 0,85 = 21,05 \\ \Rightarrow Z_{4s}^* &= Z - \sigma'_{4s} = 27 - 21,05 = 5,95\end{aligned}$$

Son énergie vaut par conséquent :

$$\varepsilon'_{4s} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{4s}^*}{n^*}\right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{5,95}{3,7}\right)^2 = -35,17 \text{ eV}$$

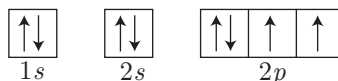
L'énergie E' du cobalt vient non seulement de l'énergie \mathcal{E}_0 des électrons des niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$ mais également de celle des 5 électrons $3d$ et de l'électron $4s$:

$$\begin{aligned}E' &= \mathcal{E}_0 + 5 \times \varepsilon'_{3d} + 1 \times \varepsilon'_{4s} \\ &= \mathcal{E}_0 - 5 \times 87,28 - 35,17 \\ \Rightarrow E' &= \mathcal{E}_0 - 472 \text{ (eV)}\end{aligned}$$

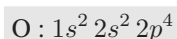
La comparaison de E et E' montre que malgré l'inégalité : $E < E'$, ces énergies demeurent cependant très voisines. C'est pourquoi les deux configurations sont envisageables (la deuxième présentant des orbitales $3d$ et $4s$ à moitié saturées).

● 364 ————— Concours e3a

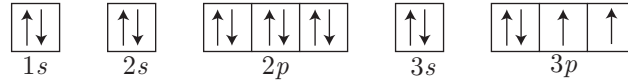
- (a) La règle de Hund précise que les électrons occupent le *maximum* d'états quantiques de même énergie avant de s'apparier.
- (b) Les 8 électrons de l'atome d'oxygène sont répartis sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$:



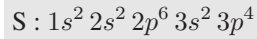
ce qui confère à l'atome la configuration électronique suivante :



De la même manière, la répartition des 16 électrons du soufre sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$ et $3p$:



est à l'origine de sa configuration électronique :



2. (a) Entre un électron de valence (\mathcal{E}) et les Z protons du noyau atomique se trouvent des électrons chargés négativement ; l'attraction de (\mathcal{E}) par le noyau se trouve diminuée par cet écran. (\mathcal{E}) semble être attiré par un noyau constitué de Z^* protons, avec :

$$Z^* = Z - \sigma$$

où σ est le facteur d'écran.

- (b) L'énergie électrostatique de deux charges q_1 et q_2 en interaction, à une distance ρ l'une de l'autre, vaut :

$$E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \rho}$$

où ϵ_0 désigne la permittivité électrique du vide.

Notamment, dans le cas où $q_1 = Z^* \times e$ représente la charge effective du noyau (celle qui exercerait la même interaction sur l'électron de valence, en l'absence des autres électrons) et $q_2 = -e$ celle de l'électron périphérique :

$$E = -\frac{Z^*}{\rho} \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

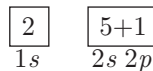
Enfin, l'électron périphérique est supposé se trouver à la distance $\rho = \frac{n^2}{Z^*} \times a_0$ du noyau, ce qui signifie également que :

$$E = -\frac{(Z^*)^2}{n^2 a_0} \times \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$$

À cette énergie potentielle de l'électron s'ajoute son énergie cinétique $E_c = -\frac{E}{2}$, à la suite de quoi l'énergie totale de l'électron vaut :

$$E_{\text{tot}} = E + E_c = \frac{E}{2} \Rightarrow E_{\text{tot}} = -\frac{(Z^*)^2}{n^2} \times E_0 \text{ avec } E_0 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0} \quad (21)$$

- (c) La configuration électronique de l'oxygène peut aussi être présentée sous la forme :



afin de faire apparaître la constante d'écran d'un électron périphérique :

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\sigma_{1s/2s2p} + 5\sigma_{2s2p/2s2p} = 2 \times 0,85 + 5 \times 0,35 = 3,45 \\ \Rightarrow Z_0^* &= Z_0 - \sigma = 8 - 3,45 \Rightarrow Z_0^* = 4,55 \end{aligned}$$

De même, la configuration électronique du soufre :

$$\begin{array}{ccc} \boxed{2} & \boxed{8} & \boxed{5+1} \\ 1s & 2s\ 2p & 3s\ 3p \end{array}$$

permet le calcul de la constante d'écran d'un électron périphérique (niveau $3p$) :

$$\begin{aligned} \sigma' &= 2\sigma_{1s/3s3p} + 8\sigma_{2s2p/3s3p} + 5\sigma_{3s3p/3s3p} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 0,85 + 5 \times 0,35 = 10,55 \\ \Rightarrow Z_S^* &= Z_S - \sigma' = 16 - 10,55 \Rightarrow Z_S^* = 5,45 \end{aligned}$$

(d) Soient \mathcal{E}_0 l'énergie des électrons de cœur de l'oxygène (niveau $1s$) et $E_1 = -\left(\frac{Z_O^*}{2}\right)^2 E_0$ celle de chacun des électrons de valence (niveaux $2s$, $2p$). Les énergies de O et de O^+ valent ainsi (avec 6 et 5 électrons de valence respectivement) :

$$E(O) = \mathcal{E}_0 + 6 E_1 \text{ et } E(O^+) = \mathcal{E}_0 + 5 E_1$$

de sorte que l'énergie d'ionisation de l'oxygène s'évalue à :

$$E_{\text{ion}}(O) = E(O^+) - E(O) = -E_1 = \left(\frac{Z_O^*}{2}\right)^2 \times E_0$$

De même, en désignant par \mathcal{E}'_0 l'énergie des électrons de cœur du soufre (niveaux $1s$, $2s$ et $2p$), l'énergie de l'atome S (avec 6 électrons de valence) et de l'ion S^+ (5 électrons de valence) :

$$E(S) = \mathcal{E}'_0 + 6 E_2 \text{ et } E(S^+) = \mathcal{E}'_0 + 5 E_2 \text{ avec } E_2 = -\left(\frac{Z_S^*}{3}\right)^2 E_0$$

conduisent à son énergie d'ionisation :

$$E_{\text{ion}}(S) = E(S^+) - E(S) = -E_2 = \left(\frac{Z_S^*}{3}\right)^2 E_0$$

Le rapport de ces deux valeurs :

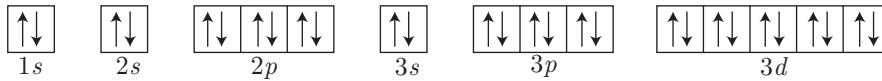
$$\frac{E_{\text{ion}}(O)}{E_{\text{ion}}(S)} = \left(\frac{Z_O^*}{2} \times \frac{3}{Z_S^*}\right) = \left(\frac{4,55}{2} \times \frac{3}{5,45}\right)^2 \Rightarrow \frac{E_{\text{ion}}(O)}{E_{\text{ion}}(S)} = 1,57$$

est comparable au rapport issu des valeurs expérimentales :

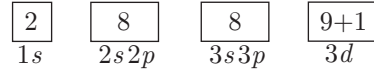
$$\frac{E_{\text{ion}}(O)}{E_{\text{ion}}(S)} = \frac{13,6}{10,4} = 1,31$$

● 365 ————— Concours de l'ESIM

Si on remplit d'abord les orbitales $3d$, les 28 électrons se répartissent successivement dans les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$ et $3d$:



soit encore :



Chacun des électrons des niveaux $3d$ subit un écran de facteur :

$$\begin{aligned} \sigma_{3d} &= 2\sigma_{1s/3d} + 8\sigma_{2s2p/3d} + 8\sigma_{3s3p/3d} + 9\sigma_{3d/3d} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 1 + 9 \times 0,35 = 21,15 \\ &\Rightarrow Z_{3d}^* = Z - \sigma_{3d} = 28 - 21,15 = 6,85 \end{aligned}$$

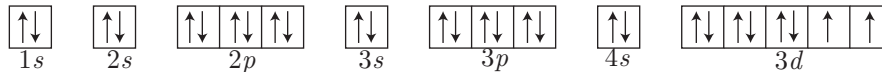
et possède une énergie :

$$\varepsilon_{3d} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{3d}^*}{n^*} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{6,85}{3} \right)^2 = -70,90 \text{ eV}$$

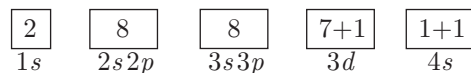
Aussi, en notant \mathcal{E}_0 l'énergie des électrons appartenant aux niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$, celle de l'atome de nickel vaut, dans cette configuration :

$$E_1 = \mathcal{E}_0 + 10 \times \varepsilon_{3d} = \mathcal{E}_0 - 10 \times 70,90 \Rightarrow E_1 = \mathcal{E}_0 - 709 \text{ (eV)}$$

En revanche, si l'orbitale $4s$ est remplie avant les orbitales $3d$:



la configuration électronique du nickel se présente aussi sous la forme :



qui montre que chaque électron du niveau $3d$ a pour constante d'écran :

$$\begin{aligned} \sigma'_{3d} &= 2\sigma_{1s/3d} + 8\sigma_{2s2p/3d} + 8\sigma_{3s3p/3d} + 7\sigma_{3d/3d} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 1 + 7 \times 0,35 = 20,45 \\ &\Rightarrow Z_{3d}^* = Z - \sigma'_{3d} = 28 - 20,45 = 7,55 \end{aligned}$$

et donc pour énergie :

$$\varepsilon'_{3d} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{3d}^*}{n^*} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{7,55}{3} \right)^2 \Rightarrow \varepsilon'_{3d} = -86,14 \text{ eV}$$

De même, chaque électron du niveau $4s$ a pour facteur d'écran :

$$\begin{aligned} \sigma'_{4s} &= 2\sigma_{1s/4s} + 8\sigma_{2s2p/4s} + 8\sigma_{3s3p/4s} + 8\sigma_{3d/4s} + \sigma_{4s/4s} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 0,85 + 8 \times 0,85 + 0,35 = 23,95 \\ &\Rightarrow Z_{4s}^* = Z - \sigma'_{4s} = 28 - 23,95 = 4,05 \end{aligned}$$

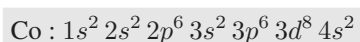
responsable de leur énergie (où $n = 4 \Rightarrow n^* = 3,7$) :

$$\varepsilon'_{4s} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{4s}^*}{n^*} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{4,05}{3,7} \right)^2 \Rightarrow \varepsilon'_{4s} = -16,29 \text{ eV}$$

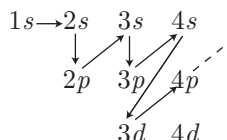
Ce faisant, l'énergie du nickel a pour valeur, dans cette configuration :

$$\begin{aligned} E_2 &= \mathcal{E}_0 + 8\varepsilon'_{3d} + 2\varepsilon'_{4s} = \mathcal{E}_0 - 8 \times 86,14 - 2 \times 16,29 \\ \Rightarrow E_2 &= \mathcal{E}_0 - 722 \text{ (eV)} \end{aligned}$$

La comparaison des valeurs trouvées pour E_1 et E_2 ($E_2 < E_1$) montre que la seconde configuration :



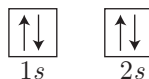
rend le cobalt plus stable que la première configuration. Cet exemple illustre l'intérêt de classer les niveaux :



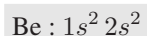
pour écrire la configuration électronique d'un élément.

● 366 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

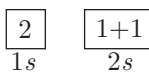
1. (a) Quatre électrons du béryllium se répartissent sur les niveaux $1s$ et $2s$:



de manière à lui conférer la structure :



(b) La structure de Be :



montre que chacun des électrons de valence a pour facteur d'écran :

$$\begin{aligned} \sigma_{2s} &= 2\sigma_{1s/2s} + 1 \times \sigma_{2s/2s} = 2 \times 0,85 + 0,35 = 2,05 \\ \Rightarrow Z_{2s}^* &= Z - \sigma_{2s} = 4 - 2,05 = 1,95 \end{aligned}$$

C'est pourquoi leur énergie individuelle vaut :

$$\varepsilon_{2s} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{2s}^*}{n} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{1,95}{2} \right)^2 \Rightarrow \varepsilon_{2s} = -12,93 \text{ eV}$$

(c) De même, la structure :

$$\begin{array}{|c|} \hline 1+1 \\ \hline 1s \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline 2s \\ \hline \end{array}$$

révèle que chaque électron du niveau $1s$ a pour écran, de la part de l'autre électron :

$$\sigma_{1s} = \sigma_{1s/1s} = 0,3 \Rightarrow Z_{1s}^* = Z - \sigma = 4 - 0,3 = 1,7$$

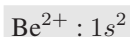
d'où découle l'énergie de chacun de ces électrons :

$$\varepsilon_{1s} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{1s}^*}{n} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{1,7}{1} \right)^2 \Rightarrow \varepsilon_{1s} = -39,30 \text{ eV}$$

- (d) Muni de deux électrons d'énergie ε_{1s} , et de deux autres électrons d'énergie ε_{2s} , l'atome de béryllium a pour énergie orbitale :

$$E(\text{Be}) = 2\varepsilon_{1s} + 2\varepsilon_{2s} = -2 \times 39,3 - 2 \times 12,93 \Rightarrow E(\text{Be}) = -104,46 \text{ eV} \quad (22)$$

2. (a) Pour passer de Be à Be^{2+} , l'atome de béryllium s'est débarrassé de ses deux électrons du niveau $2s$ le plus extrême, de manière à adopter comme configuration électronique :



- (b) Étant donné que la présence (ou l'absence) des électrons périphériques ($2s$) n'a aucune influence énergétique sur les électrons de cœur ($1s$), ces derniers présentent toujours la même énergie que dans l'atome Be, c'est-à-dire :

$$\varepsilon_{1s} = -39,30 \text{ eV}$$

C'est pourquoi l'énergie orbitale de l'ion Be^{2+} (pourvu de deux électrons sur le niveau $1s$) vaut :

$$E(\text{Be}^{2+}) = 2 \times \varepsilon_{1s} = -78,6 \text{ eV} \quad (23)$$

- (c) Au cours de la réaction d'ionisation :



l'énergie du béryllium a varié de la quantité :

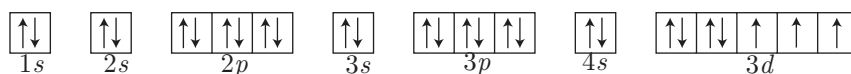
$$\Delta E = E(\text{Be}^{2+}) - E(\text{Be})$$

Il faut donc fournir une énergie d'ionisation $E_{\text{ion}} = \Delta E$, calculable à l'aide des résultats (23) et (22) :

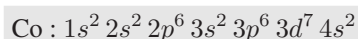
$$\begin{aligned} E_{\text{ion}} &= E(\text{Be}^{2+}) - E(\text{Be}) = (2\varepsilon_{1s}) - (2\varepsilon_{1s} + 2\varepsilon_{2s}) \\ &= -2\varepsilon_{2s} = -2 \times (-12,93) \Rightarrow E_{\text{ion}} = 25,86 \text{ eV} \end{aligned}$$

● 367 ————— Lycée Carnot, Dijon

1. Les 27 électrons du cobalt se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$, $4s$ et $3d$:

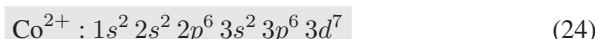


ce qui lui vaut la configuration électronique suivante :



2. Pour passer de Co à Co^{2+} , l'atome de cobalt doit perdre deux électrons, ce qui peut s'envisager de trois manières différentes :

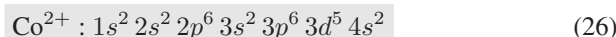
- départ de deux électrons s :



- départ d'un électron s et d'un électron d :

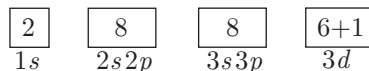


- départ de deux électrons d :



3. Les trois structures précédentes montrent que les électrons des niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$ et $3p$ sont des électrons de cœur : on note E_c leur énergie.

(a) La configuration électronique (24) peut aussi se présenter sous la forme :



qui montre que chacun des 7 électrons du niveau $3d$ a pour facteur d'écran :

$$\begin{aligned} \sigma_{3d} &= 2\sigma_{1s/3d} + 8\sigma_{2s2p/3d} + 8\sigma_{3s3p/3d} + 6\sigma_{3d/3d} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 1 + 6 \times 0,35 = 20,1 \\ \Rightarrow Z_{3d}^* &= Z - \sigma_{3d} = 27 - 20,1 = 6,9 \end{aligned}$$

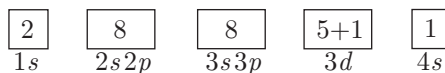
Leur énergie individuelle vaut par conséquent (puisque $n^* = 3$ pour $n = 3$) :

$$\varepsilon_{3d} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{3d}^*}{n^*} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{6,9}{3} \right)^2 = -71,94 \text{ eV}$$

C'est pourquoi l'ion Co^{2+} a pour énergie :

$$E_1 = E_c + 7\varepsilon_{3d} \Rightarrow E_1 = E_c - 503,6 \text{ (eV)}$$

(b) La configuration électronique (25), présentée par :



révèle que les électrons du niveau $3d$ ont pour constante d'écran :

$$\begin{aligned} \sigma'_{3d} &= 2\sigma_{1s/3d} + 8\sigma_{2s2p/3d} + 8\sigma_{3s3p/3d} + 5\sigma_{3d/3d} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 1 + 5 \times 0,35 = 19,75 \\ \Rightarrow Z_{3d}^* &= Z - \sigma'_{3d} = 27 - 19,75 = 7,25 \end{aligned}$$

à laquelle correspond une énergie :

$$\varepsilon'_{3d} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{3d}^*}{n^*} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{7,25}{3} \right)^2 = 79,43 \text{ eV}$$

En revanche, l'électron du niveau 4s a pour constante d'écran :

$$\begin{aligned} \sigma'_{4s} &= 2\sigma_{1s/4s} + 8\sigma_{2s2p/4s} + 8\sigma_{3s3p/4s} + 6\sigma_{3d/4s} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 0,85 + 6 \times 0,85 = 21,9 \\ &\Rightarrow Z_{4s}^* = Z - \sigma'_{4s} = 27 - 21,9 = 5,1 \end{aligned}$$

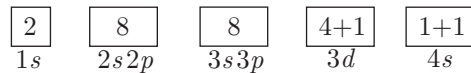
C'est pourquoi son énergie vaut (avec $n^* = 3,7$ pour $n = 4$) :

$$\varepsilon'_{4s} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{4s}^*}{n^*} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{5,1}{3,7} \right)^2 = 25,84 \text{ eV}$$

La présence de 6 électrons sur le niveau 3d et d'un électron sur le niveau 4s permet d'attribuer à cet ion l'énergie :

$$\begin{aligned} E_2 &= E_c + 6\varepsilon'_{3d} + \varepsilon'_{4s} = E_c - 6 \times 79,43 - 25,84 \\ &\Rightarrow E_2 = E_c - 502,4 \text{ (eV)} \end{aligned}$$

(c) La configuration électronique (26) :



présente 5 électrons sur le niveau 3d, de facteur d'écran :

$$\begin{aligned} \sigma''_{3d} &= 2\sigma_{1s/3d} + 8\sigma_{2s2p/3d} + 8\sigma_{3s3p/3d} + 4\sigma_{3d/3d} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 1 + 4 \times 0,35 = 19,4 \\ &\Rightarrow Z_{3d}^* = Z - \sigma''_{3d} = 27 - 19,4 = 7,6 \end{aligned}$$

et donc d'énergie individuelle :

$$\varepsilon''_{3d} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{3d}^*}{n^*} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{7,6}{3} \right)^2 = -87,28 \text{ eV}$$

auxquels s'ajoutent 2 électrons sur le niveau 4s. Leur facteur d'écran vaut :

$$\begin{aligned} \sigma''_{4s} &= 2\sigma_{1s/4s} + 8\sigma_{2s2p/4s} + 8\sigma_{3s3p/4s} + 5\sigma_{3d/4s} + \sigma_{4s/4s} \\ &= 2 \times 1 + 8 \times 1 + 8 \times 0,85 + 5 \times 0,85 + 0,35 = 21,4 \\ &\Rightarrow Z_{4s}^* = Z - \sigma''_{4s} = 27 - 21,4 = 5,6 \end{aligned}$$

d'où découle leur énergie :

$$\varepsilon''_{4s} = -13,6 \times \left(\frac{Z_{4s}^*}{n^*} \right)^2 = -13,6 \times \left(\frac{5,6}{3,7} \right)^2 = -31,15 \text{ eV}$$

Aussi, dans cette configuration, l'ion Co^{2+} possède l'énergie :

$$\begin{aligned} E_3 &= E_c + 5\varepsilon''_{3d} + 2\varepsilon''_{4s} = E_c - 5 \times 87,28 - 2 \times 31,15 \\ &\Rightarrow E_3 = E_c - 498,7 \text{ (eV)} \end{aligned}$$

Ces calculs montrent que la configuration (24) :

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^7$$

est plus stable car moins énergétique.

● 368 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Déterminons, par parties, l'intégrale I_n :

$$I_n = \int_0^{\infty} r^n e^{-r/a_0} dr = \underbrace{\left[-a_0 r^n e^{-r/a_0} \right]_0^{\infty}}_{=0} + n a_0 \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r/a_0} dr$$

ce qui procure la relation de récurrence :

$$I_n = n a_0 I_{n-1} \quad (27)$$

De fait :

$$I_{n-1} = (n-1) a_0 I_{n-2}, I_{n-2} = (n-2) a_0 I_{n-3}, \dots, I_1 = a_0 I_0$$

de sorte que :

$$I_n = [n(n-1)(n-2)\dots 1] \times \underbrace{(a_0 \times a_0 \times \dots \times a_0)}_n \times I_0 = n! a_0^n I_0$$

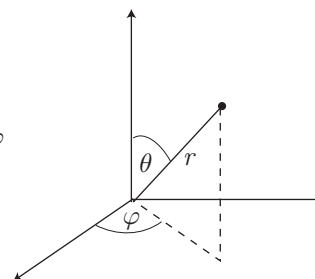
où :

$$I_0 = \int_0^{\infty} e^{-r/a_0} dr = \left[-a_0 e^{-r/a_0} \right]_0^{\infty} = a_0 \Rightarrow I_n = n! a_0^{n+1} \quad (28)$$

2. La normalisation de la probabilité :

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{P} &= A \times r^2 e^{-r/a_0} \times \cos^2 \theta dV \\ &\text{avec } dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= A \times r^4 e^{-r/a_0} dr \times \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \times d\varphi \end{aligned}$$

traduit la présence de l'électron dans l'espace décrit par : $r \in [0, \infty[$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.
Ainsi :



$$1 = \int_{\text{espace}} \delta\mathcal{P} = A \times \int_{r=0}^{\infty} r^4 e^{-r/a_0} dr \times \int_{\theta=0}^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \times \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \quad (29)$$

où ces trois intégrales sont calculables séparément :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta &= \int_1^{-1} -u^2 du \text{ en posant } u = \cos \theta \\ &= \left[-\frac{1}{3} u^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

et, d'après le résultat (28) :

$$\int_0^\infty r^4 e^{-r/a_0} dr = I_4 = 4! \times a_0^5 = 24 a_0^5$$

Par suite, la condition de normalisation de $\delta\mathcal{P}$ impose :

$$1 = A \times 24 a_0^5 \times \frac{2}{3} \times 2\pi = A \times 32\pi a_0^5 \Rightarrow A = \frac{1}{32\pi a_0^5}$$

3. Par définition, la valeur moyenne de r vaut :

$$\langle r \rangle = \int_{\text{espace}} r \delta\mathcal{P} = A \times \underbrace{\int_{r=0}^\infty r^5 e^{-r/a_0} dr}_{I_5} \times \int_{\theta=0}^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \times \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi$$

où la relation de récurrence (27) fournit :

$$\begin{aligned} I_5 &= 5 a_0 \times I_4 = 5 a_0 \times \int_{r=0}^\infty r^4 e^{-r/a_0} dr \\ \Rightarrow \langle r \rangle &= 5 a_0 \times A \int_{r=0}^\infty r^4 e^{-r/a_0} dr \int_{\theta=0}^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \end{aligned}$$

Enfin, la normalisation de $\delta\mathcal{P}$, exprimée par l'identité (29) :

$$A \int_{r=0}^\infty r^4 e^{-r/a_0} dr \int_{\theta=0}^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = 1$$

conduit directement à :

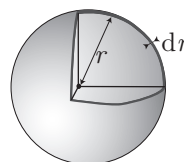
$$\langle r \rangle = 5 a_0$$

● **369** **Concours e3a**

1. (a) Soit $V(r) = \frac{4}{3} \pi r^3$ le volume d'une boule de rayon r et de centre O et soit $V(r + dr) = \frac{4}{3} \pi (r + dr)^3$ celui d'une boule de rayon $r + dr$ et de même centre O .

Le volume dV compris entre ces deux boules vaut alors :

$$\begin{aligned} dV &= V(r + dr) - V(r) = \frac{4}{3} \pi [(r + dr)^3 - r^3] \\ &= \frac{4}{3} \pi [r^3 + 3r^2 dr + 3r dr^2 + dr^3 - r^3] \\ &= \frac{4}{3} \pi (3r^2 dr + 3r dr^2 + dr^3) \end{aligned}$$



c'est-à-dire, au premier ordre en dr :

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Remarque – Ce volume élémentaire pouvait s'obtenir plus directement en calculant la différentielle du volume $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ d'une boule de rayon r :

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow dV = \frac{4}{3} \pi \times 3r^2 dr = 4\pi r^2 dr$$

Ce faisant, la probabilité de trouver un électron à une distance r (à dr près) du noyau s'écrit :

$$\delta\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_{1s} \times dV \Rightarrow \delta\mathcal{P}_r = 4\pi A \times r^2 e^{-2r/a_0} dr$$

- (b) La probabilité de trouver l'électron dans l'espace (décrit pour $r \in \mathbb{R}^+$) est égale à 1, ce qui se traduit par :

$$1 = \int_{r=0}^{\infty} \delta\mathcal{P}_r \Rightarrow 1 = 4\pi A \int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0} dr = 4\pi A \times I$$

où l'intégrale I s'obtient grâce à la formule rappelée dans l'énoncé et dans laquelle α est remplacé par $-\frac{2}{a_0}$:

$$I = \left[e^{-2r/a_0} \left(-\frac{a_0 r^2}{2} + \frac{2r a_0^2}{4} - \frac{2a_0^3}{8} \right) \right]_0^{\infty} = \frac{a_0^3}{4}$$

d'où il s'ensuit que :

$$1 = 4\pi A \times \frac{a_0^3}{4} = \pi A \times a_0^3 \Rightarrow A = \frac{1}{\pi a_0^3} \Rightarrow \delta\mathcal{P}_r = \frac{4}{a_0^3} \times r^2 e^{-2r/a_0} dr$$

- (c) Par définition, la densité de probabilité radiale vaut :

$$F_{1s} = \frac{\delta\mathcal{P}_r}{dr} \Rightarrow F_{1s} = \frac{4}{a_0^3} \times r^2 e^{-2r/a_0}$$

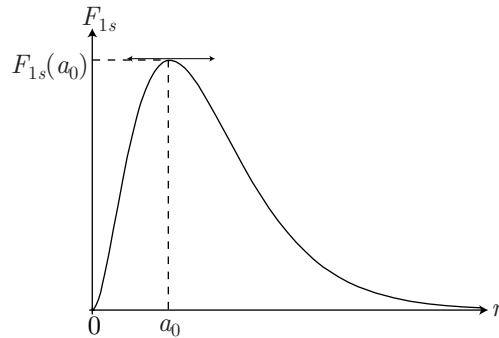
- (d) La dérivée de cette fonction :

$$\frac{dF_{1s}}{dr} = \frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \times \left(-\frac{2r^2}{a_0} + 2r \right) = \frac{8}{a_0^3} e^{-2r/a_0} \times r \left(1 - \frac{r}{a_0} \right)$$

s'annule pour $r = 0$ et pour $r = a_0$, ce qui permet de tracer le tableau de variation de la fonction F_{1s} :

r	a_0
dF_{1s}/dr	+
F_{1s}	↗ ↘

qui montre que F_{1s} admet un *maximum* $F_{1s}(a_0)$ en $r = a_0$:



De cette étude, il ressort que la probabilité de présence de l'électron à une distance r du noyau :

$$\delta\mathcal{P}_r = F_{1s}(r) \times dr$$

est maximale en $r = a_0$; cette distance correspond au rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène.

2. (a) La probabilité de trouver l'électron dans un volume $dV = 4\pi r^2 dr$ situé à une distance r du noyau est définie, pour l'orbitale $2s$, par :

$$\delta\mathcal{P}_r = \mathcal{P}_{2s} \times dV = 4\pi B \times r^2 \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0} dr$$

$$\Rightarrow \delta\mathcal{P}_r = \frac{4\pi B}{a_0^2} \times (2ra_0 - r^2)^2 e^{-r/a_0} dr$$

d'où l'on déduit l'expression de la densité de probabilité radiale :

$$F_{2s} = \frac{\delta\mathcal{P}_r}{dr} = \frac{4\pi B}{a_0^2} \times e^{-r/a_0} (2ra_0 - r^2)^2$$

- (b) La dérivée de la fonction F_{2s} :

$$\begin{aligned} \frac{dF_{2s}}{dr} &= \frac{4\pi B}{a_0^2} e^{-r/a_0} \times \left[2(2ra_0 - r^2)(2a_0 - 2r) - \frac{1}{a_0} (2ra_0 - r^2)^2 \right] \\ &= \frac{4\pi B}{a_0^3} e^{-r/a_0} \times (2ra_0 - r^2) \times [2(2a_0^2 - 2ra_0) - (2ra_0 - r^2)] \\ &= \frac{4\pi B}{a_0^3} e^{-r/a_0} \times r(2a_0 - r) \times (r^2 - 6ra_0 + 4a_0^2) \end{aligned}$$

s'annule pour $r_1 = 0$, pour $r_2 = 2a_0$ et pour les solutions de l'équation du second degré :

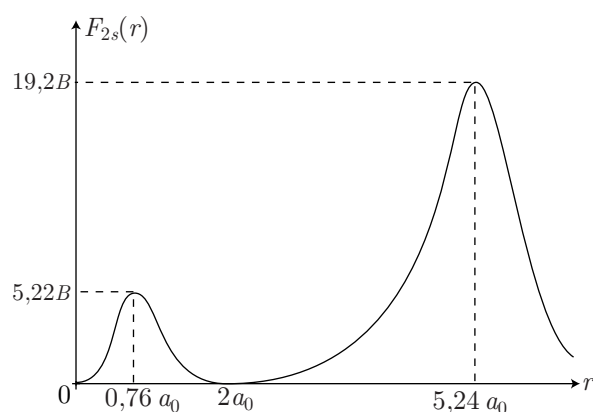
$$\begin{aligned} r^2 - 6ra_0 + 4a_0^2 = 0 &\Rightarrow \Delta' = 9a_0^2 - 4a_0^2 = 5a_0^2 \\ &\Rightarrow r = 3a_0 \pm \sqrt{5a_0^2} = a_0 \times (3 \pm \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Ces solutions sont :

$$r_3 = (3 - \sqrt{5})a_0 = 0,76a_0 \text{ et } r_4 = (3 + \sqrt{5})a_0 = 5,24a_0$$

r	$0,76 a_0$		$2a_0$		$5,24 a_0$	
$2a_0 - r$	+	+	0	-	-	
$r^2 - 6ra_0 + 4a_0^2$	+	0	-	-	0	+
dF_{2s}/dr	+	0	-	0	+	0
$F_{2s}(r)$	0	$\nearrow 5,22B$	$\searrow 0$	$\nearrow 19,2B$	$\searrow 0$	0

Ce faisant, la fonction $F_{2s}(r)$ présente l'allure suivante :



qui montre que F_{2s} admet deux *maxima* ; l'un d'eux en $r = 0,76 a_0$ et l'autre en $5,24 a_0$, plus grand que le premier. C'est pourquoi, lorsque l'électron se trouve dans l'état $2s$, c'est à la distance $r = 5,24 a_0$ que sa probabilité de présence est la plus grande.

● 370 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. La probabilité de trouver l'électron dans l'espace, décrit par :

$$r \in [0, \infty[\quad \theta \in [0, \pi] \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

est donnée par :

$$\begin{aligned} \int_{\text{espace}} \delta\mathcal{P} &= \int_{r=0}^{\infty} F_{1s}(r) dr \times \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} G_{1s}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{4}{a_0^3} \int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0} dr \times \frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi a_0^3} \int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0} dr \times \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} d\varphi \end{aligned}$$

où chaque intégrale peut se calculer séparément :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \quad \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = [-\cos \theta]_0^{\pi} = 2$$

et l'énoncé précise que :

$$\int_0^{\infty} r^2 e^{-2r/a_0} dr = \left[-e^{-2r/a_0} \left(\frac{a_0 r^2}{2} + \frac{r a_0^2}{2} + \frac{a_0^3}{4} \right) \right]_0^{\infty} = \frac{a_0^3}{4}$$

Il s'ensuit que :

$$\int_{\text{espace}} \delta\mathcal{P} = \frac{1}{\pi a_0^3} \times \frac{a_0^3}{4} \times 2 \times 2\pi \Rightarrow \int_{\text{espace}} \delta\mathcal{P} = 1$$

Ce résultat confirme la normalisation de $\delta\mathcal{P}$ qui traduit l'existence de l'électron dans l'espace.

2. La probabilité de trouver l'électron à une distance $r \leq a_0$ du centre de l'atome vaut :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(r \leq a_0) &= \int_{r \leq a_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \delta\mathcal{P} \\ &= \int_0^{a_0} F_{1s}(r) dr \times \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} G_{1s}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{4}{a_0^3} \int_0^{a_0} r^2 e^{-2r/a_0} dr \times \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin \theta d\theta d\varphi}_{=4\pi} \\ &= \frac{4}{a_0^3} \int_0^{a_0} r^2 e^{-2r/a_0} dr = \frac{4}{a_0^3} \times I \text{ avec } I = \int_0^{a_0} r^2 e^{-2r/a_0} dr \end{aligned}$$

où l'intégrale I est accessible à partir de l'indication de l'énoncé :

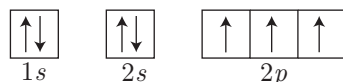
$$\begin{aligned} I &= \left[-e^{-2r/a_0} \left(\frac{a_0 r^2}{2} + \frac{r a_0^2}{2} + \frac{a_0^3}{4} \right) \right]_0^{a_0} \\ &= -e^{-2} \left(\frac{a_0^3}{2} + \frac{a_0^3}{2} + \frac{a_0^3}{4} \right) + \frac{a_0^3}{4} \\ &= \frac{a_0^3}{4} - \frac{5a_0^3}{4} e^{-2} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\mathcal{P}(r \leq a_0) = \frac{4}{a_0^3} \left(\frac{a_0^3}{4} - \frac{5a_0^3}{4} e^{-2} \right) \Rightarrow \mathcal{P}(r \leq) = 1 - 5e^{-2} = 0,32$$

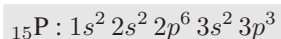
● 371 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Les 7 électrons de l'azote se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$ et $2p$:



ce qui lui confère la structure électronique : $1s^2 2s^2 2p^3$.

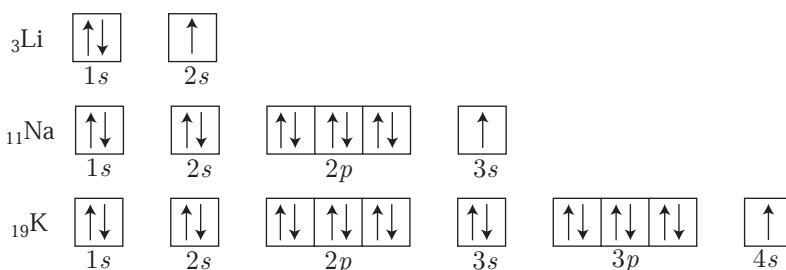
2. (a) L'azote appartient à une famille d'éléments dont le niveau de valence a pour configuration électronique : $ns^2 np^3$. C'est pourquoi l'élément situé sous l'azote ($n = 2$) a pour configuration : $3s^2 3p^3$ et pour configuration électronique :



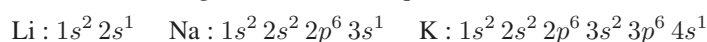
- (b) L'électronégativité χ étant d'autant plus grande que l'élément est situé plus haut dans une même colonne, on peut prédire que $\chi_{\text{N}} > \chi_{\text{P}}$.

● 372 ————— Concours Centrale-Supélec

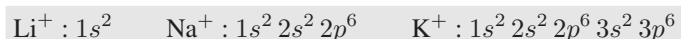
1. Les électrons se répartissent sur les niveaux $1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s$ pour les différents éléments :



d'où découlent leurs configurations électroniques :



Le passage aux ions Li^+ , Na^+ et K^+ se traduit alors par la perte de l'électron de valence, situé sur les niveaux ns ; ce faisant, ces ions ont pour configurations électroniques :



2. Les structures de valence de Li, Na et K sont ns^1 , où n vaut 2, 3 ou 4. C'est pourquoi ces éléments sont placés dans la première colonne de la classification périodique, sur les lignes 2, 3 et 4 :

		ns^1	
$n = 1$			ns^2
$n = 2$	Li		
$n = 3$	Na		
$n = 4$	K		-----
$n = 5$	Rb		-----
$n = 6$	Cs		-----

Les éléments de cette colonne sont les métaux alcalins.

3. Dans une même colonne, le rayon ionique r augmente avec Z . C'est pourquoi :

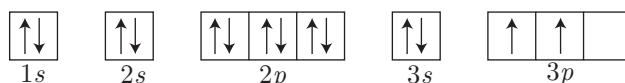
$$r_{\text{Cs}} > r_{\text{Rb}} > r_{\text{K}} > r_{\text{Na}} > r_{\text{Li}}$$

Compte tenu de cette évolution et des valeurs numériques proposées par l'énoncé, les rayons ioniques de ces différents éléments valent :

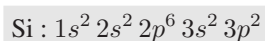
	Li	Na	K	Rb	Cs
r (pm)	59	102	138	149	167

● 373 ————— Lycée Montesquieu, Le Mans

1. Les 14 électrons du silicium se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$ et $3p$:



ce qui lui donne la configuration électronique :



Sous cette configuration, l'atome de silicium présente deux électrons désappariés, ce qui lui permet d'avoir une valence 2. Cependant, à l'instar du carbone, le silicium procède à une extension de cette valence par la transition d'un électron du niveau $3s$ vers l'orbitale vacante $3p$:

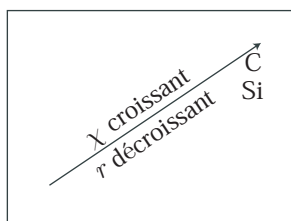


Ce faisant, la présence de 4 électrons « célibataires » justifie la valence 4 observée généralement avec le silicium.

2. Compte tenu de sa configuration électronique, l'atome de silicium appartient à la même colonne que l'élément de configuration $1s^2 2s^2 2p^2$, c'est-à-dire :

la colonne du carbone.

Les rayons atomiques r et les électronégativités χ évoluent, dans la classification périodique, conformément au schéma suivant (où H constitue une singularité) :



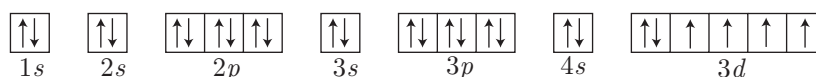
C'est pourquoi on peut prédire que :

$$\chi_{\text{C}} > \chi_{\text{Si}} \text{ et } r_{\text{C}} < r_{\text{Si}}$$

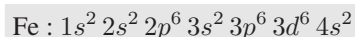
3. La configuration électronique du silicium présente 4 électrons de valence (sur les niveaux $3s$ et $3p$) qu'il peut perdre pour former l'ion Si^{4+} . Pour assurer la neutralité électrique de la silice, il est nécessaire d'adjoindre 2 ions oxyde (O^{2-}) afin d'obtenir la formule : SiO_2 .

● 374 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

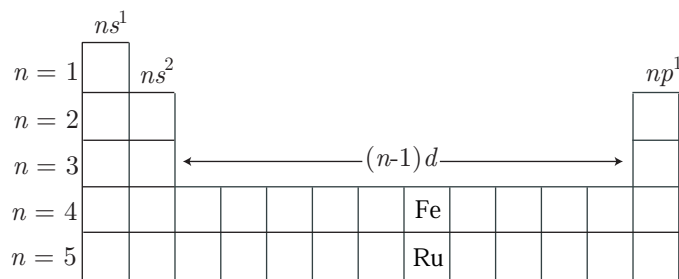
1. (a) Les 26 électrons du fer se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$, $3p$, $4s$ et $3d$:



d'où se déduit sa configuration électronique :

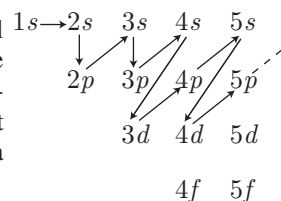


- (b) La configuration électronique du fer se termine par $(n-1)d^6 ns^2$ avec $n = 4$, ce qui signifie également qu'il appartient à la sixième colonne des métaux de transition (d^6) et qu'il se trouve sur la quatrième ligne ($n = 4$) de la classification périodique :



- (c) Le ruthénium étant situé juste en dessous du fer dans cette classification, sa configuration électronique devrait se terminer par $4d^6 5s^2$, si la règle de Klechkowski était respectée (ce qui n'est pas le cas puisque la configuration réelle se termine par $4d^7 5s^1$ – cette anomalie ne perturbe cependant pas les raisonnements).

Il convient alors de tracer un tableau dans lequel sont classés les niveaux électroniques par ordre d'énergie croissante, les nombres *maxima* d'électrons (n_{\max}) que peuvent accueillir ces niveaux, et leur somme (cumul) depuis le niveau $1s$ jusqu'à $4d$:

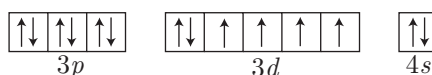


	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$4s$	$3d$	$4p$	$5s$	$4d$
n_{\max}	2	2	6	2	6	2	10	6	2	10
cumul	2	4	10	12	18	20	30	36	38	48

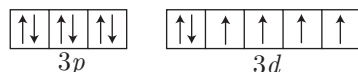
Ce faisant, pour atteindre la configuration $5s^2 4d^6$, le ruthénium doit posséder pour numéro atomique :

$$Z = 38 + 6 = 44$$

2. (a) La configuration électronique du fer se termine par :



ce qui suggère l'existence de l'ion Fe^{2+} , dû au départ des deux électrons périphériques du niveau $4s$. Cet ion présente alors la configuration suivante :



qui montre que le départ d'un électron supplémentaire d'un niveau $3d$ permet d'obtenir des niveaux $3d$ à moitié saturés (facteur stabilisant). C'est pourquoi le fer peut former les ions :



(b) L'ion oxyde O^{2-} peut s'associer à l'ion Fe^{2+} pour former :



De même, O^{2-} peut s'associer à l'ion Fe^{3+} , dans une stœchiométrie qui assure la neutralité électrique de :



Enfin, l'association de FeO et de Fe_2O_3 conduit à :



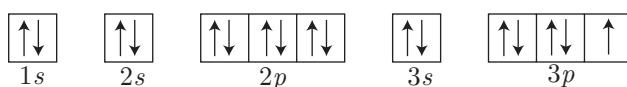
● 375 ————— Concours des Mines-Ponts

1. Le numéro atomique $Z = 17$ correspond au nombre de protons situés dans le noyau de l'atome de chlore.

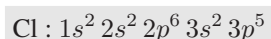
⚠ Il convient de ne pas confondre Z avec le nombre d'électrons n_e qui composent le nuage électronique de l'atome. En effet, ce dernier peut former des ions (par exemple Cl^-) auquel cas n_e devient différent de 17, tandis que Z conserve sa valeur.

Cependant, il est légitime de poser : $Z = n_e$ pour l'atome neutre.

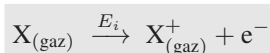
Les 17 électrons de l'atome de chlore se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$ et $3p$:



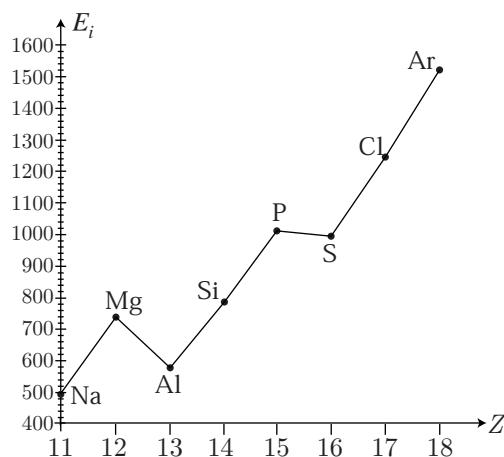
et lui attribuent ainsi la configuration électronique suivante :



2. (a) L'énergie de première ionisation d'un atome X est l'énergie E_i minimale qu'il faut lui fournir pour arracher un électron, X étant gazeux, conformément à l'équation-bilan :



- (b) Les éléments de la ligne du chlore sont caractérisés par des niveaux de valence dont la configuration électronique va de $1s$ (pour Na) à $3s^2 3p^6$ (pour Ar), et dont les numéros atomiques s'étendent par conséquent de $Z = 11$ (Na) à $Z = 18$ (Ar). Représentons graphiquement E_i en fonction de Z , pour cette ligne :



L'augmentation globale de l'énergie d'ionisation s'interprète par l'augmentation de Z pour ces éléments : le nombre de protons du noyau augmente, ce qui accroît l'attraction des électrons ; l'énergie E_i à fournir pour les arracher s'en trouve accrue.

En revanche, certaines anomalies sont observées pour Mg, P (E_i est anormalement élevé) et pour Al, S (E_i est anormalement faible). Ces anomalies se justifient à l'aide des configurations de valence ($n = 3$) des éléments X et de leurs ions X^+ :

	3s	3p		3s	3p
$_{11}\text{Na}$	\uparrow		Na^+		
$_{12}\text{Mg}$	$\uparrow\downarrow$		Mg^+	\uparrow	
$_{13}\text{Al}$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow	Al^+	$\uparrow\downarrow$	
$_{14}\text{Si}$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow \uparrow	Si^+	$\uparrow\downarrow$	\uparrow
$_{15}\text{P}$	$\uparrow\downarrow$	\uparrow \uparrow \uparrow	P^+	$\uparrow\downarrow$	\uparrow \uparrow
$_{16}\text{S}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$ \uparrow \uparrow	S^+	$\uparrow\downarrow$	\uparrow \uparrow \uparrow
$_{17}\text{Cl}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ \uparrow	Cl^+	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$ \uparrow \uparrow
$_{18}\text{Ar}$	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$	Ar^+	$\uparrow\downarrow$	$\uparrow\downarrow$ $\uparrow\downarrow$ \uparrow

Les configurations grisées sont celles qui doivent leur stabilité particulière à la saturation ou la demi-saturation des niveaux de même énergie. De cette manière, il apparaît que les réactions :



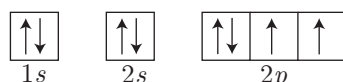
sont peu favorisées par la déstabilisation qu'elles entraînent (E_i est important), contrairement aux réactions :



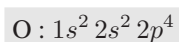
d'autant plus faciles qu'elles produisent des configuration stables (E_i est relativement faible).

● **376** **Lycée Pissaro, Pontoise**

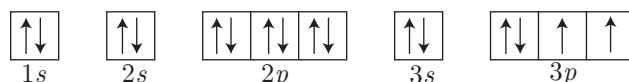
1. Les 8 électrons de l'oxygène se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$ et $2p$:



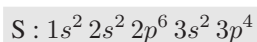
d'où découle sa configuration électronique :



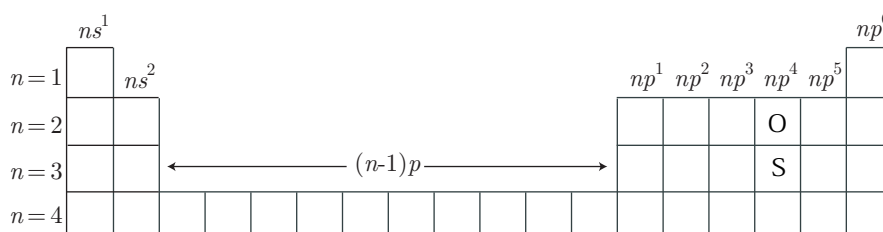
De même, les 16 électrons de l'atome de soufre occupent les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$ et $3p$:



ce qui lui donne pour configuration électronique :



2. La structure de la classification périodique (chaque ligne correspond à une valeur du nombre quantique principal n et chaque colonne est associée à la même configuration électronique des niveaux de valence) :



permet la localisation des éléments O (2^{ème} ligne – 16^{ème} colonne) et S (3^{ème} ligne – 16^{ème} colonne).

3. Le rayon atomique croît, pour une même famille d'éléments, avec le numéro atomique. C'est pourquoi on observe que :



4. Conformément au résultat de l'exercice de la page 755, la polarisabilité désigne la constante α de proportionnalité entre le moment dipolaire \vec{p} d'un atome et le champ électrique \vec{E} qui induit cette polarisation : $\vec{p} = \alpha \vec{E}$; on montre que α est

proportionnel au volume de l'atome, d'autant plus important que son rayon est grand. C'est pourquoi le résultat de la question précédente : $r_S > r_O$ justifie que $\alpha(S) > \alpha(O)$, conformément aux valeurs expérimentales :

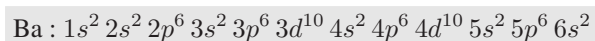
$$\alpha(S) = 10,3 \cdot 10^{-30} \text{ USI} \text{ et } \alpha(O) = 3,92 \cdot 10^{-30} \text{ USI}$$

● 377 ————— Concours des Ponts et Chaussées

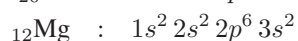
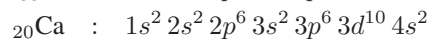
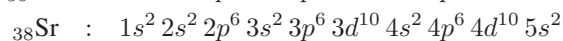
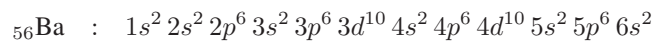
1. Le tableau ci-dessous montre le nombre n_{\max} d'électrons saturant chaque orbitale, ainsi que leur somme depuis le niveau $1s$ (cumul) :

niveau	$1s$	$2s$	$2p$	$3s$	$3p$	$4s$	$3d$	$4p$	$5s$	$4d$	$5p$	$6s$...
n_{\max}	2	2	6	2	6	2	10	6	2	10	6	2	...
cumul	2	4	10	12	18	20	30	36	38	48	54	56	...

Il ressort de ce tableau que la configuration électronique de ${}_{56}\text{Ba}$ se termine par $6s^2$, c'est-à-dire s'écrit :



2. Cette configuration permet la localisation du baryum dans la classification périodique :
- les électrons de valence ($6s^2$) occupant le niveau $6s$ ($n = 6$), le baryum se trouve sur la sixième ligne ;
 - la colonne des alcalino-terreux contient les éléments dont la configuration électronique se termine par ns^2 ; le baryum appartient à cette famille (deuxième colonne).
3. Les configurations électroniques des éléments proposés par l'énoncé se déduisent directement de celle du baryum et du tableau ci-dessus :

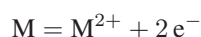


Tous ces éléments ont pour niveau de valence ns^2 , où n varie de 2 à 6, ce qui permet de conclure qu'ils appartiennent à la famille des alcalino-terreux.

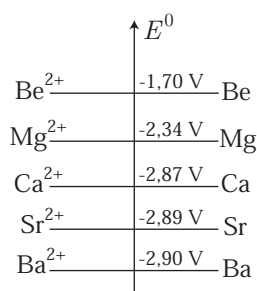
	ns^1	ns^2				
$n = 1$						
$n = 2$		Be				
$n = 3$		Mg				
$n = 4$		Ca				
$n = 5$		Sr				
$n = 6$		Ba				

4. Dans la classification périodique, le rayon d'un atome (ou d'un ion) croît, dans chaque colonne, avec Z (plus ils sont nombreux, plus les électrons font écran à l'attraction du noyau). C'est pourquoi on observe une augmentation régulière des rayons métalliques et ioniques du béryllium au baryum.

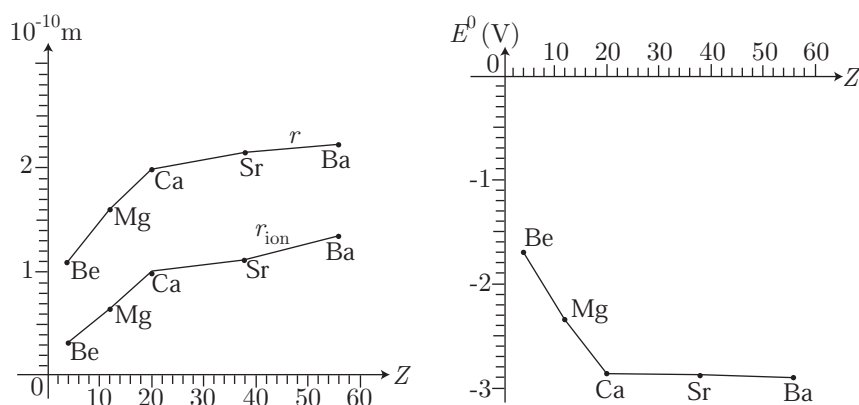
Quant au couple oxydant réducteur M^{2+}/M , il est caractérisé par une demi-équation :



Plus l'élément M est réducteur (E^0 faible), plus cette perte d'électrons est aisée. Le diagramme ci-contre montre que plus un élément est volumineux, plus il est réducteur, ce qui confirme l'effet d'écran exercé par des électrons de plus en plus nombreux : les niveaux ns se séparent d'autant mieux de leurs deux électrons que n est important.



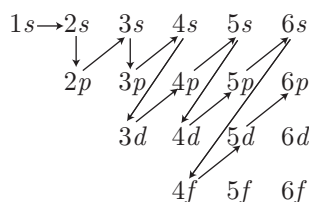
5. Les représentations graphiques de r , r_{ion} et E^0 en fonction de Z :



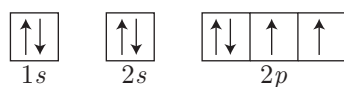
révèlent de grandes similitudes entre Ca, Sr et Ba, qui possèdent, au demeurant, des orbitales d saturées ; ces éléments peuvent être groupés en « triade ».

● **378** ————— **Lycée du Parc, Lyon**

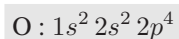
1. La configuration électronique des éléments ${}_5B$, ${}_{13}Al$, ${}_{31}Ga$, ${}_{49}In$ et ${}_{81}Tl$ s'obtient en classant préalablement les niveaux électroniques par énergie croissante :



Ces niveaux sont ensuite consignés dans un tableau qui fait également apparaître le nombre d'électrons nécessaires à leur saturation (n_{max}) ainsi que le cumul des électrons depuis le niveau $1s$:



d'où sa configuration électronique :



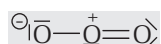
Notons également les configurations de valence des ions O^+ et O^- :



2. Chaque atome d'oxygène présente, dans son état fondamental, deux électrons de valence non appariés (permettant deux liaisons covalentes simples) et deux doublets électroniques (assurant le respect de la règle de l'octet). C'est pourquoi la formule de Lewis de O_2 est :



3. Si l'atome d'oxygène situé au centre de la molécule $\text{O} - \text{O} - \text{O}$ n'effectue que des liaisons simples, il n'autorise pas les deux autres atomes à respecter la règle de l'octet (car la configuration électronique de valence de O montre qu'un électron « célibataire » demeure sur les niveaux $2p$). C'est pourquoi il faut envisager la présence de l'ion O^+ au centre de la molécule d'ozone, seul susceptible de former une liaison double avec un atome O et une liaison simple avec l'ion O^- :

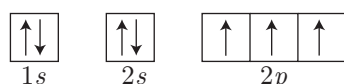


4. Dans chacune des molécules H_2O et H_2O_2 , l'atome d'oxygène peut former deux liaisons covalentes simples, en respectant la règle de l'octet :

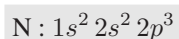


● 380 ————— Université Paris-Sud

1. Les 7 électrons de l'azote se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$ et $2p$:



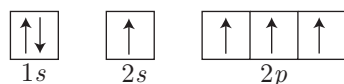
à l'origine de sa configuration électronique :



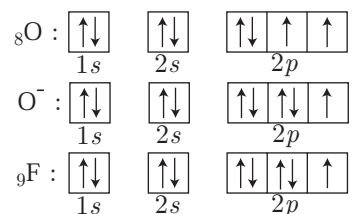
Dans cette configuration, la couche de valence de l'atome d'azote comporte trois électrons non appariés et un doublet électronique :



De même, les configurations électroniques de N^+ :



et celle de l'oxygène, de l'ion O^- et du fluor :



conduisent aux représentations de Lewis :



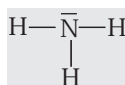
2. Chaque atome d'azote peut former trois liaisons covalentes en respectant la règle de l'octet, en conséquence de quoi la formule de Lewis de N_2 est :



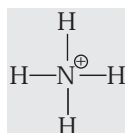
De même, l'atome de fluor peut former une liaison covalente simple avec l'atome d'azote : $F-N$, auquel cas l'azote dispose de deux autres électrons « célibataires » qu'il peut engager dans autant de liaisons covalentes (notamment dans une liaison double $N=N$). C'est pourquoi la formule de Lewis de N_2F_2 est :



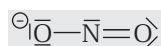
Pour les mêmes raisons, les trois électrons non appariés de N peuvent produire trois liaisons covalentes, notamment dans NH_3 :



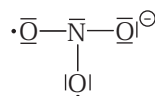
En revanche, dans NH_4^+ , l'azote doit réaliser 4 liaisons covalentes simples avec l'hydrogène, ce qui n'est envisageable qu'à partir de N^+ :



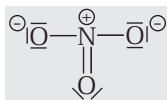
Quant à l'ion NO_2^- , il possède un atome d'azote lié à deux atomes d'oxygène ; une liaison double peut s'établir avec un atome d'oxygène (qui vérifie alors la règle de l'octet avec ses deux doublets électroniques) et une liaison simple avec l'ion O^- (qui respecte également la règle de l'octet avec ses trois doublets électroniques) :



Dans l'ion NO_3^- , l'atome d'azote peut réaliser trois liaisons simples : l'une avec l'ion O^- (qui vérifie la règle de l'octet) et les deux autres avec les atomes d'oxygène :

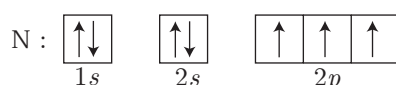


Cependant, ces deux derniers atomes ne respectent pas la règle de l'octet, en conséquence de quoi il faut envisager la formation d'un ion N^+ (qui forme une liaison double avec un atome d'oxygène et une liaison simple avec l'ion O^-) accompagnée de la formation d'un ion O^- , lié simplement à N^+ :

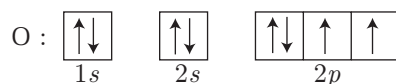


● 381 ————— Lycée Fabert, Metz

1. Les 7 électrons de l'azote se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$ et $2p$:



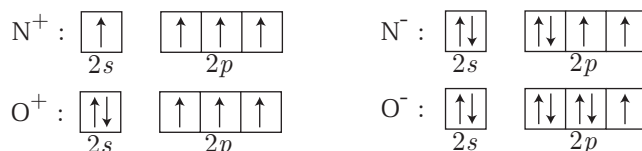
de même pour les 8 électrons de l'oxygène :



Leurs configurations électroniques sont par conséquent :

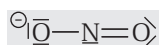


En outre, ces configurations permettent de prévoir celles de valence (niveaux $2s$ et $2p$) des ions N^+ , N^- , O^+ et O^- :



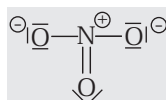
2. Dans l'ion NO_2^- , l'atome d'azote est doublement lié à l'oxygène :

- soit par deux liaisons simples, auquel cas N^- est requis et les atomes d'oxygène ne peuvent porter la charge négative ; dans ce cas, la règle de l'octet ne peut être respectée par l'oxygène ;
- soit par une liaison double $N = O$ et une liaison simple $N - O$. Dans ces conditions, l'ion O^- doit être formé pour vérifier la règle de l'octet :



De même, dans NO_3^- , l'atome d'azote est triplement lié à l'oxygène :

- soit par trois liaisons simples ; la charge négative ne peut alors être portée que par un seul des trois atomes d'oxygène, les deux autres étant condamnés à transgresser la règle de l'octet ;
- soit par deux liaisons simples et une liaison double, ce qui requiert l'intervention de N^+ ; un des atomes d'oxygène est ainsi doublement lié, tandis que les deux autres portent chacun une charge négative (O^-) :



3. Les atomes ${}^7\text{N}$ et ${}^8\text{O}$ peuvent également s'associer en molécules NO et NO_2 , qui comportent des nombres impairs d'électrons ($7 + 8 = 15$ pour NO et $7 + 16 = 23$ pour NO_2). Il est donc vain de chercher une forme mésomère susceptible de respecter la règle de l'octet, car tous les électrons ne pourront être appariés. C'est pourquoi les structures de Lewis de ces molécules :

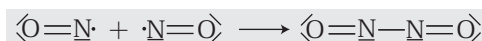


montrent que ces composés se comportent comme des radicaux, ce qui les rend extrêmement instables (l'électron « célibataire » tend à s'apparier pour stabiliser la structure moléculaire).

4. L'instabilité précédemment évoquée justifie la tendance à la dimérisation que présentent ces composés :



dont les structures sont :



et :



De même, la présence simultanée d'un électron désapparié sur les composés NO et NO_2 suggère la formation rapide d'une liaison covalente :

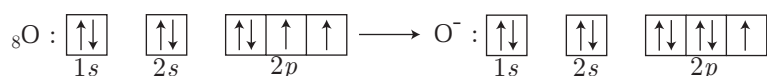


conformément à l'équation-bilan :



● 382 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

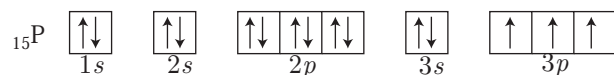
1. Les 8 électrons de l'oxygène se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$:



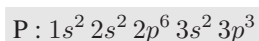
d'où se déduisent les configurations électroniques de O et O^- :



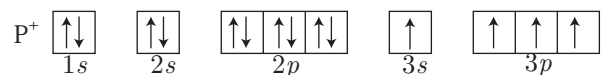
De même, les 15 électrons du phosphore se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$ et $3p$:



ce qui lui donne la configuration électronique :

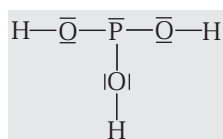


En outre, la configuration précédente permet de montrer que l'ion P^+ possède 4 électrons de valence non appariés :

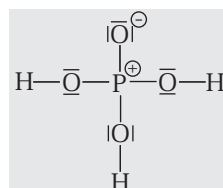


qui sont autant de liaisons covalentes potentielles.

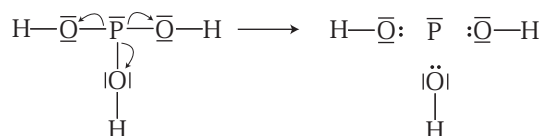
2. Dans la molécule H_3PO_3 , le phosphore doit former trois liaisons covalentes P – O (et conserver un doublet électronique pour respecter la règle de l'octet). La structure de valence de P permet cette configuration :



De même, dans la molécule H_3PO_4 , le phosphore doit établir quatre liaisons covalentes P – O, ce que permet la structure de valence de P^+ (l'absence de doublet électronique sur les niveaux $3s$ et $3p$ assure le respect de la règle de l'octet). Ce faisant, l'électron libéré par le phosphore est récupéré par un atome d'oxygène qui devient alors O^- ; cet ion peut former une liaison covalente (la présence de trois doublets électroniques en $2s$ et $2p$ est compatible avec la règle de l'octet) :



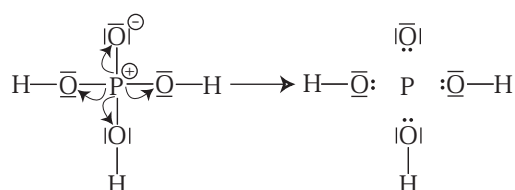
3. (a) Compte tenu des positions respectives de O et P dans la classification périodique, l'électronégativité χ_{O} de l'oxygène est supérieure à celle, χ_{P} , du phosphore. Ainsi, dans les formules de Lewis précédentes les électrons des liaisons P – O peuvent basculer vers l'oxygène.



Ce faisant, le phosphore contient un nombre apparent d'électrons $n_{\text{app}} = 2$ sur sa couche de valence, alors qu'il en possède $n_0 = 5$ dans son état fondamental. Son degré d'oxydation dans H_3PO_3 vaut :

$$d^0 = n_0 - n_{\text{app}} = 5 - 2 = 3$$

Pour les mêmes raisons ($\chi_{\text{O}} > \chi_{\text{P}}$), les électrons des liaisons P – O peuvent basculer vers l'oxygène dans la molécule H_3PO_4 :



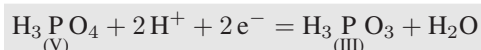
Par suite, le phosphore ne possède plus d'électrons de valence ($n_{\text{app}} = 0$), ce qui lui confère pour degré d'oxydation :

$$d^0 = n_0 - n_{\text{app}} = 5 - 0 = 5$$

En conclusion, les degrés d'oxydation du phosphore valent :

P (+V) dans H_3PO_4 et P (+III) dans H_3PO_3

(b) La demi-équation associée au couple $\text{H}_3\text{PO}_4/\text{H}_3\text{PO}_3$:



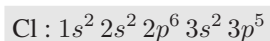
montre que le phosphore dans H_3PO_4 gagne $n = 2$ électrons pour s'intégrer dans la structure H_3PO_3 . Sa variation de degré d'oxydation ($3 - 5 = -2$) s'identifie alors à $-n$.

● 383 ————— Concours des Mines-Ponts

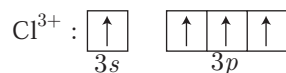
1. Les 17 électrons du chlore se répartissent dans les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$ et $3p$:



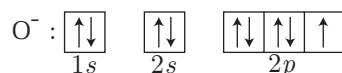
d'où se déduit sa configuration électronique :



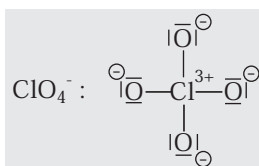
2. • Compte tenu de sa configuration de valence ($3s^2 3p^5$), l'atome de chlore peut former 4 liaisons covalentes à condition de perdre 3 électrons (la présence concomitante de 4 électrons non appariés permet à Cl^{3+} la formation de 4 liaisons en respectant la règle de l'octet) :



Ces trois électrons sont alors récupérés par les atomes d'oxygène qui deviennent des ions O^- :



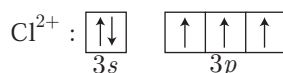
susceptibles de former une liaison covalente en respectant la règle de l'octet (grâce à la présence de doublets électroniques sur les niveaux $2s$ et $2p$) :



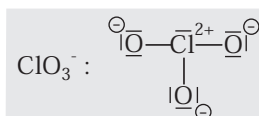
- En revanche, la configuration de valence du chlore lui permet de former une liaison covalente (la présence des doublets électroniques sur les niveaux $3s$ et $3p$ assure le respect de la règle de l'octet) ; la molécule Cl_2 a pour formule :



- Enfin, l'ion Cl^{2+} , obtenu par départ de deux des électrons des niveaux $3p$, présente un doublet électronique et trois électrons non appariés sur la couche de valence :

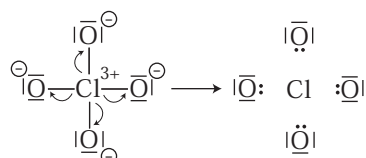


Les deux électrons ainsi libérés (ainsi que celui responsable de la charge de ClO_3^-) forment des ions O^- , déjà décrits ci-dessus ; la formule de Lewis de ClO_3^- est ainsi :

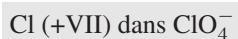


- Compte tenu de leurs positions relatives dans la classification périodique, les atomes de chlore et d'oxygène ont des électronégativités χ_{Cl} et χ_{O} telles que $\chi_{\text{O}} > \chi_{\text{Cl}}$ (dans l'échelle de Pauling). C'est pourquoi le calcul des degrés d'oxydation du chlore dans chacune des espèces précédentes se mène en basculant les électrons des liaisons covalentes $\text{Cl} - \text{O}$ vers l'oxygène :

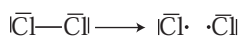
- Pour ClO_4^- :



Ce faisant, le chlore ne possède plus d'électron de valence, alors que dans l'état fondamental, Cl possède 7 électrons de valence ($3s^2 3p^5$). Cette perte de 7 électrons révèle que le chlore a pour degré d'oxydation :



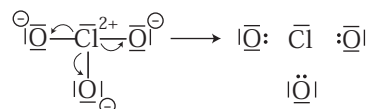
- Pour Cl_2 , les électrons de la liaison $\text{Cl} - \text{Cl}$ ne peuvent basculer vers un atome ou un autre ; la liaison est simplement rompue :



De fait, le chlore conserve les 7 électrons de valence qu'il possède dans son état fondamental. C'est pourquoi le degré d'oxydation du chlore vaut :



- Dans l'ion ClO_3^- :

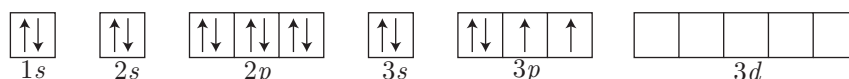


le chlore conserve un doublet électronique tandis que sa structure de valence présente 7 électrons, dans son état fondamental. La perte de 5 électrons justifie le degré d'oxydation :

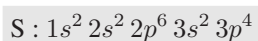


● 384 ————— Lycée Montesquieu, Le Mans

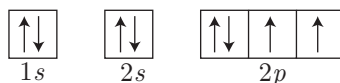
1. Les 16 électrons du soufre se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$, $2p$, $3s$ et $3p$:



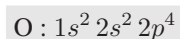
ce qui justifie sa configuration électronique :



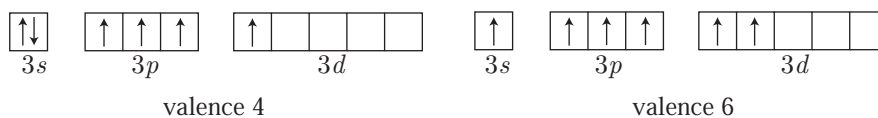
De même, la répartition des 8 électrons de l'oxygène sur les niveaux $1s$, $2s$ et $2p$:



fournit sa configuration électronique :

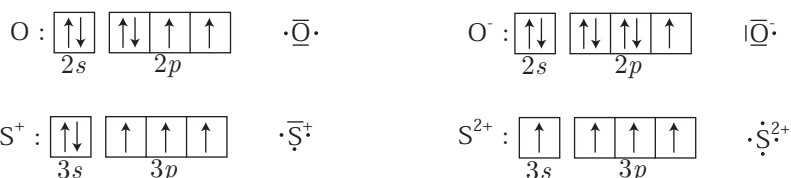


Ces deux éléments possèdent donc la même structure de valence ($ns^2 np^4$). Cependant, l'existence de niveaux $3d$ vacants dans le soufre permet une extension de sa valence à 4 ou à 6 :

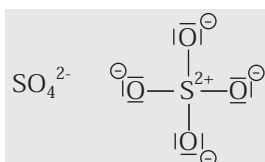


tandis que l'oxygène ne peut prétendre à une telle extension.

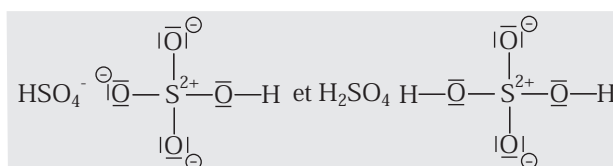
2. Donnons, préalablement, les formules de Lewis de quelques ions ou atomes, déduites de leur configuration de valence :



- (a) Dans l'ion SO_4^{2-} , l'atome de soufre doit former 4 liaisons covalentes, ce qui est possible avec S (par extension de la couche de valence, mais la présence d'un doublet électronique supplémentaire ne permet pas de vérifier la règle de l'octet) ou avec S^{2+} (qui vérifie la règle de l'octet). Il convient d'entourer alors l'atome de soufre de quatre ions O^- , afin d'obtenir la charge globale de SO_4^{2-} :



Quant à HSO_4^- et H_2SO_4 , ils s'obtiennent en fixant un ion H^+ à un ou deux ions O^- :



- (b) Soient x_1 , x_2 et x_3 les degrés d'oxydation du soufre dans SO_4^{2-} , HSO_4^- et H_2SO_4 , soient $x_{\text{H}} = 1$ et $x_{\text{O}} = -2$ ceux de l'hydrogène et de l'oxygène respectivement. En appliquant la loi :

$$\sum \text{degrés d'oxydation} = \text{charge globale}$$

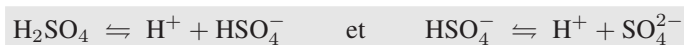
on obtient :

- pour SO_4^{2-} : $x_1 + 4 \times (-2) = -2 \Rightarrow x_1 = 6$;
- pour HSO_4^- : $1 + x_2 + 4 \times (-2) = -1 \Rightarrow x_2 = 6$;
- pour H_2SO_4 : $2 \times 1 + x_3 + 4 \times (-2) = 0 \Rightarrow x_3 = 6$,

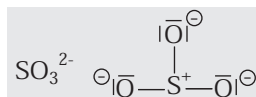
ce qui donne le degré d'oxydation du soufre :

$$\text{S (VI) dans } \text{SO}_4^{2-}, \text{HSO}_4^- \text{ et } \text{H}_2\text{SO}_4$$

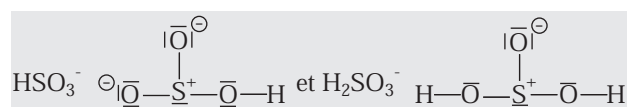
- (c) Le passage d'une espèce à l'autre s'interprète par un transfert d'ions H^+ ; il s'agit d'équilibres acido-basiques (et non d'oxydo-réduction, puisqu'il y a conservation du degré d'oxydation) :



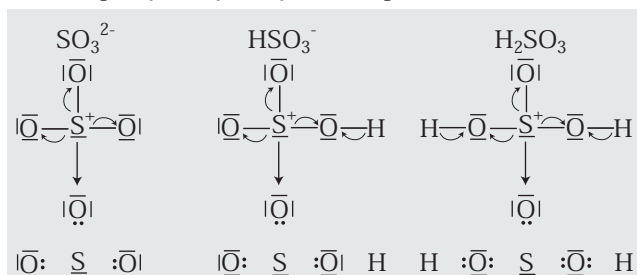
3. (a) Dans SO_3^{2-} , l'atome de soufre s'entoure de trois atomes d'oxygène. Aussi, seule la structure de valence de S^+ permet de former trois liaisons covalentes, tout en respectant la règle de l'octet. Trois ions O^- doivent alors être associés au soufre pour respecter la charge globale de SO_3^{2-} :



La fixation d'un ou deux ions H^+ aux ions O^- peut s'opérer sur cette molécule, pour conduire à HSO_3^- et H_2SO_3 :



- (b) Le degré d'oxydation du soufre dans ces espèces peut s'obtenir par une méthode différente de celle employée à la question 2.(b). Il convient de faire basculer les électrons des liaisons covalentes vers l'élément le plus électronégatif de ces liaisons. Sachant que $\chi_{\text{O}} > \chi_{\text{S}} > \chi_{\text{H}}$, cette opération conduit à :



Ce faisant, le soufre a perdu ses 4 électrons du niveau 3p, en conséquence de quoi son degré d'oxydation vaut IV.

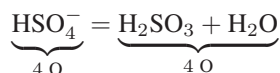
- (c) Le passage d'une forme à l'autre se réalise par simple transfert d'ions H^+ :



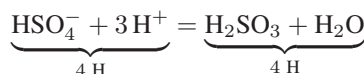
Il s'agit donc de réactions acido-basiques.

4. (a) Les espèces de la question 2. ont pour degré d'oxydation +VI tandis que celles de la question 3. ont pour degré d'oxydation +IV. Le passage d'un groupe à l'autre s'accompagne alors d'un changement du degré d'oxydation, ce qui caractérise une réaction d'oxydo-réduction, qui met en jeu un transfert d'électrons.
- (b) Le passage $\text{HSO}_4^- \rightarrow \text{H}_2\text{SO}_3$ doit être équilibré :

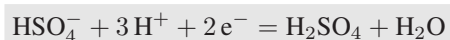
- à l'égard de l'oxygène, grâce à H_2O :



- vis-à-vis de l'hydrogène, avec H^+ :

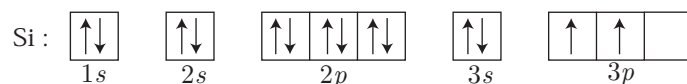


- quant aux charges, à l'aide de e^- :

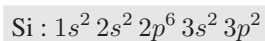


● 385 ————— Concours ENSTIM

1. Les 14 électrons du silicium se répartissent sur les niveaux 1s, 2s, 2p, 3s et 3p :



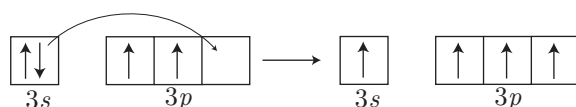
Aussi, dans son état fondamental, le silicium a pour configuration électronique :



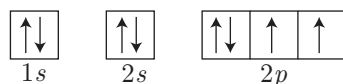
L'élément de la même colonne, situé juste au dessus de Si dans la classification périodique présente une configuration électronique qui se termine par $2p^2$; il s'agit :



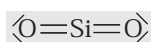
2. Dans son état fondamental, le silicium présente, sur son niveau de valence, un doublet électronique et deux électrons non appariés qui peuvent s'engager dans des liaisons covalentes ; ce faisant, le silicium transgresse la règle de l'octet (n'étant entouré que de trois paires d'électrons). C'est pourquoi il convient d'effectuer une extension de valence à l'aide du niveau $3p$ vacant :



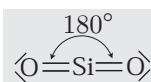
Sous cette configuration, le silicium peut réaliser 4 liaisons covalentes, tandis que la structure de l'oxygène :



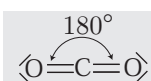
révèle que O ne réalise que deux liaisons covalentes ; la formule de Lewis de SiO_2 est :



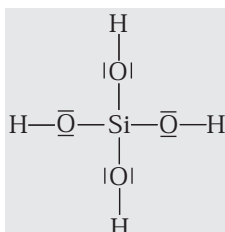
Étant de type AX_2 , la silice est une molécule linéaire :



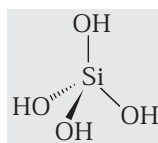
L'homologue du silicium, le carbone, peut également former le dioxyde de carbone, de même géométrie :



3. Dans H_4SiO_4 , le silicium peut former 4 liaisons simples Si – O :

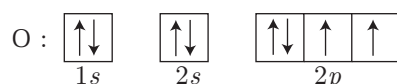


La molécule étant alors de type AX_4 , l'atome de silicium se trouve au centre d'un tétraèdre régulier formé par les groupes OH :

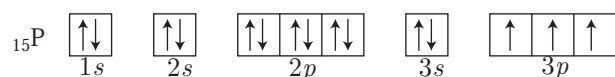


● 386 ————— Concours de l'ENS

1. Les électrons de ${}_8\text{O}$ et ${}_{15}\text{P}$ se répartissent sur les niveaux électroniques suivants :



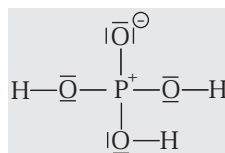
et :



d'où se déduisent les configurations de valence des ions O^- et P^+ :



Ce faisant la formation de 4 liaisons covalentes avec le phosphore est assurée à partir de l'ion P^+ (qui respecte alors la règle de l'octet), tandis que l'électron ainsi libéré sert à former un ion O^- dans la molécule H_3PO_4 (O^- est alors entouré de trois doublets électroniques et une liaison covalente) :

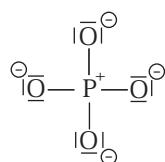


2. (a) La géométrie d'une molécule peut être déterminée à partir du nombre n de liaisons covalentes (simples, doubles ou triples) et du nombre p de doublets électroniques qui constituent la structure de valence d'un élément A :

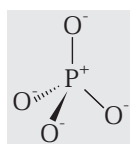
$n + p$	structure (AX_nE_p)	géométrie
2	AX_2	molécule linéaire.
3	AX_3 AX_2E_1	A situé au centre d'un triangle plan. Molécule coudée en A (angle inférieur à 120°).
4	AX_4 AX_3E_1 AX_2E_2	A situé au centre d'un tétraèdre régulier. A situé au sommet d'un pyramide à base triangulaire. Molécule coudée en A (angle inférieur à 107°).

$n + p$	structure (AX_nE_p)	géométrie
5	AX_5	A au centre d'une bipyramide à base triangulaire.
	AX_3E_2	Molécule en forme de T.
	AX_2E_3	Molécule linéaire.
6	AX_6	A au centre d'un octaèdre régulier.
	AX_5E_1	A au centre de la base carrée d'une pyramide.
	AX_4E_2	A au centre d'une molécule carrée plane.

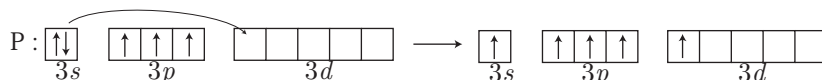
- (b) La formule de Lewis de l'ion PO_4^{2-} se déduit de celle de H_3PO_4 , après retrait de trois atomes d'hydrogène :



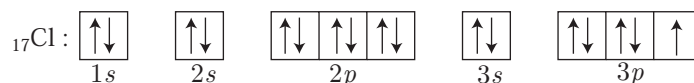
qui montre que le phosphore n'est entouré que de 4 liaisons covalentes (structure de type AX_4) ; il est situé au centre d'un tétraèdre régulier :



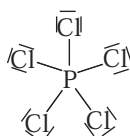
- (c) En revanche, la formation des 5 liaisons P–Cl de PCl_5 ne peut se justifier qu'en admettant une extension de la valence du phosphore par transfert électronique du niveau $3s$ vers un niveau $3d$ vacant :



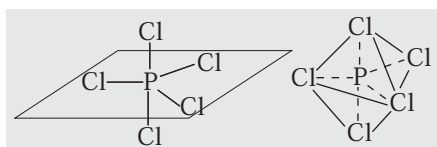
En outre, la structure électronique du chlore :



montre que sa structure de valence l'autorise à former une liaison covalente (la présence de trois doublets électroniques assurant le respect de la règle de l'octet). C'est pourquoi la formule de Lewis de PCl_5 :

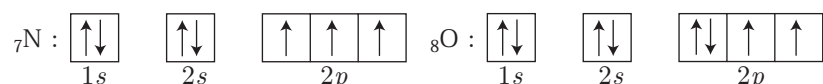


présente une structure de type AX_5 ; le phosphore occupe le centre d'une bipyramide à base triangulaire :

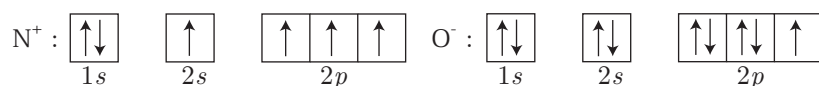


● 387 ————— Concours ENSI

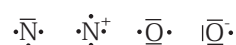
1. Les configurations électroniques de l'azote et de l'oxygène :



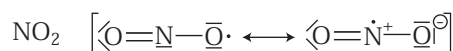
et de leurs ions :



permettent d'envisager les formules de Lewis :



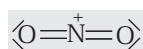
Cependant, la molécule NO_2 ne peut pas respecter la règle de l'octet, compte tenu du nombre impair d'électrons qu'elle contient :



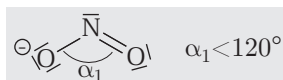
En revanche, cette règle peut être respectée dans les ions NO_2^- et NO_2^+ :



2. Dans l'ion NO_2^+ , l'azote est de type AX_2 , en conséquence de quoi cette molécule est linéaire :

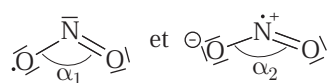


Quant à l'ion NO_2^- , il possède un atome d'azote de type AX_2E_1 , de sorte que l'angle α_1 entre les liaisons NO est inférieur à 120° :



En revanche, la molécule NO_2 peut exister :

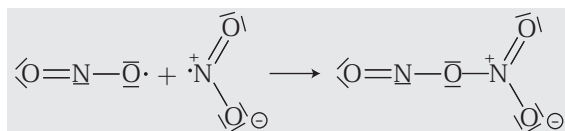
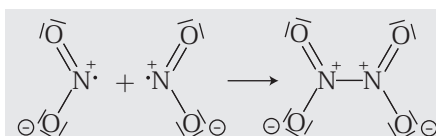
- soit sous une forme AX_2E_1 (lorsque l'électron « célibataire » est localisé sur l'oxygène), auquel cas l'angle ONO est le même que précédemment ;
- soit sous forme AX_2 (lorsque l'électron « célibataire » est localisé sur l'azote) ; la présence d'un électron sur l'atome d'oxygène provoque alors un léger rapprochement des liaisons NO, dont l'angle prend une valeur α_2 légèrement inférieure à 180° :



La théorie V.S.E.P.R. confirme ainsi que l'ion NO_2^- présente un angle $\alpha_1 = 115^\circ < 120^\circ$, et d'autre part, la molécule NO_2 peut passer d'une forme à l'autre, ce qui justifie que :

$$115^\circ < \alpha < 180^\circ \text{ avec } \alpha = 134^\circ$$

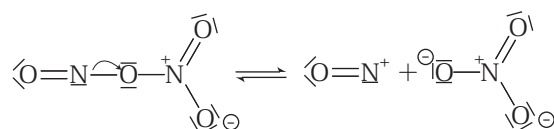
3. Les deux formules de Lewis permettent d'interpréter la dimérisation de NO_2 :



Cependant, les deux premières structures sont peu probables car instables ; l'une d'elle se présente comme un peroxyde (une liaison simple $\text{O}-\text{O}$ se dissocie facilement) tandis que la deuxième admet une liaison covalente entre deux cations qui se repoussent (et d'autre part la présence simultanée de quatre charges sur une telle molécule n'est pas un facteur stabilisateur). C'est pourquoi seule la troisième structure permet d'interpréter l'autodissociation de N_2O_4 :

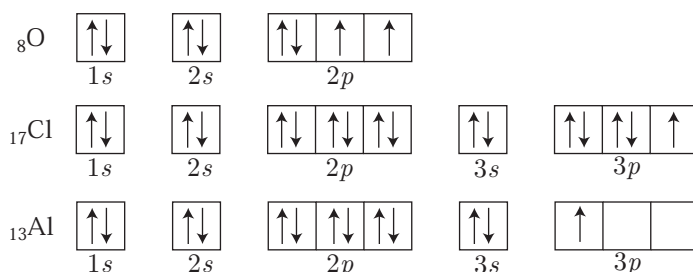


si l'on admet que la rupture d'une liaison $\text{N}-\text{O}$ permet de faire basculer un électron de l'atome d'azote vers l'atome d'oxygène, au demeurant plus électronégatif :

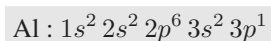
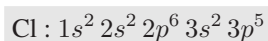
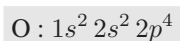


● 388 ————— Lycée Condorcet, Paris

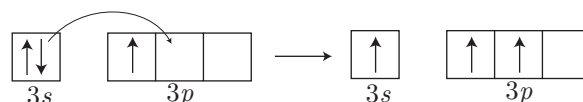
1. Les électrons de ${}_{13}\text{Al}$, ${}_{17}\text{Cl}$ et ${}_{8}\text{O}$ se répartissent sur les niveaux suivants :



à l'origine des configurations électroniques :



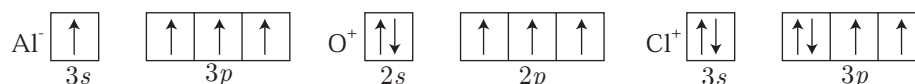
En outre, l'aluminium peut présenter une extension de sa couche de valence par transfert d'un électron du niveau $3s$ vers un niveau $3p$ vacant :



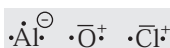
C'est pourquoi les formules de Lewis de Al, Cl et O sont :



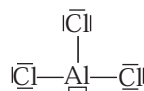
En outre, les structures de valence des ions :



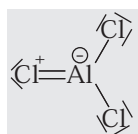
fournissent leurs formules de Lewis :



2. (a) Dans la molécule AlCl_3 , l'aluminium peut former trois liaisons covalentes avec le chlore :



Cependant, cette structure transgresse la règle de l'octet (l'aluminium n'est entouré que de 6 électrons). Les formules de Lewis de la question précédente montrent que l'ion Al^- peut former 4 liaisons covalentes (et respecter ainsi la règle de l'octet). Ce faisant, l'électron supplémentaire de l'aluminium provient de l'ionisation d'un atome de chlore. L'ion Cl^+ ainsi formé, dispose quant à lui de deux électrons « célibataires » qui peuvent être engagés dans autant de liaisons covalentes. C'est pourquoi la formule de Lewis de AlCl_3 est :

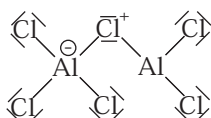


Cette formule révèle que AlCl_3 est de type AX_3 , auquel cas il prend la forme d'une molécule triangulaire plane, l'angle entre deux liaisons $\text{Al}-\text{Cl}$ valant 120° .

