Travaux Pratiques de Physique

Lycée Charlemagne Paris

MP

2 heures
Calculatrices autorisées

Filtrage numérique

Objectif

L'objectif de ce TP est la réalisation d'un filtrage numérique d'ordre 1 sur des signaux analogiques préalablement numérisés et son application d'une part à la réduction du bruit dans un signal et d'autre part à la détection synchrone.

.

I- Réalisation d'un filtrage

On considère un filtre passe-bas, dont la fonction de transfert $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}$ s'écrit également $H(p) = \dfrac{1}{1+p\tau}$ où $\tau = \dfrac{1}{\omega_c}$ est un temps caractéristique lié à la pulsation de coupure ω_c du filtre. Un signal analogique $e(t)$ peut alors subir l'action de ce filtre, qui en fournit une image $s(t)$ telle que :

$$H(p) = \frac{s}{e} = \frac{1}{1+p\tau} \Rightarrow s + \tau\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = e \tag{1}$$

La numérisation du signal $e(t)$ se traduit par un échantillonnage : aux dates $t_k = k\,T_e$, $k \in \mathbb{N}$, les valeurs $e_k = e(t_k)$ sont mémorisées ; T_e est alors la *période d'échantillonnage* associée à la *fréquence d'échantillonnage* $f_e = \dfrac{1}{T_e}$. Le filtrage numérique consiste ici à générer un signal s solution de l'équation différentielle (1). En effet, une liste de valeurs $\{s_k\}$ va être créée, vérifiant cette équation, dans laquelle la dérivation sera traduite par un taux de variation : deux valeurs successives s_{k-1} et s_k étant séparées par une période d'échantillonnage, on posera :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{s_k - s_{k-1}}{T_e} \Rightarrow s_k + \tau\,\frac{s_k - s_{k-1}}{T_e} = e_k$$

De cette équation on tire :

$$s_k = \frac{\tau/T_e}{1+\tau/T_e} \times s_{k-1} + \frac{1}{1+\tau/T_e} \times e_k \tag{2}$$

c'est-à-dire une méthode permettant de calculer le $k^{\text{ème}}$ terme de la liste $\{s_k\}$ à partir du terme précédent et de la valeur $e_k = e(t_k)$ échantillonnée.

– Réaliser un montage dans lequel :
  - un GBF délivre une tension $e(t) = E_0\,\cos(\omega t)$ d'amplitude $E_0 = 2$ V et de fréquence 100 Hz ;
  - une carte d'acquisition permet la visualisation de $e(t)$ à l'écran d'un ordinateur équipé de LATIS PRO. Le logiciel sera configuré de manière à montrer 5 périodes $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ du signal, avec une période d'échantillonnage $T_e = 100\ \mu$s. L'acquisition sera réalisée en mode permanent et ajustée de sorte que le signal à l'écran soit stable et directement modifiable par action sur le GBF.

– Ouvrir le tableur de LATIS PRO et y insérer les valeurs de $e_k = e(k\,T_e)_{k\in\mathbb{N}}$.

– Dans une autre colonne, définir le signal s avec $\tau = 10^{-3}$ s dans la formule (2) ; une nouvelle courbe apparaît dans la liste des courbes.

– Visualiser cette courbe sur le même graphe que $e(t)$.

Appeler l'examinateur

Présenter à l'examinateur les courbes obtenues à l'écran de l'oscilloscope et préciser en quoi ces courbes illustrent le filtrage numérique de $e(t)$ par un quadripôle de fonction de transfert $\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega/\omega_c}$.

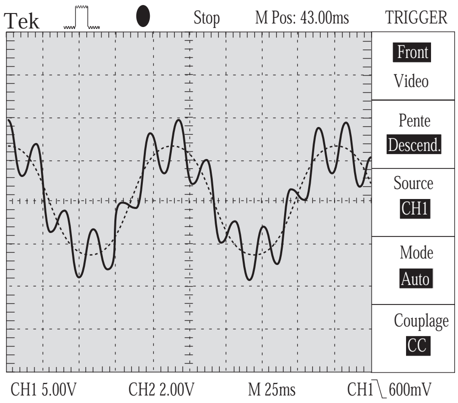
.

II- Application 1 : réduction du bruit

Un signal $s_1(t) = E_{01}\,\cos(\omega_1 t)$ peut être affecté par un bruit $s_2(t) = E_{02}\,\cos(\omega_2 t)$, tel que $E_{02} < E_{01}$ et $\omega_2 \gg \omega_1$. Le signal ainsi brouillé s'écrit :

$$e(t) = E_{01}\,\cos(\omega_1 t) + E_{02}\,\cos(\omega_2 t)$$

À partir du matériel disponible, concevoir un montage (dont on représentera le schéma exhaustif) produisant le signal $e(t)$.



Réaliser ce montage et lui appliquer le filtre numérique précédent. Visualiser à l'écran de l'ordinateur le signal $e(t)$ et le signal filtré.

