Filière MP

Extrait Banque Ecrin 1995

PHYSIQUE

Effet de Marée en astronomie
À propos de la comète de Shoemaker-Levy 9

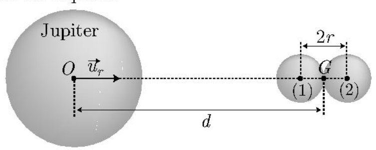
La comète de Shoemaker-Levy 9, en orbite autour de Jupiter, est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour se fragmenter en morceaux à cause des forces de marée dues à Jupiter. Les différents morceaux de la comète se sont finalement écrasés sur Jupiter en juillet 1994 et cette collision a été suivie en détail et en direct par les astronomes du monde entier.
Le but de ce problème est de comprendre, à l'aide de modèles très simples, l'origine de la fragmentation, puis de tirer un ordre de grandeur de la taille maximale des morceaux issus de cette fragmentation.
On supposera que le référentiel «Jupiterocentrique» est galiléen et on négligera dans tout le problème les effets dus au Soleil dans ce référentiel. Jupiter est supposé sphérique, homogène, de masse M_J, de rayon R_J et de masse volumique μ_J.

Données : $R_J = 71\,400$ km ; $M_J = 1,91.10^{27}$ kg ; $G = 6,67.10^{-11}$ SI (constante de gravitation universelle).

I- Estimation de la limite de Roche

On cherche ici à déterminer la distance en dessous de laquelle un corps (la comète) s'approchant de Jupiter se séparerait en plusieurs morceaux sous l'effet des forces de marée dues à Jupiter. Pour cela, on fait les hypothèses suivantes :

- Le centre d'inertie G de la comète (de masse volumique μ_c) est en orbite circulaire de rayon d autour de Jupiter et de période T.
- La comète est constituée de deux sphères identiques de masse m et de rayon r, homogènes et disposées comme indiqué sur la figure ci-dessous. Ces deux sphères ne sont liées entre elles que par leur attraction gravitationnelle mutuelle. On suppose que la disposition des deux sphères reste inchangée, les centres étant toujours alignés avec le centre O de Jupiter.



- Lors des calculs d'attraction gravitationnelle sur une sphère de masse m et de rayon r, on suppose que toute la masse m est concentrée au centre de la sphère.

1. Déterminer la vitesse v du centre d'inertie G de la comète en fonction du rayon de la trajectoire et des données. Donner l'expression de ω^2 ($\omega = \dfrac{2\pi}{T}$).
2. Faire un bilan des forces s'exerçant sur chacune des sphères constituant la comète dans le cas d'un contact maintenu, supposé sans frottement.
3. a- En appliquant le théorème de la résultante cinétique, en déduire deux équations.
   b- À quelle condition le contact entre les deux solides est-il rompu ?
   c- En déduire que le contact est rompu lorsque d devient inférieur à d_{lim}, appelée *limite de Roche*[1]. Exprimer $\dfrac{d_{\text{lim}}}{R_J}$ en fonction de μ_J et μ_c.
   Application numérique (on donne la masse la masse volumique de la comète : $\mu_c = 10^3$ kg.m^{-3}).
   d- Exprimer le module f de l'attraction mutuelle des deux solides en fonction de d_{lim}, G, M_J et m.
   e- Pourquoi parle-t-on de force de marée ?

1. Edouard Roche, astronome mathématicien et géophysicien français, 1820 – 1883.

II- Influence des forces de cohésion

Les observations on montré que la fragmentation de la comète s'était produite lorsque celle-ci était arrivée à une distance $d_0 = 1,5 \times R_J$ de Jupiter. Ceci peut s'interpréter si l'on suppose qu'en plus de leur attraction mutuelle, les deux sphères sont liées par des forces de cohésion.

1. On note $F_{\text{cohésion}}$ le module de la force de cohésion d'une sphère sur une autre et f le module de leur attraction mutuelle. Établir alors que :
$$F_{\text{cohésion}} = f \times \left[\left(\frac{d_{\text{lim}}}{d_0}\right)^3 - 1\right]$$
Calculer numériquement le rapport $\dfrac{F_{\text{cohésion}}}{f}$.
2. Les forces de cohésion entre deux morceaux d'un solide sont à courte portée et proportionnelles à la surface de contact entre les deux morceaux. Dans le cas de la glace (constituant essentiel de la comète), on peut estimer la force de cohésion P_0 par unité de surface à partir de l'observation suivante : la taille limite sur Terre des stalactites de glace est de 3,0 m ; au delà, elles s'effondrent sous l'effet des forces de pesanteur. En considérant le cas d'une stalactite cylindrique, en déduire la valeur de P_0.
On donne $g = 9,81$ m.s^{-2}, accélération de la pesanteur à la surface de la Terre et on assimilera la masse volumique de la glace à celle de la comète.
3. Pour calculer les forces de cohésion dans le cas de la comète, on considère que les deux parties de masse m sont en fait deux demi-sphères accolées de rayon r'.
   a- Exprimer r' en fonction de r.
   b- En utilisant les questions 1. et 2., en déduire une estimation de la dimension r des morceaux issus de la fragmentation (on conservera pour cela le modèle des deux sphères pour le calcul de l'attraction mutuelle, et celui des demi-sphères pour le calcul des forces de cohésion). Exprimer r en fonction de P_0, μ_c, G et $\alpha = \left(\dfrac{d_{\text{lim}}}{d_0}\right)^3 - 1$. Calculer numériquement r.

Réponses

I- Estimation de la limite de Roche

1. $v = \sqrt{\dfrac{GM_J}{d}}$ et $\omega^2 = \dfrac{GM_J}{d^3}$
2. $\vec{F}_{/1} = \vec{F}_{\text{Jupiter}\to 1} + \vec{F}_{2\to 1}$ et $\vec{F}_{/2} = \vec{F}_{\text{Jupiter}\to 2} + \vec{F}_{1\to 2}$
3. a- $\begin{cases} 0 = -\dfrac{GmM_J}{(d-r)^2} + \dfrac{Gm^2}{4r^2} - R_{2\to 1} + m\omega^2(d-r) \text{ (sphère 1)} \\ 0 = -\dfrac{GmM_J}{(d+r)^2} - \dfrac{Gm^2}{4r^2} - R_{1\to 2} + m\omega^2(d+r) \text{ (sphère 2)} \end{cases}$
   b- Absence de contact dès que $R_{1\to 2} = R_{2\to 1} = 0$
   c- $\dfrac{d_{\text{lim}}}{R_J} = \left(12\dfrac{\mu_J}{\mu_c}\right)^2 = 2,47$
   d- $f = \dfrac{G}{d_{\text{lim}}^2} \times \dfrac{3m^2M_J}{2}$

II- Influence des forces de cohésion

1. $\dfrac{F_{\text{cohésion}}}{f} \simeq 3,46$
2. $P_0 = \mu_0 g h = 2,94.10^4$ N.m^{-2}
3. a- $r' = r \times 2^{3/2}$
   b- $r = \sqrt{\dfrac{9}{4} \times 2^{2/3} \times \dfrac{P_0}{\pi G\alpha\mu_c^2}} = 12,0$ km