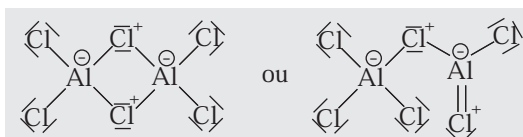
- (b) Dans le dimère Al_2Cl_6 , les deux atomes d'aluminium ne peuvent se lier ensemble, sans quoi la structure obtenue (Al avec Al ou avec Al^-) :



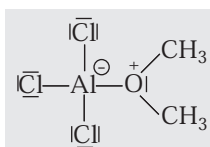
ne pourrait former que 5 liaisons covalentes au *maximum*. C'est pourquoi il faut envisager la formation d'une liaison Al – Cl entre deux molécules de AlCl₃, auquel cas l'ion Cl⁺ doit intervenir afin de former deux liaisons covalentes ; l'électron ainsi perdu par le chlore est récupéré par l'aluminium qui devient Al⁻ :



Cependant, dans cette représentation, un atome d'aluminium ne respecte pas la règle de l'octet. C'est pour cette raison que cet atome se transforme en ion Al⁻ (tétravalent) en récupérant l'électron d'un atome de chlore qui devient un ion Cl⁺ (divalent). Deux formules de Lewis sont alors envisageables :



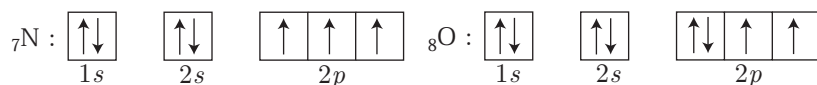
- (c) L'oxyde de diéthyle possède un atome d'oxygène qui peut étendre sa valence à 3, en perdant un électron (l'ion O⁺ forme trois liaisons), lequel est récupéré par l'aluminium de AlCl₃ ; l'ion Al⁻ est tétravalent :



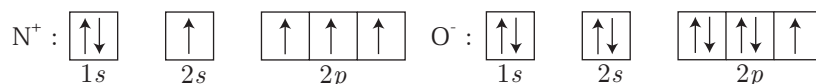
La formation de la liaison Al – O assure le respect de la règle de l'octet par l'aluminium, qui peut ainsi exister sous forme stable dans le monomère AlCl₃. En revanche, l'hexane étant dépourvu d'atome d'oxygène, il ne peut réaliser cette stabilisation ; le chlorure d'aluminium s'y dimérise pour se stabiliser.

● 389 ————— Concours Agro

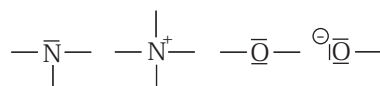
1. Les configurations électroniques des atomes d'azote et d'oxygène sont :



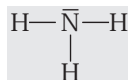
et celles de leurs ions s'écrivent :



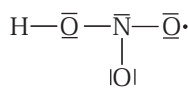
ce qui montre que ces espèces ont pour formules de Lewis (qui respectent la règle de l'octet) :



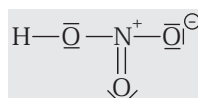
Les formules précédentes permettent de prévoir la formule de Lewis de l'ammoniac NH_3 :



ainsi que celle de l'acide nitrique HONO_2 , où l'atome d'azote doit se lier à trois atomes d'oxygène. Ces liaisons peuvent être réalisées par l'atome neutre, mais dans ce cas tous les atomes d'oxygène ne peuvent pas respecter la règle de l'octet :

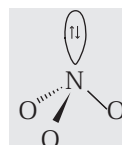


C'est pourquoi il faut envisager la formation d'une liaison double $\text{O} = \text{N}^+$, l'électron cédé ainsi par l'azote étant récupéré par un atome d'oxygène :

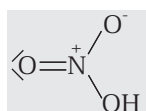


2. Ces représentations révèlent que :

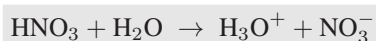
- dans NH_3 , l'atome d'azote est de type AX_3E_1 ; il se trouve au sommet d'une pyramide à base triangulaire :



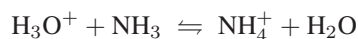
- dans HNO_3 (ou HONO_2), l'atome d'azote est de type AX_3 ; il se trouve au centre d'un triangle plan :



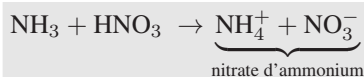
3. L'acide nitrique est un acide fort dans l'eau :



Aussi, l'ion H_3O^+ , libéré par la mise en solution de HNO_3 , peut réagir avec l'ammoniac, base conjuguée du couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$:



Cette réaction étant presque totale, l'équation-bilan de la réaction entre l'ammoniac et l'acide nitrique peut être présentée de la manière suivante :



4. (a) Les composés proposés ont pour noms :

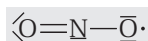
NO	monoxyde d'azote
NO ₂	dioxyde d'azote
N ₂ O ₄	tétraoxyde de diazote
HNO ₂	acide nitreux

- (b) • Le monoxyde d'azote comporte un nombre impair d'électrons ($7 + 8 = 15$) en raison de quoi il serait vain des chercher des appariements permettant le respect de la règle de l'octet pour tous les atomes (un électron demeurera non apparié dans cette structure) :

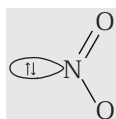


Constituée uniquement de deux atomes, cette molécule est nécessairement linéaire.

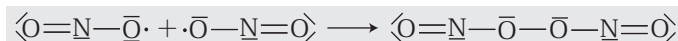
- Pour les mêmes raisons un nombre impair d'électrons : $7 + 2 \times 8 = 23$), la règle de l'octet ne peut être respectée par tous les électrons de NO₂ :



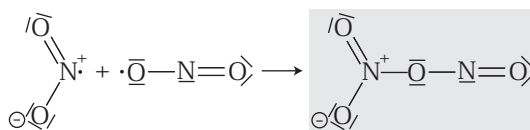
L'atome d'azote y présente alors un environnement de type AX₂E₁ ; la molécule est plane et coudée :



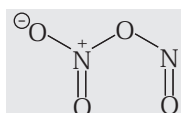
- La molécule N₂O₄ pourrait être considérée comme une dimérisation de NO₂, déjà représentée à la question précédente :



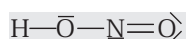
Cependant, l'énoncé précise qu'il n'y a pas de liaison O – O. C'est pourquoi il faut envisager une liaison entre un atome d'oxygène d'une molécule NO₂ et un atome d'azote d'une autre molécule NO₂. Cet atome d'azote doit, par conséquent, se transformer en ion N⁺ (tétravalent), l'électron ainsi libéré étant récupéré par un atome d'oxygène :



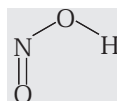
L'un des atomes d'azote, de type AX₃ (il s'agit de N⁺) se trouve au centre d'un triangle plan, tandis que l'autre (N), de type AX₂E₁, constitue un coude. De même, l'atome d'oxygène situé entre les deux atomes d'azote, de type AX₂E₂, constitue également un coude :



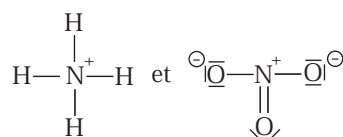
- Dans la molécule HNO₂ (HONO), l'atome d'azote peut former une liaison double N = O et une liaison simple N – O :



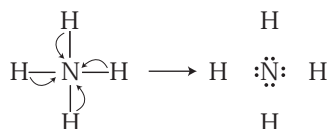
À nouveau, l'atome d'azote (de type AX_2E_1) forme un coude, de même que l'atome d'oxygène (de type AX_2E_2) :



5. Le nitrate d'ammonium est composé des ions NH_4^+ et NO_3^- , de formules de Lewis :



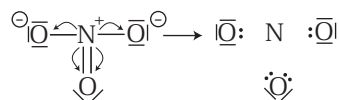
Les électronégativités des éléments H, N et O suivent le classement : $\chi_{\text{O}} > \chi_{\text{N}} > \chi_{\text{H}}$, les électrons des liaisons covalentes peuvent dès lors être déplacés vers les éléments les plus électronégatifs :



À l'issue de ce transfert, l'ammoniac possède $n_{\text{app}} = 8$ électrons, tandis que dans son état fondamental il possède $n_0 = 5$ électrons de valence. C'est pourquoi son degré d'oxydation $d^0 = n_0 - n_{\text{app}}$ vaut :

$$d^0 = -3 \text{ dans } \text{NH}_3$$

De même, avec NO_3^- :



Ce faisant, l'atome d'azote possède $n_{\text{app}} = 0$ électron de valence, c'est-à-dire un degré d'oxydation :

$$d^0 = 5 - 0 = 5 \text{ dans } \text{NO}_3^-$$

Par conséquent, le nitrate d'ammonium est composé d'un atome d'azote N (-III) réducteur et d'un atome d'azote N (+V) oxydant ; une réaction d'oxydo-réduction peut se produire rapidement dans certaines conditions opératoires, ce qui justifie l'instabilité du nitrate d'ammonium.

● 390 **Lycée Fermat, Toulouse**

1. Dans leur état fondamental, les atomes de carbone et d'oxygène ont pour structure de valence :



ce qui montre que C et O peuvent former une liaison double (le carbone conservant un doublet électronique et l'oxygène en conservant deux) :



Cependant, sous cette forme, l'atome de carbone ne respecte pas la règle de l'octet (seulement trois paires d'électrons l'entourent) ; pour y parvenir, il suffirait qu'un électron (retiré à l'oxygène) occupe le niveau $2p$ vacant. Concomitamment, les ions C^- et O^+ sont formés, avec pour structures de valence :



Ce faisant, chacun des atomes peut former 3 liaisons covalentes et conserver un doublet électronique, ce qui conduit à la formule de Lewis :



2. L'électronégativité χ rend compte de l'avidité d'un atome à l'égard des électrons, et de sa capacité à retenir ses électrons. Aussi, les valeurs numériques $\chi_{\text{C}} = 2,5$ et $\chi_{\text{O}} = 3,5$ montrent que $\chi_{\text{O}} > \chi_{\text{C}}$, c'est-à-dire que de carbone ou de l'oxygène, c'est ce dernier élément qui devrait attirer à lui les électrons ; la formule de Lewis proposée précédemment est en désaccord avec les électronégativités des atomes.
3. La valeur numérique de ε et de $\|\vec{C}\vec{O}\rangle$ conduisent à :

$$\|\vec{\mu}\| = \varepsilon \times \|\vec{C}\vec{O}\rangle = 4,3 \cdot 10^{-21} \times 0,115 \cdot 10^{-9} = 4,945 \cdot 10^{-31} \text{ C} \cdot \text{m}$$

c'est-à-dire à : $\|\vec{\mu}\| = \frac{4,945 \cdot 10^{-31}}{0,33 \cdot 10^{-29}} = 0,15 \text{ D}$. L'introduction du Debye (D) permet de débarrasser la valeur numérique du moment dipolaire des puissances de 10.

4. Si la liaison $\text{C} \equiv \text{O}$ était parfaitement ionique, comme le montre la formule de Lewis de la première question, une charge $\pm e$ serait portée par les atomes de la molécule CO, lui attribuant un moment dipolaire de norme :

$$\|\vec{\mu}\|_{\text{théo.}} = e \times \|\vec{C}\vec{O}\rangle = 1,6 \cdot 10^{-19} \times 0,115 \cdot 10^{-9} = 1,84 \cdot 10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$$

soit encore : $\|\vec{\mu}\|_{\text{théo.}} = \frac{1,84 \cdot 10^{-29}}{0,33 \cdot 10^{-29}} = 5,58 \text{ D}$. En fait, seule une fraction α de la charge élémentaire e se reporte réellement sur les atomes C et O, à l'origine du moment dipolaire :

$$\|\vec{\mu}\| = \alpha e \times \|\vec{C}\vec{O}\rangle \quad \text{tandis que} \quad \|\vec{\mu}\|_{\text{théo.}} = e \times \|\vec{C}\vec{O}\rangle$$

Le coefficient α définit ainsi le pourcentage ionique de la liaison $\text{C} \equiv \text{O}$ par le

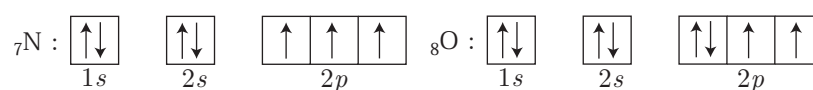
rapport : $\alpha = \frac{\|\vec{\mu}\|}{\|\vec{\mu}\|_{\text{théo.}}}$

Application numérique : $\alpha = \frac{0,15}{5,28} = 0,027 \Rightarrow \alpha = 2,7\%$.

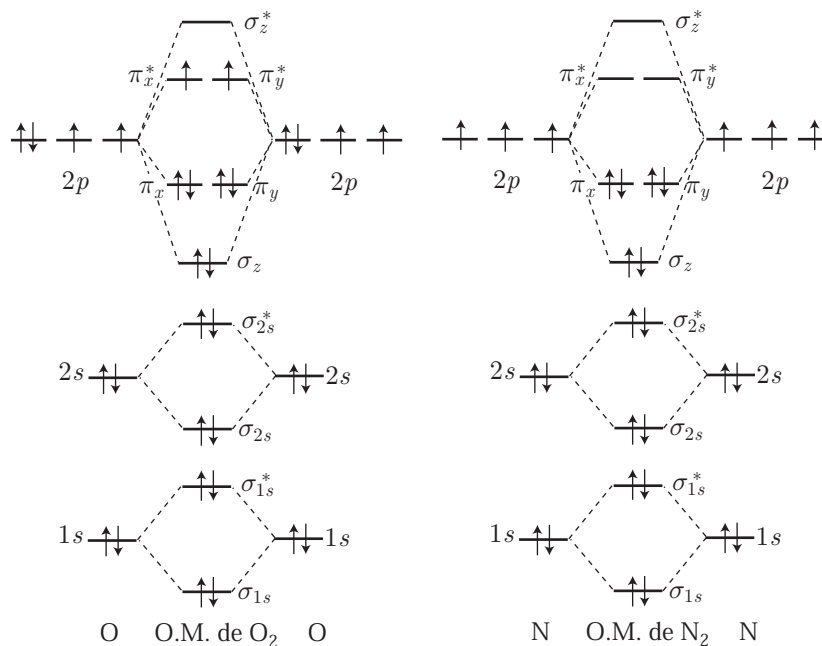
Cette valeur indique que seule une faible fraction de la charge électronique est réelle portée par les atomes dans la molécule CO : $|\overset{-\alpha}{\text{C}} \equiv \overset{+\alpha}{\text{O}}|$ ce qui traduit un compromis entre la tendance imposée par la règle de l'octet et celle issue des valeurs relatives des électronégativités.

● 391 ————— Concours ENS

1. Les 7 électrons (*resp.* 8) de l'azote (*resp.* de l'oxygène) se répartissent sur les niveaux 1s, 2s et 2p :



C'est pourquoi les diagrammes d'énergie des O.M. de O₂ et de N₂ sont :



On distingue, sur ces diagrammes d'O.M. :

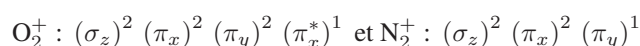
- des orbitales liantes : σ_{1s} , σ_{2s} , σ_z , π_x et π_y ;
- des orbitales anti-liantes : σ_{1s}^* , σ_{2s}^* , π_x^* , π_y^* et σ_z^* ;
- des couples d'orbitales non liantes : $\{\sigma_{1s}, \sigma_{1s}^*\}$ et $\{\sigma_{2s}, \sigma_{2s}^*\}$, ainsi appelées car la saturation d'un couple d'orbitales liante/anti-liante ne participe en rien à la liaison covalente.

En conséquence de ce qui précède, le calcul de l'indice de liaison dans O₂ et N₂ ne prendra pas en compte les électrons non liants. Seuls les N_{liants} électrons liants (sur

les orbitales σ_z, π_x, π_y) et les $N_{\text{anti-liants}}$ électrons anti-liants (des orbitales π_x^*, π_y^*) serviront au calcul de $I = \frac{N_{\text{liants}} - N_{\text{anti-liants}}}{2}$:

$$I(\text{O}_2) = \frac{6 - 2}{2} = 2 \quad \text{et} \quad I(\text{N}_2) = \frac{6}{2} = 3$$

2. Les ions O_2^+ et N_2^+ sont obtenus par retrait d'un électron des niveaux externes des molécules O_2 et N_2 , et adoptent ainsi les configurations électroniques :



Ce faisant, les nouveaux indices de liaison valent :

$$I(\text{O}_2^+) = \frac{6 - 1}{2} = 2,5 \quad \text{et} \quad I(\text{N}_2^+) = \frac{5}{2} = 2,5$$

Les inégalités :

$$I(\text{O}_2^+) > I(\text{O}_2) \quad \text{et} \quad I(\text{N}_2^+) < I(\text{N}_2)$$

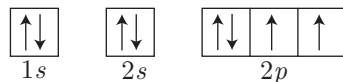
révèlent que les transformations : $\text{O}_2 \rightarrow \text{O}_2^+ + e^-$ et $\text{N}_2 \rightarrow \text{N}_2^+ + e^-$ se sont accompagnées :

- d'une diminution de la distance interatomique O – O ;
- d'une augmentation de la distance interatomique N – N

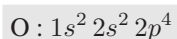
car plus l'indice de liaison est important, plus la distance interatomique est petite (statistiquement, I désigne le nombre de paires d'électrons participant en moyenne à la liaison de deux atomes).

● 392 ————— Concours Polytechnique

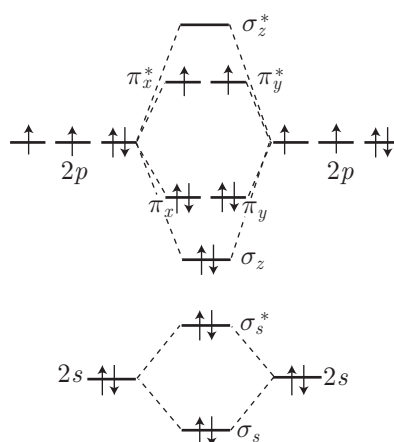
1. Les 8 électrons de l'atome d'oxygène se répartissent sur les niveaux $1s, 2s$ et $2p$:



d'où se déduit sa configuration électronique :



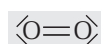
2. Dans la molécule O_2 , les électrons de valence se répartissent de la manière suivante :



Ce diagramme montre que la molécule présente $N_{\text{liants}} = 8$ électrons liants (sur les orbitales σ_s , σ_z , π_x et π_y) et $N_{\text{anti-liants}} = 4$ électrons anti-liants (orbitales σ_s^* , π_x^* , π_y^*), les orbitales σ_{1s} et σ_{1s}^* , non liantes, n'étant pas représentées. C'est pourquoi son indice de liaison vaut :

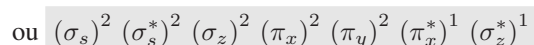
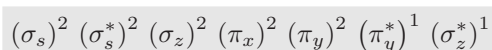
$$I = \frac{N_{\text{liants}} - N_{\text{anti-liants}}}{2} = \frac{8 - 4}{2} \Rightarrow I = 2$$

3. La formule de Lewis de la molécule O_2 :



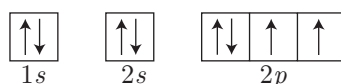
confirme la formation d'une liaison double entre les atomes d'oxygène. Cependant, cette formule ne rend pas compte de l'existence de deux électrons non appariés sur les orbitales π_x^* et π_y^* .

4. On peut envisager une transition électronique du niveau π_x (ou π_y) vers le niveau σ_z^* plus énergétique, auquel cas l'oxygène singulet a pour configuration électronique :

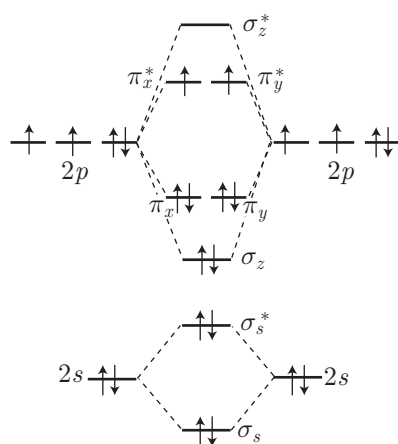


● 393 ————— Concours ENSI

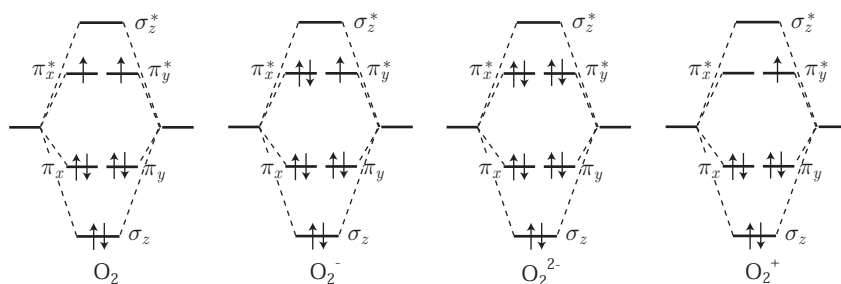
1. L'atome d'oxygène a pour configuration électronique :



c'est-à-dire pour structure de valence : $2s^2 2p^4$. Ainsi, le diagramme des orbitales moléculaires de O_2 prend la forme suivante (l'orbitale σ_z est plus stable que les orbitales π_x et π_y) :



- La présence de deux électrons non appariés sur les orbitales π_x^* et π_y^* rend compte du paramagnétisme de la molécule O_2 .
- En omettant la représentation des orbitales non liantes σ_{2s} et σ_{2s}^* , les configurations électroniques de O_2 , O_2^- , O_2^{2-} et O_2^+ sont les suivantes :



Les indices de liaison : $I = \frac{N_{\text{liants}} - N_{\text{anti-liants}}}{2}$ découlent de ces diagrammes :

$$I(O_2) = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$I(O_2^-) = \frac{6 - 3}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$I(O_2^{2-}) = \frac{6 - 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$I(O_2^+) = \frac{6 - 1}{2} = \frac{5}{2} = 2,5$$

La corrélation des indices de liaison et des longueurs de liaison (d) :

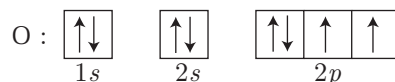
Espèce chimique	O_2^{2-}	O_2^-	O_2	O_2^+
d (en pm)	149	126	121	112
I	1	1,5	2	2,5

révèle que plus I est grand, plus d est petit. Ce résultat s'interprète en termes de présence d'électrons entre les deux atomes d'oxygène : plus l'indice de liaison est important, plus les électrons, entre les atomes d'oxygène, sont nombreux en moyenne. La liaison O – O s'en trouve renforcée, tandis que les atomes sont plus proches ; la distance d entre deux atomes décroît avec l'indice de liaison.

● 394 Concours e3a

I- Représentation de Lewis

1. (a) Les 8 électrons de l'atome d'hydrogène se répartissent sur les niveaux $1s$, $2s$ et $2p$:



La structure de valence de l'oxygène montre que l'atome peut former deux liaisons covalentes (deux doublets électroniques assurant le respect de la règle de l'octet). La formule de Lewis de la molécule O_2 est par conséquent :



- (b) Le dioxygène est paramagnétique, c'est-à-dire que, soumise à un champ magnétique extérieur \vec{B} , la molécule présente un moment magnétique $\vec{\mu}$ de même sens que \vec{B} .
2. (a) Pour qu'une molécule présente des propriétés paramagnétiques il est nécessaire qu'elle possède des électrons non appariés, ce dont ne rend pas compte la formule de Lewis précédente. Aussi devrait-on envisager, pour cette molécule, la formule :



compatible avec les propriétés magnétiques de O_2 , mais en contradiction avec la règle de l'octet.

- (b) Si la formule de Lewis proposée précédemment est acceptable au regard des propriétés magnétiques de O_2 , elle assimile également cette molécule à un biradical, particulièrement réactif, car susceptible de former deux liaisons covalentes à partir de ses électrons non appariés.
3. (a) Le moment magnétique μ , évalué expérimentalement, permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \sqrt{m(m+2)} &= \frac{\mu}{\mu_B} = \frac{2,59 \cdot 10^{-23}}{9,27 \cdot 10^{-24}} = 2,79 \\ \Rightarrow m^2 + 2m &= (2,79)^2 = 7,8 \simeq 8 \\ \Rightarrow m^2 + 2m - 8 &= 0 \end{aligned}$$

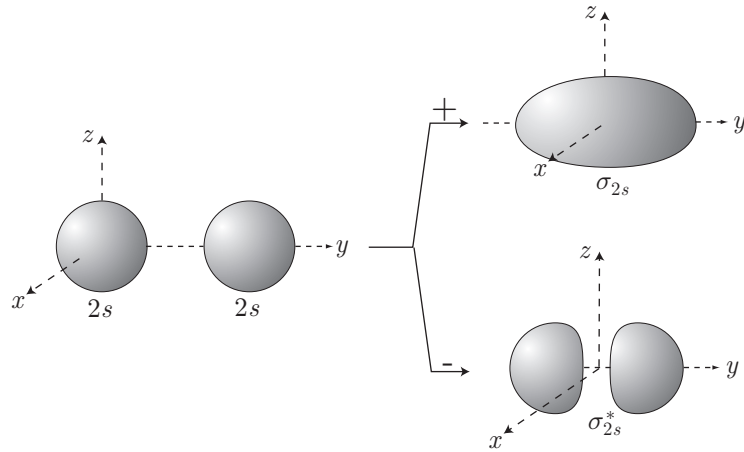
Le discriminant réduit de cette équation du second degré : $\Delta' = 1 + 8 = 9$ est à l'origine de deux solutions : $m = -1 \pm \sqrt{\Delta'} = -1 \pm 3$, c'est-à-dire : $m = 2$ ou $m = -4$.

- (b) Des deux valeurs précédemment obtenues pour m , seule $m = 2$ rend compte de l'existence de deux électrons non appariés dans la formule de Lewis de la question 2.(a) : $\cdot \bar{\text{O}}-\bar{\text{O}} \cdot$.

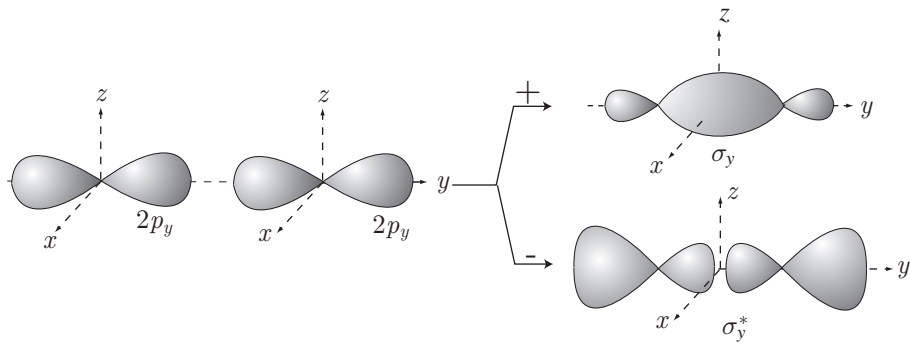
II- Diagramme d'orbitales moléculaires (O.M.)

1. La structure électronique de l'oxygène montre que les orbitales atomiques de valence, en interaction dans la molécule O_2 , sont : $2s^2 2p^4$.
2. En choisissant, pour axe internucléaire (Oy), les orbitales moléculaires proviennent de la combinaison linéaire (constructive ou destructive) des orbitales :

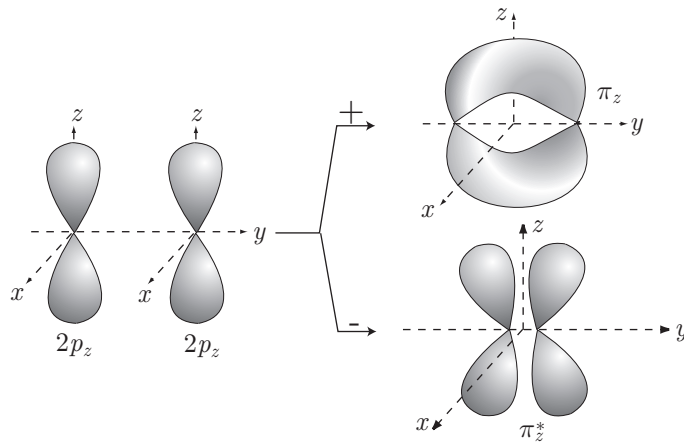
- $2s$:



- $2p_y$:

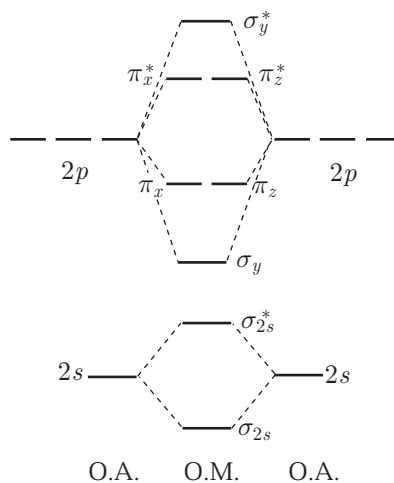


- $2p_z$ et $2p_x$:

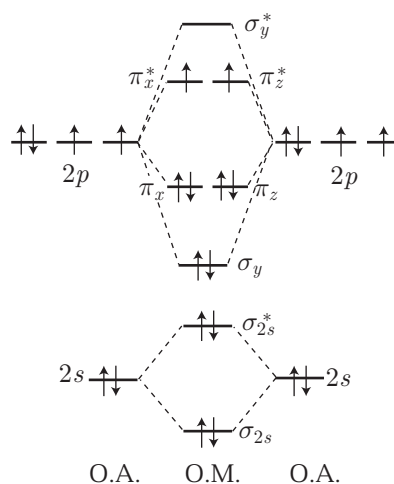


De même, la combinaison de deux O.A. $2p_x$ produit une orbitale liante π_x et une orbitale anti-liante π_x^* .

Par suite, le diagramme des orbitales moléculaires présente l'allure suivante :



3. (a) En respectant les règles de remplissage (Pauli, Hund et Klechkowski), la molécule O_2 a pour configuration électronique :



- (b) L'appariement de deux électrons sur les orbitales π_x^* et π_y^* est rendu impossible par la règle de Hund, en vertu de laquelle les électrons occupent d'abord tous les niveaux de même énergie avant de s'apparier. Cette règle justifie ainsi l'existence de deux électrons « célibataires » dans la molécule O_2 .
- (c) La configuration électronique obtenue pour O_2 confirme que la présence de $m = 2$ électrons « célibataires » est responsable de l'apparition d'un moment dipolaire $\mu = \sqrt{m(m+2)} \times \mu_B$.

Chapitre 11

Structure de la matière condensée

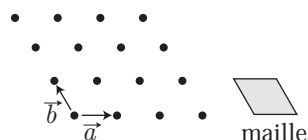
11.1 Généralités

11.1.1 Définitions

Définition 1 On appelle réseau un ensemble de points entourés d'un même environnement, lequel se présente partout avec la même orientation (de tels points sont dits congruents).



Définition 2 Chacun des points d'un réseau peut être repéré par des vecteurs de base (\vec{a} , \vec{b} pour un réseau bidimensionnel ou \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} dans le cas d'un réseau tridimensionnel). Le polygone obtenu à partir de ces vecteurs de base constitue une maille.



Remarque – Dans un cristal idéal, une maille se répète une infinité de fois par translation de vecteurs $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$, $\{\alpha, \beta, \gamma\} \in \mathbb{Z}^3$.

Définition 3 Chaque point de la maille, repéré par les vecteurs de base, est appelé nœud.

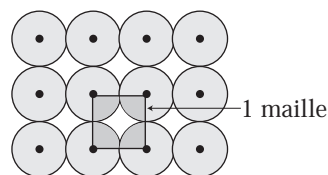
Définition 4 Le motif d'une maille est l'espèce chimique qui occupe la position des nœuds (ou d'autres sites définis dans la maille). Il peut s'agir d'atomes (par exemple dans le métal Cu), d'ions (par exemple Na^+ , Cl^-) ou de molécules (par exemple dans la glace ou le diiode).

Remarque – Si, dans une maille, se trouvent plusieurs espèces chimiques A, B, C ..., le motif de la maille est représenté par la formule chimique $A_a B_b C_c \dots$, où a, b, c sont les plus petits entiers naturels qui rendent compte de la composition de la maille (par exemple NaCl, CaF_2).

Si une maille possède N fois le même motif, mais que celui-ci appartient simultanément à n mailles, le nombre de motifs par maille vaut :

$$\nu = \frac{N}{n}$$

Dans l'exemple ci-contre, chaque maille comporte 4 motifs (un à chaque nœud). Mais puisque chacun de ces motifs appartient simultanément à 4 mailles, alors il y a réellement $\frac{4}{4} = 1$ motif par maille.



Définition 5 La coordinnence d'une espèce chimique, dans la maille, désigne le nombre des autres espèces les plus proches voisines avec lesquelles des liaisons sont établies (en général, les sphères qui figurent ces espèces sont tangentes les unes aux autres). Dans l'exemple précédent, la coordinnence vaut 4.

Définition 6 Soit m_{maille} la masse de la maille, et V_{maille} son volume. La masse volumique de la maille (et donc du cristal) vaut :

$$\rho_{\text{cristal}} = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}}$$

Définition 7 Soit V_{motifs} le volume total occupé par les motifs d'une maille, qui offre un volume V_{maille} . La compacité C_0 de la maille est définie par le rapport :

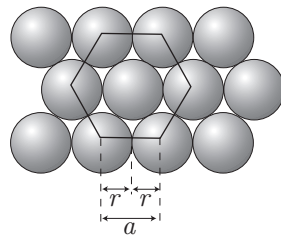
$$C_0 = \frac{V_{\text{motifs}}}{V_{\text{maille}}} < 1$$

11.1.2 Empilements compacts de sphères

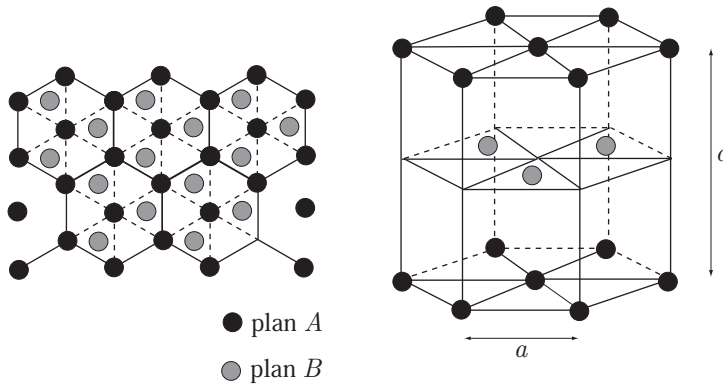
Dans cette partie, nous nous intéressons à deux types d'empilements de sphères rigides, de rayon R .

11.1.2.1 Arrangement hexagonal compact

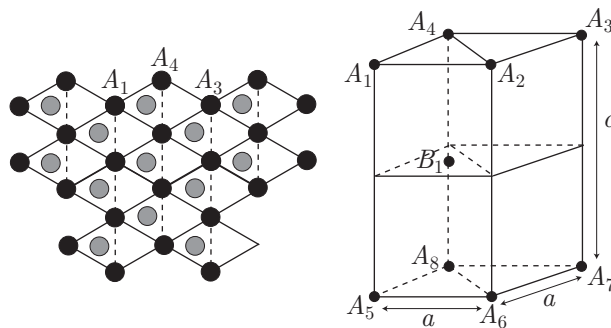
Cet arrangement consiste en un empilement de plans contenant des sphères tangentes les unes aux autres, et dont les centres décrivent des hexagones réguliers de côté $a = 2R$.



L'empilement des plans présentant une périodicité de deux plans décalés, cet arrangement est aussi appelé arrangement $\{AB\}$:



Une telle maille est décrite par un prisme à base losange, de hauteur c et de côté a :



Les propriétés d'une telle maille sont :

- ses dimensions :

$$a = 2R \text{ et } c = 2a \sqrt{\frac{2}{3}} = 4R \sqrt{\frac{2}{3}}$$

- son volume : $V_{\text{maille}} = a^3 \sqrt{2} = 8R^3 \sqrt{2}$;
- le nombre de motifs par maille : 8 motifs A_i (communs à 8 mailles) et un motif B_1 entièrement inclus dans la maille, c'est-à-dire :

$$\nu = \frac{8}{8} + 1 = 2 \text{ motifs par maille ;}$$

- la compacité $C_0 = \frac{V_{\text{motifs}}}{V_{\text{maille}}}$, avec $V_{\text{motifs}} = 2 \times \frac{4}{3} \pi R^3$:

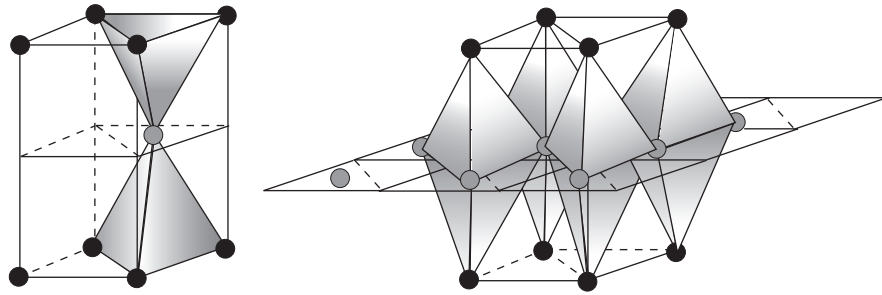
$$C_0 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,74$$

- la coordinnence : coordinnence = 12 .

Définition 8 Dans la maille se trouvent également des vides, le centre de ces vides est appelé site interstitiel.

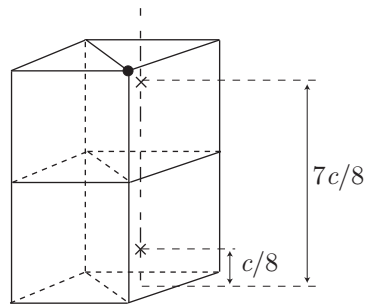
Selon l'environnement qui délimite ces sites, on distingue :

- des sites tétraédriques (certains de ces sites sont communs à plusieurs mailles, suggérées ci-dessous) :

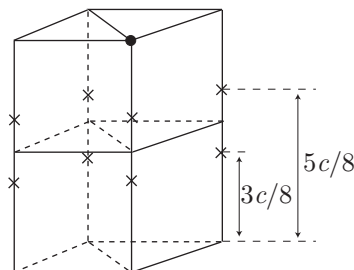


Deux types de ces sites apparaissent ainsi :

- 2 sites complètement inclus dans la maille, aux cotes $\frac{c}{8}$ et $\frac{7c}{8}$ (depuis la base) :



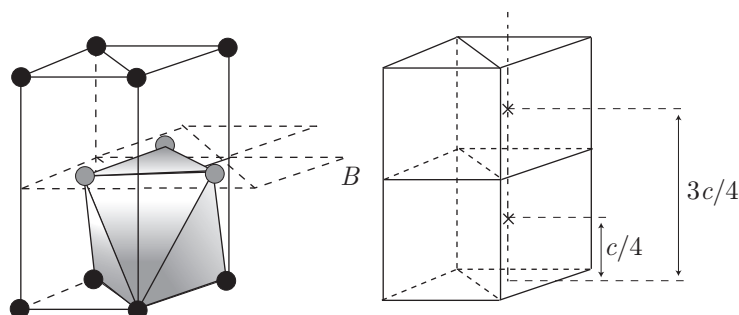
- 8 sites, situés sur les arêtes de la maille (et donc communs à 4 mailles), aux cotes $\frac{3c}{8}$ et $\frac{5c}{8}$:



Par conséquent, la maille hexagonale compacte contient :

$$2 + \frac{8}{4} = 4 \text{ sites tétraédriques.}$$

- des sites octaédriques, formés par huit atomes tangents les uns aux autres, mais n'appartenant pas nécessairement à la maille (un seul motif octaédrique est représenté ci-dessous, pour la clarté du schéma) :

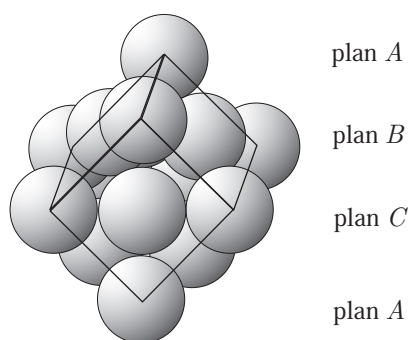


Les sites octaédriques, symétriques par rapport au plan B , sont contenus intégralement dans la maille qui possède par conséquent :

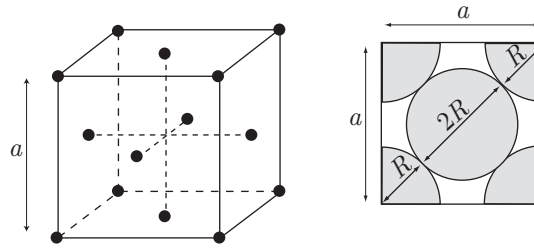
2 sites octaédriques.

11.1.2.2 Arrangement cubique à faces centrées

Cet arrangement provient de la superposition de plans (où les atomes forment des hexagones) qui coïncident avec une périodicité de 3 plans ; l'arrangement cubique à faces centrées est aussi appelé arrangement $\{ABC\}$, en référence avec la périodicité des empilements.



Conventionnellement, la maille cubique à faces centrées est constituée d'une maille cubique formée par les centres des sphères, lesquelles occupent également le centre de chaque face :



Une telle maille est caractérisée par :

- son arête : $a = 2R\sqrt{2}$, le long de laquelle les sphères ne sont pas tangentes les unes aux autres. Cependant, elles le sont le long de la diagonale de chaque face.
- son volume :

$$V_{\text{maille}} = a^3 = 16 R^3 \sqrt{2}$$

- le nombre de motifs ν qu'elle contient (8 sphères aux nœuds de la maille – communes à 8 mailles – et 6 sphères aux centres des faces – communes à 2 mailles) :

$$\nu = \frac{8}{8} + \frac{6}{2} \Rightarrow \nu = 4 \text{ motifs par maille.}$$

Remarque – Chaque sphère ayant un rayon R , le volume total qu'elles occupent dans la maille vaut :

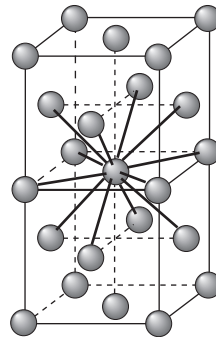
$$V_{\text{motif}} = 4 \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{16}{3} \pi R^3$$

- sa compacité :

$$C_0 = \frac{V_{\text{motifs}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,74$$

Remarque – La compacité des arrangements hexagonal compact et cubique à faces centrées prend la même valeur. Cela tient à la similitude des empilements $\{AB\}$ et $\{ABC\}$ qui ne se distinguent que par la périodicité de la superposition des plans d'atomes.

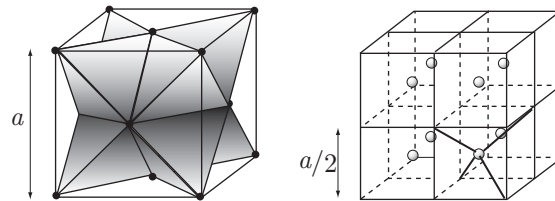
- la coordinaence de chaque motif : coordinaence = 12 .



À l'instar de l'empilement hexagonal compact, la maille cubique à faces centrées possède des « vides » (ou sites interstitiels), caractérisés par le nombre de sphères qui les circonscrivent.

Les sites tétraédriques

Ils sont situés aux centres de chacun des 8 cubes, d'arête $\frac{a}{2}$, contenus dans la maille :



Ce faisant, on trouve :

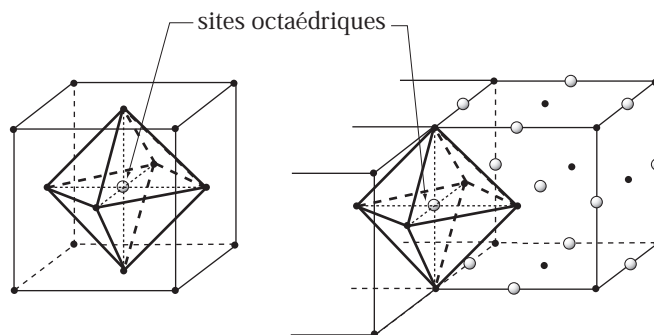
8 sites tétraédriques par maille

qui peuvent héberger, chacun, une sphère de rayon r , à condition que :

$$r \leq \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) R = 0,0225 R$$

Les sites octaédriques

Un de ces sites se trouve au centre de la maille cubique, tandis que les 12 autres ont pour axes les arêtes de la maille cubique (et sont alors communs à 4 mailles) :



Par conséquent, on observe :

$$1 + \frac{12}{4} = 4 \text{ sites octaédriques par maille.}$$

À nouveau, ces sites peuvent renfermer, chacun, une sphère de rayon r , à condition toutefois que :

$$r \leq \left(\sqrt{2} - 1 \right) R = 0,414 R$$

11.2 Les principaux types de cristaux

11.2.1 Cristaux métalliques

Dans un cristal métallique, les atomes de métal sont assimilés à des sphères rigides, dont le rayon R peut s'identifier au rayon atomique de l'élément. Les métaux peuvent cristalliser dans les modes compacts ou non compacts.

11.2.1.1 Cristaux compacts

Il s'agit des modes de cristallisation hexagonal compact (h.c.) ou cubique à faces centrées (c.f.c.) précédemment évoqués, et dont on rappelle les caractéristiques :

cristal	h.c.	c.f.c.
paramètre de maille	$a = 2R, c = 4R\sqrt{\frac{2}{3}}$	$a = 2R\sqrt{2}$
V_{maille}	$a^3\sqrt{2} = 8R^3\sqrt{2}$	$a^3 = 16R^3\sqrt{2}$
nombre de motifs	2	4
compacité	$C_0 = 0,74$	$C_0 = 0,74$
coordination	12	12
sites tétraédriques	4	8
sites octaédriques	2	4

Dans ces structures, l'existence de sites interstitiels fournit deux modes d'alliages :

- les *alliages de substitution*, dans lesquels un ou plusieurs atomes de la maille sont remplacés par un ou plusieurs autres atomes métalliques ;
- les *alliages d'insertion* provenant de l'insertion d'un ou plusieurs atomes métalliques (A) dans les sites interstitiels du réseau d'atomes (B).



À basse température, le cobalt cristallise dans une structure hexagonale compacte.

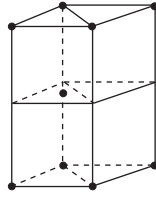
1. Représenter la maille du réseau hexagonal compact.
2. Le rayon métallique du cobalt vaut $R = 125$ pm. Calculer sa densité.

Données :

- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- numéro atomique du cobalt : $Z = 27$;
- masse molaire du cobalt : $M = 60 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- masse volumique de l'eau : $\rho_e = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

RÉPONSE

1. La maille du réseau hexagonal compact est un prisme à base losange, dont les nœuds coïncident avec le centre d'un atome sphérique, et dont le plan intermédiaire contient également un atome (dont le centre est repéré par un point).



2. Une telle maille contient $\frac{8}{8} + 1 = 2$ atomes de cobalt, chacun de masse $m_{\text{Co}} = \frac{M}{N_A}$. Aussi, la masse de la maille vaut-elle :

$$m_{\text{maille}} = 2 m_{\text{Co}} = \frac{2M}{N_A}$$

En outre, son volume est proportionnel au rayon R des atomes de cobalt :

$$V_{\text{maille}} = 8R^3 \sqrt{2}$$

en conséquence de quoi la masse volumique du cobalt vaut :

$$\rho_{\text{Co}} = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{2M}{8R^3 N_A \sqrt{2}} = \frac{M}{4R^3 N_A \sqrt{2}}$$

ce qui conduit à sa densité :

$$\begin{aligned} d_{\text{Co}} &= \frac{\rho_{\text{Co}}}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{M}{4\rho_{\text{H}_2\text{O}} R^3 N_A \sqrt{2}} \\ &= \frac{60 \cdot 10^{-3}}{4 \times 10^3 \times (125 \cdot 10^{-12})^3 \times 6,02 \cdot 10^{23} \times \sqrt{2}} \\ &\Rightarrow d_{\text{Co}} = 9,02 \end{aligned}$$

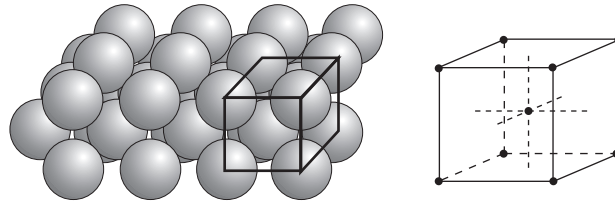


Lors du passage aux applications numériques, il est souhaitable d'exprimer toutes les grandeurs avec les unités du système international. Dans l'exercice précédent, cette recommandation conduit à poser :

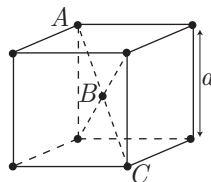
$$M = 60 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} \quad R = 125 \cdot 10^{-12} \text{ m} \quad \rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

11.2.1.2 Cristaux non compacts

Ce mode de cristallisation s'obtient en superposant des plans d'atomes, non tangents les uns aux autres et dont les centres forment des carrés :



La maille correspondante (cubique centrée) est formée d'un cube, dont les sommets coïncident avec les centres des atomes de rayon R , et dont le centre est également occupé par un atome :



Elle est caractérisée par :

- son arête : $a = \frac{4R}{\sqrt{3}}$ qui tient compte de ce que les atomes sont tangents les uns aux autres selon la diagonale principale (ABC) ;
- son volume : $V_{\text{maille}} = a^3 = \frac{64 R^3}{3\sqrt{3}}$;
- son nombre de motifs (8 atomes aux sommets, communs à 8 mailles et un atome au centre) :

$$\nu = \frac{8}{8} + 1 = 2 \text{ atomes par maille}$$

de volume total :

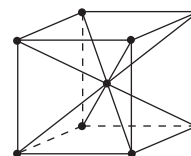
$$V_{\text{motifs}} = 2 \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{8\pi R^3}{3}$$

- sa compacité : $C_0 = \frac{V_{\text{motifs}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} = 0,68$

Remarque – La valeur de la compacité de la maille cubique centrée est inférieure à celle des arrangements compacts ($C_0 = 0,74$ pour les mailles h.c. et c.f.c.), ce qui justifie qu'une telle maille soit qualifiée de non compacte.

- sa coordinence : chaque atome est tangent à huit autres atomes, en conséquence de quoi :

$$\text{coordinence} = 8$$



Certains métaux peuvent, dans certaines conditions, cristalliser dans un mode ou dans un autre ; ces métaux sont alors des *variétés allotropiques*. Par exemple :

crystal	Al _α	Al _β	Fe _α	Fe _γ	Fe _ε	Na _α	Na _β	Pb _α	Pb _β
mode	c.f.c.	h.c.	c.c.	c.f.c.	h.c.	h.c.	c.c.	c.f.c.	h.c.
a (pm)	405	269	286	356	247	377	429	495	326
c (pm)	–	440	–	–	396	615	–	–	539



Le fer peut exister sous deux formes allotropiques :

- le fer α (Fe_α), qui cristallise dans une maille cubique centrée de côté $a_\alpha = 286$ pm ;
- le fer γ (Fe_γ), qui cristallise dans une maille cubique à faces centrées, de côté $a_\gamma = 356$ pm.

1. Calculer le rayon atomique du fer dans chacune de ces structures.
2. Calculer la densité de ces deux variétés allotropiques du fer.

Données :

- masse molaire atomique du fer : $M = 56 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

RÉPONSE

1. Les arêtes respectives a_α et a_γ des mailles cubique centrée et cubique à faces centrées sont liées aux rayons métalliques R_α et R_γ dans chacune de ces structures :

$$a_\alpha = \frac{4}{\sqrt{3}} R_\alpha \Rightarrow R_\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4} a_\alpha = 124 \text{ pm}$$

et :

$$a_\gamma = 2R_\gamma\sqrt{2} \Rightarrow R_\gamma = \frac{a_\gamma}{2\sqrt{2}} = 126 \text{ pm}$$

2. La maille cubique centrée contient deux atomes de fer, de masse individuelle $m_{\text{Fe}} = \frac{M}{N_A}$. Aussi sa masse vaut :

$$m_\alpha = 2m_{\text{Fe}} = \frac{2M}{N_A}$$

tandis que son volume : $V_\alpha = a_\alpha^3$ fournit la masse volumique du fer α :

$$\rho_\alpha = \frac{m_\alpha}{V_\alpha} = \frac{2M}{N_A a_\alpha^3}$$

c'est-à-dire sa densité :

$$d_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{2M}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} N_A a_\alpha^3} = \frac{2 \times 56 \cdot 10^{-3}}{10^3 \times 6,02 \cdot 10^{23} \times (286 \cdot 10^{-12})^3} \Rightarrow d_\alpha = 7,95$$

De même, la maille c.f.c. de fer γ contient 4 atomes de fer et possède donc une masse :

$$m_\gamma = 4m_{\text{Fe}} = \frac{4M}{N_A}$$

dans un volume $V_\gamma = a_\gamma^3$. Sa masse volumique :

$$\rho_\gamma = \frac{m_\gamma}{V_\gamma} = \frac{4M}{N_A a_\gamma^3}$$

définit sa densité :

$$d_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{4M}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} N_A a_\gamma^3} = \frac{4 \times 56 \cdot 10^{-3}}{10^3 \times 6,02 \cdot 10^{23} \times (356 \cdot 10^{-12})^3} \Rightarrow d_\gamma = 8,25$$

11.2.2 Cristaux ioniques

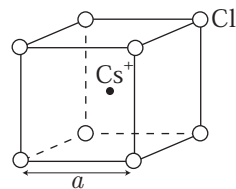
Dans ces structures, des interactions électrostatiques entre cations et anions assurent la cohésion de l'édifice cristallin. Les ions sont modélisés par des sphères dures, de rayons r^+ (pour les cations) et r^- (pour les anions) correspondant aux rayons ioniques. Pour rendre compte de l'attraction ou de la répulsion entre les ions, la convention suivante est adoptée :

- deux ions de même charge ne peuvent s'attirer ; les sphères qui les représentent ne sont pas tangentes.
- deux ions de charge opposée s'attirent, ce dont on rend compte par le contact des sphères qui représentent ces ions : elles sont tangentes.

11.2.2.1 Cristal type CsCl

Le cristal de chlorure de césium (CsCl) est caractérisé par :

- des ions Cl^- aux sommets d'une maille cubique, d'arête a ;
- un ion Cs^+ au centre de chaque maille.



Remarque – Compte tenu de la répétitivité de la maille dans l'espace, la structure CsCl peut aussi être décrite par :

- des ions Cs^+ aux sommets d'une maille cubique, d'arête a ;
- un ion Cl^- au centre de chaque maille.

Cependant, l'ensemble des raisonnements portera sur la maille cubique définie par Cl^- .

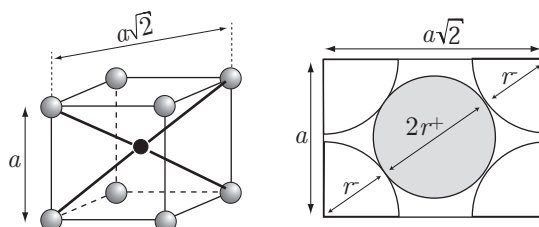
Dans cette maille se trouvent :

$$\frac{8}{8} = 1 \text{ ion } \text{Cl}^- \text{ et } 1 \text{ ion } \text{Cs}^+$$

ce qui signifie que également que l'on trouve :

$$1 \text{ motif } \text{CsCl} \text{ par maille.}$$

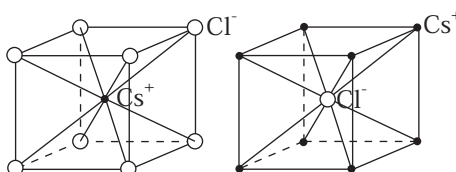
Les ions Cl^- et Cs^+ sont tangents dans le plan diagonal de la maille cubique :



ce qui permet d'exprimer le paramètre a de la maille :

$$a = \frac{2r^+ + 2r^-}{\sqrt{3}}$$

La représentation de la maille, de deux manières différentes :



montre que chaque ion Cs^+ est tangent à 8 ions Cl^- et que chaque ion Cl^- est tangent à 8 ions Cs^+ , en conséquence de quoi :

$$\text{la coordinence vaut : } (8, 8).$$

Rapport des rayons ioniques

Cette partie est réservée aux étudiants de PCSI ayant choisi l'option PSI.

Deux anions ne pouvant être tangents, il s'ensuit que :

$$a > 2r^- \Rightarrow a\sqrt{3} > 2 \times \sqrt{3} r^- \Rightarrow \underbrace{2r^+ + 2r^-}_{a\sqrt{3}} > 2 \times \sqrt{3} r^- \Rightarrow \frac{r^+}{r^-} > \sqrt{3} - 1$$

et comme, par ailleurs, le rayon d'un anion est généralement plus grand que celui d'un cation, la maille de type CsCl est caractérisée par :

$$1 > \frac{r^+}{r^-} > 0,732 \quad (1)$$

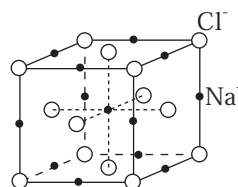
Par exemple, les rayons ioniques de Cl^- et de Cs^+ valent $r^- = 181 \text{ pm}$ et $r^+ = 174 \text{ pm}$, on peut facilement s'assurer que le rapport $\frac{r^+}{r^-} = 0,96$ appartient à l'intervalle précédent.

⚠ Le calcul du rapport $\frac{r^+}{r^-}$ porte toujours sur la condition de séparation des anions. Évidemment, celle des cations doit également être vérifiée, mais puisque $r^- > r^+$, l'inégalité (1), plus contraignante, assure la séparation de tous les ions de même charge.

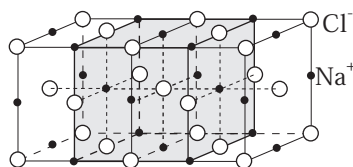
11.2.2.2 Cristal type NaCl

Le chlorure de sodium (NaCl) forme des cristaux décrits par :

- des ions Cl^- aux nœuds d'une maille cubique à faces centrées ;
- des ions Na^+ occupant tous les sites octaédriques de cette maille (c'est-à-dire situés au milieu de chaque arête et au centre de la maille).



Remarque – La représentation d'une demi-maille adjacente à la précédente :



montre que la maille caractéristique de NaCl peut aussi être décrite par :

- une maille cubique à faces centrées formée par les ions Na^+ ;
- des ions Cl^- qui occupent les sites tétraédriques de ladite maille.

Par la suite, les raisonnements porteront sur la maille c.f.c. formée par les ions Cl^- .

La maille comporte $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$ ions Cl^- et $\frac{12}{4} + 1 = 4$ ions Na^+ , c'est-à-dire :

4 motifs NaCl par maille.

Les ions Na^+ et Cl^- , de rayons r^+ et r^- sont tangents le long de chaque arête, en conséquence de quoi :

$$a = 2r^+ + 2r^-$$

Chaque ion Na^+ est lié à 6 ions Cl^- , de même que chaque ion Cl^- est lié à 6 ions Na^+ . C'est pourquoi :

la coordinence vaut : (6, 6).



L'oxyde de fer FeO cristallise dans le système cubique de NaCl.

1. Représenter la maille élémentaire de FeO.
2. Calculer le nombre de motifs FeO par maille.
3. Que vaut le rayon r^- de l'ion O^{2-} ?
4. Déterminer la masse volumique ρ_{th} de FeO.
5. Expérimentalement, la masse volumique de FeO vaut $\rho = 5\,700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Pour interpréter ce phénomène, on admet que des ions Fe (II) se transforment en ions Fe(III), en laissant des lacunes dans le cristal. Calculer le nombre moyen de lacunes par maille.

Données :

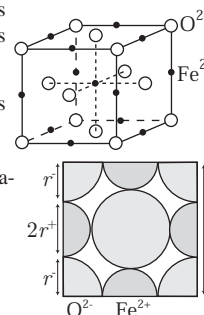
- masses molaires : $M_{\text{Fe}} = 55,85 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{O}} = 16,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- arête de la maille cubique : $a = 432 \text{ pm}$;
- rayon de Fe^{2+} : $r^+ = 76 \text{ pm}$;
- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

RÉPONSE

1. FeO formant un cristal de type NaCl, sa maille doit être caractérisée par des ions O^{2-} constituant un réseau cubique à faces centrées, dans lequel les ions Fe^{2+} occupent les positions des sites octaédriques.
2. Dans une telle maille se trouvent : $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$ ions O^{2-} et $\frac{12}{4} + 1 = 4$ ions Fe^{2+} , c'est-à-dire 4 motifs FeO.
3. Dans la maille de type NaCl, les rayons ioniques r^+ et r^- sont liés au paramètre a de la maille par :

$$a = 2(r^+ + r^-) \Rightarrow r^- = \frac{a}{2} - r^+ = \frac{432}{2} - 76$$

$$\Rightarrow r^- = 140 \text{ pm}$$



4. La masse molaire de FeO valant $M = 71,85 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 71,85 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, chaque motif FeO possède la masse $m_{\text{FeO}} = \frac{M}{\mathcal{N}_A}$, ce qui confère à la maille, de volume $V_{\text{maille}} = a^3$, une masse $m = 4 m_{\text{FeO}}$, c'est-à-dire une masse volumique :

$$\rho_{th} = \frac{m}{V_{\text{maille}}} = \frac{4M}{\mathcal{N}_A a^3} = \frac{4 \times 71,85 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23} \times (432 \cdot 10^{-12})^3} \Rightarrow \rho_{th} = 5\,921 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

5. La maille contient 4 ions O^{2-} , x ions Fe (II), y ions Fe (III) et z lacunes. Or, puisque ces trois dernières entités occupent les positions des 4 sites octaédriques de la maille, il s'ensuit que :

$$x + y + z = 4 \Rightarrow x + y = 4 - z$$

En outre, la masse de la maille vaut :

$$m = 4 \frac{M_{\text{O}}}{\mathcal{N}_A} + (x + y) \frac{M_{\text{Fe}}}{\mathcal{N}_A} = \frac{4 M_{\text{O}} + (4 - z) M_{\text{Fe}}}{\mathcal{N}_A}$$

$$= \frac{4 (M_{\text{O}} + M_{\text{Fe}})}{\mathcal{N}_A} - z \frac{M_{\text{Fe}}}{\mathcal{N}_A} = \frac{4 M}{\mathcal{N}_A} - z \times \frac{M_{\text{Fe}}}{\mathcal{N}_A}$$

dans un volume $V_{\text{maille}} = a^3$, qui lui confère sa masse volumique :

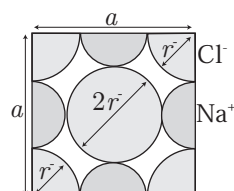
$$\begin{aligned}\rho &= \frac{m}{V_{\text{maille}}} = \frac{4M}{N_A a^3} - z \times \frac{M_{\text{Fe}}}{N_A a^3} = \rho_{th} - z \times \frac{M_{\text{Fe}}}{N_A a^3} \\ \Rightarrow z \times \frac{M_{\text{Fe}}}{N_A a^3} &= \rho_{th} - \rho \\ \Rightarrow z &= \frac{N_A a^3}{M_{\text{Fe}}} \times (\rho_{th} - \rho) = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \times (432 \cdot 10^{-12})^3}{55,85 \cdot 10^{-3}} \times (5921 - 5700) \\ \Rightarrow z &= 0,2 \text{ lacune par maille.}\end{aligned}$$

Rapport des rayons ioniques

Cette partie ne s'adresse qu'aux étudiants de PCSI ayant choisi l'option PSI.

En raisonnant sur une face de la maille, l'absence de contact entre les anions n'est possible qu'à condition que la longueur de la diagonale $a\sqrt{2}$ soit plus grande que $4r^-$:

$$\begin{aligned}a\sqrt{2} > 4r^- &\Rightarrow a > 2r^- \sqrt{2} \text{ avec } a = 2r^+ + 2r^- \\ &\Rightarrow 2r^+ + 2r^- > 2r^- \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \frac{r^+}{r^-} > \sqrt{2} - 1 = 0,414\end{aligned}$$

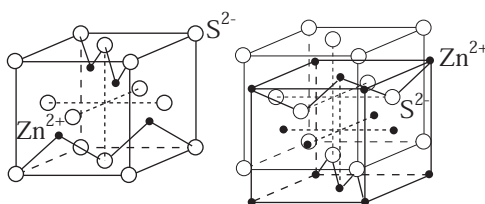


11.2.2.3 Cristal type ZnS

La bende (ZnS) cristallise dans un système cubique, caractérisé par :

- des ions S^{2-} qui forment une maille cubique à faces centrées ;
- des ions Zn^{2+} qui occupent la moitié des sites tétraédriques de cette maille.

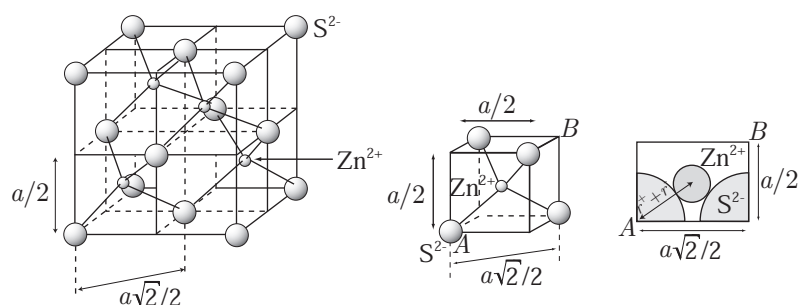
Remarque – Cette maille peut aussi être considérée comme un réseau cubique à faces centrées d'ions Zn^{2+} , dont la moitié des sites tétraédriques est occupée par des ions S^{2-} .



Cette maille contient $\frac{8}{8} + \frac{6}{4} = 4$ ions S^{2-} et $\frac{8}{2} = 4$ ions Zn^{2+} , c'est-à-dire :

4 motifs ZnS par maille.

Les ions Zn^{2+} sont tangents aux ions S^{2-} , dans les sites tétraédriques, contenus dans des cubes de côté $\frac{a}{2}$:

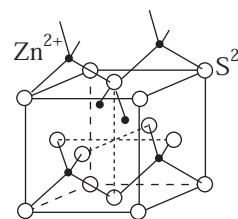


Ce contact entre les ions S^{2-} et Zn^{2+} s'observe selon la diagonale $AB = \frac{a}{2} \sqrt{3}$, en conséquence de quoi :

$$\frac{a}{2} \sqrt{3} = 2 (r^+ + r^-) \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}} (r^+ + r^-) \quad (2)$$

Chaque ion Zn^{2+} se trouve dans un site tétraédrique et est donc tangent à 4 ions S^{2-} ; sa coordination vaut 4. Il en va de même de chaque ion S^{2-} , qui est tangent à 4 ions Zn^{2+} . C'est pourquoi :

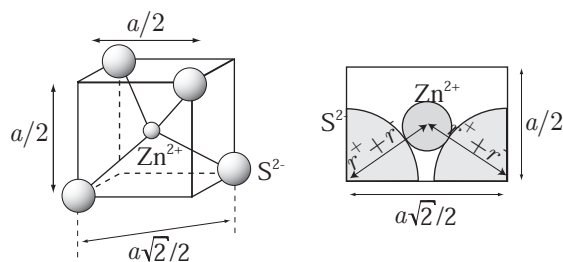
la coordination vaut (4, 4).



Rapport des rayons ioniques

Cette partie ne s'adresse qu'aux étudiants de PCSI ayant choisi l'option PSI.

Les anions (S^{2-}) et cations (Zn^{2+}) sont tangents selon la diagonale principale de chaque cube, d'arête $\frac{a}{2}$, formant un site tétraédrique :



En revanche, les ions S^{2-} ne peuvent être tangents les uns aux autres, ce qui impose :

$$2 r^- < \frac{a}{2} \sqrt{2}$$

où, compte tenu de l'identité (2) :

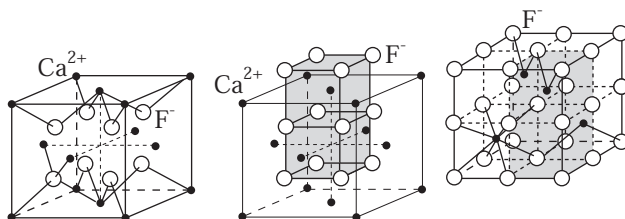
$$\begin{aligned} \frac{a}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} (r^+ + r^-) &\Rightarrow 2r^- < \frac{2}{\sqrt{3}} (r^+ + r^-) \sqrt{2} \Rightarrow r^- < \sqrt{\frac{2}{3}} r^+ + \sqrt{\frac{2}{3}} r^- \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} r^+ > r^- \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \\ &\Rightarrow \frac{r^+}{r^-} > \sqrt{\frac{3}{2}} - 1 = 0,225 \end{aligned}$$

11.2.2.4 Cristal type CaF_2

La connaissance de la maille élémentaire de la fluorine, CaF_2 , n'est exigible que des étudiants de PCSI ayant choisi l'option PSI.

La fluorine cristallise dans un système cubique :

- Les ions Ca^{2+} forment une maille cubique à faces centrées ;
- les ions F^- occupent tous les sites tétraédriques de cette maille.



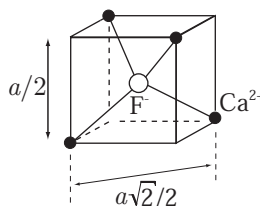
Remarque – On peut également concevoir la structure de CaF_2 comme :

- une maille cubique à faces centrées d'ions F^- , dont chaque site octaédrique (centre de la maille et au milieu des arêtes) est occupé par des ions F^- ;
- la moitié des sites tétraédriques occupée par des ions Ca^{2+} .

La maille de CaF_2 contient $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$ ions Ca^{2+} et 8 ions F^- , auquel cas on y trouve :

4 motifs CaF_2 par maille.

Les ions F^- et Ca^{2+} sont tangents à l'intérieur des sites tétraédriques, circonscrits dans des cubes d'arête $\frac{a}{2}$. La diagonale principale d'un tel cube doit donc présenter une longueur $\frac{a}{2} \sqrt{3}$ telle que :



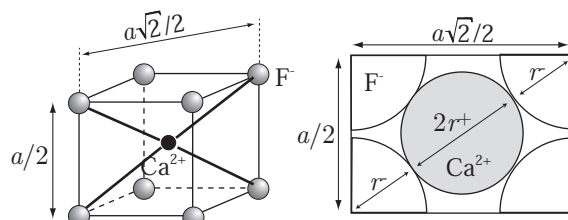
$$\frac{a}{2} \sqrt{3} = 2 (r^+ + r^-) \Rightarrow a = \frac{4}{\sqrt{3}} (r^+ + r^-) \quad (3)$$

Chaque ion F^- est lié à 4 ions Ca^{2+} (F^- présente la coordinence 4), tandis que chaque ion Ca^{2+} est lié à 8 ions F^- . C'est pourquoi :

la coordinence vaut (8, 4).

Rapport des rayons ioniques

Dans la deuxième représentation de la maille de CaF_2 , les ions Ca^{2+} et F^- sont tangents selon la diagonale principale de cubes d'arête $\frac{a}{2}$:



Or, les anions ne peuvent être tangents le long de ces arêtes, ce qui impose :

$$\frac{a}{2} > 2r^-$$

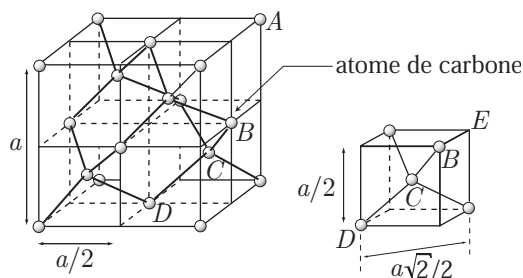
c'est-à-dire, compte tenu de l'identité (3) :

$$\frac{2(r^+ + r^-)}{\sqrt{3}} > 2r^- \Rightarrow r^+ + r^- > \sqrt{3}r^- \Rightarrow \frac{r^+}{r^-} > \sqrt{3} - 1 = 0,732$$

11.2.3 Cristaux covalents

11.2.3.1 La maille du diamant

La maille du diamant est décrite par des atomes de carbone formant un réseau cubique à faces centrées, dont la moitié des sites tétraédriques héberge un atome de carbone ; des liaisons covalentes lient les divers atomes de carbone, qui conservent leur tétravalence habituelle :



Cette maille contient :

- 8 atomes (*A*) aux sommets du cube, communs à 8 mailles ;
- 6 atomes (*B*) au centre des faces, communs à 2 mailles ;
- 4 atomes (*C*) dans les sites tétraédriques.

C'est pourquoi on dénombre :

$$\frac{8}{8} + \frac{6}{2} + 4 = 8 \text{ atomes C par maille.}$$

Les atomes de carbone, de rayon $r = 77$ pm, sont tangents selon la diagonale principale DE du cube d'arête $\frac{a}{2}$. C'est pourquoi :

$$a = \frac{8r}{\sqrt{3}}$$

Chaque atome de carbone présentant une masse molaire $M = 12 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, la maille présente une masse totale $m_{\text{maille}} = \frac{4M}{\mathcal{N}_A}$ (où $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ est la constante d'Avogadro). Ce faisant, la masse volumique du diamant vaut :

$$\rho_{\text{diamant}} = \frac{8M}{\mathcal{N}_A a^3} = 3545 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$



Sans utiliser la valeur numérique du rayon r de l'atome de carbone, calculer la compacité de la maille de diamant.

RÉPONSE La maille de diamant comporte 8 atomes de volume $\frac{4}{3}\pi r^3$, qui occupent alors un volume total :

$$V_{\text{atomes}} = \frac{8 \times 4\pi r^3}{3} = \frac{32\pi r^3}{3}$$

En outre, la maille cubique, d'arête $a = \frac{8r}{\sqrt{3}}$, présente un volume total :

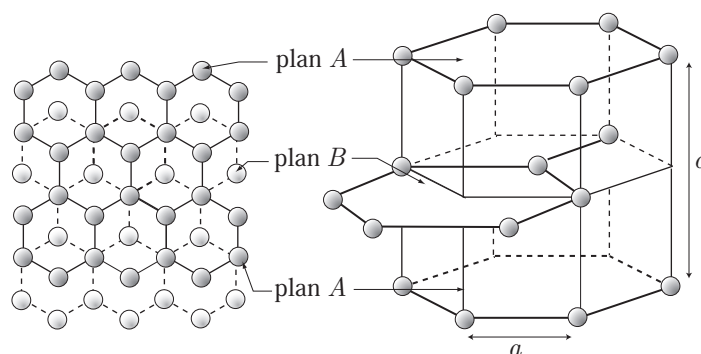
$$V_{\text{maille}} = a^3 = \frac{16 \times 32r^3}{3\sqrt{3}}$$

C'est pourquoi sa compacité C_0 vaut :

$$C_0 = \frac{V_{\text{atomes}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{32\pi r^3}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{16 \times 32r^3} \Rightarrow C_0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} = 0,34$$

11.2.3.2 La maille de graphite

Dans la maille de graphite, les atomes de carbone s'associent de manière à former des plans d'hexagones, lesquels plans sont empilés les uns sur les autres avec un décalage (sur le schéma ci-dessous, les liaisons C – C d'un même plan sont représentés en traits pleins ou pointillés) :



La maille ainsi constituée est un prisme de hauteur c , à base hexagonale. Les atomes d'un même plan forment des liaisons covalentes ce qui justifie la relation entre le rayon atomique et le paramètre a :

$$a = 2r = 142 \text{ pm et } c = 670 \text{ pm}$$

En revanche, entre deux plans successifs, les atomes de carbone forment des liaisons de Van Der Waals : la dissymétrie entre le rayon de l'atome et son nuage électronique produit, de manière éphémère et aléatoire, des dipôles électrostatiques qui interagissent les uns sur les autres.

La maille contient :

- 12 atomes de type (1), communs à 6 mailles ;
- 3 atomes de type (2), communs à 3 mailles ;
- 1 atome de type (3) inclus intégralement dans la maille.

C'est pourquoi on trouve :

$$\frac{12}{6} + \frac{3}{3} + 1 = 4 \text{ atomes C par maille.}$$

La surface S de la base hexagonale :

$$S = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$$

permet d'exprimer le volume $V = S \times c$ de la maille, d'où est issue sa masse volumique :

$$\rho_{\text{graphite}} = \frac{8M}{3\sqrt{3}\mathcal{N}_A a^2 c} = 2272 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

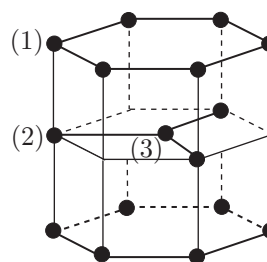
Les structures du diamant et du graphite interprètent certaines propriétés de ces formes allotropiques du carbone :

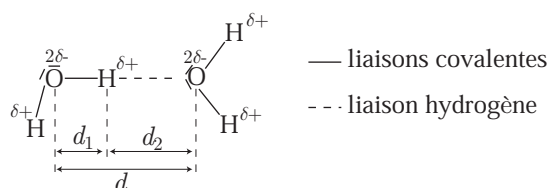
- La structure en lamelles du graphite justifie son emploi comme lubrifiant : les plans d'atomes de carbone glissent aisément les uns sur les autres.
- L'existence de liaisons covalentes (très stables) est à l'origine de l'extrême dureté du diamant, couramment utilisé comme abrasif ou pour la découpe du verre.
- Dans le graphite, les atomes de carbone forment chacun trois liaisons covalentes et conservent donc un électron de valence ; la mobilité de tels électrons rend le graphite conducteur de l'électricité, d'où son emploi comme électrode dans l'industrie.

11.2.4 Cristaux moléculaires

Dans ces cristaux, les nœuds sont occupés par des molécules (H_2O , I_2, \dots) dont la cohésion est assurée :

- soit par des liaisons de Van Der Waals, pour les molécules apolaires (I_2) ;
- soit par des liaisons hydrogène, issues d'une polarité de liaisons covalentes (H_2O) :

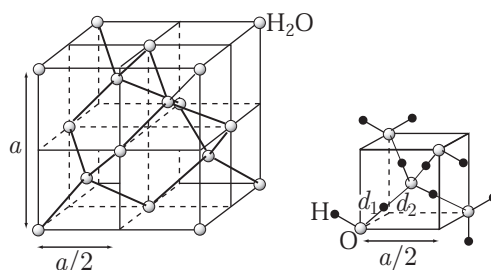




Par exemple, dans la molécule d'eau, les liaisons covalentes O – H ont pour longueur $d_1 = 100$ pm et les liaisons hydrogène pour longueur $d_2 = 176$ pm. C'est pourquoi la distance séparant deux atomes d'oxygène vaut $d = 276$ pm.

La glace III (il existe d'autres formes allotropiques) cristallise dans le même système que le diamant :

- des molécules d'eau forment une maille cubique à faces centrées ;
- la moitié des sites tétraédriques est occupée par des molécules d'eau.



De fait, on dénombre :

$$\frac{8}{8} + \frac{6}{2} + 4 = 8 \text{ molécules H}_2\text{O par maille.}$$



1. Calculer le paramètre a de la maille en fonction de la distance d entre deux molécules d'eau. En déduire l'expression de son volume en fonction de d .
2. Exprimer la masse m_{maille} de la maille en fonction de la masse molaire $M_{\text{H}_2\text{O}}$ de l'eau et du nombre d'Avogadro \mathcal{N}_A .
3. Calculer la densité de la glace III et conclure.

Données :

- $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- $d = 276 \text{ pm}$;
- masse volumique de l'eau liquide : $\rho_{\text{eau}} = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

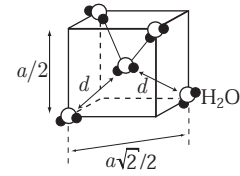
RÉPONSE

1. La plus petite distance d séparant deux molécules d'eau se trouve sur la diagonale principale du cube d'arête $\frac{a}{2}$, qui circonscrit un site tétraédrique :

$$2d = a \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{4d}{\sqrt{3}}$$

Aussi, le volume de la maille cubique de la glace vaut :

$$V_{\text{maille}} = a^3 = \frac{64 d^3}{3\sqrt{3}}$$



2. La maille contient 8 molécules d'eau, de masse individuelle $m_{\text{eau}} = \frac{M_{\text{H}_2\text{O}}}{\mathcal{N}_A}$, en conséquence de quoi sa masse vaut :

$$m_{\text{maille}} = 8 m_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{8 M_{\text{H}_2\text{O}}}{\mathcal{N}_A}$$

3. De ce qui précède se déduit la masse volumique de la glace :

$$\rho_{\text{glace}} = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{8 M_{\text{H}_2\text{O}}}{\mathcal{N}_A} \times \frac{3\sqrt{3}}{64 d^3} = \frac{3\sqrt{3} M_{\text{H}_2\text{O}}}{8 \mathcal{N}_A d^3}$$

ou encore sa densité :

$$d_{\text{glace}} = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{3\sqrt{3} M_{\text{H}_2\text{O}}}{8 \mathcal{N}_A d^3 \rho_{\text{eau}}}$$

Application numérique :

$$d_{\text{glace}} = \frac{3\sqrt{3} \times 18 \cdot 10^{-3}}{8 \times 6,02 \cdot 10^{23} \times (276 \cdot 10^{-12})^3 \times 1000} \Rightarrow d_{\text{glace}} = 0,92$$

L'inégalité : $d_{\text{glace}} < 1$ justifie ainsi la flottabilité de la glace sur l'eau.

● **395** **QCM**
5 min.

Cristaux métalliques

MPSI-PCSI-PTSI

1. L'argent cristallise dans une structure cubique à faces centrées d'arête $a = 0,4073$ nm. Quel est le rayon atomique de l'argent dans cette structure ?

- (a) 0,144 nm (b) 0,176 nm
(c) 0,288 nm (d) 0,352 nm

2. Sachant que la masse molaire atomique de l'argent est égale à $M = 107,88$ g · mol⁻¹, quelle est la masse volumique de l'argent ?

- (a) 10,609 mg · cm⁻³ (b) 10,609 g · dm⁻³
(c) 10 609 kg · dm⁻³ (d) 10 609 kg · m⁻³

On rappelle la valeur numérique de la constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹.

● **396** **Concours e3a**
10 min.

Cristaux métalliques

MPSI-PCSI-PTSI

À température ordinaire, le niobium cristallise avec une structure de type cubique centré, de paramètre de maille $a = 330 \cdot 10^{-12}$ m.

- Dessiner la maille élémentaire du cristal de niobium.
- Déterminer le nombre d'atomes de niobium par maille.
- Calculer la masse volumique du niobium en kg · m⁻³.
- Dans un modèle de sphères dures, déterminer le rayon atomique du niobium.
- Définir et calculer la compacité de la structure cubique centrée.

Données :

- masse molaire du niobium : $M = 92$ g · mol⁻¹ ;
- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹.

● **397** **Concours des Mines-Ponts**
10 min.

Cristaux métalliques

MPSI-PCSI-PTSI

On considère un alliage or-cuivre particulier, dont la structure est telle que les atomes d'or forment un réseau cubique simple, les atomes de cuivre occupant les centres des faces du cube.

- Représenter la maille conventionnelle de cette structure.
- Quelle est la composition de cet alliage ?
- Exprimer sa compacité en fonction des rayons r_{Cu} et r_{Au} des atomes de cuivre et d'or respectivement, sachant que les atomes sont tangents selon les diagonales des faces du cube.

● 398 ————— Concours des Ponts et Chaussées

10 min.

Cristaux métalliques

MPSI-PCSI-PTSI

1. L'étain α a une structure cubique à faces centrées avec occupation d'un site tétraédrique sur deux par les atomes d'étain.
Faire un schéma de cette structure cubique à faces centrées et indiquer où se trouvent les sites tétraédriques et octaédriques.
2. Faire le schéma de la structure de l'étain α .
3. L'étain β a une structure quadratique centrée : la maille est un parallélépipède rectangle dont deux côtés ont la même longueur a et le troisième a pour longueur b .
Faire un schéma de cette structure.
4. Quel est le nombre moyen d'atomes d'étain par maille ?
5. Donner l'expression de la masse volumique de Sn_β , en fonction de la masse molaire M de l'étain, de la constante d'Avogadro \mathcal{N}_A , de a et c .

● 399 ————— Concours des Mines-Ponts

15 min.

Cristaux métalliques

MPSI-PCSI-PTSI

Le cadmium (Cd) cristallise dans le système hexagonal compact.

1. Représenter la maille élémentaire de la structure hexagonale compacte et préciser les positions des atomes.
2. Déterminer le nombre d'atomes que contient la maille élémentaire du cadmium.
3. Établir les relations liant les paramètres a et c au rayon r de l'atome, ainsi que la relation entre c et a .
4. On a, en réalité, $\frac{c}{a} = 1,89$ pour le cadmium. Que peut-on en conclure ?

● 400 ————— Concours ENSI

15 min.

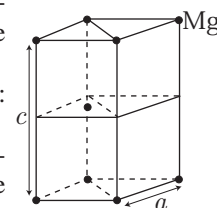
Cristaux métalliques

MPSI-PCSI-PTSI

On s'intéresse à un métal léger, de couleur argentée, le magnésium, de numéro atomique 12 et de masse molaire atomique $M = 24,3 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

On rappelle la valeur de la constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Le magnésium cristallise dans le système hexagonal. La représentation purement conventionnelle de la maille est un prisme à base losange de paramètres a et c .



1. Définir et donner la valeur de la coordinnence d'un atome de magnésium.
2. On assimile les atomes de magnésium à des sphères dures de rayon r . Le rapport des paramètres de maille vaut : $\frac{c}{a} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$ et il y a tangence des atomes suivant les arêtes de la base : $a = 2r$.
(a) Exprimer, en fonction de a , le volume V de la maille élémentaire.
(b) Définir et calculer la compacité de ce réseau.

3. Les tables de données cristallographiques indiquent pour valeur du rayon atomique du magnésium : $r = 0,16$ nm. Exprimer la masse volumique ρ du magnésium en fonction de M , r et \mathcal{N}_A . Calculer ρ et conclure.

● **401** ————— **Université de Cergy-Pontoise**

20 min.

Cristaux métalliques

MPSI-PCSI-PTSI

- Le thorium (élément de masse molaire $M = 232 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$) est un métal radioactif naturel ; il appartient à la série des actiniques. Il cristallise dans une structure cubique à faces centrées (le paramètre de maille est voisin de $4 \cdot 10^{-10}$ m).
 - Calculer approximativement la masse volumique du thorium en $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$. Selon vous, flottera-t-il sur l'eau ?
 - Estimer le rayon métallique que l'on peut attribuer à l'atome de thorium.
- Selon la température, le chrome cristallise selon deux variétés allotropiques appelées α et γ :
 - le chrome α cristallise dans le réseau cubique centré ;
 - le chrome γ cristallise dans le réseau cubique à faces centrées.
 - Exprimer, pour la structure α , le paramètre de maille a_α en fonction du rayon atomique r .
 - Exprimer, en fonction de r , les masses volumiques ρ_α et ρ_γ des deux formes allotropiques.
 - La masse volumique de Cr_γ vaut environ $7\,500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Calculer approximativement celle de Cr_α ; la valeur trouvée est-elle logique ?

Donnée : constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

● **402** ————— **Concours e3a**

15 min.

Cristaux ioniques

MPSI-PCSI-PTSI

Le sulfure de plomb PbS , ou galène, cristallise dans un réseau de type NaCl .

- Quels sont les degrés d'oxydation du soufre et du plomb ?
- Indiquer les sites octaédriques d'un réseau cubique à faces centrées. Quel est leur nombre par maille conventionnelle ?
- Représenter la maille conventionnelle de la galène. On précise que la coordinence est (6, 6).
- On donne le paramètre de maille : $a = 595$ pm et le rayon ionique du plomb : $r_+ = 131$ pm. Exprimer une relation simple existant entre a , r_+ et r_- , le rayon ionique du soufre. Évaluer alors r_- .
- Calculer la masse volumique de la galène.

Données :

- masses molaires atomiques : $M_S = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{Pb}} = 207,2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

● 403 **Concours ENSAIT**

15 min.

Cristaux ioniques

MPSI-PCSI-PTSI

La structure de la blende peut être décrite comme suit : les ions S^{2-} forment un réseau cubique à faces centrées, tandis que les ions Zn^{2+} occupent la moitié des sites tétraédriques du réseau des anions.

1. Dessiner la maille de la blende en différenciant de façon claire les ions Zn^{2+} des ions S^{2-} .
2. Combien cette maille contient-elle d'ions Zn^{2+} et d'ions S^{2-} ?
3. Quelle est la valeur de la coordinence pour les ions Zn^{2+} et pour les ions S^{2-} ?
4. À partir de la valeur de la masse volumique de la blende, calculer la valeur du paramètre a de la maille cubique.
5. En déduire la valeur de la plus courte distance dans la blende entre le centre d'un ion Zn^{2+} et le centre d'un ion S^{2-} .
6. Connaissant la valeur des rayons de ces ions : $r^+ = 0,074$ nm et $r^- = 0,184$ nm, que peut-on dire du type de liaisons qui existent entre les atomes de zinc et de soufre ?

Données ;

- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- masses molaires : $M_{Zn} = 65,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_S = 32,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- masse volumique de la blende : $\rho = 4\,096 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

● 404 **Concours ENSI**

20 min.

Cristaux ioniques

MPSI-PCSI-PTSI

Le titanate de plomb est un solide ionique qui existe à l'état naturel sous le nom de macédonite ; il est utilisé dans l'industrie électronique. Sa structure cristalline à haute température est du type perovskite, dont la description est la suivante :

- les ions Pb^{2+} occupent les sommets d'un cube d'arête a ;
- les ions oxyde O^{2-} occupent les centres des faces du cube ;
- l'ion titane Ti^{4+} occupe le centre du cube.

1. Représenter la maille cubique décrite ci-dessus.
2. En vous référant à la description de sa structure, indiquer le nombre d'ions de chaque type par maille, en déduire la formule brute du titanate de plomb et vérifier la neutralité électrique de la maille cubique.
3. Indiquer, pour un ion titane, le nombre d'ions oxyde qui sont ses plus proches voisins.
4. Répondre à la même question pour un ion plomb en considérant les huit mailles qui entourent l'ion plomb étudié.
5. Dans les structures ioniques idéales, les ions sont assimilés à des sphères dures et tous les anions sont tangents aux cations qui les entourent. Calculer, dans une structure perovskite idéale, la longueur de l'arête a du titanate de plomb de deux façons différentes : en considérant d'une part que les ions plomb et oxyde sont

tangents et d'autre part que les ions titane et oxyde sont tangents (on exprimera la distance entre les centres des ions en fonction des rayons ioniques, puis en fonction de a). La structure du titanate de plomb est-elle une structure ionique idéale ?

Données :

ions	Pb^{2+}	Ti^{4+}	O^{2-}
rayons (pm)	$r_{\text{Pb}} = 120$	$r_{\text{Ti}} = 68$	$r_{\text{O}} = 140$

● 405 Concours ENS

20 min.

Cristaux ioniques

PCSI

1. Le carbure de calcium

Le carbure de calcium CaC_x , de masse volumique $\rho = 2\,200 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, fut longtemps la source principale de fabrication de l'acétylène. Il cristallise dans un système quadratique à deux molécules par maille, avec pour paramètres de maille : $a = b = 388 \text{ pm}$ et $c = 637 \text{ pm}$.

- (a) Évaluer, à partir de ces données, la masse molaire du carbure de calcium.
- (b) Donner la formule chimique de ce composé.

2. Compacité de la fluorine CaF_2

La fluorine cristallise selon une maille cubique constituée d'un réseau c.f.c. d'ions Ca^{2+} avec occupation de tous sites tétraédriques par les ions F^- .

- (a) Vérifier la stœchiométrie.
- (b) Calculer la compacité pour $r_+ = r(\text{Ca}^{2+}) = 99 \text{ pm}$ et $r_- = r(\text{F}^-) = 133 \text{ pm}$.

Données :

- constante d'Avogadro : $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- masses molaires atomiques : $M_C = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{Ca}} = 40 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

● 406 Lycée Saint-Louis, Paris

20 min.

Cristaux ioniques

PCSI

L'iodure de thallium est utilisé pour la détection infrarouge et pour la thermographie. Ce composé cristallise dans une structure cubique dans laquelle la coordinence de l'ion Tl^+ est 8 par rapport à l'ion iodure I^- .

1. À quel type structural connu appartient l'iodure de thallium ? Faire un schéma de cette structure. Vérifier la compatibilité des valeurs des rayons ioniques avec cette structure.
2. Calculer la valeur du paramètre a , arête de la maille, de l'iodure de thallium.
3. Exprimer la compacité et la masse volumique de la maille en fonction de la masse molaire de l'iodure de thallium et des rayons ioniques r_+ et r_- .

Données : rayons ioniques :

$$r(\text{Tl}^+) = r_+ = 173 \text{ pm} \quad r(\text{I}^-) = r_- = 220 \text{ pm}$$

● 407 Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

25 min.

Cristaux ioniques

MPSI-PCSI-PTSI

On extrait, en Nouvelle Calédonie, la garniérite qui contient environ 2,5% en masse de nickel sous forme d'oxyde. Cet oxyde de nickel NiO possède la même structure cristallographique que le chlorure de sodium (NaCl) pour lequel les ions Na^+ et Cl^- constituent deux structures cubiques à faces centrées, décalées de $\frac{a}{2}$ suivant un cube (a étant l'arête du cube).

1. Faire une représentation de la maille élémentaire dans l'espace et la décrire (nombre et position des sites cristallographiques, position des ions, nombre de motifs par maille, relation entre l'arête a et les rayons des ions).
2. Quelle est la coordinence de chacun des ions ?
3. Connaissant le numéro atomique de chacun des éléments : $Z(\text{Ni}) = 28$ et $Z(\text{O}) = 8$, donner leur configuration électronique et l'ion qu'ils sont les plus susceptibles de former. Ce résultat corrobore-t-il la formule proposée pour l'oxyde ?
4. La masse volumique de l'oxyde de nickel vaut $6\,670 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Déterminer le paramètre a de la maille.
5. Donner la valeur minimale que doit satisfaire le rapport $\frac{r^+}{r^-}$ des rayons ioniques pour qu'un cristal puisse adopter une structure type NaCl.

Ce rapport vaut 0,53 pour l'oxyde étudié. La condition est-elle satisfaite ?

6. Calculer le rayon de l'ion nickel puis de l'ion oxyde. Calculer la compacité C de cet oxyde de nickel.

Données :

- masses molaires : $M_{\text{Ni}} = 59 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{O}} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

● 408 Lycée Hoche, Versailles

25 min.

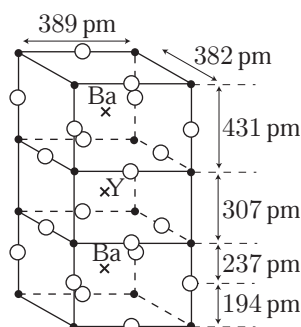
Cristaux ioniques

MPSI-PCSI-PTSI

On se propose d'étudier le supraconducteur $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$. Ce solide contient des anions oxyde et des cations Y^{3+} et Ba^{2+} , ainsi que des ions cuivre Cu^{2+} et Cu^{3+} en proportion variable.

La structure cristalline idéale du supraconducteur $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$ est de type perovskite ; elle est représentée sur la figure ci-contre. Elle est de type quadratique (parallélépipédique rectangle).

1. Retrouver, à l'aide de cette maille conventionnelle, la formule brute du supraconducteur.
2. Quelle serait la valeur de x si tous les ions cuivre, dans le supraconducteur, étaient au nombre d'oxydation II ? Même question dans le cas où tous les ions cuivre seraient au degré d'oxydation III.



- ions cuivre (II) et (III)
- ions O^{2-}

- On note α et β les nombres respectifs d'ions Cu (II) et Cu (III) ; la formule du supraconducteur s'écrit : $\text{YBa}_2\text{Cu}_\alpha^{(\text{II})}\text{Cu}_\beta^{(\text{III})}\text{O}_x$. Exprimer α et β en fonction de x et vérifier la compatibilité de ces expressions avec les résultats de la question précédente.
- Quelles sont les valeurs de α et β dans la structure cristalline idéale représentée ci-dessus ? En déduire les positions probables des ions Cu (II) et Cu (III).

● **409** ————— **Concours ESIM**

5 min.

Cristaux moléculaires

MPSI-PCSI-PTSI

Le soufre est un solide moléculaire présentant plusieurs variétés allotropiques. La plus stable, dans les conditions usuelles, correspond au soufre dit alpha, de maille orthorhombique (parallélépipède rectangle de paramètres : $a = 1\,046$ pm, $b = 1\,287$ pm, $c = 1\,224$ pm), le motif à chaque nœud étant une molécule S_8 .

- Sachant que sa masse volumique est $\rho = 2\,070$ kg · m⁻³, combien y a-t-il de motifs dans une maille ?
- Comment est assurée la cohésion d'un tel cristal moléculaire ? Choisir, parmi les trois valeurs suivantes, l'énergie (en kJ · mol⁻¹) permettant sa fusion : 1,23 ou 123 ou 1 230.

Données :

- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹ ;
- masse molaire du soufre : $M = 32,066$ g · mol⁻¹.

● **410** ————— **Concours des Mines - Ponts**

10 min.

Cristaux moléculaires

MPSI-PCSI-PTSI

Le sujet de concours interdisait l'usage de la calculatrice.

Le diiode cristallise dans le type structural suivant : la maille est un prisme droit à base rectangulaire (de côtés a , b et de hauteur c) et chaque sommet, ainsi que chaque centre de face est occupé par l'entité I_2 (aucune connaissance préalable de ce type de maille n'est nécessaire pour la résolution des questions suivantes). Dans le cas du diiode, les paramètres de maille ont pour valeur approximative : $a = 700$ pm, $b = 500$ pm, $c = 1\,000$ pm.

- Combien de motifs I_2 la maille possède-t-elle en propre ?
- Quelle est la masse volumique approximative du diiode solide ? Les cristaux de diiode « flottent-ils » sur l'eau ?

Données

- valeur approchée : $\frac{4 \times 2 \times 13}{6 \times 7 \times 5} \simeq 0,5$;
- masse molaire de I : $M = 130$ g · mol⁻¹ ;
- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹.

● **411** **Concours ESIM**

10 min.

Cristaux covalents

MPSI-PCSI-PTSI

Le silicium possède une structure cristalline analogue à celle du carbone diamant, la distance entre deux atomes en contact étant $d = 0,234$ nm.

Décrire cette structure puis calculer sa compacité et sa masse volumique.

Données :

- masse molaire du silicium : $M = 28,1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

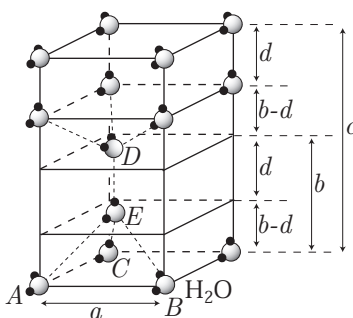
● **412** **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

25 min.

Cristaux moléculaires

MPSI-PCSI-PTSI

La glace I est constituée de cristaux moléculaires dont la maille élémentaire est un prisme à base losange représenté ci-dessous. Les molécules d'eau, aux nœuds de cette maille, établissent entre elles des liaisons hydrogène ; la distance entre deux atomes d'oxygène ainsi liés vaut $d = 2,76 \cdot 10^{-10}$ m (sur la figure, des liaisons hydrogène sont représentées en pointillé).



Avec une telle disposition, chaque molécule H_2O occupe le centre d'un tétraèdre régulier formé par quatre autres molécules (par exemple, E est au centre du tétraèdre $ABCD$). On appelle a et c les paramètres de la maille élémentaire.

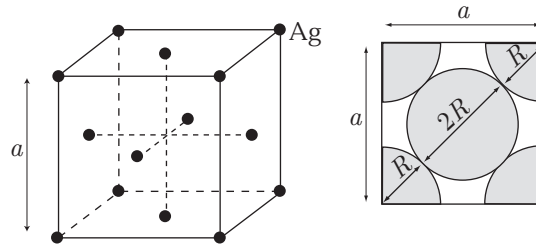
1. Montrer que la hauteur b d'un tétraèdre vérifie : $b = a \times \sqrt{\frac{2}{3}}$.
2. De même, établir que : $d = \frac{3}{4} \times b$.
3. Exprimer la section de base de ce prisme en fonction de d .
4. En déduire une expression du volume V_{maille} de la maille élémentaire, en fonction de d .
5. Combien de motifs cette maille contient-elle ?
6. Calculer la valeur numérique de la densité de la glace I.

Données :

- masses molaires atomiques : $M_{\text{H}} = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{O}} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- masse volumique de l'eau liquide : $\rho_{\text{eau}} = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

● 395 QCM

1. Dans la maille cubique à faces centrées, les atomes sont tangents selon les diagonales de chaque face :



C'est pourquoi le rayon atomique R de l'argent vérifie :

$$4R = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sqrt{2}} = \frac{0,4073}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow R = 0,144 \text{ nm (réponse a).}$$

2. Chaque maille contenant $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$ atomes d'argent, de masse individuelle

$$m_{\text{Ag}} = \frac{M}{N_A}, \text{ sa masse totale vaut :}$$

$$m_{\text{maille}} = 4m_{\text{Ag}} = \frac{4M}{N_A}$$

dans un volume $V_{\text{maille}} = a^3$. C'est pourquoi sa masse volumique vaut :

$$\rho \Rightarrow \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4M}{N_A a^3} = \frac{4 \times 107,88 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23} \times (0,4073 \cdot 10^{-9})^3}$$

$$\Rightarrow \rho = 10\,609 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \text{ (réponse d).}$$

En remarquant que :

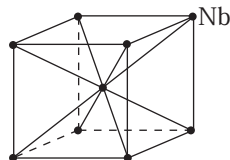
$$1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3} = 1 \text{ g} \cdot \text{dm}^{-3} = 1 \text{ mg} \cdot \text{cm}^{-3}$$

cette masse volumique vaut aussi :

$$\rho = 10\,609 \text{ kg} \cdot \text{dm}^{-3} = 10\,609 \text{ g} \cdot \text{dm}^{-3} = 10\,609 \text{ mg} \cdot \text{cm}^{-3}$$

● 396 Concours e3a

1. Dans une structure cubique centrée, les atomes de niobium se trouvent aux sommets de cubes, et en leur centre.



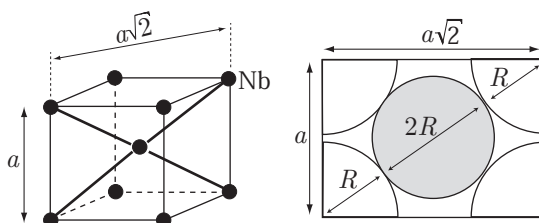
2. Ainsi, 8 atomes se trouvent aux sommets de la maille (et sont donc, chacun, communs à 8 mailles) et un autre atome se situe au centre. C'est pourquoi la maille contient :

$$n = \frac{8}{8} + 1 = 2 \text{ atomes de niobium.}$$

3. Ce faisant, la masse m de la maille vaut le double de la masse $\frac{M}{N_A}$ d'un atome de niobium et présente un volume $V_{\text{maille}} = a^3$; sa masse volumique est définie par :

$$\rho = \frac{m}{V_{\text{maille}}} = \frac{2M}{N_A a^3} = \frac{2 \times 92 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{-23} \times (330 \cdot 10^{-12})^3} \Rightarrow \rho = 8\,505 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

4. Dans la maille cubique centrée, les atomes sont tangents dans chaque plan diagonal :



C'est pourquoi :

$$4R = a\sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{330 \cdot 10^{-12} \times \sqrt{3}}{4} \Rightarrow R = 143 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

5. Les deux atomes de niobium occupent un volume $V_{\text{atomes}} = 2 \times \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{8\pi R^3}{3}$, tandis que la maille présente un volume $V_{\text{maille}} = a^3$, avec :

$$a = \frac{4R}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{\text{maille}} = \frac{64 R^3}{3\sqrt{3}}$$

La compacité de cette maille est définie par le rapport :

$$C_0 = \frac{V_{\text{atomes}}}{V_{\text{maille}}}$$

et vaut donc :

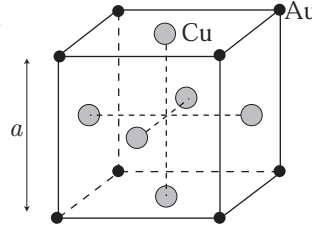
$$C_0 = \frac{8\pi R^3}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{64 R^3} \Rightarrow C_0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{8} = 0,68 = 68\%$$

ce qui représente le taux d'occupation de la maille par les atomes.

● **397** ————— **Concours des Mines - Ponts**

1. Les atomes d'or se trouvent aux sommets de la maille cubique, tandis que les atomes de cuivre sont localisés au centre de chaque face.
2. Une telle maille contient :

$$\frac{8}{8} = 1 \text{ atome Au et } \frac{6}{2} = 3 \text{ atomes Cu}$$



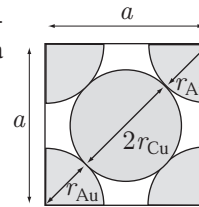
et peut donc être représentée par la formule statistique : AuCu_3 .

3. Les atomes d'or et d'argent ayant pour volumes respectifs : $V_{\text{Au}} = \frac{4}{3} \pi r_{\text{Au}}^3$ et $V_{\text{Cu}} = \frac{4}{3} \pi r_{\text{Cu}}^3$, la matière occupe, dans la maille, un volume total :

$$V_{\text{atomes}} = V_{\text{Au}} + 3 V_{\text{Cu}} = \frac{4\pi (r_{\text{Au}}^3 + 3 r_{\text{Cu}}^3)}{3}$$

En outre, les atomes d'or et d'argent sont tangents selon la diagonale de chaque face, en conséquence de quoi l'arête a de la maille cubique vérifie :

$$2 (r_{\text{Au}} + r_{\text{Cu}}) = a\sqrt{2} \Rightarrow a = \sqrt{2} (r_{\text{Au}} + r_{\text{Cu}})$$



et fournit le volume de la maille :

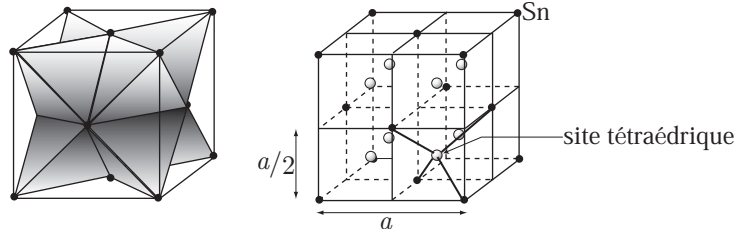
$$V_{\text{maille}} = a^3 = 2\sqrt{2} (r_{\text{Au}} + r_{\text{Cu}})^3$$

Par suite, la compacité de cet alliage suit la définition :

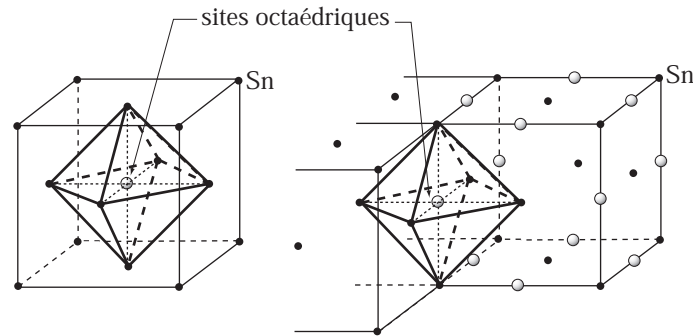
$$C_0 = \frac{V_{\text{atomes}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4\pi (r_{\text{Au}}^3 + 3r_{\text{Cu}}^3)}{3 \times 2\sqrt{2} (r_{\text{Au}} + r_{\text{Cu}})^3} \Rightarrow C_0 = \frac{\pi\sqrt{2} (r_{\text{Au}}^3 + 3r_{\text{Cu}}^3)}{3 (r_{\text{Au}} + r_{\text{Cu}})^3}$$

● **398** ————— **Concours des Ponts et Chaussées**

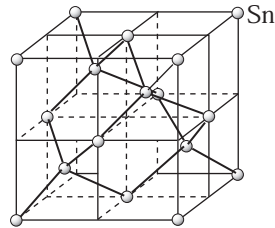
1. La maille cubique à faces centrées possède 8 sites tétraédriques (au centre des 8 cubes d'arête $\frac{a}{2}$ incrits dans la maille) :



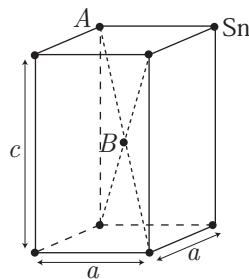
et des sites octaédriques (au centre de la maille cubique et au milieu de chaque arête) :



2. Étant donné que la moitié des sites tétraédriques est occupée par des atomes d'étain, la maille de Sn_α prend la forme suivante :



3. Dans le cristal de Sn_β , les atomes d'étain sont aux sommets d'un parallélépipède rectangle et en son centre :



4. Une telle structure contient :
- 8 atomes (de type A) aux sommets de la maille, communs chacun à 8 mailles ;
 - 1 atome (de type B) au centre de la maille.

C'est pourquoi on dénombre :

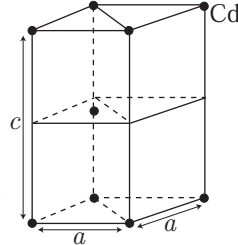
$$\frac{8}{8} + 1 = 2 \text{ atomes Sn par maille.}$$

5. Soit m_{Sn} la masse de chaque atome d'étain qui confère à la maille sa masse $m_{\text{maille}} = 2 m_{\text{Sn}} = \frac{2M}{\mathcal{N}_A}$. En outre, son volume $V_{\text{maille}} = a^2 c$ est à l'origine de la masse volumique de l'étain β :

$$\rho_\beta = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} \Rightarrow \rho_\beta = \frac{2M}{\mathcal{N}_A \times a^2 c}$$

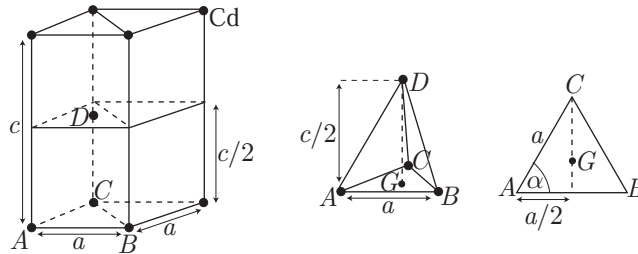
● 399 **Concours des Mines-Ponts**

1. Les atomes de cadmium se placent aux sommets d'un prisme droit à base losange, tandis que le plan intermédiaire contient également un atome de cadmium.
2. Chacun des 8 atomes situés aux sommets du prisme appartient simultanément à 8 mailles alors que l'atome du plan intermédiaire est compris intégralement dans la maille. C'est pourquoi on trouve :



$$n = \frac{8}{8} + 1 = 2 \text{ atomes de cadmium par maille.}$$

3. Les atomes situés aux points A, B, C et D sont tangents les uns aux autres.



Or, les atomes étant représentés par des sphères de rayon r , il s'ensuit que :

$$a = 2r$$

En outre, le polyèdre $(ABCD)$ est un tétraèdre régulier, en raison de quoi la projection orthogonale de D sur le plan de (ABC) coïncide avec le barycentre G du triangle (ABC) , d'où il découle que :

$$\begin{aligned} \vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} &= \vec{0} \Rightarrow \vec{AG} + (\vec{BA} + \vec{AG}) + (\vec{CA} + \vec{AG}) = \vec{0} \\ &\Rightarrow 3\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC} \\ &\Rightarrow 9AG^2 = AB^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + AC^2 \end{aligned}$$

avec : $AB^2 = AC^2 = a^2$ et :

$$2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2a \times a \times \cos \alpha = 2a^2 \cos(60^\circ) = 2a^2 \times \frac{1}{2} = a^2$$

C'est pourquoi :

$$9AG^2 = 3a^2 \Rightarrow AG^2 = \frac{a^2}{3}$$

De plus, le triangle (AGD) est rectangle en G , auquel cas le théorème de Pythagore peut s'y appliquer :

$$\begin{aligned} AD^2 = AG^2 + GD^2 &\Rightarrow a^2 = \frac{a^2}{3} + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{c}{2}\right)^2 = a^2 \times \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow c = 2a \sqrt{\frac{2}{3}} = 4r \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

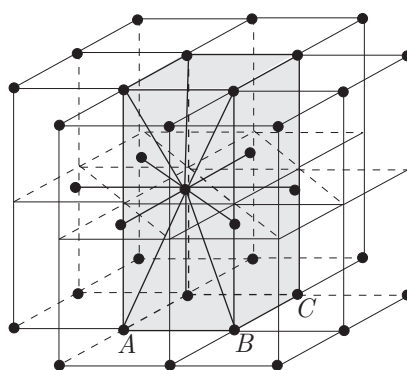
4. Si la maille est rigoureusement compacte, le résultat précédent fournit :

$$\frac{c}{a} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 1,63$$

Or, on constate, expérimentalement, que $\frac{c}{a} = 1,89 > 1,63$, ce qui signifie que, pour a donné, le prisme réel est plus haut que celui du modèle compact ; l'empilement des plans d'atomes n'est pas compact.

● 400 **Concours ENSI**

1. Pour illustrer la coordinence d'un atome de magnésium, il convient de représenter sept mailles :

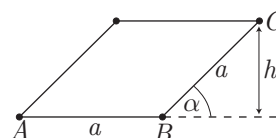


qui montrent que chaque atome de magnésium est au contact de 12 autres atomes, auquel cas :

la coordinence de Mg vaut 12.

2. (a) La base du prisme est un losange de surface S telle que :

$$\begin{aligned} S &= AB \times h = AB \times BC \sin \alpha \text{ avec } \alpha = 60^\circ \\ &= a^2 \sin(60^\circ) = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$



Le volume du prisme vaut donc :

$$V_{\text{maille}} = S \times c = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow V_{\text{maille}} = a^3 \sqrt{2}$$

(b) La maille prismatique contient $\frac{8}{8} + 1 = 2$ atomes de magnésium, de volume $\frac{4}{3} \pi r^3$. Aussi, les atomes de magnésium occupent un volume total :

$$V_{\text{atomes}} = \frac{8\pi r^3}{3}$$

En outre, la maille a pour volume : $V_{\text{maille}} = a^3 \sqrt{2} = 8r^3 \sqrt{2}$. C'est pourquoi la compacité du réseau, définie par :

$$C_0 = \frac{V_{\text{atomes}}}{V_{\text{maille}}}$$

vaut :

$$C_0 = \frac{8\pi r^3}{3} \times \frac{1}{8r^3 \sqrt{2}} \Rightarrow C_0 = \frac{\pi}{3\sqrt{2}} = 0,74$$

3. Chacun des deux atomes de la maille ayant une masse $\frac{M}{\mathcal{N}_A}$, la masse de la maille vaut :

$$m_{\text{maille}} = \frac{2M}{\mathcal{N}_A}$$

ce qui lui vaut une masse volumique :

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{M}{4\mathcal{N}_A r^3 \sqrt{2}}$$

Application numérique :

$$\rho = \frac{24,3 \cdot 10^{-3}}{4 \times 6,02 \cdot 10^{23} \times (0,16 \cdot 10^{-9})^3 \times \sqrt{2}} \Rightarrow \rho = 1\,742 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

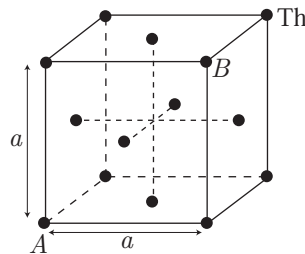
Bien que léger, le magnésium est un métal plus dense que l'eau (de masse volumique $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$).

● 401 Université de Cergy-Pontoise

1. (a) La structure cubique à faces centrées contient $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$ atomes de thorium.

La masse de la maille vaut donc $m = 4 \times \frac{M}{\mathcal{N}_A}$, tandis que son volume ($V_{\text{maille}} = a^3$) est à l'origine de sa masse volumique :

$$\begin{aligned} \rho_{\text{Th}} &= \frac{4M}{\mathcal{N}a^3} = \frac{4 \times 232 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23} \times (4 \cdot 10^{-10})^3} \\ &= 24\,167 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$



c'est-à-dire, puisque $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 10^{-3} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$:

$$\rho_{\text{Th}} = 24,1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$$

Cette valeur montre que le thorium est plus dense que l'eau (de masse volumique $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$) sur laquelle il ne peut donc pas flotter.

- (b) Les atomes de thorium, de rayon R , sont tangents selon la diagonale AB de chaque face, en conséquence de quoi :

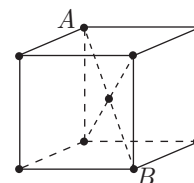
$$4R = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Application numérique :

$$R = \frac{4 \cdot 10^{-10}}{2\sqrt{2}} = 1,41 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

2. (a) Le réseau cubique centré, d'arête a_α , contient des atomes de chrome qui sont tangents le long de la diagonale principale AB , de longueur $a_\alpha\sqrt{3}$. C'est pourquoi :

$$4r = a_\alpha\sqrt{3} \Rightarrow a_\alpha = \frac{4r}{\sqrt{3}}$$



- (b) Dans la maille cubique centrée se trouvent $\frac{8}{8} + 1 = 2$ atomes de chrome, de sorte que cette maille a pour masse :

$$m_\alpha = 2 \times \frac{M_{\text{Cr}}}{N_A}$$

tandis que son volume vaut :

$$V_{\text{maille}} = a_\alpha^3 = \frac{64 r^3}{3\sqrt{3}}$$

Sa masse volumique est donc donnée par :

$$\rho_\alpha = \frac{m_\alpha}{a_\alpha^3} = \frac{2 M_{\text{Cr}} \times 3\sqrt{3}}{N_A \times 64 r^3} \Rightarrow \rho_\alpha = \frac{3 M_{\text{Cr}}\sqrt{3}}{32 N_A r^3} \quad (4)$$

Quant à la masse volumique de Cr_γ (qui cristallise dans le système cubique à faces centrées) son expression est directement issue des calculs de la première question :

$$\rho_\gamma = \frac{4 M_{\text{Cr}}}{N_A a_\gamma^3} \text{ avec } a_\gamma = 2r\sqrt{2} \quad (5)$$

$$= \frac{4 M_{\text{Cr}}}{N_A \times 16\sqrt{2} r^3} \Rightarrow \rho_\gamma = \frac{M_{\text{Cr}}}{4\sqrt{2} N_A r^3} \quad (6)$$

- (c) Des relations (4) et (6) découle le rapport :

$$\frac{\rho_\alpha}{\rho_\gamma} = \frac{3 M_{\text{Cr}}\sqrt{3}}{32 N_A r^3} \times \frac{4\sqrt{2} N_A r^3}{M_{\text{Cr}}} = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

$$\Rightarrow \rho_\alpha = \rho_\gamma \times \frac{3\sqrt{6}}{8} = 7500 \times \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

$$\Rightarrow \rho_\alpha = 6889 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

L'inégalité : $\rho_\alpha < \rho_\gamma$ confirme la compacité plus importante du réseau cubique à faces centrées par rapport à celle du réseau cubique centré.

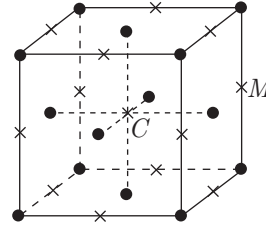
● 402 ————— Concours e3a

1. L'ion soufre S^{2-} a pour degré d'oxydation (-II) ce qui impose le degré d'oxydation (+II) à l'ion Pb^{2+} afin de préserver la neutralité électrique de PbS .

2. Les sites octaédriques (représentés par des croix sur la figure ci-dessous) se trouvent :

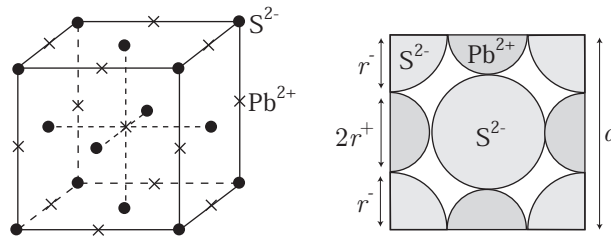
- au centre C du cube ; ce site est intégralement inclus dans la maille.
- au milieu M de chaque arête ; ces 12 sites sont chacun communs à 4 mailles.

C'est pourquoi on dénombre :



$$1 + \frac{12}{4} = 4 \text{ sites octaédriques par maille.}$$

3. La structure type NaCl du sulfure de plomb permet de décrire cette maille : les ions S^{2-} forment un réseau cubique à faces centrées tandis que les ions Pb^{2+} y occupent la position des sites octaédriques :



4. Les anions et cations sont tangents le long de chaque arête, ce qui a pour conséquence :

$$a = 2(r_- + r_+) \Rightarrow r_- = \frac{a}{2} - r_+$$

Application numérique :

$$r_- = \frac{595}{2} - 131 \Rightarrow r_- = 166 \text{ pm}$$

5. La maille contient 4 ions Pb^{2+} (de masse $m_{Pb} = \frac{M_{Pb}}{N_A}$) et 4 ions S^{2-} (de masse $m_S = \frac{M_S}{N_A}$) et possède donc une masse :

$$m_{\text{maille}} = \frac{4(M_{Pb} + M_S)}{N_A}$$

Avec un volume $V_{\text{maille}} = a^3$, cette maille a pour masse volumique :

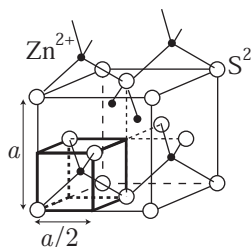
$$\rho_{PbS} = \frac{4(M_{Pb} + M_S)}{N_A a^3}$$

Application numérique :

$$\rho_{PbS} = \frac{4 \times (32 \cdot 10^{-3} + 207,2 \cdot 10^{-3})}{6,02 \cdot 10^{23} \times (595 \cdot 10^{-12})^3} \Rightarrow \rho_{PbS} = 7545 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

● 403 **Concours ENSAIT**

1. Dans la blende, les ions S^{2-} forment le réseau cubique à faces centrées, tandis que les ions Zn^{2+} occupent un sites tétraédrique sur deux (centres des cubes d'arête $\frac{a}{2}$) de cette maille :



2. Cette maille contient :

$$\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4 \text{ ions } S^{2-} \text{ et } 4 \text{ ions } Zn^{2+}$$

3. Chaque ion Zn^{2+} établit 4 liaisons avec des ions S^{2-} (voir schéma ci-dessus); la coordinence de Zn^{2+} vaut 4. Il en va de même pour les ions S^{2-} (la figure précédente illustre comment l'ion S^{2-} , situé au milieu de la face supérieure de la maille, établit ses 4 liaisons avec les ions Zn^{2+}). Par conséquent :

la coordinence de la blende est (4, 4).

4. Les 4 ions S^{2-} (de masse $m_S = \frac{M_S}{N_A}$) et les 4 ions Zn^{2+} (de masse $m_{Zn} = \frac{M_{Zn}}{N_A}$) qui composent la maille lui confèrent la masse :

$$m_{\text{maille}} = 4 m_S + 4 m_{Zn} = \frac{4 (M_S + M_{Zn})}{N_A}$$

tandis qu'elle présente un volume $V_{\text{maille}} = a^3$. Sa masse volumique est alors définie par le rapport :

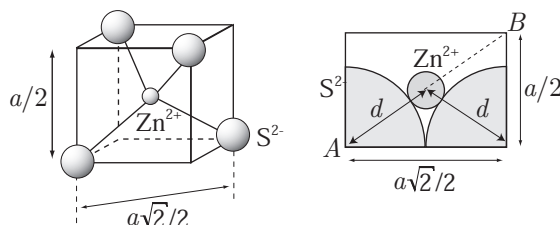
$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4 (M_S + M_{Zn})}{N_A a^3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{4 (M_S + M_{Zn})}{N_A \rho}}$$

Application numérique :

$$a = \sqrt[3]{\frac{4 \times (32,1 \cdot 10^{-3} + 65,4 \cdot 10^{-3})}{6,02 \cdot 10^{23} \times 4096}} \text{ car } \rho = 4,096 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} = 4096 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\Rightarrow a = 541 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 541 \text{ pm}$$

5. Les ions S^{2-} et Zn^{2+} sont tangents selon les diagonales principales des cubes d'arête $\frac{a}{2}$ qui circonscrivent les sites tétraédriques :



Ces diagonales ayant pour longueur $AB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, la plus petite distance (d) entre des ions S^{2-} et Zn^{2+} vérifie :

$$d = \frac{AB}{2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{3}}{4} = 234 \text{ pm}$$

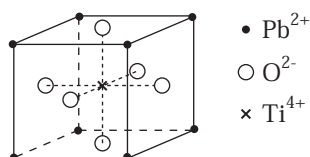
6. La valeur numérique des rayons r^+ et r^- des sphères représentant les ions montre que :

$$r^+ + r^- = 0,074 + 0,184 = 0,258 \text{ nm} = 258 \text{ pm} \Rightarrow r^+ + r^- \simeq d$$

ce qui révèle que ces sphères sont tangentes ; les ions Zn^{2+} et S^{2-} établissent des liaisons ioniques.

● 404 ————— Concours ENSI

1. Compte tenu des indications fournies par l'énoncé, la maille du titanate de plomb présente l'allure suivante :



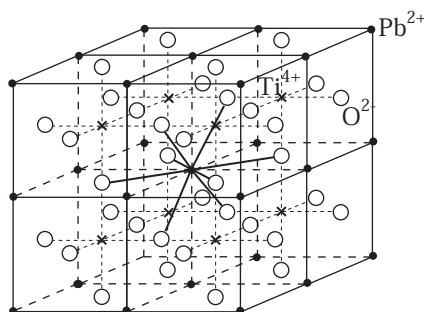
2. Une telle maille contient $\frac{8}{8} = 1$ ion Pb^{2+} , $\frac{6}{2} = 3$ ions O^{2-} et 1 ion Ti^{4+} , auquel cas la formule brute du titanate de plomb est :



Compte tenu de la charge des ions O^{2-} et Ti^{4+} , la maille a pour charge totale :

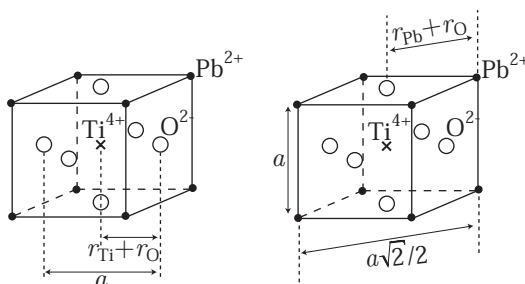
$$2 + 4 + 3 \times (-2) = 0.$$

3. Le schéma ci-dessus révèle que l'ion titane (au centre de la maille cubique) a 6 ions oxyde comme plus proches voisins (aux centres des faces).
4. La représentation de 8 mailles cubiques :



montre que chaque ion Pb^{2+} est entouré de 8 ions O^{2-} plus proches voisins.

5. Les ions oxydes sont tangents aux ions Ti^{4+} le long de chaque segment passant par le centre des faces (parallèlement aux arêtes du cube) et sont tangents aux ions Pb^{2+} le long des diagonales de ces faces :



Aussi, dans une structure ionique idéale :

$$a = 2(r_{\text{Ti}} + r_{\text{O}}) \quad \text{et} \quad a\sqrt{2} = 2(r_{\text{O}} + r_{\text{Pb}}) \Rightarrow a = \sqrt{2}(r_{\text{O}} + r_{\text{Pb}})$$

Les valeurs numériques fournies par l'énoncé conduisent à :

$$2(r_{\text{Ti}} + r_{\text{O}}) = 2 \times (68 + 140) = 416 \text{ pm}$$

et :

$$\sqrt{2}(r_{\text{O}} + r_{\text{Pb}}) = \sqrt{2}(140 + 120) = 368 \text{ pm}$$

de sorte que :

$$2(r_{\text{Ti}} + r_{\text{O}}) \neq \sqrt{2}(r_{\text{O}} + r_{\text{Pb}})$$

montre que la structure du titanate de plomb n'est pas une structure ionique idéale.

● 405 ————— Concours de l'ENS

1. Le carbure de calcium

- (a) la maille de CaC_x est un parallélépipède de section de base $S = a \times b = a^2$ et de hauteur c ; son volume vaut $V_{\text{maille}} = a^2c$. En outre, elle contient deux motifs CaC_x , de masse individuelle : $m_{\text{CaC}_x} = \frac{M}{\mathcal{N}_A}$ (où M est la masse molaire de CaC_x : $M = M_{\text{Ca}} + x M_{\text{C}}$). Sa masse vaut donc : $m_{\text{maille}} = 2 m_{\text{CaC}_x} = \frac{2M}{\mathcal{N}_A}$ et sa masse volumique est définie par :

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{2M}{\mathcal{N}_a a^2 c} \Rightarrow M = \frac{\rho \mathcal{N}_A a^2 c}{2}$$

Application numérique :

$$M = \frac{2 \cdot 200 \times 6,023 \cdot 10^{23} \times (388 \cdot 10^{-12})^2 \times 637 \cdot 10^{-12}}{2} \\ \Rightarrow M = 63,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1} = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

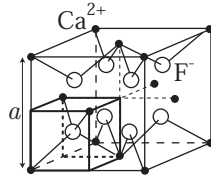
(b) Le résultat précédent conduit à :

$$M_{\text{Ca}} + x M_{\text{C}} = M \Rightarrow x = \frac{M - M_{\text{Ca}}}{M_{\text{C}}} = \frac{63,5 - 40}{12} \Rightarrow x = 1,96 \simeq 2$$

auquel cas le carbure de calcium a pour formule : CaC_2

2. Compacité de la fluorine

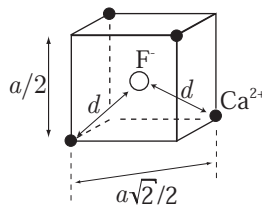
(a) Dans la maille de fluorine, les ions Ca^{2+} forment un réseau cubique à faces centrées, dont tous les sites tétraédriques sont occupés par des ions F^- :



Une telle maille contient donc $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4$ ions Ca^{2+} et 8 ions F^- , c'est-à-dire :

4 motifs CaF_2 par maille.

(b) Isolons un cube d'arête $\frac{a}{2}$ au centre duquel se trouve un site tétraédrique occupé par un ion F^- :



Les anions et cations étant tangents dans ces sites, leur distance $d = r_- + r_+$ vérifie :

$$2d = 2(r_+ + r_-) = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{4(r_+ + r_-)}{\sqrt{3}}$$

ce qui permet d'évaluer le volume de la maille :

$$V_{\text{maille}} = a^3 = \frac{64(r_+ + r_-)^3}{3\sqrt{3}}$$

En outre, le volume de chacun des 4 ions Ca^{2+} vaut : $\frac{4}{3}\pi r_+^3$ et celui des 8 ions F^- : $\frac{4}{3}\pi r_-^3$. C'est pourquoi le volume total occupé par les ions a pour expression :

$$V_{\text{ions}} = 4 \times \frac{4}{3}\pi r_+^3 + 8 \times \frac{4}{3}\pi r_-^3 = \frac{16\pi}{3}(r_+^3 + 2r_-^3)$$

La compacité C de cette maille est alors définie par :

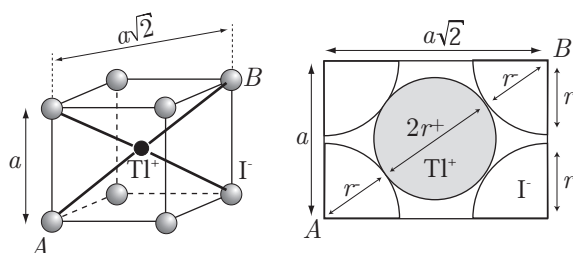
$$C = \frac{V_{\text{ions}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{16\pi(r_+^3 + 2r_-^3)}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{64(r_+ + r_-)^3} \Rightarrow C = \frac{\pi\sqrt{3}(r_+^3 + 2r_-^3)}{4(r_+ + r_-)^3}$$

Application numérique :

$$C = \frac{\pi\sqrt{3} \times \left[(99.10^{-12})^3 + 2 \times (133.10^{-12})^3 \right]}{4 \times (99.10^{-12} + 133.10^{-12})^3} \Rightarrow C = 0,62$$

● **406** ————— **Lycée Saint-Louis, Paris**

1. La coordinence (8, 8) se rencontre dans la maille de type CsCl : les anions sont situés aux sommets d'une maille cubique dont le centre est occupé par le cation :



Dans une telle structure, les anions et cations sont tangents selon la diagonale principale du cube, de longueur $AB = a\sqrt{3}$. C'est pourquoi :

$$a\sqrt{3} = 2(r_+ + r_-) \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{3}}(r_+ + r_-) \quad (7)$$

En revanche, le long d'une arête, les anions ne peuvent pas être tangents, ce qui impose :

$$\begin{aligned} a > 2r_- &\Rightarrow a\sqrt{3} > 2r_- \sqrt{3} \Rightarrow 2r_+ + 2r_- > 2r_- \sqrt{3} \\ &\Rightarrow r_+ > r_- (\sqrt{3} - 1) \Rightarrow \frac{r_+}{r_-} > \sqrt{3} - 1 = 0,73 \end{aligned}$$

Les valeurs des rayons ioniques :

$$\begin{cases} r_+ = 173 \text{ pm} \\ r_- = 220 \text{ pm} \end{cases} \Rightarrow \frac{r_+}{r_-} = 0,79 > 0,73$$

sont donc compatibles avec cette structure.

2. Compte tenu du résultat (7) :

$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}(r_+ + r_-) = \frac{2}{\sqrt{3}} \times (173 + 220) \Rightarrow a = 454 \text{ pm}$$

3. La maille contient $\frac{8}{8} = 1$ ion I^- et 1 ion Tl^+ de volumes respectifs $\frac{4}{3}\pi r_-^3$ et $\frac{4}{3}\pi r_+^3$. C'est pourquoi le volume occupé par les ions dans la maille vaut :

$$V_{\text{ions}} = \frac{4\pi(r_+^3 + r_-^3)}{3}$$

Or, la maille présente un volume :

$$V_{\text{maille}} = a^3 = \frac{8 (r_+ + r_-)^3}{3\sqrt{3}}$$

et donc une compacité :

$$C_0 = \frac{V_{\text{ions}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4\pi (r_+^3 + r_-^3)}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{8 (r_+ + r_-)^3} \Rightarrow C_0 = \frac{\pi\sqrt{3} (r_+^3 + r_-^3)}{2 (r_+ + r_-)^3}$$

Par ailleurs, les masses des ions Tl^+ et I^- sont liées aux masses molaires respectives M_{Tl} , M_{I} et à la constante d'Avogadro \mathcal{N}_A :

$$m_{\text{Tl}^+} = \frac{M_{\text{Tl}}}{\mathcal{N}_A} \text{ et } m_{\text{I}^-} = \frac{M_{\text{I}}}{\mathcal{N}_A}$$

Il s'ensuit que la maille d'iodure de thallium a pour masse :

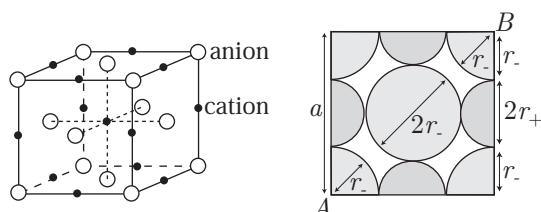
$$m_{\text{maille}} = m_{\text{Tl}^+} + m_{\text{I}^-} = \frac{M_{\text{Tl}} + M_{\text{I}}}{\mathcal{N}_A} = \frac{M_{\text{TlI}}}{\mathcal{N}_A}$$

où M_{TlI} désigne la masse molaire de TlI . Finalement, la masse volumique de l'iodure de thallium a pour expression :

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} \Rightarrow \rho = \frac{3M_{\text{TlI}}\sqrt{3}}{8\mathcal{N}_A (r_+ + r_-)^3}$$

● 407 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Les anions forment un réseau cubique à faces centrées, tandis que les cations occupent les sites octaédriques :



Ce faisant, la maille contient :

$$\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4 \text{ anions}$$

et :

- un site octaédrique au milieu de chacune des 12 arêtes (chacun de ces sites est commun à 4 mailles) ;
- un site octaédrique au centre de la maille.

Aussi, la maille contient :

$$\frac{12}{4} + 1 = 4 \text{ cations}$$

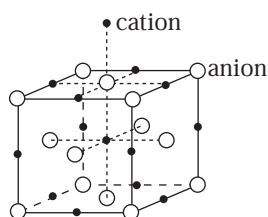
et on dénombre donc :

4 motifs NiO par maille.

En outre, les anions et cations sont tangents selon chaque arête, en conséquence de quoi :

$$a = 2 (r_- + r_+) \Rightarrow r_- + r_+ = \frac{a}{2} \quad (8)$$

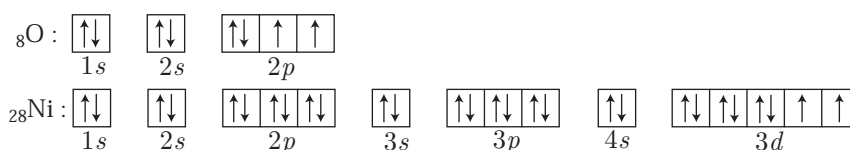
2. Chaque cation est en contact avec 6 anions et chaque anion est en contact avec 6 cations :



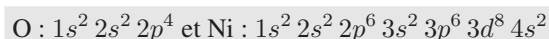
C'est pourquoi :

la coordinaence de NiO vaut (6, 6).

3. Les électrons du nickel et de l'oxygène se répartissent sur les niveaux quantiques de la manière suivante :



ce qui leur vaut les configurations électroniques :



L'oxygène peut récupérer deux électrons afin de saturer ses niveaux $2p$, tandis que le nickel peut perdre ses deux électrons périphériques (sur le niveau $4s$). C'est pourquoi les ions O^{2-} et Ni^{2+} justifient la stœchiométrie de la formule NiO .

4. La maille contient 4 ions O^{2-} , de masse $m_{\text{O}} = \frac{M_{\text{O}}}{\mathcal{N}_A}$ et 4 ions Ni^{2+} , de masse $m_{\text{Ni}} = \frac{M_{\text{Ni}}}{\mathcal{N}_A}$, ce qui lui confère la masse totale :

$$m_{\text{maille}} = 4 m_{\text{O}} + 4 m_{\text{Ni}} = \frac{4 (M_{\text{O}} + M_{\text{Ni}})}{\mathcal{N}_A}$$

dans un volume $V_{\text{maille}} = a^3$. C'est pourquoi sa masse volumique vaut :

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4 (M_{\text{O}} + M_{\text{Ni}})}{\mathcal{N}_A a^3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{4 (M_{\text{O}} + M_{\text{Ni}})}{\mathcal{N}_A \rho}}$$

Application numérique :

$$a = \sqrt[3]{\frac{4 \times (16 \cdot 10^{-3} + 59 \cdot 10^{-3})}{6,02 \cdot 10^{23} \times 6\,670}} \Rightarrow a = 421 \text{ pm}$$

5. Sur les faces de la maille cubique (voir première figure), les anions ne peuvent pas être tangents. Aussi, la taille $AB = a\sqrt{2}$ de la diagonale de la face doit vérifier :

$$AB > 4r_- \Rightarrow a\sqrt{2} > 4r_- \Rightarrow a > 2r_- \sqrt{2}$$

c'est-à-dire, compte tenu du résultat (8) :

$$\begin{aligned} 2(r_- + r_+) > 2r_- \sqrt{2} &\Rightarrow r_- + r_+ > r_- \sqrt{2} \\ &\Rightarrow r_+ > r_- (\sqrt{2} - 1) \\ &\Rightarrow \frac{r_+}{r_-} > \sqrt{2} - 1 = 0,41 \end{aligned}$$

Avec un rapport $\frac{r_+}{r_-} = 0,53$, cette condition est satisfaite pour NiO.

6. Compte tenu de la valeur $\frac{r_+}{r_-} = 0,53 \Rightarrow r_+ = 0,53 r_-$ et du résultat (8), il vient :

$$\begin{aligned} r_- + r_+ = \frac{a}{2} &\Rightarrow 1,53 r_- = \frac{a}{2} \Rightarrow r_- = \frac{a}{2 \times 1,53} = \frac{421}{2 \times 1,53} \\ &\Rightarrow r_- = 138 \text{ pm} \\ &\Rightarrow r_+ = 0,53 r_- = 73 \text{ pm} \end{aligned}$$

Les ions étant assimilés à des sphères de rayons r_- et r_+ , leurs volumes valent respectivement $V_- = \frac{4}{3} \pi r_-^3$ et $V_+ = \frac{4}{3} \pi r_+^3$. La maille contient 4 ions Ni^{2+} et autant d'ions O^{2-} qui occupent alors un volume total :

$$V_{\text{ions}} = 4V_- + 4V_+ = \frac{16\pi}{3} (r_-^3 + r_+^3)$$

alors que la maille présente un volume $V_{\text{maille}} = a^3$. Finalement, sa compacité est définie par :

$$C = \frac{V_{\text{ions}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{16\pi (r_-^3 + r_+^3)}{3a^3}$$

Application numérique :

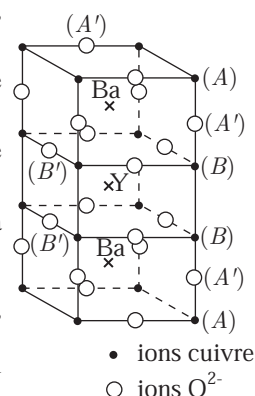
$$C = \frac{16\pi \times [(138 \cdot 10^{-12})^3 + (73 \cdot 10^{-12})^3]}{3 \times (421 \cdot 10^{-12})^3} \Rightarrow C = 0,68$$

● 408 ————— Lycée Hoche, Versailles

1. Distinguons, dans la maille de supraconducteur, différents ions oxyde et cuivre, afin d'y repérer l'existence de :

- 8 ions cuivre, de type (A), aux sommets de la maille, et donc communs à 8 mailles.
- 8 ions cuivre, de type (B), sur les arêtes verticales de la maille ; ils sont communs à 4 mailles ;
- 4 + 8 = 12 ions oxyde, de type (A'), sur les arêtes de la maille et communs à 4 mailles ;
- 8 ions oxyde, de type (B'), situés sur les faces de la maille, et chacun commun à 2 mailles.

Ce faisant, la maille idéale contient $\frac{8}{8} + \frac{8}{4} = 3$ ions cuivre, $\frac{12}{4} + \frac{8}{2} = 7$ ions oxyde, 2 ions Ba^{2+} et un ion Y^{3+} , ce qui lui confère la formule brute :



2. Si tous les ions cuivre étaient au degré d'oxydation (II), la neutralité électrique de $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_x$ imposerait :

$$(3) + 2 \times (2) + 3 \times (2) + x \times (-2) = 0 \Rightarrow 2x = 13 \Rightarrow x = \frac{13}{2} = 6,5$$

De même, avec des ions cuivre exclusivement au degré d'oxydation (III), cette même condition conduirait à :

$$(3) + 2 \times (2) + 3 \times (3) + x \times (-2) = 0 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

C'est pourquoi : $8 \leq x \leq 6,5$.

3. D'après le décompte de la première question, la maille de $\text{YBa}_2\text{Cu}_\alpha^{(\text{II})}\text{Cu}_\beta^{(\text{III})}\text{O}_x$ contient 3 ions cuivre, de sorte que $\alpha + \beta = 3$. En outre, la neutralité électrique de cette formule n'est assurée que si :

$$(3) + 2 \times (2) + \alpha \times 2 + \beta \times 3 + x \times (-2) = 0 \Rightarrow 2\alpha + 3\beta = 2x - 7$$

Ainsi apparaît le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 2\alpha + 3\beta = 2x - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 6 \\ 2\alpha + 3\beta = 2x - 7 \end{cases}$$

dont la soustraction fournit immédiatement :

$$\beta = 2x - 13 \text{ et } \alpha = 3 - \beta \Rightarrow \alpha = 16 - 2x \quad (10)$$

Deux cas extrêmes peuvent être dès lors envisagés :

- si tous les ions cuivre sont au degré d'oxydation (II), β est nul, ce qui a pour conséquence :

$$0 = 2x - 13 \Rightarrow 2x = 13 \Rightarrow x = 6,5$$

- si tous les ions cuivre sont au degré d'oxydation (III), α est nul, de sorte que :

$$0 = 16 - 2x \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$$

4. Dans la structure cristalline idéale, x vaut 7 conformément à la formule (9). C'est pourquoi les identités (10) fournissent :

$$\beta = 2 \times 7 - 13 \Rightarrow \beta = 1 \quad \text{et} \quad \alpha = 16 - 2 \times 7 \Rightarrow \alpha = 2$$

Aussi, la structure cristalline contient 2 ions Cu (II) et un ion Cu (III), Or, puisqu'elle contient également $\frac{8}{4} = 2$ ions cuivre de type (B) et $\frac{8}{8} = 1$ ion cuivre de type (A), il est probable que :

- les ions Cu (II) sont de type (B) et se trouvent sur les arêtes verticales de la maille ;
- les ions Cu (III) sont de type (A) et forment les sommets de la maille quadratique.

● 409 ————— Concours ESIM

1. La masse de chaque molécule S_8 vaut $m_{S_8} = \frac{8M}{N_A}$, en raison de quoi la maille contient n motifs S_8 qui lui confèrent une masse totale :

$$m_{\text{maille}} = n \times m_{S_8} = n \times \frac{8M}{N_A}$$

En outre, son volume $V_{\text{maille}} = abc$ permet d'exprimer sa masse volumique :

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = n \times \frac{8M}{N_A abc} \Rightarrow n = \frac{\rho N_A abc}{8M}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} n &= \frac{2\,070 \times 6,02 \cdot 10^{23} \times 1\,046 \cdot 10^{-12} \times 1\,287 \cdot 10^{-12} \times 1\,224 \cdot 10^{-12}}{8 \times 32,066 \cdot 10^{-3}} \\ &\Rightarrow n = 8 \text{ motifs } S_8 \text{ par maille.} \end{aligned}$$

2. Les molécules S_8 ne possèdent pas de moment dipolaire permanent, car la liaison S–S n'est pas polarisée. En revanche, le déplacement du nuage électronique autour de chaque noyau peut faire apparaître, temporairement, des dipôles éphémères, à l'origine de l'interaction entre les molécules S_8 . Ces liaisons, dites de Van Der Waals, sont responsables de la cohésion du cristal.

Cependant, ces liaisons sont suffisamment faibles pour être rompues par l'apport d'une énergie relativement basse ; le cristal perdant alors sa cohésion, la fusion du soufre est observée pour un apport d'énergie de $1,23 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

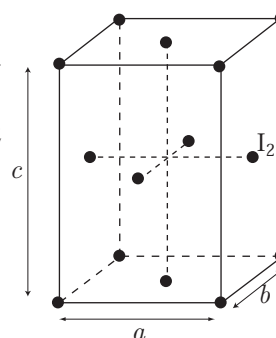
● 410 ————— Concours des Mines-Ponts

1. La représentation de la maille élémentaire de I_2 révèle la présence de :

- 8 molécules I_2 aux sommets de la maille (communes à 8 mailles);
- 6 molécules I_2 au centre des faces (communes à 2 mailles).

On dénombre ainsi :

$$\frac{8}{8} + \frac{6}{2} = 4 \text{ motifs } I_2 \text{ par maille.}$$



2. Soit $m_{I_2} = \frac{2M}{N_A}$ la masse de chaque molécule I_2 , à l'origine de la masse de la maille :

$$m_{\text{maille}} = 4 m_{I_2} = \frac{4 \times 2M}{N_A} \text{ où } M = 130.10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 13.10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Le volume de la maille :

$$\begin{aligned} V_{\text{maille}} &= abc = (700.10^{-12}) \times (500.10^{-12}) \times (1000.10^{-12}) \\ &= 7 \times 5 \times 10^{-29} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

permet alors le calcul de la masse volumique du diiode :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4 \times 2 \times 13 \times 10^{-2}}{6.10^{23} \times 7 \times 5.10^{-29}} = \frac{4 \times 2 \times 13}{6 \times 7 \times 5} \times 10^4 \\ &= \rho = 5000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{aligned}$$

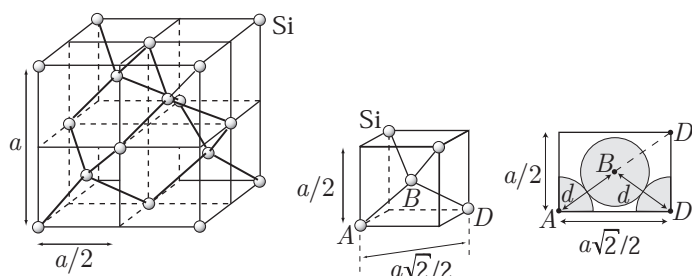
Étant donné que cette masse volumique excède celle de l'eau ($1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$) :

les cristaux de diiode ne « flottent » pas sur l'eau.

● 411 ————— Concours ESIM

Étant donné que le silicium cristallise dans une structure de type diamant :

- des atomes de silicium forment une maille cubique à faces centrées;
- la moitié des sites tétraédriques (cubes d'arête $\frac{a}{2}$) est occupée par des atomes de silicium.



Compacité de la maille

Une telle maille contient $\frac{8}{8} + \frac{6}{2} + 4 = 8$ atomes de silicium, de volume individuel $\frac{4}{3} \pi r^3$, étant donné le rayon r de l'atome. C'est pourquoi la totalité des atomes contenus dans la maille occupe un volume :

$$V_{\text{atomes}} = 8 \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{32\pi r^3}{3}$$

En outre, les atomes sont tangents le long des diagonales principales AD' de chaque site tétraédrique, ce qui impose non seulement $d = 2r$, mais également :

$$d = \frac{AD'}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \frac{4d}{\sqrt{3}} = \frac{8r}{\sqrt{3}}$$

De fait, la maille présente un volume :

$$V_{\text{maille}} = a^3 = \frac{64 d^3}{3\sqrt{3}} = \frac{64 \times 8r^3}{3\sqrt{3}} = \frac{32 \times 16r^3}{3\sqrt{3}} \quad (11)$$

et donc une compacité :

$$C_0 = \frac{V_{\text{atomes}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{32\pi r^3}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{32 \times 16r^3} \Rightarrow C_0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} = 0,34$$

Masse volumique de la maille

Riche de 8 atomes de silicium, de masse $\frac{M}{\mathcal{N}_A}$, la maille a pour masse :

$$m_{\text{maille}} = \frac{8M}{\mathcal{N}_A}$$

et pour volume : $V_{\text{maille}} = a^3 = \frac{64d^3}{3\sqrt{3}}$, conformément aux relations (11) ; sa masse volumique est définie par :

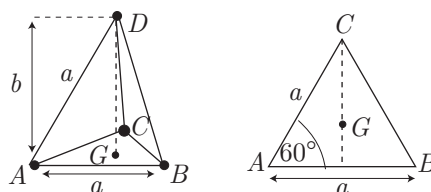
$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{8M}{\mathcal{N}_A} \times \frac{3\sqrt{3}}{64 d^3} \Rightarrow \rho = \frac{3M\sqrt{3}}{8\mathcal{N}_A d^3}$$

Application numérique :

$$\rho = \frac{3 \times 28,1 \cdot 10^{-3} \times \sqrt{3}}{8 \times 6,02 \cdot 10^{23} \times (0,234 \cdot 10^{-9})^3} \Rightarrow \rho = 2\,366 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

● 412 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Considérons un tétraèdre ($ABCD$) dont le projeté orthogonal du centre E sur le triangle équilatéral (ABC) coïncide avec le barycentre G de (ABC) :



La définition de ce barycentre conduit à :

$$\begin{aligned}
 \vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG} &= \vec{0} \Rightarrow \vec{AG} + (\vec{BA} + \vec{AG}) + (\vec{CA} + \vec{AG}) = \vec{0} \\
 &\Rightarrow 3\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{AC} \\
 &\Rightarrow 9AG^2 = AB^2 + 2AB \cdot AC \cos(60^\circ) + AC^2 \\
 &\Rightarrow 9AG^2 = a^2 + 2a^2 \times \frac{1}{2} + a^2 = 3a^2 \\
 &\Rightarrow AG^2 = \frac{a^2}{3}
 \end{aligned}$$

En outre, le triangle (AGD) est rectangle en G , auquel cas le théorème de Pythagore précise que :

$$AD^2 = AG^2 + GD^2 \Rightarrow a^2 = \frac{a^2}{3} + b^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2}{3}a^2 \Rightarrow b = a\sqrt{\frac{2}{3}} \quad (12)$$

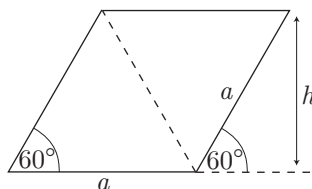
2. Le centre E du tétraèdre en est également le barycentre, défini par :

$$\begin{aligned}
 \vec{AE} + \vec{BE} + \vec{CE} + \vec{DE} &= \vec{0} \Rightarrow (\vec{AG} + \vec{GE}) + (\vec{BG} + \vec{GE}) \\
 &\quad + (\vec{CG} + \vec{GE}) + \vec{DE} = \vec{0} \\
 &\Rightarrow \underbrace{(\vec{AG} + \vec{BG} + \vec{CG})}_{=\vec{0}} + 3\vec{GE} = \vec{ED} \\
 &\Rightarrow 3GE = ED
 \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{cases} GE = b - d \\ ED = d \end{cases} \Rightarrow 3b - 3d = d \Rightarrow 3b = 4d \Rightarrow d = \frac{3}{4} \times b \quad (13)$$

3. La base du prisme est un losange de côté a , constitué de deux triangles équilatéraux :



En notant h sa hauteur, la surface de ce losange vaut :

$$S = a \times h = a \times a \sin(60^\circ) = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c'est-à-dire, en tenant compte des résultats (12) et (13) :

$$\begin{cases} a = b\sqrt{\frac{3}{2}} \\ b = \frac{4}{3}d \end{cases} \Rightarrow a = \frac{4d}{3} \times \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{2d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{8d^2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \frac{4d^2}{\sqrt{3}}$$

4. Quant à la hauteur de la maille, elle vaut :

$$c = 2b = 2 \times \frac{4d}{3} = \frac{8d}{3}$$

ce qui lui confère un volume :

$$V_{\text{maille}} = c \times S = \frac{8d}{3} \times \frac{4d^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow V_{\text{maille}} = \frac{32}{3\sqrt{3}} \times d^3$$

Application numérique :

$$V_{\text{maille}} = \frac{32}{3\sqrt{3}} \times (2,76 \cdot 10^{-10})^3 \Rightarrow V_{\text{maille}} = 1,295 \cdot 10^{-28} \text{ m}^3$$

5. La maille élémentaire de la glace I contient :

- 8 molécules d'eau aux sommets du prisme (communs à 8 mailles) ;
- 4 molécules d'eau sur les arêtes verticales (communes à 4 mailles) ;
- 2 molécules d'eau à l'intérieur du prisme.

C'est pourquoi on dénombre :

$$\frac{8}{8} + \frac{4}{4} + 2 = 4 \text{ molécules H}_2\text{O par maille.}$$

6. Chaque molécule d'eau ayant une masse :

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{2M_{\text{H}} + M_{\text{O}}}{\mathcal{N}_A} = \frac{M_{\text{H}_2\text{O}}}{\mathcal{N}_A} \text{ avec } M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

la maille présente la masse :

$$m_{\text{maille}} = 4 m_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{4 M_{\text{H}_2\text{O}}}{\mathcal{N}_A}$$

et donc une masse volumique :

$$\rho_{\text{glace}} = \frac{m_{\text{maille}}}{V_{\text{maille}}} = \frac{4 M_{\text{H}_2\text{O}}}{\mathcal{N}_A V_{\text{maille}}}$$

Ce faisant, sa densité vaut :

$$\begin{aligned}d_{\text{glace}} &= \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} = \frac{4 M_{\text{H}_2\text{O}}}{\mathcal{N}_A \rho_{\text{eau}} V_{\text{maille}}} \\ &= \frac{4 \times 18 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23} \times 1\,000 \times 1,295 \cdot 10^{-28}} \\ &\Rightarrow d_{\text{glace}} = 0,92\end{aligned}$$

L'inégalité : $d_{\text{glace}} < 1$ suffit à justifier que la glace peut flotter sur l'eau.

Chapitre 12

Thermodynamique chimique

12.1 Modèles de transformations

Définition 1 Un réacteur isobare est un réacteur à l'intérieur duquel la pression p s'identifie à la pression extérieure p_{ext} , à tout instant :

$$p = p_{\text{ext}} = \text{cte pour une réaction isobare.}$$

Remarque – Lorsque la réaction est trop rapide, l'équilibre entre les pressions p et p_{ext} n'est pas respecté à tout instant. On peut cependant réaliser la condition $p = p_{\text{ext}}$ pour la pression initiale (p_i) et attendre assez longtemps pour que l'état final adopte également une pression $p_f = p_{\text{ext}}$. Dans ce cas la réaction est monobare.

Définition 2 Un réacteur isotherme est un milieu où se produit une réaction chimique à une température T maintenue en permanence égale à celle, T_{th} , d'un thermostat (T_{th} est évidemment constant).

Remarque – À nouveau, au cours d'une réaction rapide, il est seulement possible de réaliser la transformation : $(p_i, T_{\text{th}}) \rightarrow (p_f, T_{\text{th}})$, bien que la condition $T = T_{\text{th}}$ ne soit pas réalisée à chaque instant ; la réaction est dite monotherme.

Définition 3 Un réacteur est adiabatique lorsque ses parois, calorifugées, interdisent tout échange thermique (échange de chaleur Q) avec l'extérieur.

Remarque – Les calorimètres utilisés en lycée sont assimilables à des réacteurs adiabatiques (souvent isobares).

Chaleur et enthalpie

Le premier principe de la thermodynamique précise que la variation d'énergie interne (U) d'un système (Σ) :

$$dU = \delta Q - p_{\text{ext}} dV + \delta W'$$

provient :

- de la chaleur δQ reçue par (Σ) ;

- du travail des forces de pression extérieures si le volume V de (Σ) varie ;
- du travail $\delta W'$ des forces extérieures autres que celles de pression (électrique par exemple).

Dans la suite de ce cours, nous supposons que $\delta W' = 0$:

$$dU = \delta Q - p_{\text{ext}} dV \quad (1)$$

L'enthalpie H de (Σ) est, quant à elle, définie par :

$$H = U + pV$$

⚠ Ne confondez pas la pression p à l'intérieur de (Σ) avec la pression p_{ext} que l'extérieur exerce sur (Σ) . En général $p \neq p_{\text{ext}}$ sauf lors des transformations isobares.

La variation de H peut alors s'écrire :

$$dH = dU + d(pV) = \delta Q - p_{\text{ext}} dV + d(pV) \quad (2)$$

Dans le cas où p demeure constante, cette variation devient :

$$dH_p = \delta Q_p + (p - p_{\text{ext}}) dV$$

Remarque – Dans la suite de ce cours, les paramètres présentés en indices sont supposés constants au cours d'une transformation. Par exemple, la variation d'une fonction ψ , à pression constante, sera notée : ψ_p .

Si de surcroît, $p = p_{\text{ext}}$ à tout instant, la variation d'enthalpie de (Σ) s'identifie à la chaleur reçue par (Σ) :

$$dH_p = \delta Q_p \Leftrightarrow \Delta H_p = Q_p \text{ si } p = p_{\text{ext}} \text{ à toute date.} \quad (3)$$

Remarquons que si p demeure constant (mais pas nécessairement égale à p_{ext}) :

$$dH_p = \delta Q_p + (p - p_{\text{ext}}) dV \Rightarrow \Delta H_p = Q_p + (p - p_{\text{ext}}) \Delta V$$

Enfin, dans le cas d'une transformation simplement monobare : $(p_{\text{ext}}, V_i) \rightarrow (p_{\text{ext}}, V_f)$, la relation (2) devient :

$$dH = \delta Q - p_{\text{ext}} dV + d(pV) \Rightarrow \Delta H = Q - p_{\text{ext}} \Delta V + \Delta(pV)$$

où :

$$\begin{aligned} \Delta(pV) &= p_{\text{ext}} V_f - p_{\text{ext}} V_i = p_{\text{ext}} (V_f - V_i) = p_{\text{ext}} \Delta V \\ \Rightarrow \Delta H &= Q \text{ si } p_i = p_{\text{ext}} \text{ et } p_f = p_{\text{ext}} \end{aligned}$$

12.2 Grandeurs standard de réaction

12.2.1 Définitions

Définition 4 On appelle état standard d'un corps pur l'état physique le plus stable de ce corps pur à la pression $p_0 = 1 \text{ bar}$.

Remarque – L'état standard dépend de la température. Par exemple, l'état standard de l'eau est l'état liquide à 25 °C, mais il est solide à –10 °C.

Définition 5 Soient n_X moles un corps pur, X , caractérisé par une grandeur $F(T, p)$. On appelle grandeur molaire standard f^0 , associée à $F(T, p_0)$ pour une mole de X :

$$F(T, p_0) = n_X f^0$$

Fréquemment, l'exposant zéro signifie que la pression est maintenue égale à sa valeur standard p_0 , si bien que la définition précédente s'écrit aussi :

$$F^0(T) = n_X f^0$$

Ainsi, l'enthalpie H_i^0 et la capacité thermique (à pression constante) $C_{p_i}^0$ de n_i moles d'un corps pur X_i valent :

$$H_i^0 = n_i \times h_i^0 \text{ et } C_{p_i}^0 = n_i \times c_{p_i}^0$$

où h_i^0 et $c_{p_i}^0$ sont respectivement l'enthalpie molaire standard de X_i et sa capacité thermique molaire standard.

Définition 6 Soit un mélange contenant n_1 moles de X_1 , n_2 moles de X_2 , ... n_N moles de X_N . Ce mélange est dit idéal si une grandeur extensive F^0 peut s'écrire simplement en fonction des grandeurs molaires standard f_i^0 :

$$F^0 = \sum_{i=1}^N n_i \times f_i^0$$

Dans la suite de ce cours nous n'envisagerons que des mélanges idéaux pour lesquels l'enthalpie $H^0 \equiv H(T, p_0)$ et la capacité thermique $C_p^0 \equiv C_p(T, p_0)$ se présentent sous la forme :

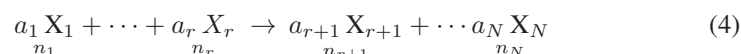
$$H^0 = \sum_{i=1}^N n_i h_i^0 \text{ et } C_p^0 = \sum_{i=1}^N n_i c_{p_i}^0$$

Remarque – L'hypothèse des mélanges idéaux suggère que h_i^0 et $c_{p_i}^0$ ne dépendent pas de la composition du mélange :

$$h_i^0 \equiv h_i^0(T) \text{ et } c_{p_i}^0 \equiv c_{p_i}^0(T)$$

12.2.2 Grandeurs standard

On raisonnera dorénavant sur des réactions chimiques d'équation-bilan :



de coefficients stœchiométriques algébriques :

$$\nu_i = -a_i \text{ pour les réactifs et } \nu_i = a_i \text{ pour les produits.}$$

La variation de la quantité n_i d'une espèce X_i est alors donnée par la variation de l'avancement ξ de la réaction :

$$dn_i = \nu_i d\xi \quad (5)$$

Définition 7 On appelle enthalpie standard de réaction la grandeur :

$$\Delta_r H^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i \times h_i^0(T)$$

et capacité thermique standard de la réaction :

$$\Delta_r C_p^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i \times c_{p_i}^0(T)$$

Considérons un milieu réactionnel décrit par l'équation-bilan (4) et dont l'enthalpie H^0 varie de la quantité dH^0 lorsque l'avancement ξ progresse de $d\xi$ et la température T de dT (la pression est maintenue à la valeur constante p_0) :

$$H^0 = \sum_{i=1}^N n_i \times h_i^0(T) \Rightarrow dH^0 = \sum_{i=1}^N dn_i \times h_i^0(T) + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial h_i^0}{\partial T} \right) dT$$

c'est-à-dire, compte tenu de l'identité (5) :

$$dH^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i d\xi h_i^0(T) + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial h_i^0}{\partial T} \right) dT$$

soit encore :

$$dH^0 = \Delta_r H^0 d\xi + \left(\sum_{i=1}^N n_i \frac{\partial h_i^0}{\partial T} \right) dT \quad (6)$$



On considère que l'enthalpie H peut dépendre des paramètres T, p, n_1, \dots, n_N ou, indifféremment, des paramètres T, p, ξ (puisque n_i ne dépend que de ξ).

1. Écrire les différentielles de $H(T, p, n_1, \dots, n_N)$ et de $H(T, p, \xi)$.

2. En déduire une relation entre $\left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)_{T,p}$ et $\left(\frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_{j \neq i}}$.

3. En posant :

$$H = \sum_{i=1}^N n_i h_i(T, p)$$

montrer que $\Delta_r H$ peut s'identifier à $\left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)_{T,p}$.

4. Identifier alors h_i à $\left(\frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{T,p,n_{j \neq i}}$.

RÉPONSE

1. Sous l'influence des paramètres T, p, n_1, \dots, n_N , la fonction $H(T, p, n_1, \dots, n_N)$ varie de :

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p, n_i} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{T, n_i} dp + \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_{j \neq i}} dn_i$$

tandis qu'une variation des paramètres T, p et ξ provoque la même variation de la fonction $H(T, p, \xi)$:

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p, \xi} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{T, \xi} dp + \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{T, p} d\xi \quad (7)$$

2. La comparaison des deux relations précédentes conduit à :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{T, p} d\xi &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_{j \neq i}} dn_i \text{ avec } dn_i = \nu_i d\xi \\ &= \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_{j \neq i}} \nu_i \right] d\xi \end{aligned}$$

d'où il découle que :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{T, p} = \sum_{i=1}^N \nu_i \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_{j \neq i}} \quad (8)$$

3. La variation de la fonction $H(T, p, n_i) = \sum_{i=1}^N n_i h_i(T, p)$, consécutive à une variation de T, p, n_1, \dots, n_N , s'écrit :

$$dH = \sum_{i=1}^N dn_i h_i(T, p) + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial T}\right)_{p, n_i} dT + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial p}\right)_{T, n_i} dp \quad (9)$$

avec :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p, n_i} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial [n_i h_i(T, p)]}{\partial T}\right)_{p, n_i} = \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial T}\right)_{p, n_i} \\ \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{T, n_i} &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial [n_i h_i(T, p)]}{\partial p}\right)_{T, n_i} = \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial p}\right)_{T, n_i} \end{aligned}$$

et $dn_i = \nu_i d\xi$. Il s'ensuit que l'équation (9) s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} dH &= \left[\sum_{i=1}^N \nu_i h_i(T, p) \right] d\xi + \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p, n_i} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{T, n_i} dp \\ &= \Delta_r H d\xi + \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_{p, n_i} dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_{T, n_i} dp \end{aligned}$$

La comparaison avec la relation (7) mène à l'identification suivante :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{T, p} = \Delta_r H$$

4. La définition de $\Delta_r H$ a pour conséquence :

$$\Delta_r H = \sum_{i=1}^p \nu_i h_i(T, p) \Rightarrow \left(\frac{\partial H}{\partial \xi}\right)_{T, p} = \sum_{i=1}^N \nu_i h_i(T, p)$$

soit encore, compte tenu du résultat (8) :

$$\sum_{i=1}^N \nu_i \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_{j \neq i}} = \sum_{i=1}^N \nu_i h_i(T, p) \Rightarrow h_i(T, p) = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i}\right)_{T, p, n_{j \neq i}}$$

Attention, ce résultat n'est applicable que pour des mélanges idéaux, sans quoi il est erroné.

12.2.3 Cycles de transformations

Considérons la réaction : $a_1 X_1 \rightarrow a_3 X_3$, caractérisée par une enthalpie *standard* :

$$\Delta_r H_{13}^0 = \sum_i \nu_i h_i^0 = a_3 h_3^0 - a_1 h_1^0 \text{ avec } h_i^0 = h^0(X_i)$$

De même, les réactions :



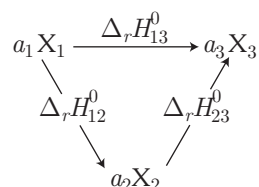
ont pour enthalpies *standard* respectives :

$$\Delta_r H_{12}^0 = a_2 h_2^0 - a_1 h_1^0 \text{ et } \Delta_r H_{23}^0 = a_3 h_3^0 - a_2 h_2^0$$

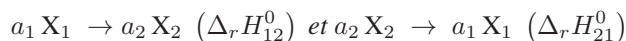
On constate alors aisément que :

$$\Delta_r H_{13}^0 = \Delta_r H_{12}^0 + \Delta_r H_{23}^0$$

ce que l'on représente couramment à l'aide d'un cycle de transformations :



Remarque – *Les réactions :*



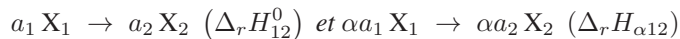
ont des enthalpies *standard* opposées :

$$\Delta_r H_{21}^0 = -\Delta_r H_{12}^0 \quad (10)$$

Cette propriété se démontre immédiatement à l'aide des définitions :

$$\Delta_r H_{21}^0 = a_1 h_1^0 - a_2 h_2^0 \text{ et } \Delta_r H_{12}^0 = a_2 h_2^0 - a_1 h_1^0$$

Remarque – *Considérons les réactions :*



où α est une constante réelle (visant à modifier les coefficients stœchiométriques). Les enthalpies *standard* de ces réactions sont multiples l'une de l'autre, c'est-à-dire :

$$\Delta_r H_{\alpha 12}^0 = \alpha \times \Delta_r H_{12}^0 \quad (11)$$

La démonstration de cette propriété découle directement des définitions des enthalpies *standard* des réactions :

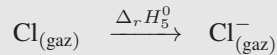
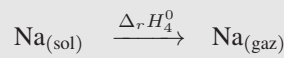
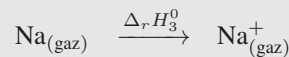
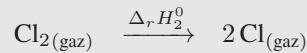
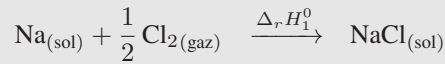
$$\Delta_r H_{\alpha 12}^0 = \alpha a_2 h_2^0 - \alpha a_1 h_1^0 = \alpha \times (a_2 h_2^0 - a_1 h_1^0) = \alpha \Delta_r H_{12}^0$$



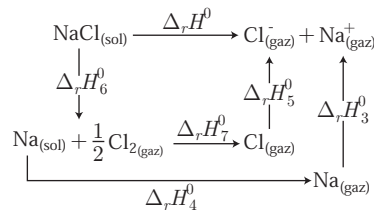
Trouver l'expression de l'enthalpie *standard* $\Delta_r H^0$ de la réaction :



en fonction des enthalpies *standard* $\Delta_r H_i^0$ des réactions suivantes :



RÉPONSE Considérons le cycle de réactions suivant, dans lequel apparaissent les diverses transformations présentées par l'énoncé :



de manière à poser :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_r H_6^0 + \Delta_r H_7^0 + \Delta_r H_5^0 + \Delta_r H_4^0 + \Delta_r H_3^0$$

et où $\Delta_r H_6^0$ et $\Delta_r H_7^0$ s'obtiennent par application de la règle (10) :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Na}_{(\text{sol})} + \frac{1}{2} \text{Cl}_{2(\text{gaz})} \xrightarrow{\Delta_r H_1^0} \text{NaCl}_{(\text{sol})} \\
 \text{NaCl}_{(\text{sol})} \xrightarrow{\Delta_r H_6^0} \text{Na}_{(\text{sol})} + \frac{1}{2} \text{Cl}_{2(\text{gaz})}
 \end{array} \right. \Rightarrow \Delta_r H_6^0 = -\Delta_r H_1^0$$

et de la règle (11)

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Cl}_{2(\text{gaz})} \xrightarrow{\Delta_r H_2^0} 2 \text{Cl}_{(\text{gaz})} \\
 \frac{1}{2} \text{Cl}_{2(\text{gaz})} \xrightarrow{\Delta_r H_7^0} \text{Cl}_{(\text{gaz})}
 \end{array} \right. \Rightarrow \Delta_r H_7^0 = \frac{1}{2} \Delta_r H_2^0$$

On obtient ainsi :

$$\Delta_r H^0 = -\Delta_r H_1^0 + \frac{1}{2} \Delta_r H_2^0 + \Delta_r H_5^0 + \Delta_r H_4^0 + \Delta_r H_3^0$$

12.2.4 Effets thermiques en réacteur isobare

12.2.4.1 Réactions isobares et isothermes

En réacteur isobare, la chaleur δQ_p reçue par le système s'identifie à sa variation d'enthalpie, conformément à la loi (3) :

$$dH_p = \delta Q_p \Rightarrow \delta Q_{p_0} = dH^0 \text{ si } p = p_0 = 1 \text{ bar}$$

où dH^0 est fourni par l'identité (6) :

$$dH^0 = \Delta_r H^0 d\xi + \left(\sum_{i=1}^N n_i \frac{\partial h_i^0}{\partial T} \right) dT \quad (12)$$

Aussi, en réacteur isobare et isotherme (T demeure constant) :

$$\delta Q_{T,p} = dH^0 = \Delta_r H^0 d\xi \Rightarrow Q_{T,p} = \Delta_r H^0 \times \xi$$

Cette relation montre que, dans ces conditions, la chaleur $Q_{T,p}$ reçue par le système est proportionnelle à l'avancement ξ de la réaction.



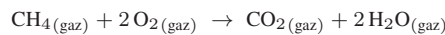
On introduit, dans un réacteur isobare (à la pression $p_0 = 1$ bar) et isotherme (à la température $T_0 = 298$ K) un volume V_0 de méthane ($\text{CH}_4(\text{gaz})$) et un volume $V_{\text{air}} = \alpha V_0$ d'air (α est une constante positive) qui contient environ 20% de dioxygène en volume (et 80% de diazote).

1. Écrire l'équation-bilan de la réaction de combustion du méthane.
2. On note n_0 le nombre initial de moles de $\text{CH}_4(\text{gaz})$ introduit initialement dans le réacteur et $\Delta_r H^0$ l'enthalpie *standard* de la réaction de combustion de CH_4 .
 - (a) Lorsque $\alpha \leq 10$, trouver l'expression de la chaleur Q_p échangée par le réacteur avec l'extérieur, en fonction de α , n_0 et $\Delta_r H^0$.
 - (b) Répondre à la même question pour $\alpha \geq 10$.
 - (c) Tracer la courbe décrivant Q_p en fonction de α .
 - (d) Y a-t-il un intérêt à apporter une grande quantité d'air pour augmenter $|Q_p|$?
 - (e) Calculer numériquement Q_p pour $\alpha = 10$, sachant que $V_0 = 1$ L et $\Delta_r H^0 = -898,2$ kJ · mol⁻¹.

Donnée : constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,32$ J · K⁻¹ · mol⁻¹.

RÉPONSE

1. La combustion du méthane est décrite par l'équation-bilan :



2. En introduisant un volume $V_{\text{air}} = \alpha V_0$ d'air dans le réacteur, on introduit en réalité un volume V_{O_2} d'air tel que :

$$V_{\text{O}_2} = 0,2 V_{\text{air}} = 0,2 \alpha V_0$$

auquel correspond une quantité de matière n_{O_2} qui vérifie l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p_0 V_{\text{O}_2} = n_{\text{O}_2} R T_0 \Rightarrow p_0 \times 0,2 \alpha V_0 = n_{\text{O}_2} R T_0 \quad (13)$$

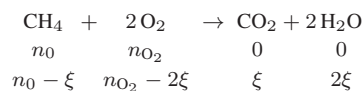
De même, au volume V_0 de méthane introduit initialement, correspond une quantité de matière n_0 telle que :

$$p_0 V_0 = n_0 R T_0 \quad (14)$$

Le rapport des équations (14) et (13) fournit ainsi :

$$\frac{n_{\text{O}_2}}{n_0} = 0,2 \alpha \Rightarrow n_{\text{O}_2} = 0,2 \alpha n_0$$

d'où découle le bilan de la réaction étudiée :



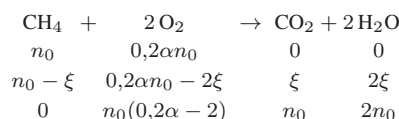
Remarquons, dès cette étape, que les réactifs sont initialement dans les proportions stoechiométriques lorsque :

$$n_{\text{O}_2} = 2 n_0 \Rightarrow 0,2 \alpha n_0 = 2 n_0 \Rightarrow \alpha = 10$$

- (a) Lorsque $\alpha \leq 10$, le dioxygène disparaît totalement du milieu réactionnel, auquel cas l'avancement de la réaction vaut $\xi = \frac{n_{\text{O}_2}}{2} = 0,1 \alpha n_0$. Par suite, le réacteur échange avec l'extérieur (à T et p fixés) la chaleur :

$$Q_{T,p} = \xi \times \Delta_r H^0 = 0,1 n_0 \Delta_r H^0 \times \alpha \quad (15)$$

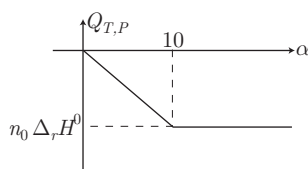
- (b) Lorsque $\alpha \geq 10$, le méthane est en défaut, de sorte que le bilan de la réaction s'écrit :



L'avancement de la réaction valant $\xi = n_0$, le réacteur échange avec l'extérieur la chaleur :

$$Q_{T,p} = \xi \times \Delta_r H^0 = n_0 \Delta_r H^0 \quad (16)$$

- (c) Étant donné que $\Delta_r H^0 < 0$, les résultats (15) et (16) donnent les expressions analytiques de $Q_{T,p}$ en fonction de α :



- (d) En apportant de l'air, on augmente α . Or, le graphe précédent montre que $|Q_{T,p}|$ atteint une valeur maximale pour $\alpha = 10$. C'est pourquoi il est inutile d'apporter plus d'air pour tenter d'augmenter $|Q_{T,p}|$ (le méthane est alors en défaut).
- (e) Lorsque $\alpha = 10$, les résultats (15) et (16) montrent que $Q_{T,p} = n_0 \Delta_r H^0$, tandis que l'équation d'état des gaz parfaits fournit n_0 pour $p_0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$, $T_0 = 298 \text{ K}$ et $V_0 = 1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$:

$$p_0 V_0 = n_0 R T_0 \Rightarrow n_0 = \frac{p_0 V_0}{R T_0} \Rightarrow Q_{T,p} = \frac{p_0 V_0 \Delta_r H^0}{R T_0}$$

Application numérique :

$$Q_{T,p} = - \frac{10^5 \times 10^{-3} \times 898,2 \cdot 10^3}{8,32 \times 298} = 36\,227 \text{ J}$$

12.2.4.2 Variation de température en réacteur adiabatique

Considérons un réacteur contenant un mélange idéal de N substances chimiques susceptibles de réagir, à pression p_0 constante. La variation d'enthalpie ΔH^0 s'identifie à la chaleur Q_p reçue par le système en provenance de l'extérieur :

$$\Delta H^0 = Q_p \quad (17)$$

En outre, la relation (12) indique que :

$$dH^0 = \Delta_r H^0 d\xi + \left(\sum_{i=1}^N n_i \frac{\partial h_i^0}{\partial T} \right) dT$$

où h_i^0 désigne l'enthalpie molaire d'un corps pur X_i . Or, cette enthalpie molaire ne dépend que de la température pour un gaz parfait, et dépend simultanément de la température et de la pression pour une phase condensée :

$$\begin{cases} h_i^0 = h_i^0(T) \text{ pour un gaz parfait ;} \\ h_i^0 = h_i(T, p_0) \text{ pour un liquide ou un solide} \end{cases}$$

En notant H_i^0 l'enthalpie de n_i moles de corps pur, la thermodynamique permet d'établir que :

$$\frac{\partial H_i^0}{\partial T} = n_i c_{p_i}^0$$

où $c_{p_i}^0$ désigne la capacité thermique molaire, à pression constante, de X_i . C'est pourquoi :

$$H_i^0 = n_i h_i^0(T) \Rightarrow \frac{\partial H_i^0}{\partial T} = n_i \frac{\partial h_i^0}{\partial T} = n_i c_{p_i}^0 \Rightarrow \frac{\partial h_i^0}{\partial T} = c_{p_i}^0$$

La relation (12) devient ainsi :

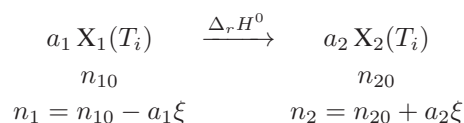
$$dH = \Delta_r H^0 d\xi + \left(\sum_{i=1}^N n_i c_{p_i}^0 \right) dT \quad (18)$$

Notamment, si les capacités thermiques sont assimilées à des grandeurs indépendantes de la température :

$$Q_p = \Delta H = \Delta_r H^0 \times \xi + C_p^0 \times \Delta T \text{ avec } C_p^0 = \sum_{i=1}^N n_i c_{p_i}^0 \quad (19)$$

Dans un réacteur isobare et adiabatique, la température peut passer de la valeur T_i à la valeur T_f . Pour déterminer cette température, il convient de procéder en plusieurs étapes :

- Écrire l'équation-bilan de la réaction, à la température T_i où est connue la valeur numérique de $\Delta_r H^0(T_i)$



- Déterminer l'avancement ξ de cette réaction. Compte tenu de l'identité (19), dans laquelle $\Delta T = 0$ (car $T = T_i$), le système reçoit la chaleur :

$$Q_1 = \Delta_r H^0(T_i) \times \xi = \Delta H_1^0$$

- Établir la composition finale du système, c'est-à-dire déterminer les quantités n_i de chaque espèce X_i dans le système (même celles qui ne participent pas à la réaction chimique).
- Considérer que la température du système intermédiaire passe de T_i à T_f , sans réaction chimique. Compte tenu de la relation (19), dans laquelle $\xi = 0$, le système

reçoit une chaleur :

$$Q_2 = \left(\sum_{i=1}^N n_i c_{p_i}^0 \right) \times \Delta T = (n_1 c_{p_1}^0 + n_2 c_{p_2}^0) \times \Delta T = \Delta H_2^0 \quad (20)$$

Au cours de l'ensemble du processus, l'enthalpie du milieu varie alors de la quantité :

$$\begin{aligned} \Delta H^0 &= H^0 [n_1 X_1(T_f) + n_2 X_2(T_f)] - H^0 [n_{10} X_1(T_i) + n_{20} X_2(T_i)] \\ &= \underbrace{H^0 [n_1 X_1(T_f) + n_2 X_2(T_f)] - H^0 [n_1 X_1(T_i) + n_2 X_2(T_i)]}_{\Delta H_1^0} \\ &\quad + \underbrace{H^0 [n_1 X_1(T_i) + n_2 X_2(T_i)] - H^0 [n_{10} X_1(T_i) + n_{20} X_2(T_i)]}_{\Delta H_2^0} \\ \Rightarrow \Delta H^0 &= \Delta H_1^0 + \Delta H_2^0 = Q_1 + Q_2 \end{aligned}$$

Ce faisant, le système reçoit la chaleur :

$$Q_p = \Delta H^0 = Q_1 + Q_2 = \Delta_r H^0(T_i) \times \xi + C_p^0 \times \Delta T \text{ avec } C_p^0 = \sum_{i=1}^N n_i c_{p_i}^0$$

Or, en réacteur adiabatique, $Q_p = 0$ permet d'obtenir :

$$\Delta T = T_f - T_i = -\frac{\Delta_r H^0(T_i)}{C_p^0} \times \xi \Rightarrow T_f = T_i - \frac{\Delta_r H^0(T_i)}{C_p^0} \times \xi$$

Remarque – Il est parfois nécessaire de tenir compte de la capacité thermique C_{cal} du calorimètre, auquel cas la relation (20) doit être remplacée par :

$$Q_2 = C_p^0 \Delta T + C_{cal} \Delta T = (C_p^0 + C_{cal}) \Delta T$$

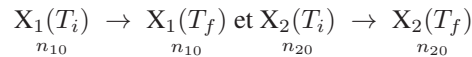
ce qui se traduit par une variation de température :

$$\Delta T = -\frac{\Delta_r H^0(T_i) \times \xi}{C_p^0 + C_{cal}}$$

plus faible que lorsque l'influence du calorimètre est ignorée.

Il peut également arriver que seule soit connue la valeur numérique de $\Delta_r H^0(T_f)$, à la température T_f , auquel cas il convient de procéder comme suit :

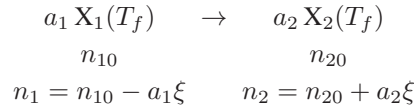
- Les réactifs et produits sont préalablement portés de la température T_i à la température T_f :



Au cours de cette opération, le système reçoit, conformément à la relation (19), la chaleur :

$$Q'_1 = (n_{10} c_{p_1}^0 + n_{20} c_{p_2}^0) \Delta T = C_{pI}^0 \Delta T \text{ avec } C_{pI}^0 = \sum_{i=1}^N n_{i_0} c_{p_i}^0$$

- Le mélange étant maintenu à la température T_f constante, la réaction chimique se produit :



et reçoit une quantité de chaleur déterminée par la relation (19) :

$$Q'_2 = \Delta_r H^0(T_f) \times \xi$$

- La chaleur totale reçue au cours de ces deux transformations :

$$Q_p = Q'_1 + Q'_2 = C_{pI}^0 \times \Delta T + \Delta_r H^0(T_f) \times \xi$$

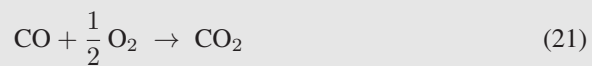
est nulle en réacteur adiabatique, ce qui a pour conséquence :

$$Q_p = 0 \Rightarrow \Delta T = T_f - T_i = - \frac{\Delta_r H^0(T_f) \times \xi}{C_{pI}^0}$$

Remarque – Lorsqu'une réaction se produit très rapidement, on peut l'assimiler à une réaction adiabatique, puisque la chaleur produite n'a pas le temps d'être évacuée ; un tel modèle convient pour évaluer une température de combustion.



La flamme d'un brûleur est alimentée, sous une pression $p = p_0 = 1$ bar et à la température $T_0 = 298$ K (25°C). Le mélange gazeux à l'origine de la flamme est composée de monoxyde de carbone et d'air dans les proportions de 1 volume de CO pour 5 volumes d'air. Au brûleur, la réaction suivante se produit :



En admettant le processus parfaitement adiabatique, calculer la température de cette flamme et commenter le résultat.

Données :

- enthalpie *standard* de la réaction (21), à 298 K : $\Delta_r H^0 = -283$ kJ · mol⁻¹ ;
- composition de l'air : 20% (en volume) de dioxygène et 80% de diazote ;
- capacités thermiques molaires, à pression constante, en J · K⁻¹ · mol⁻¹ :

$$c_p^0(\text{CO}_2) = 37,13 \quad c_p^0(\text{O}_2) = 29,36 \quad c_p^0(\text{N}_2) = 29,12$$

RÉPONSE Soit n_0 le nombre de moles initial de CO, gaz soumis à l'équation d'état des gaz parfaits :

$$p_0 V_{\text{CO}} = n_0 RT_0 \Rightarrow n_0 = \frac{p_0 V_{\text{CO}}}{RT_0} \quad (22)$$

En introduisant 5 volumes d'air pour un volume de monoxyde de carbone ($V_{\text{air}} = 5 V_{\text{CO}}$), on introduit les quantités n_{O_2} et n_{N_2} de dioxygène et de diazote, telles que :

$$\begin{cases} p_0 V_{\text{O}_2} = n_{\text{O}_2} RT_0 \\ p_0 V_{\text{N}_2} = n_{\text{N}_2} RT_0 \end{cases} \Rightarrow \frac{n_{\text{N}_2}}{n_{\text{O}_2}} = \frac{V_{\text{N}_2}}{V_{\text{O}_2}} \Rightarrow n_{\text{N}_2} = \frac{V_{\text{N}_2}}{V_{\text{O}_2}} n_{\text{O}_2}$$

Or, la composition (en volume) de l'air impose :

$$\frac{V_{\text{N}_2}}{V_{\text{air}}} = 80\% = 0,8 \text{ et } \frac{V_{\text{O}_2}}{V_{\text{air}}} = 20\% = 0,2$$

soit encore :

$$\frac{V_{N_2}}{V_{O_2}} = \frac{0,8}{0,2} = 4 \Rightarrow n_{N_2} = 4 n_{O_2} \quad (23)$$

Par suite, le volume V_{air} introduit contient une quantité n_{air} de molécules de gaz :

$$n_{air} = n_{N_2} + n_{O_2} = 5 n_{O_2}$$

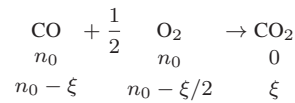
avec :

$$p_0 V_{air} = n_{air} RT_0 = 5 n_{O_2} RT_0 \Rightarrow 5 p_0 V_{CO} = 5 n_{O_2} RT_0 \Rightarrow n_{O_2} = \frac{p V_{CO}}{RT_0} = n_0$$

Des identités (22) et (23) découle alors la composition initiale du milieu réactionnel :

$$n_{CO} = n_0 \quad n_{O_2} = n_0 \quad n_{N_2} = 4n_0$$

Considérons, dans un premier temps, que la réaction de combustion du monoxyde de carbone se réalise à la température T_0 constante :



Cette réaction cesse lorsque CO a disparu, en conséquence de quoi $\xi = n_0$ et la composition du système, à l'issue de cette réaction, est :

$$n_{O_2} = n_0 - \frac{n_0}{2} = \frac{n_0}{2} \quad n_{N_2} = 4n_0 \quad n_{CO_2} = n_0$$

Cette transformation isotherme et isobare s'accompagne d'un échange de chaleur Q_1 donné par la loi (19) :

$$Q_1 = \Delta_r H^0 \times \xi \Rightarrow Q_1 = \Delta_r H^0 \times n_0$$

Ensuite, la température du nouveau mélange de gaz passe de T_0 à T_f , en échangeant la quantité de chaleur Q_2 exprimée par la loi (19) (où $\xi = 0$ en l'absence de réaction chimique) :

$$\begin{aligned} Q_2 = C_p^0 (T_f - T_0) \text{ avec } C_p^0 &= n_{O_2} c_p^0(O_2) + n_{N_2} c_p^0(N_2) + n_{CO_2} c_p^0(CO_2) \\ &= n_0 \left[\frac{1}{2} c_p^0(O_2) + 4 c_p^0(N_2) + c_p^0(CO_2) \right] \end{aligned}$$

que l'on écrira :

$$\begin{aligned} Q_2 = n_0 C_{pm}^0 (T_f - T_0) \text{ où } C_{pm}^0 &= \frac{1}{2} c_p^0(O_2) + 4 c_p^0(N_2) + c_p^0(CO_2) \\ &= \frac{1}{2} \times 29,36 + 4 \times 29,12 + 37,13 = 168 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Finalement, la combustion de CO s'accompagne d'un échange de chaleur $Q = Q_1 + Q_2$ nul, puisque le processus est supposé adiabatique (trop rapide pour que puissent s'établir des transferts thermiques), ce qui se traduit par :

$$\underbrace{\Delta_r H^0 \times n_0}_{Q_1} + \underbrace{n_0 C_{pm}^0 (T_f - T_0)}_{Q_2} = 0 \Rightarrow T_f = T_0 - \frac{\Delta_r H^0}{C_{pm}^0}$$

Application numérique :

$$T_f = 298 + \frac{283.10^3}{168} \Rightarrow T_f = 1982 \text{ K (1709°C)}$$

Inévitablement, à une telle température, des échanges thermiques se produiront, de sorte que la température de la flamme demeurera inférieure à 1709°C.

Remarque – La relation (18) donne la chaleur totale δQ reçue par un réacteur :

$$\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2$$

où $\delta Q_1 = \Delta_r H^0 d\xi$ désigne la chaleur reçue au cours de la réaction chimique isotherme et $\delta Q_2 = \sum_{i=1}^N n_i c_{p_i}^0 dT$ celle reçue au cours de la variation de température du milieu, dont la température T passe de T_i à T_f . Lorsque $c_{p_i}^0(T)$ dépend de T , il convient de poser :

$$\delta Q_2 = \sum_{i=1}^N n_i c_{p_i}^0 dT \Rightarrow Q_2 = \sum_{i=1}^N \int_{T_i}^{T_f} n_i c_{p_i}^0(T) dT$$

auquel cas l'identité (18) doit être remplacée par :

$$Q = \Delta_r H^0 \times \xi + \sum_{i=1}^N \int_{T_i}^{T_f} n_i c_{p_i}^0(T) dT$$

12.2.5 Énergie interne standard

Soit u_i l'énergie interne (molaire) d'une mole de corps pur X_i , dont l'énergie interne de n_i moles vaut :

$$U_i = n_i \times u_i$$

Si un mélange de N espèces chimiques est idéal, les énergies internes *standard* u_i de chaque espèce ne dépendent pas de la composition du mélange, dont l'énergie interne vaut par conséquent :

$$U = \sum_{i=1}^N n_i \times u_i \text{ (pour un mélange idéal).}$$

Définition 8 Soient ν_i les coefficients stœchiométriques intervenant dans l'équation-bilan d'une réaction. On appelle énergie interne standard de cette réaction la grandeur :

$$\Delta_r U = \sum_{i=1}^N \nu_i u_i$$

12.2.5.1 Énergie interne et enthalpie standard

Considérons l'énergie interne molaire comme dépendant de la température T et de la pression p du milieu réactionnel : $u_i = u_i(T, p)$. Lorsque $p = p_0$, on note $u_i^0(T) = u_i(T, p_0)$, tandis que la définition de l'enthalpie : $H = U + pV$ s'écrit aussi :

$$\sum_{i=1}^N n_i h_i(T, p) = \sum_{i=1}^N n_i u_i(T, p) + pV \Rightarrow \sum_{i=1}^N n_i h_i^0(T) = \sum_{i=1}^N n_i u_i^0(T) + p_0V$$

où le volume V du mélange réactionnel comprend celui, V_c , des phases condensées (liquides, solides) et celui, V_g , des gaz :

$$V = V_c + V_g \Rightarrow \sum_{i=1}^N n_i h_i^0(T) = \sum_{i=1}^N n_i u_i^0(T) + p_0 V_c + p_0 V_g$$

On notera désormais n_{ig} le nombre de moles d'une espèce gazeuse ($X_{i(\text{gaz})}$), de manière à présenter l'équation d'état des gaz parfaits sous la forme :

$$\begin{aligned} p_0 V_g &= \sum_{n_{ig}} n_{ig} RT = RT \sum_{n_{ig}} n_{ig} \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^N n_i h_i^0(T) = \sum_{i=1}^N n_i u_i^0(T) + p_0 V_c + RT \sum_{n_{ig}} n_{ig} \end{aligned}$$

En dérivant cette équation par rapport à l'avancement ξ (T étant maintenu constant), on obtient :

$$\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial n_i}{\partial \xi} \right)_{T,p} h_i^0(T) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial n_i}{\partial \xi} \right)_{T,p} u_i^0(T) + p_0 \left(\frac{\partial V_c}{\partial \xi} \right)_{T,p} + RT \sum_{n_{ig}} \left(\frac{\partial n_{ig}}{\partial \xi} \right)_{T,p}$$

où $\left(\frac{\partial n_i}{\partial \xi} \right)_{T,p} = \nu_i$, $\left(\frac{\partial n_{ig}}{\partial \xi} \right)_{T,p} = \nu_{ig}$. En outre, la variation du volume des phases condensées est suffisamment faible pour être négligée, ce qui amène à :

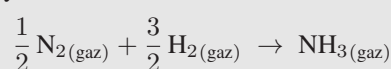
$$\sum_{i=1}^N \nu_i h_i^0(T) \simeq \sum_{i=1}^N \nu_i u_i^0(T) + RT \sum_{n_{ig}} \nu_{ig}$$

c'est-à-dire :

$$\Delta_r H^0 \simeq \Delta_r U^0 + RT \sum_{n_{ig}} \nu_{n_{ig}} \quad (24)$$



La réaction de synthèse de l'ammoniac :



a pour enthalpie *standard* : $\Delta_r H^0 = -46,1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à $T_0 = 298 \text{ K}$.

En déduire son énergie interne *standard* à la même température.

Donnée : constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

RÉPONSE Dans l'équation-bilan de la réaction, les coefficients stœchiométriques algébriques des espèces gazeuses valent : $\nu_{\text{NH}_3} = 1$, $\nu_{\text{H}_2} = -\frac{3}{2}$ et $\nu_{\text{N}_2} = -\frac{1}{2}$. L'application de la relation (24) conduit à :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_r U^0 + RT \times \left(1 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \right) = \Delta_r U^0 - RT \Rightarrow \Delta_r U^0 = \Delta_r H^0 + RT$$

Application numérique :

$$\Delta_r U^0 = -46,1 \cdot 10^3 + 8,314 \times 298 = -43,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

12.2.5.2 Transferts thermiques

Lorsqu'un système reçoit une quantité de chaleur δQ , un travail des forces extérieures de pression ($\delta W_{\text{ext}} = -p_{\text{ext}} dV$) et un travail autre que celui des forces de pression ($\delta W'$), son énergie interne varie de la quantité :

$$dU = \delta Q + \delta W_{\text{ext}} + \delta W' = \delta Q - p_{\text{ext}} dV + \delta W'$$

En supposant $\delta W' = 0$ et en considérant une transformation à volume constant, cette relation devient :

$$dU_V = \delta Q_V \Rightarrow \Delta U_V = Q_V$$

ce qui montre que l'énergie interne dépend du volume V (et de la température), auquel cas on posera :

$$U = \sum_{i=1}^N n_i \omega_i(T, V)$$

où $c_{V_i} = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial T} \right)_{V, \xi}$ désigne la capacité thermique molaire de l'espèce X_i , à volume constant.

Dans le cas général, l'énergie interne dépend des paramètres T , V et ξ , dont la variation élémentaire s'accompagne de la variation :

$$\begin{aligned} dU &= d \left[\sum_{i=1}^N n_i \omega_i(T, V) \right] \\ &= \sum_{i=1}^N dn_i \omega_i(T, V) + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial T} \right)_V dT + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial V} \right)_T dV \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en remarquant que $dn_i = \nu_i d\xi$:

$$dU = \left(\sum_{i=1}^N \nu_i \omega_i \right) d\xi + \left[\sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial T} \right)_V \right] dT + \left[\sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial V} \right)_T \right] dV \quad (25)$$

où $V \equiv V(T, p, \xi)$ peut être considéré comme une fonction de T , p et ξ , en conséquence de quoi :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p, \xi} dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T, \xi} dp + \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \right)_{T, p} d\xi$$

La substitution de dV dans l'identité (25) fournit alors :

$$\begin{aligned} dU &= \sum_{i=1}^N \left[\nu_i \omega_i + n_i \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} \right)_{T, p} \right] d\xi \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \left[n_i \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial T} \right)_V + n_i \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p, \xi} \right] dT \\ &\quad + \left[\sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{T, \xi} \right] dp \quad (26) \end{aligned}$$

ce qui confirme que $U = \sum_{i=1}^N n_i u_i(T, p)$ est aussi une fonction de ξ , T et p , dont la différentielle vaut :

$$dU = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial n_i}{\partial \xi} \right)_{T,p} u_i(T, p) d\xi + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial T} \right)_p dT + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial p} \right)_T dp \quad (27)$$

La comparaison des expressions différentielles (26) et (27) conduit à l'identification des coefficients de dT :

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,\xi} = c_{V_i} + \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial V} \right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,\xi}$$

Le dernier terme de cette identité est :

- soit rigoureusement nul pour les gaz parfaits, dont l'énergie interne molaire ω_i ne dépend que de la température (première loi de Joule) :

$$\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial V} \right)_T = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial u_i}{\partial T} \right)_p = c_{V_i} \text{ pour les gaz parfaits.}$$

- soit négligeable pour les phases denses (liquides et solides), dont le volume V varie peu avec la température :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{p,\xi} \simeq 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial u_i}{\partial T} \right)_p \simeq c_{V_i} \text{ pour les liquides et solides.}$$

Il suffit donc de retenir qu'en général $\left(\frac{\partial u_i}{\partial T} \right)_p \simeq c_{V_i}$ pour présenter la relation (27) sous la forme :

$$dU \simeq \sum_{i=1}^N \nu_i u_i(T, p) d\xi + \sum_{i=1}^N n_i c_{V_i} dT + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial p} \right)_T dp \quad (28)$$

où : $\sum_{i=1}^N \nu_i u_i(T, p) = \Delta_r U$.

Notamment, lorsque la pression p est maintenue égale à la pression $p_0 = 1$ bar, il reste :

$$dU^0 \simeq \Delta_r U^0 d\xi + C_V dT \quad (29)$$

ou encore :

$$\begin{aligned} \Delta U^0 &\simeq \Delta_r H^0 \times \xi + C_V \Delta T \text{ (cas général)} \\ \Delta U^0 &= \Delta_r U^0 \times \xi + C_V \Delta T \text{ (pour des gaz parfaits).} \end{aligned}$$

12.3 Utilisation des tables de grandeurs standard

12.3.1 Enthalpie standard de formation

Par principe, l'enthalpie molaire d'un corps simple (R_i), pris dans son état *standard* à la température T et à $p_0 = 1$ bar, est nulle :

$$h_i^0(R_i) = 0 \text{ si } R_i \text{ est un corps simple dans son état } \textit{standard}. \quad (30)$$

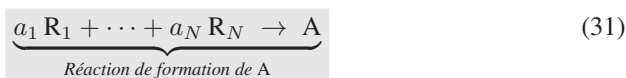
On conservera, par la suite, la notation R_i pour désigner une telle espèce chimique. Par exemple :

$$h^0(\text{Na}_{(\text{sol})}) = 0 \quad h^0(\text{Cl}_{2(\text{gaz})}) = 0 \quad h^0(\text{NaCl}_{(\text{sol})}) \neq 0$$

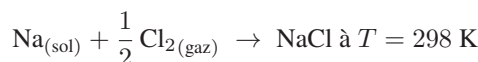
car $\text{NaCl}_{(\text{sol})}$, bien qu'étant dans son état *standard*, n'est pas un corps simple (deux éléments chimiques distincts le composent).

Définition 9 On appelle réaction de formation d'une espèce A l'équation bilan telle que :

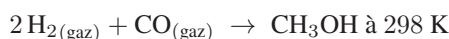
- le seul produit soit A, de coefficient stœchiométrique 1 ;
- les réactifs sont tous des corps simples pris dans leur état standard.



Par exemple :



représente la réaction de formation de NaCl à 298 K, quel que soit l'état physique de NaCl, tandis que la réaction :



ne représente pas la réaction de formation du méthanol à 298 K car $\text{CO}_{(\text{gaz})}$ n'est pas un corps simple.

On note $\Delta_f H^0$ l'enthalpie *standard* de formation de A, dont l'équation (31) impose :

$$\Delta_f H^0(A) = h^0(A) - \sum_{i=1}^N a_i h^0(R_i) \text{ avec } h^0(R_i) = 0 \quad (32)$$

$$\Rightarrow \Delta_f H^0(A) = h^0(A) \quad (33)$$

La conséquence directe de la convention (30) est que l'enthalpie *standard* de formation d'un corps simple, dans son état *standard* est nulle :

$$\Delta_f H^0(R_i) = 0$$

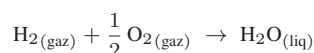


L'enthalpie *standard* de formation de l'eau liquide, à $T = 298,15 \text{ K}$, vaut : $\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) = -285,57 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

1. Écrire l'équation-bilan correspondant à la réaction de formation de $\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$.
2. Donner la valeur numérique de l'enthalpie molaire de $\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$ pur.

RÉPONSE

1. La molécule d'eau est composée des éléments hydrogène et oxygène, qui se présentent, à 298 K (25°C) et $p_0 = 1 \text{ bar}$, sous les formes : $\text{H}_{2(\text{gaz})}$ et $\text{O}_{2(\text{gaz})}$, dont les enthalpies molaires $h^0(\text{H}_{2(\text{gaz})})$ et $h^0(\text{O}_{2(\text{gaz})})$ sont nulles par convention. Aussi, l'équation-bilan de formation de l'eau s'écrit-elle :



2. Par définition, l'enthalpie *standard* de cette réaction vaut :

$$\begin{aligned}\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) &= \sum_{i=1}^N \nu_i h_i^0 = h^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) - \underbrace{h^0(\text{H}_{2(\text{gaz})})}_{=0} - \frac{1}{2} \underbrace{h^0(\text{O}_{2(\text{gaz})})}_{=0} \\ &= h^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})})\end{aligned}$$

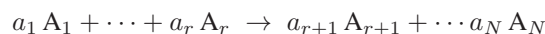
en conséquence de quoi :

$$h^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) = \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) = -285,57 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

12.3.2 Enthalpie standard de réaction

12.3.2.1 Loi de Hess

Considérons la réaction :



dont on veut déterminer l'enthalpie *standard* $\Delta_r H^0$ (l'indice r faisant référence à la réaction à laquelle correspond l'enthalpie *standard*). Par définition :

$$\Delta_r H^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i h^0(\text{A}_i)$$

où l'identité (33) indique que : $h^0(\text{A}_i) = \Delta_f H^0(\text{A}_i)$. Il en découle la loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i \Delta_f H^0(\text{A}_i)$$



La fermentation alcoolique est une étape de vinification qui transforme les sucres synthétisés par la vigne en éthanol et dioxyde de carbone.

1. Écrire la réaction globale de la transformation d'une mole de glucose solide $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ en éthanol $\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}$ liquide et dioxyde de carbone.
2. Calculer, à 298 K, l'enthalpie *standard* de cette réaction.

Données : enthalpies *standard* de formation en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$:

	$\text{CO}_{2(\text{gaz})}$	$\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_{6(\text{sol})}$	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}_{(\text{liq})}$
$\Delta_f H^0$	-393,5	-1 274,0	-277,0

RÉPONSE

1. La transformation du glucose en éthanol et en dioxyde de carbone est décrite par l'équation-bilan :



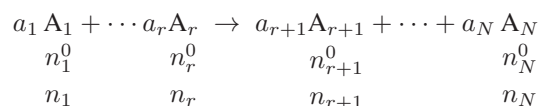
2. En vertu de la loi de Hess, l'enthalpie *standard* de cette réaction vaut :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^0 &= 2 \Delta_f H^0(\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}_{(\text{liq})}) + 2 \Delta_f H^0(\text{CO}_{2(\text{gaz})}) - \Delta_f H^0(\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_{6(\text{sol})}) \\ &= -2 \times 277 - 2 \times 393,5 + 1 274 = -67 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} < 0\end{aligned}$$

Le signe négatif de $\Delta_r H^0$ révèle que la réaction de décomposition du glucose en alcool (fermentation) est exothermique : elle produit de la chaleur.

12.3.2.2 Première loi de Kirchhoff

Considérons une réaction :



avec $n_i = n_i^0 + \nu_i d\xi$.

Lorsque l'avancement de cette réaction évolue de $d\xi$, la composition du milieu réactionnel passe de $\{n_i^0\}$ à $\{n_i = n_i^0 + \nu_i d\xi\}$; on symbolisera les états correspondants par : (n_i^0, T) et (n_i, T) si la réaction est effectuée à la température T et par $(n_i^0, T + dT)$, $(n_i, T + dT)$ lorsque la température de la réaction vaut $T + dT$. Remarquons, maintenant, que la transformation :

$$(n_i^0, T) \rightarrow (n_i, T + dT) \quad (34)$$

peut être réalisée de deux manières différentes :

- Réaction isobare, à la température T , puis échauffement isobare du milieu :

$$(n_i^0, T) \xrightarrow{\delta Q_1} (n_i = n_i^0 + \nu_i d\xi, T) \xrightarrow{\delta Q_2} (n_i, T + dT)$$

Au cours de la première étape, le milieu réactionnel échange la quantité de chaleur :

$$\delta Q_1 = d\xi \times \Delta_r H^0(T)$$

tandis que la deuxième étape s'accompagne d'un transfert thermique :

$$\begin{aligned} \delta Q_2 &= \sum_{i=1}^N n_i c_{p_i}^0 dT = \sum_{i=1}^N (n_i^0 + \nu_i d\xi) c_{p_i}^0 dT \\ &= \sum_{i=1}^N n_i^0 c_{p_i}^0 dT + \sum_{i=1}^N \nu_i c_{p_i}^0 d\xi dT \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \delta Q_2 &= C_{pI}^0 dT + \Delta_r C_p^0 d\xi dT \text{ avec :} \\ C_{pI}^0 &= \sum_{i=1}^N n_i^0 c_{p_i}^0 \text{ et } \Delta_r C_p^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i c_{p_i}^0 \end{aligned}$$

Au cours du processus global (34) l'enthalpie du système varie donc de :

$$dH^0 = \delta Q_1 + \delta Q_2 = \Delta_r H^0(T) \times d\xi + C_{pI}^0 dT + \Delta_r C_p^0 d\xi dT \quad (35)$$

- Échauffement isobare du milieu, puis réaction isobare et isotherme à la température $T + dT$:

$$(n_i^0, T) \xrightarrow{\delta Q'_1} (n_i^0, T + dT) \xrightarrow{\delta Q'_2} (n_i = n_i^0 + \nu_i d\xi, T + dT)$$

La chaleur échangée avec l'extérieur par le milieu réactionnel, au cours de la première étape, vaut :

$$\delta Q'_1 = \sum_{i=1}^N n_i^0 c_{p_i}^0 dT = C_{pI}^0 dT$$

tandis qu'elle vaut, au cours de la deuxième étape :

$$\delta Q'_2 = \Delta_r H^0(T + dT) \times d\xi$$

C'est pourquoi la transformation globale (34) s'accompagne d'une variation d'enthalpie du système :

$$dH^0 = \delta Q'_1 + \delta Q'_2 = C_{pI}^0 dT + \Delta_r H^0(T + dT) \times d\xi \quad (36)$$

L'enthalpie du système étant une fonction d'état, les résultats (35) et (36) doivent s'identifier, ce qui a pour conséquence :

$$\begin{aligned} C_{pI}^0 dT + \Delta_r H^0(T + dT) \times d\xi &= \Delta_r H^0(T) \times d\xi + C_{pI}^0 dT + \Delta_r C_{pI}^0 dT d\xi \\ \Rightarrow [\Delta_r H^0(T + dT) - \Delta_r H^0(T)] d\xi &= \Delta_r C_p^0 \times d\xi dT \end{aligned}$$

où un développement limité de la fonction $\Delta_r H^0$ procure :

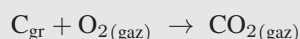
$$\begin{aligned} \Delta_r H^0(T + dT) &= \Delta_r H^0(T) + \frac{d\Delta_r H^0}{dT} \times dT \\ \Rightarrow \frac{d\Delta_r H^0}{dT} \times dT d\xi &= \Delta_r C_p^0 \times d\xi dT \end{aligned}$$

On obtient ainsi la première loi de Kirchhoff :

$$\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 \quad (37)$$



On considère la réaction de combustion du carbone graphite, d'équation-bilan :



1. Déterminer l'enthalpie *standard* de cette réaction à $T_0 = 298,15 \text{ K}$.
2. En admettant que les capacités thermiques molaires sont indépendantes de la température T , et qu'aucun changement d'état ne se produit, déterminer l'expression de l'enthalpie *standard* de la réaction en fonction de la température T .
3. Existe-t-il une température à partir de laquelle cette réaction est endothermique ?

Données : enthalpies *standard* de formation $\Delta_f H^0$ et capacités thermiques molaires à pression constante c_p^0 , à $T_0 = 298,15 \text{ K}$:

	C_{gr}	$\text{O}_{2(\text{gaz})}$	$\text{CO}_{2(\text{gaz})}$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)	0	0	-393,5
c_p^0 (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)	8,53	29,35	37,11

RÉPONSE

1. L'enthalpie *standard* de la réaction s'obtient en appliquant directement la loi de Hess :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^0(T_0) &= \sum_{i=1}^N \nu_i \Delta_f H_i^0 \\ &= \Delta_f H^0(\text{CO}_2) - \Delta_f H^0(\text{O}_2) - \Delta_f H^0(\text{C}) = \Delta_f H^0(\text{CO}_2) \\ &\Rightarrow \Delta_r H^0(T_0) = -393,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

2. En considérant les capacités thermiques molaires indépendantes de la température, la loi (37) conduit à :

$$\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 \Rightarrow \Delta_r H^0(T) = A + \Delta_r C_p^0 \times T$$

où la constante d'intégration A s'obtient à partir de la valeur $\Delta_r H^0(T_0)$ à T_0 :

$$\begin{aligned}\Delta_r H^0(T_0) = A + \Delta_r C_p^0 \times T_0 &\Rightarrow A = \Delta_r H^0(T_0) - \Delta_r C_p^0 \times T_0 \\ &\Rightarrow \Delta_r H^0(T) = \Delta_r H^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times (T - T_0)\end{aligned}$$

et où $\Delta_r C_p^0$ est défini par :

$$\begin{aligned}\Delta_r C_p^0 &= \sum_{i=1}^N c_{p_i}^0 = c_p^0(\text{CO}_2) - c_p^0(\text{O}_2) - c_p^0(\text{C}) \\ &= 37,11 - 29,35 - 8,53 = -0,77 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

Par suite :

$$\Delta_r H^0(T) = -393,5 \cdot 10^3 - 0,77 \times (T - 298,15) = -393,27 \cdot 10^3 - 0,77 T$$

Remarque – Lors du passage aux applications numériques, il faut veiller à exprimer tous les termes avec la même unité ($\Delta_r H^0$ s'exprime souvent en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ tandis que $\Delta_r C_p^0$ est souvent donné en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$).

3. La réaction est endothermique si $\Delta_r H^0 > 0$, c'est-à-dire :

$$-393,27 \cdot 10^3 - 0,77 T > 0 \Rightarrow T < -\frac{393,27 \cdot 10^3}{0,77} < 0$$

Or, une température absolue ne pouvant être négative, ce résultat interdit à la réaction d'être endothermique, quelle que soit la température adoptée.

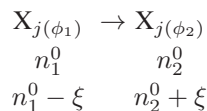
Approximation d'Ellingham

L'exemple précédent révèle que $\Delta_r C_p^0 \times \Delta T$ est de l'ordre de $1 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, tandis que $\Delta_r H^0(T_0)$ est plusieurs centaines de fois plus important ; l'approximation d'Ellingham consiste à poser :

$$\frac{d\Delta_r H^0}{dT} \simeq 0 \Rightarrow \Delta_r H^0(T) \simeq \Delta_r H^0(T_0)$$

12.3.3 Changement d'état

Soient $X_{j(\phi_1)}$ et $X_{j(\phi_2)}$ une même espèce chimique X_j sous deux états physiques différents (par exemple $\text{I}_{2(\text{sol})}$ et $\text{I}_{2(\text{gaz})}$) ; la réaction de changement d'état :



s'effectue à température et pression constante, auquel cas la chaleur $Q_{T,p}$ que reçoit le système, pendant que l'avancement progresse de ξ , s'identifie à sa variation d'enthalpie :

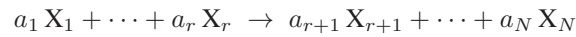
$$Q_{T,p} = \Delta H = \Delta_{12}H^0 \times \xi$$

où $\Delta_{12}H^0$ désigne l'enthalpie *standard* de la réaction de changement d'état. Cette grandeur est aussi appelée *chaleur latente* L_{12} :

$$\Delta H_{12}^0 = h^0(\mathbf{X}_{j(\phi_2)}) - h^0(\mathbf{X}_{j(\phi_1)}) = L_{12} \quad (38)$$

On définit ainsi les chaleurs latentes de fusion L_{fus} (SOLIDE \rightarrow LIQUIDE), de vaporisation L_{vap} (LIQUIDE \rightarrow GAZ) et de sublimation L_{sub} (SOLIDE \rightarrow GAZ).

Considérons une réaction, à une température T et sous une pression p_0 :



où l'une des espèces, $\mathbf{X}_{j(\phi_1)}$, se présente sous un état physique (ϕ_1). L'enthalpie *standard* de cette réaction est alors définie par :

$$\Delta_r H_1^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i h^0(\mathbf{X}_i) = \sum_{i \neq j}^N \nu_i h^0(\mathbf{X}_i) + \nu_j h^0(\mathbf{X}_{j(\phi_1)})$$

Si, à la température T et sous la pression p_0 , l'espèce \mathbf{X}_j peut également se présenter sous un autre état physique (ϕ_2), l'enthalpie *standard* de cette réaction peut également s'écrire :

$$\Delta_r H_2^0 = \sum_{i \neq j}^N \nu_i h^0(\mathbf{X}_i) + \nu_j h^0(\mathbf{X}_{j(\phi_2)})$$

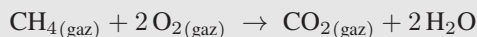
auquel cas :

$$\Delta_r H_2^0 - \Delta_r H_1^0 = \nu_i [h^0(\mathbf{X}_{j(\phi_2)}) - h^0(\mathbf{X}_{j(\phi_1)})] \Rightarrow \Delta_r H_2^0 - \Delta_r H_1^0 = \nu_i \times L_{12} \quad (39)$$

Cette loi révèle l'existence d'une discontinuité pour $\Delta_r H^0$: à la température de changement d'état de l'espèce \mathbf{X}_j , l'enthalpie *standard* prend des valeurs différentes selon que \mathbf{X}_j se présente sous l'état (ϕ_1) ou sous l'état (ϕ_2).



On s'intéresse à la réaction de combustion du méthane :



où l'eau se présente sous forme liquide tant que la température demeure inférieure à $T_1 = 373,15 \text{ K}$ (100°C) ou sous forme gazeuse pour $T > T_1$.

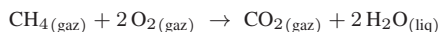
- Déterminer l'enthalpie *standard* de cette réaction pour $T < T_1$.
- Même question pour $T > T_1$.
- Représenter graphiquement $\Delta_r H^0(T)$ pour des valeurs de T inférieures ou supérieures à T_1 .
- La courbe précédente présente une discontinuité en T_1 . En déduire la valeur numérique de la chaleur latente de vaporisation de l'eau L_{vap} , à la température T_1 .
- (a) Écrire l'équation-bilan de la réaction de vaporisation de l'eau.
(b) Calculer l'enthalpie *standard*, $\Delta_{\text{vap}} H^0$ de cette réaction à $T_0 = 298,15 \text{ K}$.
(c) En déduire la valeur numérique de $\Delta_{\text{vap}} H^0$ à la température T_1 et conclure.

Données : enthalpies *standard* de formation ($\Delta_f H^0$) à la température $T_0 = 298,15 \text{ K}$ et capacités thermiques molaires à pression constante (c_p^0), supposées indépendantes de la température :

	$\text{CH}_4(\text{gaz})$	$\text{O}_2(\text{gaz})$	$\text{CO}_2(\text{gaz})$	$\text{H}_2\text{O}(\text{liq})$	$\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)	-74,86	0	-393,5	-295,8	-241,8
c_p^0 (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)	35,31	29,35	37,11	75,29	33,58

RÉPONSE

- La réaction :



a pour enthalpie *standard* $\Delta_r H^0(T_0)$, à la température T_0 , celle donnée par la loi de Hess :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0(T_0) &= \Delta_f H_{T_0}^0(\text{CO}_2) + 2 \Delta_f H_{T_0}^0(\text{H}_2\text{O}(\text{liq})) - \Delta_f H_{T_0}^0(\text{CH}_4) - 2 \Delta_f H_{T_0}^0(\text{O}_2) \\ &= -393,5 - 2 \times 295,8 + 74,86 \Rightarrow \Delta_r H^0(T_0) = -910,24 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Conformément à la première loi de Kirchhoff (37), pour $T < T_1$, l'enthalpie *standard* de cette réaction vérifie :

$$\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 \Rightarrow \Delta_r H^0(T) = \Delta_r H^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times (T - T_0)$$

où :

$$\begin{aligned} \Delta_r C_p^0 &= c_p^0(\text{CO}_2) + 2 c_p^0(\text{H}_2\text{O}(\text{liq})) - c_p^0(\text{CH}_4) - 2 c_p^0(\text{O}_2) \\ &= 37,11 + 2 \times 75,29 - 35,31 - 2 \times 29,35 = 93,68 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

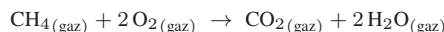
de sorte que :

$$\Delta_r H^0(T) = -910,24 + 93,68 \times (T - 298,15)$$

c'est-à-dire :

$$\Delta_r H^0(T < T_1) = -938,17 \cdot 10^3 + 93,68 \times T \quad (40)$$

- Considérons la réaction suivante, à la température T_0 :



dont l'enthalpie *standard* est donnée par la loi de Hess :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0(T_0) &= \Delta_f H_{T_0}^0(\text{CO}_2) + 2 \Delta_f H_{T_0}^0(\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})) - \Delta_f H_{T_0}^0(\text{CH}_4) - 2 \Delta_f H_{T_0}^0(\text{O}_2) \\ &= -393,5 - 2 \times 241,8 + 74,86 = -802,24 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

La première loi de Kirchoff indique que, pour toute température $T > T_1$:

$$\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 \Rightarrow \Delta_r H^0(T) = \Delta_r H^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times (T - T_0)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta_r C_p^0 &= c_p^0(\text{CO}_2) + 2c_p^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) - c_p^0(\text{CH}_4) - 2c_p^0(\text{O}_2) \\ &= 37,11 + 2 \times 33,58 - 35,31 - 2 \times 29,35 = 10,26 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ &\Rightarrow \Delta_r H^0(T) = -802,24 \cdot 10^3 + 10,26 \times (T - 298,15) \end{aligned}$$

d'où il découle que :

$$\Delta_r H(T > T_1) = -805,30 \cdot 10^3 + 10,26 \times T \quad (41)$$

3. Le résultat (40) révèle que :

$$\Delta_r H^0(298,15 \text{ K}) = -910,24 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

tandis que :

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow T_1^-} [\Delta_r H^0(T)] &= -938,17 \cdot 10^3 + 93,68 \times 373,15 \text{ car } T_1 = 373,15 \text{ K} \\ &= -903,21 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

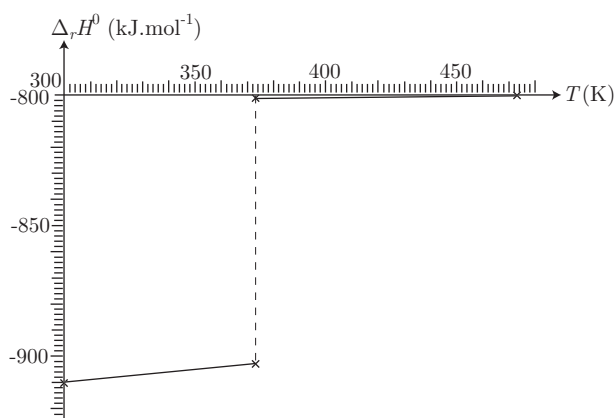
de même que le résultat (41) montre que :

$$\lim_{T_1 \rightarrow T_1^+} [\Delta_r H^0(T)] = -805,3 \cdot 10^3 + 10,26 \times 313,15 = -801,47 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

et que :

$$\Delta_r H^0(T = 473,15 \text{ K}) = -805,30 \cdot 10^3 + 10,26 \times 473,15 = -800,44 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Ces expressions conduisent à la représentation graphique de la fonction $\Delta_r H^0(T)$:



qui manifeste une importante discontinuité à la température $T_1 = 373,15 \text{ K}$ de vaporisation de l'eau.

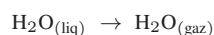
4. Conformément à la loi (39), la chaleur latente de vaporisation de l'eau, à la température $T_1 = 373,15 \text{ K}$, est proportionnelle à l'amplitude de la discontinuité de la fonction $\Delta_r H^0$ en T_1 :

$$\underbrace{\nu_{\text{H}_2\text{O}}}_{=2} L_{\text{vap}} = \lim_{T \rightarrow T_1^+} [\Delta_r H^0(T)] - \lim_{T \rightarrow T_1^-} [\Delta_r H^0(T)] \quad (42)$$

$$= -801,47 + 903,21 = 101,74 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \quad (43)$$

$$\Rightarrow L_{\text{vap}} = \frac{101,74}{2} = 50,87 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \quad (44)$$

5. (a) La vaporisation de l'eau est décrite par l'équation-bilan :



(b) À la température $T_0 = 298,15$ K, l'enthalpie *standard* de cette réaction obéit à la loi de Hess :

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{vap}}H^0(T_0) &= \Delta_f H_{T_0}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) - \Delta_f H_{T_0}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) \\ &= -241,8 + 295,8 = 54 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

(c) Quant à la première loi de Kirchhoff, elle révèle que :

$$\frac{d\Delta_{\text{vap}}H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 \Rightarrow \Delta_{\text{vap}}H^0(T_1) = \Delta_{\text{vap}}H^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times (T_1 - T_0)$$

avec :

$$\begin{aligned}\Delta_r C_p^0 &= c_p^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) - c_p^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) = 33,58 - 75,29 = -41,71 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ \Rightarrow \Delta_{\text{vap}}H^0(T_1) &= 54 \cdot 10^3 - 41,71 \times (373,15 - 298,15) \\ \Rightarrow \Delta_{\text{vap}}(T_1) &= 50,87 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

La comparaison de ce résultat avec la valeur (44) de la chaleur latente de vaporisation confirme la définition (38) de celle-ci :

$$\Delta_{\text{vap}}H^0(T_1) = L_{\text{vap}}(T_1)$$

12.3.4 Deuxième loi de Kirchhoff

Cette partie s'adresse aux étudiants de PCSI ayant choisi l'option PC.

Rappelons que lorsque l'avancement d'une réaction chimique varie de $d\xi$ pendant que la température et la pression du milieu réactionnel évoluent de dT et dp , la variation d'énergie interne est donnée par la loi approximative (28) :

$$dU \simeq \Delta_r U(T, p) d\xi + \sum_{i=1}^N n_i c_{V_i} dT + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial p} \right)_T dp$$

Notamment, si la transformation subie par le système est isobare, à la pression $p_0 = 1$ bar, cette loi devient :

$$dU^0 \simeq \Delta_r U^0(T) d\xi + \sum_{i=1}^N n_i c_{V_i}^0 dT$$

ce qui amène à conclure que :

- lors d'une réaction chimique à température et pression constantes, l'énergie interne varie de :

$$dU^0 = \Delta_r U^0(T) d\xi \quad (45)$$

- lors d'une transformation isobare, dépourvue de réaction chimique :

$$dU^0 \simeq \sum_{i=1}^N n_i c_{V_i}^0 dT \quad (46)$$

Considérons un système composé initialement de n_i^0 moles d'espèces chimiques X_i , à la température T , qui évolue de manière à adopter la température $T + dT$ tandis que la composition chimique devient : $n_i = n_i^0 + \nu_i d\xi$:

$$(n_i^0, T) \xrightarrow{dU^0} (n_i = n_i^0 + \nu_i d\xi, T + dT) \quad (47)$$

Il est possible de décomposer, de deux manières différentes, cette transformation :

- Réaction chimique isotherme (l'énergie interne varie de dU_1^0) suivie d'une variation de température, à composition constante (l'énergie interne varie de dU_2^0) :

$$(n_i^0, T) \xrightarrow{dU_1^0} (n_i, T) \xrightarrow{dU_2^0} (n_i, T + dT)$$

Conformément aux résultats (45) et (46) : $dU_1^0 \simeq \Delta_r U^0(T) d\xi$ et :

$$dU_2^0 \simeq \sum_{i=1}^N (n_i^0 + \nu_i d\xi) c_{V_i}^0 dT = \sum_{i=1}^N n_i^0 c_{V_i}^0 dT + \Delta_r C_V^0 d\xi dT$$

avec : $\Delta_r C_V^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i c_{V_i}^0$.

Par suite, la transformation globale (47) s'accompagne d'une variation d'énergie interne :

$$\begin{aligned} dU^0 &= \sum_{i=1}^N n_i u_i^0(T + dT) - \sum_{i=1}^N n_i^0 u_i^0(T) \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^N n_i u_i^0(T + dT) - \sum_{i=1}^N n_i u_i^0(T)}_{dU_2^0} + \underbrace{\sum_{i=1}^N n_i u_i^0(T) - \sum_{i=1}^N n_i^0 u_i^0(T)}_{dU_1^0} \end{aligned}$$

soit encore :

$$dU^0 \simeq \Delta_r U^0(T) d\xi + \sum_{i=1}^N n_i^0 c_{V_i}^0 dT + \Delta_r C_V^0 d\xi dT \quad (48)$$

- Variation dT de la température à composition constante (l'énergie interne varie de dU_3^0) puis réaction chimique isobare et isotherme, à $T + dT$ (l'énergie interne varie de dU_4^0) :

$$(n_i^0, T) \xrightarrow{dU_3^0} (n_i^0, T + dT) \xrightarrow{dU_4^0} (n_i = n_i^0 + \nu_i d\xi, T + dT)$$

À nouveau, les relations (45) et (46) révèlent que :

$$dU_3^0 \simeq \sum_{i=1}^N n_i^0 c_{V_i}^0 dT \text{ et } dU_4^0 = \Delta_r U^0(T + dT) d\xi$$

Aussi, la variation globale de l'énergie interne du système, au cours de ce processus, vaut :

$$dU^0 = dU_3^0 + dU_4^0 \simeq \sum_{i=1}^N n_i^0 c_{V_i}^0 dT + \Delta_r U^0(T + dT) d\xi \quad (49)$$

La comparaison des identités (48) et (49) conduit à :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N n_i^0 c_{V_i}^0 dT + \Delta_r U^0(T + dT) d\xi \\ \simeq \Delta_r U^0(T) d\xi + \sum_{i=1}^N n_i^0 c_{V_i}^0 dT + \Delta_r C_V^0 d\xi dT \\ \Rightarrow [\Delta_r U^0(T + dT) - \Delta_r U^0(T)] d\xi \simeq \Delta_r C_V^0 d\xi dT \end{aligned}$$

Or, au premier ordre en dT :

$$\Delta_r U^0(T + dT) = \Delta_r U^0(T) + \frac{d\Delta_r U^0}{dT} dT$$

ce qui démontre finalement la deuxième loi de Kirchhoff :

$$\frac{d\Delta_r U^0}{dT} \simeq \Delta_r C_V^0$$

12.3.5 Ionisation et fixation électronique

Cette partie ne concerne que les étudiants en PCSI qui suivent l'option PSI.

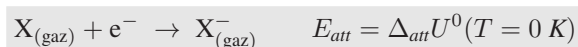
Définition 10 On appelle énergie d'ionisation l'énergie interne standard, à 0 K, de la réaction d'équation-bilan :



Cette définition, particulièrement contraignante, suggère quelques remarques :

- l'espèce X est choisie dans son état gazeux atomique, de manière à ne pas tenir compte d'éventuelles énergies de rupture de liaisons ;
- pour ne pas tenir compte d'un éventuel travail des forces de pression, le volume est choisi constant, ce qui justifie le choix de la fonction énergie interne.

Définition 11 L'énergie de fixation (ou d'attachement) électronique est l'énergie interne standard de la réaction suivante, à 0 K :



Les remarques précédentes s'appliquent à la définition de E_{att} .

Compte tenu de la loi (24), établie à la page 1365 :

$$\Delta_r H^0(T) \simeq \Delta_r U^0(T) + RT \sum_{n_{i_g}} \nu_{i_g} \Rightarrow \Delta_r H^0(T = 0 \text{ K}) \simeq \Delta_r U^0(T = 0 \text{ K})$$

il est possible d'assimiler E_{ion} et E_{att} aux enthalpies *standard* des réactions correspondantes :



et :



Remarque – L'affinité électronique (A.E.) est l'énergie molaire libérée par la dernière réaction, en conséquence de quoi :

$$A.E. \simeq -\Delta_{\text{ion}} H^0(T = 0 \text{ K})$$

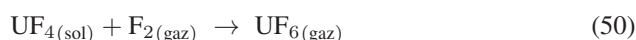
● **413** ————— **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**

15 min.

Effets thermiques des réactions

MPSI-PCSI-PTSI

Le tétrafluorure d'uranium (UF_4) est oxydé en hexafluorure (UF_6) par le difluor, sous une pression totale constante $p_0 = 1$ bar. L'équation-bilan de la réaction est :



Un mélange gazeux (5% de HF, 95% de F_2) est introduit à 523 K dans un réacteur adiabatique en présence de la quantité stœchiométrique nécessaire de $\text{UF}_{6(\text{sol})}$.

Déterminer la température maximale atteinte dans le réacteur à la suite de la réaction.

Données :

- enthalpie *standard* de la réaction (50) : $\Delta_r H^0 = -271 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à 523 K ;
- capacités thermiques molaires à pression constante (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$) :

composé	$\text{F}_{2(\text{gaz})}$	$\text{HF}_{(\text{gaz})}$	$\text{UF}_{4(\text{sol})}$	$\text{UF}_{6(\text{gaz})}$
c_p^0	31,3	29,1	116,0	166,8

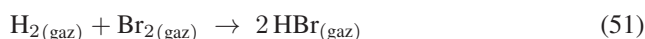
● **414** ————— **Lycée du Parc, Lyon**

15 min.

Effets thermiques des réactions

MPSI-PCSI-PTSI

Un récipient adiabatique, de volume constant, est rempli à 25°C ($T_0 = 298$ K), sous la pression $p_0 = 1$ bar, d'un mélange gazeux composé de 20% de dihydrogène et de 80% de dibrome (pourcentages molaires). Il s'y produit la réaction :



La réaction est considérée comme totale.

1. Quelle est la variation d'énergie interne du milieu réactionnel ?
2. En déduire la température en fin de réaction.

Données :

- enthalpie *standard* de la réaction (51) : $\Delta_r H^0 = -72,46 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à $T_0 = 298$ K ;
- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- capacités thermiques molaires, à volume constant, des gaz diatomiques : $c_V = \frac{5}{2} R$.

● **415** ————— **Lycée Henry Wallon, Valenciennes**

20 min.

Effets thermiques des réactions

MPSI-PCSI-PTSI

On considère la neutralisation d'une solution aqueuse d'acide chlorhydrique par une solution de soude. Dans un volume V_1 d'acide chlorhydrique, de concentration $C_0 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, on verse un volume V de soude, de concentration C_0 . Les deux solutions sont à la même température T_0 . La réaction est faite dans un vase calorifugé de capacité thermique négligeable. On admet que la capacité thermique, à pression constante, des solutions ou de leur mélange est égale à celle, c , de l'eau pure. On

désigne par $\Delta_r H^0$ l'enthalpie *standard* de la réaction de neutralisation d'un acide fort par une base forte :



Données :

- $\Delta_r H^0 = -57,3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à la température T_0 ;
- masse molaire moléculaire de l'eau : $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- capacité thermique massique de l'eau : $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- masse volumique de l'eau : $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

1. Vérifier que la grandeur $C_0 \times M$ est négligeable devant μ .
2. On appelle V_{eq} le volume V de soude à verser pour atteindre l'équivalence de la réaction de neutralisation.
 - (a) Donner l'expression de V_{eq} .
 - (b) Lorsque $V \leq V_{\text{eq}}$, déterminer l'expression de la température T du mélange, en fonction de T_0 , V_1 et V .
 - (c) Même question lorsque $V \geq V_{\text{eq}}$.
 - (d) En déduire une représentation graphique de la courbe décrivant T en fonction de V .

● 416 Lycée Hoche, Versailles

20 min.

Effets thermiques des réactions

MPSI-PCSI-PTSI

125 mL d'une solution de soude, à la concentration $C_0 = 0,5 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, sont mélangés, dans un calorimètre, à 125 mL d'une solution d'acide chlorhydrique à la même concentration, les deux solutions et le calorimètre étant à 14°C au début de l'expérience. En admettant que les solutions aient la même capacité thermique massique et la même densité que l'eau et d'autre part que le calorimètre est équivalent à $m' = 10 \text{ g}$ d'eau, calculer l'enthalpie *standard* de la réaction :



sachant que la température de l'ensemble atteint $17,3^\circ\text{C}$.

Données :

- masse molaire de l'eau : $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- masse volumique de l'eau : $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- capacité thermique massique de l'eau : $c_{\text{H}_2\text{O}} = 4,184 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

● 417 Concours ENSTIM

30 min.

Effets thermiques des réactions

MPSI-PCSI-PTSI

On donne les caractéristiques de l'étage principal cryotechnique (EPC) de la fusée Ariane V et du moteur Vulcain :

Diamètre	5,4 m
Hauteur	20 m
Masse totale	170 tonnes
Poussée	100 tonnes
Contenance	25 tonnes d'hydrogène, 130 tonnes d'oxygène liquides, stockés à basse température
Temps de consommation	570 secondes

Les ergols (carburant H_2 et comburant O_2) sont vaporisés et réchauffés à environ $T_i = 298 \text{ K}$.

1. Préliminaires

- On note x_0 la fraction molaire initiale du comburant. Calculer x_0 .
- Écrire l'équation-bilan de la réaction de combustion entre les ergols, à coefficients stœchiométriques entiers. On note $\Delta_r H^0$ son enthalpie *standard* à la température T_i .

Les ergols ne sont pas en proportion stœchiométrique. Lequel est en excès ?

2. Température de flamme

État initial : $(1 - x_0) \times n_0$ moles de H_2 et $x_0 \times n_0$ moles de O_2 gazeux à $p_0 = 1 \text{ bar}$ et à T_i .

État final : gaz résiduels à p_0 et T_f .

On admet que l'air extérieur n'intervient pas lors de cette combustion.

La transformation est supposée isobare (à la pression p_0) et adiabatique.

- Donner la composition du gaz résiduel dans l'état final. On tiendra compte du fait qu'un ergol est en excès.
- Déterminer la variation d'enthalpie ΔH du système entre l'état initial et l'état final.
- Calculer la température de flamme adiabatique due à ce mélange, en précisant le raisonnement.

Données :

- masses molaires (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) : $M_{\text{H}_2} = 2$ et $M_{\text{O}_2} = 32$;
- données thermodynamiques :
 - $\Delta_r H^0 = -483,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à $T_i = 298 \text{ K}$;
 - capacités thermiques molaires à pression constante (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$) :

$$\begin{array}{ll} \text{H}_2(\text{gaz}) & c_{p1}^0 = 27,28 + 3,26 \cdot 10^{-3} \times T \\ \text{H}_2\text{O}(\text{gaz}) & c_{p2}^0 = 30,54 + 10,29 \cdot 10^{-3} \times T \end{array}$$

● 418 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

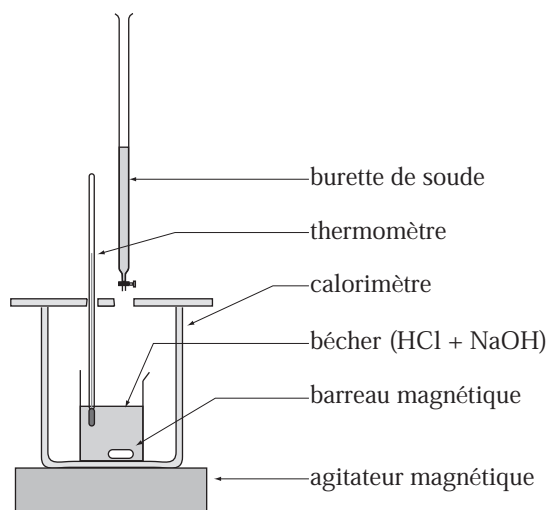
30 min.

Effets thermiques des réactions

MPSI-PCSI-PTSI

On réalise le dosage de $V_a = 50 \text{ mL}$ d'une solution d'acide chlorhydrique ($\text{H}^+ + \text{Cl}^-$) à la concentration $C_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ par une solution de soude ($\text{Na}^+ + \text{HO}^-$) à la même concentration. Le dosage est suivi par *thermométrie* : le milieu réactionnel (bêcher

contenant la solution d'acide) se trouve dans un calorimètre percé de deux petits trous : l'un pour l'introduction d'un volume V_b de solution titrante, l'autre permettant le passage d'un thermomètre qui mesure la température du milieu réactionnel.



On supposera que :

- le calorimètre est parfaitement calorifugé, sa capacité thermique ainsi que celle des ustensiles (bécher, thermomètre,...) est négligeable ;
- la capacité thermique massique des solutions acide et basique sont égales à celle de l'eau :

$$C_{\text{H}_2\text{O}} = 4180 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$

- Initialement, les solutions et instruments sont tous à la même température $T_0 = 298 \text{ K}$ (25°C).

1. Écrire l'équation-bilan de la réaction du dosage et en déduire l'expression du volume d'équivalence V_{be} en fonction de V_a .
2. On suppose ici que $V_b \leq V_{be}$ et on note $x = \frac{V_b}{V_a}$.
 - (a) La réaction de dosage, d'enthalpie *standard* $\Delta_r H^0 = -55,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à 298 K , est supposée se réaliser dans un réacteur parfaitement adiabatique. En déduire la température $T(x)$ en fonction de x , T_0 et $\alpha = -\frac{\Delta_r H^0 C_0}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} C_{\text{H}_2\text{O}}}$, où $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ désigne la masse volumique de l'eau.
 - (b) Tracer la courbe $T(x)$ pour $x \leq 1$.
 - (c) Déterminer la valeur numérique de α en précisant son unité.
3. On se place maintenant dans le cas où $V_b \geq V_{be}$.
 - (a) Déterminer l'expression de $T(x)$ en fonction de x , T_0 et α .
 - (b) Représenter graphiquement l'allure de la courbe $T(x)$ pour $x \geq 1$.

4. (a) Superposer les deux courbes précédentes en s'assurant de leur jonction en $x = 1$.
- (b) En déduire une méthode de dosage par thermométrie.
- (c) Quelle est la température maximale T_{\max} atteinte par le milieu réactionnel ?

Donnée : masse molaire moléculaire de l'eau : $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

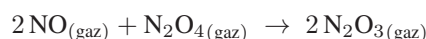
● **419** _____ **Lycée Carnot, Dijon**

5 min.

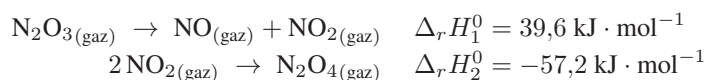
Cycle de transformations

MPSI-PCSI-PTSI

Calculer l'enthalpie *standard* $\Delta_r H^0$ de la réaction suivante :



connaissant les enthalpies *standard*, à 298 K, des réactions suivantes :



● **420** _____ **Concours ESIM**

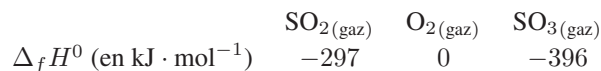
5 min.

Utilisation des tables de données numériques

MPSI-PCSI-PTSI

Le dioxyde de soufre SO_2 réagit avec le dioxygène O_2 pour produire le trioxyde de soufre SO_3 . Calculer l'enthalpie *standard* $\Delta_r H^0$ de cette réaction, pour une mole de SO_3 .

On donne, à 298 K, les enthalpies *standard* de formation :



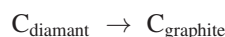
● **421** _____ **Lycée Pissaro, Pontoise**

5 min.

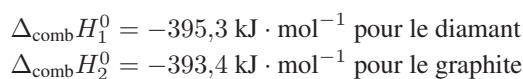
Utilisation des tables de données numériques

MPSI-PCSI-PTSI

Calculer, à 298 K, l'enthalpie *standard* $\Delta_r H^0$ de la réaction d'équation-bilan :



Données : enthalpies *standard* de combustion : $\text{C} + \text{O}_{2(\text{gaz})} \rightarrow \text{CO}_{2(\text{gaz})}$, à 298 K, pour deux formes allotropiques du carbone :



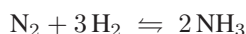
● **422** _____ **Lycée Fabert, Metz**

5 min.

Utilisation des tables de données numériques

MPSI-PCSI-PTSI

Industriellement, la synthèse de l'ammoniac se fait selon la réaction, en phase gazeuse :



On donne, à 298 K, les enthalpies *standard* de formation et les capacités thermiques molaires à pression constante :

	$\text{N}_{2(\text{gaz})}$	$\text{H}_{2(\text{gaz})}$	$\text{NH}_{3(\text{gaz})}$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)	0	0	-46,1
c_p^0 (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)	29,1	28,9	35,1

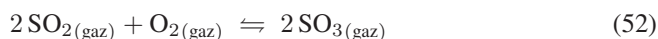
- Calculer l'enthalpie *standard*, $\Delta_r H^0(T_0)$ de la réaction à $T_0 = 298$ K. La réaction est-elle exothermique ou endothermique ?
- Calculer l'enthalpie *standard*, $\Delta_r H^0(T_1)$, de la réaction, à $T_1 = 770$ K.

● **423** **Concours Vété**
10 min.

Utilisation des tables de données numériques

MPSI-PCSI-PTSI

Le dioxyde de soufre est converti en trioxyde de soufre sur un catalyseur au vanadium selon la réaction suivante, en phase gazeuse, à la température T :



- Écrire la réaction de combustion du soufre solide en trioxyde de soufre (SO_3) gazeux dans le dioxygène. La combustion totale, à 25°C , de 160 g de soufre dégage, à pression constante, une quantité de chaleur de $1\,980 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. En déduire l'enthalpie *standard* de formation de $\text{SO}_{3(\text{gaz})}$ à 25°C .
Cette valeur sera supposée constante à toute température.
- Calculer $\Delta_r H_1^0$, enthalpie *standard* de réaction pour la réaction (52), à la température T .

Données :

- masse molaire du soufre : $M = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- enthalpie *standard* de formation de $\text{SO}_{2(\text{gaz})}$ à 298 K :

$$\Delta_f H^0(\text{SO}_{2(\text{gaz})}) = -296 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

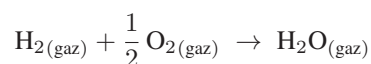
cette valeur est supposée indépendante de la température.

● **424** **Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie**
15 min.

Utilisation des tables de données numériques

MPSI-PCSI-PTSI

Dans une pile à combustible, la réaction chimique globale (réalisée à $1\,000^\circ\text{C}$, sous 5 bar) s'écrit :



pour laquelle les tables permettent de calculer :

$$\Delta_r H^0(T_1 = 1\,273 \text{ K}) = -251,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- À l'aide des grandeurs de réaction, exprimer les variations élémentaires d'enthalpie (dH) du système chimique.
Expliquer pourquoi $\Delta_r H$ peut être considéré comme indépendant de la pression p et de l'avancement ξ de la réaction.

2. Calculer $\Delta_r H$ à $T_1 = 1273 \text{ K}$ dans les conditions de pression suivantes : $p_{\text{H}_2} = 2,0 \text{ bar}$, $p_{\text{O}_2} = 1,0 \text{ bar}$, $p_{\text{H}_2\text{O}} = 0,3 \text{ bar}$, à l'aide des données numériques suivantes :

	$\text{H}_2(\text{gaz})$	$\text{O}_2(\text{gaz})$	$\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)	0	0	-241,8
c_p^0 (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)	28,8	29,4	33,6

où $\Delta_f H^0$ désigne l'enthalpie *standard* de formation d'une espèce à $T_0 = 298 \text{ K}$ et c_p^0 sa capacité thermique molaire à pression constante.

● 425 ————— Lycée Hoche, Versailles

15 min.

Utilisation des tables de données numériques

MPSI-PCSI-PTSI

La réduction du dioxyde de silicium SiO_2 peut être effectuée par le carbure de calcium CaC_2 . Cette réaction est effectuée dans le domaine de température $298 - 2000 \text{ K}$ où les seuls composés présentant un changement de phase sont le silicium Si et le dioxyde de silicium SiO_2 .

On supposera que l'enthalpie *standard* $\Delta_r H^0$ des réactions envisagées ne dépend pas de la température en dehors de tout changement de phase (approximation d'Ellingham).

1. Expliquer les valeurs nulles de $\Delta_f H^0$ observées dans le tableau de données.
2. La réaction d'oxydation du carbure de calcium conduit à la formation de monoxyde de carbone (CO) et d'oxyde de calcium (CaO). Écrire l'équation-bilan de cette réaction pour une mole de dioxygène.
3. Calculer l'enthalpie *standard* de cette réaction pour le domaine de température : $298 - 2000 \text{ K}$.

Données :

- enthalpies *standard* de formation, en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, à 298 K :

	$\text{Si}(\text{sol})$	$\text{SiO}_2(\text{sol})$	$\text{O}_2(\text{gaz})$	$\text{CO}(\text{gaz})$	$\text{CaC}_2(\text{sol})$	$\text{CaO}(\text{sol})$
$\Delta_f H^0$	0,0	-877,4	0,0	-110,5	-59,8	-635,1

- température de fusion du silicium et du dioxyde de silicium et enthalpies *standard* des réactions de fusion :

Si	$T_1 = 1683 \text{ K}$	$\Delta_{\text{fus}} H^0(\text{Si}) = 46,0 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$
SiO_2	$T_2 = 1883 \text{ K}$	$\Delta_{\text{fus}} H^0(\text{SiO}_2) = 8,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

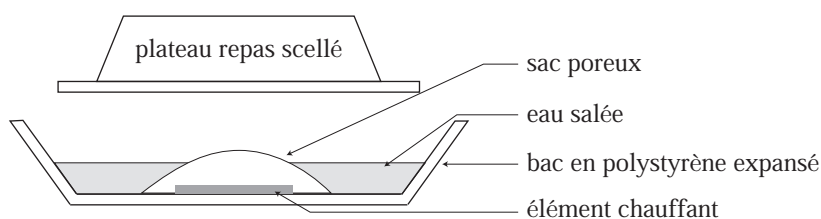
● 426 ————— Concours Polytechnique

20 min.

Utilisation des tables de données numériques

MPSI-PCSI-PTSI

Le magnésium constitue le contenu d'un chauffe-plat chimique breveté aux USA en 1981 et représenté sur la figure ci-dessous :



L'élément chauffant est constitué par une fine grenaille de magnésium (incorporant 5% de fer) dispersé parmi des billes de polyéthylène haute densité ; le tout est placé dans un sachet poreux fixé au fond d'un bac sur lequel vient s'adapter le plateau-repas à chauffer. La mise en marche s'opère par addition d'eau salée dans le bac. On réchauffe le plateau-repas en moins de 15 minutes.

L'ajout d'eau salée au solide contenu dans le sac poreux se traduit par une forte effervescence s'accompagnant rapidement d'un échauffement notable et d'un dégagement de vapeur. On peut vérifier que les bulles de gaz qui se dégagent sont inflammables. Quand l'opération est terminée, on constate que la grenaille métallique a disparu et qu'elle fait place à une bouillie blanche (hydroxyde de magnésium) dispersée sur les billes de polyéthylène.

- Déduire des observations précédentes l'équation-bilan de la réaction modélisant la transformation réalisée dans l'élément chauffant.
- Déterminer l'enthalpie *standard* de cette réaction à 298 K à l'aide des données du tableau suivant ; comparer sa valeur à celle de la réaction du sodium avec l'eau.

Espèces	$\text{Mg}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$	$\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$	$\text{Na}_{(\text{aq})}^+$	$\text{HO}_{(\text{aq})}^-$
$\Delta_f H^0$	-924	-286	-240	-230

$\Delta_f H^0$ désigne l'enthalpie *standard* de formation des espèces à 298 K en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$.

- Des deux métaux étudiés, quel est celui qui conduit à la réaction la plus exothermique :
 - pour le même nombre de moles de métal consommé ?
 - pour le même nombre d'électrons échangés ?
- Pour quelle raison n'utilise-t-on pas le sodium dans ce type de dispositif chauffant ?

● 427

Concours e3a

25 min.

Utilisation de tables de données numériques

MPSI-PCSI-PTSI

- Que signifie « enthalpie *standard* de formation d'une espèce chimique » ?

Il est rappelé que la réaction d'atomisation est une réaction au cours de laquelle une molécule gazeuse est entièrement décomposée en ses atomes à l'état gazeux, son enthalpie *standard* de réaction étant la somme des enthalpies *standard* de dissociation de chaque liaison de la molécule.

- Calculer l'enthalpie *standard* d'atomisation de l'octane : $\Delta_{\text{atom}} H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18})$.
 - En déduire l'enthalpie *standard* de formation de l'octane gazeux : $\Delta_f H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18})$.
- Déterminer l'enthalpie *standard* $\Delta_{\text{comb}} H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18})$ de la réaction de combustion de l'octane à 298 K.

4. Déterminer l'énergie interne *standard* $\Delta_{\text{comb}}U^0$ (C_8H_{18}) de la réaction de combustion de l'octane, à 298 K.

Données :

- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- enthalpies *standard* de formation, à 298 K, en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$:

	$\text{H}_2(\text{gaz})$	$\text{O}_2(\text{gaz})$	$\text{C}(\text{gaz})$	$\text{H}_2\text{O}(\text{gaz})$	$\text{CO}_2(\text{gaz})$
$\Delta_f H^0$	0	0	716,7	-241,8	-393,5

- enthalpies *standard* de dissociation de liaison, à 298 K, en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$:

Liaison	C – C	C – H	H – H
$\Delta_{\text{dis}} H^0$	345	415	436

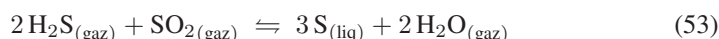
● 428 ————— Lycée Jules Ferry, Versailles

30 min.

Utilisation des tables de données numériques

MPSI-PCSI-PTSI

Les usines de traitement de gaz peuvent constituer des sources importantes de pollution atmosphérique par des rejets d'anhydride sulfureux (SO_2) et d'hydrogène sulfuré (H_2S) qu'elles engendrent. Dans le but de diminuer au *maximum* cette pollution, SO_2 et H_2S contenus dans les gaz résiduels de l'usine peuvent être convertis en soufre et en vapeur d'eau selon la réaction (53) :



Cette réaction est effectuée à 130°C , sous la pression totale $p_0 = 1 \text{ bar}$, avec un catalyseur solide d'alumine.

- En utilisant les données numériques fournies en fin d'énoncé, calculer :
 - l'enthalpie molaire *standard* du soufre liquide à 130°C ;
 - l'enthalpie *standard* de formation de $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$, à 130°C .
- En déduire l'enthalpie *standard* de la réaction (53), à 130°C .

Données :

- enthalpies *standard* de formation (en $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$), à 25°C , et capacités thermiques molaires à pression constante.

	$\text{H}_2\text{S}_{(\text{gaz})}$	$\text{SO}_{2(\text{gaz})}$	$\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$	$\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$	$\text{S}_{(\text{sol})}$
$\Delta_f H^0$	-20 148	-296 780	-285 578	-	0
c_p^0	$30 + 0,015 T$	$32,2 + 0,022 T$	75,24	34,3	-

- variation d'enthalpie mise en jeu lorsqu'une mole de soufre passe de l'état solide à 25°C à l'état liquide à 130°C , sous la pression p_0 :



- enthalpie *standard* de vaporisation de l'eau à 100°C , sous la pression p_0 :

$$\Delta_{\text{vap}} H_{T_1}^0 (\text{H}_2\text{O}) = 37 536 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- on choisira : $0^\circ\text{C} = 273 \text{ K}$.

● **429** **Concours ENSI**
20 min.

Thermochimie

MPSI-PCSI-PTSI

On veut déterminer, expérimentalement, l'enthalpie *standard* de combustion du méthane. Pour cela on introduit, à 298 K, dans une bombe calorimétrique de volume $V = 500 \text{ cm}^3$, du méthane sous une pression de 1 bar. On complète avec du dioxygène jusqu'à une pression totale de 20 bar. La quantité de chaleur dégagée par la réaction de combustion, et ramenée à 298 K, vaut $Q = 17,83 \text{ kJ}$.

1. Écrire la réaction de combustion à 298 K.
2. Calculer l'énergie interne $\Delta_r U$ de cette réaction à 298 K.
3. En déduire la valeur de l'enthalpie de réaction $\Delta_r H$.
4. Peut-on assimiler $\Delta_r H$ à $\Delta_r H^0$?
5. Calculer $\Delta_r H^0$ pour cette réaction à partir des données tabulées.

Données :

- 1 bar = 10^5 Pa ;
- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- enthalpies *standard* de formation à 298 K (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) :

	$\text{CH}_4(\text{gaz})$	$\text{H}_2\text{O}(\text{liq})$	$\text{CO}_2(\text{gaz})$
$\Delta_f H^0$	-74,85	-285,84	-393,51

● **430** **Concours ENSI**
25 min.

Thermochimie

MPSI-PCSI-PTSI

On fait réagir $\text{ZnS}(\text{sol})$ sur $\text{O}_2(\text{gaz})$; il se forme $\text{ZnO}(\text{sol})$ et $\text{SO}_2(\text{gaz})$.

1. Équilibrer l'équation-bilan de la réaction.
2. Quelle est la valeur de l'enthalpie *standard* de réaction à 298 K ?
3. Pour faciliter le démarrage de la réaction, on se propose de travailler à 1 000 K. Quelle est alors la valeur de $\Delta_r H^0$ à cette température ?
4. L'énergie thermique libérée lors de l'oxydation d'une mole de ZnS permet-elle d'élever la température au moins à 1 000 K d'une nouvelle mole de ZnS et de la quantité d'air correspondant à la stœchiométrie ?
On suppose que l'on travaille à pression constante ($p_0 = 1 \text{ bar}$) et que la température initiale vaut 298 K.
5. Dans ces conditions, à quelle température T_e y a-t-il équilibre entre la chaleur dégagée par la réaction et celle nécessaire à l'élévation de température des réactifs de 298 K à T_e (réaction auto-entretenu) ?