Appeler l'examinateur

Présenter à l'examinateur le schéma du montage en précisant les valeurs choisies pour τ, ω_1, ω_2, E_{01}, E_{02}. Montrer également comment les courbes présentes à l'écran de l'ordinateur illustrent la réduction du bruit par filtrage numérique.

.

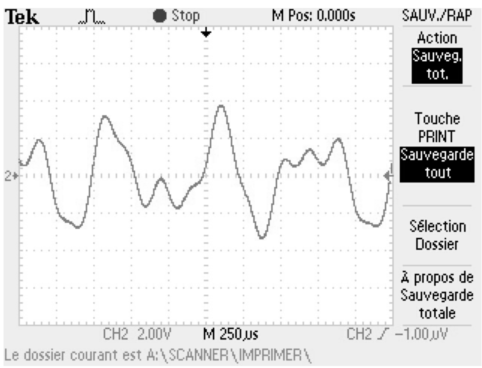
III- Détection synchrone

Au cours d'une expérience, le professeur a généré une tension [1] :

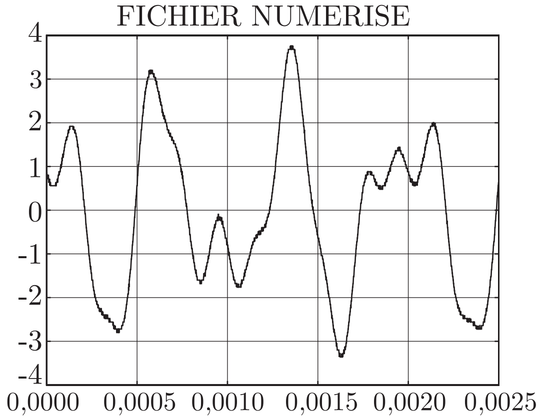
$$e(t) = E_{01}\,\cos(\omega_1 t) + E_{02}\,\cos(\omega_2 t) + E_{03}\,\cos(\omega_3 t)$$

en additionnant trois tensions sinusoïdales d'amplitudes E_{01}, E_{02}, E_{03} et de fréquences f_1, f_2, f_3 ($f_1 < f_2 < f_3$). Le signal obtenu à l'écran de l'oscilloscope a ensuite été numérisé sous forme d'une liste `L` comportant 2 500 points de mesure (de `L[0]` à `L[2499]`).

ECRAN D'OSCILLOSCOPE



FICHIER NUMERISE



1. Dans cette partie du TP, les valeurs numériques de ω_1, ω_2, E_{01} et E_{02} n'ont rien de commun avec celles de la partie précédente.

Imaginer un algorithme permettant, à partir de la liste `L`, de retrouver les fréquences f_1, f_2, f_3, ainsi que les amplitudes relatives E_{01}, E_{02}, E_{03}.

Appeler l'examinateur
Présenter l'algorithme à l'examinateur.
.

À l'aide du fichier Python qui contient `L`, fourni par le professeur, réaliser le script correspondant à l'algorithme précédent(les fréquences f_i sont inférieures à 10 kHz).

Appeler l'examinateur
Proposer à l'examinateur les valeurs supposées pour f_i, E_{0i}, ainsi que la méthode qui a permis de les trouver.
.

Matériel disponible :

PAILLASSES ÉLÈVES
- 2 GBF ;
- 1 oscilloscope numérique ;
- 1 ordinateur équipé de LATIS PRO et de PYTHON ;
- 1 carte d'acquisition SYSAM ;
- 2 boîtes de résistances à décades ;
- 1 boîte de capacités à décades.

ANNEXE

La détection synchrone

Un signal T_0-périodique a pour décomposition en série de Fourier :

$$e_1(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) \text{ où } \omega_n = n \times \frac{2\pi}{T_0}$$

La multiplication de ce signal par un signal sinusoïdal $e_2(t) = E_0 \cos(\Omega t)$ produit un nouveau signal :

$$\begin{aligned} e(t) &= e_1(t) \times e_2(t) = a_0 E_0 \cos(\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n E_0 \cos(\omega_n t + \varphi_n) \cos(\Omega t) \\ &= a_0 E_0 \cos(\Omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E_0}{2} \cos\left[(\omega_n - \Omega)t + \varphi_n\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n E_0}{2} \cos\left[(\omega_n + \Omega)t + \varphi_n\right] \end{aligned}$$

Deux cas peuvent se présenter :

- Si $\Omega = \omega_n$, il existe dans $e(t)$ une composante continue, d'amplitude $\dfrac{a_n E_0}{2}$;
- Si $\Omega \neq \omega_n$, le signal $e(t)$ ne comporte par de composante continue.

En filtrant judicieusement $e(t)$ il est donc possible d'isoler un signal :

- $s(t) = \dfrac{a_n E_0}{2}$, dès que $\Omega = \omega_n$;
- $s(t) = 0$ tant que $\Omega \neq \omega_n$.

En modifiant ensuite la pulsation Ω et en mesurant l'amplitude S_0 de $s(t)$, on peut reconstituer le spectre de $e_1(t)$: