

Électromagnétisme

I Électrostatique

1– Loi de Coulomb

a– Charges ponctuelles

Une charge q placée en O exerce une force électrostatique $\vec{F}_{q/q'}$ sur une charge q' placée en M , donnée par la *loi de Coulomb* :

$$\vec{F}_{q/q'} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 OM^3} \overrightarrow{OM} = q' \vec{E}(M)$$

où $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi \times 10^9} \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ est la permittivité électrique du vide. Cette loi définit le champ électrique que la charge q produit en M :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$



Soit une ensemble de n points P_i portant les charges respectives q_i . Chacun de ces points crée en M un champ électrique dont la résultante vaut :

$$\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\overrightarrow{P_i M}}{P_i M^3}$$

Cette loi exprime le *principe de superposition*¹ du champ électrique.

b– Distributions continues de charges

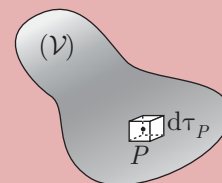
Les charges peuvent être distribuées dans l'espace d'une manière continue, de sorte qu'il n'est pas possible de distinguer chaque charge individuelle q_i . Selon que ces charges sont réparties dans un volume (\mathcal{V}) à trois dimensions, sur une surface (Σ) ou sur une courbe (Γ), on définit des densités de charges correspondantes.



DÉFINITION

Soit (\mathcal{V}) un volume chargé, décomposable en éléments de volume $d\tau$ centrés sur des points P de (\mathcal{V}) et portant la charge δq . La densité volumique de charges en P est définie par :

$$\rho(P) = \frac{\delta q}{d\tau} \Rightarrow \delta q = \rho(P) d\tau$$



La charge totale contenue à l'intérieur d'un volume \mathcal{V} pourra ainsi être donnée par le calcul de l'intégrale :

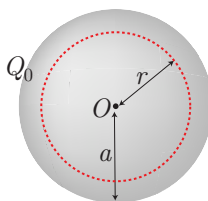
$$Q_{\mathcal{V}} = \iiint_{(\mathcal{V})} \delta q_P = \iiint_{(\mathcal{V})} \rho(P) d\tau_P \quad (1)$$

On remarque que, si la charge est répartie uniformément dans le volume V de (\mathcal{V}), $\rho(P) = \rho$ ne dépend pas du point P , ce qui simplifie le calcul précédent :

$$Q_{\mathcal{V}} = \iiint_{(\mathcal{V})} \rho d\tau_P = \rho \times \iiint_{(\mathcal{V})} d\tau_P \Rightarrow Q_{\mathcal{V}} = \rho \times V \text{ si } \rho \text{ est uniforme.}$$

En revanche, si ρ dépend de P , cette intégrale doit être calculée. Par exemple, considérons une boule de centre O , de rayon a , portant une densité volumique de charge $\rho(P) = \frac{A}{OP^2} e^{-OP/a}$, où A est une constante :

1. Ce principe stipule que le champ produit dans l'espace simultanément par plusieurs distributions de charges est le même que la somme des champs que produirait individuellement chacune de ces distribution si elle était seule.



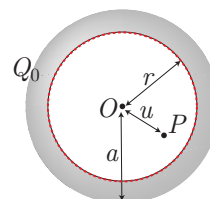
En admettant que la charge totale de cette boule vaut Q_0 , on cherche quelle est la charge $Q_{\text{int}}(r)$ contenue à l'intérieur d'une sphère (Σ) de rayon r , centrée sur O . Deux cas sont à distinguer :

- Si $r < a$, cette charge est donnée par l'intégrale (1), dans laquelle le point P doit se situer à une distance $u < r$ de O afin de parcourir l'intérieur de la sphère (Σ) :

$$\rho(P) = \frac{A}{u^2} e^{-u/a} \text{ où } u \neq 0$$

tandis que le volume élémentaire au voisinage de P s'exprime en coordonnées sphériques :

$$d\tau_P = u^2 du \sin \theta d\theta d\varphi$$



Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} Q_{\text{int}}(r) &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{u=\varepsilon}^r \frac{A}{u^2} e^{-u/a} \times u^2 du \sin \theta d\theta d\varphi \text{ avec } \varepsilon \rightarrow 0 \\ &= A \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{u=\varepsilon}^r e^{-u/a} du \text{ avec } \varepsilon \rightarrow 0 \\ &= A \times 2\pi \times [-\cos \theta]_0^{\pi} \times \left[-a e^{-u/a} \right]_{u=\varepsilon}^r \text{ avec } \varepsilon \rightarrow 0 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[4\pi Aa (e^{-\varepsilon/a} - e^{-r/a}) \right] = 4\pi Aa (1 - e^{-r/a}) \end{aligned}$$

Notamment, puisque la charge totale portée par la boule vaut Q_0 :

$$Q_{\text{int}}(r = a) = Q_0 \Rightarrow 4\pi Aa (1 - e) = Q_0 \Rightarrow 4\pi Aa = \frac{Q_0}{1 - e} \Rightarrow Q_{\text{int}}(r) = Q_0 \times \frac{1 - e^{-r/a}}{1 - e}$$

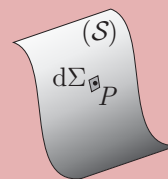
- Si $r \geq a$, cette charge vaut simplement la charge Q_0 de la boule.



DÉFINITION

Soit une surface (\mathcal{S}) chargée. Cette surface peut être décomposée en surfaces élémentaires $d\Sigma$, centrées sur des points P de (\mathcal{S}), portant la charge δq calculable à partir de la densité surfacique $\sigma(P)$ en chaque point P :

$$\sigma(P) = \frac{\delta q}{d\Sigma} \Rightarrow \delta q = \sigma(P)d\Sigma$$



REMARQUE

On dit qu'une distribution de charge est surfacique lorsque les charges sont réparties sur une surface (Σ). Or, d'un point de vue physique, une telle surface (de volume nul) ne peut contenir de charge. Il s'agit en fait d'un volume d'épaisseur ε infiniment petite :



La charge δq qui apparaît portée par un élément de surface $d\Sigma$ est, en réalité, confinée dans un volume

$d\tau = \varepsilon \times d\Sigma$. Les densités volumique et surfacique de charges sont alors définies par :

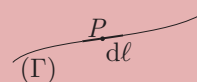
$$\begin{cases} \rho = \frac{\delta q}{d\tau} \\ \sigma = \frac{\delta q}{d\Sigma} \end{cases} \Rightarrow \delta q = \sigma \times d\Sigma = \rho d\tau = \rho \times \varepsilon d\Sigma \Rightarrow \boxed{\sigma = \rho \times \varepsilon}$$



DÉFINITION

Soit une courbe (Γ) chargée. Chaque élément $d\ell$ de (Γ) porte une charge δq à l'origine de la définition de la densité linéique de charges :

$$\boxed{\lambda = \frac{\delta q}{d\ell} \Rightarrow \delta q = \lambda d\ell}$$



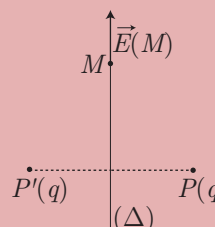
c- Symétries des charges



DÉFINITION

Un axe (Δ) est appelé axe de symétrie électrostatique si tout couple de points $\{P, P'\}$, géométriquement symétriques par rapport (Δ) , portent des charges identiques, soit encore :

$$\forall P' = \text{sym} \{P\}, \rho(P) = \rho(P')$$



On peut montrer que :

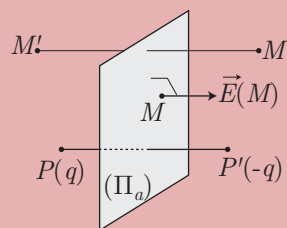
le champ électrique $\vec{E}(M)$, produit par la distribution de charges sur un point de (Δ) , est colinéaire à l'axe (Δ) .



DÉFINITION

Soient P et P' deux points géométriquement symétriques par rapport à un plan (Π_a) et portant des charges q et $q' = -q$. Le plan (Π_a) est alors un plan d'antisymétrie électrostatique pour l'ensemble des couples de points $\{P, P'\}$, soit encore :

$$\forall P' = \text{sym} \{P\}, \rho(P') = -\rho(P)$$



On montre que, dans ces conditions :

le champ électrique produit, en tout point M d'un plan (Π_a) d'antisymétrie électrostatique, est perpendiculaire à (Π_a) .

REMARQUE

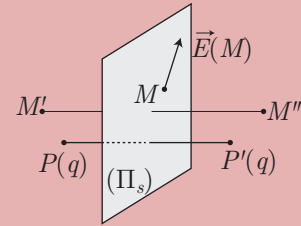
On montre également que si deux points M' et M'' sont symétriques par rapport à un plan d'antisymétrie électrostatique, les champs $\vec{E}(M')$ et $\vec{E}(M'')$ vérifient :

$$\boxed{\vec{E}(M'') = -\text{sym} \{ \vec{E}(M') \} \text{ pour } M'' = \text{sym} \{ M' \}}$$


DÉFINITION

Soient P et P' deux points géométriquement symétriques par rapport à un plan (Π_s) ; le plan (Π_s) est appelé plan de symétrie électrostatique si les charges q et q' , portées par tout couple $\{P, P'\}$, sont identiques, soit encore :

$$\forall P' = \text{sym} \{P\}, \rho(P) = \rho(P')$$



Enfin, on montre également que :

le champ électrique produit par une distribution (\mathcal{D}) de charges, en tout point M d'un plan de symétrie électrostatique (Π_s) , appartient à (Π_s) .

REMARQUE

Si M' et M'' sont deux points symétriques par rapport à un plan de symétrie électrostatique, on montre aussi que les champs $\vec{E}(M')$ et $\vec{E}(M'')$ qui y règnent sont symétriques par rapport à ce plan :

$$\vec{E}(M'') = \text{sym} \{ \vec{E}(M') \} \text{ pour } M'' = \text{sym} \{ M' \}$$

En conclusion, on retiendra que pour déterminer la direction du champ électrique \vec{E} produit en un point M par une distribution (\mathcal{D}) de charges, il faut :

- chercher, dans un premier temps, s'il existe un axe (Δ) de symétrie électrostatique passant par M ; dans ce cas : $\vec{E}(M) \parallel (\Delta)$.
- sinon, chercher si M appartient à un plan (Π_a) d'antisymétrie électrostatique pour (\mathcal{D}) . S'il existe : $\vec{E}(M) \perp (\Pi_a)$.
- à défaut d'un plan d'antisymétrie ou d'un axe de symétrie, trouver un plan (Π_s) de symétrie pour (\mathcal{D}) , passant par M . Le cas échéant, $\vec{E}(M)$ appartient à (Π_s) mais, pour autant, la direction de $\vec{E}(M)$ n'est pas encore accessible. Il faut alors trouver un autre plan (Π'_s) de symétrie électrostatique pour (\mathcal{D}) , passant par M . Dans ce cas, la direction de $\vec{E}(M)$ est celle de l'intersection de (Π_s) et (Π'_s) .

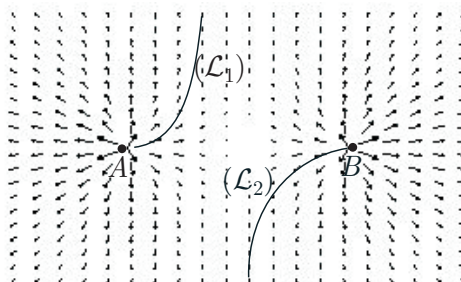
Attention : Les éléments de symétrie (axes ou plans) doivent nécessairement contenir le point M où est déterminée la direction du champ $\vec{E}(M)$.

d- Lignes de champ


DÉFINITION

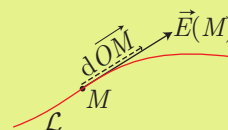
Une ligne de champ \mathcal{L} est une courbe en tout point tangente au champ électrique \vec{E} .

Par exemple, quelques lignes de champ (\mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2) créées par deux charges identiques, situées en A et B , sont reproduites sur la figure ci-dessous.



Pour déterminer l'équation d'une ligne de champ (\mathcal{L}), on écrit que tout déplacement $d\vec{OM}$ le long de cette ligne est colinéaire à cette ligne, ce qui se traduit mathématiquement par l'équation :

$$\forall M \in \mathcal{L}, d\vec{OM} \wedge \vec{E}(M) = \vec{0}$$



Par exemple, considérons un champ électrique \vec{E} de composantes cartésiennes :

$$E_x(x, y, z) = A \times x \quad E_y(x, y, z) = -A \times y \quad E_z(x, y, z) = 0 \text{ où } A = \text{cte}$$

En coordonnées cartésiennes, le vecteur position d'un point M se différencie facilement :

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow d\vec{OM} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

et la ligne de champ doit alors vérifier :

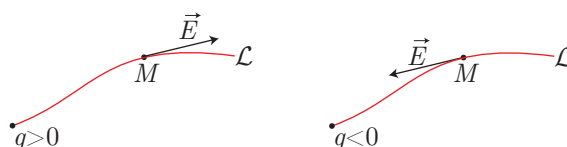
$$d\vec{OM} \wedge \vec{E}(M) = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} Ax \\ -Ay \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Ay dz \\ Ax dz \\ -Ay dx - Ax dy \end{pmatrix} = \vec{0}$$

- Si $dz \neq 0$, les deux premières équations imposent alors $x = 0$ et $y = 0$, auquel cas $E_x = E_y = 0$, ce qui signifie qu'il ne peut y avoir de ligne de champ correspondant à cette situation.
- Si $dz = 0$ (dans le plan $z = \text{cte}$), la troisième équation impose :

$$y dx + x dy = 0 \Rightarrow d(xy) = 0 \Rightarrow xy = \text{cte} \Rightarrow y = \frac{\text{cte}}{x}$$

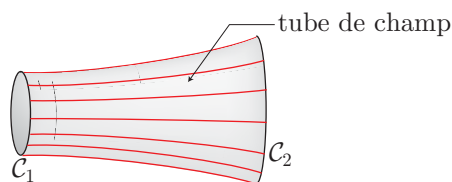
Les lignes de champ sont alors des branches d'hyperbole dans le plan d'équation $z = \text{cte}$.

REMARQUE Le champ produit par une charge ponctuelle vaut $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$. Ainsi, le long d'une ligne de champ produite par une charge q , $\vec{E}(M)$ est dirigé vers la charge si q est négative et s'en «éloigne» si $q > 0$:



DÉFINITION

On appelle *tube de champ* la surface constituée par les lignes de champ qui prennent appui sur deux courbes fermées C_1 et C_2 .



2- Potentiel scalaire

a- Définition

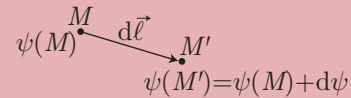
On appelle *champ scalaire* une fonction $\psi(M)$ qui dépend de la position du point M où elle est mesurée.



DÉFINITION

Soient deux points M et M' , infiniment voisins et tels que $\overrightarrow{MM'} = d\vec{\ell}$, où un champ scalaire prend les valeurs $\psi(M)$ et $\psi(M')$. La différence $d\psi = \psi(M') - \psi(M)$ est donnée à l'aide d'un vecteur, $\overrightarrow{\text{grad}} \psi$, appelé gradient de ψ :

$$d\psi = (\overrightarrow{\text{grad}} \psi) \cdot d\vec{\ell}$$



Le gradient de ψ est aussi noté : $\overrightarrow{\text{grad}} \psi \equiv \vec{\nabla} \psi$.

Le système de coordonnées choisi pour repérer M détermine l'expression des composantes² de $\overrightarrow{\text{grad}} \psi$ et de $d\vec{\ell}$.

En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \psi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_z$$

En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$



DÉFINITION

En électrostatique, le champ $\vec{E}(M)$ dérive d'une fonction scalaire $V(M)$, appelée *potentiel* :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$$

Par exemple, le champ produit par une charge ponctuelle $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ dérive d'un potentiel $V(r, \theta, \varphi)$ qui vérifie, en coordonnées sphériques³ :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

La projection de cette équation sur \vec{e}_θ et \vec{e}_φ impose $\frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ et $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$, ce qui montre que V ne dépend que du paramètre r . Ainsi, la projection de cette équation sur \vec{e}_r fournit :

$$\frac{dV}{dr} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \Rightarrow V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + V_0$$

où V_0 est une constante d'intégration.

Par convention, en l'absence de charge en l'infini, le potentiel est choisi nul à l'infini :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \text{ si } \lim_{r \rightarrow \infty} q = 0$$

Selon cette convention, le potentiel produit en $M(r, \theta, \varphi)$ par une charge ponctuelle placée en O vaut finalement :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (2)$$

2. Les trois expressions du gradient sont données ici à titre indicatif. Seule l'expression en coordonnées cartésiennes est à connaître pour les concours.

3. Dans la pratique, on choisit un système de coordonnées qui correspond à la géométrie du champ \vec{E} . Par exemple, dans le cas d'une charge ponctuelle, le champ adopte une symétrie sphérique.

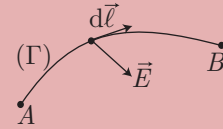
b- Circulation du champ électrostatique



DÉFINITION

On appelle circulation \mathcal{C} du champ électrique \vec{E} le long d'un parcours Γ liant deux points A et B la grandeur :

$$\mathcal{C} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



Compte tenu de la relation : $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ et de la définition du gradient :

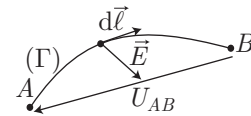
$$dV = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell}$$

la circulation \mathcal{C} peut aussi s'écrire :

$$\mathcal{C} = - \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{\ell} = - \int_A^B dV = V_A - V_B$$

où apparaît la différence de potentiel : $U_{AB} = V_A - V_B$:

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_B \quad (3)$$



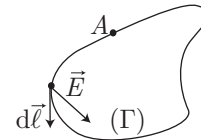
REMARQUE

Si, le long de Γ , le champ \vec{E} est uniforme, la tension $U_{AB} = V_A - V_B$ vaut simplement :

$$U_{AB} = \vec{E} \cdot \overrightarrow{AB} = V_A - V_B$$

Le long d'un parcours fermé Γ , la circulation du champ électrostatique est nulle :

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \text{ car } \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_A$$



Considérons maintenant une ligne de champ \mathcal{L} joignant deux points A et B aux potentiels respectifs V_A et V_B .

Si $\vec{E}(M)$ est en tout point $M \in \mathcal{L}$ dirigé de A vers B , le produit scalaire $\vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}$ demeure positif, de sorte que la loi (3) indique que :

$$V_A - V_B = \int_A^B \underbrace{\vec{E}(M) \cdot d\overrightarrow{OM}}_{>0} \Rightarrow V_A > V_B$$

On retiendra alors que :

Le long d'une ligne de champ, le champ \vec{E} est toujours dirigé du potentiel le plus élevé vers le potentiel le plus faible.
Comme conséquence, il ne peut pas exister de ligne de champ liant deux points de même potentiel.

c- Énergie potentielle

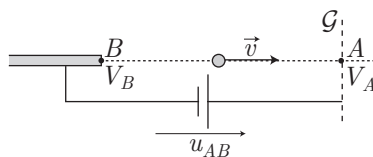
Lorsqu'une charge q , placée en M est plongée dans un champ électrique $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$, elle est soumise à une force :

$$\vec{F} = q \vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} [qV(M)] = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p$$

qui dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p . Donc, cette charge acquiert l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = q \times V(M)$$

Par exemple, considérons le dispositif schématisé ci-dessous (accélérateur d'électrons) :



Un électron, de charge $q = -e$ et de masse m , est émis en B (cathode métallique portée au potentiel V_B et chauffée à une température qui permet l'ionisation des atomes) avec une vitesse v_B . Une grille métallique (\mathcal{G}), soumise à un potentiel V_A (grâce à un générateur de tension $u_{AB} = V_A - V_B$) attire cet électron, qui arrive alors en A avec une vitesse $v_A \gg v_B$. En l'absence de frottements, l'énergie mécanique de l'électron se conserve entre A et B , c'est-à-dire :

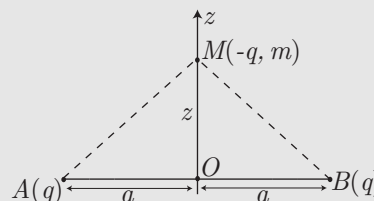
$$\mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_m(B) \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + q V_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + q V_B \Rightarrow v_A^2 - v_B^2 = \frac{2q}{m} (V_B - V_A)$$

c'est-à-dire en négligeant v_B par rapport à v_A :

$$v_A^2 \simeq -\frac{2e}{m} (V_B - V_A) = \frac{2e}{m} u_{AB} \Rightarrow v_A = \sqrt{\frac{2e}{m} u_{AB}}$$

EXERCICE

Deux charges ponctuelles identiques (q) sont placées aux points A et B d'un segment $[AB]$ centré sur O et de longueur $2a$. Une autre charge ponctuelle ($-q$) est placée en un point M de l'axe Oz perpendiculaire à $[AB]$, à une cote $OM = z$. La charge ponctuelle située en M a pour masse m et on négligera l'influence de la pesanteur sur son mouvement. On supposera, en outre, que sa présence reste sans effet sur les champs et potentiels créés par A et B et que le point matériel ne peut se déplacer que selon la verticale (Oz).



- Déterminer, en fonction de q , a et z , le potentiel créé en M par les charges situées en A et B .
- Montrer qu'il existe, pour M , une position d'équilibre stable repérée par $z = z_0$.
- Le point M étant légèrement écarté de cette position d'équilibre, il effectue des oscillations de pulsation ω . Exprimer ω en fonction de q , a et m .

Corrigé

- La distance AM valant $\sqrt{a^2 + z^2}$, la charge q placée en A crée en M le potentiel :

$$V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

Étant donné qu'il en va de même pour la charge q placée en B , il s'ensuit que le potentiel créé en M par ces deux charges vaut :

$$V = 2V_A = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 \sqrt{a^2 + z^2}}$$

- La charge $-q$ placée en M acquiert une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = -qV = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \times (a^2 + z^2)^{-1/2}$$

dont la dérivée est donnée par :

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dz} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{z}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

Il existe donc une position d'équilibre, à la cote $z = z_0$, qui rend *extremum* cette énergie potentielle, c'est-à-dire telle que :

$$\left. \frac{d\mathcal{E}_p}{dz} \right|_{z_0} = 0 \Rightarrow \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{z_0}{(a^2 + z_0^2)^{3/2}} = 0 \Rightarrow z_0 = 0$$

En outre :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dz^2} \right|_{z_0} &= \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(a^2 + z_0^2)^{3/2}} - \frac{3z_0^2}{(a^2 + z_0^2)^{5/2}} \right] = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{a^2 - 2z_0^2}{(a^2 + z_0^2)^{5/2}} \\ &\Rightarrow \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dz^2} \right|_{z_0=0} = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 a^3} > 0 \end{aligned}$$

suffit à montrer qu'en $z = z_0$ la fonction $\mathcal{E}_p(z)$ admet un *minimum* qui correspond, de surcroît, à la position d'un équilibre stable.

3. La pulsation ω des oscillations qui se produisent au voisinage de la position d'équilibre stable s'obtient directement à l'aide de la relation :

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m} \times \left. \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dz^2} \right|_{z_0}} \Rightarrow \omega = \frac{q}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 m a^3}}$$

d- Surface équipotentielle

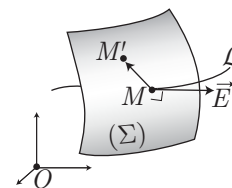


DÉFINITION

Une surface équipotentielle (Σ) est une surface dont tous les points sont au même potentiel électrostatique.

Considérons deux points quelconques M, M' d'une surface équipotentielle Σ , infiniment proches l'un de l'autre de sorte que $\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$.

Soit \mathcal{L} une ligne de champ qui coupe Σ au point M . Par définition, la différence des potentiels en M et M' vaut :



$$V_{M'} - V_M = dV = \overrightarrow{\text{grad}} V(M) \cdot d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\text{grad}} V(M) \cdot \overrightarrow{MM'}$$

où $\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V(M)$. Or, puisque $V_M = V_{M'}$ sur une même surface équipotentielle :

$$0 = \vec{E}(M) \cdot \overrightarrow{MM'} \Rightarrow \vec{E}(M) \perp \overrightarrow{MM'} \quad \forall (M, M') \in \Sigma$$

Cette proposition suffit à montrer que toute ligne de champ est normale aux surfaces équipotentielles qu'elle coupe.

3- Théorème de Gauss

a- Enoncé

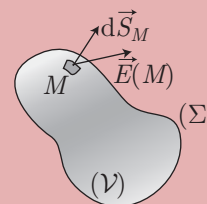


DÉFINITION

On appelle *flux du champ* \vec{E} , à travers une surface fermée (Σ), la grandeur :

$$\phi_E = \oiint_{(\Sigma)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M$$

l'élément de surface $d\vec{S}_M$ devant **toujours être orienté vers l'extérieur** du volume (\mathcal{V}) circonscrit par (Σ).



Soit q_{int} la charge contenue à l'intérieur de (\mathcal{V}). Le *théorème de Gauss* établit que :

$$\phi_E = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \quad (4)$$

L'emploi de la relation (4) en vue de calculer le champ $\vec{E}(M)$ créé en M par une distribution (\mathcal{D}) de charges doit respecter l'algorithme suivant :

1. représenter avec précision la situation physique et, notamment le système de coordonnées adopté ;
2. déterminer la direction de $\vec{E}(M)$ en M ainsi que les éventuels invariants de (\mathcal{D}) ;
3. trouver une surface fermée (Σ) qui contient M . Dans la pratique, (Σ) est composée (en totalité ou en partie) de surfaces sur lesquelles $\|\vec{E}\|$ demeure constant (généralement, (Σ) présente les mêmes symétries que (\mathcal{D})). C'est ce qui justifie l'étape précédente. Établir alors l'expression de ϕ_E ;
4. déterminer la charge q_{int} contenue dans le volume (\mathcal{V}) circonscrit dans (Σ) ;
5. utiliser enfin la relation (4).

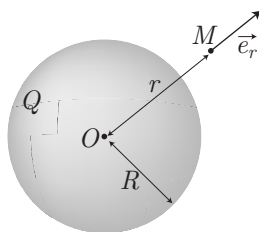
Attention : Il est impératif de respecter ces 5 étapes ; en négliger une conduit presque inévitablement à écrire n'importe quoi !

Notamment, on s'assurera sur les schémas, que la surface Σ adoptée passe par le point M .

b- Champ produit par une sphère

Calculons le champ électrostatique produit par une sphère de centre O , de rayon R et qui porte une charge Q uniformément répartie dans son volume \mathcal{V} . Appliquons pour cela l'algorithme décrit précédemment.

1. On représente la distribution \mathcal{D} de charge (sphère), le point M où l'on cherche à calculer $\vec{E}(M)$ et le système de coordonnées que l'on souhaite adopter (sphérique, de centre O et tel que $\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$) :



2. On cherche les éléments de symétrie de \mathcal{D} .

Attention : les éléments de symétrie recherchés doivent impérativement passer par le point M où l'on calcule $\vec{E}(M)$.

Ici, l'axe (O, \vec{e}_r) est un axe de symétrie de \mathcal{D} ; $\vec{E}(M)$ est donc colinéaire à \vec{e}_r .

D'autre part, \mathcal{D} est invariant par rotation (donc par modification de θ et φ). Par conséquent :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r = E(r) \vec{e}_r$$

3. On cherche une surface Σ sur laquelle appliquer le théorème de Gauss. Or, lorsque r est constant, $E(r)$ est aussi constant. Donc, une surface sphérique de rayon r convient sûrement. Représentons-la :

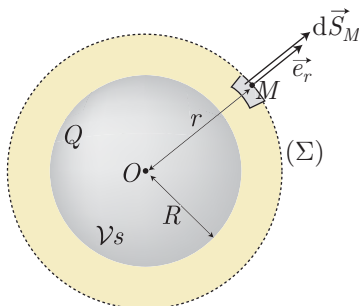


figure 1 : $r > R$

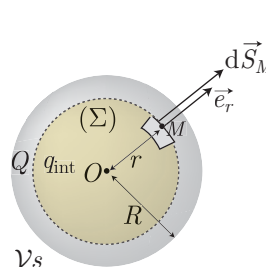


figure 2 : $r < R$

Attention : La surface Σ doit impérativement être représentée sur la papier (l'imaginer ne suffit jamais !)

Lorsque le choix de Σ est fait, on y calcule le flux de \vec{E} . On peut remarquer notamment que $d\vec{S}_M = dS_M \vec{e}_r$:

$$\phi_E = \oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \oiint_{\Sigma} [E(r) \vec{e}_r] \cdot [dS_M \vec{e}_r] = \oiint_{\Sigma} E(r) dS_M = E(r) \oiint_{\Sigma} dS_M = E(r) \times 4\pi r^2$$

4. On calcule la charge q_{int} contenue à l'intérieur de Σ . Il convient ici de distinguer deux cas :
- si $r > R$, la figure 1 montre que $q_{\text{int}} = Q$. Le théorème de Gauss stipule que :

$$\phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r} \quad (5)$$

REMARQUE *Le champ produit à l'extérieur de \mathcal{D} est le même que celui que produirait la même charge ponctuelle Q placée en O .*

- Si $r < R$, la figure 2 montre que $q_{\text{int}} < Q$. Lorsque la distribution de charges est uniforme, sa densité volumique ρ est la même dans le volume $V_{\mathcal{D}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ de \mathcal{D} ou dans le volume $V_{\Sigma} = \frac{4}{3}\pi r^3$ de Σ :

$$\rho_{\text{dans } \Sigma} = \rho_{\text{dans } \mathcal{D}} \Rightarrow \frac{q_{\text{int}}}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow q_{\text{int}} = \frac{Q r^3}{R^3}$$

Le théorème de Gauss indique alors que :

$$\phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) \times 4\pi r^2 = \frac{Q r^3}{\varepsilon_0 R^3} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \vec{e}_r} \quad (6)$$

REMARQUE *Les expressions (5) et (6) montrent que :*

$$\lim_{r \rightarrow R^+} E(r) = \lim_{r \rightarrow R^-} E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

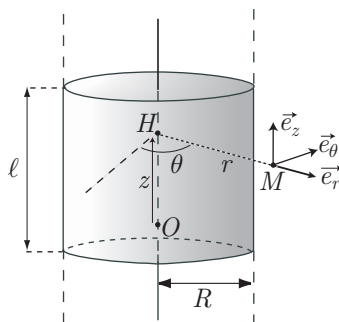
Le champ électrostatique est donc continu malgré la distribution de charges. C'est une loi générale qui s'applique à toute distribution volumique de charges (mais pas aux autres distributions).

c- Champ produit par un cylindre

Soit un cylindre de rayon R , de longueur ⁴ $L \gg R$ suffisamment grande pour que l'on puisse ignorer ce qui se passe au voisinage de ses extrémités (on dit alors que l'on néglige les «effets de bord») et portant une charge Q uniformément répartie dans son volume, avec une densité $\rho_{\text{cyl.}} = \frac{Q}{\pi R^2 L}$.

Afin d'évaluer le champ $\vec{E}(M)$ produit en tout point M de l'espace à l'aide du théorème de Gauss, il convient d'opérer en cinq étapes :

1. D'abord on représente le problème physique, en y faisant apparaître toutes les informations disponibles ou requises :



Il apparaît ainsi d'une part que seul un segment de longueur $\ell \ll L$ (loin des bords) pourra être utilisé et d'autre part que les coordonnées cylindriques sont les mieux adaptées : $\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$.

4. Certains énoncés évoquent un cylindre «infini», ce qui revient à supposer $L \gg R$ et à ignorer les «effets de bord»

2. On cherche ensuite les caractéristiques de $\vec{E}(M)$. On remarque alors que (H, \vec{e}_r) est un axe de symétrie pour la distribution \mathcal{D} de charges, ce qui oriente $\vec{E}(M)$ dans la direction de \vec{e}_r . D'autre part, \mathcal{D} est invariante par translation verticale ou par rotation autour de l'axe. Donc, le problème ne dépend ni de z ni de θ :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{e}_r = E(r) \vec{e}_r$$

3. On choisit ensuite une surface Σ sur laquelle calculer ϕ_E . Sur une partie de cette surface $E(r)$ devrait rester constant, c'est-à-dire que $r = \text{cte}$; il s'agit alors d'un cylindre de rayon r (on notera S_ℓ la surface correspondante). Enfin, puisque Σ doit être fermée, on complète S_ℓ avec des disques (S_1) et (S_2) de manière à former une «boîte de conserve» de hauteur ℓ .

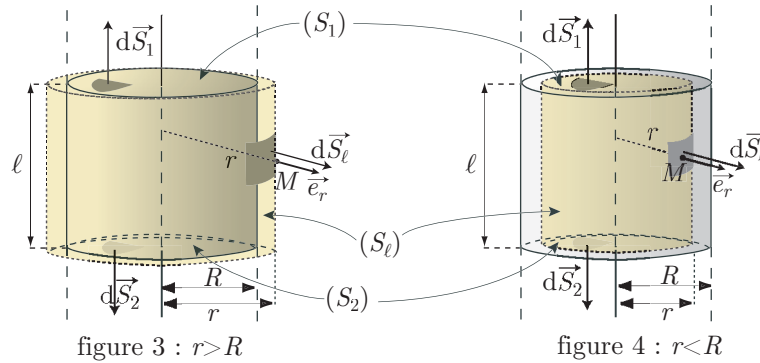

 figure 3 : $r > R$

 figure 4 : $r < R$

Le flux Φ de \vec{E} à travers (S) peut ainsi être décomposé en trois termes :

$$\Phi_E = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell + \iint_{(S_1)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2$$

où $\vec{E} \perp d\vec{S}_1$ et $\vec{E} \perp d\vec{S}_2$ (car $\vec{E} = E \vec{e}_r$) permet d'annuler les deux derniers termes. En outre, $d\vec{S}_\ell$ étant colinéaire à \vec{E} , $\vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = E \times dS_\ell$, où $E(r)$ est constant sur S_ℓ (car E ne dépend que de r , au demeurant constant). C'est pourquoi :

$$\Phi_E = \iint_{(S_\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = \iint_{(S_\ell)} E \times dS_\ell = E \times \int_{(S_\ell)} dS_\ell = E \times S_\ell$$

où $S_\ell = 2\pi r \times \ell$ désigne la valeur de la surface latérale S_ℓ , de longueur $2\pi r$ et de hauteur ℓ . Par suite :

$$\Phi_E = E \times 2\pi r \ell$$

4. Pour calculer la charge q_{int} dans le volume circonscrit par Σ (ou encore «dans la boîte de conserve»), il convient de distinguer deux cas :
- Si $r > R$, la figure 3 montre que q_{int} s'identifie à la charge contenue dans la portion de cylindre chargé, de longueur ℓ . La densité volumique ρ_{portion} dans cette portion de cylindre étant la même que celle dans la totalité du cylindre de longueur L , il s'ensuit que :

$$\rho_{\text{portion}} = \rho_{\text{cyl.}} \Rightarrow \frac{q_{\text{int}}}{\pi R^2 \ell} = \frac{Q}{\pi R^2 L} \Rightarrow q_{\text{int}} = \frac{Q \ell}{L}$$

Le théorème de Gauss conduit alors à :

$$\phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \times 2\pi r \ell = \frac{Q \ell}{\varepsilon_0 L} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{2\pi \varepsilon_0 L r} \vec{e}_r \text{ pour } r > R}$$

- Si $r < R$, la figure 4 montre que la charge q_{int} est celle contenue dans le cylindre de volume $\pi r^2 \ell$, dont la densité s'identifie encore à celle du cylindre total :

$$\rho_{\text{portion}} = \rho_{\text{cyl.}} \Rightarrow \frac{q_{\text{int}}}{\pi r^2 \ell} = \frac{Q}{\pi R^2 L} \Rightarrow q_{\text{int}} = \frac{Q \ell r^2}{L R^2}$$

Ainsi, le théorème de Gauss impose :

$$\phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \times 2\pi r \ell = \frac{Q \ell r^2}{L R^2 \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q r}{2\pi \varepsilon_0 L R^2} \vec{e}_r \text{ pour } r < R}$$

REMARQUE

À nouveau, on observe la continuité du champ dans l'espace car :

$$\lim_{r \rightarrow R^-} E(r) = \lim_{r \rightarrow R^+} E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 LR}$$

Ceci n'est vrai que parce que la charge Q est répartie dans la totalité du volume du cylindre. À titre d'exercice, on pourra montrer que si Q n'avait été répartie que sur la surface de rayon R du cylindre, on aurait obtenu :

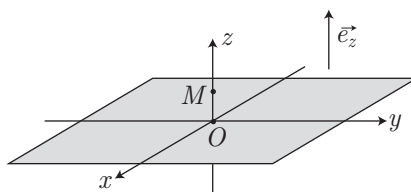
$$E(r < R) = 0 \text{ et } E(r > R) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

et donc une discontinuité de $E(r)$.

d- Champ produit par un plan

Un plan $\mathcal{P}(Ox, Oy)$, infini dans ces deux directions, porte des charges électriques de densité surfacique σ uniforme. On cherche le champ électrique \vec{E} créé par cette distribution en un point M , situé à une distance $OM = z$ de ce plan.

1. Représentation du problème



2. Caractéristiques du champ

Étant donné que \mathcal{P} est infini, l'axe Oz contenant M est un axe de symétrie pour la distribution de charges qui peut, du reste, être décrite par un système de coordonnées cartésiennes x, y et z . Par conséquent \vec{E} prend la direction du vecteur unitaire \vec{e}_z de Oz :

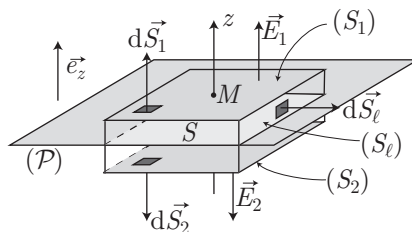
$$\vec{E} = E(x, y, z) \vec{e}_z$$

Une translation du plan (infini) dans les directions Ox et Oy laisse invariant le champ \vec{E} , en raison de quoi ce vecteur ne dépend ni de x ni de y :

$$\vec{E} = E(z) \times \vec{e}_z$$

3. Calcul du flux

La « surface de Gauss » (S) sur laquelle doit être calculé le flux de \vec{E} doit alors comporter des parties où z demeure constant ; il s'agit des surfaces (S_1) et (S_2) planes, parallèles à (Ox, Oy) et de même section S .



La surface (S) est ensuite fermée à l'aide d'une surface latérale S_ℓ telle que $d\vec{S}_\ell \perp \vec{E}$, c'est-à-dire : $\vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = 0$.

En outre, pour des raisons de symétrie (S_2) se trouve à une distance z de (\mathcal{P}) de sorte que, sur (S_2), le champ électrique s'écrit : $\vec{E}_2 = E(-z) \vec{e}_z = -E(z) \vec{e}_z$. On désignera par $\vec{E}_1 = E(z) \vec{e}_z$ le champ en tout point de (S_1).

Ce faisant, le flux de \vec{E} à travers (S) comporte trois parties :

$$\Phi = \oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S_1)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{(S_\ell)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell$$

où $\vec{E} \cdot d\vec{S}_\ell = 0$ permet d'annuler le dernier terme. En revanche :

$$\begin{cases} d\vec{S}_1 = dS_1 \vec{e}_z \\ \vec{E}_1 = E(z) \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 = E(z) \times dS_1$$

et :

$$\begin{cases} d\vec{S}_2 = -dS_2 \vec{e}_z \\ \vec{E}_2 = -E(z) \vec{e}_z \end{cases} \Rightarrow \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = E(z) \times dS_2$$

Or, étant donné que $E(z)$ demeure constant sur S_1 et sur S_2 (où z est constant), l'expression de Φ se simplifie :

$$\begin{aligned} \Phi &= \iint_{(S_1)} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{(S_2)} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{(S_1)} E(z) dS_1 + \iint_{(S_2)} E(z) dS_2 \\ &= E(z) \times \iint_{(S_1)} dS_1 + E(z) \times \iint_{(S_2)} dS_2 = E(z) \times (S_1 + S_2) \\ &\Rightarrow \Phi = 2E(z) \times S \text{ car } S_1 = S_2 = S \end{aligned}$$

4. Calcul de q_{int}

La charge enfermée dans (S) est celle contenue sur la surface S du plan \mathcal{P} , auquel cas elle vaut :

$$q_i = \iint_{(S)} \sigma dS = \sigma \iint_{(S)} dS = \sigma \times S$$

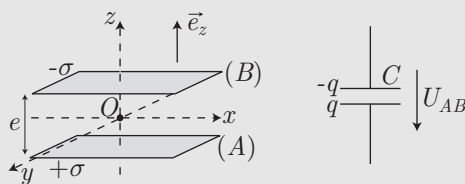
5. Application du théorème de Gauss

De cette manière, le théorème de Gauss fournit :

$$\Phi = \frac{q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow 2E(z) \times S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{e}_z} \quad (7)$$

EXERCICE

Soient deux plaques de surface S , supposée très grande et distantes de e . La plaque inférieure (A) porte une charge q de densité surfacique $\sigma = \frac{q}{S}$ uniforme, tandis que la plaque supérieure (B) porte une charge $-q$, de densité $-\sigma$ uniforme.



- À l'aide de l'expression (23) et par application du principe de superposition, calculer le champ électrique en un point M situé entre les deux plaques.
- Exprimer, en fonction de q , e , S et ε_0 la différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$ et en déduire l'expression de la capacité $C = \frac{q}{U_{AB}}$ en fonction de ε_0 , S et e .

Corrigé

1. D'après le résultat (23), en un point M situé entre les armatures, les plaques A et B produisent les champs respectifs :

$$\vec{E}_A = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}_B = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} (-\vec{e}_z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Le champ résultant vaut alors : $\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$.

2. Considérons deux points A et B , situés respectivement sur les plaques inférieure et supérieure (mais pas nécessairement sur la verticale Oz), portés aux potentiels V_A et V_B .

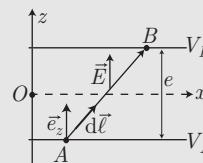
La différence de potentiel $U_{AB} = V_A - V_B$ est alors donnée par la circulation de \vec{E} le long du chemin Γ liant A et B :

$$U_{AB} = \int_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \times e = \frac{qe}{S\epsilon_0}$$

où $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$ est uniforme, de sorte que :

De cette expression découle directement l'expression de la capacité C du condensateur ainsi réalisé :

$$C = \frac{q}{U_{AB}} \Rightarrow C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$



e- Densité des lignes de champ

Considérons une carte du champ électrique, qui montre des lignes de champ qui se resserrent ou qui s'écartent. Nous cherchons à relier cette topologie à l'intensité du champ électrique dans diverses zones de l'espace.

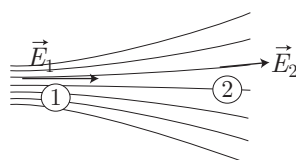


figure 5

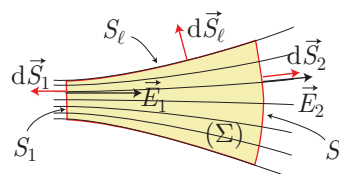


figure 6

Pour simplifier le problème, nous supposons que dans deux régions de l'espace, localement vide de charge, (1 et 2 sur la figure 5), le champ prend des valeurs moyennes E_1 et E_2 respectivement. Découpons alors une surface Σ qui définit un tube de champ avec une «surface d'entrée» S_1 , une surface «de sortie» S_2 et une surface latérale S_ℓ . Le flux du champ électrique à travers σ vaut alors :

$$\begin{aligned} \phi_E &= \oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \iint_{S_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{S}_2 = \iint_{S_\ell} \underbrace{\vec{E}_\ell(M) \cdot d\vec{S}_\ell}_{=0} \\ &= \iint_{S_1} -E_1 dS_1 + \iint_{S_2} E_2 dS_2 \simeq -E_1 \times S_1 + E_2 \times S_2 \end{aligned}$$

Or, en l'absence de charge à l'intérieur de Σ , le théorème de Gauss stipule que :

$$\phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow E_1 S_1 = E_2 S_2 \Rightarrow E_1 = \frac{S_2}{S_1} \times E_2$$

Notamment, si les lignes de champ s'écartent (la figure 6 suggère que $S_2 > S_1$) :

$$\frac{S_2}{S_1} > 1 \Rightarrow \boxed{E_1 > E_2}$$

ce qui montre que :

en l'absence de charge électrique, le champ électrique est d'autant plus intense que les lignes de champ sont denses.

f- Analogie avec la gravitation

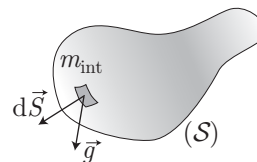
Le champ électrique produit par une charge ponctuelle q s'écrit : $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$, c'est-à-dire : $\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r$, avec $\alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$. Aussi, le théorème de Gauss peut-il se présenter sous la forme suivante :

$$\vec{E} = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \Phi_E = \iint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi \alpha_i \text{ où } \alpha_i = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0}$$

De même, le champ gravitationnel \vec{g} produit par une masse ponctuelle m vaut :

$$\vec{g} = -\frac{Gm}{r^2} \vec{e}_r = \frac{\alpha}{r^2} \vec{e}_r \text{ avec } \alpha = -Gm$$

et c'est la raison pour laquelle le théorème de Gauss peut être étendu au flux Φ_g du champ gravitationnel à travers une surface fermée (S) , à l'intérieur de laquelle se trouve une masse totale m_{int} :



$$\Phi_g = \iint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}}$$

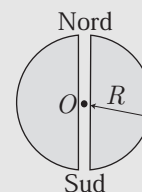
EXERCICE

On suppose la Terre sphérique, de rayon R , de centre O et de masse M uniformément répartie en volume avec une densité volumique ρ .

- Déterminer, en coordonnées sphériques, les caractéristiques du champ gravitationnel \vec{g} produit en un point M de l'espace, tel que $\vec{OM} = r \vec{e}_r$.
- En appliquant le théorème de Gauss, retrouver les expressions de \vec{g} lorsque $r > R$ et $r < R$.
- Un tunnel, passant par O , est creusé dans la Terre selon l'axe des pôles (ce qui permet de s'affranchir de la rotation de la Terre).

Un point M , de masse m , est assujéti à se déplacer radialement et sans frottements, dans ce tunnel. On note $r = OM$ la distance séparant M de O .

- Établir l'équation différentielle satisfaite par r , pour $r < R$.
- En déduire, en fonction de G , M et R , la période des oscillations que peut effectuer ce point autour de O .



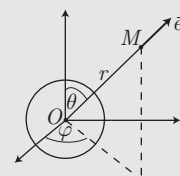
Corrigé

- Tout axe passant par O et M est un axe de symétrie pour la Terre. La direction du vecteur unitaire \vec{e}_r de \vec{OM} est par conséquent aussi celle du champ de gravitation :

$$\vec{g} = g(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$$

En coordonnées sphériques, toute rotation d'un angle θ ou φ de la Terre laisse invariante la distribution de masse, auquel cas le champ \vec{g} ne dépend pas de ces paramètres :

$$\vec{g} = g(r) \times \vec{e}_r$$

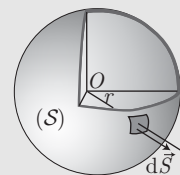


- Le théorème de Gauss fait intervenir une surface fermée caractérisée par $r = \text{cte}$, afin que $g(r)$ y demeure constant ; il s'agit d'une sphère (S) , de rayon r , centrée sur O , dont chaque élément de surface $d\vec{S}$ est colinéaire à \vec{e}_r , et donc à \vec{g} .

Ce faisant, le flux de \vec{g} à travers (S) est défini par :

$$\Phi_g = \iint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} g(r) \times dS = g(r) \times \iint_{(S)} dS = g(r) \times S$$

où $S = 4\pi r^2$ désigne la surface d'une sphère de rayon r .



- Lorsque $r > R$, la masse totale m_{int} contenue dans (S) s'identifie à la masse de la Terre, auquel cas le théorème de Gauss stipule que :

$$\Phi_g = -4\pi G m_{\text{int}} \Rightarrow g(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi G M \Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$$

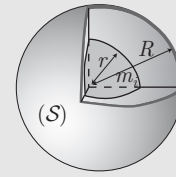
REMARQUE

Cette expression correspond également à celle du champ gravitationnel produit en M par une masse ponctuelle située en O . Ce constat justifie, en mécanique, l'assimilation d'une planète à une masse ponctuelle concentrée en son centre.

- Lorsque $r < R$, la masse m_{int} contenue dans (S) ne peut s'identifier à la masse M de la Terre, mais est calculable à partir de la densité volumique $\mu = \frac{\delta m}{d\tau}$, supposée uniforme :

$$m_{\text{int}} = \iiint_{(V)} \mu d\tau = \mu \iiint_{(V)} d\tau = \mu \times V$$

où $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ désigne le volume de la sphère de rayon r , contenue dans (S) .



De même, la masse de la Terre est donnée par :

$$M = \mu \times V_{\text{Terre}} = \mu \times \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow \mu = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

C'est pourquoi :

$$m_{\text{int}} = \frac{3M}{4\pi R^3} \times \frac{4\pi r^3}{3} = M \times \frac{r^3}{R^3}$$

d'où découle l'expression mathématique du théorème de Gauss :

$$\Phi_g = -4\pi G m_{\text{int}} \Rightarrow g(r) \times 4\pi r^2 = -4\pi G M \times \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow \vec{g} = -\frac{GM}{R^3} \times r \vec{e}_r$$

3. a- Le point M est repéré par sa position $\vec{OM} = r \vec{e}_r$, à laquelle est associée une accélération $\vec{\gamma} = \ddot{r} \vec{e}_r$, en l'absence de rotation de M autour de O . En outre, $r < R$ soumet M à une force :

$$\vec{f} = m \vec{g} = -\frac{GMm}{R^3} \times r \vec{e}_r$$

respectant la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \vec{\gamma} = \vec{f} \Rightarrow m \ddot{r} = -\frac{GMm}{R^3} r \Rightarrow \ddot{r} + \frac{GM}{R^3} r = 0$$

- b- Étant donné le signe positif du coefficient $\frac{GM}{R^3}$, cette équation différentielle admet une solution harmonique qui traduit des oscillations, autour de O , avec une pulsation :

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

c'est-à-dire une période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

4- Dipôle électrostatique

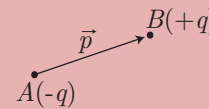
a- Définitions



DÉFINITION

On appelle **dipôle électrostatique** un ensemble de deux charges ponctuelles, de même valeur absolue mais de signe opposé, placées en deux points distincts. Soient deux points A et B , portant les charges respectives $-q$ et $+q$; on appelle **moment dipolaire** \vec{p} la grandeur vectorielle :

$$\vec{p} = q \times \vec{AB}$$



À l'échelle atomique, la charge est de l'ordre de $q \simeq 10^{-19}$ C, tandis que les distances séparant les porteurs de charge sont de l'ordre de $AB \simeq 10^{-10}$ m. Ainsi, les moments dipolaires rencontrés à cette échelle ont pour ordre de grandeur $p \simeq 10^{-19} \times 10^{-10} = 10^{-29}$ C.m. C'est pourquoi, bien que l'unité légale de p soit le C.m, on lui préfère souvent en chimie le **Debye** :

$$1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$$

La définition du moment dipolaire peut être étendue à un système de $2n$ points chargés : les points $\{M_1, \dots, M_n\} = \{P_1, \dots, P_n\}$ portant des charges positives $\{q_1, \dots, q_n\}$ et les points $\{M_{n+1}, \dots, M_{2n}\} = \{N_1, \dots, N_n\}$ portant les charges négatives $\{-q_1, \dots, -q_n\}$. On constate alors que :

$$\sum_{j=1}^{2n} q_j \vec{OM}_j = \sum_{i=1}^n q_i \vec{OP}_i + \sum_{i=1}^n (-q_i) \vec{ON}_i = \sum_{i=1}^n q_i (\vec{N}_i \vec{O} + \vec{OP}_i) = \sum_{i=1}^n q_i \vec{N}_i \vec{P}_i$$

En retrouvant la définition du moment dipolaire \vec{p}_i de chaque dipôle (N_i, P_i), il vient finalement :

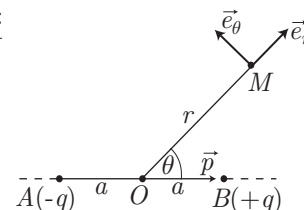
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \overrightarrow{N_i P_i} = \sum_{j=1}^{2n} q_j \overrightarrow{O M_j}$$

b- Champ et potentiel produits

Soit un dipôle électrostatique constitué par des charges $-q$ et q , situées aux points respectifs A et B , de moment dipolaire $\vec{p} = q \times \overrightarrow{AB}$, de norme : $p = \|\vec{p}\| = q \times 2a$, car $AB = 2a$. On note O le milieu de $[AB]$ et un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées polaires r et θ .

Les potentiels V_A et V_B créés en M par A et B valent :

$$V_A = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 AM} \text{ et } V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM}$$



avec :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} &\Rightarrow AM^2 = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM})^2 = AO^2 + OM^2 + 2\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OM} \\ &= a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta = r^2 \left(1 + 2\frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right) \\ \Rightarrow AM &= r \left(1 + 2\frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2} \Rightarrow \frac{1}{AM} = \frac{1}{r} \left(1 + 2\frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

L'approximation dipolaire consiste à considérer que $r \gg a$, de sorte que $\varepsilon = \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \ll 1$, ce qui justifie la simplification de l'expression précédente par un développement limité.

Habituellement, ce développement est limité aux termes du premier ordre en $\frac{a}{r}$ (car les termes d'ordre supérieurs, en $\left(\frac{a}{r}\right)^n$ sont beaucoup plus petits), auquel cas⁵ :

$$(1 + \varepsilon)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \frac{1}{AM} \simeq \frac{1}{r} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2a \cos \theta}{r} + \frac{a^2}{r^2} \right) \right] \simeq \frac{1}{r} \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right) \text{ à l'ordre 1 en } \frac{a}{r}$$

De la même manière :

$$\frac{1}{BM} \simeq \frac{1}{r} \left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right)$$

et, par conséquent, le potentiel créé en M par le dipôle vaut :

$$\begin{aligned} V(M) &= V_A + V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{BM} - \frac{1}{AM} \right) \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\left(1 + \frac{a}{r} \cos \theta \right) - \left(1 - \frac{a}{r} \cos \theta \right) \right] \\ \Rightarrow &\boxed{V(M) = \frac{q \times 2a \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}} \end{aligned} \quad (8)$$

car $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{e}_r$ est le vecteur position du point M .

Quant au champ électrostatique \vec{E} , produit en M par ce dipôle, il s'obtient à l'aide de la relation :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

5. Un calcul plus précis montre que les premiers termes de la série de Taylor de la fonction $f(x) = x^{-1/2}$ s'écrivent, lorsque $\varepsilon \ll 1$:

$$(1 + \varepsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{4} \frac{\varepsilon^2}{2} + \dots = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3}{8} \varepsilon^2 + \dots \text{ où } \varepsilon = \frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2}$$

Ainsi :

$$(1 + \varepsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{2a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2} \right)^2 + \dots = 1 - \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{2r^2} (-1 + 3 \cos^2 \theta) + \frac{a^3}{r^3} \times \dots$$

À l'ordre 1 en $\frac{1}{r}$, on retrouve donc $(1 + \varepsilon)^{-1/2} \simeq 1 - \frac{a}{r} \cos \theta$, mais il arrive qu'on choisisse de travailler aussi avec les termes d'ordre 2, si les premiers viennent à s'annuler.

d'où se déduisent les composantes polaires de \vec{E} :

$$\boxed{E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3}} \quad \text{et} \quad \boxed{E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3}} \quad (9)$$

REMARQUE En coordonnées polaires, le moment dipolaire a pour composantes :

$$\vec{p} = p \cos \theta \vec{e}_r - p \sin \theta \vec{e}_\theta \Rightarrow p \sin \theta \vec{e}_\theta = p \cos \theta \vec{e}_r - \vec{p}$$

de sorte que :

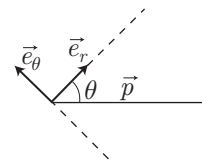
$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

s'écrit aussi :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3p \cos \theta \vec{e}_r - \vec{p})$$

où : $\vec{p} \cdot \vec{e}_r = p \cos \theta$ conduit à :

$$\boxed{\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \times \vec{e}_r - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3}}$$



c- Lignes de champ et équipotentielles

1. Surface équipotentielle

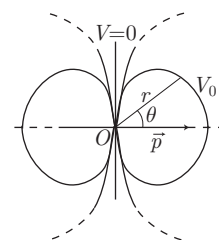
Une équipotentielle $V = V_0 \neq 0$ admet pour équation polaire :

$$V_0 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt{A \cos \theta} \quad \text{où} \quad A = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 V_0} = \text{cte}$$

Cette relation montre que, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $A > 0$, r diminue lorsque θ augmente, jusqu'à s'annuler pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

En outre, l'équipotentielle $V_0 = 0$ vérifie :

$$0 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2} \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{2}$$



Cette équipotentielle est donc confondue avec l'axe Oy perpendiculaire à \vec{p} .

2. Ligne de champ

Si $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$ appartient à une ligne de champ, ce vecteur doit être colinéaire à $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$, ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\det \begin{pmatrix} \vec{E} & d\vec{\ell} \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} E_r & dr \\ E_\theta & r d\theta \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow r E_r d\theta - E_\theta dr = 0 \Rightarrow \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2r \cos \theta d\theta - \sin \theta dr) = 0$$

soit encore :

$$2r \cos \theta d\theta = \sin \theta dr \Rightarrow \frac{dr}{r} = \frac{2 \cos \theta d\theta}{\sin \theta}$$

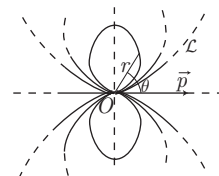
En remarquant que $d(\sin \theta) = \cos \theta d\theta$, cette équation s'écrit aussi :

$$\frac{dr}{r} = 2 \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta} \Rightarrow d(\ln r) = 2 d(\ln \sin \theta) = d(\ln \sin^2 \theta)$$

Ce faisant, il existe une constante $K = \ln r_0$ telle que :

$$\ln r = \ln(\sin^2 \theta) + \ln r_0 \Rightarrow r = r_0 \sin^2 \theta$$

Cette relation, caractérisant les lignes de champ en coordonnées polaires, révèle que, pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, r augmente avec θ , jusqu'à atteindre son *maximum* en $\theta = \frac{\pi}{2}$ et devenir nul en $\theta = 0$.



3. Orthogonalité

Un vecteur élémentaire $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$ appartient à une équipotentielle à condition que r et θ vérifient la relation :

$$r = \sqrt{A \cos \theta} \Rightarrow \ln r = \frac{1}{2} \ln A + \frac{1}{2} \ln(\cos \theta) \Rightarrow \frac{dr}{r} = -\frac{\sin \theta d\theta}{2 \cos \theta} \Rightarrow 2 \cos \theta dr = -r \sin \theta d\theta \quad (10)$$

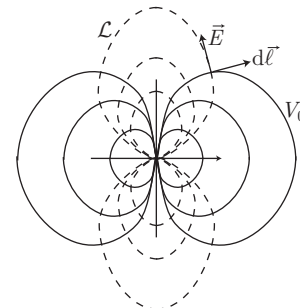
Aussi, le produit scalaire de $d\vec{\ell}$ par \vec{E} vaut-il :

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \end{pmatrix} = E_r dr + E_\theta r d\theta \\ &= \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta dr + r \sin \theta d\theta) \end{aligned}$$

c'est-à-dire, compte tenu de la relation (10) :

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp d\vec{\ell} \Rightarrow \mathcal{V} \perp \mathcal{L}$$

ce qui justifie l'orthogonalité des lignes de champ et des équipotentielles, comme l'illustre la superposition ci-contre des deux réseaux de courbes.

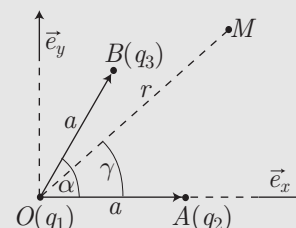


EXERCICE

Un ensemble de trois charges est disposé de la manière suivante :

- une charge $q_1 = -3q_0$ en un point O ;
- une charge $q_2 = q_0$ en un point A de l'axe Ox , de vecteur unitaire directeur \vec{e}_x ;
- une charge $q_3 = 2q_0$ en un point B , tel que :

$$\alpha = (\vec{OA}, \vec{OB}) = 60^\circ \text{ et } OA = OB = a$$



1. Trouver deux dipôles, de moments dipolaires \vec{p}_1 et \vec{p}_2 , équivalents à cette distribution de charges ; on notera $p_0 = a \times q_0$ et on donnera les composantes de \vec{p}_1 et \vec{p}_2 dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.
2. En déduire les caractéristiques du dipôle \vec{p} équivalent à ces trois charges, c'est-à-dire exprimer $p = \|\vec{p}\|$ en fonction de p_0 et donner la valeur numérique de $\beta = (\vec{p}, \vec{e}_x)$.
3. Soit M un point de l'espace, situé à une distance $r \gg a$ de O , dans la direction $\theta = (\vec{OM}, \vec{p})$. Trouver la valeur de θ qui assure l'appartenance de M à l'équipotentielle $V = 0$. Représenter l'allure de cette équipotentielle.

Corrigé

1. La charge $q_1 = -3q_0 = -q_0 - 2q_0 = -(q_2 + q_3)$ peut être décomposée en une charge $-q_2$, opposée à celle de A et une charge $-q_3$, opposée à celle portée par B . C'est pourquoi la distribution de charges est équivalente à celle d'un ensemble de deux dipôles, de moments dipolaires :

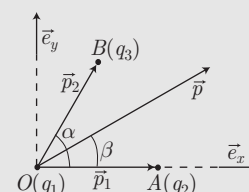
$$\vec{p}_1 = q_2 \vec{OA} \text{ et } \vec{p}_2 = q_3 \vec{OB}$$

dont les normes valent :

$$p_1 = q_2 a = q_0 a = p_0 \text{ et } p_2 = 2q_0 a = 2p_0$$

et dont les composantes, dans la base $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ sont :

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} p_0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} p_2 \cos \alpha \\ p_2 \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_0 \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ car } \begin{cases} p_2 = 2p_0 \\ \alpha = 60^\circ \end{cases}$$



2. Le moment dipolaire \vec{p} résultant est simplement la somme vectorielle de ces moments :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2p_0 \\ p_0\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Ce faisant, sa norme vaut :

$$p = \sqrt{4p_0^2 + 3p_0^2} \Rightarrow p = p_0 \sqrt{7}$$

tandis que sa direction : $\beta = (\vec{p}, \vec{e}_x)$ peut être obtenue à l'aide du produit scalaire $\vec{p} \cdot \vec{e}_x$, calculé de deux manières différentes :

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_x = \|\vec{p}\| \times \|\vec{e}_x\| \times \cos \beta = p \cos \beta = p_0 \sqrt{7} \times \cos \beta$$

et :

$$\vec{p} \cdot \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 2p_0 \\ p_0\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2p_0$$

Par conséquent :

$$p_0 \sqrt{7} \times \cos \beta = 2p_0 \Rightarrow \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \beta \simeq 40,9^\circ$$

3. Soit M un point de l'espace, repéré par ses coordonnées polaires $r = OM$ et $\theta = (\vec{OM}, \vec{p})$.

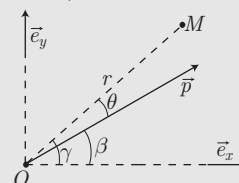
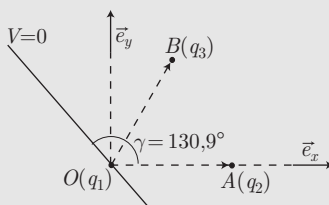
Le potentiel V , créé en M par le dipôle de moment \vec{p} , est directement donné par la relation (34) :

$$V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\cos \theta}{r^2}$$

Aussi, l'appartenance de M à l'équipotentielle $V = 0$ est assurée pour la valeur $\theta = \frac{\pi}{2}$ (ou $\theta = -\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à la même direction).

Finalement, en remarquant que $\gamma = \theta + \beta$, on trouve l'équipotentielle $V = 0$ dans la direction donnée par :

$$\gamma = 90 + 40,9 \Rightarrow \gamma = 130,9^\circ$$

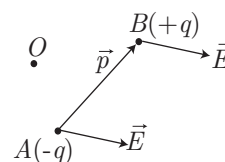


d- Actions subies

Soit un dipôle électrostatique, constitué de deux charges ponctuelles q et $-q$ placées respectivement en B et en A , et donc de moment dipolaire $\vec{p} = q \times \vec{AB}$.

Si ce dipôle est plongé dans un champ électrique uniforme \vec{E} , ces charges sont soumises aux forces $\vec{F}_A = -q\vec{E}$ et $\vec{F}_B = q\vec{E}$. Donc, ce dipôle est soumis à une force résultante :

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0} \text{ si } \vec{E} \text{ est uniforme.}$$



On peut montrer⁶ (notamment à l'aide de l'énergie potentielle) que si \vec{E} n'est pas uniforme, le dipôle est soumis à la force résultante :

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E}) \quad (12)$$

6. La démonstration de cette expression n'est pas au programme mais elle peut intéresser les 5/2 : la composante F_x de \vec{F} vaut :

$$\begin{aligned} F_x &= q [E_x(B) - E_x(A)] \text{ avec } E_x(B) = E_x(A) + dE_x = E_x(A) + \overrightarrow{\text{grad}} E_x \cdot \vec{AB} \\ &= q \vec{AB} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E_x = \vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} E_x \Rightarrow \vec{F} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{E} \end{aligned} \quad (11)$$

On peut également remarquer que, puisqu'en électrostatique :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

il s'enquit que :

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{p} \cdot \vec{E}) \Rightarrow \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E})$$

dont on peut expliciter chaque composante ; par exemple :

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} = (\vec{p} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) E_x$$

Plongé dans un champ \vec{E} uniforme⁷, les charges sont soumises à des moments en O (point immobile quelconque de l'espace) :

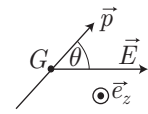
$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_A) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A \text{ et } \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_B) = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B$$

Ainsi, le dipôle est soumis à un moment résultant, en O :

$$\vec{\mathcal{M}}_0 = q(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \wedge \vec{E} = q \overrightarrow{AB} \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

Les lois précédentes montrent que sous l'action d'un champ \vec{E} uniforme, un dipôle peut tourner (car $\vec{\mathcal{M}}_O \neq \vec{0}$ alors que $\vec{F} = \vec{0}$).

Soit θ l'angle (\vec{p}, \vec{E}) et soit J le moment d'inertie du dipôle par rapport à un axe Gz parallèle à \vec{e}_z et passant par un point G , à partir duquel est défini son moment cinétique : $\vec{L} = J \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_z$.



Le théorème du moment cinétique impose ici :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O \Rightarrow J \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_z = \vec{p} \wedge \vec{E} = -pE \sin \theta \vec{e}_z \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{pE}{J} \sin \theta \quad (13)$$

Les positions d'équilibre de ce dipôle sont celles qui assurent son immobilité, c'est-à-dire :

$$\theta_e = \text{cte} \Rightarrow \sin \theta_e = 0 \Rightarrow \theta_e = 0 \text{ ou } \theta_e = \pi$$

Soit ε un petit écart au voisinage de cette position :

$$\theta = \theta_e + \varepsilon \Rightarrow \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} \Rightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varepsilon}$$

qui autorise un développement limité d'ordre 1 :

$$\sin \theta = \sin(\theta_e + \varepsilon) = \sin \theta_e + \varepsilon \cos \theta_e + \dots \text{ où } \varepsilon \ll \theta \Rightarrow \sin \theta \simeq \varepsilon \cos \theta_e$$

Ainsi, au voisinage de θ_e , l'équation (13) se linéarise :

$$\ddot{\varepsilon} = -\frac{pE}{J} \cos \theta_e \varepsilon \Rightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{pE \cos \theta_e}{J} \varepsilon = 0 \quad (14)$$

Pour $\theta_e = 0$, cette équation est celle de l'oscillateur harmonique de pulsation ω_0 :

$$\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{pE}{J}}$$

En revanche, lorsque $\theta_e = \pi$, cette équation génère des solutions qui divergent dans le temps :

$$\ddot{\varepsilon} - k^2 \varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon(t) = A e^{kt} + B e^{-kt} \text{ où } k = \sqrt{\frac{pE}{J}}$$

En conclusion, $\theta_e = 0$ est une position d'équilibre stable et $\theta_e = \pi$ une position d'équilibre instable.

e- Énergie potentielle

Les charges $-q$ et $+q$ portées par les points respectifs A et B du dipôle sont soumises à une énergie potentielle $\mathcal{E}_p = q \times V$. Donc, le dipôle, dans son ensemble, présente une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = -q V_A + q V_B = q (V_B - V_A)$$

7. Le cas du champ non homogène n'est pas au programme, mais en utilisant la loi (11), on peut montrer que :

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \vec{p} \wedge \vec{E} + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E})$$

Notamment, si les points A et B sont suffisamment proches pour qu'on puisse utiliser la définition de l'opérateur gradient :

$$V_B = V_A + \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \mathcal{E}_p = q \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot (q \overrightarrow{AB})$$

soit encore, en tenant compte de la définition du potentiel :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}}$$

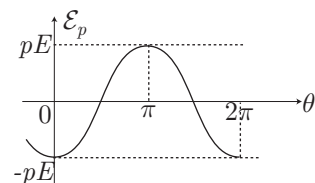
D'une part cette loi confirme l'expression (12) de la force qui s'exerce sur le dipôle :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p \Rightarrow \boxed{\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}} (\vec{p} \cdot \vec{E})}$$

et d'autre part, elle confirme les conclusions issues de l'équation (14) : en notant θ l'angle entre \vec{p} et \vec{E} , l'énergie potentielle devient une fonction de θ :

$$\mathcal{E}_p(\theta) = -pE \cos \theta$$

qui admet un minimum en $\theta_1 = 0$ et un maximum en $\theta_2 = \pi$. C'est pourquoi le dipôle acquiert un équilibre stable en θ_1 et instable en θ_2 .



II Magnétostatique

1- Courant électrique

a- Définitions

Densité volumique de courant

Considérons un milieu contenant des charges mobiles, de densité volumique ρ_m (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$). Nous admettrons que ces charges se déplacent toutes avec la même vitesse s'ensemble \vec{v} et qu'elles se déplacent alors d'une distance vdt pendant une durée dt .

Soit dV le volume du parallélépipède de section de base dS (à laquelle est associé un vecteur $d\vec{S}$, de norme dS et dirigé selon la normale à la section) et de hauteur $h = vdt \cos \alpha$. Pendant la durée dt , seules les charges contenues dans $dV = hdS$ peuvent atteindre ou traverser dS . Aussi, la charge δq qui traverse dS pendant dt vaut-elle :

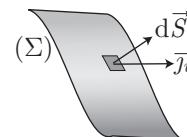
$$\begin{aligned} \delta q &= \rho_m dV = \rho_m h dS = \rho_m v dS \cos \alpha dt \\ &= \rho_m \vec{v} \cdot d\vec{S} dt \end{aligned}$$

Aussi, le courant δi qui traverse la surface dS est défini par :

$$\boxed{\delta i = \frac{\delta q}{dt} = \vec{j}_v \cdot d\vec{S} \text{ avec } \vec{j}_v = \rho_m \vec{v}} \quad (15)$$

L'intensité i du courant qui traverse une surface (Σ) est alors définie à partir de la loi (15) :

$$\boxed{i = \iint_{(\Sigma)} \vec{j}_v \cdot d\vec{S}}$$



Dans de nombreux cas, lorsque \vec{j}_v est uniforme (sa norme est constante) et conserve une direction constante par rapport à $d\vec{S}$ (souvent les deux vecteurs sont colinéaires), on se contente d'écrire :

$$\boxed{i = j_v \times S} \text{ car :}$$

$$i = \iint_{(\Sigma)} \vec{j}_v \cdot d\vec{S} = \iint_{(\Sigma)} j_v \times dS = j_v \times \iiint_{(\Sigma)} dS = j_v \times S$$

REMARQUE Si les porteurs de charge ont une densité volumique n et une charge individuelle q , on peut poser :

$$\vec{j}_v = nq \vec{v}$$

Si les porteurs de charge sont de natures différentes (par exemple, dans l'eau, les ions H^+ et HO^- ne portent pas la même charge et ne se déplacent pas avec la même vitesse moyenne) cette loi se généralise (et est à l'origine de l'expression de la conductivité d'un électrolyte en fonction des concentrations ioniques) :

$$\vec{j}_v = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i = \sum_i \rho_{mi} \vec{v}_i$$

EXERCICE

Un condensateur est composé d'une anode rectiligne (\mathcal{A}) et d'une cathode cylindrique (\mathcal{C}), de rayon R et d'axe (\mathcal{A}).

Le régime est permanent, ce qui se traduit par l'absence de charge accumulée dans le condensateur : le courant I qui arrive à l'anode est le même que celui qui part de la cathode.

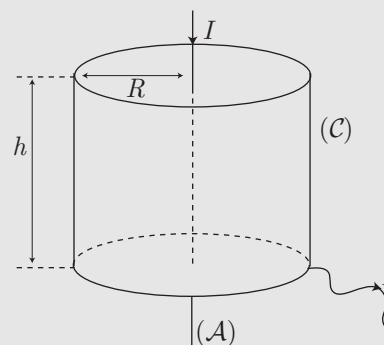
On admettra que les charges se déplacent, de manière radiale : $\vec{v} = v(r) \vec{e}_r$, à l'intérieur d'un fluide conducteur qui occupe la totalité de la hauteur h de la cathode.

1. Montrer que la densité volumique de courant j_v vérifie l'équation :

$$j_v + r \frac{dj_v}{dr} = 0$$

où r désigne la distance à (\mathcal{A}).

2. En déduire l'expression de $j_v(r)$ en fonction de I , h et r .



Corrigé

1. Isolons, dans le condensateur, un cylindre d'axe (\mathcal{A}), de hauteur h et de rayon r . La surface $S(r) = 2\pi r h$ de ce cylindre est alors traversée par un courant d'intensité :

$$I(r) = j_v(r) \times S(r) = [j_v(r) \times r] \times 2\pi h$$

De même, un cylindre identique au premier, mais de rayon $r + dr$ est traversé par un courant d'intensité :

$$\begin{aligned} I(r + dr) &= j_v(r + dr) \times S(r + dr) \text{ où } S(r + dr) = 2\pi h \times (r + dr) \\ &= [j_v(r + dr) \times (r + dr)] \times 2\pi h \end{aligned}$$

Aussi, en définissant une fonction $\psi(r) = j_v(r) \times r$, les courants $I(r)$ et $I(r + dr)$ s'écrivent :

$$I(r) = \psi(r) \times 2\pi h \text{ et } I(r + dr) = \psi(r + dr) \times 2\pi h$$

Or, le volume compris entre les deux cylindres reçoit, pendant dt , une charge $\delta q(r) = I(r)dt$, tandis qu'une charge $\delta q(r + dr) = I(r + dr)dt$ s'en échappe. C'est pourquoi le régime permanent impose :

$$\delta q(r + dr) = \delta q(r) \Rightarrow I(r + dr) = I(r) \Rightarrow \psi(r + dr) = \psi(r) \Rightarrow \psi(r) + dr \frac{d\psi}{dr} = \psi(r)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\psi}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr} [j_v(r) \times r] = 0 \Rightarrow j_v(r) + r \frac{dj_v}{dr} = 0 \quad (16)$$

2. L'équation (16) montre qu'il existe une constante α telle que :

$$\frac{d}{dr} [j_v(r) \times r] = 0 \Rightarrow j_v(r) \times r = \alpha \Rightarrow j_v(r) = \frac{\alpha}{r}$$

En outre, la cathode de rayon R est traversée par un courant d'intensité I définie par :

$$I = j_v(R) \times 2\pi R h = \frac{\alpha}{R} \times 2\pi R h = \alpha \times 2\pi h \Rightarrow \alpha = \frac{I}{2\pi h} \Rightarrow j_v(r) = \frac{I}{2\pi r h}$$

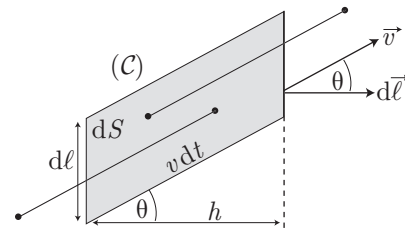
De cet exercice, il ressort que :

en régime stationnaire, le vecteur \vec{j}_v est à flux conservatif : à travers une surface fermée Σ , le flux ϕ_e de \vec{j}_v qui entre dans Σ est égal au flux ϕ_s qui en sort.

Densité surfacique de courant

Considérons des charges mobiles à la surface d'un corps (C) , de densité surfacique σ_m (en $C \cdot m^{-2}$).

Soit \vec{v} la vitesse des porteurs de charge, supposée identique pour tous les porteurs. Pendant une durée dt , seuls les porteurs de charge situés à l'intérieur de la surface $dS = d\ell \times h$ peuvent traverser un segment $d\ell$ situé sur la surface de (C) . Or, dans dS se trouve une charge $\delta q = \sigma_m dS$, avec :



$$h = v dt \cos \theta \Rightarrow dS = v d\ell \cos \theta \times dt = \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \times dt \Rightarrow \delta q = \sigma_m \vec{v} \cdot d\vec{\ell} \times dt$$

Aussi, le courant qui traverse $d\ell$ a pour intensité :

$$\delta i = \frac{\delta q}{dt} = \vec{j}_s \cdot d\vec{\ell} \text{ avec } \vec{j}_s = \sigma_m \vec{v}$$

\vec{j}_s est alors appelé *densité surfacique de courant*.

REMARQUE On remarquera que le vecteur $d\vec{\ell}$ est perpendiculaire au segment de longueur $d\ell$. Pour vous en souvenir, rappelez-vous qu'il en va de même avec le vecteur surface $d\vec{S}$ et de la surface dS qui en est la norme.

Dans la pratique, le vecteur \vec{j}_v est fréquemment noté implicitement \vec{j} , alors que la densité de courant surfacique sera notée explicitement \vec{j}_s . Afin d'éviter toute confusion, il conviendra de lire attentivement les informations concernant la densité de courant évoquée par un énoncé : soit il indique clairement qu'il s'agit d'une densité volumique ou surfacique, soit les unités ($[j_v] = A \cdot m^{-2}$ et $[j_s] = A \cdot m^{-1}$).

EXERCICE

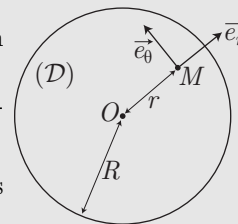
Soit (D) un disque de centre O et de rayon R , portant sur une de ses faces des charges de densité surfacique σ . Le disque (D) est libre de tourner autour de son axe passant par O , avec une vitesse angulaire ω .

- On suppose d'abord que $\sigma = \sigma_0$ est uniforme.

Donner l'expression de la densité surfacique de courant $\vec{j}_s(r)$ en un point M situé à une distance r de O .

En déduire l'expression de l'intensité I du courant électrique généré par la rotation de (D) , en fonction de σ , ω et R .

- On suppose maintenant que $\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{R} \times r$. Répondre aux mêmes questions.



Corrigé

- La vitesse d'un porteur de charge à une distance r de O est donnée, en coordonnées polaires, par :

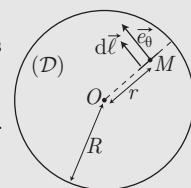
$$\vec{v} = r\omega \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{j}_s = \sigma r\omega \vec{e}_\theta$$

Soit $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_\theta$ un élément de rayon de (D) . Cet élément est alors traversé par un courant élémentaire d'intensité :

$$\delta I = \vec{j}_s \cdot d\vec{\ell} = \sigma \omega r dr \tag{17}$$

Aussi, le courant qui traverse la totalité d'un rayon de (D) a pour intensité :

$$I = \int_0^R \sigma \omega r dr = \sigma \omega \int_0^R r dr \Rightarrow I = \frac{\sigma \omega}{2} R^2$$



2. Dans le cas où $\sigma = \sigma(r) = \frac{\sigma_0}{R} \times r$, l'intensité du courant qui traverse $d\vec{r}$ est toujours donnée par la relation (17) :

$$\delta I = \sigma(r) \times \omega r dr = \frac{\sigma_0 \omega}{R} r^2 dr$$

Par suite, le courant qui traverse la totalité d'un rayon de (\mathcal{D}) présente l'intensité :

$$I = \int_0^R \frac{\sigma_0 \omega}{R} \times r^2 dr = \frac{\sigma_0 \omega}{R} \int_0^R r^2 dr = \frac{\sigma_0 \omega}{R} \times \frac{R^3}{3} \Rightarrow I = \frac{\sigma_0 \omega R^2}{3}$$

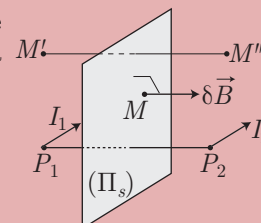
b- Symétries et invariants



DÉFINITION

On dit qu'un plan (Π_s) est un plan de symétrie pour une distribution de courant si, en tout couple de points $\{P_1, P_2\}$ symétriques par rapport à (Π_s) , circulent des courants I_1 et I_2 symétriques par rapport à (Π_s) :

$$\forall P_2 = \text{sym}\{P_1\}, \vec{j}(P_2) = \text{sym}\{\vec{j}(P_1)\}$$



Le champ magnétique créé en tout point M d'un plan de symétrie électrique (Π_s) est perpendiculaire à (Π_s) .

Soient M' et M'' deux points symétriques par rapport à (Π_s) . On peut montrer que :

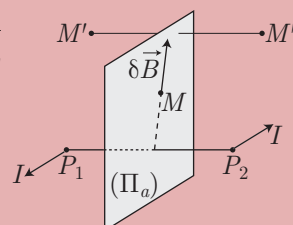
$$\vec{B}(M'') = -\text{sym}\{\vec{B}(M')\} \text{ lorsque } M'' = \text{sym}\{M'\}$$



DÉFINITION

On dit qu'un plan (Π_a) est un plan d'antisymétrie pour une distribution de courant si en tout couple de points $\{P_1, P_2\}$, symétriques par rapport à (Π_a) , circulent des courants d'égale intensité I , mais antisymétriques :

$$\forall P_2 = \text{sym}\{P_1\}, \vec{j}(P_2) = -\text{sym}\{\vec{j}(P_1)\}$$



Le champ magnétique créé en tout point M d'un plan d'antisymétrie électrique (Π_a) est contenu dans (Π_a) .

De plus, on peut montrer que : $M'' = \text{sym}\{M'\} \Rightarrow \vec{B}(M'') = \text{sym}\{\vec{B}(M')\}$



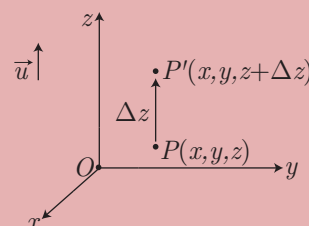
DÉFINITION

Une distribution de courant I est dite invariante par translation dans la direction \vec{u} si :

$$I(x, y, z + \Delta z) = I(x, y, z)$$

Dans ce cas, la norme B du champ magnétique ne dépend pas de la variable z :

$$B(x, y, z) \equiv B(x, y)$$



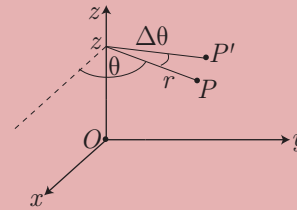
 DÉFINITION

Une distribution de courant I est invariante par rotation autour de l'axe (Oz) si :

$$I(r, \theta + \Delta\theta, z) = I(r, \theta, z)$$

ce qui a pour conséquence :

$$B(r, \theta, z) \equiv B(r, z)$$



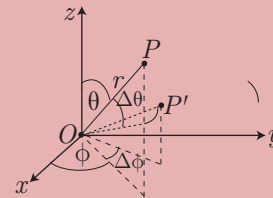
 DÉFINITION

L'invariance d'une distribution de courant I par rotation autour d'un point O est assurée dès que :

$$I(r, \theta + \Delta\theta, \phi + \Delta\phi) = I(r, \theta, \phi)$$

et se traduit par l'identité :

$$I(r, \theta, \phi) \equiv I(r)$$



En conséquence, pour trouver la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace, il convient :

- dans un premier temps, de chercher un plan Π_s de symétrie des courants, passant par M ; dans ce cas, on obtient directement la direction de $\vec{B}(M) \perp \Pi_s$.
- à défaut de Π_s , on cherchera au moins deux plans d'antisymétrie des courants, passant par M ; dans ce cas, la direction de $\vec{B}(M)$ est l'intersection de ces plans.

On veillera à faire passer les éléments de symétrie (Π_s ou Π_a) par le point M où l'on cherche $\vec{B}(M)$.

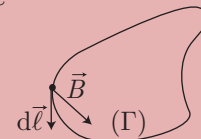
2- Théorème d'Ampère

a- Énoncé

 DÉFINITION

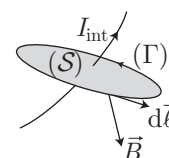
On appelle circulation du champ magnétique \vec{B} le long d'un parcours fermé (Γ), la grandeur :

$$C = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$



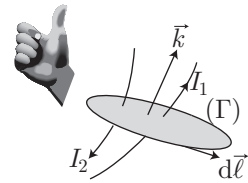
Le *théorème d'Ampère* stipule que cette circulation est proportionnelle à la somme algébrique des courants I_{int} qui traversent la surface (S) de contour (Γ) :

$$C = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{int}}$$



Afin d'assigner un signe correct à I_{int} , il convient d'orienter la surface (S) en fonction du sens de parcours de (Γ).

Pour cela, les doigts de la main droite tournent dans le sens de parcours de (Γ) , tandis que le pouce indique une direction, notée \vec{k} .
 Les courants qui traversent (\mathcal{S}) dans le sens de \vec{k} sont alors comptés positivement, tandis que les autres sont comptés négativement :



$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_2)$$

REMARQUE Les courants qui ne traversent pas (\mathcal{S}) sont sans influence sur la circulation \mathcal{C} .

Pour utiliser le théorème d'Ampère dans le but d'exprimer un champ magnétique \vec{B} produit, en un point M , par une distribution \mathcal{D} de courants, il convient de procéder en cinq étapes :

1. La représentation exhaustive du problème, avec toutes les notations.
2. La détermination des caractéristiques de \vec{B} : sa direction (un plan de symétrie \mathcal{P}_s pour \mathcal{D} et passant par M donne directement la direction de \vec{B} : perpendiculaire à \mathcal{P}_s . Sinon, la recherche de deux plans d'antisymétrie \mathcal{P}_a et \mathcal{P}'_a donne également la direction de \vec{B} : l'intersection de \mathcal{P}_a et de \mathcal{P}'_a), et les variables (x, y, z) , (r, θ, z) ou (r, θ, φ) dont dépend réellement \vec{B} (la recherche de paramètres qui rendent \vec{B} invariant est ici requise).
3. La définition d'un parcours (Γ) fermé et orienté, sur lequel $\|\vec{B}\|$ demeure en partie constant. Ce parcours étant défini, le calcul de la circulation de \vec{B} devient possible :

$$\mathcal{C}_B = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$$

4. La recherche du courant I_{int} qui traverse la surface (\mathcal{S}) circonscrite dans (Γ) . On s'aidera, pour cette étape, de l'orientation de (Γ) définie précédemment, et l'on utilisera assez fréquemment le vecteur densité de courant \vec{j} pour calculer I_{int} .
5. Il devient alors possible d'utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer \vec{B} :

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 I_{\text{int}}$$

L'utilisation correcte du théorème d'Ampère en vue de déterminer $\vec{B}(M)$ exige le développement des cinq étapes précédentes ; en faire l'économie garantit l'échec !

b- Champ créé par un fil infini

Soit \mathcal{F} un fil rectiligne infiniment long, parcouru par un courant uniforme d'intensité I . Utilisons le théorème d'Ampère afin de calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ produit en un point M de l'espace. Pour cela, procédons en 5 étapes :

1. Représentation de la situation physique

La figure 1 montre qu'un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) où r désigne sa distance à \mathcal{F} :

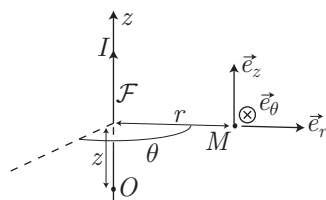


Figure 1

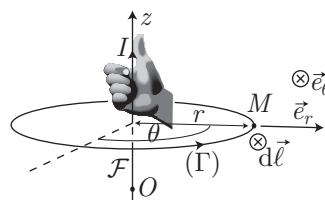


Figure 2

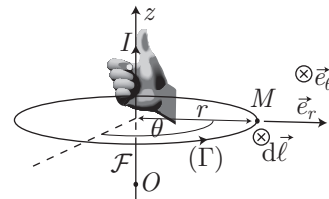
2. Caractéristiques de $\vec{B}(M)$

\mathcal{F} produit en M un champ magnétique $\vec{B}(r, \theta, z)$ qui dépend *a priori* des paramètres r, θ et z . Cependant, une rotation d'un angle $\Delta\theta$ de \mathcal{F} sur lui-même laisse invariante la distribution de courant, de même qu'une translation de \mathcal{F} dans la direction de Oz . C'est pourquoi \vec{B} ne dépend en fait que de r . En outre, tout plan contenant \mathcal{F} est un plan de symétrie pour \mathcal{F} , et notamment celui qui passe par M (il s'agit du plan de la feuille de papier). Aussi \vec{B} présente-t-il la direction \vec{e}_θ perpendiculaire à ce plan : $\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$.

3. Circulation de \vec{B}

Il convient alors de définir un parcours fermé et orienté (Γ) sur lequel $B(r)$ demeure constant ; il s'agit du cercle passant par M , de rayon r et d'axe Oz (l'orientation de (Γ) se fait à l'aide des doigts de la main droite).

Le long de ce parcours, la colinéarité de $d\vec{\ell}$ et de \vec{B} simplifie le calcul de la circulation :



$$\mathcal{C}_B = \oint_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{(\Gamma)} B(r) \times d\ell = B(r) \times \oint_{(\Gamma)} d\ell$$

où $\oint_{(\Gamma)} d\ell$ représente le périmètre de (Γ). C'est pourquoi :

$$\mathcal{C}_B = B(r) \times 2\pi r$$

4. Calcul de I_{int}

Quant à la surface de contour (Γ), elle est traversée par le courant I (positif car de même sens que \vec{e}_z). Donc $I_{\text{int}} = I$.

5. Utilisation du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère s'écrit finalement :

$$\mathcal{C}_B = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow B(r) \times 2\pi r = \mu_0 I \Rightarrow \vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (18)$$

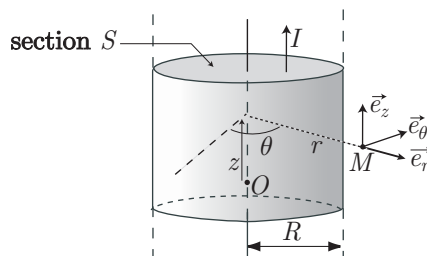
c- Champ créé par un câble

Considérons un câble cylindrique rectiligne, infiniment long, de rayon R , dans lequel circule un courant d'intensité I uniforme. Cherchons, à l'aide du théorème d'Ampère, le champ $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.

1. Représentation de la situation

Compte tenu des symétries du problème, le point M sera repéré par ses coordonnées cylindriques :

$$\vec{OM} = z \vec{e}_z + r \vec{e}_r \Rightarrow d\vec{OM} = dz \vec{e}_z + dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta \quad (19)$$



2. Caractéristiques de $\vec{B}(M)$

Le schéma précédent montre que le plan (\vec{OM}, \vec{e}_z) est un plan de symétrie, auquel cas $\vec{B}(M)$ lui est perpendiculaire et est donc dirigé selon \vec{e}_θ .

En outre, toute translation du cylindre selon \vec{e}_z ou toute rotation autour de l'axe du cylindre laisse la situation invariante ; le problème ne dépend donc ni de z ni de θ :

$$\vec{B}(M) = B(r) \vec{e}_\theta \quad (20)$$

3. Circulation de \vec{B}

Le parcours (Γ) sur lequel est calculée la circulation \mathcal{C}_B de \vec{B} est celui qui laisse $B(r)$ constant ; il s'agit d'un cercle de rayon r :

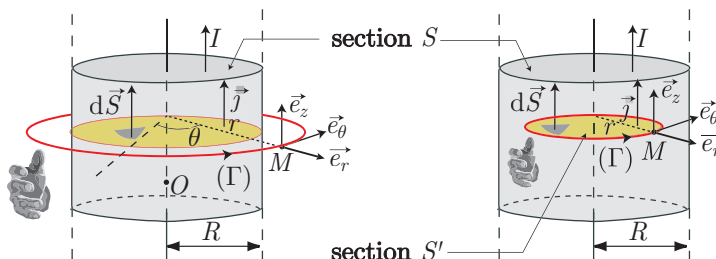


Figure 3 : $r > R$

Figure 4 : $r < R$

En orientant (Γ) dans le sens de l'augmentation de θ (cf. figures 3 et 4) et en tenant compte des relations (19) et (20), cette circulation s'exprime aisément :

$$C_B = \oint_{(\Gamma)} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} = \oint_{(\Gamma)} [B(r) \vec{e}_\theta] \cdot (dz \vec{e}_z + dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta) = \oint_{(\Gamma)} B(r) r d\theta = 2\pi r B(r)$$

4. Courant circonscrit dans (Γ)

Comme illustré sur les deux figures précédentes, le courant I_{int} qui traverse la section S' circonscrite par (Γ) dépend de la valeur de r :

- Si $r > R$, la figure 3 montre que I_{int} s'identifie à I (car \vec{j} est orienté dans le même sens que le pouce de la main droite dont les autres doigts tournent comme (Γ)). Ainsi, $I_{\text{int}} = I$ permet d'écrire le théorème d'Ampère :

$$C_B = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow 2\pi r B(r) = \mu_0 I \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$$

REMARQUE Comme on pouvait s'y attendre, ce résultat ressemble à l'expression (18) obtenu à la page 29 pour le fil infini.

- Si $r < R$, la figure 4 indique que le courant I_{int} qui traverse S' est vraisemblablement différent du courant I qui traverse S . Pour exprimer I_{int} , il suffit simplement d'invoquer l'uniformité du vecteur \vec{j} , dont la norme est la même sur S ou sur S' :

$$j = \frac{\text{courant}}{\text{surface}} = \frac{I_{\text{int}}}{\pi r^2} = \frac{I}{\pi R^2} \Rightarrow I_{\text{int}} = \frac{I r^2}{R^2}$$

Le théorème d'Ampère impose alors :

$$C_B = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow 2\pi r B(r) = \frac{\mu_0 I r^2}{R^2} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \vec{e}_\theta}$$

REMARQUE On constate que si M appartient à l'axe Oz , $\vec{B}(M) = \vec{0}$ car $r = 0$. Ce résultat est une conséquence des symétries du problème : lorsque $M \in (Oz)$, tous les plans contenant (Oz) et M sont des plans de symétrie. Donc $\vec{B}(M)$ doit être perpendiculaire à tous ces plans simultanément. Comme ce n'est pas possible, $\vec{B}(M) = \vec{0}$.

REMARQUE On observe également la continuité de $B(r)$ dans l'espace :

$$\lim_{r \rightarrow R^-} B(r) = \lim_{r \rightarrow R^+} B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

Cette continuité est toujours observée lorsque le courant est réparti dans l'espace⁸. En revanche, si le courant n'avait été que surfacique, $\vec{B}(M)$ aurait subi une discontinuité.

d- Champ produit par un solénoïde

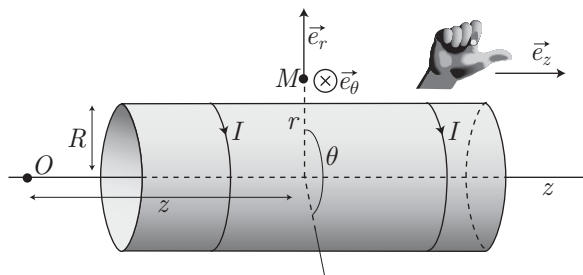
Un solénoïde infini d'axe Oz et de rayon R est parcouru par un courant d'intensité I et comporte n spires par unité de longueur. Développons les cinq étapes mentionnées précédemment afin de calculer, à l'aide du théorème d'Ampère, le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.

1. Représentation de la situation

Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) .

8. Cette continuité est une conséquence de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_v + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$



2. Caractéristiques de $\vec{B}(M)$

Tout plan passant par M perpendiculairement à Oz est un plan de symétrie, auquel cas le champ magnétique \vec{B} prend la même direction qu'un vecteur unitaire \vec{e}_z perpendiculaire à ce plan : $\vec{B} = B(r, \theta, z) \vec{e}_z$. Par ailleurs, une rotation de $\Delta\theta$ du solénoïde autour de son axe, ou encore une translation selon Oz du solénoïde laissent invariante la distribution de courants, en conséquence de quoi \vec{B} ne dépend que de r :

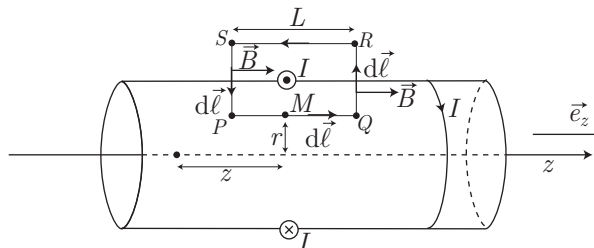
$$\vec{B} = B(r) \times \vec{e}_z$$

3. Calcul de la circulation C_B

Le parcours fermé (Γ) sera donc composé (partiellement) de courbes caractérisées par $r = \text{cte}$, c'est-à-dire des segments de droite parallèles à l'axe Oz (des cercles de rayon r et d'axe Oz ne peuvent convenir car la surface qu'ils délimitent n'est traversée par aucun courant, ce qui conduirait à $I_{\text{int}} = 0$).

On admettra ici que le champ magnétique \vec{B}_{ext} est nul à l'extérieur du solénoïde (si celui-ci est infini).

Soit $PQRS$ un tel parcours, rectangulaire, dont la branche RS est extérieure au solénoïde :



$$C_B = \oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} = \int_P^Q \vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell} + \int_Q^R \underbrace{\vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}}_{=0} + \int_R^S \underbrace{\vec{B}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\ell}}_{=0} + \int_S^P \underbrace{\vec{B}(M) \cdot d\vec{\ell}}_{=0}$$

Sur les branches (QR) et (SP) , $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à $d\vec{\ell}$, ce qui simplifie considérablement le calcul de C_B :

$$C_B = \int_P^Q [B(r) \vec{e}_z] \cdot [dz \vec{e}_z + r d\theta \vec{e}_{\theta} + dr \vec{e}_r] \text{ où } B(r) = \text{cte sur } (PQ)$$

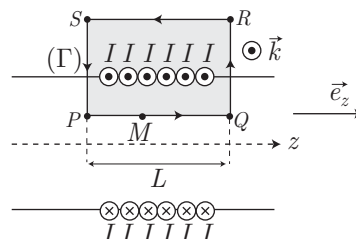
$$= B(r) \int_{z_P}^{z_Q=z_P+L} dz = B(r) \times L$$

4. Calcul du courant circonscrit dans (Γ)

Le parcours (Γ), de longueur L , contient $N = n \times L$ fils, parcourus chacun par un courant d'intensité I .

Par conséquent, la surface S circonscrite par (Γ) (en gris sur la figure) est traversée par un courant d'intensité $N \times I = nI \times L$. Or, le sens du parcours (Γ) permet de définir un vecteur unitaire \vec{k} (les doigts de la main droite tournent dans le sens de (Γ), tandis que le pouce définit le vecteur \vec{k}) de même sens que I .

Par suite, le courant I_{int} qui traverse (S) a pour valeur algébrique : $I_{\text{int}} = nI \times L$.



5. Utilisation du théorème d'Ampère

Le théorème d'Ampère précise alors que :

$$C_B = \mu_0 I_{\text{int}} \Rightarrow B(r) \times L = \mu_0 nI \times L \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \mu_0 nI \vec{e}_z}$$

REMARQUE *Ce calcul montre qu'à l'intérieur d'un solénoïde infini, le champ magnétique est uniforme : $\vec{B}(M)$ ne dépend pas de la position de M .*

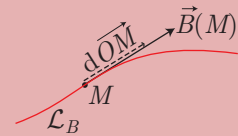
e- Lignes de champ



DÉFINITION

Une ligne de champ magnétique \mathcal{L}_B est une courbe tangente en chacun de ses points M au champ $\vec{B}(M)$:

$$\forall M \in \mathcal{L}_B, \vec{B}(M) \parallel \mathcal{L}_B$$

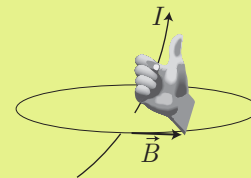


Pour déterminer l'équation d'une ligne de champ \mathcal{L}_B , il suffit de traduire sa définition en termes mathématiques :

$$d\vec{OM} \wedge \vec{B}(M) = \vec{0}$$

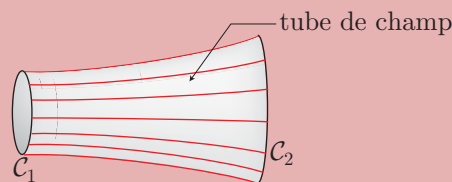
puis de résoudre l'équation différentielle qui en découle (cf. exemple détaillé du champ dipolaire en page 35).

Pour orienter une ligne de champ \mathcal{L}_B produite par un courant I , on applique la règle de la main droite : le pouce étant dirigé selon I , la rotation des autres doigts de la main droite donne le sens de parcours de \mathcal{L}_B .



DÉFINITION

Comme pour le champ électrique, le tube de champ est une surface constituée par des lignes de champ qui prennent appui sur deux courbes fermées C_1 et C_2 .



On établira ultérieurement que le champ magnétique est un champ à flux conservatif, c'est-à-dire que le flux ϕ_{Be} du champ entrant à travers une surface fermée s'identifie au flux ϕ_{Bs} qui en sort :

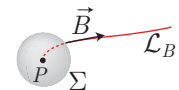
$$\phi_{Be} = \phi_{Bs}$$

Comme conséquence de cette propriété :

les lignes de champ magnétique se referment sur elle-mêmes.

Si tel n'était pas le cas, il existerait un point P de l'espace où une ligne de champ \mathcal{L} s'arrête. Aussi, à travers une surface infinitésimale Σ autour de P , champ \vec{B} traverserait Σ «dans un sens», mais pas dans l'autre.

Le flux ne pourrait pas être nul, ce qui contreviendrait à sa nature conservative.



3- Dipôle magnétique

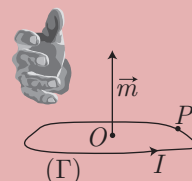
a- Champ créé



DÉFINITION

On appelle dipôle magnétique un circuit plan (Γ), parcouru par un courant d'intensité I . Le moment magnétique de ce dipôle vaut alors :

$$\vec{m} = I \times \vec{S}$$



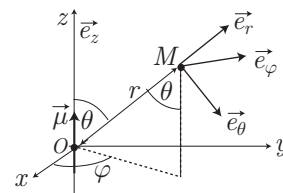
où $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint_{(\Gamma)} \vec{OP} \wedge d\vec{OP}$ est le vecteur surface circonscrit dans (Γ), orienté selon la «règle de la main droite».

Les dipôles magnétiques se rencontrent dans de nombreuses situations physiques où la matière produit des champs magnétiques, avec divers ordres de grandeur ; par exemple :

- Atomes $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \simeq 10^{-23} \text{ A.m}^2$ (magnéton de Bohr)
- Aiguille de boussole $m \simeq 1 \text{ A.m}^2$
- Centre de la Terre $m \simeq 7,5.10^{22} \text{ A.m}^2$

Soit un dipôle magnétique de moment $\vec{m} = m \vec{e}_z$ situé en un point O de l'espace et $\vec{B}(M)$ le champ magnétique que ce dipôle crée en un point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) , situé à une distance $r = OM$ grande par rapport aux dimensions du dipôle.

On démontre (la démonstration n'est pas au programme) que $\vec{B}(M)$ a pour composantes :



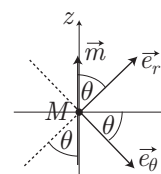
$$\vec{B}(M) = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta \quad \text{avec} \quad B_r = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r^3} \quad (21)$$

On peut ainsi poser :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (2m \cos \theta \vec{e}_r + m \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

où l'on remarque que :

$$\vec{m} = m \cos \theta \vec{e}_r - m \sin \theta \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3 (\vec{m} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{m}]$$



Ainsi, $\vec{B}(M)$ peut également s'exprimer explicitement avec le vecteur position $\vec{OM} = r \vec{e}_r = \vec{r}$:

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} [3 (\vec{m} \cdot \vec{r}) \vec{r} - \vec{m} r^2]$$

b- Lignes de champ

Par définition, en tout point M d'une même ligne de champ magnétique \mathcal{L}_B , le champ $\vec{B}(M)$ est tangent à \mathcal{L}_B en M , c'est-à-dire que tout déplacement $d\vec{OM}$ sur \mathcal{L}_B est tangent à $\vec{B}(M)$, ce qui signifie aussi que $\vec{B}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0}$. En coordonnées sphériques, cette équation s'écrit aussi :

$$\begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dr \\ r d\theta \\ r \sin \theta d\varphi \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} r \sin \theta d\varphi B_\theta \\ -r \sin \theta d\varphi B_r \\ B_r r d\theta - B_\theta dr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} r \sin \theta d\varphi \times B_\theta = 0 \\ r \sin \theta d\varphi \times B_r = 0 \\ r d\theta B_r = dr B_\theta \end{cases}$$

- Comme B_r et B_θ ne peuvent pas être nuls simultanément (sinon \vec{B} serait nul), les deux premières équations indiquent que :
 - soit $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (l'axe Oz est donc une ligne de champ) ;
 - soit $d\varphi = 0$: en dehors de l'axe Oz , les lignes de champ sont contenues dans des plans verticaux ($\varphi = \text{cte}$).

– La troisième équation impose :

$$\frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} r d\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r^3} dr \Rightarrow 2r \cos \theta d\theta = \sin \theta dr \Rightarrow 2 \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} = \frac{dr}{r}$$

En notant r_0 la valeur de r lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$, cette équation s'intègre aisément :

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{r} = 2 \int_{\pi/2}^{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta \Rightarrow \ln \left(\frac{r}{r_0} \right) = 2 \ln (\sin \theta) = \ln (\sin^2 \theta) \Rightarrow \boxed{r = r_0 \times \sin^2 \theta} \quad (22)$$

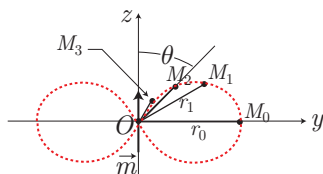


Figure 1

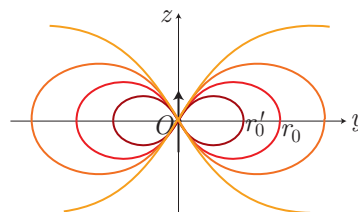


Figure 2

Le résultat (22) montre que lorsque θ diminue de $\frac{\pi}{2}$ à 0, r passe progressivement de la valeur r_0 à la valeur 0. C'est ce qui permet de positionner les points M_0, M_1, M_2, M_3 sur la figure 1, pour lesquels $r = OM$ prend des valeurs dépendant de θ :

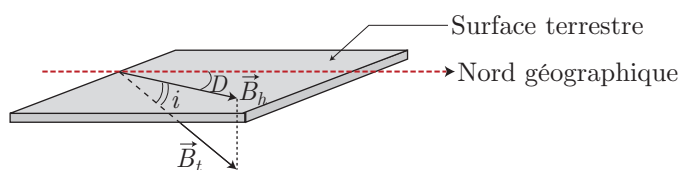
| Points | M_0 | M_1 | M_2 | M_3 | M_4 |
|----------------|---------|-----------------------------|---------------------------|----------------------------|-------|
| θ (rad) | $\pi/2$ | $\pi/3$ | $\pi/4$ | $\pi/6$ | 0 |
| r | r_0 | $\frac{3r_0}{4} = 0,75 r_0$ | $\frac{r_0}{2} = 0,5 r_0$ | $\frac{r_0}{4} = 0,25 r_0$ | 0 |

La ligne de champ \mathcal{L}_B associée à r_0 apparaît alors en joignant les divers points M_i , puis en remarquant que \mathcal{L}_B est symétrique par rapport aux axes (Oz) et (Oy) .

En choisissant d'autres valeurs (r'_0, \dots), d'autres lignes de champ apparaissent ; c'est ce qu'indique la figure 2.

c– Champ géomagnétique

En général, la composante horizontale \vec{B}_h du champ magnétique terrestre \vec{B}_t fait avec le méridien terrestre (qui relie les pôles Sud et Nord géographiques) un angle non nul appelé *déclinaison* (D). Le vecteur \vec{B}_h est lui-même la projection horizontale du champ géomagnétique \vec{B}_t ; l'angle entre ces deux vecteurs s'appelle l'*inclinaison* (i).

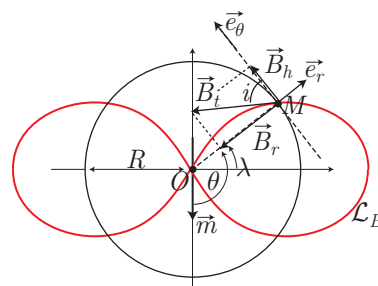


Par exemple, en région parisienne, à la latitude $\lambda \simeq 49^\circ$, l'inclinaison mesurée est voisine de 60° pour $B_t \simeq 5.10^{-5}$ T et $B_h \simeq 2.10^{-5}$ T. Ces valeurs s'interprètent aisément dans le modèle du dipôle magnétique : en supposant que la rotation de la Terre, ainsi que sa structure interne, produisent un dipôle de moment \vec{m} , celui-ci génère à la surface de la Terre, de rayon R , un champ \vec{B} dont les composantes sont données en tout point M par les expressions (53) :

$$\begin{cases} B_r = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{2 \cos \theta}{R^3} \\ B_\theta = B_h = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{R^3} \end{cases}$$

c'est-à-dire, en utilisant la définition de la latitude λ :

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \lambda \Rightarrow B_r = -\frac{\mu_0 m}{2\pi R^3} \sin \lambda \text{ et } B_\theta = B_h = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} \cos \lambda$$



Il s'ensuit que :

$$\tan i = \left| \frac{B_r}{B_h} \right| = 2 \tan \lambda \Rightarrow i \simeq 66^\circ$$

et :

$$B_t = \sqrt{B_h^2 + B_r^2} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} \sqrt{\cos^2 \lambda + 4 \sin^2 \lambda} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3} \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{B_h}{B_t} = \frac{\cos \lambda}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}} \Rightarrow B_h = \frac{\cos \lambda}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}} B_t \simeq 2.10^5 \text{ T avec } B_t = 5.10^{-5} \text{ T}$$

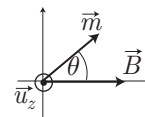
Ces deux valeurs permettent donc d'interpréter les valeurs de λ et de B_h obtenues expérimentalement.

d- Actions subies

On peut montrer⁹ qu'un dipôle magnétique de moment \vec{m} plongé dans un champ magnétique \vec{B} uniforme est soumis à un couple :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} = -mB \sin \theta \vec{u}_z$$

si θ désigne l'angle entre les vecteurs \vec{m} et \vec{B} et où \vec{u}_z est un vecteur orthogonal au plan (\vec{m}, \vec{B}) .



Dans un champ magnétique \vec{B} , un dipôle magnétique de moment dipolaire \vec{m} acquiert une énergie potentielle¹⁰ :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (23)$$

Le dipôle est également soumis à une force¹¹ :

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \text{grad}) \vec{B} \Rightarrow F_x = (\vec{m} \cdot \text{grad}) B_x = \left(m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z} \right) B_x$$

9. La démonstration de cette loi est hors-programme. Elle est fournie ici à titre indicatif.

Considérons un dipôle constitué d'un parcours fermé \mathcal{C} sur lequel circule un point courant M et un élément $d\vec{OM}$ de \mathcal{C} est soumis à une force de Laplace $\delta\vec{F} = i d\vec{OM} \wedge \vec{B}$ et donc à un couple élémentaire $\delta\vec{\Gamma} = \vec{OM} \wedge \delta\vec{F}$. Le couple résultant vaut donc, en tenant compte de l'expression des doubles produits vectoriels :

$$\vec{\Gamma} = i \oint_{\mathcal{C}} \vec{OM} \wedge (d\vec{OM} \wedge \vec{B}) = i \oint_{\mathcal{C}} d\vec{OM} \times (\vec{OM} \cdot \vec{B}) - i \oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \times (\vec{OM} \cdot d\vec{OM})$$

où :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \times (\vec{OM} \cdot d\vec{OM}) = \vec{B} \times \oint_{\mathcal{C}} \vec{OM} \cdot d\vec{OM} = \vec{B} \times \int_A^A \frac{1}{2} d(OM^2) = \vec{0}$$

Soit alors Γ_α une des trois composantes cartésiennes du vecteur $\vec{\Gamma}$ et \vec{e}_α le vecteur de base (uniforme) qui lui correspond :

$$\Gamma_\alpha = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_\alpha = i \oint_{\mathcal{C}} d\vec{OM} \cdot \vec{A}_\alpha \text{ où } \vec{A}_\alpha = (\vec{OM} \cdot \vec{B}) \vec{e}_\alpha$$

Le théorème de Stokes-Ampère fournit alors :

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha &= i \iint \text{rot} \vec{A}_\alpha \cdot d\vec{S} \text{ où } \text{rot} \vec{A}_\alpha = \underbrace{\text{grad}(\vec{OM} \cdot \vec{B})}_{=\vec{B}} \wedge \vec{e}_\alpha + (\vec{OM} \cdot \vec{B}) \wedge \underbrace{\text{rot} \vec{e}_\alpha}_{=\vec{0}} \\ &= i \iint (\vec{B} \wedge \vec{e}_\alpha) \cdot d\vec{S} = i \iint (d\vec{S} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{e}_\alpha \end{aligned}$$

car le produit mixte est invariant par permutation circulaire de ses vecteurs. Finalement :

$$\Gamma_\alpha = i \left(\iint d\vec{S} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{e}_\alpha = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_\alpha \Rightarrow \vec{\Gamma} = i \iint d\vec{S} \wedge \vec{B} = i \vec{S} \wedge \vec{B} \Rightarrow \boxed{\Gamma = \vec{m} \wedge \vec{B}}$$

10. Au cours de la rotation du dipôle à vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_z$, le couple $\vec{\Gamma} = -mB \sin \theta \vec{u}_z$ exerce sur le dipôle une puissance $\mathcal{P} = \vec{\Omega} \cdot \vec{\Gamma}$ à laquelle sont associés un travail δW et une variation d'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_p &= -\delta W = -\mathcal{P} dt \Rightarrow d\mathcal{E}_p = -(mB \sin \theta) \times \left(\frac{d\theta}{dt} \right) dt \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = mB \sin \theta \\ \Rightarrow \mathcal{E}_p &= -mB \cos \theta + \mathcal{E}_{p0} = -\vec{m} \cdot \vec{B} + \mathcal{E}_{p0} \end{aligned}$$

Aussi, en convenant que \mathcal{E}_p est nul lorsque $\vec{B} = \vec{0}$, \mathcal{E}_{p0} s'annule et on trouve : $\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$.

11. Bien qu'étant hors-programme, la démonstration de ce résultat peut intéresser certains 5/2 :

À l'énergie potentielle (23) peut être associée une force $\vec{F} = -\text{grad} \mathcal{E}_p$ dont la composante selon \vec{e}_x vaut alors :

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{m} \cdot \vec{B}) = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_y}{\partial x} + m_z \frac{\partial B_z}{\partial x}$$

REMARQUE Plongé dans un champ \vec{B} uniforme, le dipôle est soumis à une force nulle ; le champ magnétique terrestre ne peut donc pas déplacer une aiguille de boussole, mais seulement la faire tourner.

En conclusion, on pourra retenir les analogies qui existent entre dipôles électriques et magnétiques :

| | Dipôle électrique | Dipôle magnétique |
|---------------------------|---|---|
| Moment dipolaire | $\vec{p} = q \vec{A}\vec{B}$ | $\vec{m} = I \vec{S}$ |
| Champs produits..... | $\begin{cases} E_r = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3} \end{cases}$ | $\begin{cases} B_r = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \\ B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r^3} \end{cases}$ |
| Couple subi..... | $\vec{\Gamma} = \vec{p} \wedge \vec{E}$ | $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ |
| Force subie..... | $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \text{grad}) \vec{E}$ | $\vec{F} = (\vec{m} \cdot \text{grad}) \vec{B}$ |
| Énergie potentielle | $\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$ | $\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ |

III Équations de Maxwell

1- Analyse vectorielle

Excepté en coordonnées cartésiennes, les expressions des opérateurs présentés en gris dans cette section ne sont pas exigibles ; en cas de besoin, un énoncé les rappellerait. En revanche, les relations entre opérateurs (encadrées), ainsi que les théorèmes de Stokes-Ampère et de Green-Ostrogradski sont à connaître.

a- Opérateurs en coordonnées cartésiennes

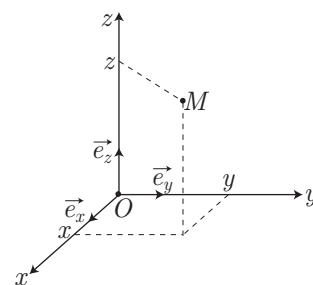
Soit $f(x, y, z)$ un champ scalaire et soit $\vec{V}(x, y, z)$ un champ vectoriel :

$$\vec{V}(x, y, z) = V_x \vec{e}_x + V_y \vec{e}_y + V_z \vec{e}_z$$

dont les composantes V_x, V_y et V_z dépendent des coordonnées x, y et z du point de mesure $M(x, y, z)$. On définit les opérateurs vectoriels :

- gradient de f :

$$\vec{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$



- divergenve de \vec{V} :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- rotationnel de \vec{V} :

$$\vec{\text{rot}} \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

- Laplacien de f ou de \vec{V} :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \text{ et } \Delta \vec{V} = (\Delta V_x) \vec{e}_x + (\Delta V_y) \vec{e}_y + (\Delta V_z) \vec{e}_z$$

Or, l'équation de Maxwell-Ampère se simplifie dans le vide et en régime stationnaire :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$\Rightarrow F_x = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \Rightarrow F_x = (\vec{m} \cdot \vec{\text{grad}}) B_x \Rightarrow \vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{B}$$

b- Opérateurs en coordonnées cylindriques

Soit M un point de l'espace repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

dont dépendent un champ scalaire $f(r, \theta, z)$ et un champ vectoriel $\vec{V}(r, \theta, z) = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_z \vec{e}_z$. Les opérateurs vectoriels sont alors :

- le gradient de f

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

- la divergence de \vec{V} :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- le rotationnel de \vec{V} :

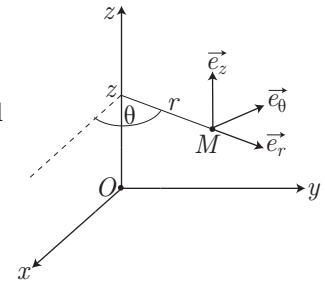
$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

- le Laplacien de f et de \vec{V} :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

et :

$$\Delta \vec{V} = \begin{cases} \Delta V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \\ \Delta V_\theta - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \\ \Delta V_z \end{cases}$$



c- Opérateurs en coordonnées sphériques

Un champ scalaire $f(r, \theta, \phi)$ ou un champ vectoriel :

$$\vec{V}(r, \theta, \phi) = V_r \vec{e}_r + V_\theta \vec{e}_\theta + V_\phi \vec{e}_\phi$$

dépendent du point M où ils sont repérés par leurs coordonnées sphériques r, θ et ϕ . Les opérateurs vectoriels correspondants sont :

- le gradient de f :

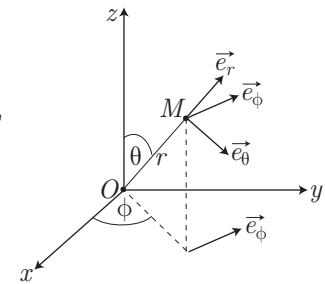
$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \vec{e}_\phi$$

- la divergence de \vec{V} :

$$\text{div } \vec{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi}$$

- le rotationnel de \vec{V} :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \begin{cases} \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (\sin \theta V_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r V_\phi)}{\partial r} \right] \\ \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \end{cases}$$



– le Laplacien de f :

$$\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rf)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

À nouveau, le Laplacien du champ vectoriel \vec{V} est défini par :

$$\Delta \vec{V} = \begin{cases} \Delta V_r - \frac{2V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta V_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta V_\theta = \frac{V_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} \\ \Delta V_\phi - \frac{V_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V_\theta}{\partial \phi} \end{cases}$$

d– L'opérateur vectoriel *nabla*

En coordonnées cartésiennes, on définit l'opérateur vectoriel *nabla* ($\vec{\nabla}$) par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$$

Ainsi, le gradient, la divergence, le rotationnel et le Laplacien de champs scalaires ou vectoriels apparaissent comme des opérations algébriques simples :

– le gradient d'un champ scalaire f se présente comme une multiplication :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \equiv \vec{\nabla} f$$

– la divergence d'un champ vectoriel \vec{V} apparaît comme un produit scalaire :

$$\text{div } \vec{V} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

– le rotationnel d'un champ vectoriel \vec{V} est assimilable à un produit vectoriel :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$

– le Laplacien d'un champ scalaire f peut s'écrire à l'aide du carré scalaire de $\vec{\nabla}$:

$$\Delta f = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) f = \vec{\nabla}^2 f$$

ou d'un produit scalaire :

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \text{div} (\overrightarrow{\text{grad}} f)$$

– le Laplacien d'un champ vectoriel \vec{V} ne peut, quant à lui, s'exprimer qu'à l'aide du carré scalaire de $\vec{\nabla}$:

$$\Delta \vec{V} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

e– Relations entre opérateurs

L'introduction de l'opérateur *nabla* conduit rapidement aux relations suivantes, où f et g sont des champs scalaires, \vec{U} et \vec{V} des champs vectoriels :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} f) = \vec{0} & \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0} \\ \text{div} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V}) = 0 & \Leftrightarrow \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0 \end{cases}$$

de même que :

$$\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{V}) = \vec{\text{grad}} (\text{div} \vec{V}) - \Delta \vec{V} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}$$

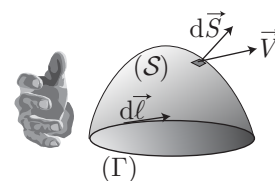
On pourra également s'assurer que :

$$\begin{aligned} \vec{\text{grad}} (f \times g) &= f \vec{\text{grad}} g + g \vec{\text{grad}} f & (24) \\ \text{div} (f \times \vec{V}) &= f \text{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \vec{\text{grad}} f & (25) \\ \vec{\text{rot}} (f \times \vec{V}) &= f \vec{\text{rot}} \vec{V} + (\vec{\text{grad}} f) \wedge \vec{V} & (26) \\ \text{div} (\vec{U} \wedge \vec{V}) &= \vec{V} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{U} - \vec{U} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{V} & (27) \end{aligned}$$

f- Théorème de Stokes-Ampère

Soit (Γ) une courbe fermée, sur laquelle prend appui une surface (\mathcal{S}) et soit $d\vec{S}$ un élément orienté de \mathcal{S} . Pour tout champ vectoriel \vec{V} , on montre que :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{V} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(\mathcal{S})} (\vec{\text{rot}} \vec{V}) \cdot d\vec{S}$$

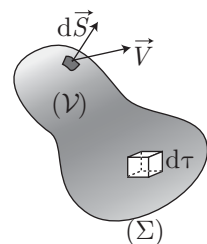


L'orientation de la surface $d\vec{S}$ est déterminée par la « règle de la main droite » : l'ensemble des doigts de la main droite tournant dans le sens de parcours de (Γ) , le pouce tendu indique le sens de $d\vec{S}$.

g- Théorème de Green-Ostrogradski

Soit (Σ) une surface fermée et $d\vec{S}$ un élément de (Σ) , orienté vers l'extérieur du volume (\mathcal{V}) circonscrit par (Σ) . On montre que :

$$\Phi_{\Sigma} = \oiint_{(\Sigma)} \vec{V} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} \text{div} \vec{V} \times d\tau$$



où $d\tau$ désigne un élément de (V) .

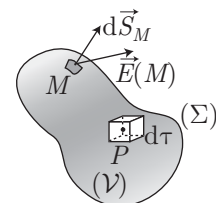
2- Formulations locales et intégrales

Les quatre équations de Maxwell sont des équations différentielles (*formes locales*) qui s'expriment en chaque point de l'espace qui admettent des *formes intégrales* (c'est-à-dire des interprétations issues de leur intégration sur des volumes ou des surfaces).

- **Équation de Maxwell-Gauss :** $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradski sur le flux de \vec{E} à travers une surface fermée Σ qui renferme une charge totale q_{int} :

$$\begin{aligned} \phi_E &= \oiint_{\Sigma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{S}_M = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div} \vec{E}(P) d\tau_P = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\rho(P)}{\epsilon_0} d\tau_P = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{V}} \rho(P) d\tau_P \\ &\Rightarrow \boxed{\phi_E = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}} \end{aligned}$$



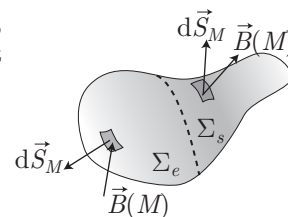
on retrouve le théorème de Gauss

– **Équation de Maxwell-Faraday** : $\boxed{\operatorname{div} \vec{B} = 0}$

Considérons une surface fermée sur laquelle on peut distinguer :

- une surface Σ_s de « sortie » du champ \vec{B} : en chacun des points M de Σ_s , $\vec{B}(M)$ est dirigé vers l'extérieur si bien que $\vec{B}(M) \cdot d\vec{S}$ est positif. On définit alors le flux (positif) à travers Σ_s par :

$$\phi_{Bs} = \iint_{\Sigma_s} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S} \geq 0$$



- une surface Σ_e « d'entrée » du champ \vec{B} . Pour déterminer un flux d'entrée ϕ_{Be} positif à travers Σ_e , il faut désormais tenir compte du signe de $\vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M \leq 0$:

$$\phi_{Be} = - \iint_{\Sigma_e} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M \geq 0$$

Le flux total à travers Σ s'exprime alors en fonction du volume \mathcal{V} enfermé dans Σ :

$$\begin{aligned} \phi_{\text{tot}} &= \oiint_{\Sigma = \Sigma_s \cup \Sigma_e} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = \iint_{\Sigma_s} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M + \iint_{\Sigma_e} \vec{B}(M) \cdot d\vec{S}_M = \phi_{Bs} - \phi_{Be} \\ \Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{B}(P) d\tau_P &= \phi_{Bs} - \phi_{Be} = 0 \Rightarrow \boxed{\phi_{Be} = \phi_{Bs}} \end{aligned} \quad (28)$$

Ainsi, l'expression intégrale (28) de l'équation de Maxwell-Thomson signifie que \vec{B} est un champ de vecteur à flux conservatif : les flux entrant et sortant sont identiques.

REMARQUE

Cette conséquence est généralisable à tout champ de vecteur : lorsqu'en tout point de l'espace

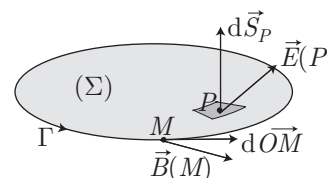
$\operatorname{div} \vec{V} = 0$ pour un champ vectoriel \vec{V} , ce champ est à flux conservatif :

$$\boxed{\phi_{Ve} = \phi_{Vs}}$$

– **Équation de Maxwell-Ampère** : $\boxed{\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

En régime stationnaire, cette relation se simplifie et permet le calcul de la circulation de \vec{B} le long d'un parcours fermé Γ délimitant une surface Σ :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_B &= \oint_{\Gamma} \vec{B}(M) \cdot d\vec{OM} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{B}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{\Sigma} \mu_0 \vec{j}(M) \cdot d\vec{S}_P \\ \Rightarrow \boxed{\mathcal{C}_B = \mu_0 I_{\text{int}}} \end{aligned}$$



où I_{int} désigne le courant traversant Σ . On retrouve ainsi le théorème d'Ampère.

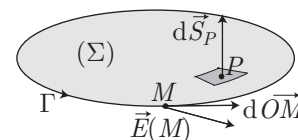
REMARQUE

Cette démonstration révèle que le théorème d'Ampère n'est applicable qu'en régime stationnaire (alors qu'il n'y a pas de restriction à l'utilisation du théorème de Gauss).

– **Théorème de Maxwell-Faraday** : $\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$

La variation de \vec{B} dans le temps fait apparaître une **force électromotrice** e , définie par :

$$\begin{aligned} e &= \oint_{\Gamma} \vec{E}(M) \cdot d\vec{OM} = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{E}(P) \cdot d\vec{S}_P = \iint_{\Sigma} -\frac{\partial \vec{B}(P, t)}{\partial t} \cdot d\vec{S}_P \\ \Rightarrow e &= -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Sigma} \vec{B}(P, t) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$



d'où est issue la **loi de Faraday** : $\boxed{e = -\frac{d\phi_B}{dt}}$ où ϕ_B est le flux de \vec{B} à travers Σ .

Pour résoudre un problème d'induction magnétique, il convient souvent d'écrire, puis résoudre, deux ensembles d'équations :

- les «équations mécaniques» qui traduisent la mise en mouvement de l'éventuel système mécanique (il s'agit de la loi fondamentale de la dynamique : $m \vec{a} = \vec{F}_{\text{ext}}$ ou du théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{ext}}$);
- les «équations électriques» qui associent la loi de Faraday à l'ensemble des tensions et courants dans le circuit électrique.

Prenons l'exemple classique des *rails de Laplace* : sur deux rails parallèles espacés de a , conducteurs de l'électricité, est déposée une tige \mathcal{T} de masse m , également conductrice de l'électricité et susceptible de se déplacer librement sur les rails (on néglige les effets des frottements) :

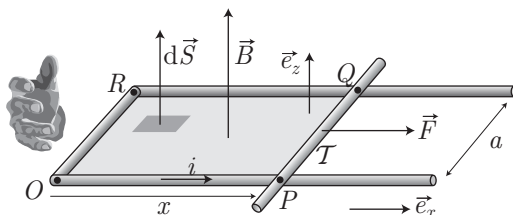


Figure 1

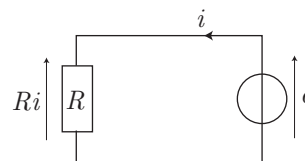


Figure 2

Lorsqu'un courant i (orienté arbitrairement) circule dans le circuit fermé ($OPQR$) ainsi constitué, il apparaît sur \mathcal{T} une force de Laplace¹² :

$$\vec{F} = i \vec{PQ} \wedge \vec{B}$$

sous l'effet de laquelle la tige acquiert une accélération $\frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2}$ soumise à la loi fondamentale de la dynamique :

$$m \frac{d^2 \vec{OP}}{dt^2} = \vec{F} \Rightarrow m \ddot{x} \vec{e}_x = iaB \vec{e}_x \Rightarrow m \ddot{x} = iaB \quad (29)$$

À cette «équation mécanique» doit s'ajouter une équation supplémentaire, qui exprimera le courant i (jusqu'ici inconnu et sûrement variable); il s'agit de «l'équation électrique» que l'on obtient en représentant le schéma électrique équivalent du circuit. Si R désigne la résistance électrique totale du circuit ($OPQR$), la force électromotrice¹³ e vérifie la loi des mailles :

$$e - Ri = 0 \Rightarrow e = Ri$$

et est donnée par la loi de Faraday, dans laquelle le flux ϕ_B du champ \vec{B} est calculé à travers la surface S circonscrite dans le circuit ($OPQR$), grisée sur la figure :

$$\phi_B = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S B dS = B \times S = B \times ax$$

La loi de Faraday fournit facilement l'équation électrique cherchée :

$$e = -\frac{d\phi_B}{dt} = -Ba \dot{x} \Rightarrow Ri = -Ba \dot{x} \Rightarrow i = -\frac{Ba}{R} \dot{x}$$

L'équation (29) s'écrit finalement :

$$\ddot{x} = -\frac{B^2 a^2}{mR} \dot{x} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = 0 \text{ où } v = \dot{x} \text{ et } \tau = \frac{mR}{B^2 a^2}$$

et admet alors pour solution :

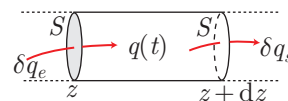
$$v = v_0 e^{-t/\tau} \text{ si } v_0 = v(t=0)$$

3— Conséquences

a— Conservation de la charge

Considérons un courant unidimensionnel (de direction (Oz)), uniforme sur chaque section $z = \text{cte}$ perpendiculaire à (Oz) . Isolons un petit élément \mathcal{E} de conducteur, de section S constante, de longueur dz et contenant à la date t une charge $q(t)$. Effectuons alors un bilan de charge sur \mathcal{E} .

Pendant dt :



12. L'orientation de \vec{PQ} est déterminée par le sens du courant i qui circule dans \mathcal{T} .

13. La f.é.m. est orientée dans le circuit dans le même sens que i .

- une charge δq_e entre dans \mathcal{E} en traversant la surface S située à la cote z . Le courant qui lui correspond définit la densité de courant j :

$$i_e = \frac{\delta q_e}{dt} = j(z, t) \times S$$

- une charge δq_s sort de \mathcal{E} en traversant la surface S située à la cote $z + dz$. À nouveau, on peut définir la densité de courant :

$$i_s = \frac{\delta q_s}{dt} = j(z + dz, t) \times S = \left[j(z, t) + dz \frac{\partial j}{\partial z} \right] \times S$$

- la charge contenue dans le volume $d\tau = S dz$ varie de $q(t) = \rho(z, t) d\tau$ à $q(t + dt) = \rho(z, t + dt) d\tau$, où $\rho(z, t)$ désigne la densité volumique de charge contenue dans \mathcal{E} à la date t . La charge q subit donc un accroissement :

$$dq = q(t + dt) - q(t) = [\rho(z, t + dt) - \rho(z, t)] d\tau = \left[\rho(z, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt - \rho(z, t) \right] \times S dz = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \times S dz$$

Enfin, puisque la variation de q ne peut provenir que des charges qui entrent et qui sortent, son bilan s'écrit :

$$dq = \delta q_e - \delta q_s \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{\delta q_e}{dt} - \frac{\delta q_s}{dt} \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} \times S dz = \left[-dz \frac{\partial j}{\partial z} \right] \times S \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial z}}$$

Cette équation, établie dans le cadre d'un courant unidimensionnel ($\vec{j} = j \vec{u}_z$), peut être généralisée à trois dimensions. On obtient alors **l'équation de conservation de la charge** aussi appelée **équation de continuité** :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0}$$

Cette équation peut également s'obtenir en calculant la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \left[\text{div } \vec{j} + \varepsilon_0 \text{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] = 0$$

En tenant compte de la permutation possible des dérivées ($\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$) et de l'équation de Maxwell-Gauss, il vient alors :

$$\text{div } \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{E}) = 0 \text{ où } \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

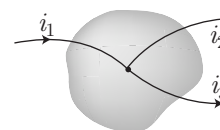
REMARQUE

En régime stationnaire ou lentement variable (régime quasi-stationnaire), $\frac{\partial \rho}{\partial t} \simeq 0$ conduit à poser :

$$\text{div } \vec{j} = 0$$

ce qui signifie aussi que \vec{j} est un vecteur à flux conservatif, auquel cas son flux entrant dans une surface fermée vaut son flux sortant :

$$\phi_e = \phi_s \Rightarrow \left| \iint_{\Sigma_e} \vec{j} \cdot d\vec{S} \right| = \left| \iint_{\Sigma_s} \vec{j} \cdot d\vec{S} \right| \Rightarrow i_e = i_s$$



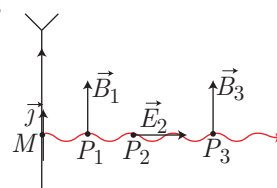
Ce résultat est une formulation de la **loi des nœuds** ($i_1 = i_2 + i_3$ sur le schéma ci-dessus).

b- Propagation dans le vide

Soit un point M d'une antenne, où circule un courant $i(t)$ variable dans le temps (donc hébergeant une densité de courant $\vec{j}(M, t) \neq \vec{0}$).

L'équation de Maxwell-Ampère :

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0}$$



révèle que $\vec{j}(M, t)$ produit à proximité de M (en P_1 par exemple) un champ magnétique \vec{B}_1 variable dans le temps.

L'équation de Maxwell-Faraday : $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ montre à son tour que \vec{B}_1 produit à proximité de P_1 (par exemple en P_2) un champ $\vec{E}_2 = \vec{E}(P_2, t)$ variable dans le temps.
 À nouveau, en P_2 l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(P_2) + \mu_0 \varepsilon_0 \left. \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|_{P_2} = \mu_0 \varepsilon_0 \left. \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right|_{P_2} \text{ car } \vec{j}(P_2, t) = \vec{0}$$

révèle l'apparition d'un champ magnétique $\vec{B}_3 = \vec{B}(P_3, t)$ qui produira à son tour un champ \vec{E}_4 induit, et ainsi de suite.

Les équations de Maxwell (Ampère et Faraday) interprètent ainsi la production d'une onde électromagnétique à partir d'une antenne et sa propagation dans le vide.

c- Équations de Poisson et de Laplace

L'équation de Maxwell-Gauss ($\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$) associée à la définition du potentiel scalaire ($\vec{E} = -\text{grad } V$), conduit à **l'équation de Poisson** :

$$\text{div}(-\text{grad } V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{-\Delta V = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ (équation de Poisson)}}$$

En l'absence de champ électrique, cette équation devient **l'équation de Laplace** :

$$\boxed{\Delta V = 0 \text{ (équation de Laplace)}}$$

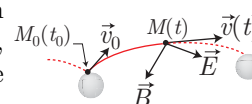
En rappelant que le laplacien d'une fonction scalaire contient des dérivées partielles ($\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$), les deux équations différentielles précédentes peuvent être utilisées afin de déterminer la fonction $V(M)$, dont l'unicité de la solution est assurée par la connaissance des conditions limites connues de V .

4- Action sur les charges mobiles

a- Loi d'Ohm

Considérons une particule de masse m et de charge électrique q , plongée dans un champ électrique uniforme \vec{E} . À l'instant $t = t_0$, elle acquiert une vitesse \vec{v}_0 aléatoire, à l'issue d'un choc avec un atome immobile du milieu. À une date ultérieure, sa vitesse varie sous l'action de la force électrique $\vec{F} = q \vec{E}$:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{E} \Rightarrow d\vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} dt \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{q}{m} \vec{E} \times (t - t_0)$$



Moyennons cette solution sur l'ensemble des charges mobiles, en notant $\vec{v} = \langle \vec{v}(t) \rangle$, en remarquant que $\langle \vec{v}_0 \rangle = \vec{0}$ (les vecteurs sont répartis de manière aléatoire) et, en notant $\tau = \langle t - t_0 \rangle$ le **temps de libre parcours moyen** (temps moyen pendant lequel une particule mobile ne subit pas de choc) :

$$\vec{v} = \frac{q\tau}{m} \vec{E}$$

En notant n la densité volumique de porteurs de charge, que l'on supposera tous identiques, la densité de courant \vec{j} vérifie alors la **loi d'Ohm locale** :

$$\vec{j} = nq \vec{v} \Rightarrow \boxed{\vec{j} = \sigma \vec{E} \text{ où } \sigma = \frac{nq^2\tau}{m}}$$

σ s'appelle alors la **conductivité électrique** du milieu (en siemens par mètre : $\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$) et la démonstration a été faite dans le cadre du **modèle de Drude**.

Intéressons-nous maintenant à un conducteur électrique cylindrique de section S et de longueur ℓ suffisamment faibles pour que le champ \vec{E} y soit uniforme, ainsi que $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

Ce conducteur est alors traversé par un courant :

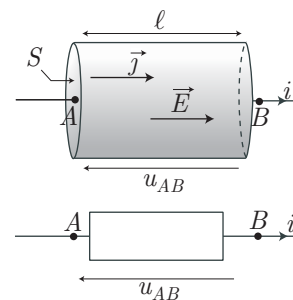
$$i = j \times S \Rightarrow j = \frac{i}{S}$$

et est soumis à une tension $u_{AB} = E \times \ell$, où :

$$j = \sigma E \Rightarrow u_{AB} = \frac{j}{\sigma} \times \ell = \frac{i\ell}{\sigma S}$$

On voit ainsi apparaître la **loi d'Ohm** :

$$u_{AB} = Ri \text{ avec } R = \frac{\ell}{\sigma S} \text{ (résistance en ohm : } \Omega \text{)} \quad (30)$$



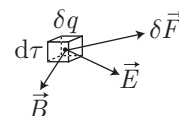
Pour calculer la résistance R d'un conducteur de forme non cylindrique, on peut procéder de la manière suivante :

- le conducteur est «débité» en conducteurs élémentaires dont la résistance δR (ou la conductance $\delta G = \frac{1}{\delta R}$) se calcule à l'aide de l'expression (30) : $\delta R = \frac{d\ell}{\sigma S}$ (ou $\delta G = \sigma \frac{dS}{\ell}$);
- la résistance totale s'obtient en additionnant soit les résistances élémentaires (si elles sont associées en série) soit les conductances élémentaires (si elles sont en parallèle) :

$$R = \int \delta R = \int \frac{d\ell}{\sigma S} \text{ ou } G = \int \delta G = \int \sigma \frac{dS}{\ell} \text{ puis } R = \frac{1}{G}$$

b- Puissance volumique

Considérons une charge élémentaire δq , de volume $d\tau$, se déplaçant à une vitesse \vec{v} dans des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} . La **force de Lorentz** $\delta \vec{F} = \delta q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ exerce alors une puissance :



$$\delta \mathcal{P} = \delta \vec{F} \cdot \vec{v} = \delta q \vec{E} \cdot \vec{v} + \delta q (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = \delta q \vec{v} \cdot \vec{E}$$

car $(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = 0$ (les vecteurs \vec{v} et $\vec{v} \wedge \vec{B}$ étant orthogonaux).

La densité volumique de charges mobiles ρ_m permet enfin d'écrire :

$$\delta q = \rho_m d\tau \Rightarrow \delta \mathcal{P} = \rho_m d\tau \vec{v} \cdot \vec{E} \Rightarrow \frac{\delta \mathcal{P}}{d\tau} = \rho_m \vec{v} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

Cette relation définit la **puissance Joule volumique** reçue par les porteurs de charge mobiles plongés dans un champ électromagnétique.

Pour calculer la puissance Joule \mathcal{P}_J reçu par un ensemble de charges mobiles contenues dans un volume \mathcal{V} , il suffit de calculer $\vec{E}(M)$ et $\vec{j}(M)$ en chacun des points M de \mathcal{V} , puis d'intégrer l'expression précédente :

$$\delta \mathcal{P}_J = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau \Rightarrow \mathcal{P}_J = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{j}(M) \cdot \vec{E}(M) d\tau_M$$

c- Effet Joule

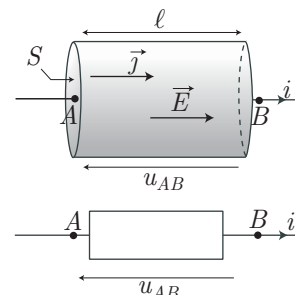
Intéressons-nous ici à la puissance Joule reçue par les charges d'un conducteur cylindrique de section constante S , de longueur ℓ , traversé par un courant i uniforme et dans lequel règne un champ électrique également uniforme.

La loi d'Ohm locale fournit directement :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \left(\frac{\vec{j}}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} j^2$$

où :

$$j = \frac{i}{S} \Rightarrow \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{i^2}{\sigma S^2}$$



La puissance totale reçue par les porteurs de charge mobiles vaut alors :

$$\mathcal{P}_J = \iiint \frac{i^2}{\sigma S^2} d\tau = \frac{i^2}{\sigma S^2} \iiint d\tau = \frac{i^2}{\sigma S^2} \times S\ell = \frac{\ell}{\sigma S} i^2 = Ri^2 \text{ car } R = \frac{\ell}{\sigma S}$$

Le premier principe de la thermodynamique indique quant à lui que le conducteur reçoit le travail électrique $W_J = \mathcal{P}_J \times \Delta t$ et la chaleur $Q_{\text{reçue}} = \mathcal{P}_{\text{th reçue}} \times \Delta t$, son énergie interne varie de ΔU et sa température de ΔT :

$$\Delta U = W_J + Q_{\text{reçue}} \Rightarrow C \Delta T = (\mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{\text{th reçue}}) \Delta t$$

Notamment, en régime stationnaire :

$$\Delta T = 0 \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{th reçue}} = -\mathcal{P}_J \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{\text{th dissipée}} = -\mathcal{P}_{\text{th reçue}} = Ri^2}$$

On retrouve ici l'expression mathématique de l'**effet Joule** : le dipôle dissipe sous forme de chaleur une puissance qui vaut Ri^2 .

IV Énergie électromagnétique

1- Densité d'énergie

Tout volume de l'espace où existe un champ électromagnétique possède une énergie. On note $u(M, t)$ la densité volumique d'énergie électromagnétique en un point M à la date t et \mathcal{E}_{mag} désigne l'énergie associée contenue dans le volume V :

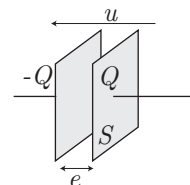
$$\boxed{u(M, t) = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint_V u(M, t) d\tau_M}$$

REMARQUE Dans cette expression, on distingue les termes associés aux composantes électrique et magnétique du champ :

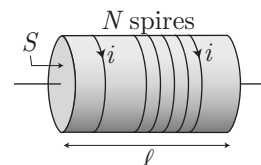
$$u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \text{ et } u_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

Par exemple, calculons l'énergie électrique accumulée dans un condensateur de capacité $C = \varepsilon_0 \frac{S}{e}$, dans lequel règne un champ électrique $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0}$ ($\sigma = \frac{Q}{S}$ désignant la densité surfacique de charges portée par les armatures). Cette énergie vaut alors :

$$\mathcal{E} = \iiint \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \times V = \frac{\varepsilon_0}{2} \times \frac{Q^2}{S^2 \varepsilon_0^2} \times S e = \frac{Q^2}{2} \times \frac{e}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C}}$$



De même, évaluons l'énergie magnétique accumulée dans un solénoïde de longueur ℓ très grande devant sa section S , composé de N spires parcourues chacune par un courant d'intensité i . À l'intérieur de ce solénoïde un champ magnétique $B = \frac{\mu_0 N}{\ell} i$ permet d'accumuler l'énergie magnétique :



$$\mathcal{E} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \times V = \frac{1}{2\mu_0} \times \frac{\mu_0^2 N^2 i^2}{\ell^2} \times S\ell = \frac{i^2}{2} \times \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$$

où l'on reconnaît¹⁴ l'expression de l'auto-inductance L du solénoïde :

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} Li^2}$$

14. Chaque spire de section S est traversée par un champ $B = \frac{\mu_0 N}{\ell} i$ qui produit alors un flux $\phi_1 = BS = \frac{\mu_0 N S i}{\ell}$. Donc, l'ensemble des N spires qui composent ce solénoïde sont traversées par un flux total :

$$\phi_B = N \times \phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell} i = Li$$

où $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$ définit alors l'auto-inductance du solénoïde.

2– Vecteur de Poynting

Le soleil émet des ondes électromagnétiques qui se propagent dans l'espace jusqu'à nous. Ces dernières transportent de l'énergie nécessaire à la vie sur Terre. Cette propagation se fait dans une direction et un sens qu'il est possible de préciser à l'aide d'un vecteur.



DÉFINITION

On appelle vecteur de Poynting associé au champ électromagnétique :

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

La puissance élémentaire rayonnée par le champ à travers une surface dS , dans le sens de $d\vec{S}$ s'écrit :

$$d\mathcal{P} = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

Ce résultat se généralise alors pour une surface quelconque, ce qui permet de définir la puissance totale rayonnée par le champ à travers une surface :

$$\mathcal{P}_r = \iint_S \vec{\Pi}(P) \cdot d\vec{S}_P$$

Comme exemples, on peut citer quelques ordres de grandeur de densités surfaciques de puissances électromagnétiques :

| | |
|---|---------------------------------------|
| Faisceau laser | $\Pi \simeq 10^3 \text{ W.m}^{-2}$ |
| Puissance émise par le Soleil sur la Terre | $\Pi \simeq 1350 \text{ W.m}^{-2}$ |
| Téléphone portable (à 5 cm) | $\Pi \simeq 10^{-3} \text{ W.m}^{-1}$ |

3– Bilan d'énergie

On considère un volume V , fixe dans l'espace, limité par une surface S .

L'énergie électromagnétique contenue dans ce volume est susceptible de varier, soit parce que le champ va échanger de l'énergie avec les charges, soit parce qu'il va rayonner à travers S .

L'énergie étant une grandeur conservative, il est possible d'établir une équation traduisant ces différents échanges.