Données :

- Grandeurs thermodynamiques à 298 K :

	$\text{ZnS}(\text{sol})$	$\text{O}_2(\text{gaz})$	$\text{SO}_2(\text{gaz})$	$\text{ZnO}(\text{gaz})$	$\text{N}_2(\text{gaz})$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)	-189,3	0	-296,9	-348,0	0
c_p^0 (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)	58,0	29,4	51,1	51,6	29,1

- c_p^0 est indépendant de la température ;
- l'air est un mélange d'une quantité de O_2 pour quatre quantités de N_2 ;
- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

● 431 Concours du CAFEP

30 min.

Thermochimie

MPSI-PCSI-PTSI

On effectue l'électrolyse d'une solution de chlorure de sodium. La tension appliquée aux électrodes est $U = 3,0 \text{ V}$, l'intensité est $I = 140\,000 \text{ A}$. On considère, dans cette modélisation simple d'une cellule industrielle, que le système est d'assez grande dimension pour que les concentrations restent inchangées, que le milieu est contraint d'évoluer de façon isotherme (25°C) et isobare et que tous les constituants sont dans l'état *standard*. On obtient, entre autres, du dichlore gazeux et du dihydrogène gazeux.

1. Aspect électrochimique

- Définir l'anode et la cathode.
- Donner les demi-équations électrochimiques ayant lieu à chaque électrode.
- Calculer le potentiel *standard* du couple H_2O/H_2 .
- Quelle est l'équation-bilan globale de la réaction effectuée, équilibrée pour une mole de dichlore ? Quel autre produit commercialisable obtient-on en dehors du dihydrogène et du dichlore ?

2. Thermochimie de la réaction

- Pourquoi l'enthalpie *standard* de formation du dichlore gazeux est-elle nulle ?
- Calculer l'enthalpie *standard* de la réaction.
- Calculer la constante K de la réaction. Que peut-on en déduire ?
- Pendant combien de temps doit-on effectuer l'électrolyse pour obtenir 1,00 kg de dichlore gazeux ? À quelle variation de l'avancement de la réaction cette transformation correspond-elle ?
- Calculer la variation d'enthalpie subie par le système pendant cette transformation.
- Établir la relation entre la variation d'enthalpie, la quantité de travail électrique W_e et l'énergie thermique Q échangées pendant cette transformation.
- Calculer numériquement W_e et Q .

Données :

- masse molaire atomique de Cl : $M = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- constante de Faraday : $\mathcal{F} = 9,65 \cdot 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$ (valeur absolue de la charge portée par une mole d'électrons) ;
- enthalpies *standard* de formation à 298 K :

	$HO_{(aq)}^-$	$Cl_{(aq)}^-$	$Cl_{2(gaz)}$	$H_2O_{(liq)}$	$H_{2(gaz)}$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$)	-230	-167,2	0	-285,2	0

- potentiel *standard* du couple Cl_2/Cl^- : $E_1^0 = 1,36 \text{ V}$;
- produit ionique de l'eau : $pK_i = 14$.

● 432 **Concours Polytechnique**

30 min.

Thermochimie

MPSI-PCSI-PTSI

La chaleur de réaction, à volume constant, de la réaction de combustion du magnésium se détermine expérimentalement en utilisant une bombe calorimétrique qui constitue un système isolé thermiquement, à volume constant.

1. Établir la relation liant la chaleur de réaction ainsi déterminée à l'enthalpie *standard* molaire de la combustion du magnésium.
2. On dispose, au laboratoire, du matériel et des réactifs suivants :
 - un calorimètre et ses accessoires (agitateur, thermomètre de précision) de capacité calorifique connue et notée C_{cal} ;
 - une balance de précision ;
 - du magnésium et de l'oxyde de magnésium purs ;
 - une solution d'acide chlorhydrique à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, une fiole jaugée de 100 mL.

Proposer un protocole expérimental permettant une détermination indirecte de l'enthalpie *standard* de combustion du magnésium, $\Delta_{\text{comb}}H^0$, connaissant l'enthalpie *standard* de formation de l'eau liquide, à 298 K : $\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O})$. On admettra que la capacité calorifique de la solution d'acide chlorhydrique est peu différente de celle d'un volume égal d'eau.

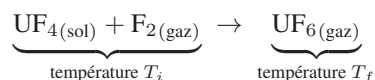
Détailler les expériences à réaliser et établir la relation liant $\Delta_{\text{comb}}H^0$ aux valeurs expérimentales obtenues.

Données : :

- masses molaires : $M_{\text{Mg}} = 24,3 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $M_{\text{O}} = 16,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- capacité thermique massique de l'eau : $c_{\text{eau}} = 4,18 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- masse volumique de l'eau : $\rho = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- capacité thermique molaire des gaz : $c_p \simeq \frac{7}{2} R = 29 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

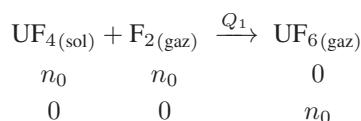
● 413 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

Soit n_0 la quantité commune de UF_4 et de F_2 (alors en proportion stœchiométrique) introduite initialement dans le réacteur. Considérons que la transformation :



puisse être décomposée en deux étapes :

- réaction isobare (à p_0) et isotherme (à T_i) :



dont l'avancement $\xi = n_0$ fournit la chaleur Q_1 reçue :

$$Q_1 = \Delta_r H^0 \times \xi = n_0 \Delta_r H^0$$

- puis variation de la température du milieu réactionnel qui contient, outre n_0 moles de UF_6 , une quantité résiduelle n_{HF} de HF initialement présent dans le réacteur. Désignons par n_{tot} la quantité du mélange $\{\text{HF} + \text{F}_2\}$ introduit initialement, de composition initiale :

$$\begin{cases} \frac{n_0}{n_{\text{tot}}} = 95\% = 0,95 \\ \frac{n_{\text{HF}}}{n_{\text{tot}}} = 5\% = 0,05 \end{cases} \Rightarrow \frac{n_{\text{HF}}}{n_0} = \frac{0,05}{0,95} = 5,3 \cdot 10^{-2} \Rightarrow n_{\text{HF}} = 0,053 n_0$$

Par suite, le mélange : $\{\text{UF}_6 \text{ formé} + \text{HF restant}\}$ subit une variation de température $\Delta T = T_f - T_i$ proportionnelle à la chaleur Q_2 apportée au cours de cette étape :

$$Q_2 = [n_0 c_p^0(\text{UF}_6) + n_{\text{HF}} c_p^0(\text{HF})] \Delta T = n_0 [c_p^0(\text{UF}_6) + 0,053 c_p^0(\text{HF})] \Delta T$$

Par conséquent, le milieu réactionnel reçoit une chaleur totale $Q = Q_1 + Q_2$ négative ou nulle (car $\Delta_r H^0 < 0$ révèle que la réaction est exothermique) :

$$\begin{aligned} Q &= n_0 \Delta_r H^0 + n_0 [c_p^0(\text{UF}_6) + 0,053 c_p^0(\text{HF})] \Delta T \leq 0 \\ \Rightarrow \Delta T &\leq \frac{-\Delta_r H^0}{c_p^0(\text{UF}_6) + 0,053 c_p^0(\text{HF})} \text{ avec } \Delta T = T_f - T_i \\ \Rightarrow T_f &\leq T_i - \frac{\Delta_r H^0}{c_p^0(\text{UF}_6) + 0,053 c_p^0(\text{HF})} \end{aligned}$$

d'où il ressort que T_f peut prendre comme valeur maximale :

$$T_f^{\text{max}} = T_i - \frac{\Delta_r H^0}{c_p^0(\text{UF}_6) + 0,053 c_p^0(\text{HF})}$$

Application numérique :

$$T_f^{\max} = 523 + \frac{271,7 \cdot 10^3}{166,8 + 0,053 \times 29,1} \Rightarrow T_f^{\max} = 2\,137 \text{ K}$$

● 414 ————— Lycée du Parc, Lyon

1. Lorsqu'un système reçoit une chaleur δQ pendant que son volume varie de dV , sous une pression extérieure p_{ext} , son énergie interne U augmente de :

$$dU = \delta Q - p_{\text{ext}} dV$$

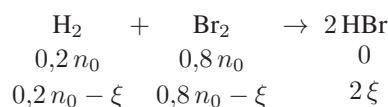
de sorte qu'en maintenant V constant : $dU_V = \delta Q_V \Rightarrow \Delta U_V = Q_V$. Enfin, le réacteur étant calorifugé, ses parois interdisent tout échange thermique avec l'extérieur :

$$Q_V = 0 \Rightarrow \Delta U_V = 0 \quad (54)$$

2. Initialement, si n_0 désigne la quantité totale de gaz, le milieu est composé de :

$$n_{\text{H}_2}^0 = \frac{20}{100} n_0 = 0,2 n_0 \quad n_{\text{Br}_2}^0 = \frac{80}{100} n_0 = 0,8 n_0 \quad n_{\text{HBr}}^0 = 0$$

La réaction étant totale, il est aisé d'en suivre l'avancement :



et de constater qu'elle cesse dès que $\xi = 0,2 n_0$, auquel cas la composition finale est :

$$n_{\text{H}_2} = 0 \quad n_{\text{Br}_2} = 0,6 n_0 \quad n_{\text{HBr}} = 0,4 n_0 \quad (55)$$

Par suite, lorsque la température passe de $T_0 = 298 \text{ K}$ à T_f , le système est caractérisé par la transformation :

$$(T_0, \xi = 0) \rightarrow (T_f, \xi = 0,2 n_0)$$

à l'origine de sa variation d'énergie interne :

$$\Delta U_V^0 = U^0(T_f, \xi = 0,2 n_0) - U^0(T_0, \xi = 0)$$

Du reste, cette transformation peut être décomposée en deux étapes :

- Réaction à température T_0 constante, pendant laquelle l'avancement de la réaction passe de 0 à $\xi = 0,2 n_0$; la variation concomitante de l'énergie interne du système :

$$\Delta U_1^0 = U^0(T_0, \xi = 0,2 n_0) - U^0(T_0, \xi = 0)$$

est accessible à partir de la loi (29) de la page 1367 :

$$\begin{aligned} \Delta U_1^0 &\simeq \Delta_r U^0 \times \xi + C_V \Delta T = \Delta_r U^0 \times \xi \text{ car } T = T_0 = \text{cte} \\ &\Rightarrow \Delta U_1^0 \simeq 0,2 n_0 \times \Delta_r U^0 \end{aligned}$$

- Augmentation de la température du mélange résiduel, dont la variation d'énergie interne :

$$\Delta U_2^0 = U^0(T_f, \xi = 0,2 n_0) - U^0(T_0, \xi = 0,2 n_0)$$

est également donnée par la loi (29) :

$$\begin{aligned} dU_2^0 &\simeq \Delta_r U^0 d\xi + C_V dT = C_V dT \text{ car } \xi = \text{cte} \\ \Rightarrow \Delta U_2^0 &\simeq C_V (T_f - T_0) \end{aligned}$$

où C_V désigne la capacité thermique à volume constant du mélange résiduel :

$$C_V = n_{\text{H}_2} c_V(\text{H}_2) + n_{\text{Br}_2} c_V(\text{Br}_2) + n_{\text{HBr}} c_V(\text{HBr})$$

Non seulement la composition finale du système est donnée par le résultat (55), mais de plus l'énoncé précise que $c_V = \frac{5}{2} R$ pour tous les gaz :

$$\begin{aligned} C_V &= 0,6 n_0 \times \frac{5}{2} R + 0,4 n_0 \times \frac{5}{2} R = n_0 \times \frac{5R}{2} \\ \Rightarrow \Delta U_2^0 &\simeq n_0 \times \frac{5R}{2} (T_f - T_0) \end{aligned}$$

Enfin, :

$$\begin{aligned} \Delta U_V &= U^0(T_f, \xi = 0,2 n_0) - U^0(T_0, \xi = 0) \\ &= \underbrace{U^0(T_f, \xi = 0,2 n_0) - U^0(T_0, \xi = 0,2 n_0)}_{\Delta U_2^0} \\ &\quad + \underbrace{U^0(T_0, \xi = 0,2 n_0) - U^0(T_0, \xi = 0)}_{\Delta U_1^0} \end{aligned}$$

permet de poser :

$$\Delta U_V = n_0 \times \frac{5R}{2} (T_f - T_0) + 0,2 n_0 \times \Delta_r U^0$$

ce qui devient, compte tenu du résultat (54) :

$$\begin{aligned} \Delta U_V = 0 &\Rightarrow T_f - T_0 = -\frac{2}{5R} \times 0,2 \Delta_r U^0 \\ &\Rightarrow T_f = T_0 - \frac{0,4}{5R} \Delta_r U^0 \end{aligned}$$

Quant à la valeur numérique de $\Delta_r U^0$, elle est accessible à partir du résultat de cours (24) :

$$\Delta_r H^0(T) = \Delta_r U^0(T) + RT \sum_{i_g} \nu_{i_g} \Rightarrow \Delta_r H^0(T_0) = \Delta_r U^0(T_0) + RT_0 \sum_{i_g} \nu_{i_g}$$

dans lequel, pour la réaction : $\text{H}_{2(\text{gaz})} + \text{Br}_{2(\text{gaz})} \rightarrow 2 \text{HBr}_{(\text{gaz})}$:

$$\sum_{i_g} \nu_{i_g} = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow \Delta_r H^0(T_0) = \Delta_r U^0(T_0) \Rightarrow T_f = T_0 - \frac{0,4}{5R} \Delta_r H^0(T_0)$$

Application numérique :

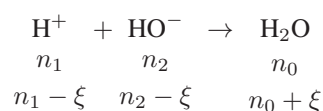
$$T_f = 298 + \frac{0,4}{5 \times 8,32} \times 72,46 \cdot 10^3 \Rightarrow T_f = 995 \text{ K}$$

● 415 ————— Lycée Henri Wallon, Valenciennes

1. En utilisant les unités du système international ($1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 10^3 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$) et $1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} = 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, on vérifie aisément que :

$$C_0 \times M = 0,1 \cdot 10^3 \times 18 \cdot 10^{-3} = 1,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \Rightarrow C_0 \times M \ll \mu = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

2. (a) Soit $n_1 = C_0 V_1$ la quantité initiale d'ions H^+ en solution, issus de la dissociation de HCl , et soit $n_2 = C_0 V$ celle des ions HO^- introduits avec la soude. Ces ions réagissent conformément à l'équation-bilan :



où n_0 désigne la quantité d'eau composant le mélange des solutions acide et basique (de volume $V_1 + V$).

L'équivalence est atteinte dès que l'avancement ξ prend une valeur ξ_e telle que :

$$\begin{cases} n_1 - \xi_e = 0 \\ n_2 - \xi_e = 0 \end{cases} \Rightarrow n_1 = n_2 \Rightarrow C_0 V_1 = C_0 V_{\text{eq}} \Rightarrow V_{\text{eq}} = V_1$$

- (b) Lorsque $V \leq V_{\text{eq}}$, la réaction cesse avec la disparition des ions HO^- , auquel cas le bilan précédent montre que $\xi = n_2 = C_0 V$ et qu'à l'issue de cette réaction, le système est composé de $n_1 - n_2$ moles d'ions H^+ et de $n_0 + n_2$ moles d'eau. La neutralisation de l'acide peut alors être décomposée en deux étapes :

- réaction chimique à la température T_0 , au cours de laquelle le système échange la chaleur :

$$Q_1 = \xi \times \Delta_r H^0 = C_0 V \times \Delta_r H^0$$

- variation $\Delta T = T - T_0$ de la température du mélange issu de la réaction. Celui-ci contient un volume $V + V_1$ d'eau, de masse :

$$m_0 = \mu (V + V_1)$$

et n_2 moles d'eau produites par la réaction, auxquelles correspond une masse :

$$m_2 = n_2 \times M = C_0 V \times M$$

Par suite, cette étape s'accompagne d'un échange thermique, avec l'extérieur :

$$\begin{aligned} Q_2 &= (m_0 + m_2) c \Delta T = [\mu (V + V_1) + C_0 V M] \times c \Delta T \\ &= [\mu V_1 + V (\mu + C_0 M)] \times c \Delta T \end{aligned}$$

Or, étant donné que $C_0 M \ll \mu$, il est légitime de simplifier cette expression :

$$Q_2 \simeq \mu (V_1 + V) \times c \Delta T$$

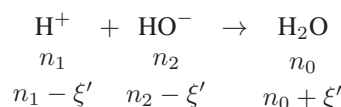
Au cours de cette réaction de neutralisation, le système a donc échangé avec l'extérieur une chaleur $Q = Q_1 + Q_2$, nulle lorsque le milieu réactionnel est calorifugé :

$$\begin{aligned} 0 &= C_0 V \times \Delta_r H^0 + \mu (V_1 + V) \times c \Delta T \\ \Rightarrow T - T_0 = \Delta T &= -\frac{C_0 \Delta_r H^0}{\mu c} \times \frac{V}{V_1 + V} \\ \Rightarrow T &= T_0 - \frac{C_0 \Delta_r H^0}{\mu c} \times \frac{V}{V_1 + V} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned} \frac{C_0 \Delta_r H^0}{\mu c} &= -\frac{0,1 \cdot 10^3 \times 57,3 \cdot 10^3}{1000 \times 4,18 \cdot 10^3} = -1,37 \text{ K} \\ \Rightarrow T &= T_0 + 1,37 \times \frac{V}{V_1 + V} \text{ pour } V \leq V_{\text{eq}} = V_1 \end{aligned} \quad (56)$$

(c) Lorsque $V \geq V_{\text{eq}}$, la réaction de neutralisation :



cesse dès que disparaissent les ions H^+ , auquel cas : $\xi' = n_1$ donne la composition du milieu réactionnel : $n_2 - n_1$ moles d'ions HO^- et $n_0 + n_1$ moles d'eau. À nouveau, le processus de neutralisation peut se décomposer en deux étapes :

- réaction chimique, à température T_0 constante, au cours de laquelle s'opère un transfert thermique :

$$Q'_1 = \xi' \Delta_r H^0 = C_0 V_1 \Delta_r H^0$$

- La variation $\Delta T = T - T_0$ de la température du milieu réactionnel, qui contient une masse d'eau $m_{\text{H}_2\text{O}} = m_0 + m_1$ telle que :

$$m_0 = (V_1 + V) \mu \text{ provient du mélange des solutions ;}$$

$$m_1 = \xi' M = n_1 M = C_0 V_1 M \text{ est issu de la réaction}$$

Ce faisant, la température de la masse d'eau :

$$\begin{aligned} m_{\text{H}_2\text{O}} &= \mu (V_1 + V) + C_0 V_1 M = \underbrace{(\mu + C_0 M)}_{\simeq \mu} V_1 + \mu V \\ &\simeq \mu (V_1 + V) \text{ car } C_0 M \ll \mu \end{aligned}$$

varie de ΔT avec l'apport d'une chaleur :

$$Q'_2 = m_{\text{H}_2\text{O}} c \Delta T = \mu c (V_1 + V) \Delta T$$

À l'issue des deux processus, le milieu réactionnel échange avec l'extérieur une chaleur $Q = Q'_1 + Q'_2$, au demeurant nulle en réacteur adiabatique :

$$0 = C_0 V_1 \Delta_r H^0 + \mu c (V_1 + V) \Delta T$$

$$\Rightarrow \Delta T = T - T_0 = -\frac{C_0 \Delta_r H^0}{\mu c} \times \frac{V_1}{V_1 + V}$$

La température du réacteur a donc pour expression :

$$T = T_0 - \frac{C_0 \Delta_r H^0}{\mu c} \times \frac{V_1}{V_1 + V}$$

$$\Rightarrow T = T_0 + 1,37 \times \frac{V_1}{V_1 + V} \text{ pour } V \geq V_{\text{eq}} = V_1 \quad (57)$$

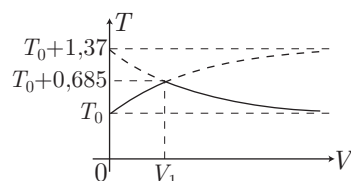
(d) La fonction $T(V)$, donnée par le résultat (56) : $T(V) = T_0 + 1,37 \times \frac{V}{V_1 + V}$, vérifie :

$$T(0) = T_0 \quad T(V_1) = T_0 + 0,685 \quad \lim_{V \rightarrow \infty} [T(V)] = T_0 + 1,37$$

tandis que celle décrite par le résultat (57) obéit à :

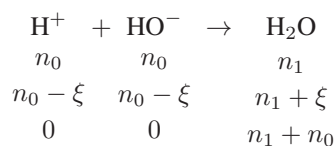
$$T(0) = T_0 + 1,37 \quad T(V_1) = T_0 + 0,685 \quad \lim_{V \rightarrow \infty} [T(V)] = T_0$$

Par suite, la courbe figurant la fonction $T(V)$ prend l'allure suivante :



● 416 ————— Lycée Hoche, Versailles

Un volume $V_0 = 0,125$ L d'une solution de soude, à la concentration $C_0 = 0,5$ mol · L⁻¹, contient $n_0 = C_0 V_0$ moles d'ions HO⁻ ; il en va de même pour la solution d'acide chlorhydrique, qui contient n_0 moles d'ions H⁺ qui réagissent selon l'équation-bilan :



où n_1 désigne la quantité d'eau contenue dans $2V_0 = 250$ mL du mélange réactionnel. Si cette réaction est effectuée à la température $T_i = 287$ K (14°C) constante, le système reçoit la quantité de chaleur :

$$Q_1 = \xi \times \Delta_r H^0 = n_0 \times \Delta_r H^0$$

avec :

$$n_0 = C_0 V_0 = 0,5 \times 0,125 = 6,25 \cdot 10^{-2} \text{ mole}$$

À l'issue de la réaction, le système est composé :

- du calorimètre, de capacité thermique :

$$C_{\text{cal}} = m' c_{\text{H}_2\text{O}} \text{ où } m' = 10 \text{ g} = 10^{-2} \text{ kg}$$

- de la quantité $n = n_0 + n_1$ moles d'eau de masse $m_{\text{H}_2\text{O}} = m_0 + m_1$, telle que :

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = n_0 M + m_1$$

Or, le volume initial d'eau ($V = 2V_0$) présentait une masse m_1 donnée par :

$$\rho_{\text{H}_2\text{O}} = \frac{m_1}{2V_0} \Rightarrow m_1 = 2\rho_{\text{H}_2\text{O}} V_0 = 2 \times 1000 \times 125 \cdot 10^{-6} = 0,250 \text{ kg}$$

Il s'ensuit que :

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = n_0 M + m_1 = 6,25 \cdot 10^{-2} \times 18 \cdot 10^{-3} + 0,250 \simeq 0,251 \text{ kg}$$

Alors que la température de ce système varie de $\Delta T = 17,3 - 14 = 3,3 \text{ K}$, il échange une chaleur :

$$Q_2 = m' c_{\text{H}_2\text{O}} \Delta T + m_{\text{H}_2\text{O}} c_{\text{H}_2\text{O}} \Delta T = (m' + m_{\text{H}_2\text{O}}) c_{\text{H}_2\text{O}} \Delta T$$

Enfin, en supposant le calorimètre parfaitement calorifugé, la chaleur totale $Q = Q_1 + Q_2$ échangée par le système avec l'extérieur est nulle, ce qui se traduit par :

$$n_0 \Delta_r H^0 + (m' + m_{\text{H}_2\text{O}}) c_{\text{H}_2\text{O}} \Delta T = 0 \Rightarrow \Delta_r H^0 = - \frac{(m' + m_{\text{H}_2\text{O}}) c_{\text{H}_2\text{O}} \Delta T}{n_0}$$

Application numérique :

$$\Delta_r H^0 = - \frac{(10^{-2} + 0,251) \times 4184 \times 3,3}{6,25 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow \Delta_r H^0 = 57,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

● 417 ————— Concours ENSTIM

1. Préliminaires

(a) Initialement, les réservoirs contiennent :

$$m_{\text{H}_2} = 25 \cdot 10^3 \text{ kg} = 25 \cdot 10^6 \text{ g de H}_2$$

et :

$$m_{\text{O}_2} = 130 \cdot 10^3 \text{ kg} = 130 \cdot 10^6 \text{ g de O}_2$$

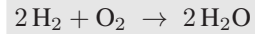
À ces masses sont associées les quantités n_{H_2} et n_{O_2} , liées à m_{H_2} et m_{O_2} par les masses molaires moléculaires M_{H_2} et M_{O_2} :

$$n_{\text{H}_2} = \frac{m_{\text{H}_2}}{M_{\text{H}_2}} = \frac{25 \cdot 10^6}{2} = 12,5 \cdot 10^6 \text{ moles et } n_{\text{O}_2} = \frac{m_{\text{O}_2}}{M_{\text{O}_2}} = \frac{130 \cdot 10^6}{32} = 4,06 \cdot 10^6 \text{ moles.}$$

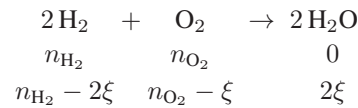
Le nombre total de moles de gaz : $n_0 = n_{\text{H}_2} + n_{\text{O}_2}$ permet de définir la fraction molaire initiale de comburant (O_2) :

$$x_0 = \frac{n_{\text{O}_2}}{n_{\text{H}_2} + n_{\text{O}_2}} = \frac{4,06}{12,5 + 4,06} \Rightarrow x_0 = 0,245 = 24,5\%$$

(b) La combustion des ergols est décrite par l'équation-bilan :



En notant ξ l'avancement de cette réaction, son bilan devient :



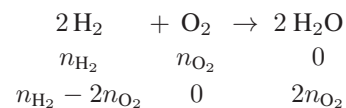
La réaction cesse donc lorsque :

$$\begin{aligned} n_{\text{H}_2} - 2\xi = 0 &\Rightarrow \xi = \frac{n_{\text{H}_2}}{2} = 6,25 \cdot 10^6 \text{ moles} \\ \text{ou } n_{\text{O}_2} - \xi = 0 &\Rightarrow \xi = n_{\text{O}_2} = 4,06 \cdot 10^6 \text{ moles} \end{aligned}$$

Ce bilan montre que H_2 est en excès .

2. Température de flamme

(a) En posant $n_{\text{H}_2} = (1 - x_0) \times n_0$ et $n_{\text{O}_2} = x_0 n_0$, le bilan de la réaction s'écrit :



car $\xi = n_{\text{O}_2}$ à la fin de la réaction. Aussi la composition finale du gaz résiduel est :

$$n'_{\text{H}_2} = n_{\text{H}_2} - 2n_{\text{O}_2} = n_0 (1 - x_0 - 2x_0) \Rightarrow n'_{\text{H}_2} = n_0 (1 - 3x_0)$$

et :

$$n'_{\text{H}_2\text{O}} = 2n_{\text{O}_2} \Rightarrow n'_{\text{H}_2\text{O}} = 2x_0 n_0$$

où : $x_0 = 0,245$ et :

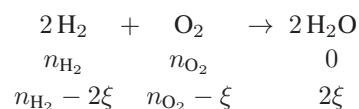
$$n_0 = n_{\text{H}_2} + n_{\text{O}_2} = 12,5 \cdot 10^6 + 4,06 \cdot 10^6 \Rightarrow n_0 = 16,56 \cdot 10^6 \text{ moles.}$$

(b) Entre l'état initial et l'état final, la variation d'enthalpie ΔH s'identifie à la chaleur reçue par les ergols, à pression constante : $\Delta H = Q_p$. Or, l'énoncé précisant que les transformations sont adiabatiques, cela a pour conséquence :

$$Q_p = 0 \Rightarrow \Delta H = 0$$

(c) À l'issue de la réaction, les gaz résiduels sont portés à une température T_f . On peut donc envisager deux transformations qui rendent compte de la combustion des ergols, qui subissent les variations d'enthalpie ΔH_1 et ΔH_2 :

- La combustion à la température T_i :



avec $\xi = n_{\text{O}_2} = xn_0$. L'enthalpie *standard* de cette réaction valant, à la température T_i , $\Delta_r H^0 = -483,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$, l'enthalpie du milieu réactionnel a varié de :

$$\Delta H_1 = \Delta_r H^0 \times 2\xi = 2x_0 n_0 \times \Delta_r H^0$$

- L'échauffement des gaz résiduels :

$$n'_{\text{H}_2} = n_0 (1 - 3x_0) \text{ moles de H}_2 \text{ et } n'_{\text{H}_2\text{O}} = 2x_0 n_0 \text{ moles de H}_2\text{O}$$

de la température $T_i = 298 \text{ K}$ à la température T_f . En notant c_{p1} et c_{p2} les capacités thermiques molaires de H_2 et de H_2O respectivement, un accroissement dT de température de ce mélange requiert un échange thermique :

$$\begin{aligned} \delta Q_2 &= n'_{\text{H}_2} c_{p1} dT + n'_{\text{H}_2\text{O}} c_{p2} dT \\ &= n_0 \times [(1 - 3x_0) c_{p1}^0 + 2x_0 c_{p2}^0] dT \text{ avec } x_0 = 0,245 \\ &= n_0 \times [0,265 c_{p1}^0 + 0,49 c_{p2}^0] dT \\ &= n_0 \times [0,265 \times (27,28 + 3,26 \cdot 10^{-3} T) \\ &\quad + 0,49 \times (30,54 + 10,29 \cdot 10^{-3} T)] dT \\ &= n_0 \times [22,19 \times dT + 5,906 \cdot 10^{-3} \times T dT] \end{aligned}$$

Donc, pour passer de la température T_i à T_f , le système échange la chaleur :

$$\begin{aligned} Q_2 &= n_0 \times \left[22,19 \int_{T_i}^{T_f} dT + 5,906 \cdot 10^{-3} \int_{T_i}^{T_f} T dT \right] \text{ où } T_i = 298 \text{ K} \\ &= n_0 \times \left[22,19 \times (T_f - 298) + \frac{5,906 \cdot 10^{-3}}{2} \times (T_f^2 - 298^2) \right] \\ &= n_0 \times [2,953 \cdot 10^{-3} T_f^2 + 22,19 \times T_f - 6\,875] = \Delta H_2 \end{aligned}$$

Enfin, l'enthalpie totale du milieu réactionnel a varié de la quantité :

$$\begin{aligned} \Delta H &= \Delta H_1 + \Delta H_2 \\ &= n_0 \times [2x_0 \Delta_r H^0 + 2,953 \cdot 10^{-3} T_f^2 + 22,19 T_f - 6\,875] \\ &= n_0 \times [2 \times 0,245 \times (-483,6 \cdot 10^3) + 2,953 \cdot 10^{-3} T_f^2 \\ &\quad + 22,19 T_f - 6\,875] \\ &= n_0 \times (2,953 \cdot 10^{-3} T_f^2 + 22,19 T_f - 243,8 \cdot 10^3) \end{aligned}$$

Or, puisque $\Delta H = 0$, T_f est la solution de l'équation du second degré :

$$2,953 \cdot 10^{-3} T_f^2 + 22,19 T_f - 243,8 \cdot 10^3 = 0$$

elle admet pour unique solution positive :

$$\begin{aligned} T_f &= \frac{-22,19 + \sqrt{(22,19)^2 + 4 \times 243,8 \cdot 10^3 \times 2,953 \cdot 10^{-3}}}{2 \times 2,953 \cdot 10^{-3}} \\ &\Rightarrow T_f = 6\,075 \text{ K} \end{aligned}$$

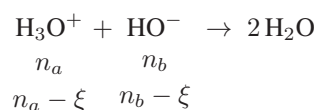
Évidemment, une telle température ne sera vraisemblablement pas atteinte car des échanges thermiques vont inévitablement s'établir avec l'extérieur.

● 418 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Les solutions d'acide chlorhydrique et de soude contiennent des ions Cl^- , Na^+ , H_3O^+ et HO^- , ces deux derniers étant respectivement l'acide du couple $\text{H}_3\text{O}^+/\text{H}_2\text{O}$ et la base du couple $\text{H}_2\text{O}/\text{HO}^-$. Une réaction acido-basique (presque totale) se produit alors :



Le milieu contient, initialement, $n_a = C_0 V_a$ moles d'ions H_3O^+ , dans laquelle sont introduites $n_b = C_0 V_b$ moles d'ions HO^- . Le bilan de cette réaction, exprimé avec l'avancement ξ :

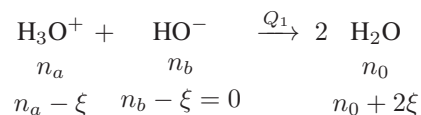


montre que l'équivalence est atteinte lorsque :

$$\begin{cases} n_a - \xi = 0 \\ n_b - \xi = 0 \end{cases} \Rightarrow n_b = n_a \Rightarrow C_0 V_{be} = C_0 V_a \Rightarrow V_{be} = V_a$$

2. (a) Avant l'équivalence, deux phénomènes se produisent :

- Réaction à température T_0 constante (et à pression constante) :



Au cours de cette réaction, le milieu échange, avec l'extérieur, une chaleur :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \Delta_r H^0 \times \xi = \Delta_r H^0 \times n_b \text{ car } \xi = n_b \text{ avant l'équivalence} \\ &\Rightarrow Q_1 = \Delta_r H^0 \times C_0 V_b \end{aligned}$$

- L'élévation de la température : $\Delta T = T - T_0$ du milieu réactionnel qui contient, outre le volume initial V_a d'eau acidifiée, un volume V_b d'eau introduite avec la solution de soude. Un tel volume $V_{\text{H}_2\text{O}} = V_a + V_b$ présente une masse :

$$m_{\text{H}_2\text{O}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} \times V_{\text{H}_2\text{O}} = \rho_{\text{H}_2\text{O}} (V_a + V_b)$$

Remarque – On peut négliger la quantité d'eau produite par la réaction chimique car :

$$\xi \leq n_a = C_0 V_a = 1 \times 50 \cdot 10^{-3} = 0,05 \text{ mole}$$

révèle que cette quantité n'excède pas une masse :

$$\delta m = 0,05 \times M = 0,9 \text{ g}$$

Pour assurer une variation de température ΔT de cette masse d'eau, le milieu réactionnel doit échanger, avec l'extérieur (à pression constante), la chaleur :

$$Q_2 = m_{\text{H}_2\text{O}} \times C_{\text{H}_2\text{O}} \times \Delta T = \rho_{\text{H}_2\text{O}} C_{\text{H}_2\text{O}} (V_a + V_b) \times \Delta T$$

Par suite, le milieu réactionnel échange une chaleur totale avec l'extérieur :

$$Q = Q_1 + Q_2 = \Delta_r H^0 \times C_0 V_b + \rho_{\text{H}_2\text{O}} C_{\text{H}_2\text{O}} (V_a + V_b) \times \Delta T$$

Or, si le réacteur est parfaitement adiabatique :

$$\begin{aligned} Q = 0 &\Rightarrow \Delta T = -\frac{\Delta_r H^0 C_0 \times V_b}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} C_{\text{H}_2\text{O}} (V_a + V_b)} = T - T_0 \\ &\Rightarrow T = T_0 - \frac{\Delta_r H^0 C_0}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} C_{\text{H}_2\text{O}}} \times \frac{V_b}{V_a + V_b} \text{ avec } V_b = x V_a \end{aligned}$$

soit encore :

$$T = T_0 - \alpha \frac{x}{1+x} \text{ où } \alpha = \frac{\Delta_r H^0 C_0}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} C_{\text{H}_2\text{O}}} \quad (58)$$

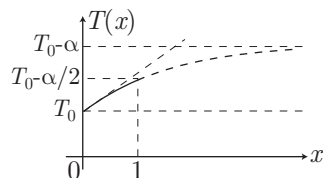
(b) L'expression précédente montre que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} [T(x)] \simeq T_0 - \alpha x \text{ et } \lim_{x \rightarrow \infty} [T(x)] = T_0 - \alpha$$

ce qui signifie que les droites $T_0 - \alpha x$ et $T_0 - \alpha$ (avec $\alpha < 0$) sont des asymptotes pour la fonction $T(x)$. En outre :

$$T(x=1) = T_0 - \frac{\alpha}{2}$$

permet d'obtenir l'allure de la fonction $T(x)$ pour $x \leq 1$:



(c) Le résultat (58) fournit :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\Delta_r H^0 C_0}{\rho_{\text{H}_2\text{O}} C_{\text{H}_2\text{O}}} = \frac{-55,8 \cdot 10^3 \times 10^3}{1\,000 \times 4180} \\ &\text{car } C_0 = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 10^3 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3} \\ &\Rightarrow \alpha = 13,3 \text{ K} \end{aligned}$$

où l'unité de α est donnée par :

$$[\alpha] = \frac{[\Delta_r H^0] \times [C_0]}{[\rho_{\text{H}_2\text{O}}] \times [C_{\text{H}_2\text{O}}]} = \frac{\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \times \text{mol} \cdot \text{m}^{-3}}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \times \text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}} \Rightarrow [\alpha] = \text{K}$$

3. (a) Lorsque l'équivalence est dépassée ($V_b \geq V_{be}$ ou $x \geq 1$), aucune réaction chimique ne se produit. Il s'agit alors d'un simple mélange :

- d'un volume $V_a + V_{be} = V_a + V_a = 2V_a$ de solution où s'est produite la neutralisation de l'acide, et dont la température passe de $T_0 - \frac{\alpha}{2}$ à T ;
- d'un volume $V_b - V_a$ de solution de soude, dont la température passe de T_0 à T .

Le mélange ainsi constitué reçoit alors, de l'extérieur, une chaleur :

$$\begin{aligned} Q &= C_{\text{H}_2\text{O}}\rho_{\text{H}_2\text{O}} \times 2V_a \left(T - T_0 + \frac{\alpha}{2} \right) + C_{\text{H}_2\text{O}}\rho_{\text{H}_2\text{O}} \times (V_b - V_a) \times (T - T_0) \\ &= C_{\text{H}_2\text{O}}\rho_{\text{H}_2\text{O}}V_a \times \left[(2T - 2T_0 + \alpha) + \left(\frac{V_b}{V_a} - 1 \right) (T - T_0) \right] \end{aligned}$$

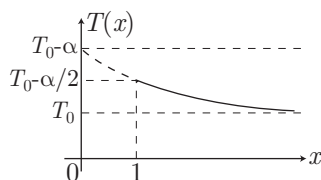
nulle si le calorimètre est parfaitement calorifugé. Aussi :

$$\begin{aligned} 0 &= 2T - 2T_0 + \alpha + (x - 1) (T - T_0) \\ \Rightarrow T \times (2 + x - 1) + \alpha - T_0 \times (2 + x - 1) &= 0 \\ \Rightarrow T \times (x + 1) &= T_0 \times (x + 1) - \alpha \\ \Rightarrow T(x) &= T_0 - \frac{\alpha}{x + 1} \end{aligned}$$

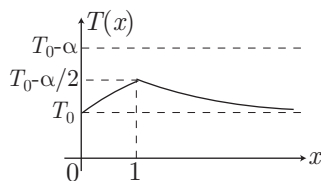
(b) De cette expression, il ressort que :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [T(x)] = T_0 \quad T(x = 1) = T_0 - \frac{\alpha}{2} \quad T(0) = T_0 - \alpha$$

d'où l'on déduit l'allure de la courbe $T(x)$ pour $x \geq 1$:



4. (a) Notons $T_1(x) = T_0 - \frac{\alpha x}{1+x}$ et $T_2(x) = T_0 - \frac{\alpha}{x+1}$ les expressions de la température pour $x \leq 1$ et $x \geq 1$ respectivement. On remarque que $T_1(x = 1) = T_0 - \frac{\alpha}{2}$ et $T_2(x = 1) = T_0 - \frac{\alpha}{2}$, ce qui assure la continuité de la fonction $T(x)$ en $x = 1$, dont la représentation graphique prend l'allure suivante :



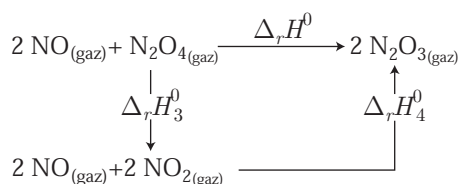
- (b) Cette courbe révèle que $T(x)$ admet une valeur *maximum* lorsque $x = 1$. C'est pourquoi il est possible de doser, par calorimétrie, l'acide chlorhydrique par la soude : la mesure de la température du milieu réactionnel conduit à une courbe $T(x)$ (ou $T(V_b = xV_a)$), dont le *maximum* coïncide avec l'équivalence.

(c) La courbe précédente montre que la température prend pour valeur *maximum* :

$$T_{\max} = T_0 - \frac{\alpha}{2} = 298 - \frac{13,3}{2} \Rightarrow T_{\max} = 291,3 \text{ K } (\simeq 18,3^\circ\text{C})$$

● **419** ————— **Lycée Carnot, Dijon**

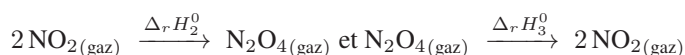
Considérons le cycle de transformations (effectuées à 298 K) :



qui permet de poser :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_r H_3^0 + \Delta_r H_4^0$$

où les réactions :



sont inverses l'une de l'autre, d'où il s'ensuit que : $\Delta_r H_3^0 = -\Delta_r H_2^0$. De même, les réactions :



sont inverses et multiples l'une de l'autre, ce qui implique que : $\Delta_r H_4^0 = -2 \Delta_r H_1^0$. Par suite :

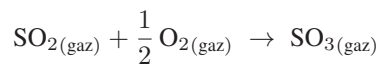
$$\Delta_r H^0 = -\Delta_r H_2^0 - 2 \Delta_r H_1^0$$

Application numérique :

$$\Delta_r H^0 = 57,2 - 2 \times 39,6 \Rightarrow \Delta_r H^0 = -22 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

● **420** ————— **concours ESIM**

La loi de Hess : $\Delta_r H^0 = \sum_{i=1}^N \nu_i \Delta_f H_i^0$ permet le calcul de l'enthalpie *standard* de la réaction :

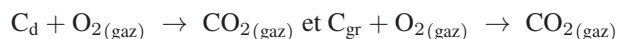


et fournit :

$$\begin{aligned}
 \Delta_r H^0 &= \Delta_f H^0(\text{SO}_3) - \frac{1}{2} \Delta_f H^0(\text{O}_2) - \Delta_f H^0(\text{SO}_2) \\
 &= -396 + 297 \Rightarrow \Delta_r H^0 = -99 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}
 \end{aligned}$$

● 421 ————— Lycée Pissaro, Pontoise

En vertu de la loi de Hess, l'enthalpie *standard* des réactions de combustion du diamant et du graphite :



s'expriment en fonction des enthalpies *standard* de formation des produits et réactifs qui figurent dans les équations-bilan :

$$\Delta_{\text{comb}} H_1^0 = \Delta_f H^0 (\text{CO}_{2(\text{gaz})}) - \Delta_f H^0 (\text{O}_{2(\text{gaz})}) - \Delta_f H^0 (\text{C}_d)$$

$$\Delta_{\text{comb}} H_2^0 = \Delta_f H^0 (\text{CO}_{2(\text{gaz})}) - \Delta_f H^0 (\text{O}_{2(\text{gaz})}) - \Delta_f H^0 (\text{C}_{\text{gr}})$$

La différence de ces des expressions fournit :

$$\Delta_{\text{comb}} H_1^0 - \Delta_{\text{comb}} H_2^0 = \Delta_f H^0 (\text{C}_{\text{gr}}) - \Delta_f H^0 (\text{C}_d) \quad (59)$$

Quant à la réaction : $\text{C}_d \rightarrow \text{C}_{\text{gr}}$, elle est caractérisée par une enthalpie *standard* également soumise à loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \Delta_f H^0 (\text{C}_{\text{gr}}) - \Delta_f H^0 (\text{C}_d)$$

soit encore, compte tenu du résultat (59) :

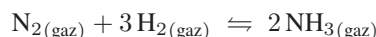
$$\Delta_r H^0 = \Delta_{\text{comb}} H_1^0 - \Delta_{\text{comb}} H_2^0$$

Application numérique :

$$\Delta_r H^0 = -395,3 + 393,4 \Rightarrow \Delta_r H^0 = -1,9 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

● 422 ————— Lycée Fabert, Metz

1. La loi de Hess, appliquée à la réaction :



fournit directement son enthalpie *standard* à la température $T_0 = 298 \text{ K}$:

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0 &= 2 \Delta_f H^0 (\text{NH}_3) - 3 \underbrace{\Delta_f H^0 (\text{H}_{2(\text{gaz})})}_{=0} - \underbrace{\Delta_f H^0 (\text{N}_{2(\text{gaz})})}_{=0} \\ &= -2 \times 46,1 \Rightarrow \Delta_r H^0(T_0) = -92,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Le signe négatif de $\Delta_r H^0(T_0)$ révèle qu'à la température T_0 , la réaction de synthèse de l'ammoniac est exothermique.

2. La variation de l'enthalpie *standard* en fonction de la température est décrite par la première loi de Kirchhoff :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_r H^0}{dT} &= \Delta_r C_p^0 \text{ avec } \Delta_r C_p^0 = 2c_p^0(\text{NH}_3) - 3c_p^0(\text{H}_2) - c_p^0(\text{N}_2) \\ &= 2 \times 35,1 - 3 \times 28,9 - 29,1 = -45,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Étant donné l'invariance de $\Delta_r C_p^0$ avec la température :

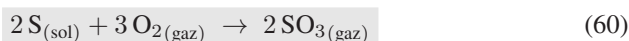
$$\begin{aligned} d\Delta_r H^0 &= \Delta_r C_p^0 dT \Rightarrow \int_{\Delta_r H^0(T_0)}^{\Delta_r H^0(T_1)} d\Delta_r H^0 = \Delta_r C_p^0 \int_{T_0}^{T_1} dT \\ &\Rightarrow \Delta_r H^0(T_1) = \Delta_r H^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times (T_1 - T_0) \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\Delta_r H^0(T_1) = -92,2 \cdot 10^3 - 45,6 \times (770 - 298) \Rightarrow \Delta_r H^0(T_1) = -113,7 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

● 423 ————— Concours Vétô

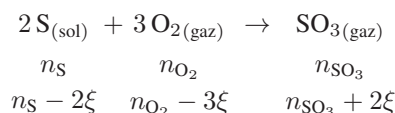
1. La combustion du soufre en $\text{SO}_3(\text{gaz})$ est décrite par l'équation-bilan :



Une masse $m = 160$ g de soufre contient :

$$n_S = \frac{m}{M} = \frac{160}{32} = 5 \text{ moles de soufre}$$

de sorte que le bilan de la combustion totale de cette quantité de soufre :



présente un avancement ξ tel que :

$$n_S - 2\xi = 0 \Rightarrow \xi = \frac{n_S}{2} = 2,5 \text{ moles}$$

En outre, au cours de ce processus isobare et isotherme, le réacteur reçoit, de l'extérieur, la quantité de chaleur :

$$Q_{\text{reçue}} = \Delta_r H^0 \times \xi$$

et donc libère la quantité de chaleur :

$$Q_{\text{lib}} = -Q_{\text{reçue}} = -\Delta_r H^0 \times \xi \Rightarrow \Delta_r H^0 = -\frac{Q_{\text{lib}}}{2,5}$$

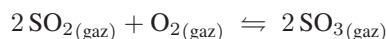
où $\Delta_r H^0$ désigne l'enthalpie *standard* de la réaction (60) :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0 &= 2 \Delta_f H^0 (\text{SO}_3(\text{gaz})) - 3 \Delta_f H^0 (\text{O}_2(\text{gaz})) - 2 \Delta_f H^0 (\text{S}_{(\text{sol})}) \\ &= 2 \Delta_f H^0 (\text{SO}_3(\text{gaz})) - 3 \times 0 - 2 \times 0 \\ &\Rightarrow \Delta_f H^0 (\text{SO}_3(\text{gaz})) = \frac{\Delta_r H^0}{2} = -\frac{Q_{\text{lib}}}{5} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\Delta_f H^0 (\text{SO}_3(\text{gaz})) = -\frac{1980}{5} = -396 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

2. L'enthalpie *standard* de la réaction :



est donnée par la loi de Hess :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^0 &= 2 \Delta_f H^0(\text{SO}_3(\text{gaz})) - \Delta_f H^0(\text{O}_2(\text{gaz})) - 2 \Delta_f H^0(\text{SO}_2(\text{gaz})) \\ &= -2 \times 396 - 0 + 2 \times 296 \\ \Rightarrow \Delta_r H_1^0 &= -200 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

● 424 ————— Lycée Saint-Exupéry, Mantes-la-Jolie

1. Soit h_i l'enthalpie molaire d'un corps pur X_i , associé à un mélange de n_1 moles de X_1 , n_2 moles de X_2 , ..., n_N moles de X_N . Si ce mélange est idéal, h_i ne dépend pas de la composition du milieu, dont l'enthalpie vaut alors :

$$H = \sum_{i=1}^N n_i \times h_i$$

Lorsque les paramètres ξ , T et p varient de $d\xi$, dT et dp , l'enthalpie du système s'accroît de :

$$dH = \sum_{i=1}^N dn_i \times h_i + \sum_{i=1}^N n_i \times dh_i$$

où $dn_i = \nu_i d\xi$ et où h_i dépend *a priori* de T et p (mais pas de ξ dans un mélange idéal) :

$$\begin{aligned} dh_i &= \left(\frac{\partial h_i}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial h_i}{\partial p} \right)_T dp \\ \Rightarrow dH &= \left(\sum_{i=1}^N \nu_i h_i \right) d\xi + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial T} \right)_p dT + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial p} \right)_T dp \end{aligned}$$

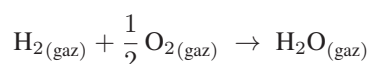
Aussi, en définissant l'enthalpie *standard* ($\Delta_r H$) de la réaction et la capacité thermique molaire c_{p_i} de chaque constituant du mélange par :

$$\Delta_r H = \sum_{i=1}^N \nu_i h_i \text{ et } c_{p_i} = \left(\frac{\partial h_i}{\partial T} \right)_p \quad (61)$$

on trouve :

$$dH = \Delta_r H \times d\xi + \sum_{i=1}^N n_i c_{p_i} dT + \sum_{i=1}^N n_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial p} \right)_T dp$$

Dans un mélange idéal, les enthalpies molaires h_i ne dépendent pas de ξ . En outre, la réaction d'équation-bilan :



ne fait intervenir que des gaz parfaits, dont les enthalpies molaires ne dépendent que de la température : $h_i = h_i(T)$, conformément à la deuxième loi de Joule. C'est pourquoi :

$$\Delta_r H = \sum_{i=1}^N \nu_i h_i(T)$$

est indépendant de p et de ξ .

2. Étant donné ce résultat, $\Delta_r H(T)$ à toute pression p s'identifie à l'enthalpie *standard* $\Delta_r H^0$ à la pression $p_0 = 1$ bar. En revanche, $\Delta_r H$ dépend de la température, conformément à la première loi de Kirchhoff :

$$\frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 \Rightarrow \Delta_r H^0(T_1) = \Delta_r H^0(T_0) + \int_{T_0}^{T_1} \Delta_r C_p^0 dT \quad (62)$$

avec :

$$\begin{aligned} \Delta_r C_p^0 &= \sum_{i=1}^N \nu_i c_{p_i}^0 = c_p^0(\text{H}_2\text{O}) - \frac{1}{2} c_p^0(\text{O}_2) - c_p^0(\text{H}_2) \\ &= 33,6 - \frac{1}{2} \times 29,4 - 28,8 = -9,9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Quant à l'enthalpie *standard* de la réaction, elle s'obtient en appliquant la loi de Hess :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0(T_0) &= \sum_{i=1}^N \nu_i \times \Delta_f H_i^0(T_0) \\ &= \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) - \frac{1}{2} \Delta_f H^0(\text{O}_2) - \Delta_f H^0(\text{H}_2) \\ &= -241,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Finalement, la loi (62) conduit à :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0(T_1) &= \Delta_r H^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times (T_1 - T_0) \\ &= -241,8 \cdot 10^3 - 9,9 \times (1\,273 - 298) \\ &\Rightarrow \Delta_r H^0(T_1) = -251,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

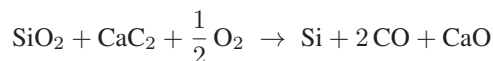
ce qui confirme le résultat fourni par l'énoncé.

● 425 ————— Lycée Hoche, Versailles

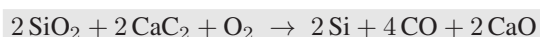
1. À la température $T = 298 \text{ K}$ (25°C) et sous la pression $p_0 = 1$ bar, le silicium et le dioxygène sont respectivement sous leurs états physiques *standard* solide et liquide. Par ailleurs, comme il s'agit de corps simples, il s'ensuit que leur enthalpie *standard* de formation est nulle :

$$\Delta_f H^0(\text{Si}_{(\text{sol})}) = \Delta_f H^0(\text{O}_{2(\text{gaz})}) = 0$$

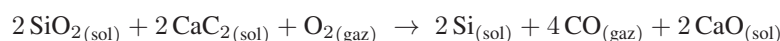
2. Compte tenu des informations fournies par l'énoncé, les réactifs sont SiO_2 , CaC_2 , O_2 et les produits sont Si , CO et CaO :



ce qui fournit l'équation-bilan, pour une mole de O_2 :



3. • Pour $T \in [298 \text{ K}, 1683 \text{ K}[$, la réaction qui se produit est :



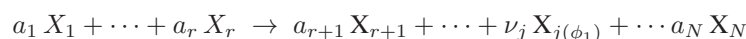
dont l'enthalpie *standard* est fournie par la loi de Hess :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^0 &= 2 \Delta_f H^0 (\text{CaO}_{(\text{sol})}) + 4 \Delta_f H^0 (\text{CO}_{(\text{gaz})}) + 2 \Delta_f H^0 (\text{Si}_{(\text{sol})}) \\ &\quad - \Delta_f H^0 (\text{O}_{2(\text{gaz})}) - 2 \Delta_f H^0 (\text{CaC}_{2(\text{sol})}) - 2 \Delta_f H^0 (\text{SiO}_{2(\text{sol})}) \\ &= -2 \times 635,1 - 4 \times 110,5 + 2 \times 0 - 0 + 2 \times 59,8 + 2 \times 877,4 \end{aligned}$$

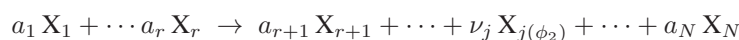
soit encore :

$$\Delta_r H_1^0 = 162,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ pour } 298 \text{ K} \leq T < 1683 \text{ K}$$

- Soit $\Delta_r H_1^0$ l'enthalpie *standard* de la réaction :



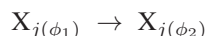
et soit $\Delta_r H_2^0$ celle de la réaction :



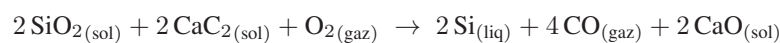
où une espèce X_j se présente sous les états physiques (ϕ_1) et (ϕ_2) différents. Conformément à la loi (39) de la page 1373, la différence des enthalpies *standard* :

$$\Delta_r H_2^0 - \Delta_r H_1^0 = \nu_i \times \Delta_{12} H^0$$

est proportionnelle à l'enthalpie *standard* de la réaction de changement d'état :



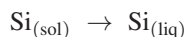
En vertu de ce rappel, lorsque $T \in]1683 \text{ K}, 1883 \text{ K}[$, la réaction d'équation-bilan :



présente une enthalpie *standard* $\Delta_r H_2^0$ qui vérifie :

$$\Delta_r H_2^0 = \Delta_r H_1^0 + 2 \Delta_{\text{fus}} H^0 (\text{Si})$$

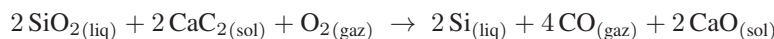
où $\Delta_{\text{fus}} H^0 (\text{Si})$ désigne l'enthalpie *standard* de la réaction de fusion du silicium :



Application numérique :

$$\Delta_r H_2^0 = 162,2 + 2 \times 46 = 254,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ pour } 1683 \text{ K} < T < 1883 \text{ K}$$

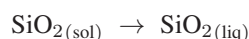
- De même, pour $T \in]1\ 883\ \text{K}, 2\ 000\ \text{K}]$, l'équation-bilan de la réaction :



a pour enthalpie *standard* :

$$\Delta_r H_3^0 = \Delta_r H_2^0 - 2\ \Delta_{\text{fus}} H^0(\text{SiO}_2)$$

où $\Delta_{\text{fus}} H^0(\text{SiO}_2)$ représente l'enthalpie *standard* de la réaction de fusion de SiO_2 :

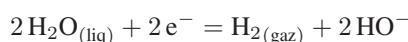


Application numérique :

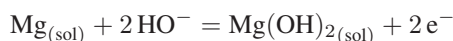
$$\Delta_r H_3^0 = 254,2 - 2 \times 8,5 = 237,2\ \text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ pour } 1\ 883\ \text{K} < T \leq 2\ 000\ \text{K}$$

● 426 ————— Concours Polytechnique

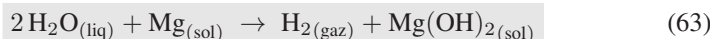
1. Compte tenu des indications fournies par l'énoncé, du dihydrogène (inflammable) se dégage vraisemblablement, dont l'origine ne peut être que l'eau ; la demi-équation associée à cette transformation s'écrit :



En revanche, le magnésium se transforme en hydroxyde de magnésium, conformément à la demi-équation :



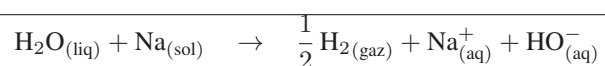
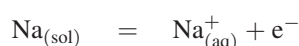
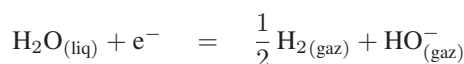
Par conséquent, l'équation-bilan qui décrit la réaction chimique est :



2. L'enthalpie *standard* de formation de $\text{Mg}(\text{sol})$ et de $\text{H}_2(\text{gaz})$ est nulle car ces espèces sont des corps simples dans leur état *standard* à 298 K et sous $p_0 = 1\ \text{bar}$. Par suite, la loi de Hess fournit l'enthalpie *standard* de la réaction (63) :

$$\begin{aligned} \Delta_r H_1^0 &= \underbrace{\Delta_f H^0(\text{H}_2)}_{=0} + \Delta_f H^0(\text{Mg}(\text{OH})_2) - \underbrace{\Delta_f H^0(\text{Mg})}_{=0} - 2\ \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) \\ &= -924 + 2 \times 286 \Rightarrow \Delta_r H_1^0 = -352\ \text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

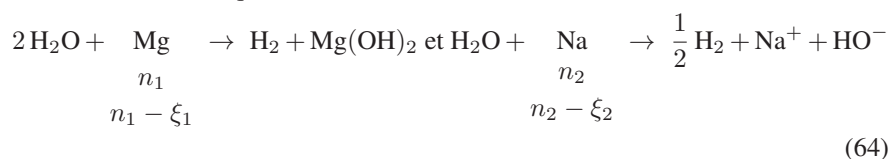
Quant à la réaction du sodium avec l'eau :



son enthalpie *standard* est aussi déduite de la loi de Hess :

$$\begin{aligned}\Delta_r H_2^0 &= \frac{1}{2} \underbrace{\Delta_f H^0(\text{H}_2)}_{=0} + \Delta_f H^0(\text{Na}^+) + \Delta_f H^0(\text{HO}^-) \\ &\quad - \underbrace{\Delta_f H^0(\text{Na}_{(\text{sol})})}_{=0} - \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) \\ &= -240 - 230 + 286 \Rightarrow \Delta_r H^0 = -184 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

3. Soient n_1 , n_2 les nombres de moles de magnésium et de sodium qui réagissent, conformément aux équations-bilan :



Les chaleurs dégagées par ces réactions valent respectivement :

$$Q_1 = -\Delta_r H_1^0 \times \xi_1 \text{ et } Q_2 = -\Delta_r H_2^0 \times \xi_2$$

où $\xi_1 = n_1$ et $\xi_2 = n_2$ si ces réactions sont totales :

$$Q_1 = -\Delta_r H_1^0 \times n_1 \text{ et } Q_2 = -\Delta_r H_2^0 \times n_2$$

- (a) Lorsque $n_1 = n_2$, ces deux chaleurs vérifient :

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{-\Delta_r H_1^0}{-\Delta_r H_2^0} = \frac{352}{184} = 1,9 > 1 \Rightarrow Q_1 > Q_2$$

La réaction du magnésium avec l'eau est plus exothermique que celle du sodium avec l'eau.

- (b) Les demi-équations d'oxydo-réduction montrent que les réactions (64) requièrent le transfert de $n_{e_1} = 2n_1$ et $n_{e_2} = n_2$ électrons respectivement. C'est pourquoi :

$$Q_1 = -\Delta_r H_1^0 \times n_1 = -\frac{\Delta_r H_1^0}{2} \times n_{e_1} \text{ et } Q_2 = -\Delta_r H_2^0 \times n_{e_2}$$

Ce faisant, lorsque $n_{e_1} = n_{e_2}$, le rapport de ces chaleurs vaut :

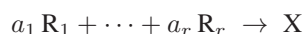
$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{-\Delta_r H_1^0}{-2 \times \Delta_r H_2^0} = \frac{352}{2 \times 184} = 0,9 < 1 \Rightarrow Q_1 < Q_2$$

Dans ces conditions, la réaction du sodium avec l'eau est plus exothermique que celle impliquant le magnésium.

4. Le caractère explosif de la réaction de l'eau avec le sodium proscriit l'emploi de celui-ci à des fins domestiques.

● 427 ————— Concours e3a

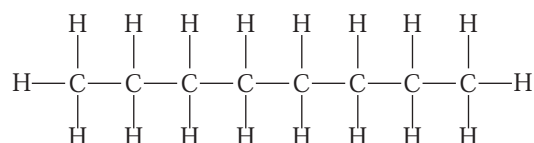
1. L'enthalpie *standard* de formation d'une espèce X, à la température T , est l'enthalpie *standard* de la réaction d'équation-bilan :



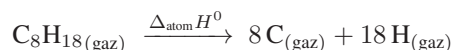
dans laquelle :

- tous les réactifs R_i sont des corps simples dans leur état *standard* à la température T ;
- le coefficient stœchiométrique associé à X vaut 1.

2. (a) Dans la molécule d'octane C_8H_{18} :



les atomes établissent 7 liaisons C – C et 18 liaisons C – H. Par définition, l'enthalpie *standard* d'atomisation, associée à la réaction :



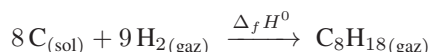
s'identifie à la somme des enthalpies *standard* de dissociation de toutes les liaisons de la molécule, ce qui signifie que :

$$\Delta_{atom}H^0 = 7 \Delta_{dis}H^0 (C - C) + 18 \Delta_{dis}H^0 (C - H)$$

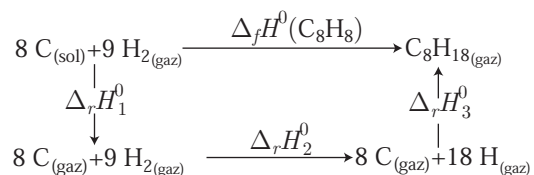
Application numérique :

$$\Delta_{atom}H^0 = 7 \times 345 + 18 \times 415 = 9885 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

(b) L'enthalpie *standard*, $\Delta_f H^0$, de formation de l'octane gazeux, à partir du dihydrogène $H_{2(gaz)}$ et du carbone graphite $C_{(sol)}$:



peut s'obtenir à l'aide d'un cycle de transformations :



$$\Delta_f H^0 = \Delta_r H_1^0 + \Delta_r H_2^0 + \Delta_r H_3^0 \quad (65)$$

Ce cycle est composé des réactions :

- de formation de $C_{(gaz)}$: $C_{(sol)} \xrightarrow{\Delta_f H^0(C_{(gaz)})} C_{(gaz)}$, auquel cas :

$$\Delta_r H_1^0 = 8 \Delta_f H^0 (C_{(gaz)})$$

- de dissociation des liaisons H – H : $H_{2(gaz)} \xrightarrow{\Delta_{dis}H^0(H-H)} 2 H_{(gaz)}$. C'est pourquoi :

$$\Delta_r H_2^0 = 9 \Delta_{dis}H^0 (H - H)$$

- d'atomisation de l'octane : $\text{C}_8\text{H}_{18(\text{gaz})} \xrightarrow{\Delta_{\text{atom}}H^0} 8\text{C}_{(\text{gaz})} + 18\text{H}_{(\text{gaz})}$, d'où il découle que :

$$\Delta_r H_3^0 = -\Delta_{\text{atom}}H^0$$

Par suite, la relation (65) devient :

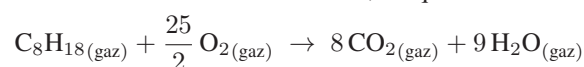
$$\Delta_f H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) = 8 \Delta_f H^0 (\text{C}_{(\text{gaz})}) + 9 \Delta_{\text{dis}}H^0 (\text{H} - \text{H}) - \Delta_{\text{atom}}H^0$$

Application numérique :

$$\Delta_f H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) = 8 \times 716,7 + 9 \times 436 - 9885$$

$$\Rightarrow \Delta_f H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) = -277,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

3. L'enthalpie *standard* de combustion de l'octane, d'équation-bilan :



est donnée par la loi de Hess :

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{comb}}H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) &= 8 \Delta_f H^0 (\text{CO}_2) + 9 \Delta_f H^0 (\text{H}_2\text{O}) \\ &\quad - \frac{25}{2} \Delta_f H^0 (\text{O}_2) - \Delta_f H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) \end{aligned}$$

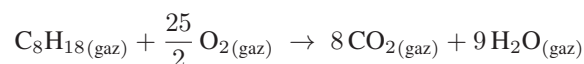
où $\Delta_f H^0 (\text{O}_2) = 0$ car, à $T = 298 \text{ K}$ et $p_0 = 1 \text{ bar}$, le dioxygène gazeux est dans son état *standard*.

Application numérique :

$$\Delta_{\text{comb}}H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) = -8 \times 393,5 - 9 \times 241,8 + 227,4$$

$$\Rightarrow \Delta_{\text{comb}}H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) = -5096,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

4. L'énergie interne *standard* de la réaction de combustion :



s'obtient à l'aide des coefficients stœchiométriques des espèces gazeuses :

$$\begin{aligned} \sum_{i_g} \nu_{i_g} &= \nu_{\text{CO}_2} + \nu_{\text{H}_2\text{O}} + \nu_{\text{O}_2} + \nu_{\text{C}_8\text{H}_{18}} \\ &= 8 + 9 - \frac{25}{2} - 1 = 3,5 \end{aligned}$$

d'où il s'ensuit que :

$$\Delta_{\text{comb}}H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) = \Delta_{\text{comb}}U^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) + RT \sum_{i_g} \nu_{i_g}$$

$$\Rightarrow \Delta_{\text{comb}}U^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) = \Delta_{\text{comb}}H^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) - 3,5 RT$$

Application numérique :

$$\Delta_{\text{comb}}U^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) = -5096,8 \cdot 10^3 - 3,5 \times 8,314 \times 298$$

$$\Rightarrow \Delta_{\text{comb}}U^0 (\text{C}_8\text{H}_{18}) = -5105 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

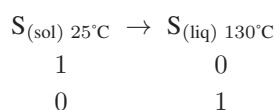
● 428 ————— Lycée Jules Ferry, Versailles

1. Dans la suite, nous désignerons par $h_T^0(X_i)$ l'enthalpie molaire *standard* d'une espèce X_i à la température T et par $\Delta_f H_T^0(X_i)$ l'enthalpie *standard* de formation de l'espèce X_i à la température T . En outre, les températures auxquelles se réalisent les diverses transformations sont :

$$T_0 = 273 + 25 = 298 \text{ K (25°C)} \quad T_1 = 273 + 100 = 373 \text{ K (100°C)}$$

$$T_f = 273 + 130 = 403 \text{ K (130°C)}$$

- (a) La réaction :



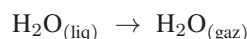
s'accompagne d'une variation d'enthalpie :

$$\Delta H_2^0 = h_{T_f}^0(\text{S}_{(\text{liq})}) - h_{T_0}^0(\text{S}_{(\text{sol})})$$

où $h_{T_0}^0(\text{S}_{(\text{sol})}) = 0$ car à 25°C et sous $p_0 = 1$ bar, le soufre se présente sous forme d'un corps simple solide. C'est pourquoi :

$$h_{T_f}^0(\text{S}_{(\text{liq})}) = \Delta H_2^0 = 4\,259 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- (b) À la réaction de vaporisation de l'eau :



est associée l'enthalpie *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{vap}} H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}) &= \Delta_f H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) - \Delta_f H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) \\ &\Rightarrow \Delta_f H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) = \Delta_{\text{vap}} H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}) + \Delta_f H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) \end{aligned}$$

Or, entre $T_1 = 373 \text{ K}$ et $T_f = 403 \text{ K}$, l'eau ne change pas d'état (elle demeure sous forme de vapeur), auquel cas la première loi de Kirchoff indique que :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})})}{dT} &= c_p^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) \\ \Rightarrow \Delta_f H_{T_f}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) &= \Delta_f H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) + \int_{T_1}^{T_f} c_p^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) dT \\ \Rightarrow \Delta_f H_{T_f}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) &= \Delta_{\text{vap}} H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}) + \Delta_f H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) \\ &\quad + c_p^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) \times (T_f - T_1) \end{aligned}$$

De même, entre les températures $T_0 = 298 \text{ K}$ et $T_f = 373 \text{ K}$, l'eau demeure

dans son état liquide, ce qui justifie l'emploi de la première loi de Kirchhoff :

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})})}{dT} &= c_p^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) \\ \Rightarrow \Delta_f H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) &= \Delta_f H_{T_0}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) + \int_{T_0}^{T_1} c_p^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) dT \\ \Rightarrow \Delta_f H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) &= \Delta_f H_{T_0}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) + c_p^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) \times (T_1 - T_0)\end{aligned}$$

Il apparaît ainsi que :

$$\begin{aligned}\Delta_f H_{T_f}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) &= \Delta_{\text{vap}} H_{T_1}^0(\text{H}_2\text{O}) + \Delta_f H_{T_0}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) \\ &+ c_p^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) \times (T_1 - T_0) + c_p^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) \times (T_f - T_1)\end{aligned}$$

Application numérique :

$$\begin{aligned}\Delta_f H_{T_f}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) &= 37\,536 - 285\,578 + 75,24 \times (373 - 298) + 34,3 \times (403 - 373) \\ \Rightarrow \Delta_f H_{T_f}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) &= -241\,370 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} = h_{T_f}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})})\end{aligned}$$

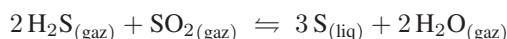
2. Soient $\Delta_f H_{T_f}^0(\text{SO}_2) = h_{T_f}^0(\text{SO}_{2(\text{gaz})})$ et $\Delta_f H_{T_f}^0(\text{H}_2\text{S}) = h_{T_f}^0(\text{H}_2\text{S}_{(\text{gaz})})$ les enthalpies *standard* de formation de $\text{SO}_{2(\text{gaz})}$ et de $\text{H}_2\text{S}_{(\text{gaz})}$, qui vérifient la première loi de Kirchhoff :

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta_f H^0}{dT} = c_p^0 &\Rightarrow \Delta_f H_{T_f}^0 = \Delta_f H_{T_0}^0 + \int_{T_0}^{T_f} c_p^0 dT \\ \Rightarrow \begin{cases} \Delta_f H_{T_f}^0(\text{SO}_2) = \Delta_f H_{T_0}^0(\text{SO}_2) + \int_{T_0}^{T_f} c_p^0(\text{SO}_2) dT \\ \Delta_f H_{T_f}^0(\text{H}_2\text{S}) = \Delta_f H_{T_0}^0(\text{H}_2\text{S}) + \int_{T_0}^{T_f} c_p^0(\text{H}_2\text{S}) dT \end{cases}\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}h_{T_f}^0(\text{SO}_2) + 2 h_{T_f}^0(\text{H}_2\text{S}) &= \Delta_f H_{T_0}^0(\text{SO}_2) + 2 \Delta_f H_{T_0}^0(\text{H}_2\text{S}) + \int_{T_0}^{T_f} [c_p^0(\text{SO}_2) + 2 c_p^0(\text{H}_2\text{S})] dT \\ &= -296\,780 - 2 \times 20\,148 + \int_{T_0}^{T_f} [(32,2 + 2 \times 30) + (0,022 + 2 \times 0,015) T] dT \\ &= -337\,076 + 92,2 \times (403 - 298) + \frac{0,052}{2} [(403)^2 - (298)^2] \\ &\Rightarrow h_{T_f}^0(\text{SO}_2) + 2 h_{T_f}^0(\text{H}_2\text{S}) = -325\,481 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

Aussi, l'enthalpie *standard* de la réaction :



est définie par :

$$\begin{aligned}\Delta_r H_{T_f}^0 &= 3 h_{T_f}^0 (\text{S}_{(\text{liq})}) + 2 h_{T_f}^0 (\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) \\ &\quad - \left[h_{T_f}^0 (\text{SO}_2_{(\text{gaz})}) + 2 h_{T_f}^0 (\text{H}_2\text{S}_{(\text{gaz})}) \right] \\ &= 3 \times 4\,259 - 2 \times 241\,370 + 325\,481 \\ &\Rightarrow \Delta_r H_{T_f}^0 = -144\,482 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}\end{aligned}$$

● 429 ————— Concours ENSI

1. La réaction de combustion du méthane a pour équation-bilan :



2. Dans le volume $V = 500 \text{ cm}^3 = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ sont introduites, initialement, n_0 moles de méthane, à la pression $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ et à la température $T = 298 \text{ K}$. L'équation d'état des gaz parfaits impose alors :

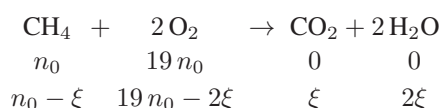
$$p_0 V = n_0 R T \Rightarrow n_0 = \frac{p_0 V}{R T} = \frac{10^5 \times 0,5 \cdot 10^{-3}}{8,314 \times 298} \Rightarrow n_0 = 0,02 \text{ mol}$$

Ensuite, l'introduction de n_1 moles de dioxygène, dans la bombe calorimétrique, amène la pression à $p = 20 \text{ bar}$, tandis que le nombre total de moles de gaz ($n_0 + n_1$) vérifie l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\begin{cases} pV = (n_0 + n_1) RT \\ p_0 V = n_0 R T \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{p_0} = \frac{n_0 + n_1}{n_0} = 1 + \frac{n_1}{n_0}$$

$$\Rightarrow n_1 = n_0 \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) = n_0 \left(\frac{20}{1} - 1 \right) = 19 n_0$$

La connaissance de la composition initiale du mélange réactionnel permet la détermination de l'avancement ξ de la réaction :



Cette réaction cesse dès la disparition du réactif en défaut, en l'occurrence CH_4 :

$$n_0 - \xi = 0 \Rightarrow \xi = n_0 = 0,02 \text{ mole}$$

Au cours de cette transformation à volume constant, le système a reçu une chaleur $Q_{\text{reçue}}$ qui s'identifie à la variation d'énergie interne du système : $Q_{\text{reçue}} = \Delta U_V$, ce qui signifie que la réaction a libéré la quantité de chaleur :

$$Q_{\text{lib}} = -Q_{\text{reçue}} = -\Delta U_V$$

où :

$$\Delta U_V \simeq \Delta_r U \times \xi + C_V \Delta T = \Delta_r U \times \xi$$

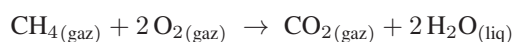
car la température du système dans l'état final est la même que celle dans l'état initial : $T = 298 \text{ K}$. Il s'ensuit que :

$$\Delta_r U \times \xi = -Q_{\text{lib}} \Rightarrow \Delta_r U = -\frac{Q_{\text{lib}}}{0,02}$$

Application numérique :

$$\Delta_r U = -\frac{17,83}{0,02} = -891,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

3. L'enthalpie de réaction se déduit de $\Delta_r U$ et des coefficients stœchiométriques (ν_{i_g}) des espèces gazeuses impliquées dans l'équation-bilan :



Ainsi :

$$\begin{aligned} \Delta_r H &= \Delta_r U + RT \sum_{i_g} \nu_{i_g} \\ &= \Delta_r U + RT \times (\nu_{\text{CO}_2} + \nu_{\text{O}_2} + \nu_{\text{CH}_4}) \\ &= \Delta_r U + RT \times (1 - 2 - 1) \Rightarrow \Delta_r H = \Delta_r U - 2 RT \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\Delta_r H = -891,5 \cdot 10^3 - 2 \times 8,314 \times 298 \Rightarrow \Delta_r H = -896,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

4. L'enthalpie de réaction est définie à partir des enthalpies molaires h_i de chaque espèce chimique :

$$\Delta_r H = \sum_{i=1}^N \nu_i h_i = \sum_{i_g} \nu_{i_g} h_{i_g} + \nu_{\text{H}_2\text{O}} h_{\text{H}_2\text{O}}$$

où, conformément à la deuxième loi de Joule, l'enthalpie molaire h_{i_g} des espèces gazeuses ne dépend que de la température :

$$h_{i_g} = h_{i_g}(T) = h_{i_g}^0(T)$$

Quant à l'enthalpie molaire $h_{\text{H}_2\text{O}}$ de $\text{H}_2\text{O}(\text{liq})$, elle dépend assez faiblement de la pression pour qu'elle soit assimilée à $h_{\text{H}_2\text{O}}^0$. C'est pourquoi :

$$\Delta_r H \simeq \Delta_r H^0$$

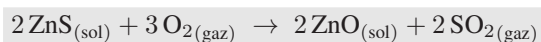
5. La loi de Hess fournit directement l'enthalpie *standard* de la réaction de combustion du méthane :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0 &= \sum_{i=1}^N \nu_i \Delta_f H^0(\text{X}_i) = 2 \Delta_f H^0(\text{H}_2\text{O}) + \Delta_f H^0(\text{CO}_2) \\ &\quad - 2 \Delta_f H^0(\text{O}_2) - \Delta_f H^0(\text{CH}_4) \\ &= -2 \times 285,84 - 393,51 - 2 \times 0 + 74,85 \\ &\Rightarrow \Delta_r H^0 = -890,34 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Ce résultat est suffisamment proche de celui obtenu à la question 3. pour justifier *a posteriori* la dépendance négligeable de $h_{\text{H}_2\text{O}}$ à l'égard de la pression.

● 430 Concours ENSI

1. L'équation-bilan de la réaction de $\text{ZnS}_{(\text{sol})}$ sur $\text{O}_{2(\text{gaz})}$ s'écrit :



2. Appliquée à cette équation-bilan, la loi de Hess fournit, à la température $T_0 = 298 \text{ K}$, l'enthalpie *standard* :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0 &= 2 \Delta_f H^0 (\text{SO}_{2(\text{gaz})}) + 2 \Delta_f H^0 (\text{ZnO}_{(\text{sol})}) \\ &\quad - 3 \Delta_f H^0 (\text{O}_{2(\text{gaz})}) - 2 \Delta_f H^0 (\text{ZnS}_{(\text{sol})}) \\ &= -2 \times 296,9 - 2 \times 348 + 2 \times 189,3 \\ &\Rightarrow \Delta_r H^0(T_0) = -911,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

3. La première loi de Kirchhoff permet d'accéder à la valeur de l'enthalpie *standard* de la réaction à la température $T_1 = 1000 \text{ K}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta_r H^0}{dT} = \Delta_r C_p^0 &\Rightarrow \int_{\Delta_r H^0(T_0)}^{\Delta_r H^0(T_1)} d\Delta_r H^0 = \int_{T_0}^{T_1} \Delta_r C_p^0 dT \quad (66) \\ &\Rightarrow \Delta_r H^0(T_1) = \Delta_r H^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times (T_1 - T_0) \quad (67) \end{aligned}$$

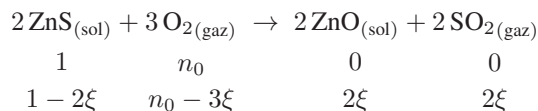
où :

$$\begin{aligned} \Delta_r C_p^0 &= 2 c_p^0 (\text{SO}_2) + 2 c_p (\text{ZnO}) - 3 c_p (\text{O}_2) - 2 c_p (\text{ZnS}) \\ &= 2 \times 51,1 + 2 \times 51,6 - 3 \times 29,4 - 2 \times 58 \\ &\Rightarrow \Delta_r C_p^0 = 1,2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

Application numérique :

$$\Delta_r H^0(T_1) = -911,2 \cdot 10^3 + 1,2 \times (1000 - 298) \Rightarrow \Delta_r H^0(T_1) = -910,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

4. L'oxydation d'une mole de ZnS requiert n_0 moles de dioxygène, qui intervient dans le bilan :



Or, la réaction étant totale :

$$1 - 2\xi = 0 \Rightarrow \xi = \frac{1}{2} \text{ mole}$$

et :

$$n_0 - 3\xi = 0 \Rightarrow n_0 = 3\xi = \frac{3}{2} \text{ mole}$$

Aussi, à pression p_0 et à température T_1 constantes, l'énergie libérée par l'oxydation d'une mole de ZnS vaut :

$$Q_{\text{lib}} = -\Delta_r H^0(T_1) \times \xi = 910,4 \times \frac{1}{2} = 455,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \quad (68)$$

De plus, le bilan précédent montre que l'oxydation d'une mole de ZnS requiert $n_{\text{O}_2} = \frac{3}{2}$ mole de $\text{O}_2(\text{gaz})$ et de quatre fois plus de diazote (présent dans l'air), soit : $n_{\text{N}_2} = 4 \times \frac{3}{2} = 6$ moles. Aussi, le mélange initial a pour capacité thermique :

$$\begin{aligned} C_p^0 &= n_{\text{ZnS}} c_p^0(\text{ZnS}) + n_{\text{O}_2} c_p^0(\text{O}_2) + n_{\text{N}_2} c_p(\text{N}_2) \\ &= 1 \times 58 + \frac{3}{2} \times 29,4 + 6 \times 29,1 = 276,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \end{aligned}$$

Par conséquent l'échauffement de ce mélange réactionnel, de la température T_0 à la température T_1 s'accompagne d'un apport de chaleur :

$$Q_{\text{éch}} = C_p^0 (T_1 - T_0) = 276,7 \times (1000 - 298) = 194,2 \text{ kJ} \quad (69)$$

La comparaison des résultats (68) et (69) :

$$Q_{\text{lib}} > Q_{\text{éch}}$$

montre que la réaction d'une mole de ZnS sur O_2 libère, à $T_1 = 1000 \text{ K}$, plus de chaleur qu'il est nécessaire pour porter ce même mélange réactionnel de la température $T_0 = 298 \text{ K}$ à $T_1 = 1000 \text{ K}$.

5. À une température T_e , l'enthalpie *standard* de la réaction suit la loi (67) :

$$\Delta_r H^0(T_e) = \Delta_r H^0(T_0) + \Delta_r C_p^0 \times (T_e - T_0) \quad (70)$$

de sorte que l'oxydation d'une mole de ZnS libère une chaleur décrite par la loi (68) :

$$Q'_{\text{lib}} = -\Delta_r H^0(T_e) \times \xi = -\Delta_r H^0(T_e) \times \frac{1}{2} \quad (71)$$

De même, pour porter la température des réactifs de T_0 à T_e , il faut apporter au mélange réactionnel une chaleur déduite de l'identité (69) :

$$Q'_{\text{éch}} = C_p^0 (T_e - T_0)$$

Ce faisant, l'équilibre entre la chaleur dégagée par la réaction et celle nécessaire à l'élévation de température des réactifs est assurée pour une température T_e telle que :

$$\begin{aligned} Q'_{\text{lib}} = Q'_{\text{éch}} &\Rightarrow -\Delta_r H^0(T_e) \times \frac{1}{2} = C_p^0 \times (T_e - T_0) \\ &\Rightarrow -\Delta_r H^0(T_e) = 2 C_p^0 \times (T_e - T_0) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu de la relation (70) :

$$\begin{aligned} -\Delta_r H^0(T_0) - \Delta_r C_p^0 \times (T_e - T_0) &= 2C_p^0 \times (T_e - T_0) \\ \Rightarrow (\Delta_r C_p^0 + 2C_p^0) \times (T_e - T_0) &= -\Delta_r H^0(T_0) \\ \Rightarrow T_e &= T_0 - \frac{\Delta_r H^0(T_0)}{\Delta_r C_p^0 + 2C_p^0} \end{aligned}$$

Application numérique :

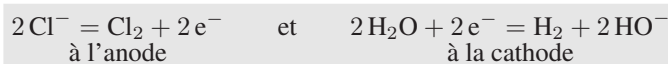
$$T_e = 298 + \frac{911,2 \cdot 10^3}{1,2 + 2 \times 276,7} \Rightarrow T_0 = 1941 \text{ K}$$

Ce résultat montre que la réaction s'auto-entretient jusqu'à une température $T_e = 1941 \text{ K}$.

● 431 ————— Concours du CAFEP

1. Aspect électrochimique

- (a) L'anode est l'électrode où arrive le courant électrique (il s'y produit une oxydation), tandis que la cathode est l'électrode d'où part le courant électrique (elle est le siège d'une réduction).
- (b) Compte tenu de ce qui précède, les demi-équations électrochimiques qui se produisent dans la cellule d'électrolyse sont :



- (c) Par convention, le couple H^+/H_2 , de demi-équation : $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- = \text{H}_2$, a pour potentiel *standard* : $E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) = 0 \text{ V}$, en conséquence de quoi la loi de Nernst donne le potentiel de ce couple (où $|X_i|$ désigne l'activité d'une espèce X_i) :

$$E = E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) + 0,03 \log \left(\frac{|\text{H}^+|^2}{|\text{H}_2|} \right) = 0,03 \log \left(\frac{|\text{H}^+|^2}{|\text{H}_2|} \right)$$

Or, le produit ionique de l'eau (constante de l'équilibre : $\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{HO}^-$) est défini par :

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{|\text{H}^+| |\text{HO}^-|}{|\text{H}_2\text{O}|} \Rightarrow |\text{H}^+| = K_i \times \frac{|\text{H}_2\text{O}|}{|\text{HO}^-|} \\ \Rightarrow E &= 0,03 \log \left(K_i^2 \times \frac{|\text{H}_2\text{O}|^2}{|\text{H}_2| |\text{HO}^-|^2} \right) \end{aligned}$$

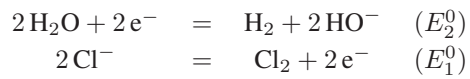
On remarque ici que, conformément à la loi de Nernst, le potentiel :

$$E = -0,06 pK_i + 0,03 \log \left(\frac{|\text{H}_2\text{O}|^2}{|\text{H}_2| |\text{HO}^-|^2} \right)$$

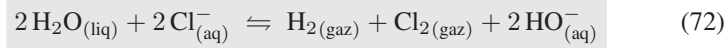
correspond justement à la demi-équation : $2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^- = \text{H}_2 + 2\text{HO}^-$ dont le potentiel *standard* s'identifie alors à :

$$E_2^0 = E^0(\text{H}_2\text{O}/\text{H}_2) = -0,06 pK_i = -0,84 \text{ V}$$

(d) La combinaison linéaire des deux demi-équations :



fournit l'équation-bilan globale de la réaction effectuée :



La cellule contenant, en outre, des ions Na^+ qui ne prennent part à aucune réaction chimique, l'électrolyse produit également de la soude (solution aqueuse d'hydroxyde de sodium) : $\text{Na}^+ + \text{HO}^-$.

