Filière MP

Extrait ESTP 1984

PHYSIQUE

Le potentiel générateur de marée

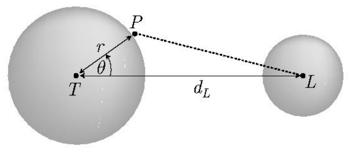
Le problème fait intervenir le soleil (S), la Terre (T) et la lune (L). Les masses respectives sont notées M_S, M_T et M_L, les rayons respectifs R_S, R_T et R_L. Les distances des centres des systèmes TS et TL sont notées d_S et d_L. Selon les approximations précisées au cours de l'énoncé, ces objets seront traités soit comme des sphères homogènes, soit comme des masses quasi-ponctuelles. En outre, dans tous les cas, les orbites relatives (T autour de S, L autour de T) seront supposées quasi-circulaires.
La force gravitationnelle entre deux objets de masses M et M', de centres de masse C et C' (avec $\vec{r} = \overrightarrow{CC'}$) est donnée par la loi de Newton : $\vec{F} = -G\dfrac{MM'}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$, où G est la constante de gravitation universelle.
Le champ de gravitation $\vec{A}$ de la masse M est alors défini à partir de la relation : $\vec{F} = M\,\vec{A}$.
Données :
- Constante de gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11}$ SI
- Distances : $d_S = 1,50.10^{11}$ m ; $d_L = 3,8.10^8$ m ; $R_T = 6\,400$ km
- Champ de pesanteur terrestre (au sol) : $g_0 = 9,81$ m.s^{-2}

I- Prélimimaires

1. Établir que le champ de gravitation $\vec{A}$ dérive d'un potentiel U que l'on exprimera en fonction de G, M et r.
2. On note $\vec{A} = \vec{g}$ le champ gravitationnel de T et g_0 son module en $r = R_T$. En déduire la masse M_T de T en fonction de G, g_0 et R_T.
3. On suppose T quasi-ponctuelle en orbite circulaire uniforme de rayon d_S, à la vitesse angulaire $\omega = \dfrac{2\pi}{T_S}$, autour de S (où la période T_S vaut 365 jours). En déduire M_S en fonction de G, ω et d_S.
4. *Application numérique* : calculer M_T et M_S.

I- Le phénomène des marées

L'attraction gravitationnelle de L (ou de S) n'est pas uniforme sur T. Il en résulte un déplacement des masses liquides tel que l'équilibre soit restitué par une variation de potentiel de pesanteur propre de T.
On étudie d'abord l'influence de L. Le champ des marées dû à la Lune au point P (situé sur la surface terrestre) est noté $\vec{C}(P) = \vec{A}(P) - \vec{A}(T)$, où $\vec{A}$ désigne le champ gravitationnel créé par la Lune.



1. Écrire le potentiel gravitationnel W dont dérive le champ de marée $\vec{C}(P)$ en un point P de T en utilisant les coordonnées (r,θ) du point P (coordonnées sphériques), en fonction des paramètres G, M_L et d_L.
2. Au voisinage de $r = R_T$, on a $r \ll d_L$. Établir l'expression V du développement de W au second ordre (développement limité aux termes $\dfrac{r^2}{d_L^2}$).
3. En déduire les coordonnées radiale C_r et orthoradiale C_θ du champ des marées créé par la Lune. Donner l'expression de ce champ en $\theta = 0$ et $r = R_T$, en fonction de G, M_L, d_L et R_T. Préciser l'intérêt de calculer préalablement V.

4. On peut mesurer que l'effet de marée dû à S est moindre que celui dû à L et dans un rapport égal à 2,3. En déduire l'expression du rapport $\dfrac{M_L}{M_S}$.
Calculer M_L.
5. Déterminer, à partir de l'expression approchée V du potentiel des marées, le marnage (différence de hauteur d'eau entre une pleine mer et une basse mer consécutives) h_L de la marée ainsi produite en fonction des paramètres M_L, M_T, R_T et d_L. On supposera que la surface des océans est une surface isobare.
6. Calculer h_L et $h = h_L + h_S$ (où h_S est la contribution de S).

Réponses

I- Préliminaires
1. $U = -\dfrac{GM}{r}$
2. $M_T = \dfrac{g_0 R_T^2}{G}$
3. $M_S = \dfrac{d_S^3\omega^2}{G}$
4. $M_T = 6.10^{24}$ kg et $M_S = 2.10^{30}$ kg

II- Le phénomène des marées
1. $W = \dfrac{GM_L}{d_L} - \dfrac{GM_L}{\sqrt{d_L^2 + r^2 - 2rd_L\cos\theta}}$
2. $V = \dfrac{GM_L}{2d_L^3}\,r^2\,(1 - 3\cos^2\theta) + V_0$ où $V_0 = -\dfrac{GM_L}{d_L}$
3. $\begin{cases} C_r = \dfrac{GM_L}{d_L^3}\,r\,(3\cos^2\theta - 1) \\ C_\theta = -\dfrac{3GM_L}{d_L^3} - r\sin\theta\cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_r(R_T,0) = \dfrac{2GM_L}{d_L^2}\times\dfrac{R_T}{d_L} \\ C_\theta(R_T,0) = 0 \end{cases} \Rightarrow$ pour $r = R_T$ et $\theta = 0$
4. $\dfrac{M_L}{M_S} = 2,3\,\dfrac{d_L^3}{d_S^3} \Rightarrow M_L = 7,4.10^{22}$ kg
5. $V_{\text{tot}} = -\dfrac{GM_T}{r} + \dfrac{GM_L}{2d_L^3}\,r^2\,(1 - 3\cos^2\theta) + V_0 \Rightarrow h_L \simeq \dfrac{M_L}{M_T}\times\dfrac{3R_T^3}{2d_L^3}\times R_T$
6. $h_L = 56,6$ cm ; $h_S = 24,6$ cm ; $h = 81,2$ cm