Travaux Pratiques de Physique

Lycée Charlemagne Paris

MP

2 heures
Calculatrices autorisées

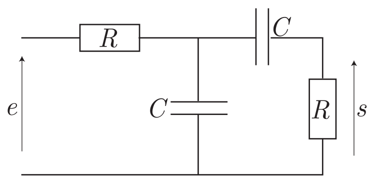
Filtre de Wien

Objectif

L'objectif de ce TP est d'établir le lien qui existe entre la fonction de transfert d'un circuit (réponse fréquentielle) et la réponse de ce circuit à un signal $e(t)$ quelconque, notamment un échelon de tension (réponse temporelle). C'est le filtre de Wien qui servira de filtre d'ordre 2.

I- Calculs préliminaires

On s'intéresse au circuit schématisé ci-dessous (filtre de Wien) :



dans lequel $R = 1$ kΩ et $C = 100$ nF.

Question

Établir l'équation différentielle liant $s(t)$ et $e(t)$.

On peut montrer que la fonction de transfert dece circuit se met sous une forme canonique :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_c} - \dfrac{\omega_c}{\omega}\right)} \tag{1}$$

Question

Donner l'expression de ω_c en fonction de R, C et donner également les valeurs numériques de H_0 et Q.
Retrouver l'équation différentielle du circuit à partir de la fonction de transfert.

II- Réponse fréquentielle

Faire une étude fréquentielle du circuit signifie étudier l'influence de la fréquence sur le signal de sortie. Le diagramme de Bode (en fréquence et en amplitude) est l'outil adapté à la situation.

Questions

Après avoir donné l'expression du gain en décibels du circuit, déterminer les équations des asymptotes du diagramme de Bode en amplitude, lorsque $\omega \to \infty$ et lorsque $\omega \to 0$.
En déduire une représentation graphique du diagramme de Bode.

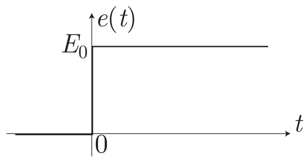
Réaliser l'expérience et tracer le diagramme de Bode expérimental $G_{\mathrm{dB}} = f(\log \omega)$ (soit sur du papier millimétré, soit à l'aide de LATIS PRO et de l'imprimante). On fournira le tracé avec le compte-rendu du T.P.

Question

En expliquant la démarche, retrouver les valeurs numériques de ω_c, H_0 et Q.

III- Réponse temporelle

Faire une étude temporelle du circuit consiste à étudier la réponse $s(t \geqslant 0)$ à une excitation $e(t)$; notamment, au cours de ce T.P., il s'agira d'un échelon de tension d'amplitude E_0 :



Questions

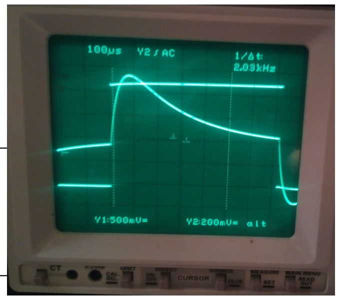
Résoudre l'équation différentielle trouvée en I- ; on pourra poser $\alpha = \dfrac{3\omega_c}{5}$ et $\Omega = \dfrac{\omega_c\sqrt{5}}{2}$ et expliciter le conditions initiales $s(t=0)$ et $\left.\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$.

Établir que $s(t)$ admet un maximum à la date $t_m = \dfrac{1}{\omega_c\sqrt{5}} \ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\right)$.

En déduire une représentation graphique de $s(t)$.

.

Réaliser l'expérience avec un échelon de tension d'amplitude $E_0 = 2$ V et dont la période T_0 permet de visualiser la courbe de $s(t)$ précédemment décrite.



Questions

Donner la période T_0 choisie.

Imprimer la courbe de $s(t)$ obtenue expérimentalement.

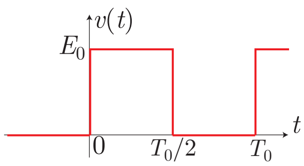
Conclure, notamment sur la valeur de t_m.

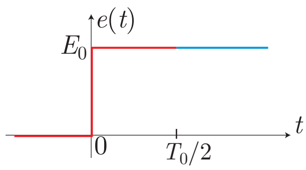
.

IV- Approche numérique

1. Décomposition spectrale de $e(t)$

L'échelon de tension $e(t)$ n'étant pas périodique, il ne serait pas pertinent de chercher les coefficients de la série de Fourier associée (elle n'existe pas). Cependant, les courbes observées à l'oscilloscope peuvent être obtenues à partir d'un GBF qui lui, en revanche, délivre un signal $v(t)$ T_0-périodique.





Les deux courbes peuvent ainsi être confondues sur l'intervalle $t \in \left[0; \dfrac{T_0}{2}\right]$ et, c'est sur cet intevalle que l'on pourra écrire :

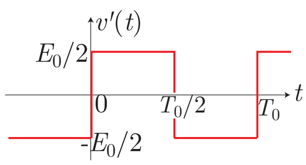
$$\text{Pour } t \in \left[0; \frac{T_0}{2}\right] \; : e(t) = v(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \text{ où } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

avec :

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} v(t)\,\mathrm{d}t \qquad a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} v(t)\,\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} v(t)\,\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t$$

On souhaite calculer les coefficients de cette série et, pour rendre le calcul plus facile, nous effectuerons la translation de courbe :

$$v'(t) = v(t) - \frac{E_0}{2}$$



Ainsi, puisque la fonction $v'(t)$ est impaire, ses coefficients $a_0, a_1, \cdots$ sont nuls :

$$v'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin(n\omega_0 t) \text{ avec } \boxed{b'_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} v'(t)\,\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t}$$

de sorte que :

$$e(t) = v(t) = v'(t) + \frac{E_0}{2} \Rightarrow \boxed{e(t) = \frac{E_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin(n\omega_0 t)} \tag{2}$$

Question

Déterminer l'expression de b'_n et la présenter sous la forme :

$$b'_n = \frac{E_0}{n\pi} \times f(n)$$

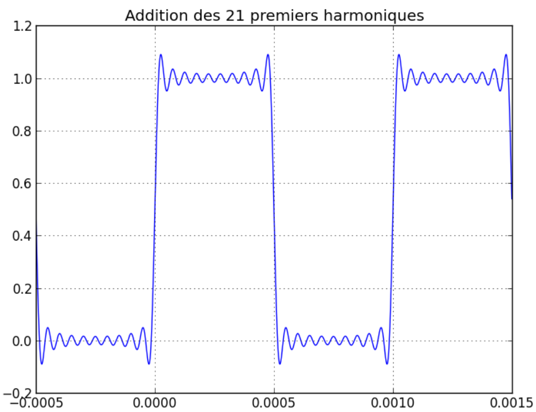
où $f(n)$ est une fonction de n que l'on explicitera.

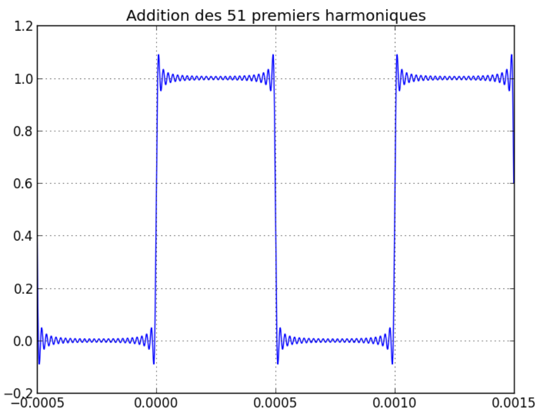
.

Saisir alors un script qui permet le tracé de la somme (2), à partir de l'expression trouvée pour les b'_n ; un script de votre composition ou en complétant le script ci-dessous (auquel des lignes ont été effacées) :

```python
from math import*
import matplotlib.pyplot as plt
T0,E0=1E-03,1
W0=2*pi/T0
Nmax=20
def a(n):

def e(t):
    s=E0/2
    for n in range(1,Nmax+1):
        s=s+a(n)*sin(n*2*pi/T0*t)
    return s


plt.plot(X,Y)
plt.title("Addition des {:.0f} premiers harmoniques".format(Nmax+1))
plt.grid()
plt.show()
```

permet ce tracé, en modifiant le nombre N_{max} d'harmoniques pris en compte :





On constate évidemment que plus plus N_{max} est important, plus la série ressemble à $v(t)$ et donc à $e(t)$ pour $t \in \left[0; \dfrac{T_0}{2}\right]$.

Question

Imprimer un script fonctionnel, ainsi que les courbes qu'il trace.

.

2. Recomposition de $s(t)$

L'image complexe associée à la série (2) est également une série :

$$\underline{e} = \frac{E_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega_0 t - \pi/2)} \Rightarrow e(t) = \Re\left\{\underline{e}\right\}$$

dans laquelle chaque harmonique est soumis à la fonction de transfert (1) :

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_c} - \dfrac{\omega_c}{\omega}\right)} = H(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\phi(\omega)}$$

avec :

$$H(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_c} - \dfrac{\omega_c}{\omega}\right)^2}} \text{ et } \phi(\omega) = \arctan\left[Q\left(\frac{\omega_c}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_c}\right)\right]$$

Ainsi, on notera :

$$H_0 = \lim_{\omega \to 0} H(\omega) \qquad H_n = H(n\omega_0) \qquad \phi_n = \phi(n\omega_0)$$

de manière à présenter l'image complexe du signal $s(t)$ sous la forme :

$$\underline{s} \;=\; H_0\frac{E_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi_n} \times b'_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega_0 t - \pi/2)} = H_0\frac{E_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n b'_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega_0 t + \phi_n - \pi/2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{s(t) = \frac{H_0 E_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} H_n b'_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)} \tag{3}$$

Question

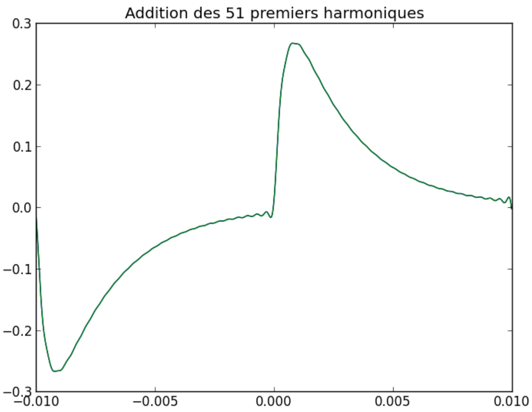
Calculer H_0

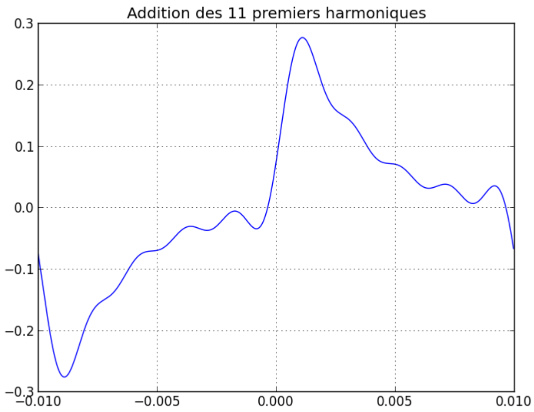
.

Écrire un script Python qui permet de donner une représentation graphique de la série (3). Par exemple, le script ci-dessous (dans lequel certaines lignes ont malencontreusement disparu), donne cette représentation pour un nombre d'harmoniques ($N_{\max} + 1$) que l'on peut modifier.

```
from math import*
import matplotlib.pyplot as plt
T0,E0=0.02,1
w0=2*pi/T0
wc=1000
Nmax=50
r=w0/wc
def a(n):

def H(n):
    return 1/sqrt(9+(n*r-1/(n*r))**2)
def phi(n):
    return atan((1/(r*n)-r*n)*1/3)
def s(t):



    return s


plt.plot(X,Y)
plt.title("Addition␣des␣{:.0f}␣premiers␣harmoniques".format(Nmax+1))
plt.grid()
plt.show()
```

La période T_0 a due être ajustée «à la main» pour permettre une visualisation confortable de la courbe (sans qu'il soit nécessaire de zoomer), et un paramètre $r = \dfrac{\omega_0}{\omega_c}$ a été ajouté de manière à faciliter la saisie des fonctions H_n et ϕ_n.





Question

Imprimer votre script, ainsi que les courbes qu'il génère, pour au moins deux valeurs de $N_{\max}$. Conclure.

.

Matériel disponible :

<u>Paillasses élèves</u>

- 2 résistances de 1 kΩ ;
- 2 condensateurs de 100 nF ;
- 1 plaque d'expérimentation électronqiue + fils électriques ;
- 1 oscilloscope numérique ;
- 1 GBF ;
- 1 carte SYSAM +
- 1 ordinateur comportant Latis Pro et connecté à une imprimante.

<u>Paillasses élèves</u>

- Papier millimétré cartésien + semi-log + log-log.