2. Thermochimie de la réaction

- (a) Sous une pression $p_0 = 1$ bar et à la température $T_0 = 298$ K, le dichlore (Cl_2) est un corps simple qui se présente sous l'état gazeux ; il s'agit de l'état *standard* de Cl_2 à T_0 et p_0 , et c'est pour cette raison que :

$$\Delta_f H^0 (\text{Cl}_{2(\text{gaz})}) = 0 \text{ à } 298 \text{ K}$$

- (b) La loi de Hess donne directement l'enthalpie *standard* de la réaction décrite par l'équation-bilan (72) :

$$\begin{aligned} \Delta_r H^0 &= 2 \Delta_f H^0 (\text{HO}^-) + \Delta_f H^0 (\text{Cl}_2) + \Delta_f H^0 (\text{H}_2) \\ &\quad - 2 \Delta_f H^0 (\text{Cl}^-) - 2 \Delta_f H^0 (\text{H}_2\text{O}) \\ &= -2 \times 230 + 2 \times 167,2 + 2 \times 285,2 \\ &\Rightarrow \Delta_r H^0 = 444,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \end{aligned}$$

- (c) La constante K de la réaction (72) est directement accessible à partir des potentiels *standard* des couples mis en jeu :

$$K = 10^{\frac{2}{0,06} (E_2^0 - E_1^0)}$$

Application numérique :

$$K = 10^{(-0,84 - 1,36)/0,03} \Rightarrow K = 10^{-73,3} \simeq 4,6 \cdot 10^{-74}$$

La valeur presque nulle de K révèle que la réaction (72) ne peut produire spontanément H_2 , Cl_2 et HO^- . Il est par conséquent nécessaire de fournir au milieu réactionnel l'énergie nécessaire à la synthèse du dichlore.

- (d) Dans $m_{\text{Cl}_2} = 1$ kg = 1 000 g sont contenues :

$$n_{\text{Cl}_2} = \frac{m_{\text{Cl}_2}}{2M} = \frac{1\,000}{2 \times 35,5} = 14,1 \text{ moles de molécules } \text{Cl}_2$$

Or, la demi-équation : $2 \text{Cl}^- = \text{Cl}_2 + 2 \text{e}^-$ montre que la production de n_{Cl_2} moles de Cl_2 s'accompagne de la libération de $n_e = 2 n_{\text{Cl}_2}$ moles d'électrons, c'est-à-dire d'une charge :

$$q = n_e \times \mathcal{F} = 2 n_{\text{Cl}_2} \times \mathcal{F}$$

Ce transfert de charge est assuré par le courant I , pendant une durée Δt telle que :

$$\begin{aligned} I = \frac{q}{\Delta t} &\Rightarrow \Delta t = \frac{q}{I} = \frac{2 n_{\text{Cl}_2} \times \mathcal{F}}{I} = \frac{2 \times 14,1 \times 9,65 \cdot 10^4}{140\,000} \\ &\Rightarrow \Delta t = 19,4 \text{ s} \end{aligned}$$

- (e) Pendant cette transformation, l'avancement de la réaction (72) varie de $\xi = n_{\text{Cl}_2}$, auquel cas l'enthalpie du système augmente de la quantité :

$$\Delta H^0 = \xi \times \Delta_r H^0 = 14,1 \times 444,8 = 6\,272 \text{ kJ}$$

- (f) Soit $p_0 = p_{\text{ext}}$ la pression extérieure au système, dont le volume varie de dV tandis qu'il échange une chaleur δQ et un travail électrique δW_e . Le premier principe de la thermodynamique prédit une variation d'énergie interne du système :

$$dU^0 = \delta Q + \delta W_e - p_{\text{ext}} dV = \delta Q + \delta W_e - p_0 dV$$

En outre, si le système est maintenu à la pression p_0 , son enthalpie varie de :

$$dH^0 = dU^0 + d(p_0 V) = (\delta Q + \delta W_e - p_0 dV) + p_0 dV = \delta Q + \delta W_e$$

d'où il s'ensuit que :

$$\Delta H^0 = Q + W_e \quad (73)$$

- (g) La puissance électrique fournie au système est définie à partir du travail électrique (pendant Δt) :

$$P = \frac{W_e}{\Delta t} \Rightarrow W_e = U \times I \times \Delta t$$

Application numérique :

$$W_e = 3 \times 140\,000 \times 19,4 \Rightarrow W_e = 8\,148 \text{ kJ}$$

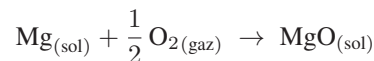
Aussi, le résultat (73) conduit-il à :

$$Q = \Delta H^0 - W_e = 6\,272 - 8\,148 \Rightarrow Q = -1\,876 \text{ kJ}$$

Ce résultat révèle que la cellule d'électrolyse cède de la chaleur à l'extérieur ($Q < 0$) pour maintenir sa température constante (dans un réacteur adiabatique, la température du milieu réactionnel augmenterait).

● 432 ————— Concours Polytechnique

1. La chaleur de réaction $Q_{\text{réac}}$ associée à la combustion du magnésium, à volume constant :



est proportionnelle à l'avancement ξ de cette réaction :

$$Q_{\text{réac}} = \Delta_r U \times \xi$$

où l'énergie interne de la réaction $\Delta_r U$ est liée à l'enthalpie de réaction $\Delta_r H$ par la loi :

$$\begin{aligned} \Delta_r H &= \Delta_r U + RT \sum_{i_g} \nu_{i_g} = \Delta_r U + RT \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \Rightarrow \Delta_r U &= \Delta_r H + \frac{RT}{2} \end{aligned}$$

Notamment, en négligeant l'influence de la pression sur l'enthalpie de réaction : $\Delta_r H \simeq \Delta_r H^0$ conduit à :

$$\Delta_r U \simeq \Delta_r H^0 + \frac{RT}{2} \Rightarrow Q_{\text{réac}} = \left(\Delta_r H^0 + \frac{RT}{2}\right) \times \xi$$

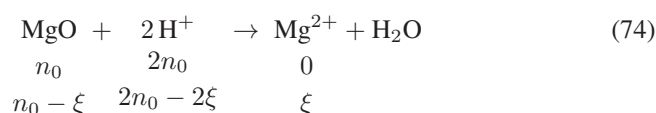
2. Considérons deux réactions réalisées dans le calorimètre :

Première réaction

Prélevons 200 mL de la solution d'acide chlorhydrique, c'est-à-dire $m_{\text{eau}} = 0,2$ kg de solution aqueuse qui contient $2n_0 = 0,2$ mole d'ions H^+ . Mélangeons, à cette solution, $n_0 = 0,1$ mole d'oxyde de magnésium, en pesant :

$$m_{\text{MgO}} = 0,1 \times (24,3 + 16) = 4,03 \text{ g}$$

de solide. Il se produit, dans le calorimètre, la réaction suivante :



d'enthalpie *standard* $\Delta_r H_1^0$, à $T_0 = 298$ K. La transformation qui se produit peut alors être décomposée en deux étapes :

- réaction à la température T_0 ; l'enthalpie du milieu varie de :

$$\Delta H_1^0 = \Delta_r H_1^0 \times \xi = n_0 \times \Delta_r H_1^0$$

- augmentation ΔT_1 de la température du système composé du calorimètre (de capacité thermique C_{cal}) et de $m_{\text{H}_2\text{O}} \simeq 0,2$ kg d'eau (en négligeant la quantité d'eau produite) ; l'enthalpie du système ainsi constitué varie de :

$$\Delta H_2^0 = (C_{\text{cal}} + 0,2 \times c_{\text{eau}}) \Delta T_1$$

Ce faisant, l'enthalpie du milieu réactionnel a varié de la quantité :

$$\Delta H_{12}^0 = \Delta H_1^0 + \Delta H_2^0 = n_0 \times \Delta_r H_1^0 + (C_{\text{cal}} + 0,2 c_{\text{eau}}) \Delta T_1$$

qui s'identifie à la chaleur Q_p reçue par le système à pression constante. Or, si le calorimètre est parfaitement calorifugé, $Q_p = 0$, de sorte que :

$$\Delta H_{12}^0 = 0 \Rightarrow \Delta_r H_1^0 = - \frac{(C_{\text{cal}} + 0,2 c_{\text{eau}}) \Delta T_1}{n_0} \quad (75)$$

où $\Delta_r H_1^0$ s'exprime en fonction des enthalpies *standard* de formation :

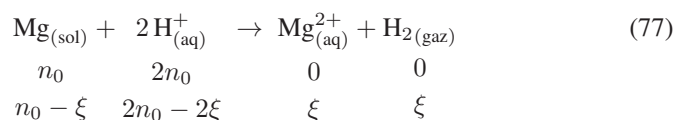
$$\Delta_r H_1^0 = \Delta_f H^0 (\text{H}_2\text{O}) + \Delta_f H^0 (\text{Mg}^{2+}) - 2 \Delta_f H^0 (\text{H}^+) - \Delta_f H^0 (\text{MgO}) \quad (76)$$

Deuxième réaction

Dans un bécher contenant 200 mL de la solution d'acide chlorhydrique, introduisons $n_0 = 0,1$ mole de magnésium, c'est-à-dire une masse :

$$m_{\text{Mg}} = 0,1 \times 24,3 = 2,43 \text{ grammes de magnésium.}$$

Il se produit la réaction :



dont le déroulement peut s'envisager en deux étapes :

- réaction à la température $T_0 = 298 \text{ K}$; si $\Delta_r H_2^0$ désigne l'enthalpie *standard* de cette réaction, pendant que son avancement augmente de ξ , l'enthalpie du système s'accroît de :

$$\Delta H_3^0 = \Delta_r H_2^0 \times \xi = n_0 \times \Delta_r H_2^0$$

- augmentation ΔT_2 de la température du système issu de la réaction précédente, composé du calorimètre, de $m_{\text{eau}} = 0,2 \text{ kg}$ d'eau et de $\xi = n_0$ moles de $\text{H}_2(\text{gaz})$ (les ions Mg^{2+} étant dissous dans l'eau, leur capacité thermique n'est pas prise en compte si l'on admet que la capacité thermique d'une solution d'ions Mg^{2+} s'identifie à celle de l'eau pure). Au cours de cette transformation, l'enthalpie du système varie de :

$$\Delta H_4^0 = (C_{\text{cal}} + 0,2 c_{\text{eau}} + n_0 c_p) \Delta T_2$$

Finalement, au cours de cette réaction, l'enthalpie du milieu réactionnel varie de la quantité :

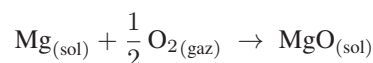
$$\Delta H_{34}^0 = \Delta H_3^0 + \Delta H_4^0$$

au demeurant nulle si le processus est adiabatique. C'est pourquoi :

$$\begin{aligned} \Delta H_3^0 = 0 &\Rightarrow n_0 \times \Delta_r H_2^0 + (C_{\text{cal}} + 0,2 c_{\text{eau}}) \Delta T_2 + n_0 c_p \Delta T_2 = 0 \\ &\Rightarrow \Delta_r H_2^0 = -\frac{C_{\text{cal}} + 0,2 c_{\text{eau}}}{n_0} \Delta T_2 - c_p \Delta T_2 \quad (78) \end{aligned}$$

Exploitation des expériences

La réaction de combustion du magnésium :



a une enthalpie *standard* $\Delta_{\text{comb}} H^0$ accessible à partir des enthalpies *standard* de formation :

$$\Delta_{\text{comb}} H^0 = \Delta_f H^0 (\text{MgO}) - \Delta_f H^0 (\text{Mg}) - \frac{1}{2} \Delta_f H^0 (\text{O}_{2(\text{gaz})}) \quad (79)$$

De même, la loi de Hess s'applique aux réactions (74) et (77) :

$$\begin{cases} \Delta_r H_1^0 = \Delta_f H^0 (\text{H}_2\text{O}) + \Delta_f H^0 (\text{Mg}^{2+}) - 2 \Delta_f H^0 (\text{H}^+) - \Delta_f H^0 (\text{MgO}) \\ \Delta_r H_2^0 = \Delta_f H^0 (\text{Mg}^{2+}) + \Delta_f H^0 (\text{H}_2(\text{gaz})) - 2 \Delta_f H^0 (\text{H}^+) - \Delta_f H^0 (\text{Mg}) \end{cases}$$

En remarquant que $\Delta_f H^0 (\text{H}_2(\text{gaz})) = 0$ car le dihydrogène gazeux est un corps simple dans son état *standard* à $T_0 = 298 \text{ K}$ et $p_0 = 1 \text{ bar}$, la différence des deux équations fournit :

$$\Delta_r H_2^0 - \Delta_r H_1^0 = \Delta_f H^0 (\text{MgO}) - \Delta_f H^0 (\text{Mg}) - \Delta_f H^0 (\text{H}_2\text{O})$$

soit, compte tenu de l'identité (79) :

$$\Delta_r H_2^0 - \Delta_r H_1^0 = \Delta_{\text{comb}} H^0 + \frac{1}{2} \Delta_f H^0 (\text{O}_{2(\text{gaz})}) - \Delta_f H^0 (\text{H}_2\text{O})$$

où $\Delta_f H^0 (\text{O}_{2(\text{gaz})}) = 0$ car, à $T_0 = 298 \text{ K}$ et $p_0 = 1 \text{ bar}$, $\text{O}_{2(\text{gaz})}$ est un corps simple dans son état *standard*. Par conséquent :

$$\Delta_{\text{comb}} H^0 = \Delta_r H_2^0 - \Delta_r H_1^0 + \Delta_f H^0 (\text{H}_2\text{O})$$

c'est-à-dire, étant donné les résultats (78) et (75) :

$$\Delta_{\text{comb}} H^0 = \frac{C_{\text{cal}} + 0,2 c_{\text{eau}}}{n_0} (\Delta T_1 - \Delta T_2) - c_p \Delta T_2 \text{ avec } n_0 = 0,1 \text{ mole.}$$

Chapitre 13

Chimie organique

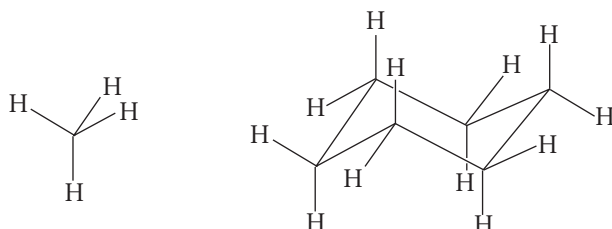
Ce chapitre s'adresse aux étudiants de PCSI

13.1 Stéréochimie des molécules organiques

13.1.1 Représentation spatiale des molécules

Représentation perspective

Cette représentation consiste à dessiner la molécule telle qu'elle est vue ; il s'agit d'une représentation essentiellement utilisée pour les cycloalcanes (par exemple le cyclohexane) :

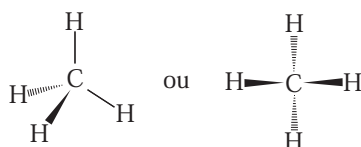


Représentation de Cram

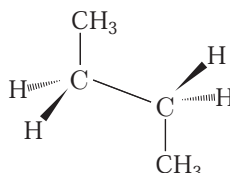
Cette représentation repose sur les conventions suivantes :

- une liaison dans le plan de la feuille est figurée par un trait simple : —
- une liaison dirigée vers le haut de ce plan est schématisée par : \blacktriangleright
- une liaison dirigée vers le bas de ce plan par : \cdots

Par exemple, pour CH_4 :

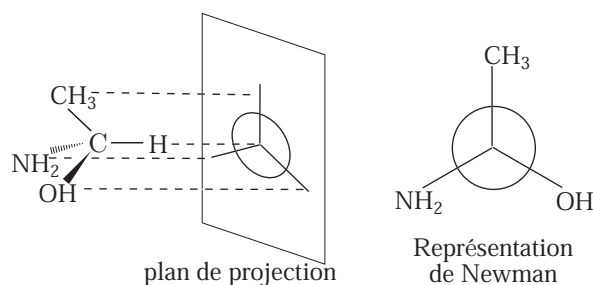


Lorsqu'une molécule possède au moins deux atomes de carbone, on convient de représenter au moins trois liaisons dans le plan de la feuille, l'une de ces liaisons étant C – C. Par exemple, pour C_4H_{10} :



Représentation de Newman

Il s'agit d'une représentation projective : une des liaisons covalentes est dirigée vers un plan (en général celui de la feuille), lequel sert de plan de projection de la molécule (l'atome de carbone n'est pas représenté). Par exemple :

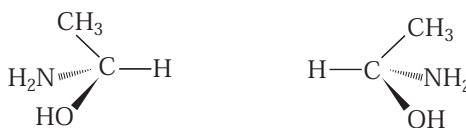


13.1.2 Stéréoisomérisie de configuration

13.1.2.1 Définitions

Définition 1 Deux molécules de mêmes formules planes sont stéréoisomères si elles ne sont pas superposables.

Par exemple, la molécule $CH_3-CH(OH)-NH_2$ présente deux stéréoisomères :

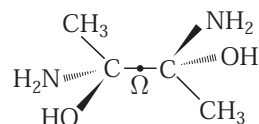


Définition 2 Une molécule est chirale si elle n'est pas superposable à son image spéculaire¹ ; ces deux images sont des stéréoisomères (comme celles représentées ci-dessus).

Définition 3 Une molécule est asymétrique si elle ne possède ni plan ni centre de symétrie.

¹Une image spéculaire est l'image que donne un objet à travers un miroir.

Par exemple, la molécule précédente est asymétrique, contrairement à :



dont le point Ω constitue un centre de symétrie.

Remarque – Pour être chirale, une molécule doit nécessairement être asymétrique, mais cette condition n'est pas suffisante.

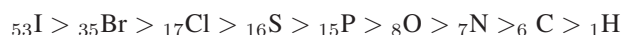
Par abus de langage on désigne par *atome de carbone asymétrique* un atome de carbone qui ne constitue pas un centre de symétrie et qui n'appartient pas à un plan de symétrie de la molécule.

13.1.2.2 Nomenclatures (R, S) et (Z, E)

Règles séquentielles

Autour d'un atome de carbone asymétrique se trouvent quatre substituants qui sont classés selon les règles de préséance de Cahn, Ingold et Prelog (C.I.P.) :

- par ordre de priorité suivant leurs numéros atomiques :



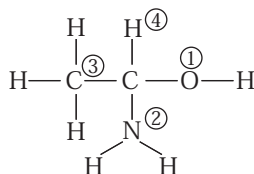
- par ordre de priorité suivant leur nombre de masse pour les isotopes :



Par exemple, dans la molécule $\text{CH}_3\text{—CH—OH}$ la préséance est indiquée ci-dessous



par des nombres entourés :

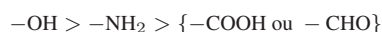


Il arrive fréquemment qu'au premier rang (atome directement lié à l'atome de carbone asymétrique), plusieurs substituants ne peuvent être classés. Dans ce cas, ce sont les atomes du deuxième rang qui imposent la préséance. Par exemple, des groupes —CH_3 et $\text{—CH}_2\text{Cl}$, le second est prioritaire. Si une liaison double apparaît, l'atome concerné est considéré comme possédant deux liaisons simples.

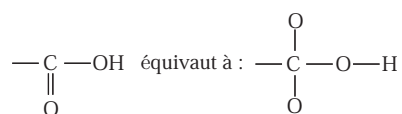


Classer par ordre de priorité les substituants —COOH , —CHO (aldéhyde), —NH_2 et —OH .

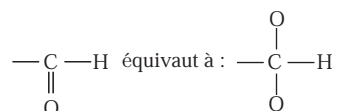
RÉPONSE Compte tenu des numéros atomiques $Z_{\text{O}} > Z_{\text{N}} > Z_{\text{C}}$, au premier rang la préséance est :



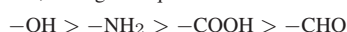
Pour distinguer ces deux derniers groupes, in convient de développer leurs formules chimiques :



et :

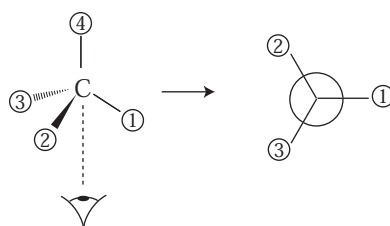


Aussi, au deuxième rang, $-\text{COOH}$ est lié à trois atomes d'oxygène tandis que dans $-\text{CHO}$, l'atome de carbone n'est lié qu'à deux atomes d'oxygène et un d'hydrogène. Étant donné que $Z_{\text{O}} > Z_{\text{H}}$, $-\text{COOH}$ est prioritaire devant $-\text{CHO}$. Finalement, les règles séquentielles de C.I.P. imposent la préséance :

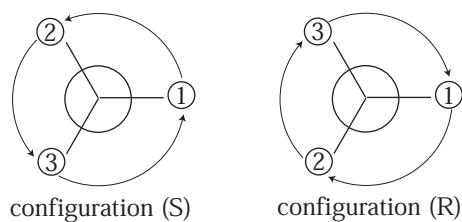


Nomenclature (R, S)

L'atome de carbone asymétrique doit être regardé de manière à occulter la liaison avec le groupe minoritaire (4) dans le classement de C.I.P. :



Si le déroulement de la séquence (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) se fait dans le sens des aiguilles d'une montre, l'atome de carbone est de configuration (R), sinon sa configuration est (S) :



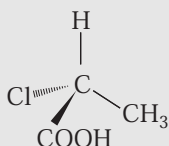
La permutation de deux groupes entraîne une inversion de configuration. Cet effet peut être mis à profit dans la détermination rapide d'une configuration : si le groupe (4) n'est pas placé vers l'arrière de la molécule, il suffit de l'y placer en permutant la position du groupe (4) avec celle d'un autre groupe :



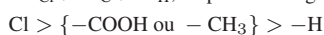
Le sens de rotation de la séquence (1) → (2) → (3) fournit la nouvelle configuration (par exemple (R)) qui est inversée par rapport à celle de départ (par exemple (S)).



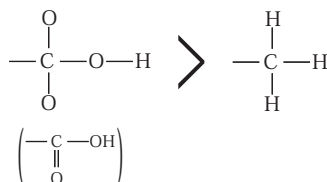
Donner la configuration (R,S) de la molécule représentée ci-dessous :



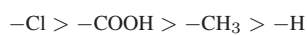
RÉPONSE Dans un premier temps, il convient de trouver un ordre de préséance aux groupes $-\text{Cl}$, $-\text{H}$, $-\text{COOH}$ et $-\text{CH}_3$. Étant donné que $Z_{\text{Cl}} > Z_{\text{C}} > Z_{\text{H}}$, au premier rang cette préséance est :



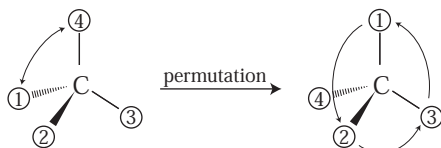
Quant aux groupes $-\text{COOH}$ et $-\text{CH}_3$, ils ne peuvent être distingués qu'au rang supérieur :



d'où l'on déduit, finalement, la séquence :



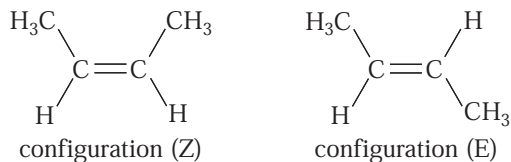
Par suite, l'atome de carbone symétrique a pour environnement :



Après permutation des groupes (1) et (4), apparaît un atome de carbone dont la configuration (S) est inverse de celle cherchée ; la molécule proposée par l'énoncé présente la configuration (R).

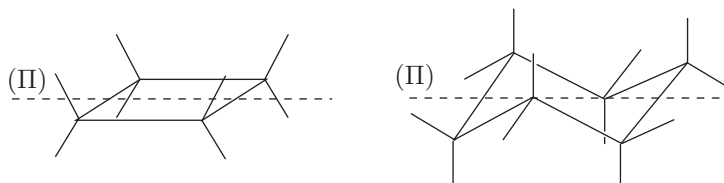
Nomenclature (Z, E)

Dans le cas d'une liaison éthylénique (double liaison $\text{C} = \text{C}$), des substituants peuvent occuper des positions distinctes de part et d'autre de l'axe interatomique $\text{C} - \text{C}$. Afin de caractériser les stéréoisomères qui apparaissent, on applique à chaque couple de substituants des atomes de la liaison $\text{C} = \text{C}$ les règles séquentielles de C.I.P. Lorsque les deux groupes « prioritaires » sont placés du même côté de la liaison $\text{C} = \text{C}$ la configuration est Z, sinon elle est E. Par exemple, pour le 3-méthyl but-2-ène :



Nomenclature cis-trans

Une molécule cyclique, non aromatique, possède un plan moyen (II) décrit par le cycle :

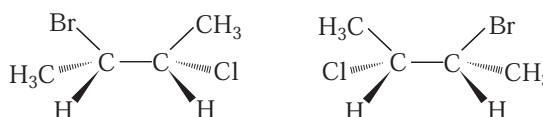


Lorsque les deux groupes « prioritaires » (selon les règles de C.I.P.), lié à deux atomes de carbone vicinaux, sont placés sur même côté de (II), la configuration de la molécule est *cis*, sinon elle est *trans*.

13.1.2.3 Énantiomérie

Définition 4 Deux molécules chirales, non superposables, mais images spéculaires l'une de l'autre, sont dites énantiomères.

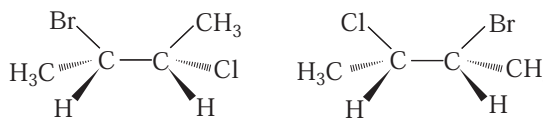
Remarque – Lorsqu'une molécule contient n atomes asymétriques, elle présente 2^n énantiomères, à condition toutefois qu'elle ne possède ni plan ni centre de symétrie.
Par exemple :



sont deux énantiomères (car images spéculaires non superposables).

Définition 5 Deux stéréoisomères qui ne sont ni superposables, ni images spéculaires, sont des diastéréoisomères.

Par exemple, les deux molécules :



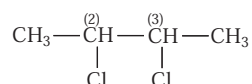
sont des diastéréoisomères.



1. Écrire la formule semi-développée du 2,3-butane.
2. Combien d'atomes asymétriques cette molécule contient-elle ? Sans représenter la molécule dans l'espace, combien d'énantiomères peut-on attendre ?
3. Représenter, dans l'espace, la molécule de configuration (2R, 3R).
4. Quelle relation de stéréoisomérisation relie ces différentes molécules (énantiomérisation, diastéréoisomérisation) ?
5. La réponse à la question précédente est-elle compatible avec celle à la question 2. ? proposez une explication.

RÉPONSE

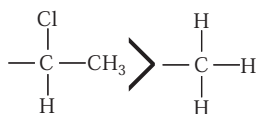
1. Le 2,3-dichlorobutane a pour formule semi-développée :



2. La présence de deux atomes de carbone asymétriques ($\text{C}_{(2)}$ et $\text{C}_{(3)}$) permet d'attendre quatre énantiomères : (2R, 3R), (2S, 3S), (2R, 3S) et (2S, 3R).
3. Chaque atome de carbone asymétrique est lié aux groupes $-\text{Cl}$, $-\text{CH}_3$, $-\text{H}$ et $-\text{CHCl}-\text{CH}_3$, dont on peut établir, au premier rang, l'ordre de préséance :



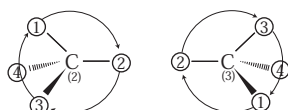
Il faut, en revanche, comparer les atomes du deuxième rang pour départager les groupes $-\text{CHCl}-\text{CH}_3$ et $-\text{CH}_3$. Pour cela, la comparaison des numéros atomiques : $Z_{\text{Cl}} > Z_{\text{H}}$ conduit à attribuer la préséance :



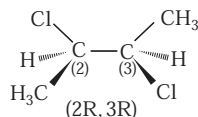
c'est-à-dire, finalement :



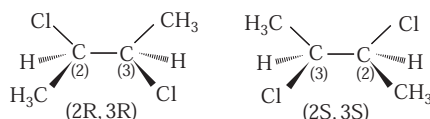
En positionnant le groupe (4) de plus faible priorité (soit $-\text{H}$) vers l'arrière de la molécule, la configuration (R) est celle qui fait parcourir la séquence (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) dans le sens des aiguilles d'une montre :



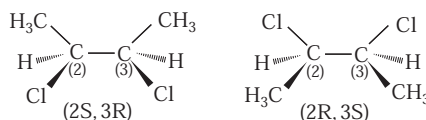
ce qui conduit finalement à :



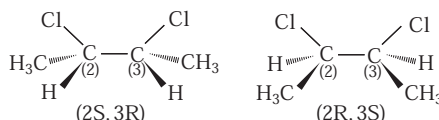
4. La représentation des molécules de configuration (2R, 3R) et (2S, 3S) montre qu'elles sont énantiomères (images spéculaires non superposables) :



En revanche, la représentation des molécules de configurations (2R, 3S) et (2S, 3R), obtenues par permutation des groupes $-Cl$ et $-CH_3$ sur un atome de carbone asymétrique :



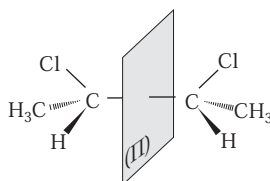
montre que ces deux molécules sont identiques (superposables) :



mais ni superposables ni images spéculaires des molécules de configurations (2S, 3S) et (2R, 3R). C'est pourquoi les relations de stéréoisomérisation de ces molécules sont :

couples d'énantiomères	couples identiques	couples de diastéréoisomères
(2R, 3R)/(2S, 3S)	(2S, 3R)/(2R, 3S)	(2R, 3R)/(2S, 3R) (2S, 3S)/(2S, 3R)

5. La question précédente a mis à jour l'identité des molécules de configurations (2S, 3R) et (2R, 3S) ; en conséquence, il n'existe réellement que trois stéréoisomères distincts : (2R, 3R), (2S, 3S) et (2R, 3S), contrairement aux prévisions de la question 2. Ce phénomène s'interprète par l'existence d'un plan de symétrie (Π) dans la molécule de configuration (2S, 3R) :



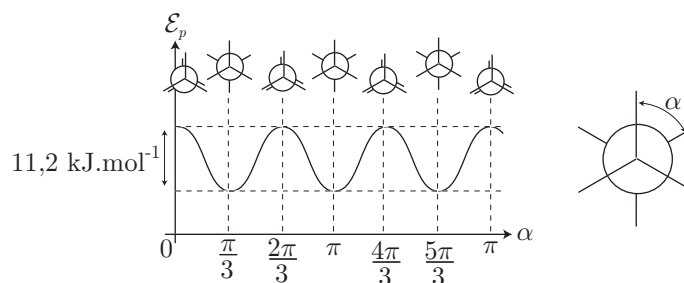
qui rend l'image spéculaire superposable à la molécule de configuration (2R, 3S).

13.1.3 Stéréoisomérisation de conformation

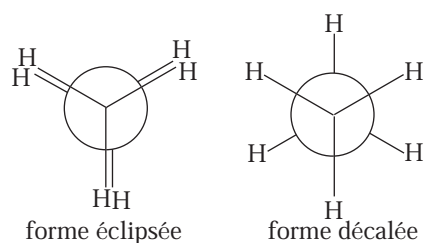
Cette isomérisation provient de la libre rotation de la liaison simple $C - C$, qui permet à la molécule d'adopter des formes (ou conformations) différentes.

13.1.3.1 Conformations de l'éthane et du butane

La molécule d'éthane : $H_3C - CH_3$ est d'autant plus stable que les atomes d'hydrogène sont plus éloignés, ce qui est illustré par la représentation de son énergie potentielle \mathcal{E}_p en fonction de l'angle α :

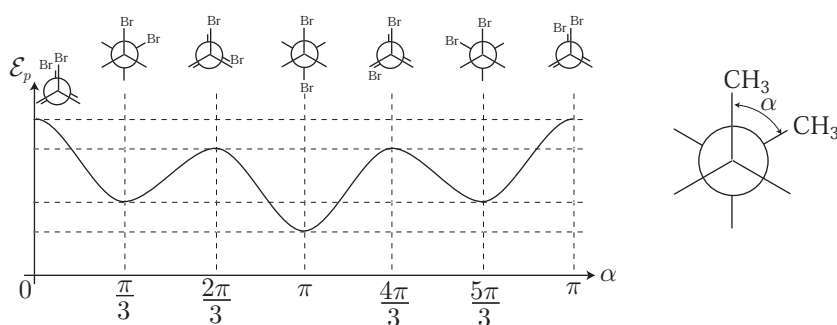


De ce comportement sont issus deux conformères : la forme *décalée* (la plus stable) et la forme *eclipsée* (la moins stable) :

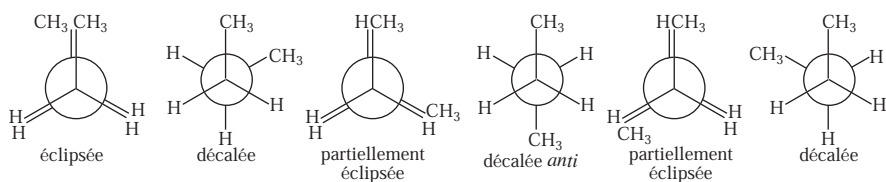


De la même manière, le butane : $\text{H}_3\text{C} - \text{CH}_2 - \text{CH}_2 - \text{CH}_3$ présente des conformères d'autant plus stables que :

- les groupes méthyl : $-\text{CH}_3$ sont plus éloignés les uns des autres ;
- les groupes $-\text{CH}_3$ et $-\text{H}$ sont plus éloignés (cet effet est moindre que le précédent).

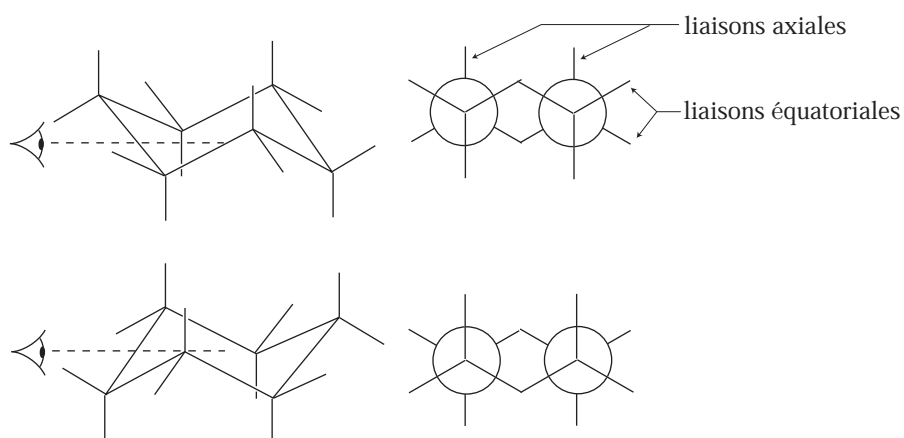


C'est ainsi que l'on distingue, pour le butane, les formes suivantes :

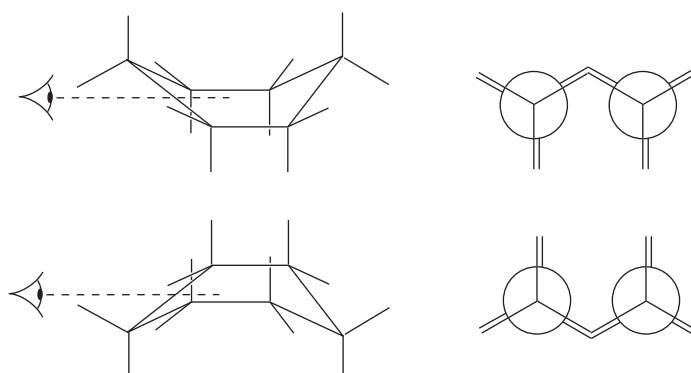


13.1.3.2 Conformations du cyclohexane

Le cyclohexane présente des conformations *chaise* :



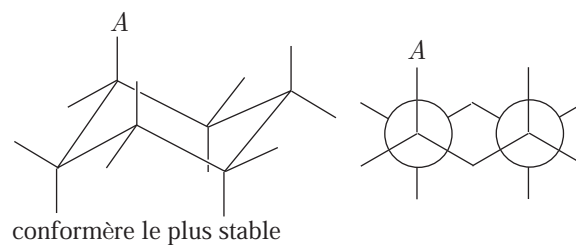
et des conformations *bateau* :

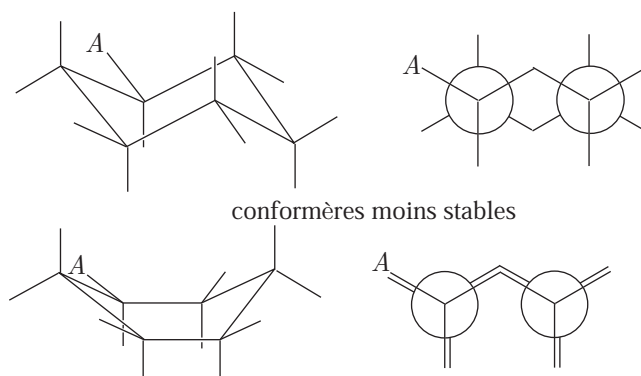


dont les représentations de Newman montrent que les premières sont plus stables car les atomes d'hydrogène sont tous en position *décalée*.

Cyclohexane monosubstitué

Conformément à ce qui précède, c'est lorsque le substituant *A* occupe une position axiale que la molécule de cyclohexane monosubstitué est la plus stable :

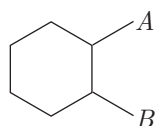




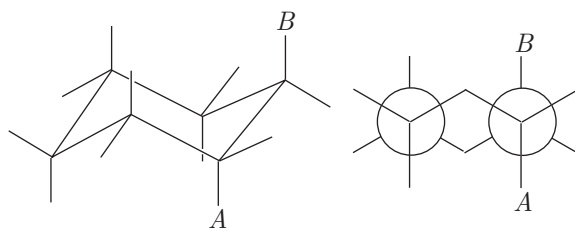
car c'est sous cette forme que *A* est le plus éloigné des autres atomes.

Cyclohexane disubstitué

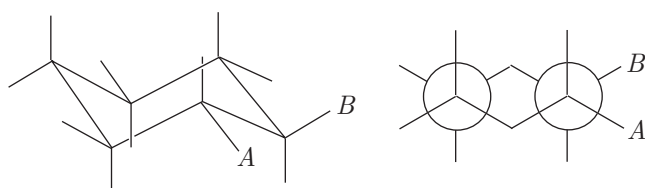
Soient *A* et *B* deux substituants liés à deux atomes de carbone vicinaux du cyclohexane :



La molécule est d'autant plus stable que *A* et *B* sont plus éloignés et (dans une moindre mesure) plus éloignés des atomes d'hydrogène. Par exemple, le conformère :



est plus stable que le suivant :

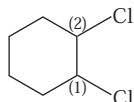


On s'intéresse à la molécule de 1,2-dichlorocyclohexane.

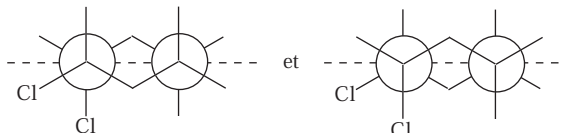
1. Représenter la formule semi-développée de cette molécule.
2. Les atomes de chlore sont en position *cis*. Existe-t-il un conformère chaise plus stable que l'autre ?
3. Répondre à la même question pour la molécule de *cis*-1,3-dichlorocyclohexane.

RÉPONSE

1. Le 1,2-dichlorocyclohexane a pour formule semi-développée :

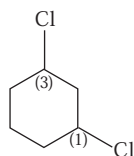


2. On s'intéresse à la conformation chaise de cette molécule, pour laquelle les atomes de chlore sont en position *cis*, c'est-à-dire du même côté du plan moyen de la molécule ; deux conformères se présentent :

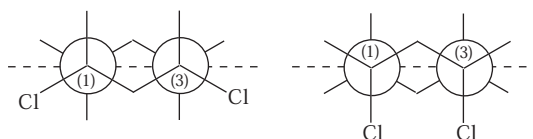


La distance entre les atomes ne varie pas d'une conformation à l'autre, en conséquence de quoi ces deux conformations sont aussi stables l'une que l'autre.

3. Quant à la molécule de 1,3-dichlorocyclohexane :



dans laquelle les atomes de chlore sont également en position *cis*, elle présente aussi deux conformères chaise :



dont la seconde est moins stable que la première puisque la distance séparant les atomes de chlore y est plus faible.

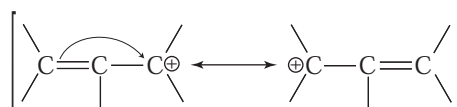
13.2 Réactivité de la double liaison carbone-carbone

13.2.1 Effets mésomères et inductifs

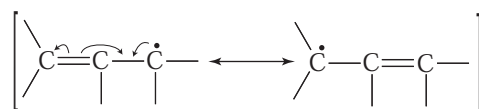
13.2.1.1 Effets mésomères

Plus une espèce chimique présente de formes mésomères limites susceptibles de résonner, plus cette espèce est stable. Par exemple, on assiste à la stabilisation :

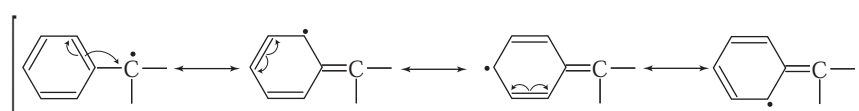
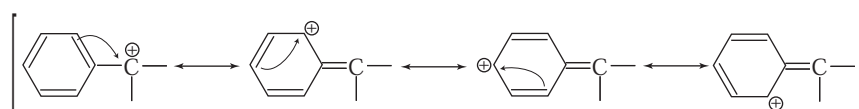
- d'un carbocation par résonance avec une double liaison :



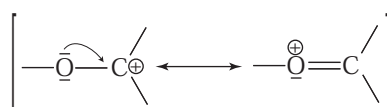
- d'un radical par résonance avec une double liaison :



d'un carbocation (ou d'un radical) par résonance avec un noyau aromatique :

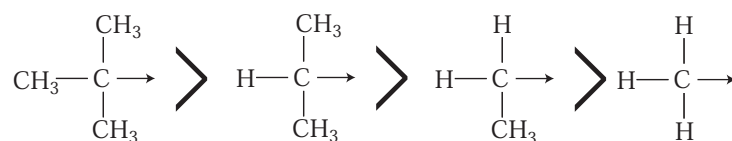


• d'un carbocation par résonance avec un doublet électronique situé en β :

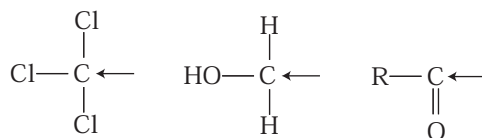


13.2.1.2 Effets inductifs

La polarisation de certaines liaisons fait apparaître des charges partielles sur l'atome de carbone (par exemple : $\text{H}^{\delta+} - \text{C}^{\delta-}$, $\text{Cl}^{\delta-} - \text{C}^{\delta+}$, $\text{O}^{\delta-} - \text{C}^{\delta+}$) susceptibles de stabiliser des charges électriques dans une molécule. Ainsi, les cations sont stabilisés par des effets inductifs *électro-donneurs* dont l'influence suit l'ordre ci-dessous :



tandis que les anions sont stabilisés par les effets inductifs *électro-attracteurs* :

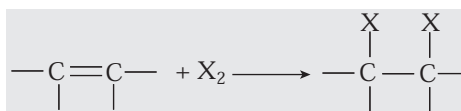


Ces derniers groupes destabilisent par conséquent les carbocations et les radicaux. Ainsi : $\text{CCl}_3 - \text{C}^+ -$ est moins stable que $\text{CH}_3 - \text{C}^+ -$.

13.2.2 Additions électrophiles et radicalaires

13.2.2.1 Halogénéation

La réaction d'un dihalogène X_2 sur une double liaison $C = C$ a pour équation-bilan :

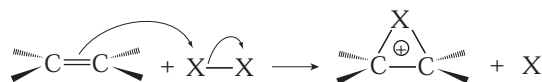


et elle est favorisée dans les solvants polaires (qui stabilisent les ions) en l'absence de lumière et de peroxyde.

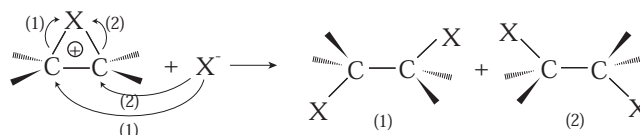
Définition 6 Une réaction est stéréospécifique si deux réactifs stéréoisomères conduisent à deux produits stéréoisomères différents.

Le mécanisme réactionnel se déroule en deux étapes :

- Formation d'un ion halonium ponté :



- Addition *anti* de l'ion halogénure :

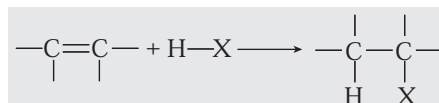


Le mécanisme révèle que cette réaction peut former un couple d'énantiomères mais le milieu reste optiquement inactif par compensation : le mélange est racémique (les deux énantiomères sont présents en quantité égale).

En revanche, la réaction est stéréospécifique : deux stéréoisomères (Z, E) conduisent à deux couples de diastéréoisomères.

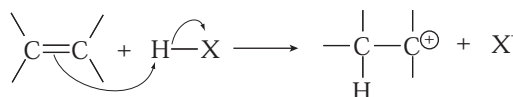
13.2.2.2 Hydrohalogénéation électrophile

L'équation-bilan de la réaction de $H - X$ sur la double liaison s'écrit :

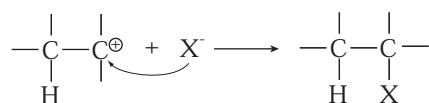


La réaction est effectuée dans un solvant anhydre (afin d'éviter l'hydratation de l'alcène). Son mécanisme admet deux étapes :

- Addition de l'ion H^+ (formation d'un carbocation) :



- Addition de l'ion halogénure sur le carbocation :

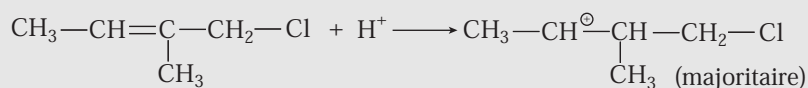


Définition 7 Une réaction est régiosélective si un site d'une molécule est préférentiellement affecté, au détriment d'un autre.

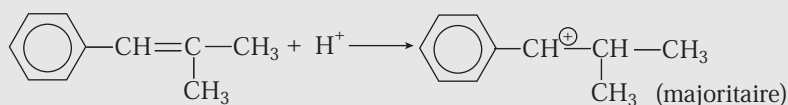
Le mécanisme montre que la réaction est régiosélective : deux carbocations peuvent *a priori* se former. Cependant, seul le plus stable (stabilisé par des effets mésomères ou inductifs électro-donneurs) est formé majoritairement. Cet argument justifie la règle de Markovnikov :

L'halogénoalcane le plus substitué en α est produit majoritairement.

⚠ Il existe néanmoins des transgressions à cette règle (addition « anti-Markovnikov ») lorsque le carbocation le plus substitué est destabilisé par des effets inductifs électro-donneurs :



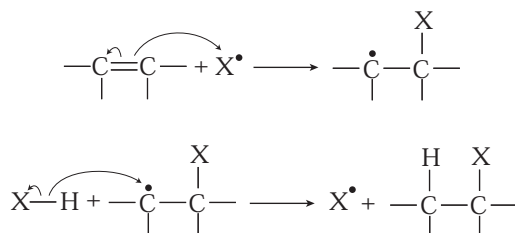
ou lorsque le carbocation le moins substitué est stabilisé par résonance :



13.2.2.3 Hydrohalogénéation radicalaire

La réaction est décrite par la même équation-bilan que la précédente, mais elle est favorisée par la lumière ou par la présence de peroxydes $\text{R}-\text{O}^{\bullet}$. Le mécanisme (en chaîne) admis se décompose en trois étapes :

- L'initiation : $\text{H}-\text{X} \xrightarrow{h\nu} \text{H}^{\bullet} + \text{X}^{\bullet}$ ou $\text{R}-\text{O}^{\bullet} + \text{H}-\text{X} \rightarrow \text{R}-\text{OH} + \text{X}^{\bullet}$.
- La propagation :

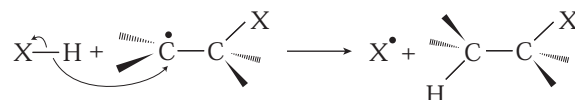


- La terminaison : $\text{H}^{\bullet} + \text{X}^{\bullet}$.

Au cours de l'étape de propagation, la formation du radical le plus stable est favorisée, ce qui rend la réaction régiosélective, et justifie l'effet Karasch :

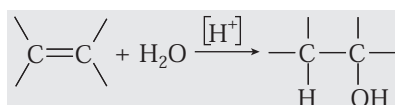
L'addition radicalaire de HX produit majoritairement l'halogénoalcane le moins substitué en α .

Quant à la deuxième étape de la propagation, elle est assimilée à une addition *anti* (l'hydrogène et l'halogène sont éloignés au *maximum*) :



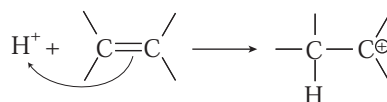
13.2.2.4 Hydratation

Effectuée en milieu acide, cette réaction a pour équation-bilan :

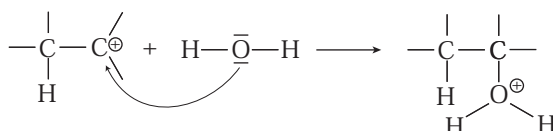


et son mécanisme s'apparente à une addition électrophile :

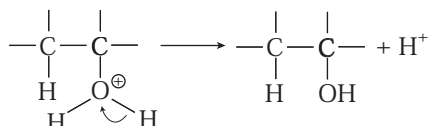
- Formation d'un carbocation :



- Réaction d'une molécule d'eau :



- Régénération du catalyseur H^+ :



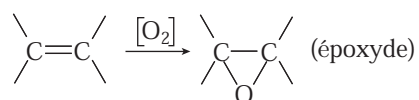
La première étape de ce mécanisme révèle que la réaction est régiosélective (elle suit la règle de Markovnikov), tandis que la deuxième étape montre que l'addition d'eau peut se réaliser, indifféremment, de part et d'autre du plan du carbocation ; la réaction n'est pas stéréospécifique.

13.2.3 Oxydations

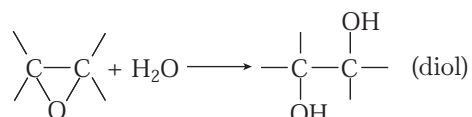
13.2.3.1 Oxydation ménagée

Elle peut être réalisée avec le dioxygène, en présence d'un catalyseur (par exemple l'argent). Cette réaction se déroule alors en deux étapes :

- Formation d'un époxyde :

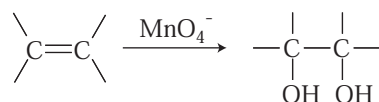


- Hydrolyse de l'époxyde :



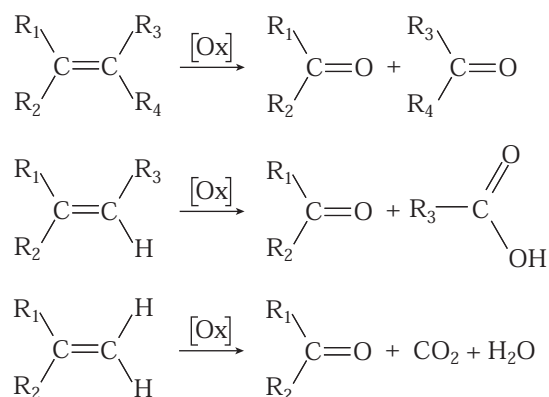
Notons que l'hydrolyse s'apparente à une addition *trans* de H₂O.

L'action des ions permanganate, en solution diluée, produit directement un diol (la réaction s'apparente à une addition *cis*) :



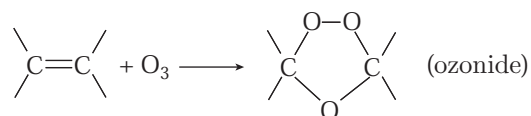
13.2.3.2 Oxydation brutale

Elle se produit à l'aide d'oxydants puissants (par exemple MnO₄⁻ en solution concentrée et acide). Selon la nature des substituants autour de la liaison C = C, cette oxydation conduit à des cétones, des acides carboxyliques ou à CO₂ :



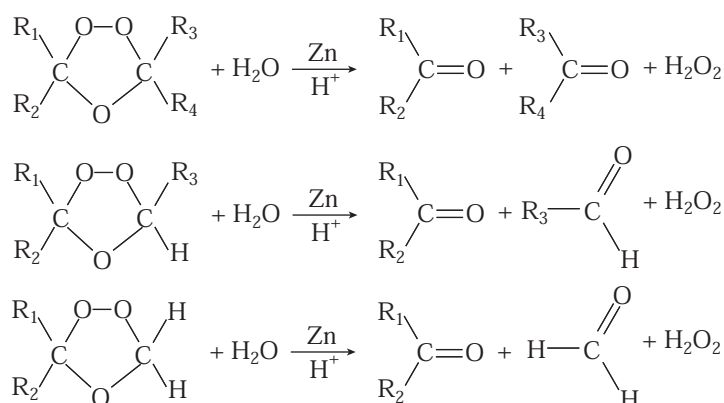
13.2.3.3 Ozonolyse

L'action de l'ozone (O₃) sur une liaison C = C produit un ozonide (composé instable susceptible d'exploser) :



- **Traitement réducteur**

Généralement réalisé par du zinc en milieu acide, ce traitement permet l'obtention de cétones, d'aldéhydes ou de méthanal :



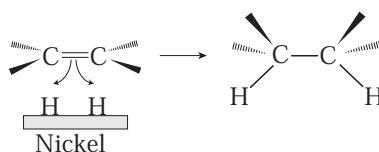
L'analyse des produits obtenus fournit indirectement des informations sur la présence et la position de la double liaison dans une molécule.

- **Traitement oxydant**

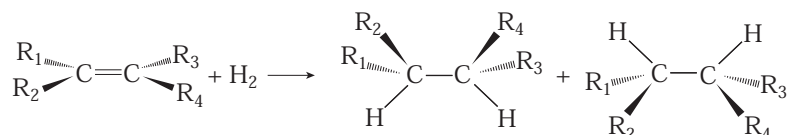
Traité par H_2O_2 en milieu acide, l'ozonide forme les mêmes produits que ceux de l'oxydation brutale de la liaison $\text{C} = \text{C}$.

13.2.4 Hydrogénation catalytique

Le nickel (de Raney) permet l'adsorption des molécules de dihydrogène, qui opèrent ainsi une addition *cis* sur la liaison $\text{C} = \text{C}$:



Au cours de cette réaction, un couple d'énantiomères peut apparaître, dans des proportions égales :



13.3 Les organomagnésiens mixtes

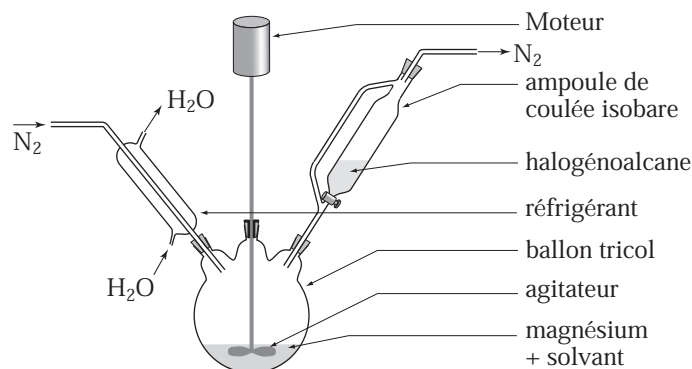
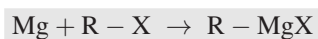
Soient R un groupe alkyle et X un halogène ; un organomagnésien est noté :



et porte le nom d'halogénure d'alkylmagnésium (par exemple bromure d'éthylmagnésium pour : $\text{C}_2\text{H}_5 - \text{MgBr}$).

13.3.1 Préparation

Ces composés sont obtenus par action du magnésium sur un halogénoalcane :

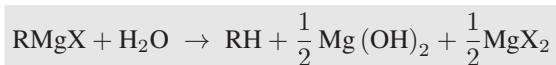


Cette préparation doit être réalisée avec certaines précautions :

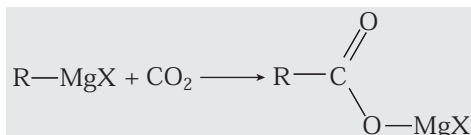
- Le milieu doit être dépourvu de dioxygène pour éviter la formation d'un peroxyde qui évolue rapidement vers l'alcoolate d'halogénure-magnésium :



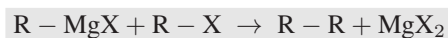
- L'utilisation d'un milieu anhydre qui évite l'hydrolyse de l'organomagnésien :



- L'absence de dioxyde de carbone évite l'évolution de l'organomagnésien vers une fonction carboxylique :



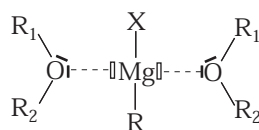
- Les réactifs doivent être introduits en quantité stœchiométrique, sans quoi une dimérisation du groupe alkyle peut se produire :



Le solvant utilisé est généralement un éther-oxyde ou encore le tétrahydrofurane (THF) :



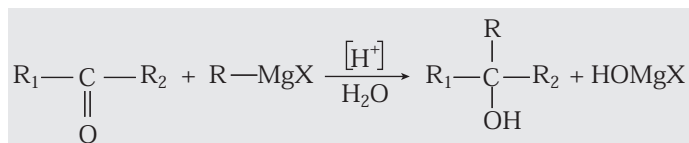
Le magnésium ($_{12}\text{Mg}$) peut devenir divalent à condition d'adopter la configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1 3p^1$ auquel cas deux orbitales $3p$ demeurent vacantes, ce qui lui confère des propriétés acides au sens de Lewis. C'est pourquoi le solvant utilisé peut stabiliser l'organomagnésien :



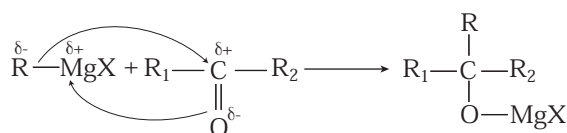
13.3.2 Réactions sur le groupe carbonyle

13.3.2.1 Aldéhydes et cétones

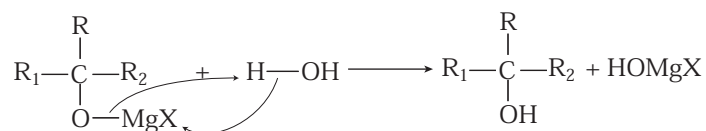
Le bilan général de ces réactions conduit à la formation d'alcools :



Le mécanisme généralement accepté est celui d'une attaque nucléophile sur le groupe carbonyle :



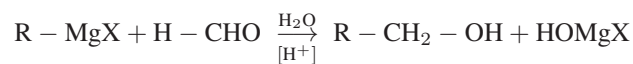
L'alcoolate d'halogénure-magnésium ainsi obtenu peut être ensuite hydrolysé en milieu acide :



Remarque – Le composé : HOMgX évolue selon l'équation-bilan :

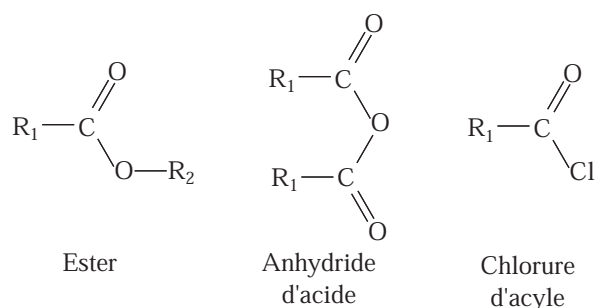


Remarque – L'action d'un organomagnésien sur le méthanal permet d'obtenir un alcool primaire, après hydrolyse acide :

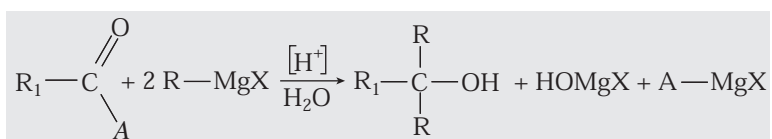


13.3.2.2 Dérivés d'acides

Les dérivés d'acides seront notés $\text{R}_1 - \underset{\text{A}}{\underset{\parallel}{\text{C}}} = \text{O}$ où le groupe A caractérise le composé :

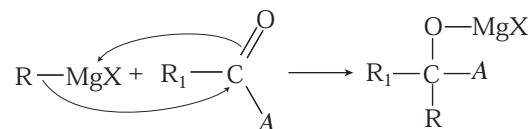


Après hydrolyse, un alcool tertiaire est obtenu, conformément à l'équation-bilan :

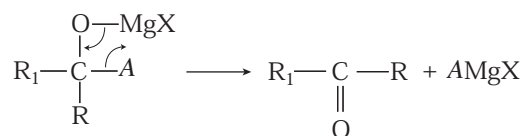


Le mécanisme retenu pour cette réaction comporte deux étapes :

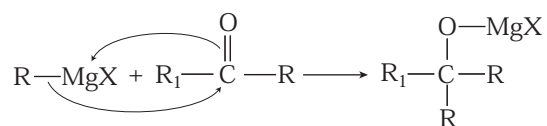
- Addition sur le groupe carbonyle :



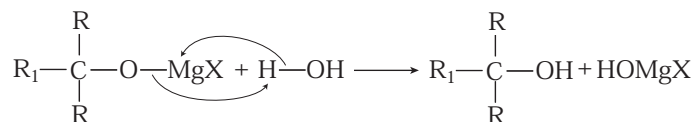
suivi d'un réarrangement qui produit une cétone :



- Réaction rapide de la cétone avec l'organomagnésien :

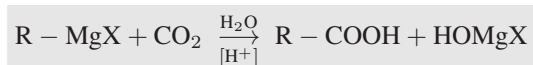


puis hydrolyse, en milieu acide, de l'alcoolate d'halogénure-magnésium :



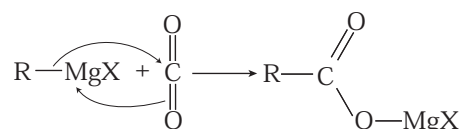
13.3.3 Réaction sur le dioxyde de carbone

L'action de l'organomagnésien $\text{R}-\text{MgX}$ sur le dioxyde de carbone, suivie d'une hydrolyse acide, produit un acide carboxylique, selon l'équation-bilan :

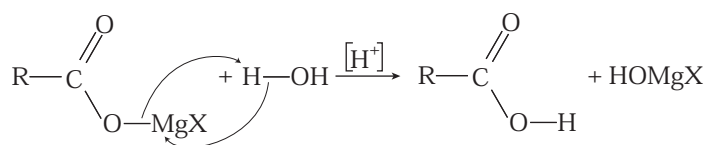


Le schéma réactionnel comporte deux étapes :

- Addition de R – MgX sur CO₂ :

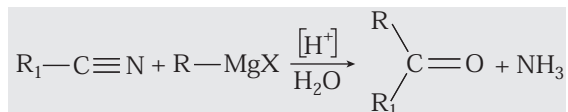


- hydrolyse acide du carboxylate d'halogénure-magnésium :

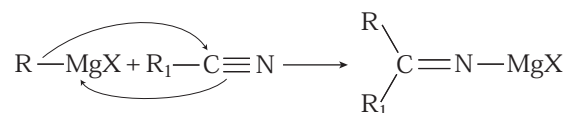


13.3.4 Réaction sur le groupe nitrile

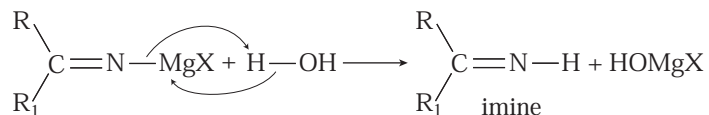
Après hydrolyse acide, l'action d'un organomagnésien sur un groupe nitrile R₁ – C ≡ N conduit à une cétone et produit NH₃, conformément à l'équation-bilan :



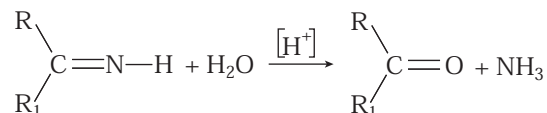
Au cours d'une première étape, l'organomagnésien s'additionne au groupe nitrile :



L'hydrolyse acide du composé ainsi obtenu produit une imine :



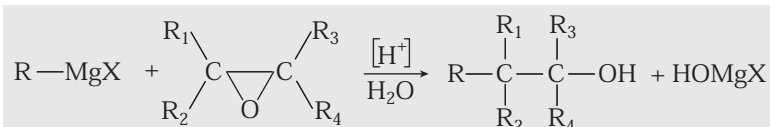
qui s'hydrolyse à son tour pour former une cétone et de l'ammoniac :



13.3.5 Réaction sur les époxydes

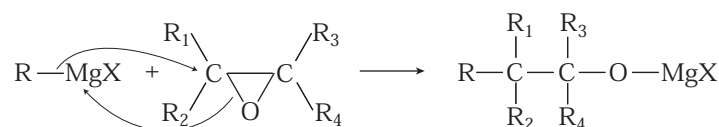
13.3.5.1 Cas des époxydes substitués

La réaction d'un organomagnésien sur un époxyde substitué fournit, après hydrolyse acide, un alcool tertiaire :

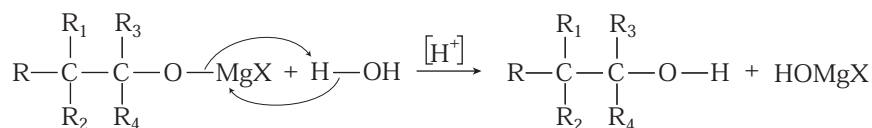


Le mécanisme réactionnel se décompose en deux étapes :

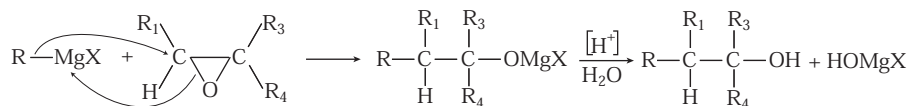
- Addition de R – MgX sur l'époxyde :



- Hydrolyse de l'alcoolate d'halogénure-magnésium :

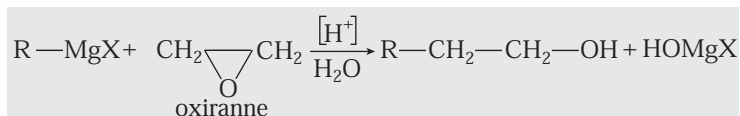


La réaction est régiosélective : sur un époxyde substitué de manière dissymétrique, le groupe alkyl se fixe de préférence sur l'atome de carbone le moins encombré, ce qui conduit à la formation de l'alcool le plus substitué :



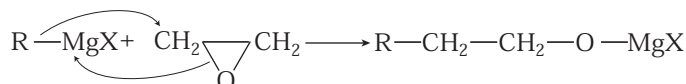
13.3.5.2 Cas de l'oxyde d'éthylène

L'oxyde d'éthylène (ou oxiranne) permet d'obtenir un alcool primaire lors de sa réaction sur un organomagnésien :

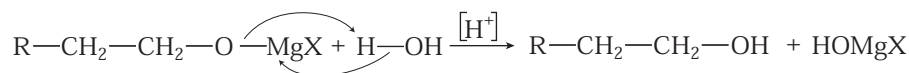


À nouveau, le mécanisme de cette réaction admet deux étapes :

- Addition de l'organomagnésien sur l'oxyde d'éthylène :



- Hydrolyse acide du produit obtenu :



13.4 Les liaisons simples carbone-halogène

Cette section, comme les suivantes, s'adresse aux étudiants de PCSI ayant choisi la filière PC.

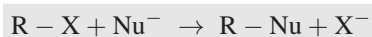
13.4.1 Substitutions nucléophiles

Définition 8 On appelle nucléophile une substance possédant une paire d'électrons susceptibles d'être engagés dans une liaison covalente (il s'agit d'anions ou d'atomes neutres possédant un doublet électronique sur leur couche de valence).

Exemples de nucléophiles (notés désormais Nu⁻) :

neutres	chargés
H ₂ O	HO ⁻
alcools	RO ⁻ (alcooolates)
amines	

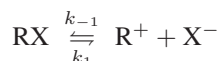
Les réactions de substitution nucléophiles consistent à remplacer un halogène (X), porté par un halogénoalcane, par un nucléophile Nu⁻ :



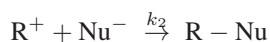
13.4.1.1 Substitutions nucléophiles d'ordre 1 (SN₁)

Il s'agit de réactions de substitution en deux étapes :

- Rupture de la liaison R - X (étape cinétiquement limitante) :



- Addition du nucléophile sur le carbocation :



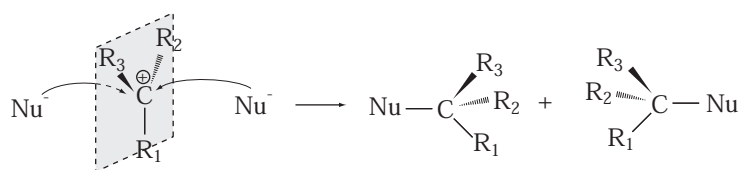
Ce mécanisme permet de retrouver l'expression de la vitesse de la réaction :

$$v = \frac{k_1 k_2 [\text{RX}] [\text{Nu}^-]}{k_{-1} [\text{X}^-] + k_2 [\text{Nu}^-]} \Rightarrow v \simeq k_1 [\text{RX}] \text{ car } k_1 [\text{X}^-] \ll k_2 [\text{Nu}^-]$$

L'ordre de cette loi cinétique justifie la nomenclature SN₁.

Stéréochimie de la réaction

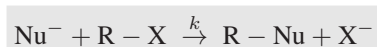
La première étape génère un carbocation plan, qui peut subir l'attaque du nucléophile des deux côtés du plan :



ce qui produit finalement un mélange racémique de deux énantiomères (mélange optiquement inactif, en dépit de l'éventuelle chiralité des molécules).

13.4.1.2 Substitutions nucléophiles d'ordre 2 (SN₂)

La réaction se déroule en une seule étape :



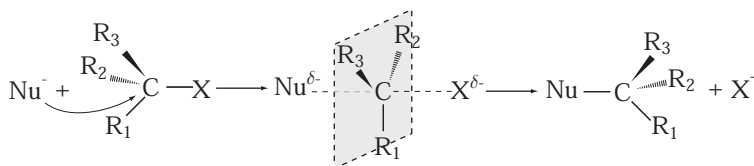
ce qui lui confère une vitesse d'ordre 2 :

$$v = k [\text{Nu}^-] [\text{RX}]$$

et justifie sa dénomination : SN₂.

Stéréochimie

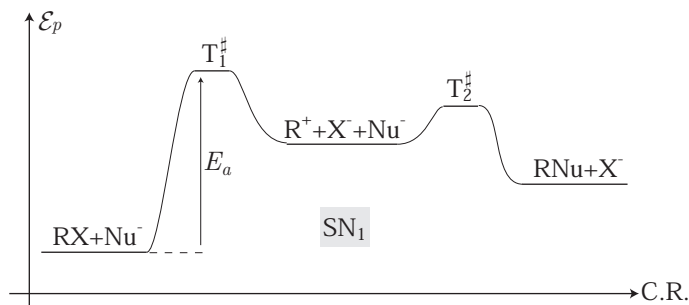
Au cours de l'unique étape de la réaction, un état de transition (T[‡]) plan se forme :



ce qui interprète l'inversion de configuration (inversion de Walden) souvent observée (à condition toutefois que Nu et X occupent la même place dans la présence de C.I.P.) ; cette réaction est stéréospécifique.

13.4.1.3 Compétition entre SN₁ et SN₂

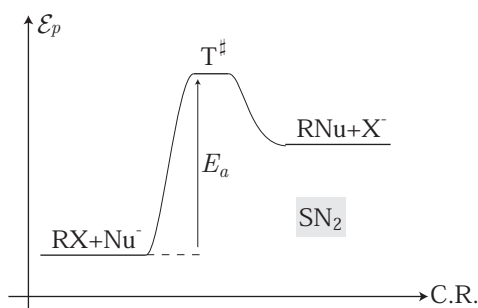
Le diagramme énergétique (énergie potentielle \mathcal{E}_p en fonction des *coordonnées réactionnelles*) pour le mécanisme d'une SN₁ :



révèle que l'énergie d'activation E_a de la première étape est d'autant plus élevée que le système $\{R^+ + X^- + Nu^-\}$ est peu stabilisé (le postulat de Hammond précise que l'énergie de l'état de transition T_1^\ddagger est un peu plus grande que celle de ce système d'ions). C'est pourquoi tout ce qui participe à la stabilisation de $\{R^+ + X^- + Nu^-\}$ favorise la SN_2 , c'est-à-dire :

- l'emploi d'un solvant polaire (comme l'eau, l'éthanol, ...) stabilise les charges ;
- l'utilisation d'un solvant protogène (qui contient une liaison $-H$) stabilise les anions et en l'occurrence X^- ;
- l'encombrement stérique de R favorise la formation du carbocation plan R^+ qui soulage ainsi ses contraintes.

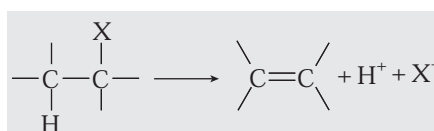
De même, le diagramme d'énergie potentielle du mécanisme SN_2 :



montre qu'un solvant polaire abaisse simultanément l'énergie potentielle de Nu^- , de X^- et de T^\ddagger ; l'influence de ce facteur est limitée. En outre, l'encombrement stérique du composé halogéné est un facteur défavorable à l'approche du nucléophile et donc à la réaction SN_2 .

13.4.2 Réactions d'élimination

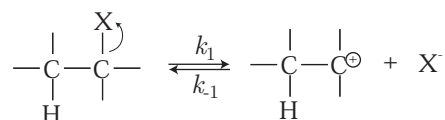
L'équation-bilan de cette réaction s'écrit :



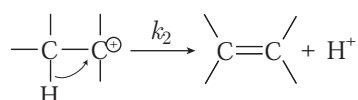
13.4.2.1 Réactions d'élimination E_1

Ce type de réactions admet un mécanisme réactionnel en deux étapes :

- Formation d'un carbocation (étape cinétiquement limitante) :



- Élimination de l'hydrogène (étape relativement rapide) :

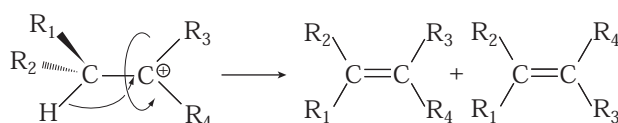


La vitesse de cette réaction est d'ordre 1 par rapport au composé halogéné :

$$v = k_1 [\text{RX}]$$

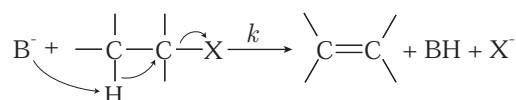
Cette réaction est régiosélective : en vertu de la règle de Zaitsev, l'alcène le plus substitué est obtenu majoritairement.

En revanche, la libre rotation autour de la liaison C – C du carbocation entraîne l'obtention des alcènes de configuration (Z) et (E) dans des proportions identiques :



13.4.2.2 Réaction d'élimination E₂

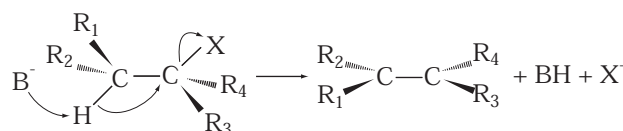
Cette réaction s'effectue en une seule étape, par action d'une base forte B⁻ :



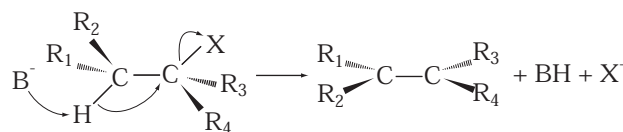
dont la vitesse est d'ordre 1 par rapport à chacun des réactifs :

$$v = k [\text{B}^-] [\text{RX}]$$

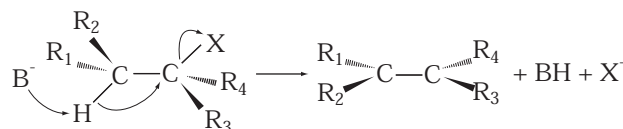
L'élimination ne s'effectue que lorsque les groupes partants se trouvent en position *anti* :



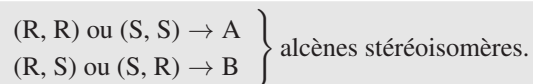
Un énantiomère du composé halogéné subit la même élimination *anti* :



et produit par conséquent un alcène de même configuration. En revanche, deux diastéréoisomères du composé halogéné conduisent à des alcènes stéréoisomères :



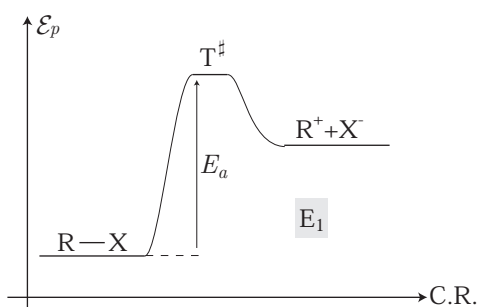
La stéréochimie de la réaction peut être ainsi résumée de la manière suivante :



À nouveau, la régiosélectivité de la réaction suit la règle de Zaitsev : lorsque deux alcènes peuvent être obtenus, c'est celui le plus substitué qui est produit majoritairement.

13.4.2.3 Compétition entre E_1 et E_2

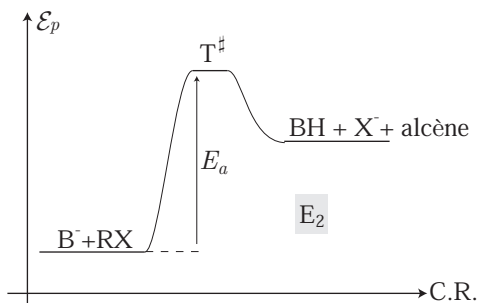
La représentation graphique de l'énergie potentielle de la première étape du mécanisme E_1 (étape cinétiquement limitante) :



permet de dégager les prévisions suivantes :

- L'encombrement stérique du carbone en α (celui qui porte l'halogène) augmente l'énergie potentielle de $R-X$, tandis que celle du carbocation n'est pas affectée. Par suite, l'énergie d'activation est d'autant plus faible que le composé halogéné est plus encombré ; l'encombrement stérique est un facteur favorable au mécanisme E_1 .
- Un solvant polaire stabilise les ions R^+ , X^- et abaisse donc l'énergie de l'état de transition (conformément au postulat de Hammond). Un tel solvant est donc favorable à une réaction d'élimination E_1 .
- Une base forte facilite le départ de l'ion H^+ au cours de la deuxième étape de la réaction E_1 , qui s'en trouve accélérée.
- Plus l'halogène est polarisable, plus la liaison $R-X$ est fragilisée et plus l'énergie potentielle de $R-X$ est élevée ; la réaction d'élimination E_1 est plus efficace avec l'iode et le brome qu'avec le chlore.

De même, la représentation graphique du diagramme énergétique de la réaction d'élimination E_2 :

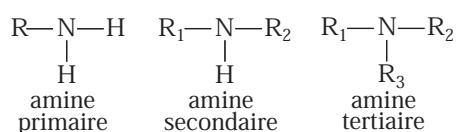


apporte les renseignements suivants :

- Un solvant polaire stabilise l'ion B^- mais pas T^\ddagger , ce qui accroît l'énergie d'activation de la réaction ; l'emploi d'un tel solvant ne favorise pas l'élimination E_2 . Il en va de même avec un solvant protique.
- L'encombrement stérique de l'halogénoalcane est un écueil à l'approche de B^- et n'oriente donc pas la réaction vers une élimination E_2 .

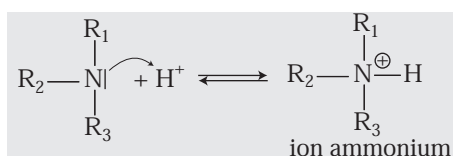
13.5 Les liaisons simples carbone-azote

Les amines sont groupées en trois familles :

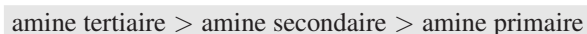


13.5.1 Caractère basique

La présence d'un doublet électronique sur l'atome d'azote confère aux amines leur caractère basique :

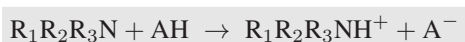


Le couple ion ammonium/amine est un couple acido-basique faible, dont la basicité croît avec l'état de substitution :



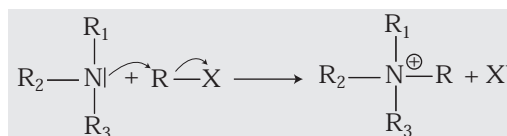
(> signifie « plus basique que »).

Cette basicité se manifeste essentiellement au contact d'un acide AH :



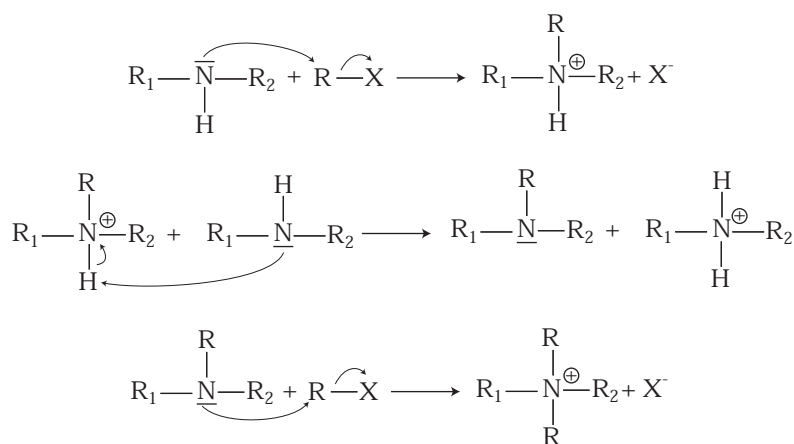
13.5.2 Caractère nucléophile

Les amines doivent leur caractère nucléophile à la présence d'un doublet électronique sur l'atome d'azote. Sur un halogénoalcane $R-X$, ce caractère se traduit par l'alkylation de l'amine :

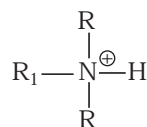


Pour les amines primaires et secondaires, il est très difficile d'obtenir une monohalogénéation :

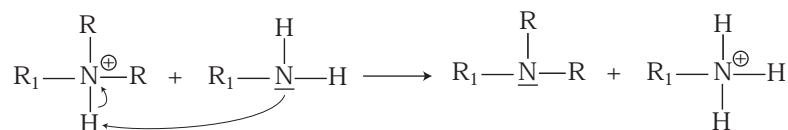
- Amine secondaire :



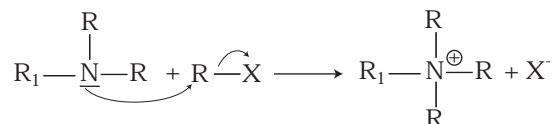
- Amine primaire : à l'issue des étapes précédentes est obtenu l'ion ammonium :



qui peut à nouveau réagir avec l'amine primaire initiale :



avant de subir une troisième alkylation :

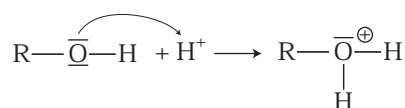


Remarque – Les réactions d'alkylation s'apparentent à des substitutions nucléophiles. À ce titre, elles suivent des mécanismes SN_1 ou SN_2 liés au solvant employé et à la nature de l'halogénoalcane.

13.6 Les liaisons simples carbone-oxygène

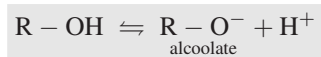
13.6.1 Acido-basicité des alcools

La présence d'un doublet électronique sur l'atome d'oxygène permet la fixation de l'ion H^+ sur les alcools :

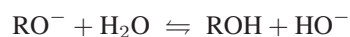


d'où découle le couple acido-basique : $\text{ROH}_2^+/\text{ROH}$.

De même, l'atome d'hydrogène de la liaison $-\text{OH}$ peut être libéré pour former un ion alcoolate :



Cependant, cette réaction ne peut s'observer dans l'eau, où l'ion alcoolate s'avère être une base plus forte que l'eau ; la réaction :



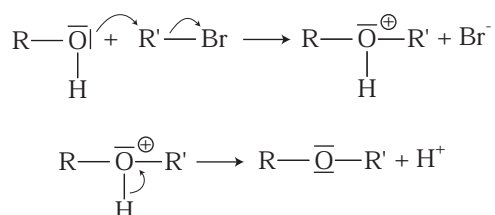
est presque totale. En revanche, l'ion alcoolate peut être formé par réduction sur le sodium :



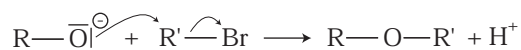
Enfin, ROH est d'autant plus acide que l'alcool est plus substitué.

13.6.2 Synthèse de Williamson

Un alcool peut réagir sur un composé bromé pour former un éther-oxyde :



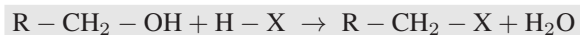
Cette réaction est plus efficace avec l'ion alcoolate RO^- , meilleur nucléophile que l'alcool ROH :



13.6.3 Passage à un dérivé monochloré

13.6.3.1 Action d'un halogénure d'hydrogène

Un halogénure d'hydrogène $\text{H}-\text{X}$ (où X désigne Cl, Br ou I) peut opérer une substitution nucléophile sur un alcool primaire $\text{R}-\text{CH}_2-\text{OH}$:

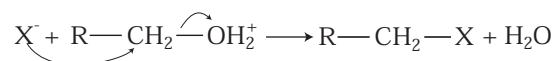


Le mécanisme admis est de type $\text{S}_\text{N}2$ avec deux étapes :

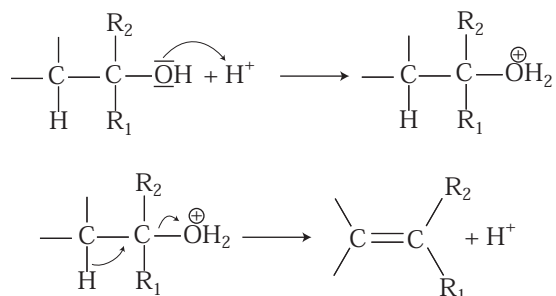
- Formation d'un sel d'alkyloxonium :



- Substitution nucléophile :



Avec un alcool secondaire ou tertiaire, la réaction évolue vers un produit d'élimination :



13.6.3.2 Action de PX_3 et de SOCl_2

Le trihalogénure de phosphore PX_3 (où X désigne Br ou Cl) permet de substituer un atome d'halogène au groupe $-\text{OH}$ porté par un alcool primaire :



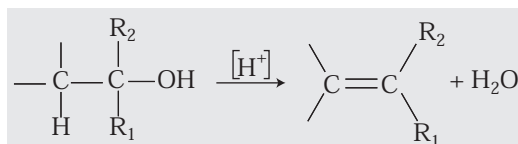
le chlorure de thionyle : SOCl_2 est également un agent chlorurant efficace sur les alcools primaires :



13.6.4 Réactions de déshydratation

13.6.4.1 Déshydratation intramoléculaire

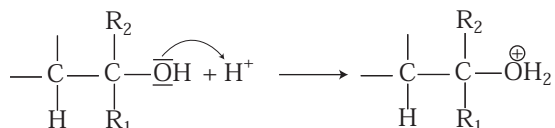
En milieu acide, la déshydratation d'un alcool tertiaire produit un alcène, à température modérée :



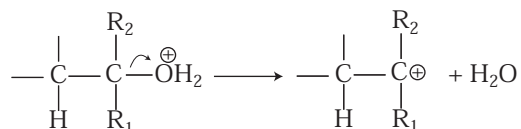
L'alcène obtenu majoritairement est le plus stable thermodynamiquement, c'est-à-dire le plus substitué.

Le mécanisme de cette réaction est de type E_1 avec les alcools tertiaires :

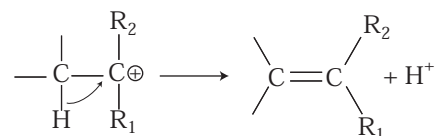
- Formation d'un sel d'alkyloxonium :



- Élimination d'eau et formation d'un carbocation :

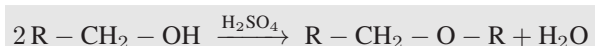


- Régénération du catalyseur H^+ et formation de la double liaison $C = C$:



13.6.4.2 Déshydratation intermoléculaire

En milieu acide sulfurique, un alcool primaire peut se dimériser en éther-oxyde :

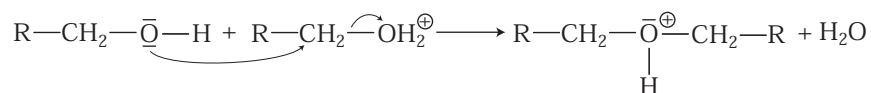


Deux mécanismes peuvent être évoqués pour interpréter ce phénomène :

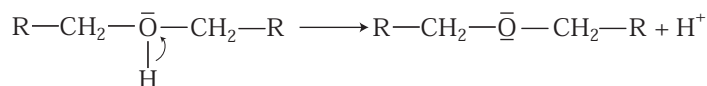
- Mécanisme de type $\text{S}_{\text{N}}2$ en trois étapes :
 - Formation d'un ion alkyloxonium :



- Substitution nucléophile d'ordre 2 :

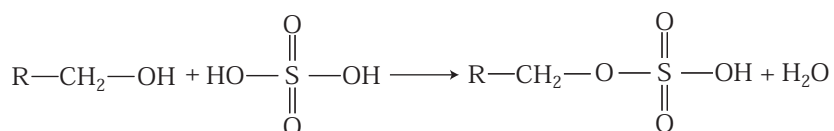


- Régénération du catalyseur H^+ :

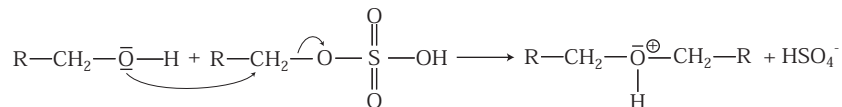


- Mécanisme avec participation de l'acide sulfurique :

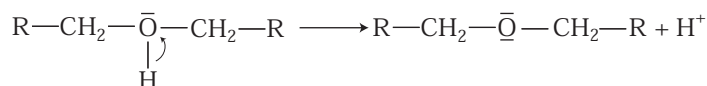
- Estérification de H_2SO_4 :



- Substitution nucléophile d'ordre 2 de l'hydrogénosulfate d'alkyle :



- Régénération du catalyseur H^+ :



● **433** _____ **Lycée Roosevelt, Reims**

5 min.

PCSI

Stéréoisomérisation des molécules

La molécule de 3-hydroxybutanal comporte-t-elle des atomes de carbone asymétriques. Si oui, dessiner la molécule en représentation conventionnelle de Cram, l'atome de carbone asymétrique ayant la configuration (S).

● **434** _____ **Concours Centrale-Sup'élec**

5 min.

PCSI

Stéréoisomérisation des molécules

1. La molécule de 1,2-dibromoéthane est-elle chirale ? Justifier.
2. Représenter la variation d'énergie potentielle de cette molécule en fonction d'un angle de rotation judicieusement choisi. Donner le nom des conformations particulières de cette molécule.

● **435** _____ **Lycée Poincaré, Nancy**

5 min.

PCSI

Stéréoisomérisation des molécules

1. Dessiner, en perspective et en représentation de Newman, le cyclohexane en conformation chaise. On précisera, en les nommant, les deux sortes de liaisons C – H.
2. Dessiner, en perspective et en représentation de Newman, les deux conformations chaise du méthyl-cyclohexane. L'une des conformations a une probabilité d'apparition de 96%, l'autre de 4%. Préciser, sur le dessin, celle qui semble avoir la plus grande probabilité d'apparition.

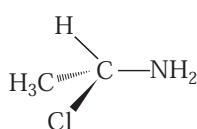
● **436** _____ **Lycée Thiers, Marseille**

5 min.

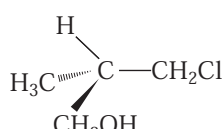
PCSI

Stéréoisomérisation des molécules

Déterminer les configurations (R) ou (S) des deux composés suivants :



Molécule A



Molécule B

● **437** _____ **Lycée Chateaubriand, Rennes**

5 min.

PCSI

Stéréoisomérisation des molécules

Le (S)-1-phénylpropane-2-amine (composé A) peut être synthétisé à partir de l'acide (S)-2-méthyl-3-phénylpropanoïque (composé B).

1. Indiquer les formules semi-développées de A et B.
2. Représenter chacun de ces composés en projection de Newman, en justifiant leur configuration absolue.

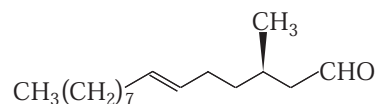
● **438** ————— **Lycée du Parc, Lyon**

10 min.

Stéréoisomérisation des molécules

PCSI

On s'intéresse à un aldéhyde insaturé de formule semi-développée :



Déterminer la configuration absolue de cette molécule.

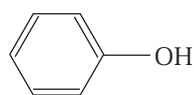
● **439** ————— **Concours de l'ENS**

10 min.

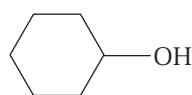
Stéréoisomérisation des molécules

PCSI

Les molécules du phénol et du cyclohexanol sont représentées ci-dessous :



phénol



cyclohexanol

1. Compléter les structures de Lewis de chaque molécule.
2. Justifier la planarité du phénol et l'absence de planarité du cyclohexanol.
3. Le cyclohexanol présente deux formes chaises en interconversion.
 - (a) Représenter ces deux formes chaise et préciser leur relation d'isomérisation.
 - (b) L'une des formes précédentes est prédominante à l'équilibre thermodynamique. La représenter et justifier sa plus grande stabilité.

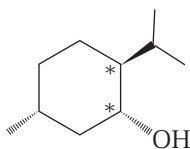
● **440** ————— **Concours des Mines-Ponts**

15 min.

Stéréoisomérisation des molécules

PCSI

La formule du menthol est :



1. Représenter les conformations chaise de cette molécule. Indiquer la conformation la plus stable. Justifier.
2. Établir la configuration absolue des atomes de carbone asymétriques repérés par des astérisques. Expliquer le raisonnement.

● **441** ————— **Lycée Poincaré, Nancy**

20 min.

PCSI

Stéréoisomérisation des molécules

L'analyse chimique élémentaire d'un composé organique, de masse molaire $M = 92,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, donne les proportions en masse suivantes : 51,9% de carbone, 9,7% d'hydrogène, 38,4% de chlore.

- Déterminer la formule brute de ce composé.
- Écrire la formule développée des différents isomères de constitution possibles correspondant à cette formule brute et les nommer.
- Le composé étudié a une activité optique. De quel composé s'agit-il ?
Le dessiner dans ses deux configurations en précisant, à chaque fois, le nom de la configuration.

Données : masses molaires atomiques :

$$M_{\text{H}} = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_{\text{C}} = 12 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_{\text{Cl}} = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

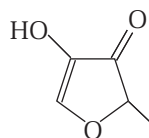
● **442** ————— **Concours Centrale-Sup'élec**

20 min.

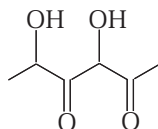
PCSI

Stéréoisomérisation des molécules

- Le furanéol est le composé ci-dessous :



- Le furanéol possède-t-il des stéréoisomères de configuration ?
 - On constate que le furanéol synthétisé en laboratoire est toujours optiquement inactif. Comment peut-on expliquer ce résultat ?
- La synthèse du furanéol passe par le composé intermédiaire :



- Combien de stéréoisomères peut-on attendre pour ce composé ?
- Représenter le stéréoisomère (3R,5R).
- Quelles sont les relations entre les divers stéréoisomères ?

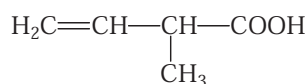
● **443** ————— **Lycée Henri Wallon, Valenciennes**

20 min.

PCSI

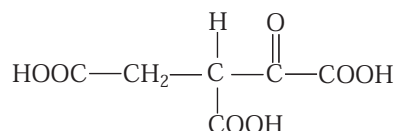
Stéréoisomérisation des molécules

- On considère le composé :



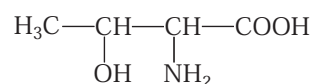
Écrire la configuration (S) de ce composé.

2. On considère le composé :



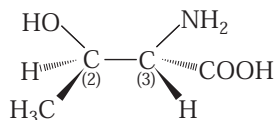
Écrire la configuration (R) de ce composé.

3. On considère le composé :



(a) Combien d'atomes de carbone asymétriques ce composé comporte-t-il et quel est le nombre de diastéréoisomères attendus ?

(b) Soit la représentation :



À quel diastéréoisomère correspond-elle ? Représenter le diastéréoisomère (2S, 3R) avec la même convention.

● 444 ————— Concours ESIM

5 min.

PCSI

Réactivité de la liaison C = C

Le sulfure d'hydrogène a la faculté de s'additionner sur les alcènes selon un mécanisme radicalaire analogue à l'addition du bromure d'hydrogène sur un alcène en présence de peroxyde.

Écrire l'équation-bilan et le mécanisme de l'action de H₂S sur le propène en milieu peroxyde de benzoyle vers 30 ou 40°C. Justifier la régiosélectivité.

● 445 ————— Concours ENSI

5 min.

PCSI

Réactivité de la liaison C = C

L'addition du dichlore sur le cyclohexène (A) conduit au 1,2-dichloro cyclohexane.

- Combien y a-t-il de stéréoisomères correspond au 1,2-dichlorocyclohexane ? Donner une représentation perspective de chacun de ces stéréoisomères et préciser les relations (énantiométrie, diastéréoisométrie) de ces stéréoisomères deux à deux sur un schéma.
- Montrer que l'un des stéréoisomères du 1,2-dichlorocyclohexane est inactif sur la lumière polarisée.
- À l'aide d'un schéma mettant en évidence le mécanisme de l'addition du dichlore sur la double liaison éthylénique, montrer que cette réaction conduit en fait à un mélange racémique de deux composés D_1 et D_2 .

● **446** _____ **Lycée Poincaré, Nancy**

5 min.

PCSI

Réactivité de la liaison C = C

Le but-1-ène, traité par le bromure d'hydrogène en présence d'un peroxyde organique, donne un corps *A*.

1. Écrire l'équation de la réaction correspondante.
2. Indiquer le nom du composé *A*.
3. Préciser le mécanisme de formation de *A*.

● **447** _____ **Lycée Fabert, Metz**

10 min.

PCSI

Réactivité de la liaison C = C

1. Représenter la formule semi-développée du (Z)-2-hydroxy-1-phénylprop-1-ène.
2. Ce composé est traité, dans un solvant polaire, par le dibrome.
 - (a) En rappelant le mécanisme de la réaction d'addition de Br₂, représenter dans l'espace tous les produits de cette réaction.
 - (b) Combien de stéréoisomères obtient-on ? Donner leur configuration absolue.

● **448** _____ **Concours de l'ENS**

25 min.

PCSI

Réactivité de la liaison C = C

Le dibrome réagit avec les alcènes dans un solvant inerte comme le tétrachlorure de carbone (réaction 1).

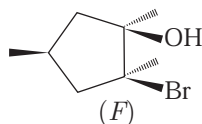
1. Détailler le mécanisme de cette réaction et donner la structure du produit (*A*) obtenu à partir du 2,3-diméthylbut-2-ène.
2. Les réactivités relatives de quelques alcènes sont données ci-dessous. Expliquer les résultats obtenus.

Éthène	30
But-1-ène	2,9.10 ³
(Z)-pent-2-ène	1,3.10 ⁵
2,3-diméthylbut-2-ène	2,8.10 ⁷

3. L'action du dibrome sur le buta-1,3-diène (mole à mole) donne un mélange de 3,4-dibromobut-1-ène (*B*) et le 1,4-dibromobut-2-ène (*C*). Sans détailler le mécanisme, représenter (*B*) et (*C*) et expliquer le type de réaction conduisant à chacun de ces produits.
4. Le chlorure d'iode présente la même réactivité vis-à-vis des alcènes que le dichlore et le dibrome. Détailler le mécanisme de la réaction de ICl sur le 2,3-diméthylbut-2-ène et donner la structure du produit (*D*) obtenu.
5. Ensuite dans l'eau comme solvant, l'action du dibrome sur le 2,3-diméthylbut-2-ène ne conduit pas au produit (*A*) obtenu dans la réaction 1, mais à un bromoalcool (*E*) par un mécanisme analogue. Le composé (*A*) n'est pas un intermédiaire dans ces conditions opératoires.
 - (a) Détailler le mécanisme de formation du bromoalcool (*E*) et donner sa structure.

(b) Justifier le qualificatif inerte pour le solvant employé dans la réaction 1 (le tétrachlorure de carbone).

6. On considère le composé (*F*) représenté ci-dessous :



(*F*) peut-il être obtenu – entre autres produits – par action du dibrome sur le 1,2,4-triéthylcyclopentène en solution aqueuse. Si oui, est-il le produit majoritaire ? Si non, pour quelle raison ?

● **449** _____ **Lycée Hoche, Versailles**

10 min.

Les organomagnésiens mixtes

PCSI

On s'intéresse à la monochloration (remplacement d'un atome d'hydrogène par un atome de chlore) du méthylpropane, à la température $T = 575$ K. On obtient deux isomères (*A*) et (*B*). On effectue la série de réactions ci-dessous :

- (*B*) réagit sur le magnésium, en présence d'éther, pour donner (*C*) ;
- L'action du méthanal sur (*C*) conduit au composé (*D*) qui donne (*E*) par hydrolyse ;
- (*E*) est un alcool primaire qui ne peut subir de déshydratation.

En déduire la formule de (*B*).

● **450** _____ **Lycée du Parc, Lyon**

10 min.

Les organomagnésiens mixtes

PCSI

On étudie l'action du bromure d'hydrogène sur le méthylpropène.

1. En se plaçant dans les conditions d'une addition électrophile, on obtient le composé (*A*).
2. En présence d'initiateur de radicaux libres, le produit (*B*) est formé.

Donner les formules semi-développées de (*A*) et (*B*) et expliquer leur formation en précisant les mécanismes réactionnels.

3. À des solutions de (*A*) et (*B*) dans l'éther éthylique anhydre, on ajoute du magnésium en tournures. Après un certain temps, on verse la solution sur de la neige carbonique (CO_2 solide) puis on ajoute de l'acide chlorhydrique jusqu'à obtenir un pH acide. La solution dans l'éther est traitée et, après élimination du solvant, on récupère les produits (*C*) et (*D*). En prenant comme exemples (*A*) et (*B*), écrire les trois équations menant à (*C*) et (*D*) en précisant, le cas échéant, le mécanisme réactionnel.

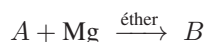
● **451** **Lycée Fabert, Metz**

10 min.

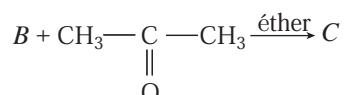
PCSI

Les organomagnésiens mixtes

L'addition radicalaire de HBr sur le propène fournit un composé *A*, sur lequel le magnésium peut réagir :



Le produit *B* ainsi récupéré est mis en présence d'acétone :



Après hydrolyse acide, le composé *C* évolue vers le produit *D*.

Déterminer les formules de *A*, *B*, *C* et *D* ainsi que les mécanismes réactionnels ayant conduit à leur formation.

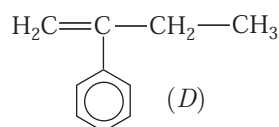
● **452** **Concours Vêto**

15 min.

PCSI

Les organomagnésiens mixtes

Le 1-chloro-1-phénylpropane est mis à réagir avec du magnésium dans de l'éthoxyéthane anhydre pour donner (*A*). Par action de (*A*) sur l'éthanenitrile, on obtient (*B*) qui est hydrolysé en milieu acide pour fournir (*C*). (*C*) donne un précipité orange avec la 2,4-dinitrophénylhydrazine. L'action du tétrahydroborate de sodium sur (*C*) en milieu éthanol-eau, puis après traitement à l'acide sulfurique, on obtient majoritairement le produit (*D*) :



Mis en présence d'eau en milieu acide, (*D*) fournit majoritairement (*E*). Le chlorure de thioyle (SOCl_2) agit sur (*E*) en substituant le chlore $-\text{Cl}$ au groupe $-\text{OH}$; le composé (*F*) est obtenu. (*F*), mis à réagir avec le magnésium en milieu éthoxyéthane anhydre, donne (*G*). (*G*), mis en présence de dioxyde carbone solide en excès, fournit (*H*). (*H*), par hydrolyse acide, donne (*I*).

1. Trouver les formules semi-développées de tous les composés représentés par des lettres.
2. Pourquoi, lors de la préparation de (*A*) et de (*G*), est-il nécessaire d'être en milieu rigoureusement anhydre ? Écrire l'équation-bilan de la réaction qui pourrait se produire si le milieu n'était pas rigoureusement anhydre.
3. Donner le mécanisme de formation de (*B*).
4. Donner la formule semi-développée du produit minoritaire qui peut se former en même temps que (*E*). Justifier simplement le fait que (*E*) soit majoritaire.
5. Donner le mécanisme de formation de (*H*).

● **453** _____ **Lycée Roosevelt, Reims**

20 min.

PCSI

Les organomagnésiens mixtes

On considère les réactions suivantes :

1. $\text{C}_2\text{H}_5\text{Br} + \text{Mg} \xrightarrow{\text{éther}} \text{A}$.
2. $\text{A} + \text{B} \rightarrow$ (après hydrolyse) alcool primaire.
3. $2\text{A} + \text{C} \rightarrow$ (après hydrolyse) alcool secondaire.
4. $2\text{A} + \text{D} \rightarrow$ (après hydrolyse) alcool tertiaire.
5. $\text{A} + \text{E} \rightarrow$ (après hydrolyse) acide carboxylique.

Identifier chacun des produits ou réactifs A à E.

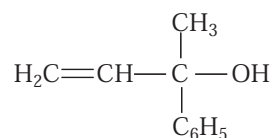
● **454** _____ **Concours National DEUG**

25 min.

PCSI

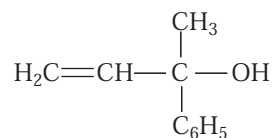
Les organomagnésiens mixtes

1. L'alcool (A), de formule :



est traité par HBr en présence de peroxydes. On obtient (B).

- (a) Quelle est la formule de (B) ?
 - (b) Décrire rapidement le mécanisme de la réaction.
2. La déshydratation de (B) en milieu acide conduit à l'alcène le plus substitué (C). Quelle est la formule de (C) ?
 3. (C) est traité par le magnésium dans l'éther anhydre. On obtient le dérivé (D) dont on indiquera la formule.
 4. (D) réagit sur le méthanal pour donner (E) après hydrolyse. Écrire la réaction.
 5. HBr réagit sur la fonction alcool de (E) : la fonction $-\text{OH}$ est remplacée par $-\text{Br}$. On obtient (F) ; quelle est sa formule ?
 6. On appelle G le composé de formule :

Après hydrogénation partielle en présence d'un catalyseur désactivé, (G) est oxydé en (H). (H) présente une bande d'absorption I.R. vers 1700 cm^{-1} , caractéristiques des groupes carbonyles. Quelle est la formule de (H) ?

7. Le composé (F), traité par le magnésium dans l'éther anhydre, conduit au dérivée (I). Quelle est la formule de (I) ?

8. (*I*) réagit sur (*H*) pour donner, après hydrolyse, le composé (*J*) appelé linalol (essence de lavande), de nom officiel : 3,7-diméthyl-3-hydroxy-octa-1,6-diène. Expliquer la formation de (*J*).

● **455** **Concours ENSI**

60 min.

PCSI

Les organomagnésiens mixtes

1. Préparation et dosage du bromure de méthyl magnésium

Dans un réacteur, on introduit :

15 g de magnésium
47,5 g de bromométhane
250 mL d'éther anhydre

Écrire l'équation de la réaction et préciser la nature et la quantité des espèces chimiques présentes dans le réacteur en supposant la réaction totale et univoque.

2. Dosage du bromure de méthyl magnésium

On prélève 1 mL de solution d'organomagnésien préparé ci-dessus et on l'ajoute à 20 mL d'une solution de diiode dans du benzène anhydre (40 g de diiode pour un litre de solution). La réaction est la suivante :



- (a) Préciser pourquoi la solution de diiode dans le benzène doit être anhydre.
- (b) L'excès de diiode est dosé par une solution aqueuse de thiosulfate de sodium $\text{Na}_2\text{S}_2\text{O}_3$ de concentration égale à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
Écrire et équilibrer l'équation de la réaction sachant que l'ion thiosulfate est transformé en ion tétrathionate ($\text{S}_4\text{O}_6^{2-}$) et le diiode en ion iodure.
Comment l'équivalence sera-t-elle observée ?
- (c) Sachant qu'il faut 30,5 mL de la solution de thiosulfate pour doser l'excès de diiode, en déduire la concentration de l'organomagnésien et le rendement de sa préparation par rapport et la quantité de bromométhane introduite.
3. À 100 mL de solution de bromure de méthyl magnésium, de concentration égale à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, on ajoute une solution de 10,5 g de benzaldéhyde ($\text{C}_6\text{H}_5\text{CHO}$) dans de l'éther anhydre.
- (a) Écrire la réaction de benzaldéhyde avec le bromure de méthyl magnésium et préciser son mécanisme.
- (b) L'espèce obtenue avant hydrolyse est appelée alcoolate magnésien. L'écrire sous sa forme ionique. Parmi les classes de réactifs suivants :
acide, base, nucléophile, électrophile
quelles sont les classes qui peuvent caractériser l'alcoolate ?
- (c) Écrire la formule du composé obtenu après hydrolyse. La molécule est-elle chirale ? justifier la réponse.
Le produit obtenu dans la réaction ci-dessus possède-t-il une activité optique ? justifier la réponse.

4. Dans une autre expérience, après addition du bromure de méthyl magnésium sur le benzaldéhyde, on ajoute dans le milieu, avant hydrolyse, du bromure de benzyle ($C_6H_5 - CH_2 - Br$) et un solvant approprié.

Sachant qu'elle suit une loi cinétique du deuxième ordre, écrire la réaction entre l'alcoolate magnésien et le bromure de benzyle.

Données : masses molaires des éléments en $g \cdot mol^{-1}$:

	I	Mg	Br	C	O	H
<i>M</i>	126	24	80	12	16	1

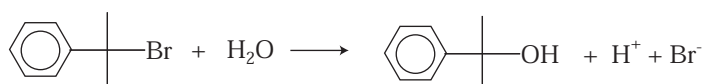
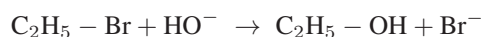
● **456** _____ **Lycée Rabelais, Rennes**

5 min.

liaisons simples carbone-halogène

PCSI

Pour chacune des deux réactions :



répondre aux questions suivantes :

1. Que se passera-t-il si l'on double la concentration du dérivé halogéné ?
2. Les réactions sont-elles sensibles à une variation de la concentration en ions HO^- ?
3. Comment représenter l'état de transition dans l'étape déterminante de la vitesse ?

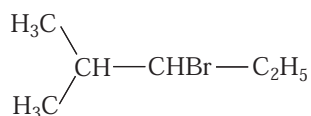
● **457** _____ **Lycée Carnot, Paris**

5 min.

Liaisons simples carbone-halogène

PCSI

Le composé (A), optiquement actif, de formule :



est traité par une solution aqueuse diluée de soude. Dans ces conditions, on obtient un mélange d'alcools optiquement inactif. Décrire le mécanisme de la réaction.

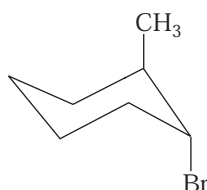
● **458** _____ **Lycée Victor Hugo, Caen**

15 min.

Liaisons simples carbone-halogène

PCSI

Parmi les différents isomères de position obtenus au cours d'une réaction, on isole le 1-bromo-2-méthyl cyclohexane, dont l'un des stéréoisomères (nommé (A) par la suite) est représenté ci-dessous en perspective (conformation chaise) :



(A) est traité à chaud par l'éthanolate de sodium ($\text{C}_2\text{H}_5\text{O}^-$, Na^+) à 55°C . L'expérience montre que la vitesse de la réaction est proportionnelle à la concentration en ion éthanolate.

1. De quel type de réaction s'agit-il ? Expliquer. Rappeler le déroulement stéréochimique de ce type de réaction.
2. Rappeler la règle de Zaitsev. Quel produit majoritaire, (B), devrait-on obtenir par application de cette règle lors de la réaction précédente ? Quel serait le produit minoritaire, (C), obtenu (représenter et nommer (B) et (C)) ?
3. L'expérience montre que l'on obtient uniquement (C). Donner le mécanisme de sa formation en détaillant avec soin la stéréochimie de la réaction.
4. Pourquoi la règle de Zaitsev n'est-elle pas respectée dans cette réaction ?

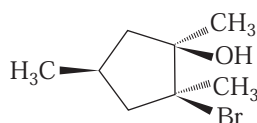
● 459 ————— Concours de l'ENS

20 min.

PCSI

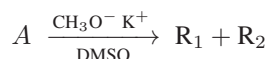
Liaisons simples carbone-halogène

Le composé A :



est traité par une solution aqueuse de soude (NaOH) diluée. On obtient un mélange de deux stéréoisomères B_1 et B_2 de formule moléculaire $\text{C}_8\text{H}_{16}\text{O}_2$.

1. Quel est le nom de cette réaction ? Détailler son mécanisme et donner la structure de B_1 et B_2 , sachant que les atomes de carbone asymétriques de B_1 sont de configuration (R, S).
2. B_1 et B_2 sont-ils chiraux ? Quelle relation existe-t-il entre B_1 et B_2 ?
3. Le mélange de B_1 et B_2 est-il optiquement actif ? Pourquoi ?
4. Proposer une préparation du composé B_1 à partir du 1, 2, 4-triéthylcyclopentène. Obtient-on uniquement le composé B_1 dans cette réaction ?
5. Proposer une préparation du composé B_2 à partir du 1, 2, 4-triéthylcyclopentène. Obtient-on uniquement le composé B_2 dans cette réaction ?
6. On effectue aussi une autre réaction sur A (DMSO = diméthylsulfoxyde) :



Les composés R_1 et R_2 sont isomères de formule moléculaire $\text{C}_8\text{H}_{14}\text{O}$. R_1 est le composé majoritaire obtenu dans cette réaction ; c'est également l'isomère le plus stable.

- (a) Donner la structure du DMSO. De quel type de solvant s'agit-il ?
 (b) Quel est le nom de cette réaction ? Détailler son mécanisme et donner la structure de R_1 et R_2 .

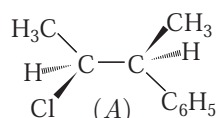
● **460** ————— **Lycée Victor Hugo, Caen**

20 min.

PCSI

Liaisons simples carbone-halogène

On considère le 2-chloro-3-phénylbutane (composé (A)), de configuration (2S, 3S) :



- On traite (A) par de la soude diluée dans un solvant aprotique polaire. On observe une réaction du deuxième ordre.
 - Quel est le produit majoritaire (B) obtenu ?
 - Donner le mécanisme de la réaction.
 - En déduire les conséquences stériques.
- Quant on traite le composé (A) par de la soude concentrée en milieu peu polaire, on obtient un composé (C) en plus du composé (B). Ce produit (C) provient d'une réaction d'élimination.
 - Préciser le mécanisme de formation de (C).
 - Donner la géométrie du produit C formé.
 - Par quelle règle est gouvernée cette élimination ?
- Le composé (C) est oxydé pour obtenir de l'éthanal et un produit (D).
 - Donner les conditions expérimentales permettant d'effectuer ce type de réaction.
 - Quel est le produit (D) obtenu ?
- Le produit (D) est traité, dans un solvant approprié, par du bromure d'éthyl magnésium. On décompose le complexe obtenu par de l'eau acidulée.
 - Quel est le produit (E) obtenu ?
 - Écrire les réactions mises en jeu.

● **461** ————— **Concours ENSI**

20 min.

PCSI

Liaisons simples carbone-halogène

On considère les composés halogénés suivants :

- le 1-chloro-1-phénylbutane (composé A) ;
- le 2-chloro-1-phénylbutane (composé B).

- Le composé A, optiquement actif, est traité par le cyanure de potassium KCN.
 - Quelle est la formule du composé obtenu ?
 - Décrire rapidement le mécanisme de la réaction.

- (c) Quelle est l'expression de la vitesse de la réaction ?
 (d) Discuter de l'activité optique du produit obtenu.
2. Mêmes questions avec *B*, optiquement actif, sachant que la vitesse de réaction dépend de la concentration en ions CN^- .
3. Le composé *B* est traité, cette fois, par de la potasse alcoolique à chaud. On obtient deux isomères B_1 et B_2 .
- (a) Écrire leurs formules.
 (b) Justifier le fait que l'un des deux isomères est majoritaire.

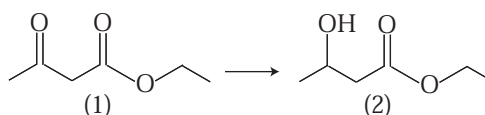
● **462** _____ **Concours de la banque Agro**

10 min.

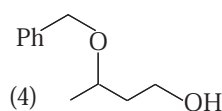
PCSI

Liaisons simples carbone-halogène

L'acétate d'éthyle (1) est traité par un mélange de levure de boulanger et de saccharose pour conduire au produit (2) :

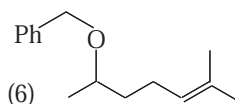


1. L'alcool (2) est traité par l'hydruide de sodium NaH ; il se produit un dégagement gazeux. On ajoute ensuite du chlorophénylméthane (chlorure de benzyle) au mélange réactionnel et on isole ainsi le produit (3) ne contenant plus de fonction alcool.
- (a) Quelle est la nature du dégagement gazeux lors de l'action de l'hydruide de sodium sur l'alcool (2) ?
 (b) Quelle est la formule semi-développée du produit (3) ? Proposer un mécanisme pour sa formation. Quel est le sous-produit inorganique de cette réaction ?
2. Le produit (3) est ensuite traité par le tétrahydroaluminate de lithium (LiAlH_4) pour conduire à l'alcool (4) après hydrolyse :



L'alcool (4) est traité par le chlorure de thionyle (SOCl_2) pour conduire au composé (5). Quelle est la formule semi-développée de (5) ?

3. Par réaction de (5) avec l'organomagnésien issu du 1-bromo-2-méthylprop-1-ène, on récupère le produit (6) :



Quel est le mécanisme de cette réaction ? Quel est l'intérêt de transformer l'alcool (4) en composé (5) à l'étape précédente ?

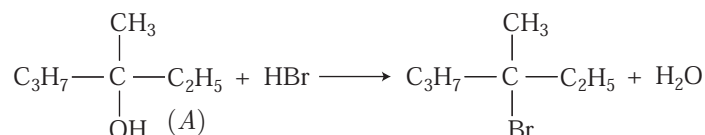
● **463** ————— **Lycée Victor Hugo, Caen**

10 min.

PCSI

Liaisons simples carbone-oxygène

On fait réagir, en milieu aqueux, de l'acide bromhydrique HBr sur l'alcool tertiaire (A). Cette réaction se fait selon le schéma suivant :



On constate qu'une addition d'acide bromhydrique au mélange réactionnel reste sans influence sur la vitesse de la réaction.

1. Quelle information cette constatation apporte-t-elle quant au mécanisme de la réaction ?
2. Écrire le mécanisme détaillé de cette réaction en précisant la rapidité de chaque étape.
3. Proposer un nom pour le produit de la réaction. Ce produit possède-t-il une activité optique ? justifier la réponse.
4. Ce type de réaction est-il sensible à l'encombrement stérique ? justifier la réponse.

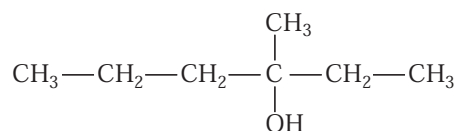
● **464** ————— **Lycée Victor Hugo, Caen**

15 min.

PCSI

Liaisons simples carbone-oxygène

Soit (A) l'alcool tertiaire de formule :



Le composé, chauffé en présence d'acide sulfurique H_2SO_4 , conduit à l'obtention d'alcènes isomères.

1. Donner le mécanisme de cette réaction.
2. Donner les noms des différents alcènes obtenus et préciser celui ou ceux qui sont prépondérants.
3. Représenter, s'il y a lieu, les isomères géométriques des différents alcènes obtenus, en précisant leur géométrie.

● **465** ————— **Lycée Champollion, Grenoble**

15 min.

PCSI

Liaisons simples carbone-oxygène

Le méthanol permet de fabriquer un additif intéressant des carburants, l'oxyde de méthyle et de tertio-butyle (MTBE) : $\text{H}_3\text{C} - \text{O} - \text{C}(\text{CH}_3)_3$.

On envisage plusieurs synthèses pour ce produit.

- Proposer un réactif pour transformer un alcool en dérivé chloré (on admettra que la réactivité de l'alcool ne dépend pas de sa classe).
- On se propose de préparer le MTBE à partir de méthanol et de 2-méthylpropan-2-ol (ou alcool tertiobutylique). Pour cela, on préconise deux méthodes :
 - on transforme le 2-méthylpropan-2-ol en 2-chloro-2-méthylpropane et on fait réagir sur ce dernier le méthanolate (ou méthylate) de potassium ;
 - on transforme le méthanol en chlorométhane et on fait réagir, sur ce dernier, le tertiobutylate de potassium.
 - Quelles sont les réactions possibles dans chacun des cas ?
 - Indiquer quelle est la méthode qui permet de fabriquer le MTBE avec le meilleur rendement.
- La synthèse industrielle du MTBE se fait par action du méthanol, en milieu acide sur le 2-méthylpropène.
Proposer un mécanisme pour cette réaction et justifier, avec précision sa régiospécificité.

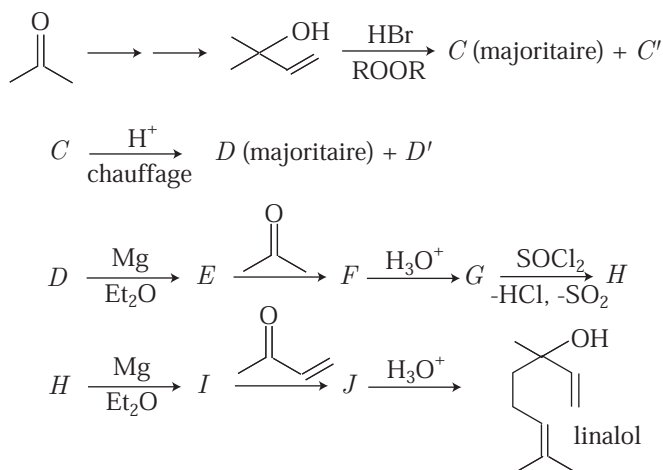
● **466** **Concours ENSTIM**

25 min.

PCSI

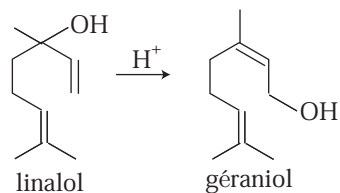
Liaisons simples carbone-oxygène

Le linalol est un composé utilisé en parfumerie en remplacement de l'huile essentielle de lavande, en raison de son odeur voisine. On propose d'étudier ici une synthèse possible de cette molécule, selon la séquence réactionnelle suivante :



- Donner le nom du linalol en nomenclature officielle.
- Donner la formule topologique des produits C , C' , D , D' , E , F , G , H , I et J .
- Écrire le mécanisme de l'étape $C \rightarrow D + D'$. Justifier l'orientation observée.
- Quel(s) produit(s) aurait-on obtenu(s) en procédant au chauffage de C en milieu basique ?

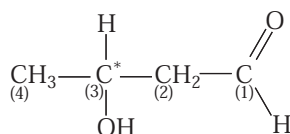
5. Dans l'étape $G \rightarrow H$, on a utilisé, comme réactif, l'agent chlorurant chlorure de thionyle SOCl_2 qui permet d'obtenir H avec un très bon rendement.
Quel autre agent chlorurant aurait-on pu utiliser à la place du chlorure de thionyle pour obtenir H ?
6. Le géraniol est une molécule présente dans l'essence de géranium. On peut synthétiser, en une étape, le géraniol, en traitant le linalol en milieu acide (H^+).



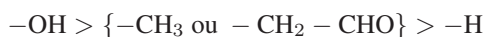
Proposer un mécanisme permettant d'expliquer l'isomérisation du linalol en géraniol.

● **433** **Lycée Roosevelt, Reims**

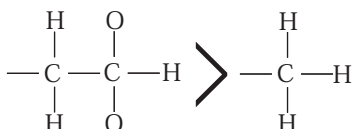
La formule semi-développée du 3-hydroxybutanal :



révèle la présence d'un atome de carbone asymétrique (repéré par un astérisque). Autour de cet atome se trouvent les groupes $-\text{CH}_3$, $-\text{H}$, $-\text{OH}$ et $-\text{CH}_2-\text{CHO}$ qui peuvent être classés, au premier rang, selon les conventions de C.I.P. (avec $Z_{\text{O}} > Z_{\text{C}} > Z_{\text{H}}$) :



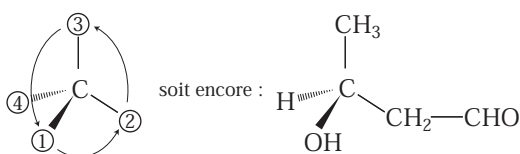
Quant aux groupes $-\text{CH}_3$ et $-\text{CH}_2-\text{CHO}$, leur préséance peut être établie à l'aide des atomes H et C du deuxième rang :



auquel cas les règles séquentielles de C.I.P. imposent :

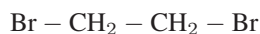


Quant à la configuration (S), elle s'obtient en positionnant le groupe (4) vers l'arrière de la molécule, la séquence (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) étant alors décrite dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :



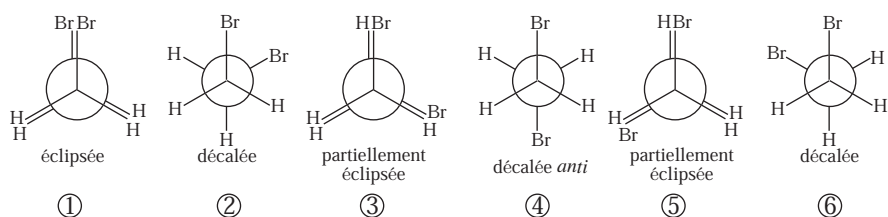
● **434** **Concours Centrale-Sup'élec**

1. La molécule de 1,2-dibromoéthane :

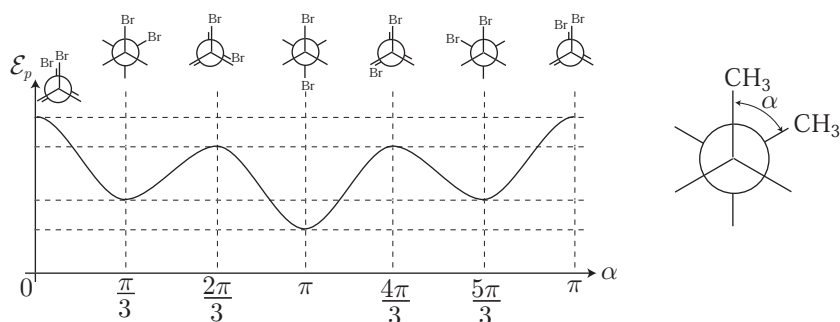


ne possède pas d'atome de carbone asymétrique de sorte qu'elle ne peut être chirale.

2. Soit α l'angle entre les liaisons C-Br dans la représentation de Newman. Plusieurs conformations peuvent être distinguées :

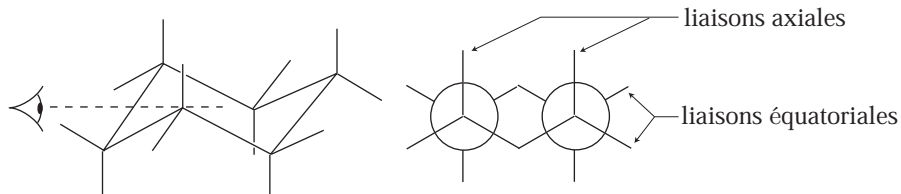


L'énergie potentielle de la molécule est d'autant plus faible que les atomes de brome sont plus éloignés (forme *décalée anti*) ou, dans une moindre mesure, que les atomes de brome sont plus éloignés des atomes d'hydrogène (formes *décalées*). En conséquence, la courbe décrivant \mathcal{E}_p en fonction de α prend l'allure suivante :

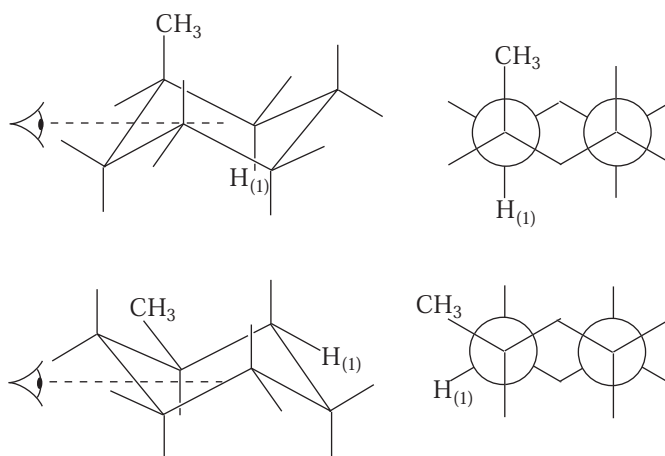


● 435 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. Le cyclohexane C_6H_6 peut présenter une conformation chaise, dans laquelle se distinguent des liaisons C – H axiales et équatoriales :



2. Le méthyl cyclohexane, $C_6H_{11} - CH_3$ peut présenter deux conformations chaise :



Dans la première conformation la distance entre CH_3 et $\text{H}_{(1)}$ est plus importante que dans la deuxième, ce qui justifie aussi sa plus grande stabilité et par conséquent sa plus grande probabilité d'apparition.

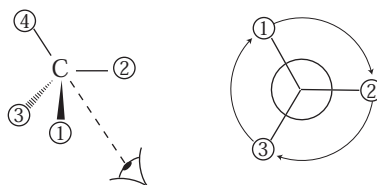
● 436 ————— Lycée Thiers, Marseille

Molécule (A)

Compte tenu de la présence des atomes :



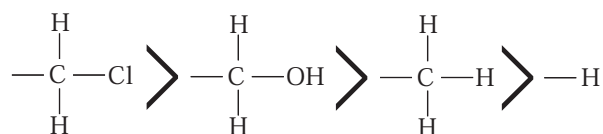
la molécule (A) peut être représentée de la manière suivante :



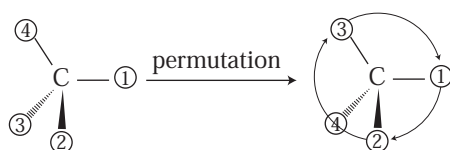
ce qui montre qu'elle présente la configuration (R).

Molécule (B)

Puisque trois atomes de carbone sont liés à l'atome de carbone asymétrique, la présence des groupes doit porter sur un ordre supérieur (avec $Z_{\text{Cl}} > Z_{\text{O}} > Z_{\text{C}} > Z_{\text{H}}$).



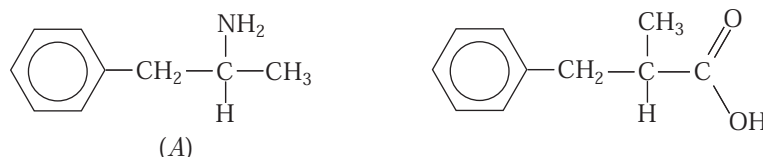
C'est pourquoi la molécule se présente de la manière suivante :



où une permutation des groupes (3) et (4) permet de renvoyer le groupe (4) à « l'arrière » de la molécule, qui présente alors une configuration (R). Or, puisque toute permutation de groupe provoque une inversion de configuration, il s'ensuit que la molécule (B) présente une configuration (S).

● 437 ————— Lycée Chateaubriand, Rennes

1. Le (S)-1-phénylpropane-2-amine (molécule A) et l'acide (S)-2-méthyle-3-phénylpropanoïque (molécule B) ont pour formules semi-développées :

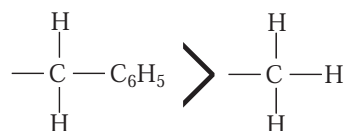


2. Molécule A

Elle présente un atome de carbone asymétrique lié aux groupes $-\text{NH}_2$, $-\text{CH}_3$, $-\text{CH}_2 - \text{C}_6\text{H}_5$ et $-\text{H}$ qui présentent, au premier rang, la préséance suivante :



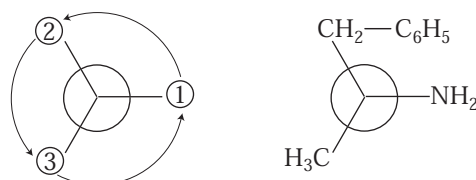
tandis qu'au deuxième rang :



permet d'établir l'ordre de priorité des différents groupes :

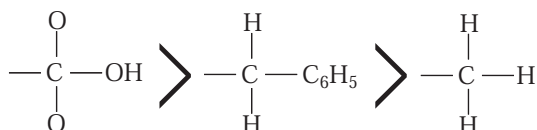


En outre, la configuration (S) est celle qui impose une rotation dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour décrire la séquence (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3), le groupe (4) étant éclipsé :

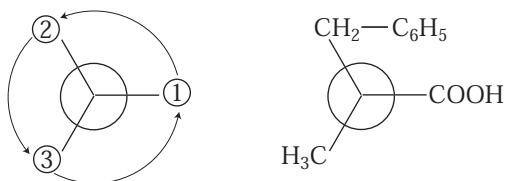


Molécule B

Trois des quatre groupes $-\text{COOH}$, $-\text{CH}_3$ et $-\text{CH}_2-\text{C}_6\text{H}_5$ ne peuvent être classés qu'avec les atomes du deuxième rang (le groupe $-\text{H}$ étant minoritaire dans la préséance) :

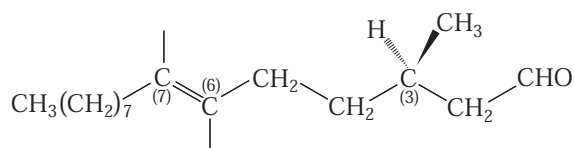


Aussi, la configuration (S) de la molécule B est :



● **438** **Lycée du Parc, Lyon**

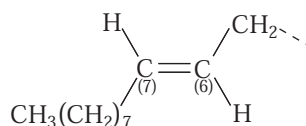
La molécule :



présente une isomérie (Z, E) sur les atomes $\text{C}_{(6)}$, $\text{C}_{(7)}$ et une isomérie (R, S) sur l'atome de carbone asymétrique $\text{C}_{(3)}$.

Isomérie (Z, E)

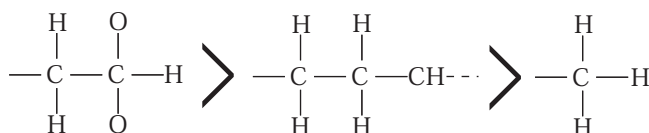
Pour les atomes $\text{C}_{(6)}$ et $\text{C}_{(7)}$:



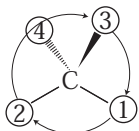
l'atome d'hydrogène présente la moindre importance dans la préséance de C.I.P. Aussi, les groupes « majoritaires » se trouvent de part et d'autre de l'axe de la liaison $\text{C} = \text{C}$, en conséquence de quoi la double liaison a la configuration (E).

Isomérie (R, S)

L'atome de carbone $\text{C}_{(3)}$ est entouré des groupes $-\text{CH}_2-\text{CHO}$, $\text{CH}_2-\text{CH}_2-\text{CH}\cdots$, $-\text{CH}_3$ dont la préséance ne peut être trouvée qu'avec les atomes du deuxième rang :



C'est pourquoi l'atome $C_{(3)}$ a pour environnement :

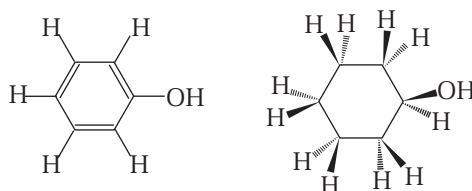


c'est-à-dire une configuration (R).

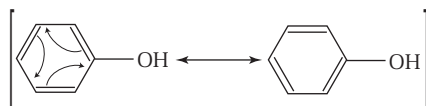
Finalement, la configuration absolue de cette molécule est : (3R, 6E).

● 439 ————— Concours de l'ENS

1. Dans le phénol, les six atomes de carbone sont de type AX_3 auquel cas les liaisons $C = C$, $C - H$ et $C - OH$ sont dans un même plan, tandis que la tétravalence des atomes de carbone de la molécule de cyclohexanol (atomes de type AX_4) situe chaque atome de carbone au centre d'un tétraèdre :

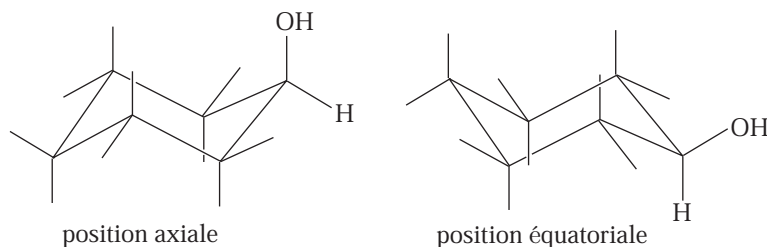


2. Dans le phénol, les doubles liaisons peuvent entrer en résonance :

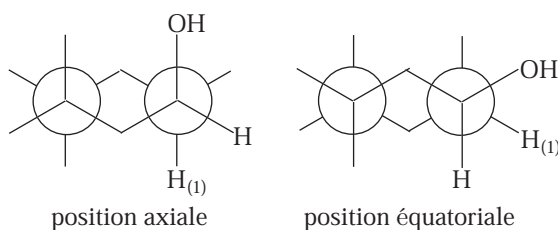


Or, pour que ce phénomène soit possible, il est nécessaire que six des orbitales π des atomes de carbone soient parallèles, ce qui impose sa géométrie plane à la molécule.

3. (a) Sous ses deux formes chaise, le cyclohexanol présente un groupe $-OH$ en position axiale ou équatoriale :



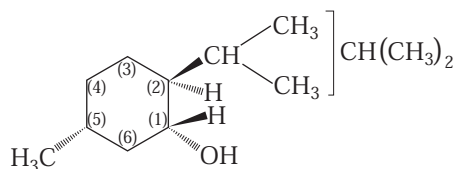
- (b) La représentation de Newman des deux formes chaise :



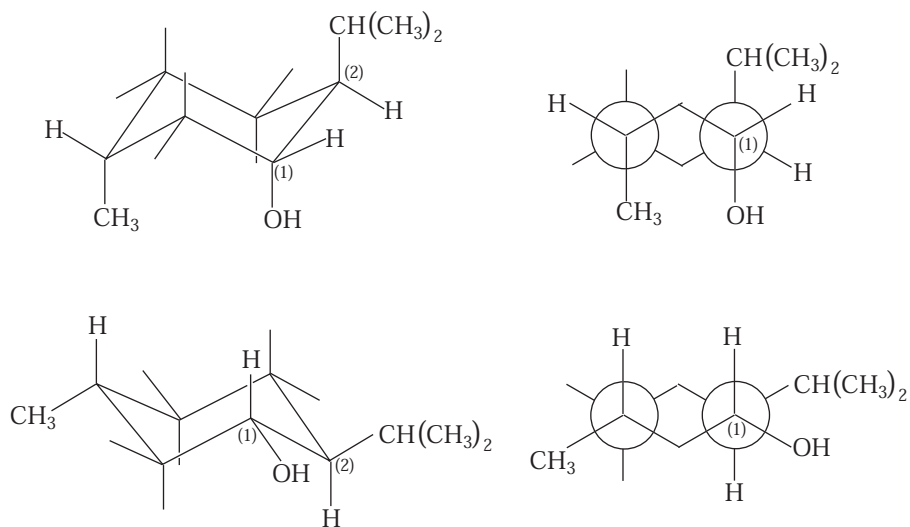
montre que c'est en position axiale que le groupe -OH est le plus éloigné de l'atome d'hydrogène $\text{H}_{(1)}$; il s'agit de la forme la plus stable.

● 440 ————— Concours des Mines-Ponts

1. Avant de représenter les conformations de la molécule, il convient de représenter les différents groupes (les atomes de carbone notés (1) et (2) sont asymétriques) :



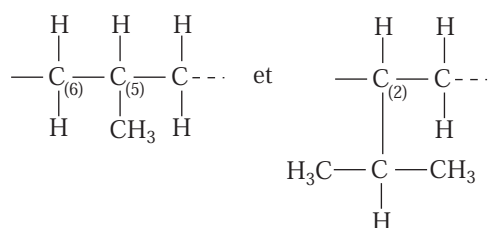
Les conformations chaise de cette molécule sont alors :



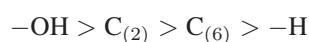
La première de ces configurations est la plus stable car elle éloigne davantage le groupe $\text{CH}(\text{CH}_3)_2$, le plus volumineux, des groupes -OH et -CH_3 .

2. Atome (1)

Outre les groupes -H et -OH , cet atome de carbone est aussi lié à d'autres atomes de carbone (dont (2)) :



L'atome $C_{(2)}$ est par conséquent le plus important dans la présence de C.I.P :



ce qui permet de représenter l'environnement de l'atome $C_{(1)}$:

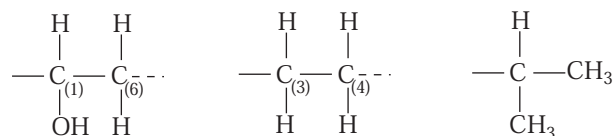


La permutation des groupes (1) et (4) permet de positionner ce dernier à « l'arrière » de la molécule de manière à présenter une configuration (S). Or, la permutation s'étant accompagnée d'une inversion de configuration :

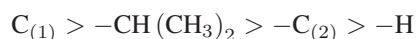
l'atome $C_{(1)}$ est de configuration (R).

Atome (2)

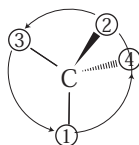
Outre l'atome d'hydrogène, des atomes de carbone ($C_{(1)}$, $C_{(2)}$) et $-\text{CH}(\text{CH}_3)_3$ sont liés à l'atome (1) :



Ce faisant, ces substituants suivent l'ordre de préséance de C.I.P :



d'où se déduit l'environnement de l'atome de carbone $C_{(2)}$:



La position du groupe (4) permet de déduire directement que :

l'atome $C_{(2)}$ est de configuration (S).

● 441 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. Soient n_C , n_H , n_{Cl} les nombres d'atomes de carbone, d'hydrogène et de chlore respectivement dans la formule de la molécule de masse molaire M . Soient également

$m_C = n_C M_C$, $m_H = n_H M_H$ et $m_{Cl} = n_{Cl} M_{Cl}$ les masses de carbone, d'hydrogène et de chlore dans la molécule. L'énoncé fournit les proportions :

$$x_C = \frac{m_C}{M} = 0,519 \Rightarrow \frac{n_C M_C}{M} = 0,519 \Rightarrow n_C = 0,519 \times \frac{M}{M_C}$$

$$\Rightarrow n_C = 0,519 \times \frac{92,5}{12} = 4 \text{ atomes de carbone}$$

$$x_H = \frac{m_H}{M} = 0,097 \Rightarrow \frac{n_H M_H}{M} = 0,097 \Rightarrow n_H = 0,097 \times \frac{M}{M_H}$$

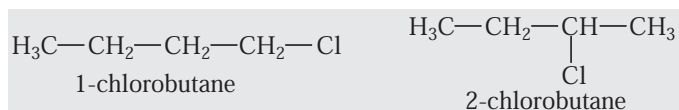
$$\Rightarrow n_H = 0,097 \times \frac{92,5}{1} \simeq 9 \text{ atomes d'hydrogène}$$

$$x_{Cl} = \frac{m_{Cl}}{M} = 0,384 \Rightarrow \frac{n_{Cl} M_{Cl}}{M} = 0,384 \Rightarrow n_{Cl} = 0,384 \times \frac{M}{M_{Cl}}$$

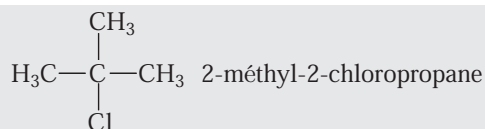
$$\Rightarrow n_{Cl} = 0,384 \times \frac{92,5}{35,5} = 1 \text{ atome de chlore}$$

Par suite, cette molécule a pour formule brute : C_4H_9Cl .

2. Cette molécule peut présenter une chaîne carbonée principale à 4 atomes de carbone :



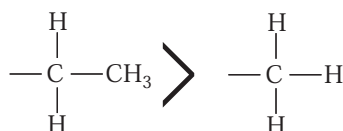
ou une chaîne carbonée principale à 3 atomes de carbone :



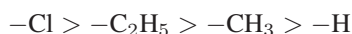
3. La seule molécule, parmi les précédentes, qui possède un atome de carbone asymétrique est le 2-dichlorobutane (l'atome de carbone $C_{(2)}$ est lié à 4 groupes différents). Dans cette molécule, l'atome $C_{(2)}$ est entouré des groupes $-Cl$, $-H$, $-C_2H_5$, $-CH_3$ dont la préséance au premier rang est :



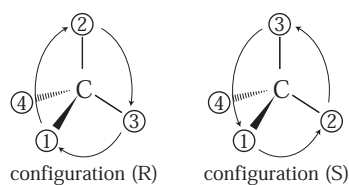
avec :



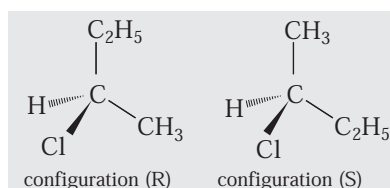
Par suite, la préséance suit la séquence :



Les configurations (R) et (S) étant représentés par :

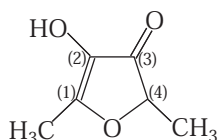


le 2-dichlorobutane se présente sous forme de deux énantiomères :

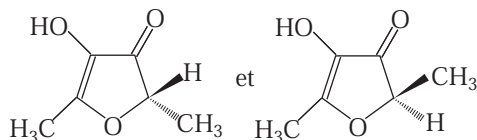


● 442 ————— Concours Centrale-Sup'elec

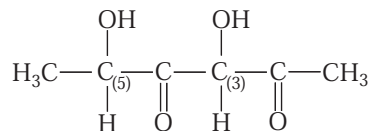
1. (a) Dans la molécule de furanéol :



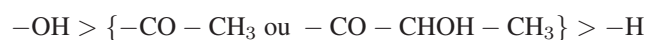
les atomes de carbone $C_{(1)}$, $C_{(2)}$ et $C_{(3)}$ sont plans parce qu'ils sont doublement liés à d'autres éléments. En revanche, l'atome tétraédrique $C_{(4)}$ est asymétrique auquel cas deux stéréoisomères peuvent être attendus :



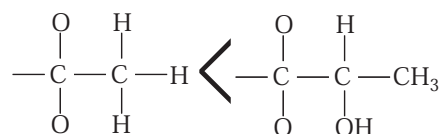
- (b) L'absence d'activité optique pour une molécule asymétrique peut être interprétée par la racémisation du milieu, qui contient autant de molécules d'une configuration que de molécules de configuration inverse.
2. (a) Dans la molécule apparaissent deux atomes de carbone asymétriques ($C_{(3)}$ et $C_{(5)}$) et, puisque la molécule ne présente aucun élément de symétrie, il est légitime d'en attendre quatre stéréoisomères.



- (b) L'atome de carbone $C_{(3)}$ est lié aux groupes $-H$, $-OH$, $-CO-CH_3$ et $-CO-CHOH-CH_3$ dont la présence peut déjà être partiellement établie à partir des atomes du premier rang :



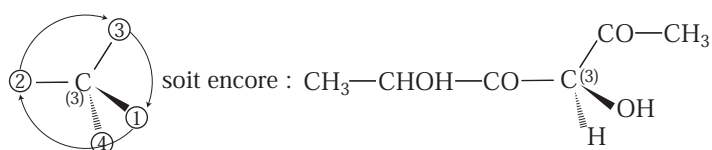
tandis qu'au troisième rang :



cette préséance conduit finalement à :



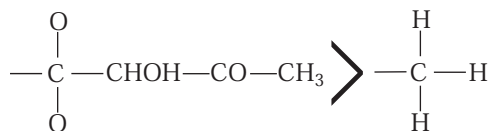
En disposant le groupe (4), c'est-à-dire $-\text{H}$, vers l'arrière de l'atome $\text{C}_{(3)}$, la configuration (3R) est celle qui permet de décrire la séquence (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) dans le sens des aiguilles d'une montre :



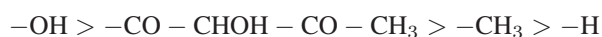
De même, l'atome de carbone asymétrique $\text{C}_{(5)}$ est lié aux groupes $-\text{H}$, $-\text{OH}$, $-\text{CH}_3$ et $-\text{CO} - \text{CHOH} - \text{CO} - \text{CH}_3$ dont l'ordre de priorité au premier rang suit :



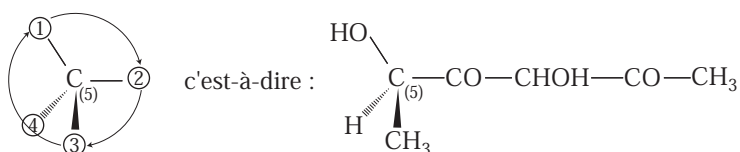
et celui au deuxième rang :



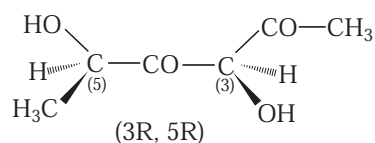
d'où découle la préséance :



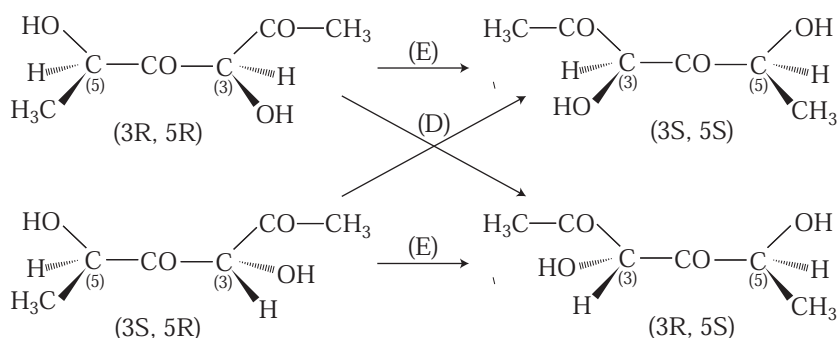
En disposant $-\text{H}$ vers l'arrière de l'atome $\text{C}_{(5)}$, la configuration (5R) est celle qui fait décrire la séquence (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) dans le sens des aiguilles d'une montre :



Finalement, la molécule de configuration (3R, 5R) a pour représentation :



(c) Les stéréoisomères (3R, 5R), (3S, 5S), (3S, 5R) et (3R, 5S) peuvent être représentés :



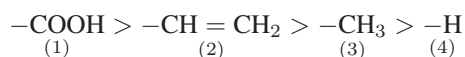
ce qui permet d'établir une liste de couples d'énantiomères (*E*) et de diastéréoisomères (*D*) :

énantiomères : (3R, 5R)/(3S, 5S) et (3S, 5R)/(3R, 5S)

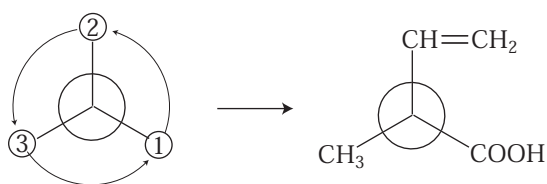
diastéréoisomères : (3R, 5R)/(3S, 5R) – (3S, 5S)/(3R, 5S) –
(3R, 5R)/(3R, 5S) – (3S, 5R)/(3S, 5S)

● 443 ————— Lycée Henri Wallon, Valenciennes

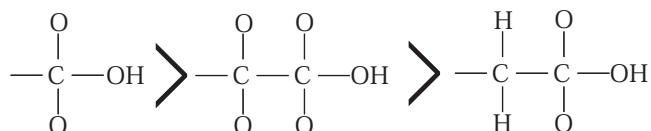
1. Le carbone asymétrique est entouré de quatre groupes dont la préséance suit la séquence :



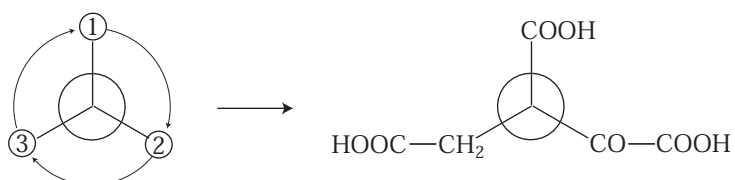
Dans la représentation de Newman, en éclipsant le groupe de moindre importance ($-\text{H}$), la configuration (S) est réalisée lorsque la séquence (1) \rightarrow (2) \rightarrow (3) est suivie dans le sens inverse des aiguilles d'une montre :



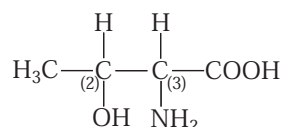
2. Dans le composé proposé par l'énoncé, l'atome de carbone asymétrique est entouré, en plus de $-\text{H}$, des substituants $-\text{COOH}$, $-\text{CO}-\text{COOH}$ et $-\text{CH}_2-\text{COOH}$:



En procédant comme précédemment, la représentation de Newman de la configuration (R) correspond à une séquence (1) → (2) → (3) décrite dans le sens des aiguilles d'une montre :

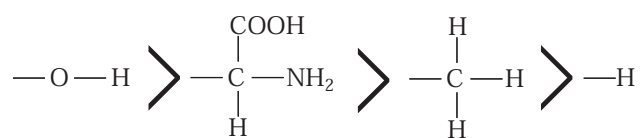


3. (a) La molécule :

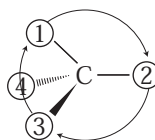


possède deux atomes de carbone asymétriques ; il s'agit des atomes $\text{C}_{(2)}$ et $\text{C}_{(3)}$:

(b) L'atome de carbone $\text{C}_{(2)}$ est entouré de $-\text{OH}$, $-\text{H}$, CH_3 et $-\text{C}_{(3)}$:

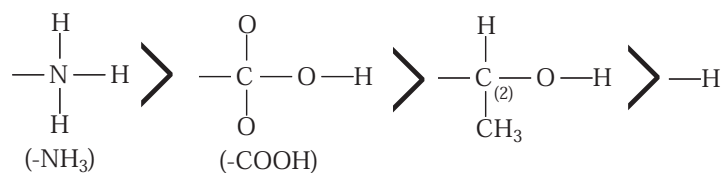


auquel cas cet atome a pour environnement :

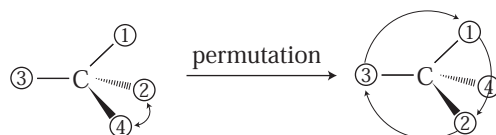


ce qui lui donne la configuration (2R).

De même, l'atome de carbone $\text{C}_{(3)}$ est lié aux groupes $-\text{NH}_2$, $-\text{COOH}$, $-\text{H}$ et $-\text{C}_{(2)}$:

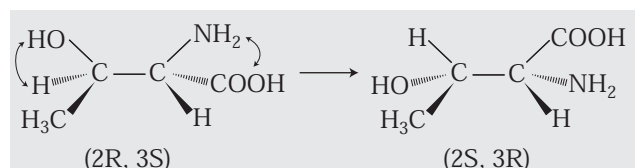


qui se répartissent de la manière suivante :



Après permutation des groupes (2) et (4), visant à positionner le groupe (4) vers l'arrière de la figure, le carbone $C_{(3)}$ présente une configuration (R). Or, toute permutation s'accompagnant d'une inversion de configuration, il s'ensuit que $C_{(3)}$ est de configuration (S). Par suite, la molécule a pour configuration : (2R, 3S).

Pour représenter le diastéréoisomère (2S, 3R), il suffit d'inverser la configuration de chacun des atomes $C_{(2)}$ et $C_{(3)}$, par exemple en permutant, sur chacun de ces atomes, la position de deux substituants :



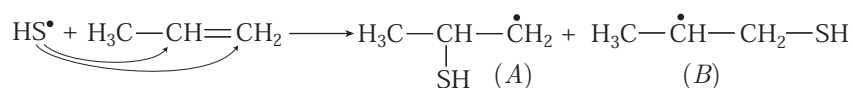
● 444 ————— Concours ESIM

Le mécanisme de l'addition (radicalaire) de H_2S sur le propène comporte trois phases :

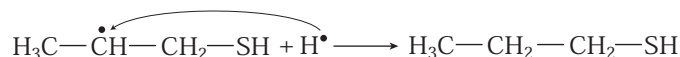
- La phase d'initiation :



- L'addition de HS^\bullet sur la double liaison de $H_3C - CH = CH_2$. *A priori*, deux produits sont susceptibles de se former :



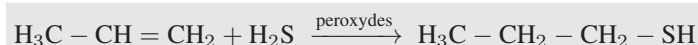
Cependant, dans le composé (B), le radical est plus substitué que dans le composé (A), ce qui le stabilise grâce aux effets inductifs électrodonneurs des substituants. Par suite, le composé (B) est obtenu majoritairement et réagit ensuite avec H^\bullet :



- La phase de terminaison, au cours de laquelle les radicaux HS^\bullet disparaissent :



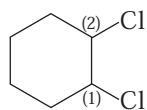
Finalement, l'équation-bilan de cette réaction s'écrit :



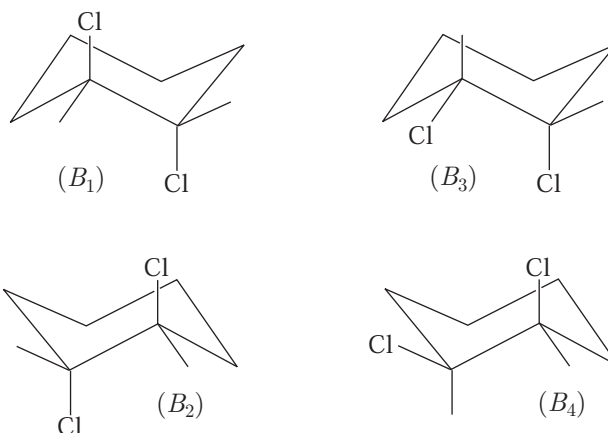
Quant à la régiosélectivité de la réaction (addition anti-Markovnikov : le thiol le moins substitué est obtenu majoritairement), elle est justifiée par la stabilisation de l'intermédiaire (A).

● 445 ————— Concours ENSI

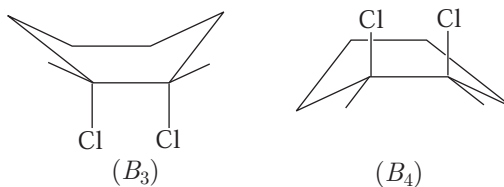
1. Le 1,2-dichloro cyclohexane présente deux atomes de carbone asymétriques :



en raison de quoi quatre stéréoisomère sont attendus :

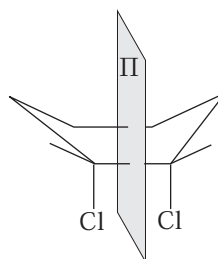


Les composés (B_1) et (B_2) sont énantiomères car ils sont images spéculaires mais ne sont pas superposables. Les composés (B_1) et (B_2) sont en outre diastéréoisomères des composés (B_3) et (B_4) , dont ils ne sont pas images spéculaires. Enfin, les composés (B_3) et (B_4) sont identiques, ce qui peut être mis en évidence grâce à leur conformation chaise :



qui sont superposables.

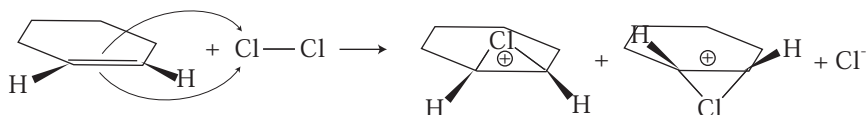
- La représentation de la molécule (B_3) , dans sa conformation bateau révèle la présence d'un plan de symétrie (Π) :



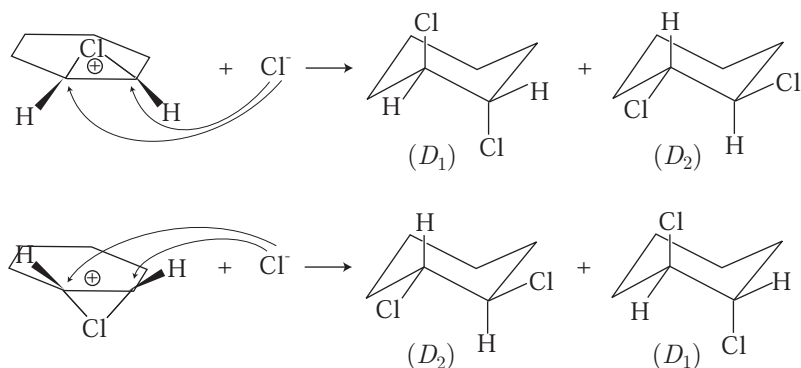
en raison de quoi cette molécule est inactive sur la lumière polarisée.

- En milieu dépourvu de peroxydes, l'addition de Cl_2 sur la liaison éthylénique du cyclohexène se conduit en deux étapes :

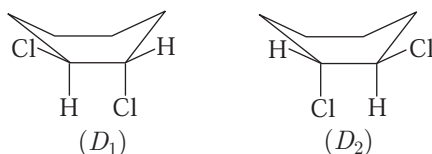
- Formation d'un ion chloronium ponté :



- Addition *anti* de l'ion Cl^- sur cet ion :



Ce mécanisme montre que la réaction conduit exclusivement aux composés (D_1) et (D_2), dont les conformations bateau révèlent l'énantiomérisation :



Un tel mélange (de deux énantiomères en quantité égale) est qualifié de racémique.

● 446 ————— Lycée Poincaré, Nancy

1. En présence de peroxydes, l'addition de $\text{H} - \text{Br}$ sur la liaison $\text{C} = \text{C}$ est radicalaire et, à ce titre, sa stéréochimie est de type anti-Markovnikov (l'halogénoalcane le moins substitué est obtenu majoritairement) :

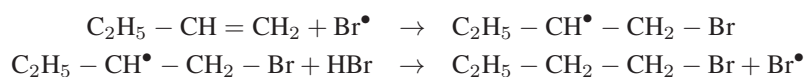


2. Ce faisant, le composé (A) s'appelle le :

1-chlorobutane

3. Le mécanisme de cette réaction se déroule en trois phases :

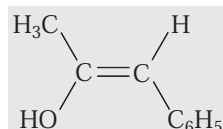
- Phase d'initiation : $\text{HBr} \rightarrow \text{H}^\bullet + \text{Br}^\bullet$.
- Phase de propagation : l'addition de Br^\bullet s'effectue de manière à produire le radical le plus substitué (car stabilisé par des effets inductifs électrodonneurs) :



- Phase de terminaison : $\text{Br}^\bullet + \text{Br}^\bullet \rightarrow \text{Br}_2$

● **447** **Lycée Fabert, Metz**

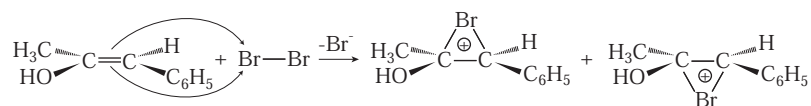
1. Le (Z)-2-hydroxy-1-phénylpro-1-ène a pour formule :



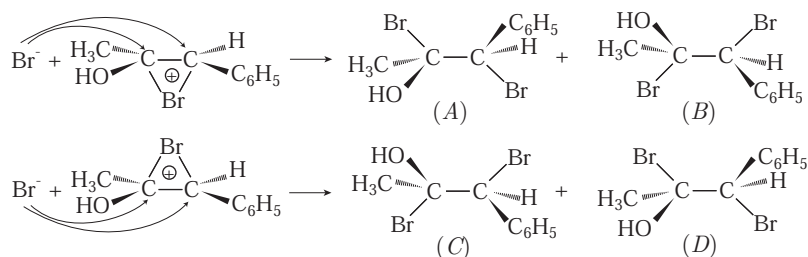
dans laquelle les groupes « prioritaires » (selon la présence de C.I.P.) : $-\text{OH}$ et $-\text{C}_6\text{H}_5$, sont situés du même côté de la double liaison $\text{C}=\text{C}$.

2. (a) En milieu polaire, l'addition de Br_2 suit un mécanisme d'addition électrophile en deux étapes :

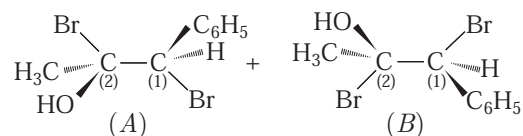
- Formation d'un ion bromonium ponté :



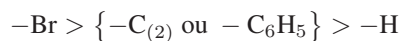
- Addition *anti* de Br^- sur l'ion bromonium :



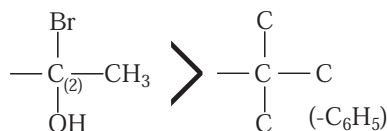
- (b) Les molécules (A), (D) et (B), (C) étant identiques, il n'existe que deux stéréoisomères différents : les molécules (A) et (B) :



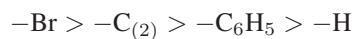
L'atome de carbone $\text{C}_{(1)}$ est lié aux groupes $-\text{Br}$, $-\text{C}_{(2)}$, $-\text{C}_6\text{H}_5$ et $-\text{H}$ qui suivent, au premier rang, la préséance :



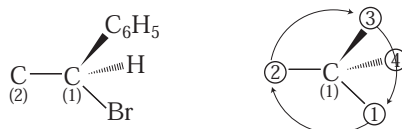
avec, au deuxième rang :



ce qui donne finalement la séquence :

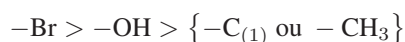


Par conséquent, l'atome $\text{C}_{(1)}$ a pour environnement, dans la molécule (A) :

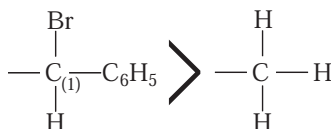


et a donc pour configuration (R).

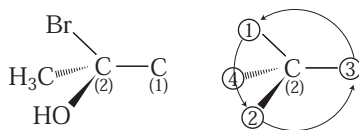
De même, l'atome $\text{C}_{(2)}$ est lié aux groupes $-\text{Br}$, $-\text{OH}$, $-\text{C}_{(1)}$ et $-\text{CH}_3$, dont la préséance est, au premier rang :



Au rang supérieur, on observe la préséance :



c'est-à-dire, finalement : $-\text{Br} > -\text{OH} > -\text{C}_{(1)} > -\text{CH}_3$. Aussi, l'atome $\text{C}_{(2)}$ de la molécule A a pour environnement :

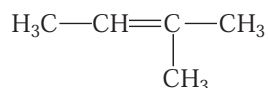


et donc pour configuration (S). C'est pourquoi les énantiomères issus de la bromation du (Z)-2-hydroxy-1-phénylprop-1-ène sont de configuration :

(1R, 2S) pour A et (1S, 2R) pour B

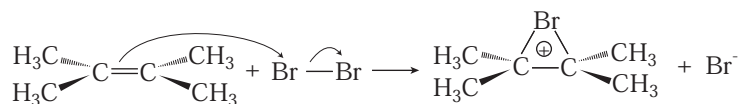
● 448 ————— Concours de l'E.N.S.

1. En milieu dépourvu de peroxydes, l'addition du dibrome sur le 2,3-diméthylbut-2-ène :

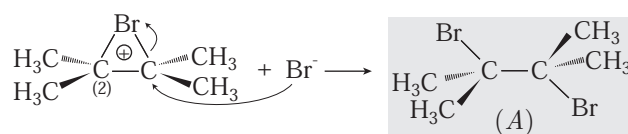


admet un mécanisme réactionnel en deux étapes :

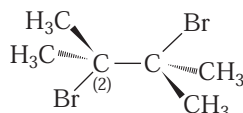
- Formation d'un ion bromonium ponté :



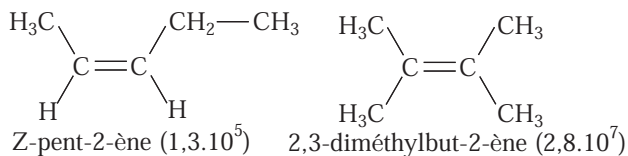
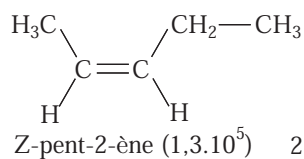
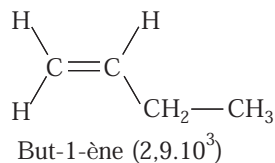
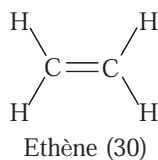
- Addition *anti* de l'ion bromure :



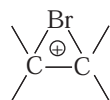
Remarque – Le composé dibromé (A) est unique car, au cours de la deuxième étape, la fixation de Br^- sur l'atome de carbone $\text{C}_{(2)}$ aurait produit le composé :



2. La réactivité comparée des alcènes :

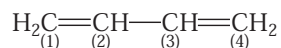


montre que la réaction est d'autant plus favorisée que la double liaison $\text{C} = \text{C}$ est substituée. Ce constat tient à la formation de l'ion bromonium :



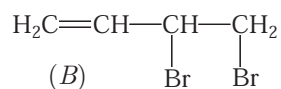
stabilisé par des effets inductifs électrodonneurs des substituants $-\text{CH}_3$ et $-\text{CH}_2 - \text{CH}_3$.

3. L'action de Br_2 sur le buta-1,3-diène :

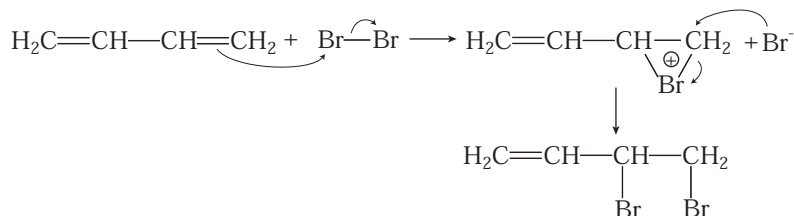


peut évoluer vers deux produits :

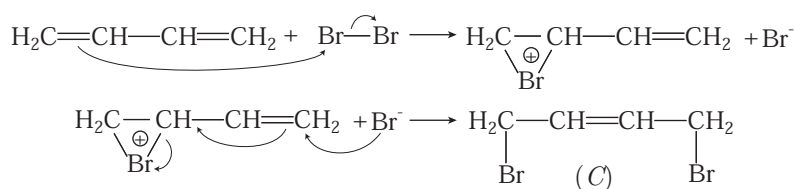
- le 3,4-dibromobut-1-ène (B), par addition sur la double liaison $\text{C} = \text{C}$ portée par les atomes $\text{C}_{(3)}$ et $\text{C}_{(4)}$:



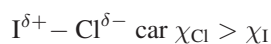
Cette réaction d'addition s'opère en deux étapes :



- le 1,4-dibromobut-2-ène (*C*) lorsque l'addition de Br_2 s'effectue sur les atomes de carbone $\text{C}_{(1)}$ et $\text{C}_{(4)}$:

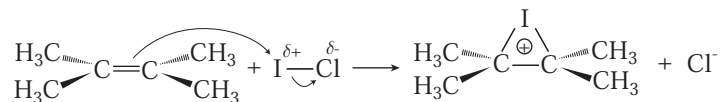


4. L'électronégativité du chlore étant supérieure à celle de l'iode, la molécule ICl est polarisée :

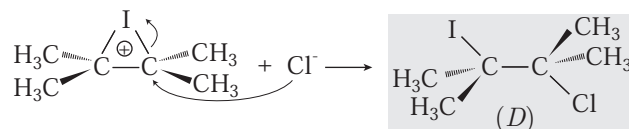


ce qui justifie le mécanisme de l'addition de ICl sur le 2,3-méthylbut-2-ène :

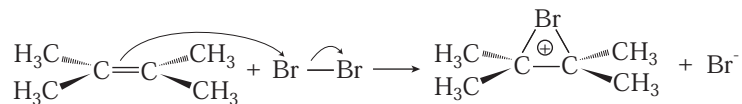
- Formation d'un ion iodonium ponté :



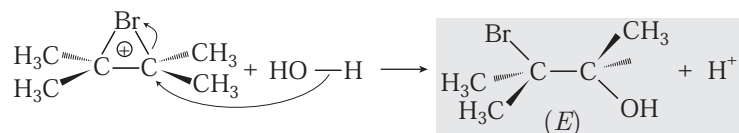
- Addition *anti* de l'ion chlorure :



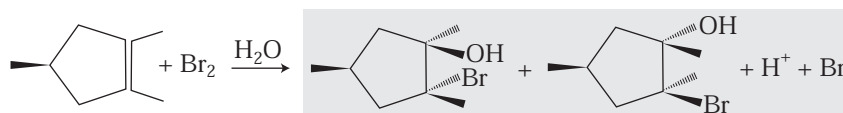
5. (a) En solvant aqueux, la première étape de la formation de l'alcène est identique à celle obtenue en solvant non aqueux (formation d'un ion bromonium ponté) :



En revanche, la deuxième étape consiste en une réaction de l'ion bromonium avec l'eau :



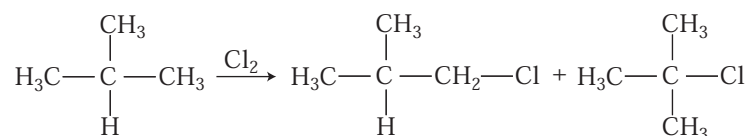
- (b) Pour éviter qu'une telle réaction ne se produise, il convient de réaliser l'addition dans un solvant dépourvu d'hydrogène « mobile », comme dans le tétrachlorure de carbone CCl_4 .
6. Comme l'illustre le mécanisme précédent, l'action de l'eau sur l'ion bromonium s'apparente à une addition *anti* du groupe $-\text{OH}$. C'est pourquoi l'action du dibrome sur le 1,2,4-triméthylcyclopentène produit deux stéréoisomères :



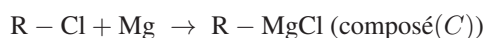
Par conséquent, le produit (*F*) proposé par l'énoncé ne peut être obtenu par addition de Br_2 sur le 1,2,4-triméthylcyclopentène.

● 449 ————— Lycée Hoche, Versailles

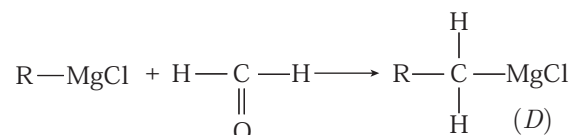
La monochloration du méthylpropane peut produire deux isomères :



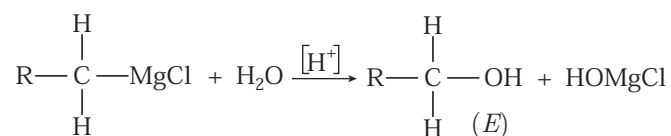
que l'on écrira : $\text{R}-\text{Cl}$. L'action du composé chloré sur le magnésium :



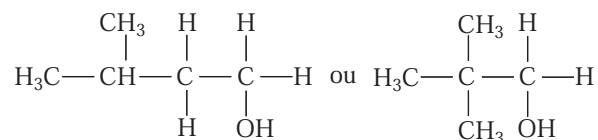
produit un organomagnésien susceptible de réagir avec le méthanal :



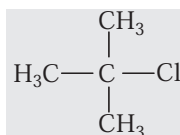
dont l'hydrolyse fournit un alcool primaire :



Compte tenu des isomères possibles pour (*C*), le composé (*E*) se présente sous deux formes :



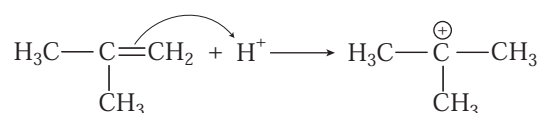
Dans ces alcools, seul le premier peut donner lieu à une déshydratation (départ de $-H$ et $-OH$ liés à des atomes de carbone voisins). Par conséquent, le deuxième alcool est celui issu de (B), dont la formule est :



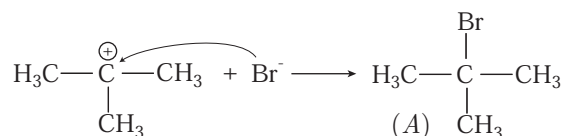
● 450 ————— Lycée du Parc, Lyon

1. Dans les conditions d'une addition électrophile, l'addition de HBr sur le méthylpropène s'effectue en deux étapes :

- Addition de H^+ sur la liaison $C = C$, avec formation du carbocation le plus stable (et donc le plus substitué) :

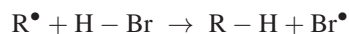


- Addition de Br^- sur le carbocation :

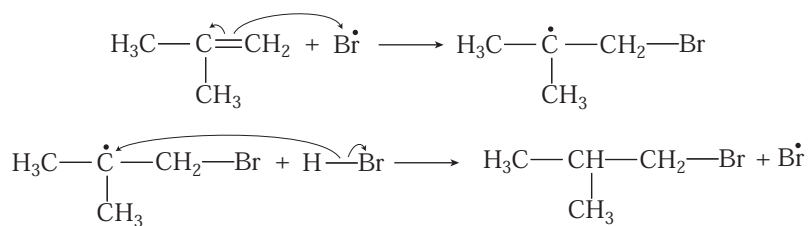


2. En présence d'un initiateur de radicaux libres (R^\bullet), cette addition se réalise en trois phases :

- Phase d'initiation :

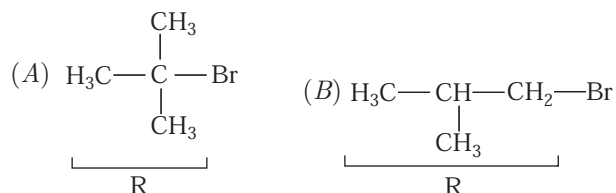


- Phase de propagation (avec formation du radical le plus stable) :

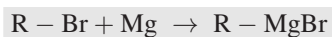


- Phase de terminaison : $\text{Br}^\bullet + \text{Br}^\bullet \rightarrow \text{Br}_2$.

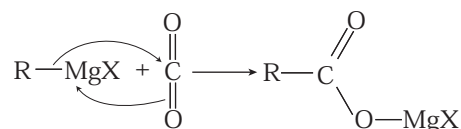
3. Soit $R - \text{Br}$ la formule générique des composés bromés (A) et (B) :



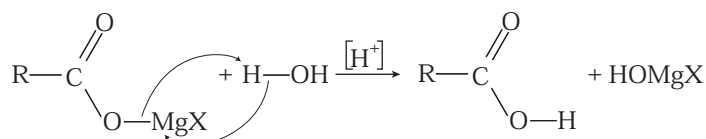
L'action du magnésium sur les composés bromés conduit à un organomagnésien :



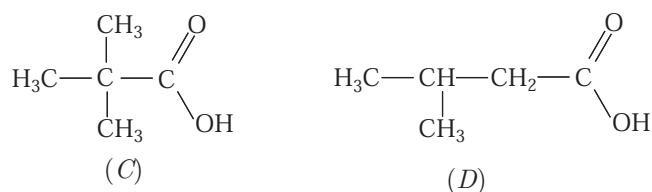
lequel réagit avec CO_2 :



L'acide chlorhydrique hydrolyse, en milieu aqueux, le produit ainsi obtenu :



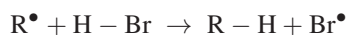
C'est pourquoi, appliquée aux composés (A) et (B), cette suite de réactions produit deux acides carboxyliques :



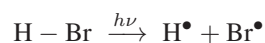
● 451 ————— Lycée Fabert, Metz

L'addition radicalaire de HBr sur le propène, $\text{H}_3\text{C} - \text{CH} = \text{CH}_2$ se déroule en trois phases :

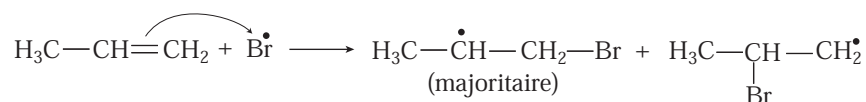
- La phase d'initiation pendant laquelle un radical R^\bullet réagit sur HBr :



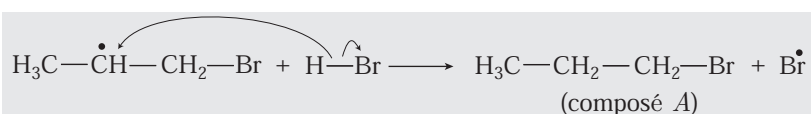
Remarque – Par voie photochimique, les photons produisent directement les radicaux H^\bullet et Br^\bullet :



- La phase de propagation pendant laquelle le radical Br^\bullet s'additionne au propène ; au cours de cette addition se produit majoritairement le radical le plus substitué car stabilisé par effet inductif électrodonneur :

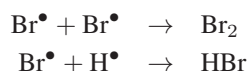


Le radical ainsi produit réagit sur $\text{H} - \text{Br}$:

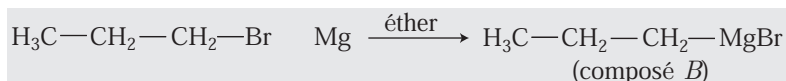


L'halogénoalcane le moins substitué est alors principalement obtenu (effet Karasch).

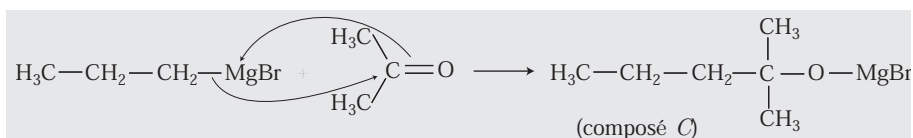
- La phase de terminaison à l'issue de laquelle les radicaux disparaissent :



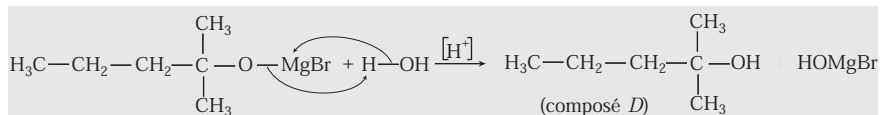
L'action du magnésium sur le composé (A) produit le bromure de propylmagnésium (composé (B)) :



L'organomagnésien ainsi produit réagit avec l'acétone en produisant un bromure d'alkylmagnésium :

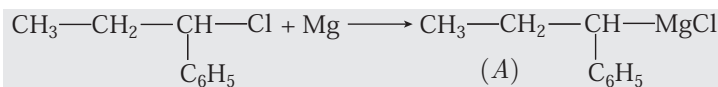


lequel s'hydrolyse en alcool tertiaire :

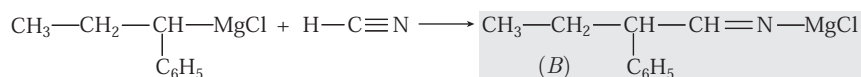


● 452 ————— Concours Vétô

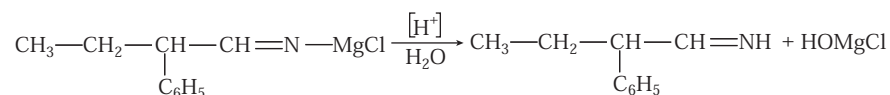
1. Le magnésium réagit sur le 1-chloro-1-phénylpropane pour donner un chlorure d'alkyl-magnésium :

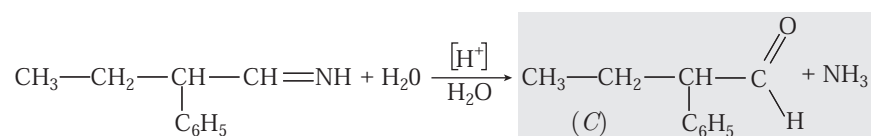


lequel réagit avec l'éthanenitrile $\text{H}-\text{C}\equiv\text{N}$:

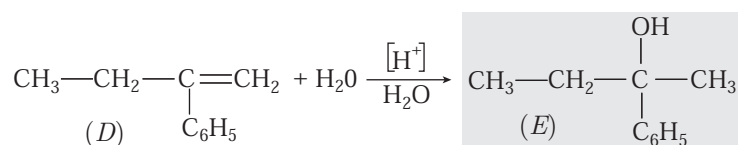


L'hydrolyse acide du composé (B) produit, dans un premier temps, une imine qui s'hydrolyse à son tour en cétone :

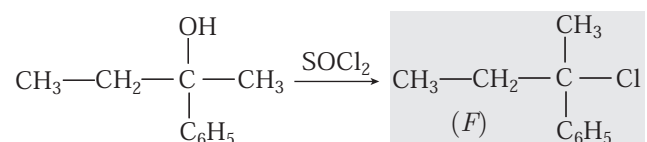




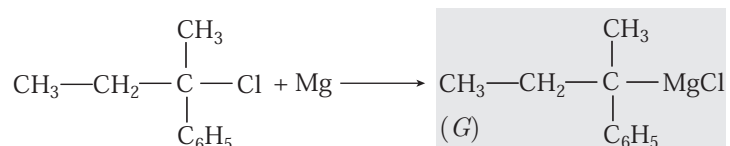
La fonction aldhyde de (C) justifie sa réaction avec la 2,4-dinitrophénylhydrazine. L'hydratation, en milieu acide, de l'alcène (D) fournit l'alcool le plus substitué, conformément à la règle de Markovnikov :



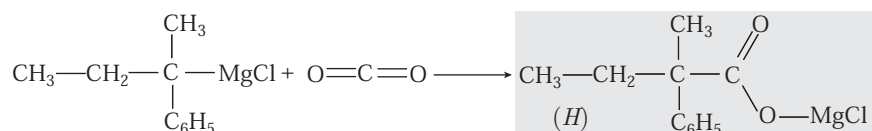
Cet alcool réagit avec SOCl_2 pour produire un chlorure d'alkyle :



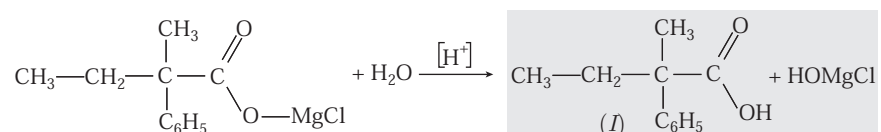
qui fournit un organomagnésien par action du magnésium :



La mise en présence de l'organomagnésien avec CO_2 conduit à :



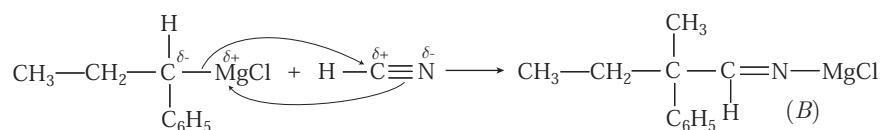
dont l'hydrolyse acide fournit un acide carboxylique :



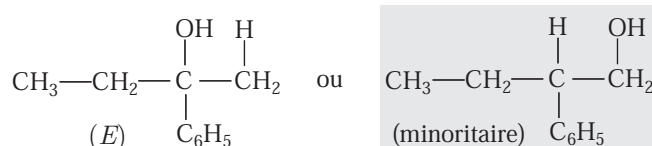
2. La préparation d'un organomagnésien, par action du magnésium sur un chlorure d'alkyle R - Cl , doit se produire en milieu rigoureusement anhydre, à défaut de quoi l'organomagnésien produit est immédiatement hydrolysé, conformément à l'équation-bilan :



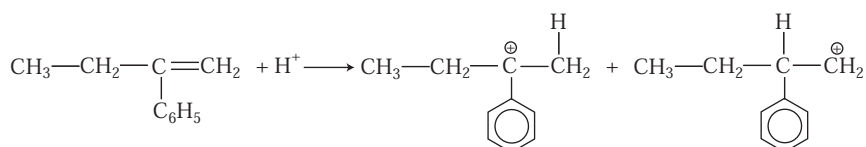
3. La liaison C - MgCl est polarisée, de même que la liaison $\text{C} \equiv \text{N}$, ce qui justifie la formation du composé (B) :



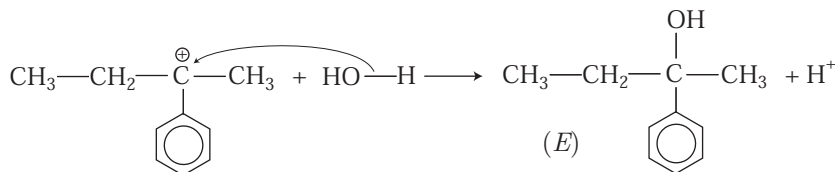
4. L'addition d'une molécule d'eau sur la liaison éthylénique de (D) pourrait conduire *a priori* à deux alcools :



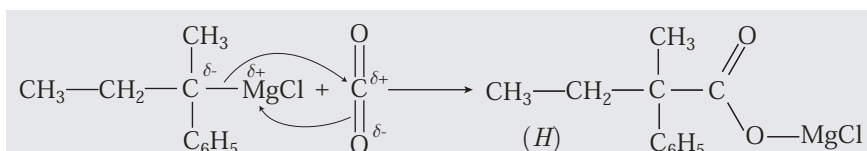
La première étape de cette addition commence par l'addition d'un ion H^+ sur la double liaison $\text{C}=\text{C}$:



Le premier carbocation est stabilisé non seulement par des effets inductifs électrodonneurs, mais surtout par l'effet mésomère du groupe phényle ce qui justifie la règle de Markovnikov lors de l'addition de l'eau :

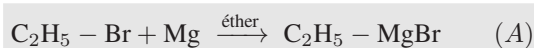


5. Le composé (H) est obtenu par action de l'organomagnésien (G) sur CO_2 :

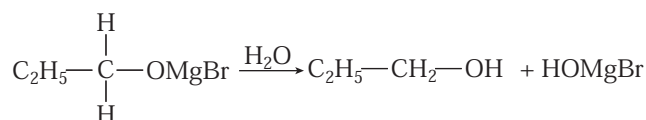


● 453 ————— Lycée Roosevelt, Reims

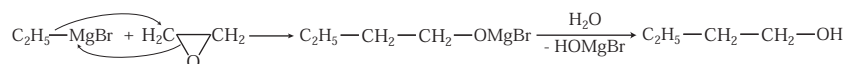
1. Le magnésium réagit avec $\text{C}_2\text{H}_5\text{---Br}$ pour former le bromure d'éthyl magnésium :



2. Pour obtenir un alcool primaire, il convient de faire agir l'organomagnésien sur le méthanal :



ou sur l'oxyde d'éthylène :

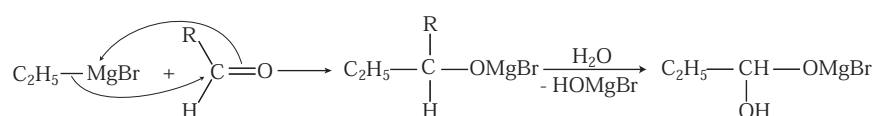


C'est pourquoi :

B est le méthanal ou l'oxyde d'éthylène.

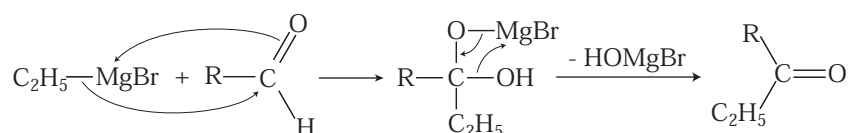
3. Pour obtenir un alcool secondaire avec un organomagnésien, trois méthodes conviennent :

- Action sur un aldéhyde (autre que le méthanal) :

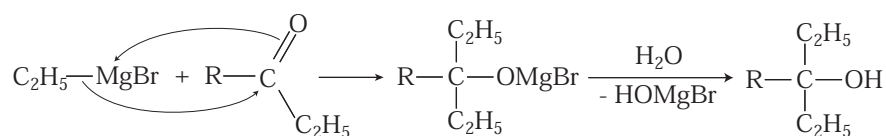


Cependant, cette réaction ne requiert qu'un équivalent d'organomagnésien pour un équivalent d'aldéhyde.

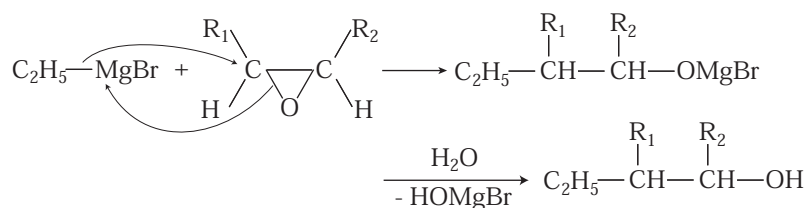
- Action d'un acide carboxylique :



La cétone ainsi produite réagit à nouveau sur l'organomagnésien :



- Action sur un époxyde disubstitué :



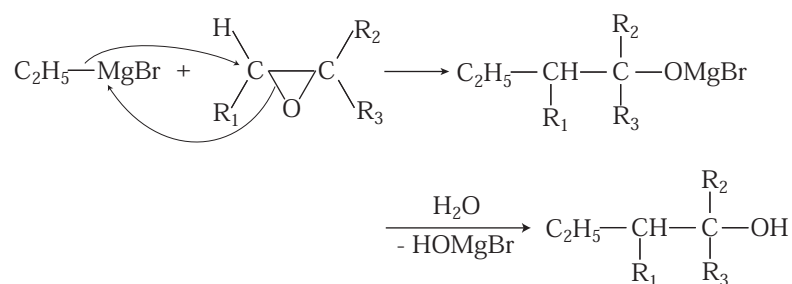
À nouveau, cette réaction sur l'époxyde ne requiert qu'un équivalent d'organomagnésien.

Finalement :

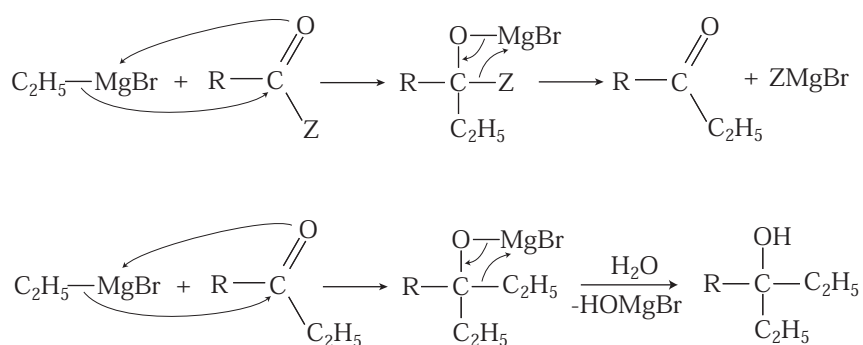
C est un acide carboxylique (autre que l'acide méthanoïque).

4. Un alcool tertiaire s'obtient par action d'un organomagnésien sur :

- un époxyde trisubstitué :



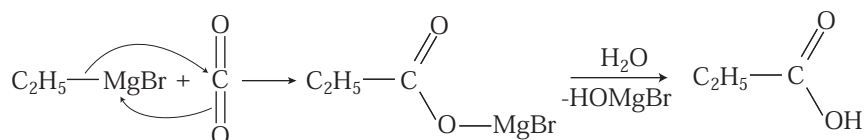
- un dérivé d'acide (chlorure d'acyle, anhydride d'acide ou ester) :



De ces deux synthèses seule la deuxième requiert deux fois plus d'organomagnésien que de dérivé d'acide. C'est pourquoi :

D est un dérivé d'acide : chlorure d'acyle, ester, ou anhydride d'acide.

5. Un acide carboxylique s'obtient par action d'un organomagnésien sur le dioxyde de carbone :

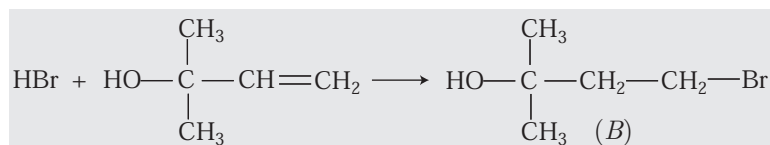


en raison de quoi :

E est le dioxyde de carbone.

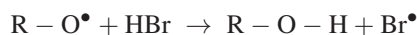
● 454 ————— Concours National DEUG

1. (a) L'addition radicalaire de HBr sur une double liaison produit majoritairement l'halogénoalcane le moins substitué (effet Karasch) :

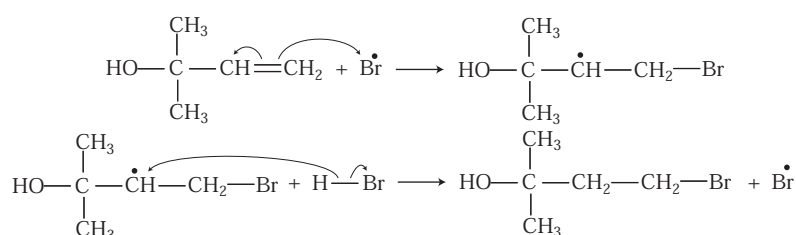


(b) Le mécanisme de cette réaction comporte trois phases :

- La phase d'initiation pendant laquelle $\text{H}-\text{Br}$ réagit sur un peroxyde $\text{R}-\text{O}^\bullet$:



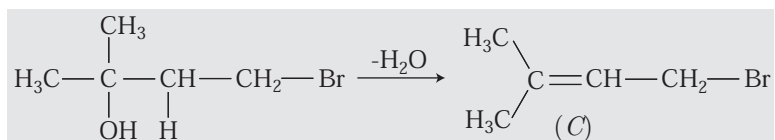
- La phase de propagation au cours de laquelle la double liaison $\text{C}=\text{C}$ subit une addition :



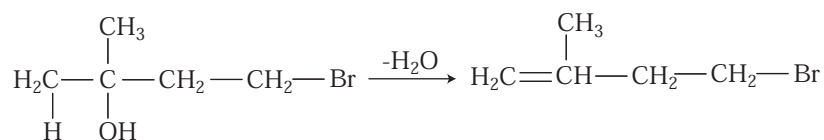
- La phase de terminaison, à l'issue de laquelle disparaissent les radicaux libres :



2. La déshydratation de (B) consiste en un départ de H et de OH voisins, qui peut *a priori* former deux alcènes :

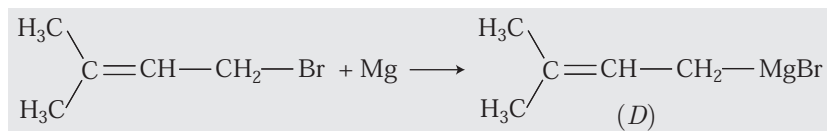


et :

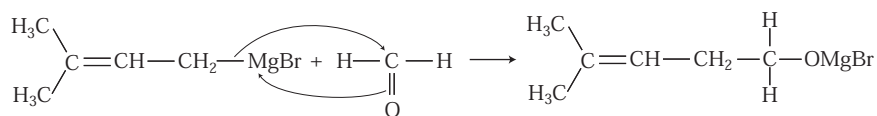


Or, d'après l'énoncé, le produit (C) est l'alcène le plus substitué, c'est-à-dire le premier.

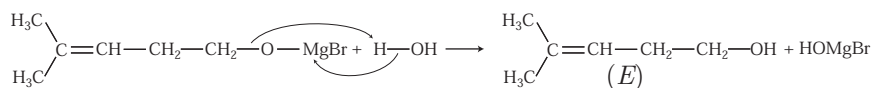
3. L'action du magnésium sur un composé bromé fournit un organomagnésien :



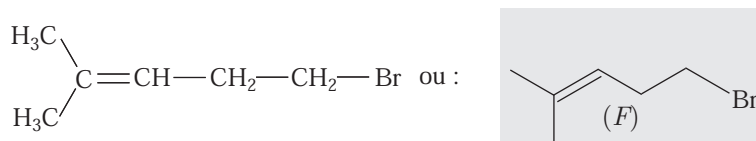
4. L'organomagnésien peut ensuite réagir avec le group carbonyle du méthanal :



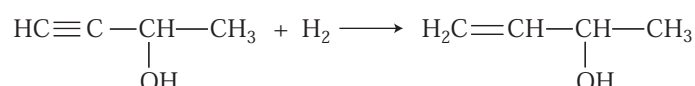
L'hydrolyse de ce produit assure ensuite la formation d'un alcool primaire :



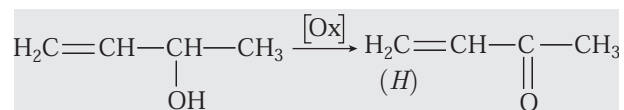
5. La substitution de $-\text{OH}$ par Br produit le composé bromé :



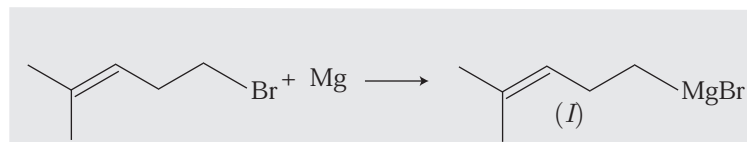
6. L'hydrogénation partielle du composé (G) : $\text{HC} \equiv \text{C} - \text{CH}_2 - \text{OH}$ produit un alcène :



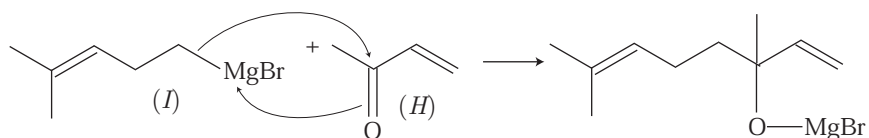
qui présente également une fonction alcool secondaire qui peut être oxydée en cétone. Le spectre d'absorption I.R. confirme du reste que seule la cétone est obtenue :



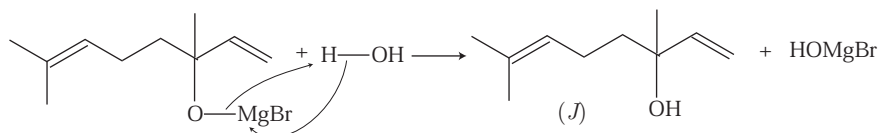
Le magnésium réagit sur le composé (F) en formant un organomagnésien :



7. Quant à l'organomagnésien (I), il peut réagir avec le groupe carbonyle du composé (H) :



Le bromure d'alkylmagnésium ainsi obtenu s'hydrolyse en alcool secondaire :

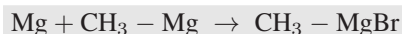


Le composé (*J*), appelé linalol, correspond finalement au 3-hydroxy-3,7-diméthyl-octa-1,6-diène.

● 455 ————— Concours ENSI

1. Préparation et dosage du bromure de méthylmagnésium

Le magnésium et le bromométhane, dans l'éther (comme solvant anhydre), peut produire un organomagnésien, conformément à l'équation-bilan :



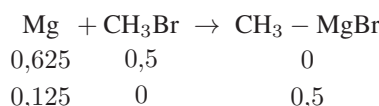
Compte tenu des masses molaires :

$$M_{\text{Mg}} = 24 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1} \text{ et } M_{\text{CH}_3\text{Br}} = M_{\text{C}} + 3M_{\text{H}} + M_{\text{Br}} = 12 + 3 \times 1 + 80 = 95 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$$

l'introduction de 15 g de Mg et de 47,5 g correspond aux quantités :

$$n_1 = \frac{15}{24} = 0,625 \text{ mole de Mg et } n_2 = \frac{47,5}{95} = 0,5 \text{ mole de CH}_3\text{Br}$$

Aussi, si la réaction était totale, elle aurait pour bilan :



et produit donc :

$$n_2 = 0,5 \text{ mole de CH}_3 - \text{MgBr} \quad (1)$$

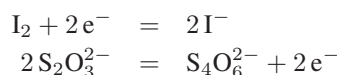
2. Dosage du bromure de méthyl magnésium formé

(a) Si la solution de diiode contenait de l'eau, l'introduction de bromure de méthyle magnésium se traduirait par une hydrolyse :



visant à transformer l'organomagnésien en méthane.

(b) Les couples I_2/I^- et $\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ associés aux réactifs I_2 et $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ ont pour demi-équations :



d'où découle l'équation-bilan de la réaction du dosage du diiode :



L'équivalence de cette réaction est observée en introduisant de l'empois d'amidon qui se colore en présence de I_2 et se décolore donc à l'équivalence.

(c) Dans chaque litre de solution benzénique de diiode (de masse molaire moléculaire $M_{\text{I}_2} = 2 \times 126 = 252 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$) contient 40 g de I_2 , c'est-à-dire $\frac{40}{252} = 0,159$ mole de I_2 . Par suite, cette solution a pour concentration : $C = 0,159 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$, ce qui signifie que 20 mL de cette solution contient :

$$n_3 = 20 \cdot 10^{-3} \times C = 3,17 \cdot 10^{-3} \text{ mole de I}_2$$

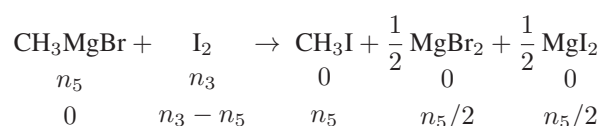
En outre, l'équivalence de la réaction (2) est atteinte pour un volume $V = 30,5$ mL de solution de thiosulfate à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, c'est-à-dire pour :

$$n_4 = 30,5 \cdot 10^{-3} \times 0,1 = 3,05 \cdot 10^{-3} \text{ mole de } \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$$

Par suite, la quantité d'iode (n_{restant}) dosée par la réaction (2) vérifie :

$$n_{\text{restant}} = \frac{n_4}{2} = 1,525 \cdot 10^{-3} \text{ mole de } \text{I}_2$$

Le bilan de la réaction de I_2 sur CH_3MgBr s'écrit alors :



ce qui permet l'identification :

$$n_{\text{restant}} = n_3 - n_5 \Rightarrow n_5 = n_3 - n_{\text{restant}} = 3,17 \cdot 10^{-3} - 1,525 \cdot 10^{-3} = 1,645 \cdot 10^{-3} \text{ mol}$$

Ainsi, 1 mL de la solution d'organomagnésien contenait $n_5 = 1,645 \cdot 10^{-3}$ mole de CH_3MgBr , dont la concentration vaut par conséquent :

$$[\text{CH}_3\text{MgBr}] = \frac{1,645 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 1,645 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

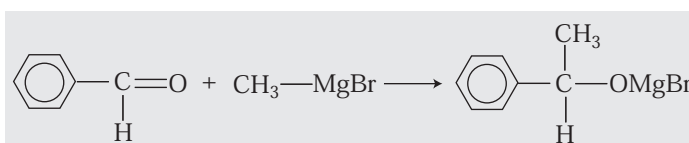
Ce résultat permet de connaître la quantité de CH_3MgBr produite dans 250 mL de mélange réactionnel :

$$n_6 = 250 \cdot 10^{-3} \times 1,645 = 0,411 \text{ mol}$$

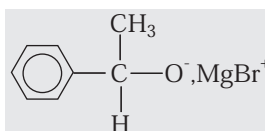
ce qui, compte tenu du résultat (1), fournit le rendement η de la réaction de synthèse de l'organomagnésien :

$$\eta = \frac{n_6}{n_2} = \frac{0,411}{0,5} \Rightarrow \eta = 82,2\%$$

- (a) La réaction du benzaldhyde avec le bromure de méthyl magnésium produit un alcoolate de bromure-magnésium :

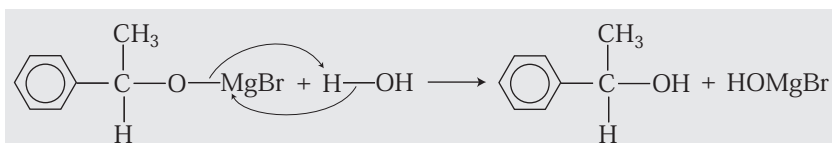


- (b) Sous forme ionique, l'alcoolate de bromure-magnésium s'écrit :



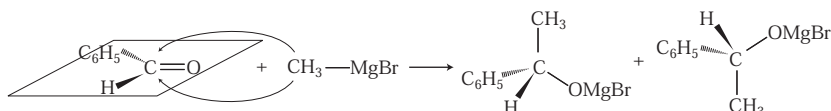
Cette molécule est alors nucléophile et basique, à l'instar de tout ions alcoolate $\text{R} - \text{O}^-$.

- (c) Ce composé s'hydrolyse en présence d'eau :



L'alcool ainsi produit présente un atome de carbone asymétrique (repéré par un astérisque), ce qui rend la molécule chirale.

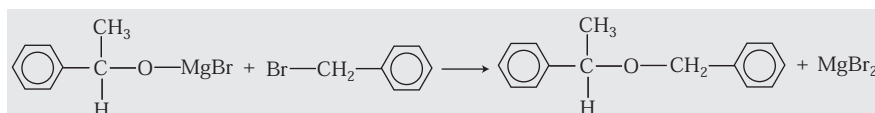
Au cours de la formation de l'alcoolate de bromure-magnésium, $\text{CH}_3 - \text{MgBr}$ a pu se fixer de part et d'autre du plan formé par la molécule d'acétaldéhyde :



de sorte qu'après hydrolyse, un mélange racémique de l'alcool est obtenu, ce qui justifie que :

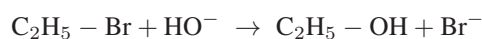
L'alcool obtenu est optique inactif par compensation.

3. L'énoncé indique que la réaction de l'alcoolate de bromure-magnésium et le bromure de benzyle est d'ordre 2, ce qui suggère que cette réaction se déroule en une seule étape :



● 456 ————— Lycée Rabelais, Rennes

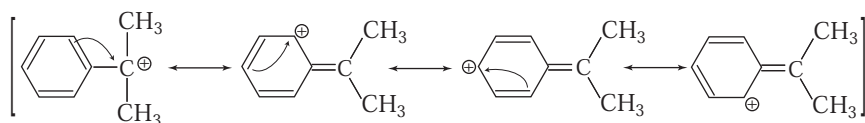
1. Un alcool primaire ne peut former de carbocation stable, auquel cas la réaction :



est une $\text{S}_{\text{N}}2$ (en une seule étape) qui suit la loi de vitesse :

$$v_1 = k_1 [\text{RBr}] [\text{HO}^-] \quad (3)$$

En revanche, le noyau aromatique peut rentrer en résonance avec le carbocation issu du deuxième composé :

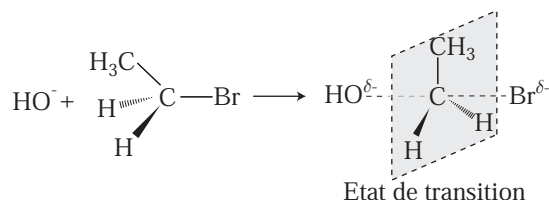


assurant ainsi sa stabilisation, accrue par les effets inductifs électrodonneurs des groupes méthyle. C'est pourquoi ce composé subit une $\text{S}_{\text{N}}1$ (en deux étapes) dont la loi de vitesse est :

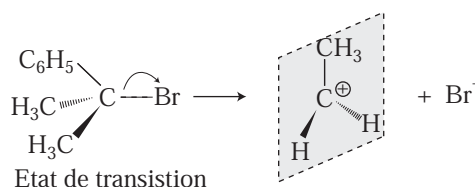
$$v_2 = k_2 [\text{RBr}] \quad (4)$$

Les lois de vitesse (3) et (4) montrent qu'un doublement de la concentration du dérivé bromé RBr s'accompagne d'un doublement de la vitesse de chacune des réactions.

- Les expressions (3) et (4) montrent que seule la vitesse de la première réaction est sensible à une variation de $[\text{HO}^-]$.
- Au cours de la première réaction, l'addition de HO^- et l'élimination de Br^- se font simultanément :



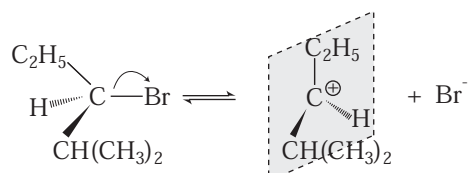
tandis que l'élimination de Br^- se réalise au cours de la première étape d'une réaction SN_1 :



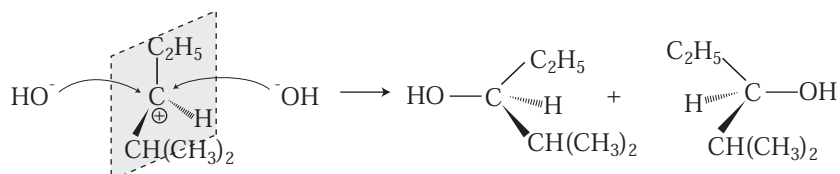
● 457 ————— Lycée Carnot, Paris

L'absence d'activité optique du produit de la réaction de HO^- sur le composé (A) suggère la formation d'un carbocation plan intermédiaire. C'est pourquoi le mécanisme de cette réaction suit celui d'une SN_1 :

- Formation d'un carbocation plan :



- Addition des ions HO^- de part et d'autre du plan contenant la carbocation :

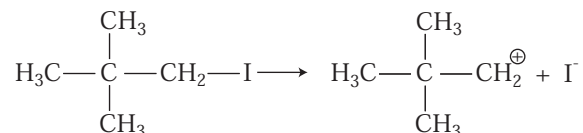


La racémisation du produit obtenu justifie son absence d'activité optique, qui n'aurait pas été observée à l'issue d'un mécanisme SN_2 (l'inversion de configuration d'un composé optiquement actif produit un composé optiquement actif).

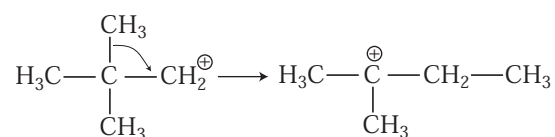
● 458 ————— Lycée Claude Bernard, Paris

Un solvant ionisant favorise les réactions d'ordre 1 qui génèrent des carbocations. En outre, l'emploi d'une base forte (potasse) concentrée, à température élevée, oriente la

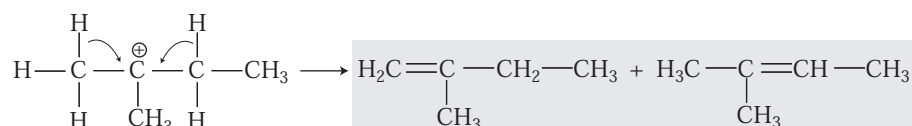
réaction vers une élimination E₁, dont la première étape consiste en la formation d'un carbocation :



Cependant, l'effet inductif des groupes électrodonneurs -CH₃ n'est pas suffisant pour stabiliser le carbocation formé et c'est pourquoi un réarrangement intramoléculaire peut se produire :

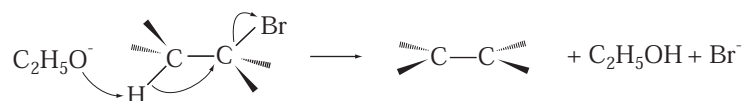


à l'issue duquel se forme un carbocation qui présente deux types d'hydrogène en β, susceptibles de partir :

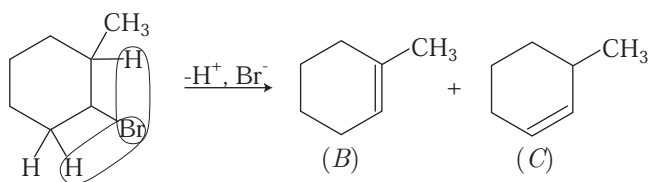


● 459 ————— Lycée Victor Hugo, Caen

1. La base forte C₂H₅O⁻ permet le déroulement d'une réaction d'élimination d'ordre 2 (puisque l'énoncé précise que la réaction est proportionnelle à [C₂H₅O⁻]). Une telle élimination n'est possible que si les deux atomes partants se trouvent en position *anti* (la réaction est stéréosélective) :

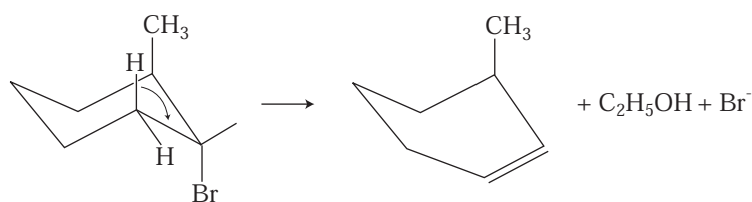


2. *A priori*, deux alcènes pourraient être issus de la réaction d'élimination :

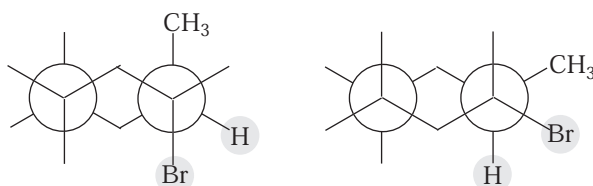


Or, la règle de Zaitsev précise que l'alcène le plus substitué est obtenu majoritairement, c'est-à-dire le composé B (1-méthylcyclohex-1-ène). Le produit C (3-méthylcyclohex-1-ène) est alors minoritaire.

3. Dans la molécule de 1-bromo-2-méthylcyclohexane, des atomes H et Br en position *cis* peuvent être éliminés au cours d'une réaction en une seule étape :



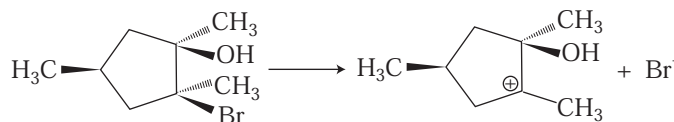
4. En revanche, le produit *B* ne peut être obtenu par élimination des atomes H et Br en position *anti* :



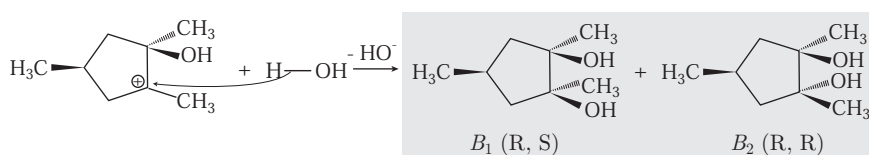
● 460 ————— Concours de l'ENS Cachan

1. L'eau, utilisée comme solvant, favorise la formation d'un carbocation, au demeurant stabilisé par des effets inductifs électrodonneurs. C'est pourquoi la réaction est d'ordre 1. En outre, la soude diluée réalise une réaction de substitution de type S_N1, dont le mécanisme comporte deux étapes :

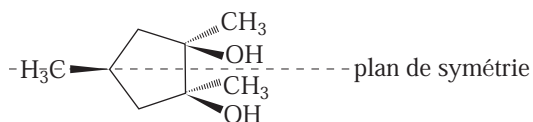
- Formation d'un carbocation :



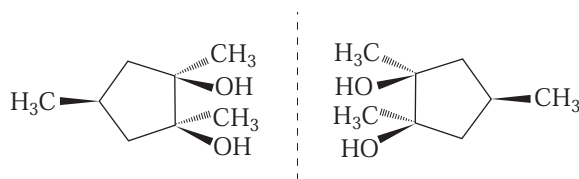
- Addition de HO⁻ de part et d'autre du plan moyen du cycle :



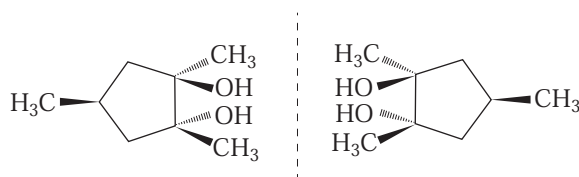
2. Le composé *B*₁ n'est pas chiral car il présente un plan de symétrie (le plan perpendiculaire au plan moyen de la molécule) :



La conséquence de l'existence d'un tel plan est la superposition possible des images spéculaires de *B*₁ :



En revanche, le composé B_2 ne possède ni plan ni centre de symétrie, en raison de quoi cette molécule est chirale. Du reste, les images spéculaires de B_2 ne sont pas superposables :

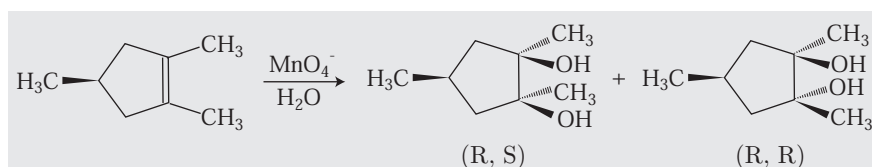


Les composés B_1 et B_2 ne sont ni images spéculaires l'un de l'autre, ni superposables ; il s'agit de diastéréoisomères.

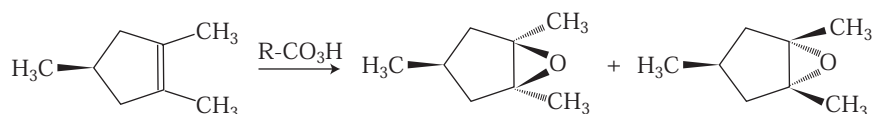
3. Le mélange de B_1 et B_2 est optiquement actif car :

- B_1 , non chiral, n'exerce aucune influence sur la polarisation de la lumière ;
- seul l'isomère de configuration (R, R) de B_2 est produit, à l'exclusion de son énantiomère (S, S).

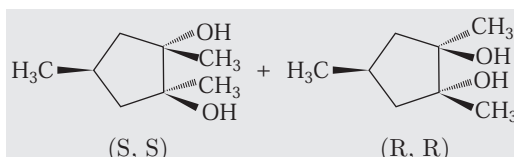
4. Une addition *cis* des groupes $-OH$ sur la double liaison du 1,2,4-triméthylcyclopentène peut être réalisée par action d'une solution diluée de permanganate de potassium. Cependant, les énantiomères (R, S) et (S, R) de B_1 sont obtenus simultanément :



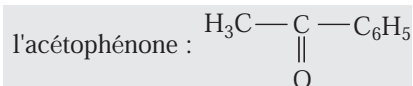
5. Quant au composé B_2 , il peut être obtenu par addition *trans* de groupes $-OH$ sur la double liaison $C = C$ du 1,2,4-triméthylcyclopentène. L'action d'un peroxyacide ($R - COO - OH$) permet d'obtenir un époxyde :



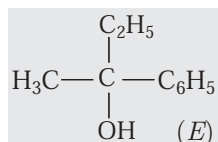
dont l'hydrolyse s'opère en position *trans* ; les deux énantiomères de B_2 sont alors obtenus :



(b) La séquence précédente montre que le produit (D) est :

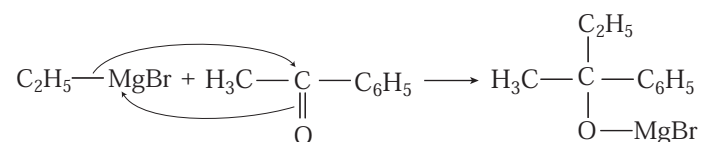


4. (a) Le bromure d'éthyl magnésium : $\text{C}_2\text{H}_5 - \text{MgBr}$ agit sur l'acétophénone en produisant, après hydrolyse, un alcool tertiaire :

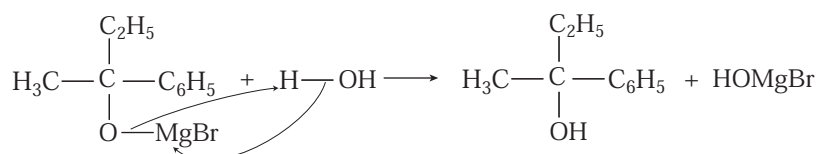


(b) Cette synthèse s'effectue en deux étapes :

- Production d'un alcoolate de bromure-magnésium :

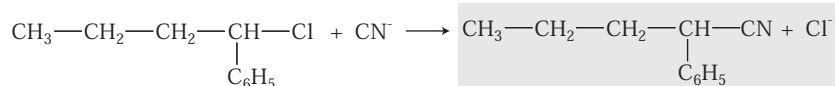


- Hydrolyse acide de l'alcoolate de bromure-magnésium :



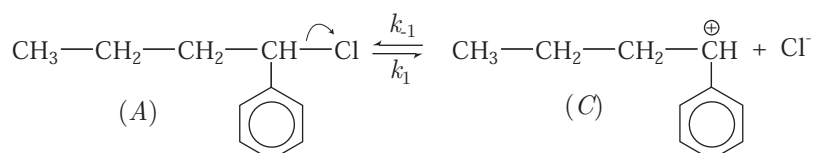
● 462 ————— Concours ENSI

1. (a) Les ions CN^- (base faible mais nucléophile puissant) réalisent sur le composé A une substitution :

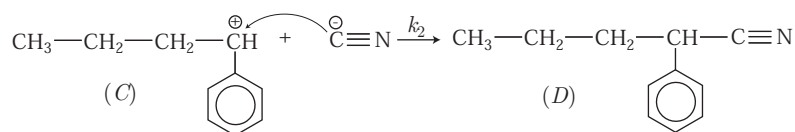


(b) La présence d'un noyau benzénique permet de stabiliser un carbocation, alors intermédiaire réactionnel dans un mécanisme en deux étapes :

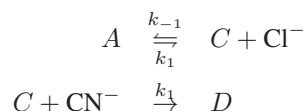
- Formation du carbocation :



- Addition des ions cyanure :



(c) Le mécanisme ainsi proposé peut être présenté de la manière suivante :



d'où se déduit la vitesse de formation de D :

$$v = k_2 [C] [\text{CN}^-] \quad (5)$$

notamment, en appliquant le principe de l'état quasi stationnaire à l'intermédiaire C :

$$\frac{d[C]}{dt} = k_1 [A] - k_{-1} [C] [\text{Cl}^-] - k_2 [C] [\text{CN}^-] = 0$$

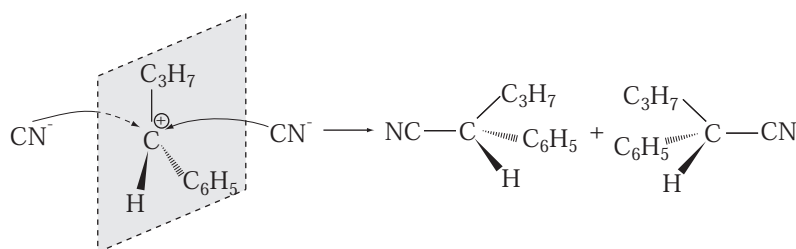
$$\Rightarrow [C] = \frac{k_1 [A]}{k_{-1} [\text{Cl}^-] + k_2 [\text{CN}^-]}$$

$$\Rightarrow v = \frac{k_1 [A] \times k_2 [\text{CN}^-]}{k_{-1} [\text{Cl}^-] + k_2 [\text{CN}^-]}$$

Enfin, la première étape de ce mécanisme étant cinétiquement limitante, il s'ensuit que :

$$k_{-1} [\text{Cl}^-] \ll k_2 [\text{CN}^-] \Rightarrow v \simeq k_1 [A]$$

(d) L'intermédiaire C (carbocation) est contenu dans un plan de part et d'autre duquel les ions CN^- peuvent s'approcher :

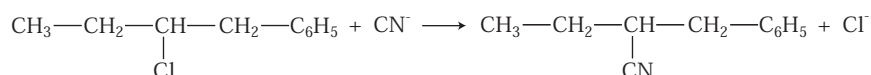


Le produit ainsi obtenu est par conséquent racémique, optiquement inactif.

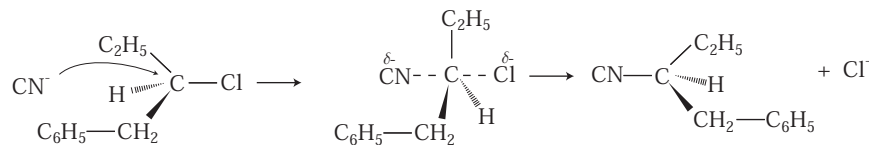
2. Si la vitesse de réaction de CN^- avec le composé A dépend de $[\text{CN}^-]$:

$$v = k [A] [\text{CN}^-]$$

cela suggère que les ions CN^- opèrent une réaction de substitution $\text{S}_{\text{N}}2$:

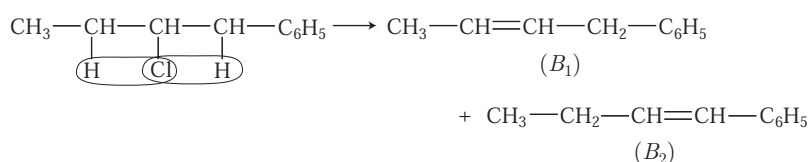


qui se déroule en une étape, étant donné l'impossible stabilisation d'un carbocation par le noyau benzénique :

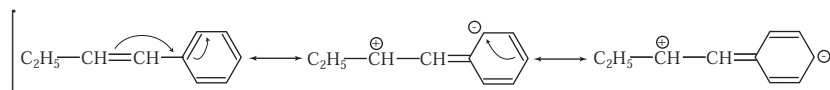


Étant donné que CN^- occupe la même place prépondérante dans la classification séquentielle de C.I.P., cette réaction s'accompagne d'une inversion de configuration ; si, initialement, le composé B est optiquement actif, il en va de même pour le produit de la réaction.

3. (a) L'utilisation de la potasse alcoolique vise à réaliser, sur le composé B , une élimination de H^+ et Cl^- , qui se traduit par la formation potentielle de deux alcènes :



- (b) Le produit B_2 est cependant obtenu majoritairement car la résonance de la liaison $\text{C}=\text{C}$ avec le noyau aromatique en assure la stabilisation :

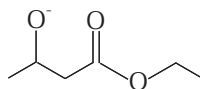


● 463 ————— Concours de la banque Agro

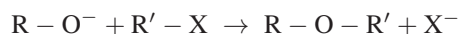
1. (a) Le sodium est susceptible de réduire l'hydrogène mobile de l'alcool ROH en produisant du dihydrogène, conformément à l'équation-bilan :



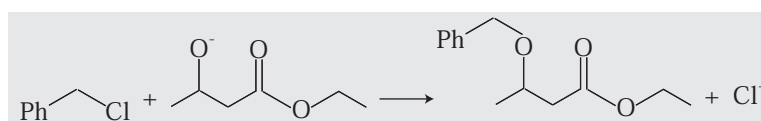
C'est ainsi qu'est formé l'ion alcoolate :



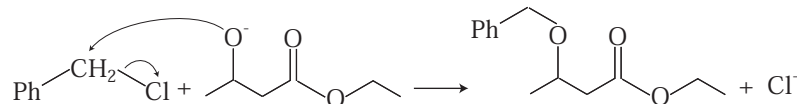
- (b) Un dérivé halogéné $\text{R}'-\text{X}$ peut réagir avec un alcoolate $\text{R}-\text{O}^-$ de manière à former un éther-oxyde (il s'agit de la synthèse de Williamson) :



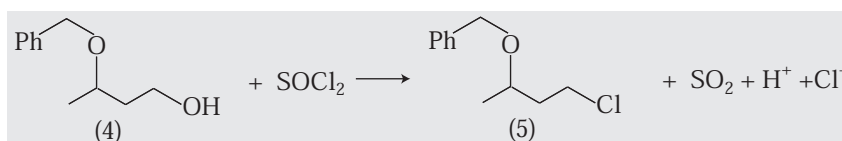
C'est pourquoi on assiste à la réaction suivante (où Ph désigne le radical phényle) :



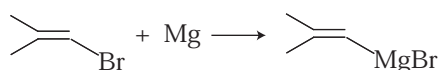
Cette réaction s'apparente à une substitution nucléophile d'ordre 2 :



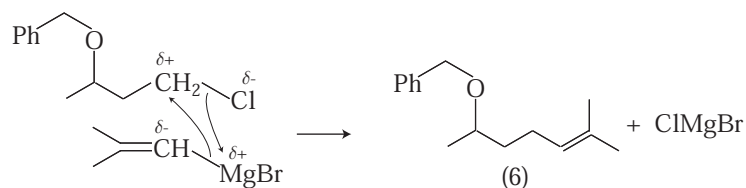
2. Le chlorure de thionyle est un agent chlorurant des alcools primaires :



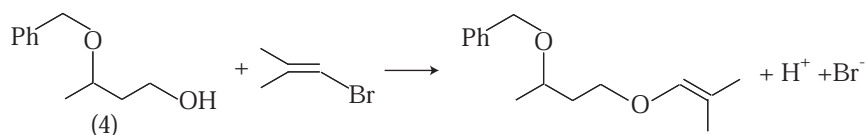
3. Le 1-bromo-2-méthylprop-1-ène réagit avec le magnésium pour former un organomagnésien :



susceptible, à son tour, de réagir sur le composé chloré (5) :



si l'alcool (4) avait été mis à réagir sur le 1-bromo-2-méthylprop-1-ène, il aurait conduit à la formation d'un éther-oxyde, conformément à la synthèse de Williamson :



et c'est pour cette raison qu'il est nécessaire de remplacer le groupe $-OH$ de (4) par $-Cl$.

● 464 ————— Lycée Victor Hugo, Caen

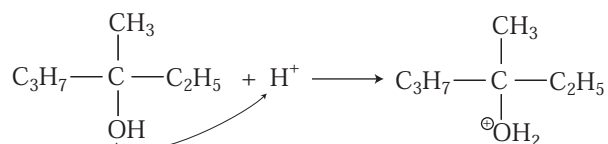
1. La vitesse de la réaction ne dépend pas de $[HBr]$, ce qui signifie qu'elle ne dépend que de la concentration de l'halogénoalcane RBr :

$$v = k [RBr]$$

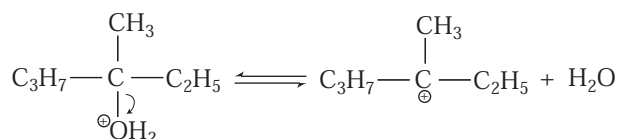
Ce faisant, la réaction de substitution est du premier ordre et suit un mécanisme de type SN_1 .

2. La substitution S_N1 déroule en plusieurs étapes :

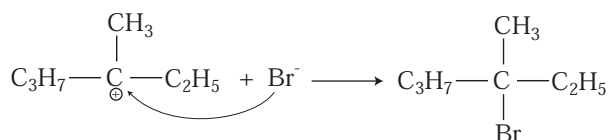
- Formation rapide d'un ion alkyloxonium par attaque acide de l'halogénoalcane :



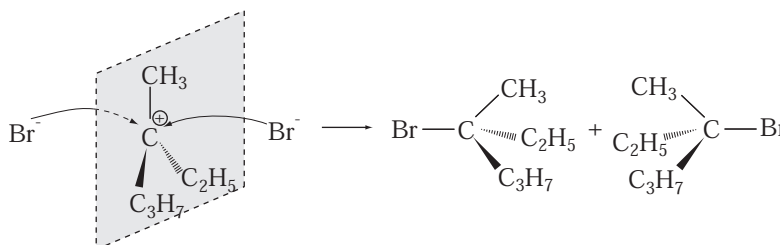
- Évolution (relativement lente) de l'ion alkyloxonium avec un carbocation :



- Addition (rapide) de l'ion bromure sur le carbocation :



3. Le produit ainsi formé s'appelle le **3-bromo-méthylhexane** et il est dépourvu d'activité optique car, au cours de la troisième étape, les ions Br^- peuvent se fixer de part et d'autre du plan du carbocation :

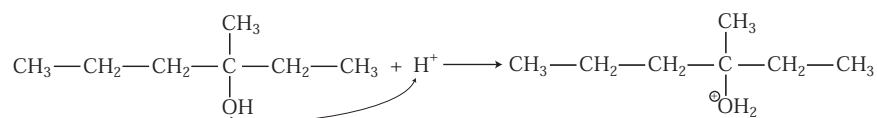


produisant ainsi un mélange racémique (inactif, bien que chacun des énantiomères soit chiral).

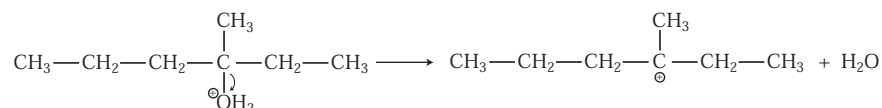
4. L'encombrement stérique du nucléophile a peu d'influence sur la réaction, puisque l'approche se réalise sur un carbocation plan. En revanche, le passage de l'atome tétravalent au carbocation (deuxième étape) permet le soulagement des contraintes stériques ; l'énergie d'activation de cette étape est d'autant plus faible que l'halogénoalcane est plus encombré. C'est pourquoi l'encombrement stérique est un facteur accélérant la réaction.

● 465 ————— Lycée Victor Hugo, Caen

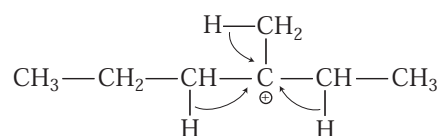
1. L'ion H^+ libéré par l'acide sulfurique réagit avec l'éthanol, qui se transforme en ions alkyloxonium (acide conjugué de l'alcool) :



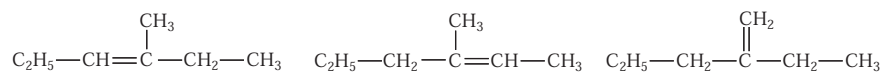
dont la déshydratation est facilitée par la stabilité du carbocation tertiaire résultant :



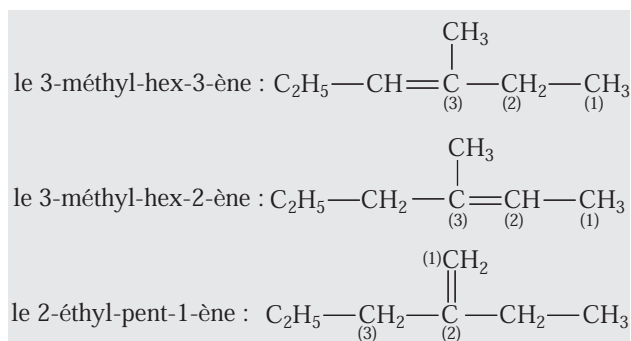
Ce carbocation peut alors se transformer en alcène à la suite du départ d'un des trois atomes d'hydrogène situé en β :



Trois alcènes peuvent ainsi être obtenus :



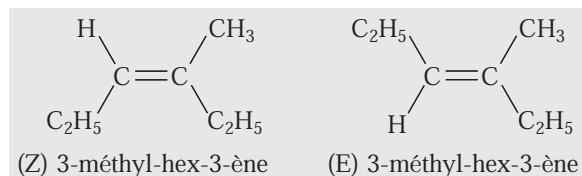
2. Conformément à ce qui précède, trois alcènes peuvent *a priori* être produits :



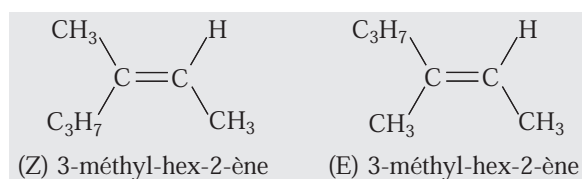
parmi lesquels, le plus substitué est obtenu majoritairement, c'est-à-dire le :

3-méthyl-hex-3-ène

3. Compte tenu de la préséance établie par C.I.P., deux des trois alcènes précédents présentent des stéréoisomères (Z, E) :



et :



tandis que le troisième possède deux substituants identiques sur le carbone C₍₁₎.

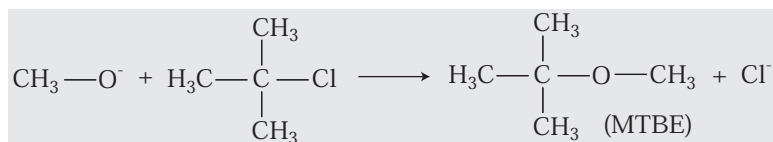
● 466 ————— Lycée Champollion, Grenoble

1. Un alcool R – OH peut être transformé en dérivé chloré par l'emploi de PCl₃ :

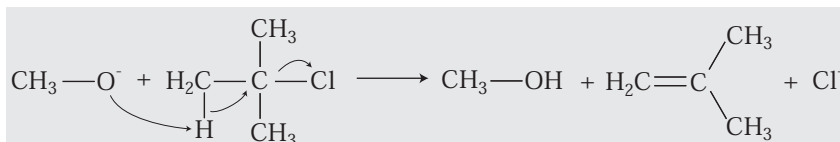


2. (a) L'ion méthanolate peut orienter la réaction avec le 2-chloro-2-méthylpropane vers deux réactions :

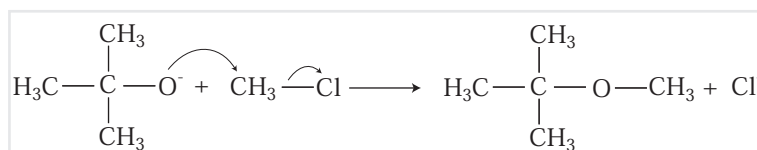
- Synthèse de Williamson du M.T.B.E. :



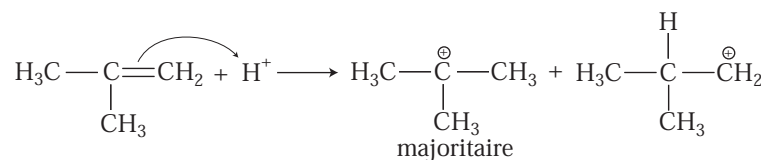
- Élimination de H et Cl (l'ion méthanolate est une base forte) :



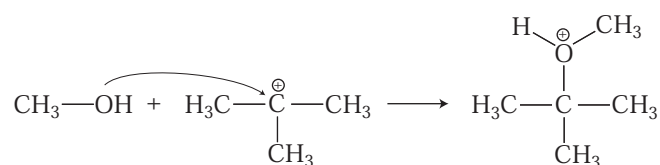
En revanche, l'ion tertibutylate ne peut provoquer l'élimination dans le chlorométhane (dépourvu d'atome d'hydrogène en β) :



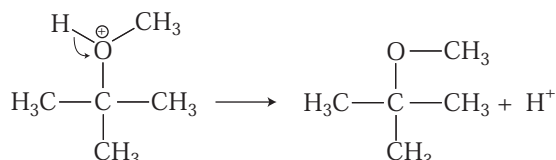
3. En milieu acide, le 2-méthylpropène se transforme en carbocation tertiaire :



plus stable que le carbocation primaire, pratiquement inexistant. Par suite, le méthanol réagit avec le carbocation majoritaire :

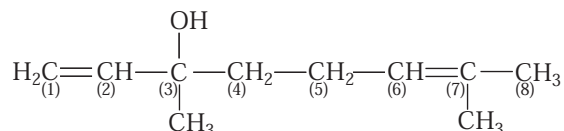


L'ion ainsi réalisé libère rapidement H^+ pour évoluer vers le M.T.B.E. :



● 467 ————— Concours E.N.S.T.I.M.

1. La formule semi-développée du linalol :

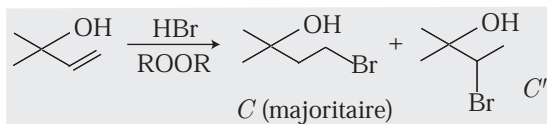


permet d'en trouver le nom officiel :

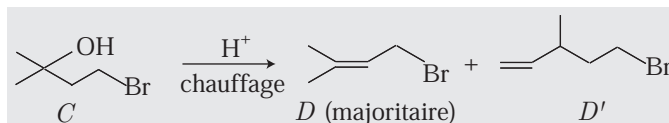
le 3,7-diméthyl-3-hydroxyocta-1,6-diène

2. Les diverses étapes de la synthèse du linalol sont :

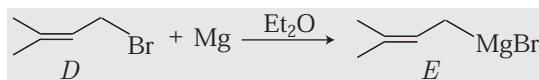
- l'addition de H—Br sur une double liaison $\text{C}=\text{C}$, en milieu radicalaire qui favorise l'obtention du composé halogéné le moins substitué :



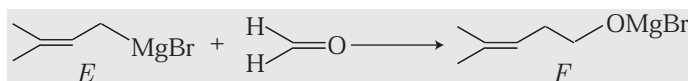
- l'élimination d'eau de l'alcool, qui conduit majoritairement à l'alcène le plus substitué :



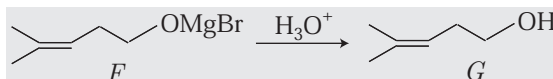
- la formation d'un organomagnésien :



- l'addition de l'organomagnésien sur le groupe carbonyle du méthanal :



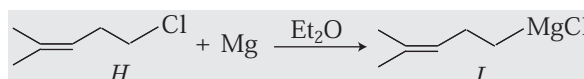
- l'hydrolyse acide de l'alcoolate de bromure-magnésium, qui fournit un alcool :



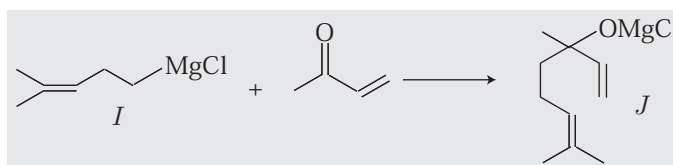
- la substitution du groupe $-\text{OH}$ par $-\text{Cl}$:



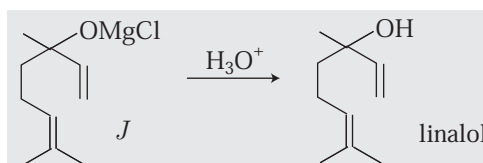
- la synthèse d'un nouvel organomagnésien :



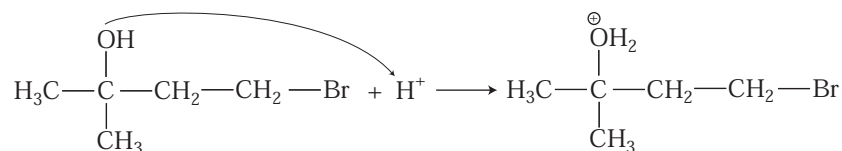
- la réaction de l'organomagnésien avec la fonction carbonyle d'une cétone :



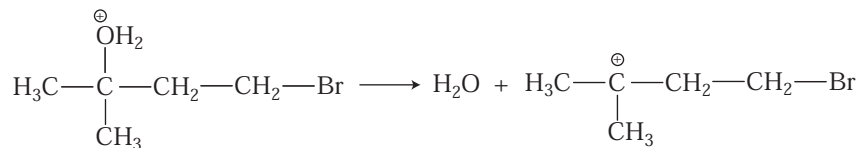
- l'hydrolyse acide de l'alcoolate de chlorure-magnésium :



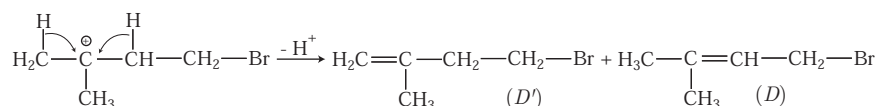
3. Au cours de l'étape $C \rightarrow D$, l'ion H^+ se fixe sur le groupe hydroxyle :



Une molécule d'eau peut être libérée, conduisant à la formation d'un carbocation tertiaire :

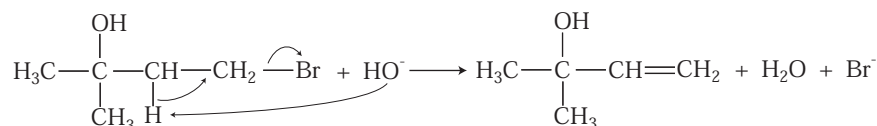


Deux atomes d'hydrogène sont alors susceptibles d'être éliminés :



Or, des deux alcènes obtenus, le deuxième est plus stable que le premier (car plus substitué). C'est pourquoi *D* est obtenu majoritairement.

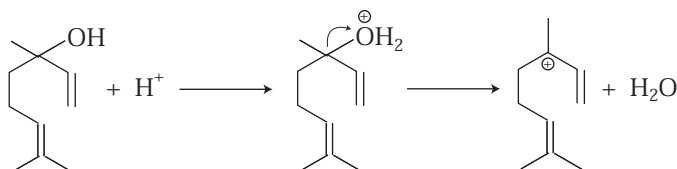
4. En milieu basique, une élimination de Br se serait produite selon une réaction d'élimination E₂ :



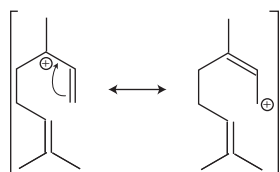
5. Le trichlorure de phosphore, PCl₃, permet également de servir d'agent chlorurant sur l'alcool primaire *G* :



6. L'ion H⁺ peut se fixer sur le groupe -OH, qui devient alors le nucléofuge -OH₂⁺ :



Le carbocation ainsi obtenu doit sa stabilité à une résonance possible avec la double liaison :



La seconde forme mésomère peut dès lors réagir avec une molécule d'eau :

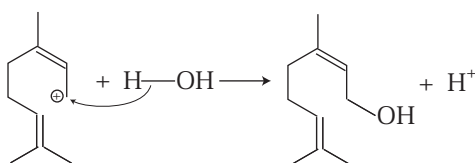


Table des matières

1 Physique	
Première période	1
1 Mécanique du point	3
1.1 Cinématique	3
1.1.1 Coordonnées cartésiennes	3
1.1.2 Coordonnées polaires	5
1.2 Dynamique du point	7
1.2.1 Notion de forces	7
1.2.2 Lois de Newton	8
1.3 Énergies	9
1.3.1 Travail et puissance d'une force	9
1.3.2 Théorème de l'énergie cinétique	11
1.3.3 Énergie potentielle	13
1.3.4 Énergie mécanique	15
1.3.5 Représentations graphiques	16
1.4 Oscillateurs à une dimension	19
1.4.1 Oscillations non amorties	19
1.4.2 Oscillations amorties	20
Énoncés	24
Corrigés	38
2 Électrocinétique	93
2.1 Lois générales	93
2.2 Dipôles de base	95
2.2.1 Lois d'association des dipôles	95
2.2.2 Description de quelques dipôles	96
2.3 Montages de base	100
2.3.1 Ponts diviseurs	100
2.3.2 Théorème de Millman	102
2.3.3 Modélisations linéaires	103
2.4 Régimes transitoires	105
2.4.1 Circuit RC série	105
2.4.2 Circuit RL série	107
2.4.3 Circuit RLC série	109

Énoncés	114
Corrigés	133
3 Optique géométrique	187
3.1 Réflexion et réfraction	187
3.1.1 Réflexion de la lumière	187
3.1.2 Réfraction de la lumière	189
3.2 Formation d'images	192
3.2.1 Stigmatisme et aplanétisme	192
3.2.2 Les miroirs	193
3.2.3 Les lentilles minces	199
3.3 Quelques instruments d'optique	203
3.3.1 Lunette de visée à l'infini	203
3.3.2 Collimateur	204
3.3.3 Viseur	205
Énoncés	207
Corrigés	220
2 Physique	
Seconde période	269
4 Électrocinétique	271
4.1 Régime sinusoïdal	271
4.1.1 Définition	271
4.1.2 Notations complexes	272
4.2 Résonances	275
4.2.1 Résonance en intensité	275
4.2.2 Résonance en tension	278
4.3 Puissance en régime sinusoïdal	281
4.4 Les filtres	282
4.4.1 Fonction de transfert	282
4.4.2 Diagramme de Bode	284
4.4.3 Autres applications de la fonction de transfert	286
4.5 Introduction à l'amplificateur opérationnel	289
4.5.1 Présentation	289
4.5.2 Montages amplificateurs	290
4.5.3 Filtres actifs	292
Énoncés	296
Corrigés	319

5 Mécanique	393
5.1 Changements de référentiels	393
5.1.1 Cinématique	393
5.1.2 Dynamique en référentiel non galiléen	400
5.2 Oscillations forcées	402
5.2.1 Résonance en élongation	403
5.2.2 Résonance en vitesse	404
5.3 Théorème du moment cinétique	407
5.3.1 Moment d'une force	407
5.3.2 Moment cinétique	408
5.3.3 Théorème du moment cinétique	409
5.4 Forces centrales conservatives	411
5.4.1 Énergie potentielle	411
5.4.2 Moment cinétique	412
5.4.3 Conservation de l'énergie	414
5.5 Mouvement d'un point dans un champ de force centrale	417
5.5.1 Lois de Kepler	417
5.5.2 Énergie et trajectoires	417
5.5.3 Étude de cas particuliers	419
5.6 Systèmes de deux points matériels	422
5.6.1 Éléments cinématiques	422
5.6.2 Dynamique du système	424
5.6.3 Système de points isolés	426
Énoncés	428
Corrigés	453
6 Thermodynamique	571
6.1 Le gaz parfait	571
6.1.1 Définitions	571
6.1.2 La température	572
6.1.3 Énergie interne	574
6.2 Fluides réels et phases condensées	576
6.3 Éléments de statique des fluides	577
6.3.1 Loi fondamentale	577
6.3.2 Poussée d'Archimède	579
6.3.3 Introduction au facteur de Boltzmann	580
6.4 Premier principe de la thermodynamique	580
6.4.1 Les transformations	580
6.4.2 Échanges thermiques	581
6.4.3 Travail des forces de pression	582
6.4.4 Détente de Joule-Gay-Lussac	582
6.4.5 L'enthalpie	583
6.5 Bilans d'entropie	586
6.5.1 Deuxième principe de la thermodynamique	586
6.5.2 La fonction entropie	587
6.5.3 Entropie d'un gaz parfait	590
6.5.4 Entropie d'une phase condensée	593

6.5.5	Interprétation statistique de l'entropie	594
6.6	Machines thermiques	597
6.6.1	Définitions	597
6.6.2	Moteur de Carnot	601
6.7	Changements d'état	602
6.7.1	Définitions	602
6.7.2	Diagrammes de changement d'état	602
6.7.3	Vapeur sèche et vapeur saturante	605
6.7.4	Enthalpie et entropie de changement d'état	607
	Énoncés	609
	Corrigés	632
7	Électromagnétisme	707
7.1	Électrostatique	707
7.1.1	Le champ électrique	707
7.1.2	Calcul de champs électriques	709
7.1.3	Symétries et invariants	711
7.1.4	Potentiel électrostatique	714
7.1.5	Énergie potentielle électrostatique	717
7.1.6	Surfaces équipotentiellles et lignes de champ	719
7.1.7	Théorème de Gauss	719
7.1.8	Dipôle électrostatique	726
7.2	Mouvement d'une particule chargée	732
7.2.1	Forces électromagnétiques	732
7.2.2	Mouvement dans un champ électrique	733
7.2.3	Mouvement dans un champ magnétique	733
7.3	Magnétostatique	737
7.3.1	Le champ magnétique	737
7.3.2	Théorème d'Ampère	740
	Énoncés	746
	Corrigés	773
3	Chimie	877
8	Cinétique chimique	879
8.1	Paramètres d'un système chimique	879
8.1.1	Paramètres intensifs et extensifs	879
8.1.2	Modélisation de la réaction chimique	880
8.2	Évolution des systèmes chimiques	884
8.2.1	Définitions	884
8.2.2	Lois de vitesse	885
8.3	Mécanismes réactionnels	891
8.3.1	Définitions	891
8.3.2	Étude des réactions successives	892
8.3.3	Approximation de l'état quasi stationnaire	894

8.3.4	Mécanismes en séquence ouverte	895
8.3.5	Mécanismes en séquence fermée	898
8.3.6	Diagrammes d'énergie potentielle	901
Énoncés		905
Corrigés		921
9	Réactions en solution aqueuse	973
9.1	L'équilibre chimique	973
9.1.1	Évolution d'une réaction	973
9.1.2	Loi d'action des masses	975
9.2	Équilibres acido-basiques	978
9.2.1	couple acide-base	978
9.2.2	Constante d'acidité	980
9.2.3	Calculs simples de pH	984
9.3	Équilibres de complexation	988
9.3.1	Couple donneur/accepteur de ligands	988
9.3.2	Diagramme de prédominance	991
9.4	Équilibres de précipitation	992
9.4.1	Condition de précipitation	992
9.4.2	Domaine d'existence d'un précipité	995
9.5	Équilibres d'oxydo-réduction	997
9.5.1	Réactions d'oxydo-réduction	997
9.5.2	Potentiels d'électrode	1001
9.5.3	Prévision des réactions	1007
Énoncés		1012
Corrigés		1042
10	Architecture de la matière	1161
10.1	Structure électronique de l'atome	1161
10.1.1	Niveaux d'énergie électronique de l'atome	1161
10.1.2	Dégénérescence des niveaux d'énergie	1164
10.1.3	Configuration électronique de l'atome	1168
10.1.4	Probabilité de présence d'un électron	1174
10.2	La classification périodique des éléments	1181
10.2.1	Familles chimiques	1181
10.2.2	Structure en blocs	1182
10.2.3	Évolution de quelques propriétés	1184
10.3	Structure des molécules	1194
10.3.1	Formule de Lewis	1194
10.3.2	Géométrie des molécules	1199
10.4	Configuration électronique de la molécule	1203
10.4.1	Orbitales molécules	1203
10.4.2	Configurations électroniques	1206
10.4.3	Liaisons délocalisées	1208
Énoncés		1210

Corrigés	1230
11 Structure de la matière condensée	1297
11.1 Généralités	1297
11.1.1 Définitions	1297
11.1.2 Empilements compacts de sphères	1298
11.2 Les principaux types de cristaux	1304
11.2.1 Cristaux métalliques	1304
11.2.2 Cristaux ioniques	1307
11.2.3 Cristaux covalents	1314
11.2.4 Cristaux moléculaires	1316
Énoncés	1319
Corrigés	1327
12 Thermodynamique chimique	1351
12.1 Modèles de transformations	1351
12.2 Grandeurs standard de réaction	1352
12.2.1 Définitions	1352
12.2.2 Grandeurs standard	1353
12.2.3 Cycles de transformations	1356
12.2.4 Effets thermiques en réacteur isobare	1357
12.2.5 Énergie interne standard	1364
12.3 Utilisation des tables de grandeurs standard	1367
12.3.1 Enthalpie standard de formation	1367
12.3.2 Enthalpie standard de réaction	1369
12.3.3 Changement d'état	1372
12.3.4 Deuxième loi de Kirchhoff	1376
12.3.5 Ionisation et fixation électronique	1378
Énoncés	1380
Corrigés	1392
13 Chimie organique	1427
13.1 Stéréochimie des molécules organiques	1427
13.1.1 Représentation spatiale des molécules	1427
13.1.2 Stéréoisomérisie de configuration	1428
13.1.3 Stéréoisomérisie de conformation	1434
13.2 Réactivité de la double liaison carbone-carbone	1438
13.2.1 Effets mésomères et inductifs	1438
13.2.2 Additions électrophiles et radicalaires	1440
13.2.3 Oxydations	1442
13.2.4 Hydrogénation catalytique	1444
13.3 Les organomagnésiens mixtes	1444
13.3.1 Préparation	1444
13.3.2 Réactions sur le groupe carbonyle	1446
13.3.3 Réaction sur le dioxyde de carbone	1447
13.3.4 Réaction sur le groupe nitrile	1448

13.3.5	Réaction sur les époxydes	1449
13.4	Les liaisons simples carbone-halogène	1450
13.4.1	Substitutions nucléophiles	1450
13.4.2	Réactions d'élimination	1452
13.5	Les liaisons simples carbone-azote	1455
13.5.1	Caractère basique	1455
13.5.2	Caractère nucléophile	1455
13.6	Les liaisons simples carbone-oxygène	1456
13.6.1	Acido-basicité des alcools	1456
13.6.2	Synthèse de Williamson	1457
13.6.3	Passage à un dérivé monochloré	1457
13.6.4	Réactions de déshydratation	1458
	Énoncés	1460
	Corrigés	1476