Soit $\mathcal{E}(t)$ l'énergie électromagnétique du volume V à la date t ; la variation de \mathcal{E} entre les instants t et $t + dt$ vaut :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E} &= \mathcal{E}(t + dt) - \mathcal{E}(t) \\ &= \iiint_V u_e(M, t + dt) d\tau_M - \iiint_V u_e(M, t) d\tau_M = \iiint_V \frac{\partial u_e(M, t)}{\partial t} dt d\tau_M \end{aligned}$$

Cette variation s'écrit aussi :

$$d\mathcal{E} = - \iiint_V \vec{j}_v(M) \cdot \vec{E}(M) dt d\tau_M - \oiint_S \vec{\Pi}(P) \cdot d\vec{S}_P dt$$

le premier terme traduisant l'énergie échangée entre le champ et les charges, le second l'énergie rayonnée à travers la surface S qui délimite V .

On a alors l'égalité :

$$\iiint_V \frac{\partial u_e(M, t)}{\partial t} dt d\tau_M = - \iiint_V \vec{j}_v(M) \cdot \vec{E}(M) dt d\tau_M - \oiint_S \vec{\Pi}(P) \cdot d\vec{S}_P dt \tag{31}$$

qui s'écrit aussi, après application du théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_V \frac{\partial u_e(M, t)}{\partial t} dt d\tau_M = - \iiint_V \vec{j}_v(M) \cdot \vec{E}(M) dt d\tau_M - \iiint_V \text{div } \vec{\Pi}(M) dt d\tau_M$$

d'où il découle que :

$$\iiint_V \left(\frac{\partial u_e(M, t)}{\partial t} + \vec{j}_v(M) \cdot \vec{E}(M) + \text{div } \vec{\Pi}(M) \right) d\tau_M = 0$$

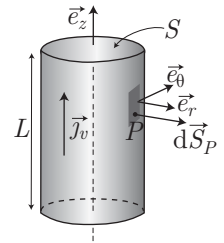
Cette dernière relation devant être vérifiée pour tout volume V , on en déduit la forme locale de l'équation (31), appelée **équation de Poynting**¹⁵ :

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + \vec{j}_v \cdot \vec{E} + \text{div } \vec{\Pi} = 0$$

Par exemple, intéressons-nous au cas d'un conducteur ohmique (\mathcal{C}) cylindrique, de longueur L , de section S et de conductivité γ , parcouru par un courant permanent d'intensité I , de densité volumique $\vec{j}_v = J_v \vec{e}_z$.

La loi locale d'Ohm : $\vec{j}_v = \gamma \vec{E}$ permet d'exprimer le terme :

$$\iiint_V \vec{j}_v(M) \cdot \vec{E}(M) d\tau_M = \iiint_V \frac{J_v^2}{\gamma} d\tau_M = \frac{J_v^2}{\gamma} \times S \times L$$



La puissance échangée entre le champ et les charges vaut donc :

$$\frac{J_v^2 S \times L}{\gamma} = \frac{I^2 \times S \times L}{\gamma S^2} = \frac{L}{\gamma S} \times I^2 = R_0 I^2$$

où R_0 désigne la résistance électrique du conducteur ohmique ; on reconnaît le terme classique associé à l'effet Joule.

Exprimons maintenant la puissance rayonnée à travers la résistance : $\oiint \vec{\Pi}(P) \cdot d\vec{S}_P$, en rappelant au préalable

que le champ magnétique à la surface du cylindre s'écrit : $\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{e}_\theta$, a étant le rayon du cylindre :

$$\vec{\Pi}(P) = \vec{E}(P) \wedge \frac{\vec{B}(P)}{\mu_0} = -\frac{J_v}{\gamma} \times \frac{\mu_0 I}{2\pi a \mu_0} \vec{e}_r = \frac{-I^2}{2\pi a \gamma S} \vec{e}_r$$

Par conséquent :

$$\oiint_S \vec{\Pi}(P) \cdot d\vec{S}_P = \oiint_S \frac{-I^2}{2\pi a \gamma S} \times dS_P = -\frac{I^2 \times 2\pi a L}{2\pi a \gamma S} = -\frac{I^2 L}{\gamma S} = -R_0 I^2$$

La puissance rayonnée par le champ est donc opposée à la puissance échangée entre le champ et les charges. La relation (31) est donc vérifiée puisqu'en régime permanent le terme $\iiint \frac{\partial u_e(M, t)}{\partial t} dt d\tau_M$ est nul.

V Propagation et rayonnement

1- Propagation dans le vide

a- Équation de d'Alembert

Dans le vide, les équations de Maxwell se simplifient :

| | | | |
|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---|
| Maxwell-Gauss | $\text{div } \vec{E} = 0$ | Maxwell-Ampère | $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |
| Maxwell-Thomson | $\text{div } \vec{B} = 0$ | Maxwell-Faraday | $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |

15. L'équation de Poynting peut également s'obtenir directement à partir des équations de Maxwell-Ampère et de Maxwell-Faraday :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ et } \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ainsi que de la loi mathématique de transformation :

$$\text{div}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{v} \cdot \text{rot } \vec{u} - \vec{u} \cdot \text{rot } \vec{v}$$

appliquée à la définition du vecteur de Poynting :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\Pi} &= \frac{1}{\mu_0} \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \frac{1}{\mu_0} [\vec{B} \cdot \text{rot } \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{B}] = \frac{1}{\mu_0} \left[\vec{B} \cdot \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{E} \cdot \left(\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \right) - \vec{E} \cdot \vec{j} \\ \Rightarrow & \boxed{\text{div } \vec{\Pi} + \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0} \end{aligned}$$

Aussi, le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday fournit l'expression :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

qui se simplifie en tenant compte de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \text{ où } c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \quad (32)$$

De même, le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère fournit l'expression :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

qui se simplifie également à l'aide de l'équation de Maxwell-Thomson :

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (33)$$

Comme il sera démontré ci-après, ces **équations de d'Alembert** traduisent la propagation des champs \vec{E} et \vec{B} dans le vide.

REMARQUE Les équations (32) et (33) sont toujours valables dans le vide. Vous serez donc autorisés à les utiliser directement si leur démonstration n'est pas explicitement demandée.

b- Solutions à une dimension

Dans un premier temps, nous restreindrons l'étude à une onde électromagnétique unidimensionnelle :

$$\vec{E}(x, t) = E(x, t) \vec{u}_\alpha$$

où \vec{u}_α est un vecteur de base cartésien (\vec{u}_x , \vec{u}_y ou \vec{u}_z). Ainsi, l'équation de d'Alembert (32) se simplifie :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} = \Delta E \vec{u}_\alpha &\Rightarrow \Delta E \vec{u}_\alpha - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \vec{u}_\alpha = \vec{0} \Rightarrow \Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \text{ pour } E = E(x, t) \end{aligned}$$

Les **ondes progressives** seront cherchées sous la forme $E = E(\phi)$ où $\phi(x, t)$ désigne la **phase** de l'onde. Par exemple, on pourrait inclure dans ces solutions les fonctions :

$$E(\phi) = E_0 e^\phi \text{ et } \phi(x, t) = (\omega t - kx)^2 \Rightarrow E = E_0 e^{(\omega t - kx)^2}$$

REMARQUE En toute rigueur, si $E(\phi)$ est une fonction de ϕ (donc d'une seule variable), il ne peut s'agir de la même fonction de x et t (donc de deux variables). On devrait donc distinguer $E(\phi)$ et $E'(x, t)$ et écrire $E'(x, t) = E_0 e^{(\omega t - kx)^2} \Rightarrow E'(x, t) = f(u)$ où $f(u) = E_0 e^u$ et $u = u(x, t) = (\omega t - kx)^2$. Par abus de langage et afin de simplifier les notations, nous confondrons $E(\phi)$ et $E'(x, t)$ de sorte que $E(x, t)$ désigne une fonction dépendant de x et t , sans préjuger de la forme analytique de cette dépendance ; c'est-à-dire que nous nous autoriserons à écrire :

$$E(x, t) = E(\phi) = E_0 e^\phi = E_0 e^{(\omega t - kx)^2} \text{ si } \phi = \omega t - kx$$

Notons donc $E(x, t) = E(\phi)$ avec $\phi = \phi(x, t)$ et rappelons que :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{dE}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = E' \frac{\partial \phi}{\partial x} \text{ où } E' = \frac{dE}{d\phi} \text{ et } E'' = \frac{dE'}{d\phi} = \frac{d^2 E}{d\phi^2}$$

Choisissons alors une phase $\phi(x, t) = x \pm ct$ où c est une constante. Il vient ainsi :

$$\frac{\partial E}{\partial x} = E' \frac{\partial \phi}{\partial x} = E' \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{dE'}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} = E''$$

et :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = E' \frac{\partial \phi}{\partial t} = \pm c E' \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \pm c \frac{dE'}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} = (\pm c)^2 E'' \Rightarrow E'' = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

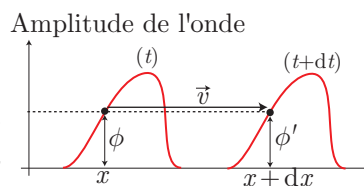
De ces expressions, il ressort que :

$$E'' = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

On montre ainsi que les fonctions $E(x, t) = f(x - ct)$ et $E(x, t) = g(x + ct)$ sont deux solutions de l'équation de d'Alembert.

Intéressons-nous à la solution dont la phase s'écrit $\phi(x, t) = x - ct$ et montrons qu'elle se propage.

Pendant dt , cette onde se déplace de dx à la vitesse $v = \frac{dx}{dt}$. Ainsi, à la date $t + dt$ elle se trouve en $M(x + dx, t + dt)$ où le champ électrique prend la valeur $E(\phi')$, avec $\phi' = \phi(x + dx, t + dt)$. Or, l'onde se propage sans déformation à condition que $E(\phi) = E(\phi')$, soit encore :



$$\phi(x, t) = \phi(x + dx, t + dt) \Rightarrow x - ct = (x + dx) - c(t + dt) \Rightarrow 0 = dx - c dt \tag{34}$$

$$\Rightarrow dx = c dt \Rightarrow \boxed{v = \frac{dx}{dt} = c} \tag{35}$$

Une telle onde se propage donc vers la droite (elle est dite **progressive**) et sa phase ϕ se déplace avec une **vitesse de phase** $v_\phi = c$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Rightarrow v_\phi = c \text{ pour } E(x, t) = f(x - ct)}$$

Si la phase s'écrit $\phi(x, t) = x + ct$, l'équation (34) devient :

$$\begin{aligned} \phi(x, t) = \phi(x + dx, t + dt) &\Rightarrow x + ct = (x + dx) + c(t + dt) \Rightarrow 0 = dx + c dt \\ &\Rightarrow dx = -c dt \Rightarrow v = \frac{dx}{dt} = -c \end{aligned}$$

La vitesse de phase vaut donc toujours $v_\phi = c$ (vitesse de propagation de ϕ), mais l'onde se propage vers la gauche ($\frac{dx}{dt} < 0$) ; on la nomme parfois **onde régressive** pour la distinguer de la précédente.

Les fonctions d'onde $E(x, t) = E(x \pm ct)$ sont caractéristiques des phénomènes physiques qui se propagent. Par opposition, on trouvera également des solutions de l'équation de d'Alembert sous la forme d'un produit de deux fonctions réelles d'espace et de temps chacune :

$$\boxed{E(x, t) = f(x) \times g(t) \quad (\text{ondes stationnaires})}$$

Ces ondes (dites **ondes stationnaires**) ne se propagent pas et se rencontrent généralement lorsqu'une condition limite impose E en un point de l'espace (par exemple lors de la réflexion d'une onde sur un métal, qui sera étudiée ultérieurement).

c- Ondes Planes Progressives Monochromatiques (OPPM)



DÉFINITION

Le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ d'une OPPM admet des composantes cartésiennes qui sont des fonctions sinusoïdales du temps :

$$E_\alpha(M, t) = E_{0\alpha} \cos[\phi(M, t) + \varphi_\alpha] \text{ où } \phi(M, t) = \vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t \text{ est la phase de l'onde}$$

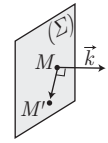
Recensons quelques propriétés de ces ondes :

- **L'onde est plane** car ses surfaces d'onde sont des plans

Une surface d'onde (Σ) est une surface dont tous les points «vibrent» en phase, c'est-à-dire que deux points M et M' quelconques de Σ possèdent la même phase ϕ à chaque instant t :

$$\phi(M, t) = \phi(M', t) \Rightarrow \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM'} - \omega t \Rightarrow \vec{k} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$$

Ce résultat montre que $\forall (M, M') \in \Sigma$, $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{k}$ où \vec{k} est un vecteur constant et uniforme. Donc Σ est un plan.



- **L'onde est progressive** car elle fait intervenir des fonctions $f(x - ct)$

Puisque \vec{k} est un vecteur constant et uniforme, on peut choisir un système de coordonnées telles que l'axe (Ox) ait la même direction que \vec{k} :

$$\begin{aligned} \vec{k} = k \vec{e}_x &\Rightarrow \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} = kx \Rightarrow \phi(M, t) = kx - \omega t = k \left(x - \frac{\omega}{k} t \right) \\ &\Rightarrow E_\alpha = E_{0\alpha} [k(x - ct) + \varphi_\alpha] \text{ en posant } c = \frac{\omega}{k} \end{aligned} \quad (36)$$

- **L'onde est monochromatique**

Elle ne possède qu'une seule pulsation temporelle ω et une seule «pulsation spatiale» k . Cette propriété impose que les termes $E_{\alpha 0}$ sont des constantes indépendantes du temps et de l'espace (sans quoi d'autres fréquences spatiales apparaîtraient dans le spectre de E_α)

- **L'onde se déplace dans le sens et la direction de \vec{k}**

Soient A et B deux points atteints par l'onde en des dates t_A et t_B , ce qui impose la définition de la célérité de l'onde :

$$c = \frac{AB}{t_B - t_A} \Rightarrow t_B - t_A = \frac{AB}{c}$$

Or, puisque l'onde passe en A et B aux dates t_A et t_B , elle y possède la même phase :

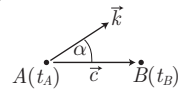
$$\phi(A, t_A) = \phi(B, t_B) \Rightarrow \vec{k} \cdot \overrightarrow{OA} - \omega t_A = \vec{k} \cdot \overrightarrow{OB} - \omega t_B \Rightarrow \vec{k} \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \omega (t_B - t_A) \Rightarrow \vec{k} \cdot \overrightarrow{AB} = \omega \frac{AB}{c}$$

En notant α l'angle ($\vec{k}, \overrightarrow{AB}$) et en utilisant la relation (36) on obtient ainsi :

$$k \times AB \times \cos \alpha = k \times AB \Rightarrow \cos \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$$

ce qui montre que \vec{k} et \overrightarrow{AB} ont même sens et même direction.

À ces propriétés s'en ajoutent d'autres, qui doivent être connues :



Le modèle de l'OPPM est un modèle idéal, qui ne peut pas se rencontrer rigoureusement dans la nature car :

- il existe une date t_0 de démarrage de l'onde, avant laquelle le champ électrique n'existait pas. Donc la fonction $E(M, t)$ admet plusieurs harmoniques dans son spectre (elle n'est pas rigoureusement monochromatique).
- l'onde est limitée dans l'espace, sinon elle porterait une énergie infinie (ce qui sera démontré ultérieurement). Donc $E(M, t) = E_0(z) \cos(z - \omega t)$ possède une amplitude $E_0(z)$ qui ne peut pas être uniforme

Étant donné le caractère sinusoïdal permanent des OPPM, les composantes E_α de \vec{E} admettent des images complexes \underline{E}_α telles que $E_\alpha = \Re \{ \underline{E}_\alpha \}$:

$$\begin{aligned} E_x = E_{0x} \cos(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t + \varphi_x) &\Rightarrow \underline{E}_x = E_{0x} e^{i\varphi_x} e^{i\phi} = \underline{E}_{0x} e^{i\phi} \\ E_y = E_{0y} \cos(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t + \varphi_y) &\Rightarrow \underline{E}_y = E_{0y} e^{i\varphi_y} e^{i\phi} = \underline{E}_{0y} e^{i\phi} \\ E_z = E_{0z} \cos(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t + \varphi_z) &\Rightarrow \underline{E}_z = E_{0z} e^{i\varphi_z} e^{i\phi} = \underline{E}_{0z} e^{i\phi} \end{aligned}$$

Le champ électrique admet donc aussi une image complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \\ \underline{E}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{0x} \\ E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} e^{i\phi} \Rightarrow \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} - \omega t)} \text{ où } \underline{\vec{E}}_0 = \text{cte}$$

REMARQUE

Compte tenu de la parité de la fonction cosinus, on pourra également trouver la notation :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{OM})}$$

Étant donné les composantes des vecteurs \vec{k} et \vec{OM} :

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{OM} &= \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x k_x + y k_y + z k_z \Rightarrow \underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(x k_x + y k_y + z k_z - \omega t)} \\ &\Rightarrow \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = i k_x \underline{\vec{E}} \text{ et } \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = -i \omega \underline{\vec{E}}\end{aligned}\quad (37)$$

Ainsi, l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x}$ équivaut à une multiplication par $i k_x$, de sorte que l'opérateur *nabla* a pour composantes :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix} = i \vec{k}$$

ce qui facilite le calculs des divergence et rotationnel :

$$\boxed{\text{div } \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \cdot \underline{\vec{E}} = i \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} \text{ et } \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = \vec{\nabla} \wedge \underline{\vec{E}} = i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}}\quad (38)$$

Attention : Cette simplification n'est légitime que lorsque $\underline{\vec{E}}_0$ ne dépend pas de l'espace. Dans le cas contraire :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0(M, t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)} \Rightarrow \frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial x} = \frac{\partial \underline{\vec{E}}_0}{\partial x} e^{i\phi} + i k_x \underline{\vec{E}} \neq i k_x \underline{\vec{E}}$$

Attention : Avant d'effectuer les simplifications suggérées par les relations (37) et (38), on veillera à expliciter l'expression de ϕ .

En effet, si on remplace $\phi = \vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t$ par $\phi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM}$:

$$\underline{\vec{E}}(M, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{OM})}$$

on obtient alors :

$$\frac{\partial \underline{\vec{E}}}{\partial t} = i \omega \underline{\vec{E}} \quad \text{div} = -i \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

En conclusion, on retiendra que

- le champ électrique d'une OPPM admet une image complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \equiv -i \omega \text{ et } \vec{\nabla} \equiv i \vec{k} \text{ avec } \underline{\vec{E}}_0 = c \vec{t}_e$$

- les opérateurs d'analyse vectorielle se transforment en simples opérateurs algébriques :

$$\text{div } \underline{\vec{E}} = i \vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} \quad \overrightarrow{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

- le **vecteur d'onde** \vec{k} , de norme $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, donne la direction et le sens de propagation de l'onde.
- l'OPPM est une notion exploitable seulement loin des conditions limites.
- la phase $\phi = \vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t$ se simplifie en $\phi = kx - \omega t$ si l'onde se propage dans la direction $\vec{k} = k \vec{e}_x$.

d– Structure d'une OPPM

Considérons une OPPM de vecteur d'onde \vec{k} qui se propage dans le vide ($\rho = 0$ et $\vec{j} = \vec{0}$), d'image complexe :

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)}$$

En notation complexe, les équations de Maxwell se simplifient :

$$\text{Maxwell-Gauss} : \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (39)$$

$$\text{Maxwell-Thomson} : \operatorname{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow i \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \quad (40)$$

$$\text{Maxwell-Faraday} : \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i \vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B} \quad (41)$$

$$\text{Maxwell-Ampère} : \operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow i \vec{k} \wedge \vec{B} = -\mu_0 \varepsilon_0 i\omega \vec{E} \quad (42)$$

L'équation (41) : $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$, associée à l'équation (42), conduit à :

$$\vec{k} \wedge \left(\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega \vec{E} \Rightarrow \frac{1}{\omega} \left[\vec{k} \times (\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} \right] = -\frac{\omega}{c^2} \vec{E}$$

où l'équation (39) annule le terme $\vec{k} \cdot \vec{E}$. On retrouve ainsi le résultat (36) de la page 51

$$\frac{k^2}{\omega} = \frac{\omega}{c^2} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \boxed{\omega = k \times c}$$

Cette relation, appelée **relation de dispersion**, fournit la relation entre ω et k .

Pour obtenir une relation de dispersion $\omega = f(k)$ ou $k = g(\omega)$, on procède en deux étapes :

- on utilise les équations de Maxwell en notation complexe, de manière à n'y garder qu'une équation en \vec{E} ou en \vec{B} ;
- on résout l'équation qui lie ω et k .

Attention : la relation de dispersion $\omega = k \times c$, toujours valable dans le vide, peut être différente dans d'autres milieux.

D'une part les équations (39) et (40) : $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ et $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ montrent que \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires à \vec{k} . D'autre part, l'équation (41) : $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$ signifie que \vec{B} est aussi perpendiculaire à \vec{E} . Cette configuration est d'ailleurs confirmée par l'équation (42) : $-\mu_0 \varepsilon_0 \omega \vec{E} = \vec{k} \wedge \vec{B}$.

Enfin, puisque \vec{k} et \vec{E} sont orthogonaux, l'équation $\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}$ a aussi pour conséquence :

$$\boxed{\|\vec{B}\| = \frac{k}{\omega} \|\vec{E}\| = \frac{1}{c} \|\vec{E}\|} \quad \text{car } \omega = kc \quad (43)$$

De cette étude ressortent également les **relations de structure** de l'OPPM dans le vide :

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = -\frac{c^2}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{B}} \quad (44)$$

Lorsque l'onde est **polarisée rectilignement** (la direction de \vec{E} demeure constante dans le temps), la relation (44) décrit explicitement la propagation de l'onde (*cf.* figure 1 ci-dessous). Il peut aussi arriver que la direction de \vec{E} varie dans l'espace (*cf.* figure 2).

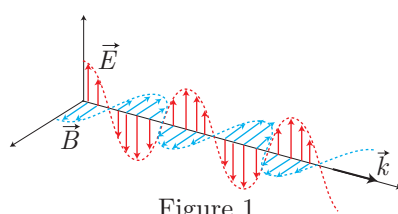


Figure 1

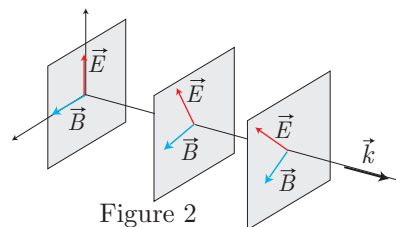
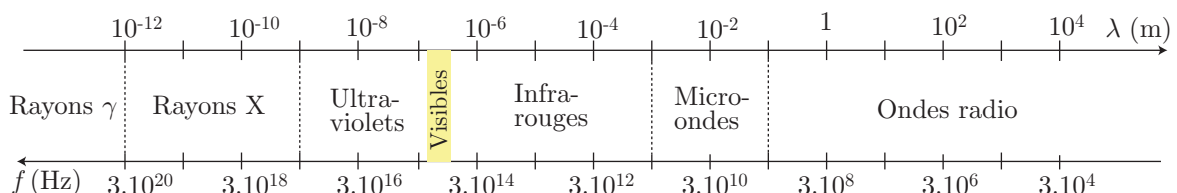


Figure 2

En fonction de leur fréquence f , les ondes électromagnétiques sont classées par familles :



e- Aspects énergétiques

Le vecteur de Poynting associé à une OPPM vaut :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left(\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \right) = \frac{1}{\mu_0 \omega} \left[\vec{k} \times (\vec{E} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\vec{k} \cdot \vec{E}) \right]$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la formule du double produit vectoriel¹⁶ et de l'orthogonalité de \vec{E} et \vec{k} :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{k} \times E^2 \Rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0 c} E^2 \times \vec{u} \text{ où } \vec{u} = \frac{\vec{k}}{k}}$$

Soit E_0 la norme du vecteur :

$$\vec{E}_0 = E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y + E_{0z} \vec{e}_z \Rightarrow E_0^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2$$

Le vecteur champ vérifie alors :

$$\vec{E} = \sum_{\alpha=1}^3 E_{\alpha} \vec{e}_{\alpha} \text{ où } E_{\alpha} = E_{0\alpha} \cos(\phi + \varphi_{\alpha})$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} E^2 &= \sum_{\alpha=1}^3 E_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^3 E_{0\alpha}^2 \cos^2(\phi + \varphi_{\alpha}) \text{ avec } \langle \cos^2(\phi + \varphi_{\alpha}) \rangle = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \langle E^2 \rangle &= \sum_{\alpha=1}^3 E_{0\alpha}^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (E_{0x}^2 + E_{0y}^2 + E_{0z}^2) = \frac{E_0^2}{2} \end{aligned} \quad (45)$$

C'est pourquoi le vecteur de Poynting a pour valeur moyenne :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{\mu_0 c} \langle E^2 \rangle \vec{u} \Rightarrow \boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}} \quad (46)$$

Attention : pour calculer le vecteur de Poynting, il est fortement recommandé d'utiliser les notations réelles : $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$ et non : $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}$.

En effet, car en posant $\underline{\vec{\Pi}} = \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}$, on fabrique un vecteur tel que :

$$\Re \{ \underline{\vec{\Pi}} \} = \frac{1}{\mu_0} \Re \{ \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}} \} \neq \frac{1}{\mu_0} \Re \{ \underline{\vec{E}} \} \wedge \Re \{ \underline{\vec{B}} \} \Rightarrow \boxed{\Re \{ \underline{\vec{\Pi}} \} \neq \vec{\Pi}}$$

c'est-à-dire un vecteur sans signification physique, dont la manipulation donne alors des résultats inexploitable. Pour s'en convaincre, commençons l'erreur de travailler avec un tel vecteur de Poynting complexe :

$$\underline{\vec{\Pi}} = \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}} = \frac{1}{\mu_0} \underline{\vec{E}} \wedge \left(\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} \right) = \frac{1}{\mu_0 \omega} \left[\vec{k} \times \underline{\vec{E}}^2 - \underline{\vec{E}} \times \underbrace{(\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}})}_{=0} \right] = \frac{1}{\mu_0 c} \underline{\vec{E}}^2 \vec{u}$$

où :

$$\underline{E} = E_0 e^{i\phi} \Rightarrow \underline{\vec{\Pi}} = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 e^{2i\phi} \vec{u}$$

16. On démontre, en mathématiques, que :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} \times (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \times (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

Une telle expression fournit alors une moyenne : $\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$ (car $\langle e^{2i\phi} \rangle = 0$) incompatible avec le résultat (46)

Il est quand même possible d'utiliser les amplitudes complexes des champs pour calculer l'expression du vecteur de Poynting moyen, à condition d'utiliser la formule suivante :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \vec{E} \wedge \vec{B}^* \right\}$$

où \vec{B}^* est le conjugué complexe de \vec{B} .

Confirmons ce résultat en utilisant l'expression (44) pour calculer :

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \vec{E} \wedge \left(\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E}^* \right) = \frac{1}{\omega} \left[\vec{k} \times (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) - \vec{E}^* \times (\vec{k} \cdot \vec{E}) \right]$$

où :

$$\vec{E} \cdot \vec{E}^* = (\vec{E}_0 e^{i\phi}) \cdot (\vec{E}_0^* e^{-i\phi}) = |\vec{E}_0|^2 = E_0^2 \Rightarrow \frac{1}{2\mu_0} \Re \left\{ \vec{E} \wedge \vec{B}^* \right\} = \frac{1}{2\mu_0} \times E_0^2 \frac{\vec{k}}{\omega} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}$$



DÉFINITION

Les expressions (46) conduisent à définir **l'intensité** I d'une onde lumineuse et son **éclairement** \mathcal{E} :

$$I = \langle E^2 \rangle$$

$$\mathcal{E} = K \langle E^2 \rangle$$

où K est une constante.

Exploitions maintenant le résultat (43) :

$$\| \vec{B} \| = \frac{1}{c} \| \vec{E} \| = \frac{E}{c}$$

pour calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique :

$$u = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} + \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} \text{ car } \mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$$

$$\Rightarrow u = \frac{E^2}{\mu_0 c^2} \Rightarrow \langle u \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \text{ (d'après 45)} \quad (47)$$

f- Propagation de l'énergie

Nous cherchons ici à déterminer la vitesse v_e à laquelle se propage l'énergie électromagnétique dans le vide.

Déterminons alors de deux façons différentes l'énergie qui traverse une surface S (la direction de propagation étant normale à S) pendant dt

- La définition du vecteur de Poynting donne directement le résultat cherché grâce au résultat (46) :

$$\frac{\delta E_t}{dt} = \Pi \times S \Rightarrow \delta \mathcal{E}_t = \Pi \times S dt \Rightarrow \langle \delta \mathcal{E}_t \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \times S dt$$

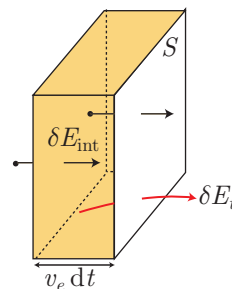
- L'énergie est supposée véhiculée par des photons qui se déplacent avec une vitesse v_e . Comme le suggère la figure précédente, seuls les photons situés dans le volume $d\tau = v_e dt S$ en aval de S peuvent traverser S pendant dt (les autres n'atteignent pas S) et véhiculer l'énergie $\delta \mathcal{E}_{\text{int}}$ contenue dans $d\tau$:

$$u = \frac{E^2}{\mu_0 c^2} \Rightarrow \delta \mathcal{E}_{\text{int}} = \frac{E^2}{\mu_0 c^2} \times v_e S dt$$

Puisque ces deux énergies sont identiques :

$$\langle \delta \mathcal{E}_t \rangle = \langle \delta \mathcal{E}_{\text{int}} \rangle \Rightarrow \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \times S dt = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \times v_e S dt \Rightarrow \boxed{v_e = c}$$

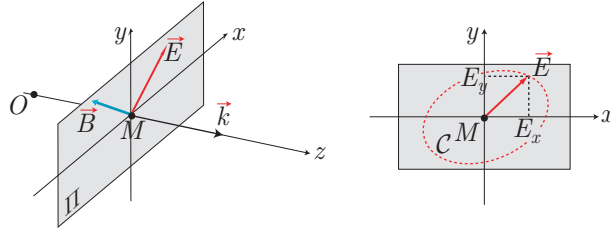
ce qui montre que l'énergie électromagnétique se propage dans le vide à la célérité c .



2- Polarisaton de l'onde

Considérons une OPPM qui se propage dans la direction d'un vecteur \vec{e}_z perpendiculaire au plan (Mxy) , qui contient alors les composantes du champ :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t + \varphi_x - kz) \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t + \varphi_y - kz) \end{cases} \quad (48)$$



Pour simplifier les calculs, nous effectuons un changement d'origine des dates, en posant :

$$\begin{aligned} \omega t + \varphi_x - kz = \omega t' &\Rightarrow \omega t - kz = \omega t' - \varphi_x \Rightarrow \omega t + \varphi_y - kz = \omega t' + \varphi_y - \varphi_x = \omega t' + \Delta\varphi \\ &\Rightarrow \begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t') \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t' + \Delta\varphi) \end{cases} \end{aligned}$$

Il apparaît ainsi que, puisque E_x et E_y varient dans le temps, l'extrémité du vecteur \vec{E} se déplace dans le plan Mxy et décrit alors une courbe \mathcal{C} ; la nature de la courbe définit la **polarisation** de l'OPPM :

- La polarisation est **rectiligne** si $\Delta\varphi = 0$ ou $\Delta\varphi = \pi$ car, dans ce cas :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t') \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t') \end{cases} \Rightarrow \frac{E_y}{E_x} = \pm \frac{E_{0y}}{E_{0x}} = a = \text{cte} \Rightarrow E_y = a \times E_x$$

La courbe \mathcal{C} est alors une droite de pente a (positive ou négative) et passant par l'origine M .

- La polarisation est **circulaire** si $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ et $E_{0x} = E_{0y}$ car, dans ce cas :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t') \\ E_y = \pm E_{0y} \sin(\omega t') \end{cases} \Rightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_{0x}^2$$

La courbe \mathcal{C} est un cercle de rayon E_{0x} .

- La polarisation est **elliptique** dans tous les autres cas (si elle existe). Notamment, lorsque $\Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t') \\ E_y = \pm E_{0y} \sin(\omega t') \end{cases} \Rightarrow \frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} = 1$$

ce qui est l'équation cartésienne d'une ellipse dont les axes sont (Ox) et (Oy) de longueurs E_{0x} et E_{0y} .

REMARQUE Bien que \vec{E} décrive une courbe \mathcal{C} dans le plan $z = \text{cte}$, le vecteur \vec{E}_0 est constant et uniforme.

Pour illustrer ce phénomène, écrivons les images complexes du champ (48) :

$$\begin{cases} \underline{E}_x = E_{0x} e^{i(\omega t - kz + \varphi_x)} = E_{0x} e^{i\varphi_x} e^{i\phi} \\ \underline{E}_y = E_{0y} e^{i(\omega t - kz + \varphi_y)} = E_{0y} e^{i\varphi_y} e^{i\phi} \end{cases} \Rightarrow \vec{\underline{E}} = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{pmatrix} e^{i\phi} = \vec{\underline{E}}_0 e^{i\phi}$$

d'où il ressort que $\vec{\underline{E}}_0 = \begin{pmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{pmatrix}$ est constant et uniforme.

EXERCICE 

Démontrer que :

1. une onde polarisée rectilignement selon (Ox) est la superposition de deux ondes elliptiques (cf. figure 1)
2. toute onde elliptique est la superposition de deux ondes rectilignes (cf. figure 2).

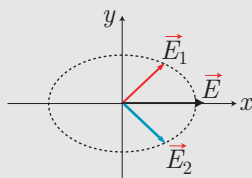


Figure 1

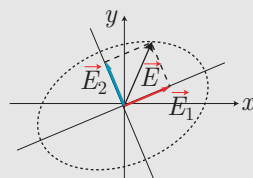


Figure 2

Corrigé

1. Le champ électrique \vec{E} d'une onde polarisée rectilignement selon (Ox) possède comme seule composante non nulle : $E_x = E_{0x} \cos(\omega t')$, c'est-à-dire :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_{0x} \cos(\omega t') \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_{0x} \cos(\omega t') \\ E'_{0y} \sin(\omega t') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E'_{0x} \cos(\omega t') \\ -E'_{0y} \sin(\omega t') \end{pmatrix} \text{ où } E'_{0x} = \frac{E_{0x}}{2}$$

Le résultat $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ révèle ainsi que l'onde est la superposition de deux OPPM de champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 caractéristiques d'OPPM polarisées elliptiquement.

2. Les composantes du champ électrique d'une OPPM elliptique s'écrivent, d'une manière générale :

$$\begin{cases} E_x = E_{0x} \cos(\omega t + \varphi_x - kz) = E_{0x} [\cos \varphi_x \cos(\omega t - kz) - \sin \varphi_x \sin(\omega t - kz)] \\ E_y = E_{0y} \cos(\omega t + \varphi_y - kz) = E_{0y} [\cos \varphi_y \cos(\omega t - kz) - \sin \varphi_y \sin(\omega t - kz)] \end{cases}$$

de sorte que :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E'_{0x} \cos(\omega t - kz) \\ E'_{0y} \cos(\omega t - kz) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E''_{0x} \sin(\omega t - kz) \\ E''_{0y} \sin(\omega t - kz) \end{pmatrix} \text{ où } \begin{cases} E'_{0x} = E_{0x} \cos \varphi_x \\ E'_{0y} = E_{0y} \cos \varphi_y \end{cases} \text{ et } \begin{cases} E''_{0x} = -E_{0x} \sin \varphi_x \\ E''_{0y} = -E_{0y} \sin \varphi_y \end{cases}$$

À nouveau, la loi $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ révèle que l'onde est la superposition de deux OPPM dont les champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 sont caractéristiques des polarisations rectilignes.

REMARQUE

Pour d'autres détails concernant la polarisation des OPPM, on pourra consulter le TP concernant ce sujet.

3- Propagation en milieu conducteur

a- Vitesse de groupe, vitesse de phase



DÉFINITION

Le nombre d'onde \underline{k} (éventuellement complexe car solution de la relation de dispersion) permet de définir une **vitesse de phase** v_ϕ :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \text{ où } k = \Re \{ \underline{k} \} \quad (49)$$

Cette vitesse est celle de propagation de la phase ϕ d'une OPPM.


DÉFINITION

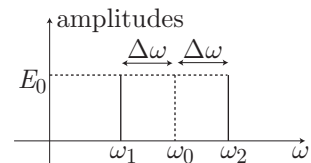
Lorsqu'une onde est composée de plusieurs OPPM, la relation de dispersion $\omega(k)$ conduit à définir une **vitesse de groupe** v_g :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

qui représente la vitesse de propagation du **paquet d'ondes**.

Illustrons ces notions sur l'ensemble d'un paquet d'ondes comportant deux OPPM de composantes spectrales ω_1 et ω_2 très voisines, et de même amplitude E_0 , se propageant dans la direction Oz . On note ω_0 la valeur moyenne de (ω_1, ω_2) et on pose :

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega \\ \omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega \end{cases} \quad \text{avec } \Delta\omega \ll \omega_0$$



La relation de dispersion de cette onde fournit alors la fonction $k(\omega)$ que l'on peut développer au premier ordre en $\Delta\omega$:

$$\begin{cases} k_1 = k(\omega_1) = k(\omega_0 - \Delta\omega) = k(\omega_0) - \Delta\omega \times k' = k_0 - \Delta\omega \times k' \\ k_2 = k(\omega_2) = k(\omega_0 + \Delta\omega) = k(\omega_0) + \Delta\omega \times k' = k_0 + \Delta\omega \times k' \end{cases} \quad \text{où } k_0 = k(\omega_0) \text{ et } k' = \frac{dk}{d\omega}$$

Les champs électriques :

$$\begin{cases} E_1 = E_0 \cos(k_1 z - \omega_1 t) = E_0 \cos \phi_1 \\ E_2 = E_0 \cos(k_2 z - \omega_2 t) = E_0 \cos \phi_2 \end{cases}$$

ont des phases $\phi_1 = k_1 z - \omega_1 t$ et $\phi_2 = k_2 z - \omega_2 t$ qui se déplacent avec leur propre vitesse de phase (très voisines) :

$$v_{\phi_1} = \frac{\omega_1}{k_1} \text{ et } v_{\phi_2} = \frac{\omega_2}{k_2}$$

En outre, ces champs se superposent de manière à produire une onde, de champ résultant :

$$E = E_1 + E_2 = E_0 (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) = 2E_0 \cos\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{2}\right) \times \cos\left(\frac{\phi_2 + \phi_1}{2}\right)$$

où :

$$\phi_2 - \phi_1 = (k_2 - k_1) z - (\omega_2 - \omega_1) t = 2 \Delta\omega \times k' z - 2 \Delta\omega \times t = 2 \Delta\omega \times (k' z - t)$$

et :

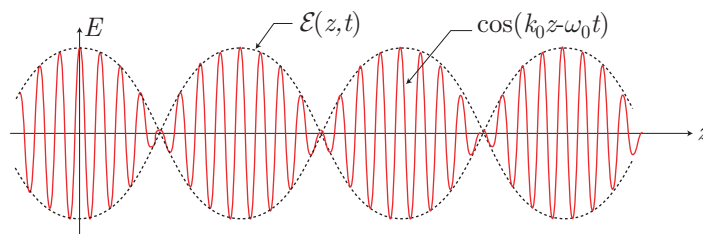
$$\phi_2 + \phi_1 = (k_2 + k_1) z - (\omega_2 + \omega_1) t = 2k_0 z - 2\omega_0 t$$

Il s'ensuit que :

$$E(z, t) = 2E_0 \cos[\Delta\omega (k' z - t)] \times \cos(k_0 z - \omega_0 t) = \mathcal{E}(z, t) \times \cos(k_0 z - \omega_0 t)$$

expression qui fait apparaître une «enveloppe» :

$$\mathcal{E}(z, t) = 2E_0 \cos[\Delta\omega \times (k' z - t)]$$



C'est le déplacement de cette enveloppe qui caractérise le déplacement du paquet d'ondes, qui se fait alors avec une vitesse $v_g = \frac{dz}{dt}$ telle que :

$$\mathcal{E}(z + dz, t + dt) = \mathcal{E}(z, t) \Rightarrow \Delta\omega (k' z + k' dz - t - dt) = \Delta\omega (k' z - t) \Rightarrow k' dz = dt$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{dz}{dt} = \frac{1}{k'} = \frac{d\omega}{dk}$$

On remarque également qu'à l'intérieur du paquet, des ondes se déplacent avec la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega_0}{k_0}$.

b- Milieu dispersif



DÉFINITION

Un milieu est **dispersif** lorsque la vitesse de phase dépend de la pulsation.

Dans un tel milieu, un paquet d'ondes se propage en se déformant car, si toutes les composantes du paquet sont émises simultanément d'une même source, elles arrivent au récepteur à des dates différentes.

Pour vérifier qu'un milieu est dispersif, il suffit de comparer sa vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k}$ à sa vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$. Si $v_\phi \neq v_g$, alors le milieu est dispersif.

Pour démontrer cette proposition, utilisons la définition de la vitesse de phase :

$$\begin{aligned} v_\phi = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = k v_\phi &\Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{dk} = v_\phi + k \frac{dv_\phi}{d\omega} \frac{d\omega}{dk} \text{ où } \frac{d\omega}{dk} = v_g \\ &\Rightarrow v_g \times \left(1 - k \frac{dv_\phi}{d\omega} \right) = v_\phi \end{aligned}$$

Cette relation montre que :

- si un milieu est dispersif, $\frac{dv_\phi}{d\omega} \neq 0 \Rightarrow v_\phi \neq v_g$
- si $v_\phi \neq v_g$, il faut que $k \frac{dv_\phi}{d\omega} \neq 0$, c'est-à-dire $\frac{dv_\phi}{d\omega} \neq 0$

Il y a donc équivalence entre ces deux propositions :

Un milieu est dispersif si et seulement si $v_g \neq v_\phi$

Par exemple, dans le vide, une onde électromagnétique se propage avec une vitesse de phase $v_\phi = c$ telle que :

$$\omega = kc \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = c = v_\phi$$

Donc le vide n'est pas un milieu dispersif pour cette onde.

c- Propagation dans un plasma



DÉFINITION

Un plasma est un milieu globalement neutre qui contient des charges libres de se déplacer dans une matrice de charges opposées, en même quantité.

Considérons ainsi un plasma (gazeux ou condensé) composé de :

- n électrons par unité de volume, chaque électron ayant une charge électrique $q_e = -e$ et étant libre de se déplacer avec une vitesse \vec{v} ;
- n_p ions positifs par unité de volume, supposés immobiles ou très faiblement mobiles par rapport aux électrons ($\vec{v}_p \simeq \vec{0}$), portant individuellement une charge q_p , de telle sorte que la densité volumique de charge soit nulle :

$$\rho = n q_e + n_p q_p = 0 \text{ (milieu globalement neutre)}$$

tandis que la densité volumique des charges mobiles vaut $\rho_m = n q_e = -ne \neq 0$.

Intéressons-nous à la propagation, dans ce plasma, d'une OPPM se déplaçant dans la direction $\vec{k} = k \vec{e}_z$ et supposons que pour $z < 0$ l'OPPM se déplace dans le vide avec un champ électrique polarisé selon \vec{e}_x :

$$\vec{E}(M, t) = \underline{E}(M, t) \vec{e}_x$$

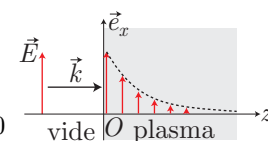
avec :

$$\underline{E}(M, t) = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)} = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

Cherchons comment cette onde se propage dans le plasma semi-infini situé en $z > 0$ et de dimension très grandes selon (Ox) et (Oy) .

Un électron, de masse m , est alors soumis à une force de Lorentz :

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \simeq q \vec{E} \quad (50)$$



où le terme magnétique $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est négligé devant le terme électrique \vec{E} (ce qui sera justifié ultérieurement). Aussi, la loi fondamentale de la dynamique impose :

$$m \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = q \vec{E} \Rightarrow -im\omega \vec{v} = -e \vec{E} \Rightarrow \vec{v} = \frac{e}{im\omega} \vec{E} = -i \frac{e}{m\omega} \vec{E}$$

Le vecteur densité de courant y vaut alors :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v} = -ne \times \left(\frac{-ie}{m\omega} \vec{v} \right) \Rightarrow \vec{j} = i \frac{ne^2}{m\omega} \vec{E} = \underline{\sigma} \vec{E} \text{ (loi de Joule)}$$

ce qui introduit la conductivité complexe : $\underline{\sigma} = i \frac{ne^2}{m\omega}$

L'équation de Maxwell-Ampère devient ainsi, en notation complexe :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\mu_0 i n e^2}{m\omega} \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 i \omega \vec{E} \quad (51)$$

où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= i \vec{k} \wedge \vec{B} \text{ et } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i \vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} &= i \vec{k} \wedge \left(\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \right) = \frac{i}{\omega} [\vec{k} \times (\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{E}}_{=0}) - \vec{E} \times k^2] = -\frac{i}{\omega} k^2 \vec{E} \end{aligned} \quad (52)$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{-i}{\omega} k^2 \vec{E} = \frac{\mu_0 i n e^2}{m\omega} \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 i \omega \vec{E} \Rightarrow k^2 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 - \frac{\mu_0 n e^2}{m} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\omega^2 - \frac{ne^2}{m\varepsilon_0} \right)$$

On définit alors une **pulsation plasma** :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}} \Rightarrow k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \quad (53)$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

- Soit $\omega > \omega_p \Rightarrow k^2 > 0$ ce qui signifie que $k \in \mathbb{R}$ et l'onde se propage dans le plasma avec une vitesse de phase :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \omega \times \frac{c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \Rightarrow v_\phi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

et avec une vitesse de groupe $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ qui se déduit de la dérivation de la relation de dispersion (53) :

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2 \Rightarrow 2k dk c^2 = 2\omega d\omega \Rightarrow c^2 = \frac{\omega}{k} \times \frac{d\omega}{dk} = v_\phi \times v_g$$

$$\Rightarrow v_g = \frac{c^2}{v_\phi} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

REMARQUE

Ces deux résultats montrent que la vitesse de phase d'une onde peut être supérieure à c dans un plasma, mais pas sa vitesse de groupe (qui correspond aussi à la vitesse de propagation de l'information).

En outre, la relation (53) permet de confirmer l'hypothèse (50) selon laquelle $\vec{F} \simeq q \vec{E}$. En effet, d'après la relation (52) :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \Rightarrow B = \frac{1}{\omega} k E |\sin \alpha|$$

où B , k , E désignent les normes des vecteurs \vec{B} , \vec{k} , \vec{E} et α l'angle entre \vec{k} et \vec{E} . Il s'ensuit que $B \leq \frac{k}{\omega} E$, tandis que la relation de dispersion (53) révèle que :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \frac{k}{\omega} < \frac{1}{c} \Rightarrow B \leq \frac{E}{c}$$

Ainsi, la composante magnétique de la force de Lorentz $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ a une norme qui vérifie :

$$F_m < |q| v \times B < |q| \frac{v}{c} E$$

Dans le cas où les électrons ne sont pas relativistes, cette inégalité confirme que F_m est négligeable devant la composante électrique $F_e = |q| E$:

$$\frac{v}{c} \ll 1 \Rightarrow F_m \ll |q| E \Rightarrow F_m \ll F_e$$

– Soit $\omega < \omega_p \Rightarrow k^2 < 0$. Il existe alors un réel positif δ permettant de poser :

$$k = \frac{i}{\delta} \text{ où } \boxed{\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}}} \Rightarrow k^2 = -\frac{1}{\delta^2} = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} < 0$$

Ainsi, le champ électrique dans le plasma adopte la forme :

$$\underline{E} = E_0 e^{i(kz - \omega t)} = E_0 e^{i(z/\delta - \omega t)} = E_0 e^{-z/\delta} e^{-i\omega t} \Rightarrow \boxed{E(z, t) = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t)}$$

L'onde ne se propage donc plus dans le plasma : c'est une onde stationnaire dont l'amplitude $E_0 e^{-z/\delta}$ décroît très fortement à l'intérieur du plasma. Cette onde est appelée **onde évanescence** et δ apparaît comme une distance caractéristique de l'onde, appelée **profondeur de peau**.

De cette étude, il ressort qu'un plasma se comporte comme un filtre passe-haut qui ne peut être traversé que par des ondes de pulsation supérieure à ω_p , c'est-à-dire de fréquence $f > f_p$, avec :

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$$

Les autres ondes électromagnétiques ne peuvent que se réfléchir à la surface du plasma.

Par exemple, dans les hautes couches de l'atmosphère terrestre se trouvent des molécules facilement ionisables par le rayonnement UV solaire (comme l'ozone O_3) ; un plasma se crée alors avec $n \simeq 10^{13} \text{ m}^{-3}$ c'est-à-dire une **fréquence de coupure** $f_p \simeq 30 \text{ MHz}$. Ainsi, pendant la journée :

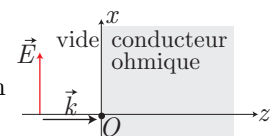
- les émetteurs radio sur Terre peuvent communiquer avec les satellites à condition que leur fréquence excède f_p ;
- d'autres ondes radio, de fréquence $f < f_p$, se réfléchissent vers la Terre. Cette propriété est utilisée pour transmettre des ondes radio de la gamme *ondes longues* sur de grandes distances ; le phénomène disparaît la nuit en l'absence de rayonnement UV solaire.

d– Conducteur ohmique

Adoptons un modèle semblable au précédent : une OPPM de champ électrique :

$$\vec{E} = E(M, t) \vec{e}_x / E(M, t) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t) \Rightarrow \underline{E} = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)}$$

se propage vers la droite ($\phi(x, t) = \vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t = kz - \omega t$) et rencontre en $z = 0$ un conducteur ohmique de conductivité électrique σ .



Cherchons alors la structure de l'onde à l'intérieur de ce conducteur, notamment à l'aide de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_d) \quad (54)$$

dans laquelle apparaît une densité de **courant de déplacement** \vec{j}_d (de norme j_d) que l'on peut comparer à la densité de **courant de conduction** \vec{j} , qui vérifie la loi d'Ohm¹⁷ :

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \Rightarrow j = \|\vec{j}\| = \sigma E$$

17. La conductivité électrique d'un conducteur métallique (comme le cuivre) a pour ordre de grandeur $\sigma \simeq 10^6 \text{ S.m}^{-1}$

tandis que :

$$\begin{aligned}\vec{j}_d &= \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0 i \omega \vec{E} \Rightarrow j_d = \varepsilon_0 \omega E \\ \Rightarrow \frac{j_d}{j} &= \frac{\varepsilon_0 \omega E}{\sigma E} \simeq \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \times 2\pi f}{10^6} \Rightarrow \boxed{\frac{j_d}{j} \simeq \frac{f}{2.10^{16}}}\end{aligned}$$

Ce résultat suggère que pour les ondes radio, visibles... (à l'exception des rayons γ et rayons X), on peut travailler dans le cadre de l'**approximation des régimes quasi-stationnaires** :

$$\boxed{j_d \ll j \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j} \text{ (ARQS)}}$$

Ce faisant, l'équation complexe (54) se simplifie :

$$i \vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \sigma \vec{E}$$

où \vec{B} s'obtient à l'aide de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned}\vec{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i \vec{k} \wedge \vec{E} = i \omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \\ \Rightarrow i \vec{k} \wedge \left(\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \right) &= \mu_0 \sigma \vec{E} \Rightarrow \frac{i}{\omega} [\vec{k} \times (\underbrace{\vec{k} \cdot \vec{E}}_{=0}) - k^2 \vec{E}] = \mu_0 \sigma \vec{E} \\ \Rightarrow -i \frac{k^2}{\omega} &= \mu_0 \sigma \Rightarrow k^2 = -\frac{\mu_0 \sigma \omega}{i} = \mu_0 \sigma \omega e^{i\pi/2}\end{aligned} \quad (55)$$

La relation de dispersion fait donc apparaître deux solutions complexes :

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} e^{-i\pi/4} = \pm \sqrt{\mu_0 \sigma \omega} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow k_1 = \frac{1+i}{\delta} \text{ et } k_2 = -\frac{1+i}{\delta}$$

où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$ est appelé la **profondeur de peau**.

Dans ce cas, la solution cherchée s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{E} &= E_0 e^{i(k_1 z - \omega t)} + E'_0 e^{i(k_2 z - \omega t)} \\ &= E_0 e^{i[(1+i)z/\delta - \omega t]} + E'_0 e^{i[-(1+i)z/\delta - \omega t]} \\ &= E_0 e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)} + E'_0 e^{-z/\delta} e^{-i(z/\delta + \omega t)} \\ \Rightarrow E(z, t) &= E_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) + E'_0 e^{z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} + \omega t\right)\end{aligned}$$

Deux solutions sont ainsi obtenues :

La solution $E_2 = E'_0 e^{z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} + \omega t\right)$, caractéristique d'une onde se propageant vers la gauche, c'est-à-dire provenant d'une éventuelle source située en $z > 0$. On ne retiendra pas ici cette configuration et c'est pourquoi on posera $E'_0 = 0$.

La solution restante :

$$\boxed{E(z, t) = E_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}}$$

à propos de laquelle on peut noter :

- qu'elle se propage vers la droite, mais ce n'est pas OPPM car son amplitude $E_0 e^{-z/\delta}$ dépend de z .
- que son amplitude décroît rapidement avec z : une onde électromagnétique pénètre peu dans les milieux conducteurs (dans un tunnel entouré de parties conductrices de l'électricité, la réception des ondes radio est fortement altérée).
- la phase $\phi(z, t) = \frac{z}{\delta} - \omega t$ se déplace avec une vitesse de phase $v_\phi = \frac{dz}{dt}$, telle que :

$$\phi(z + dz, t + dt) = \phi(z, t) \Rightarrow \frac{dz}{\delta} - \omega dt = 0 \Rightarrow v_\phi = \omega \delta = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_0 \sigma}}$$

qui confirme la définition (54) de la page 61 :

$$\underline{k}_1 = \frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta} \Rightarrow k_1 = \Re \{ \underline{k}_1 \} = \frac{1}{\delta} \Rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k_1} = \omega\delta$$

D'autre part, la dépendance de v_ϕ avec ω révèle que le milieu conducteur est dispersif.

- dans un conducteur parfait, σ tendant vers l'infini, il s'ensuit que la profondeur de champ δ tend vers zéro, et :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} e^{-z/\delta} = 0 \Rightarrow \boxed{E(z, t) = 0 \text{ lorsque } \sigma \rightarrow \infty}$$

et, puisque \vec{E} génère \vec{B} , le champ magnétique est également nul.

EXERCICE

On note $E_x = E_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)$ la composante non nulle du champ électrique dans le conducteur

ohmique et $\underline{E}_x = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$ avec $k = \frac{(1+i)}{\delta}$.

Déterminer le champ magnétique associé :

1. en utilisant les notations complexes ;
2. en utilisant les notations réelles.

Corrigé

1. En posant $\vec{E} = \underline{E}_x \vec{u}_x$, avec $\underline{E}_x = E_0 e^{i(kz - \omega t)}$, on impose à l'onde d'être une OPPM, de sorte que l'équation de Maxwell-Faraday peut légitimement être utilisée en notation complexe :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &\Rightarrow i \vec{k} \wedge \vec{E} = i\omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} = \frac{1}{\omega} (k \vec{u}_z) \cdot (\underline{E}_x \vec{u}_x) \\ &\Rightarrow \vec{B} = \underline{B}_y \vec{u}_y \text{ car } \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y \end{aligned}$$

avec :

$$\underline{B}_y = \frac{1}{\omega} k \underline{E}_x = \frac{1}{\omega\delta} (1+i) \underline{E}_x = \frac{1}{\omega\delta} (\underline{E}_x + e^{i\pi/2} \underline{E}_x)$$

c'est-à-dire, en posant $\underline{E}_x = E_0 e^{-z/\delta} e^{i\phi}$ avec $\phi = \frac{z}{\delta} - \omega t$:

$$\underline{B}_y = \frac{e^{-z/\delta}}{\omega\delta} [E_0 e^{i\phi} + E_0 e^{i(\phi+\pi/2)}] \Rightarrow B_y = \Re \{ \underline{B}_y \} = \frac{E_0}{\omega\delta} e^{-z/\delta} (\cos \phi - \sin \phi)$$

2. La composante $E_x = E_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right)$ permet d'exploiter l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial E_x / \partial z \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow -\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[E_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \right] \\ &\Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{E_0}{\delta} e^{-z/\delta} \left[\sin\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) + \cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \right] \\ &\Rightarrow B_y = \frac{E_0}{\delta} e^{-z/\delta} \left[\cos\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) - \sin\left(\frac{z}{\delta} - \omega t\right) \right] = \frac{E_0}{\delta\omega} e^{-z/\delta} (\cos \phi - \sin \phi) \end{aligned}$$

Heureusement, cette expression est compatible avec la précédente !

4– Réflexion sur un plan conducteur

a– Relations de passage

La présence de charges surfaciques (de densité σ) ou de courants surfaciques (de densité \vec{j}_s) entraîne une discontinuité des champs.

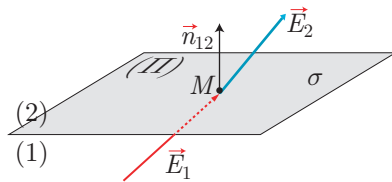


Figure 1

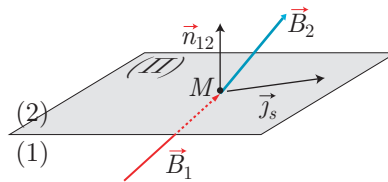


Figure 2

Soit (II) un plan qui sépare deux milieux (1), (2) et \vec{n}_{12} le vecteur unitaire, normal à (II) en un point M , dirigé de (1) vers (2). On note (\vec{E}_1, \vec{B}_1) les champs dans le milieu (1) et (\vec{E}_2, \vec{B}_2) ceux dans le milieu (2), au voisinage immédiat d'un point M de (II). La discontinuité des champs est alors donnée par les formules :

$$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \text{ (figure 1)}} \quad \boxed{\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n}_{12} \text{ (figure 2)}} \quad (56)$$

La démonstration de ces formules (par application des théorèmes de Gauss et d'Ampère) n'est pas au programme. Bien que leur connaissance ne soit pas exigible, il est vivement recommandé de les connaître.

Ces **relations de passage** sont à l'origine de conditions de continuité aux interfaces. Notons, par exemple $\vec{n}_{12} = \vec{n}$ et \vec{t} le vecteur normal et le vecteur tangent à (II) en M , de manière à projeter les relations (56) :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \Rightarrow \vec{E}_2 \cdot \vec{t} - \vec{E}_1 \cdot \vec{t} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \Rightarrow E_{t2} - E_{t1} = 0 \Rightarrow \boxed{E_{t2} = E_{t1}} \quad (57)$$

et

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{J}_s \wedge \vec{n} \Rightarrow \vec{B}_2 \cdot \vec{n} - \vec{B}_1 \cdot \vec{n} = \mu_0 (\vec{J}_s \wedge \vec{n}) \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \boxed{B_{n1} = B_{n2}}$$

ce qui prouve que :

- les composantes tangentielles de \vec{E} sont continues à l'interface ;
- les composantes normales de \vec{B} sont continues à l'interface.

Notamment, à la surface d'un conducteur parfait (qui constituerait le milieu 1), puisque $\vec{E}_1 = \vec{0}$ et $\vec{B}_1 = \vec{0}$, cette continuité entraîne que :

$$\boxed{E_t = 0 \text{ et } B_n = 0 \text{ à la surface d'un conducteur parfait.}} \quad (58)$$

b- Champs électrique et magnétique

Soit (II) l'interface plane (plan Oxy) séparant le vide ($z < 0$) et un conducteur parfait ($z \geq 0$), sur laquelle arrive une OPPM polarisée selon \vec{u}_x avec un champ électrique incident :

$$\begin{aligned} \vec{E}_i &= E_{ix} \vec{u}_x \text{ avec } E_{ix} = E_0 \cos(\omega t - kx) \\ \Rightarrow \boxed{\underline{E}_{ix} = E_0 e^{i(\omega t - kz)}} \end{aligned}$$

avec un vecteur d'onde incident $\vec{k} = k \vec{u}_z$

Cette onde se réfléchit nécessairement sur (II), puisqu'aucune énergie électromagnétique ne peut pénétrer dans le conducteur. C'est pourquoi le vecteur d'onde réfléchi sera noté $\vec{k}' = -k' \vec{u}_z$ et la pulsation associée : $\omega' = k' c$ (relation de dispersion dans le vide). Le champ électrique réfléchi sera supposé polarisé, comme \vec{E}_i , selon \vec{u}_x et s'écrit donc :

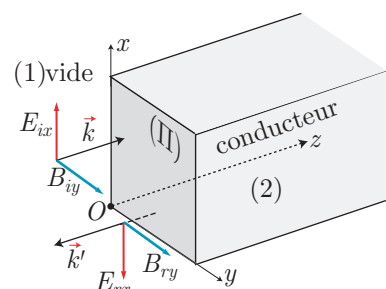
$$\vec{E}_r = E_{rx} \vec{u}_x \text{ avec } \underline{E}_{rx} = E'_0 e^{i(\omega' t + k' z)}$$

Soit \vec{E}_1 le champ électrique dans le vide (milieu 1) et $(\vec{E}_2 = \vec{0}, \vec{B}_2 = \vec{0})$ ceux dans le conducteur (milieu 2). La seule composante non nulle de E_1 s'écrit alors :

$$\underline{E}_1(z, t) = \underline{E}_{ix} + \underline{E}_{rx} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} + E'_0 e^{i(\omega' t + k' z)} \quad (59)$$

et la condition de continuité (57), avec $E_{t2} = 0$, impose alors :

$$E_1(z = 0, t) = 0 \Rightarrow E_0 e^{i\omega t} + E'_0 e^{i\omega' t} = 0$$



et, comme cette équation doit être vérifiée pour toute date t , elle l'est *a fortiori* pour $t = 0$:

$$E_1(0, 0) = 0 \Rightarrow E_0 + E'_0 = 0 \Rightarrow E'_0 = -E_0$$

Ainsi, l'équation précédente s'écrit :

$$E_0 \times (e^{i\omega t} - e^{i\omega' t}) = 0 \Rightarrow e^{i\omega t} = e^{i\omega' t} \forall t \Rightarrow \omega = \omega' \Rightarrow k = k'$$

L'image complexe du champ réfléchi s'écrit donc :

$$\underline{E}_{rx} = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \Rightarrow E_{rx} = -E_0 \cos(\omega t + kz)$$

tandis que la relation (59) devient :

$$\begin{aligned} \underline{E}_x(z, t) &= E_0 \left[e^{i(\omega t - kz)} - e^{i(\omega t + kz)} \right] = E_0 e^{i\omega t} \left[e^{-ikz} - e^{ikz} \right] \\ &= 2i E_0 e^{i\omega t} \times \frac{e^{-ikz} - e^{ikz}}{2i} = 2E_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} \times (-\sin kz) \\ &\Rightarrow \underline{E}_x(z, t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kz) \end{aligned}$$

Puisque $\underline{E}_{ix} = E_0 e^{i(\omega t - kz)}$ et $\underline{E}_{rx} = -E_0 e^{i(\omega t + kz)}$ correspondent à des OPPM, on peut utiliser les notations complexes afin de calculer les champs magnétiques \underline{B}_i et \underline{B}_r associés, notamment grâce à l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\text{rot}} \underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} \Rightarrow i \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}} = i \omega \underline{\vec{B}} \Rightarrow \underline{\vec{B}} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}$$

Ce faisant :

$$\begin{aligned} \underline{\vec{B}}_i &= \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \underline{\vec{E}}_i = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E}_{ix} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ k \underline{E}_{ix} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } \omega = kc \\ &\Rightarrow \underline{B}_{iy} = \frac{1}{c} \underline{E}_{ix} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned}$$

et :

$$\underline{\vec{B}}_r = \frac{1}{\omega'} \vec{k}' \wedge \underline{\vec{E}}_r = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \underline{E}_{rx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ -k \underline{E}_{rx} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{B}_{ry} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)}$$

Quant au champ magnétique $B_y(M, t)$ qui règne en tout point M du milieu (1), il provient de la superposition des champs de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$\begin{aligned} \underline{B}_y &= \underline{B}_{iy} + \underline{B}_{ry} = \frac{E_0}{c} \left[e^{i(\omega t - kz)} + e^{i(\omega t + kz)} \right] \\ &= \frac{E_0}{c} e^{i\omega t} \times [e^{-ikz} + e^{ikz}] = \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \times \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} \\ &= \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \cos(kz) \Rightarrow \underline{B}_y(z, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \end{aligned}$$

REMARQUE Conformément à ce qui était attendu, l'existence de conditions limites a généré des ondes stationnaires.

c- Aspects énergétiques

Le vecteur de Poynting, défini par :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} E_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu_0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_x B_y \end{pmatrix} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \times 2 \sin(\omega t) \cos(\omega t) \times 2 \sin(kz) \cos(kz)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \sin(2\omega t) \cos(2kz) \vec{u}_z \Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}}$$

présente donc une valeur moyenne nulle, tandis que la densité volumique d'énergie :

$$u = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0}{2} \times 4E_0^2 \sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + \frac{4E_0^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)$$

$$= 2\varepsilon_0 E_0^2 [\sin^2(\omega t) \sin^2(kz) + \cos^2(\omega t) \cos^2(kz)]$$

$$\Rightarrow \langle u \rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2 \left[\frac{1}{2} \sin^2(kz) + \frac{1}{2} \cos^2(kz) \right] \Rightarrow \boxed{\langle u \rangle = \varepsilon_0 E_0^2}$$

n'a pas une moyenne nulle. Ce résultat signifie que la présence d'un conducteur a produit une onde stationnaire qui possède une énergie ($\langle u \rangle \neq 0$) qui ne peut pas se propager ($\langle \vec{\Pi} \rangle = \vec{0}$).

d- Courant et charge surfaciques

La première des relations de passage (56) de la page 64, appliquée au conducteur étudié :

$$\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{n}_{12} \Rightarrow \vec{0} - \vec{E}_1(z=0, t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_z \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = -\vec{E}_1(z=0, t) \cdot \vec{u}_z = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$$

révèle l'absence de charge à la surface de (II).

En revanche, si \vec{j}_s désigne le vecteur densité de courant sur (II), la dernière relation de passage s'écrit :

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \Rightarrow \vec{0} - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{u}_z$$

$$\Rightarrow - \begin{pmatrix} 0 \\ B_y(z=0, t) \\ 0 \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} j_{sx} \\ j_{sy} \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} j_{sy} \\ -j_{sx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui montre d'une part que $j_{sy} = 0$ et d'autre part que :

$$\mu_0 j_{sx} = B_y(z=0, t) = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \Rightarrow \boxed{\vec{j}_s = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \vec{u}_x}$$

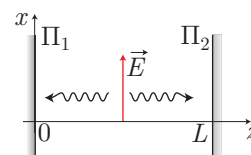
L'onde électromagnétique produit donc à la surface (II) du conducteur un courant dont le vecteur densité est orienté comme le champ \vec{E} (qui met en mouvement les électrons du conducteur).

e- Modes d'onde dans une cavité

Une cavité vide est créée entre deux plans conducteurs Π_1 et Π_2 situés en $z = 0$ et $z = L$.

Soit $\vec{E}(z, t) = E(z, t) \vec{u}_x$ le champ électrique d'une onde électromagnétique à l'intérieur de cette cavité. Cherchons alors l'expression de $E_x(z, t)$ en rappelant que la condition limite (58) impose la continuité de E_x en $z = 0$ et $z = L$ ($E_{t1} = E_{t2}$) :

$$E_x(0, t) = 0 \text{ et } E_x(L, t) = 0 \forall t$$



puisque en $x < 0$ et $x > L$ le champ est nul (dans le conducteur).

Nous cherchons les solutions sous forme d'ondes stationnaires¹⁸, à savoir qu'il existe des fonctions $f(z)$ et $g(t)$

18. Puisque l'onde se réfléchit sur Π_1 et Π_2 , un point dans la cavité est soumis à un champ progressif et à un champ régressif qui se superposent :

$$E = E_0 \cos(kz - \omega t) + E_0 \cos(kz + \omega t + \varphi) = 2E_0 \cos\left(kz + \frac{\varphi}{2}\right) \times \cos\left(\omega t - \frac{\varphi}{2}\right)$$

de z et t seuls permettant de poser :

$$E(z, t) = f(z) \times g(t)$$

La condition de continuité se traduit alors par :

$$\forall t \begin{cases} f(0) \times g(t) = 0 \\ f(L) \times g(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow f(0) = f(L) = 0 \quad (60)$$

Enfin, dans le vide de la cavité, le champ \vec{E} vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} &\Rightarrow \Delta E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0 \\ &\Rightarrow g \frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{1}{c^2} \times f \frac{d^2 g}{dt^2} \end{aligned}$$

La méthode de **séparation des variables** consiste à écrire une équation qui isole d'un côté de l'égalité les termes en z et de l'autre côté les termes en t :

$$\frac{1}{f(z)} \frac{d^2 f(z)}{dz^2} = \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{g(t)} \frac{d^2 g(t)}{dt^2} = K(z, t)$$

et de remarquer que la fonction $K(z, t)$ ne peut être que constante (car elle ne dépend que de z ou que de t selon la partie de l'équation qui est concernée).

Cette méthode conduit ainsi à résoudre l'équation :

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dz^2} = \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dt^2} = K \quad (61)$$

- Si $K > 0$, il existe un réel $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $K = k^2$ et l'équation différentielle en z s'écrit :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = k^2 f \Rightarrow \frac{d^2 f}{dz^2} - k^2 f = 0$$

et admet pour solution générale l'expression : $f(z) = F_0 e^{kz} + F_1 e^{-kz}$ qui doit respecter les conditions (60) :

$$f(0) = 0 \Rightarrow F_0 + F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = -F_0 \Rightarrow f(z) = F_0 (e^{kz} + e^{-kz}) = 2F_0 \sinh(kz)$$

et :

$$f(L) = 0 \Rightarrow 2F_0 \sinh(kL) = 0 \Rightarrow F_0 = 0 \text{ car } kL \neq 0$$

Or, cette solution entraînerait $F_0 = 0$ et donc la disparition de E ; elle doit être abandonnée !

- Si $K = 0$, l'équation (61) s'écrit maintenant :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = 0 \Rightarrow \frac{df}{dz} = a \Rightarrow f(z) = az + b$$

où les constantes a et b doivent être ajustées aux conditions limites (60) :

$$f(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow f(z) = az$$

et :

$$f(L) = 0 \Rightarrow aL = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ car } L \neq 0$$

À nouveau cette solution entraîne : $f(z) = 0 \forall z \in [0, L]$, ce qui n'est pas compatible avec le problème physique.

- Si $K < 0$, il existe un réel $k \in \mathbb{R}^*$ tel que $K = -k^2$ et l'équation (61) adopte alors la forme :

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = -k^2 f \Rightarrow \frac{d^2 f}{dz^2} + k^2 f = 0$$

On reconnaît ici l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, dont la solution générale :

$$f(z) = F_0 \sin(kz) + F_1 \cos(kz)$$

doit être ajustée aux conditions limites (60) :

$$f(z) = 0 \Rightarrow F_1 = 0 \Rightarrow f(z) = F_0 \sin(kz)$$

et :

$$f(L) = 0 \Rightarrow F_0 \sin(kL) = 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* / kL = n\pi \Rightarrow k = n \frac{\pi}{L}$$

Finalement, la seule solution acceptable est de la forme :

$$f(z) = F_0 \sin(kz) \text{ où } k = \frac{n\pi}{L} \text{ et } K = -k^2$$

de sorte que la deuxième partie de l'équation différentielle devient :

$$\frac{1}{c^2} \times \frac{1}{g} \frac{d^2g}{dt^2} = -k^2 \Rightarrow \frac{d^2g}{dt^2} = -k^2 c^2 g \Rightarrow \frac{d^2g}{dt^2} + \omega^2 g = 0 \text{ avec } \omega = kc$$

dont la solution générale adopte la forme :

$$g(t) = G_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

En conclusion, il apparaît dans la cavité une famille de solutions, qui dépendent d'un entier n :

$$E_n(z, t) = E_{0n} \sin(k_n z) \times \cos(\omega_n t + \varphi) \text{ où } k_n = n \frac{\pi}{L} \text{ et } \omega_n = n \frac{\pi c}{L} \tag{62}$$

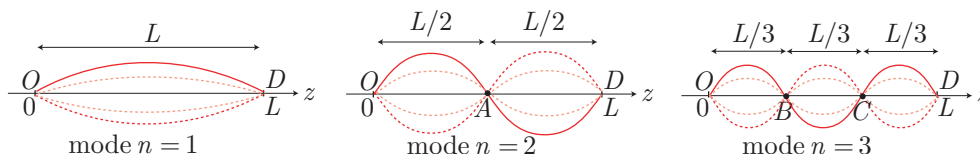
Ces solutions sont des **modes propres**¹⁹ dont on peut représenter l'allure en fonction de n . Pour cela, remarquons que :

$$E_n(z, t) = E_0 f_n(z) \times \cos(\omega_n t + \varphi) \text{ avec } f_n(z) = \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$$

caractérise une onde stationnaire qui prend la forme de $f_n(z)$ et dont tous les points de l'espace vibrent à la même pulsation ω_n . Pour représenter $E_n(z, t)$, il suffit d'en représenter les **nœuds**, c'est-à-dire les valeurs de z qui annulent $f_n(z)$:

$$f_n(z) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) = 0 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / \frac{n\pi z}{L} = p\pi \Rightarrow z = p \times \frac{L}{n}$$

- **Mode** $n = 1$: $f_1(z)$ s'annule pour $z = p \times L$, c'est-à-dire pour $z \in \{0, L\}$ (points O et D).
- **Mode** $n = 2$: $f_2(z)$ s'annule pour $z = p \times \frac{L}{2}$, c'est-à-dire pour $z \in \left\{0, \frac{L}{2}, L\right\}$ (points O, A, D)
- **Mode** $n = 3$: $f_3(z)$ s'annule pour $z = p \times \frac{L}{3}$, soit encore $z \in \left\{0, \frac{L}{3}, \frac{2L}{3}, L\right\}$ (points O, B, C, D)



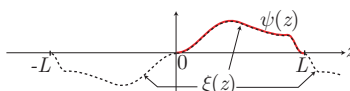
Enfin, signalons que, puisque toutes les solutions (62) sont solutions de l'équation de d'Alembert, alors la solution la plus générale est une combinaison linéaire de ces solutions :

$$E(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \times \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

où les coefficients C_n peuvent s'obtenir à l'aide d'une décomposition en série de Fourier²⁰ de la condition initiale $E(z, 0) = \psi(z)$.

19. Un mode propre est un mode de vibration synchrone de tous les points d'un système physique : dans un tel mode, tous les points vibrent en phase avec la même pulsation ω_1 ou ω_2 ou...

20. La fonction $\psi(z)$ n'est probablement pas périodique, mais comme elle s'annule en O et L , on peut lui associer une fonction $2L$ - périodique impaire $\xi(z)$ telle que $\psi(z) = \xi(z)$ pour $z \in [0, L]$:



$\xi(z)$ admet donc pour série de Fourier :

$$\xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \text{ avec } b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L \xi(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz$$

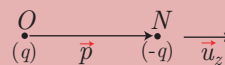
5– Rayonnement par un dipôle oscillant

a– Champs produits



DÉFINITION

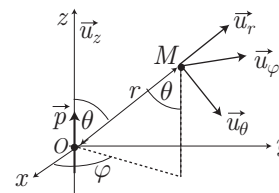
Une charge positive (+q), immobile en O et une charge négative (-q) se déplaçant avec un point N tel que $\vec{ON} = \ell_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ constituent un **dipôle oscillant**, de moment dipolaire :



$$\vec{p} = q \vec{NO} = -q\ell_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z \Rightarrow \vec{p}(t) = -p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z \text{ avec } p_0 = q\ell_0$$

On admettra ici (la démonstration n'est pas au programme) que, dans le cas où :

- le dipôle est T -périodique (avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$);
- l'observation se fait à une distance grande devant les dimensions du dipôle ($r \gg \ell_0$);
- le déplacement de N est non relativiste ($\ell_0 \ll \lambda$).



le dipôle produit dans l'espace des champs électrique et magnétique, dont les composantes non nulles sont :

$$\begin{aligned} E_r &\simeq \frac{2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} p(t') + \frac{1}{r^2 c} \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{t'} \right] \\ E_\theta &\simeq \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} p(t') + \frac{1}{r^2 c} \frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{t'} + \frac{1}{rc^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Big|_{t'} \right] \\ B_\varphi &\simeq \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial p}{\partial r} \Big|_{t'} + \frac{1}{rc} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Big|_{t'} \right] \end{aligned} \quad (63)$$

où l'on a posé $t' = t - \frac{r}{c}$ pour rendre compte du retard avec lequel l'onde émise à t en O arrive en M.

Ces expressions des champs ne sont pas à connaître (elles seront rappelées si nécessaire), sauf certaines de leur propriétés :

- En régime stationnaire

Lorsque p ne dépend pas du temps ($\omega = 0$), ces expressions se simplifient :

$$E_r \simeq \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \quad E_\theta \simeq \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{\sin \theta}{r^3} \quad B_\varphi = 0$$

conformément aux expressions (9) de la page 19, obtenues pour les champs dipolaires stationnaires.

- Analyse dimensionnelle

Vérifions l'homogénéité de ces expressions. D'abord en utilisant les notations complexes :

$$\begin{aligned} \underline{p} = -p_0 e^{i\omega t} &\Rightarrow \frac{\partial \underline{p}}{\partial t} = i\omega \underline{p} \Rightarrow \frac{1}{r^2 c} \frac{\partial \underline{p}}{\partial t} = \frac{i\omega}{r^2 c} \underline{p} = \frac{i2\pi}{\lambda r^2} \underline{p} \\ &\Rightarrow \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{p} \Rightarrow \frac{1}{rc^2} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{rc^2} \underline{p} = -\frac{1}{r} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \underline{p} \end{aligned}$$

Or, la fonction $\xi(z) \times \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$ étant paire, il s'ensuit que :

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \text{ avec } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \xi(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz \text{ pour } z \in [0, L]$$

Enfin, un choix judicieux de l'origine des dates permet de poser :

$$E(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \cos(\omega_n t) \Rightarrow \psi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right)$$

ce qui suffit à montrer, par identification, que :

$$C_n = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz$$

ce qui assure l'homogénéité des sommes qui interviennent dans E_r et E_θ .

De même, les relations :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial \underline{p}}{\partial t} = \frac{i\omega}{r^2} \underline{p} = \frac{ic}{r^2} \frac{2\pi}{\lambda} \underline{p} \text{ et } \frac{1}{rc} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = -\frac{1}{r} \frac{\omega^2}{c} \underline{p} = -\frac{c}{r} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \underline{p}$$

confirment l'homogénéité des termes qui composent B_φ .

En outre, l'expression du champ électrique produit par une charge ponctuelle : $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ fournit

l'équation aux dimensions : $[E] = \frac{Q}{[\epsilon_0] L^2}$, tandis que la première des expressions (63) :

$$E_r \simeq \frac{2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \times \left[\frac{p}{r^3} + \frac{1}{r^2 c} \frac{\partial p}{\partial t} \right]$$

fournit l'équation aux dimensions :

$$[E_r] = \frac{[p]}{[\epsilon_0] L^3} \text{ où } [p] = Q \times L \Rightarrow [E_r] = \frac{Q}{[\epsilon_0] L^2}$$

ce qui montre que E_r a bien les dimensions d'un champ électrique.

De même, l'expression du champ magnétique produit par un fil infini fournit une équation aux dimensions :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow [B] = \frac{[\mu_0] Q \cdot T^{-1}}{L}$$

compatible avec la troisième expression (63) :

$$B_\varphi \simeq \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{rc} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right] \Rightarrow [B_\varphi] = \frac{[\mu_0]}{L^2} \times \frac{Q \cdot L}{T} = \frac{[\mu_0] \times Q \cdot T^{-1}}{L}$$

ce qui confirme que B_φ a bien les dimensions d'un champ magnétique.

– Zone de rayonnement

Afin de simplifier les expressions (63), nous allons supposer que $r \gg \lambda$. Comparons alors les différents termes qui apparaissent dans ces expressions, en remarquant que $\underline{p} = -p_0 e^{i\omega t}$ implique que $\frac{\partial \underline{p}}{\partial t} = i\omega \underline{p}$:

- $\underline{A}_3 = \frac{1}{r^3} \underline{p} \Rightarrow A_3 = |\underline{A}_3| = \frac{p_0}{r^3}$
- $\underline{A}_2 = \frac{1}{r^2 c} \frac{\partial \underline{p}}{\partial t} = \frac{1}{r^2 c} (i\omega) \underline{p} = \frac{i}{r^2} \frac{\omega}{c} \underline{p} = \frac{i}{r^2} \frac{2\pi}{\lambda} \underline{p} \Rightarrow A_2 = |\underline{A}_2| = \frac{2\pi}{r^2 \lambda} p_0$
- $\underline{A}_1 = \frac{1}{rc^2} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} = \frac{1}{rc^2} \omega^2 \underline{p} = \frac{1}{r} \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \underline{p} = \frac{1}{r} \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \underline{p} \Rightarrow A_1 = |\underline{A}_1| = \frac{4\pi^2}{r\lambda^2} p_0$

Il ressort alors que

$$\begin{cases} \frac{A_1}{A_2} = \frac{4\pi^2 p_0}{r\lambda^2} \times \frac{r^2 \lambda}{2\pi p_0} = 2\pi \frac{r}{\lambda} \gg 1 \Rightarrow A_1 \gg A_2 \\ \frac{A_2}{A_3} = \frac{2\pi p_0}{r^2 \lambda} \times \frac{r^3}{p_0} = 2\pi \frac{r}{\lambda} \gg 1 \Rightarrow A_2 \gg A_3 \end{cases}$$

ce qui permet de simplifier les expressions (63) dans la zone de rayonnement :

$$\begin{aligned} \underline{E}_r &\simeq \frac{2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \underline{p} + \frac{1}{r^2 c} \frac{\partial \underline{p}}{\partial t} \right] = \frac{2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} (\underline{A}_3 + \underline{A}_2) \simeq \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \underline{A}_2 \\ \underline{E}_\theta &= \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \underline{p} + \frac{1}{r^2 c} \frac{\partial \underline{p}}{\partial t} + \frac{1}{rc^2} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} \right] = \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} (\underline{A}_3 + \underline{A}_2 + \underline{A}_1) \simeq \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \underline{A}_1 \end{aligned}$$

et, puisque $A_1 \gg A_2$, la composante radiale \underline{E}_r est négligeable devant la composante orthoradiale :

$$\boxed{E_r \simeq 0 \text{ et } E_\theta \simeq \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \times \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Big|_{t'}} \text{ avec } \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = \mu_0$$

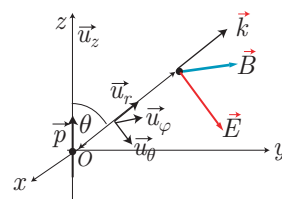
Quant au champ magnétique, il vaut :

$$\begin{aligned} \underline{B}_\varphi &\simeq \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial \underline{p}}{\partial t} + \frac{1}{rc} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} \right] = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} c \left[\frac{1}{r^2 c} \frac{\partial \underline{p}}{\partial t} + \frac{1}{rc^2} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} \right] \\ &= \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} c (A_2 + A_1) \simeq \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} A_1 = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \times \frac{1}{rc} \frac{\partial^2 \underline{p}}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \quad &\boxed{B_\varphi = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi c} \times \frac{1}{r} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \Big|_{t'}} \end{aligned}$$

b- Structure de l'onde

L'expression de $p(t) = -p_0 \cos(\omega t)$, associée aux deux résultats précédents, fournit les composantes non nulles des champs :

$$\begin{cases} E_\theta \simeq \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \frac{\omega^2}{r} p_0 \cos(\omega t - kr) \\ B_\varphi \simeq \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi c} \frac{\omega^2}{r} p_0 \cos(\omega t - kr) \end{cases}$$



On constate ainsi que dans la zone de rayonnement les vecteurs \vec{k} , \vec{E} , \vec{B} sont orthogonaux :

$$\begin{cases} \vec{E} = E_\theta \vec{u}_\theta \\ \vec{B} = B_\varphi \vec{u}_\varphi \quad \text{avec} \quad \frac{E_\theta}{B_\varphi} = c = \frac{\omega}{k} \Rightarrow k E_\theta = \omega B_\varphi \\ \vec{k} = k \vec{u}_r \end{cases}$$

et que :

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = (k \vec{u}_r) \wedge (E_\theta \vec{u}_\theta) = k E_\theta \vec{u}_\varphi = \omega B_\varphi \vec{u}_\varphi \Rightarrow \boxed{\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}}$$

Puisqu'on retrouve ici la relation de structure d'une OPPM, on conclut que :

l'onde rayonnée par le dipôle se comporte localement comme une OPPM dans sa zone de rayonnement.

En outre, les expressions de E_θ et B_φ étant proportionnelles à $\sin \theta$, les amplitudes correspondantes sont maximum lorsque $\theta = \frac{\pi}{2}$ et nulles dans la direction $\theta = 0$ (cf. figure 1).

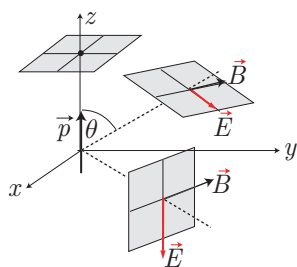


Figure 1

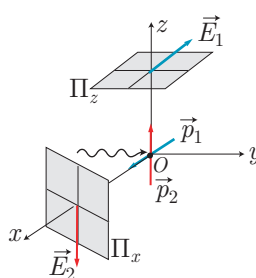


Figure 2

On peut mémoriser cette propriété en retenant que :

le dipôle ne rayonne pas dans sa direction.

Une polarisation apparaît comme conséquence d'un tel comportement (cf. figure 2) : si en O se trouve une molécule éclairée par une lumière non polarisée, qui produit des déplacements électroniques dans des directions (Ox) et (Oy) , deux dipôles perpendiculaires $\vec{p}_1 = p_1 \vec{u}_x$ et $\vec{p}_2 = p_2 \vec{u}_z$ oscillent et rayonnent dans l'espace. Or, dans la direction \vec{u}_x , \vec{p}_1 ne rayonne pas et dans la direction \vec{u}_z , \vec{p}_2 ne rayonne pas non plus. Donc, les plans Π_x et Π_z recueillant les ondes rayonnées dans ces directions ne reçoivent que les champs \vec{E}_2 et \vec{E}_1 polarisés respectivement dans les directions \vec{u}_z et \vec{u}_x .

c- Énergie rayonnée

Les expressions simplifiées des champs :

$$E_\theta \simeq \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \frac{\omega^2}{r} p_0 \cos(\omega t - kr)$$

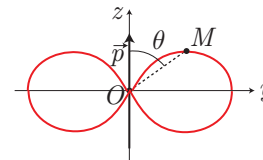
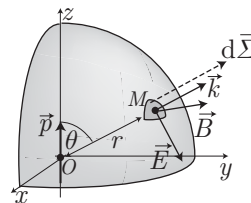
$$B_\varphi \simeq \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi c} \frac{\omega^2}{r} p_0 \cos(\omega t - kr)$$

conduisent au vecteur de Poynting de l'onde :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} (E_\theta \vec{u}_\theta) \wedge (B_\varphi \vec{u}_\varphi) = \frac{E_\theta B_\varphi}{\mu_0} \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{16\pi^2 c} \frac{\omega^4}{r^2} p_0^2 \cos^2 \phi \vec{u}_r \text{ où } \phi = \omega t - kr$$

$$\Rightarrow \langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2}{32\pi^2 c} \frac{\omega^4}{r^2} \sin^2 \theta \vec{u}_r = \Pi_0 \sin^2 \theta \vec{u}_r$$



dont l'amplitude moyenne, proportionnelle à $\sin^2 \theta$, montre que **l'indicatrice de rayonnement** est un volume déployé dans le plan (Oxy) . En outre, la puissance moyenne rayonnée dans l'espace est aussi celle rayonnée à travers une surface sphérique de rayon r :

$$P = \oiint_{\Sigma} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{\Sigma} \text{ où } d\vec{\Sigma} = d\Sigma \vec{u}_r \text{ et } d\Sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 p_0^2}{32\pi^2 c} \omega^4 \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{16\pi c} \times J$$

où l'intégrale J vaut :

$$J = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta \times (1 - \cos^2 \theta) d\theta = \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow P = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

La dépendance de P en ω^4 montre que la diffusion dipolaire est d'autant plus efficace que la fréquence des ondes est importante, c'est-à-dire aussi que la lumière est proche du violet ; on peut expliquer ainsi pourquoi un ciel sans nuage apparaît bleu.

Table des matières

| | | |
|------------|--|-----------|
| I | Électrostatique | 1 |
| 1- | Loi de Coulomb | 1 |
| a- | Charges ponctuelles | 1 |
| b- | Distributions continues de charges | 1 |
| c- | Symétries des charges | 3 |
| d- | Lignes de champ | 4 |
| 2- | Potentiel scalaire | 5 |
| a- | Définition | 5 |
| b- | Circulation du champ électrostatique | 7 |
| c- | Énergie potentielle | 7 |
| d- | Surface équipotentielle | 9 |
| 3- | Théorème de Gauss | 9 |
| a- | Énoncé | 9 |
| b- | Champ produit par une sphère | 10 |
| c- | Champ produit par un cylindre | 11 |
| d- | Champ produit par un plan | 13 |
| e- | Densité des lignes de champ | 15 |
| f- | Analogie avec la gravitation | 15 |
| 4- | Dipôle électrostatique | 17 |
| a- | Définitions | 17 |
| b- | Champ et potentiel produits | 18 |
| c- | Lignes de champ et équipotentielles | 19 |
| d- | Actions subies | 21 |
| e- | Énergie potentielle | 22 |
| II | Magnétostatique | 23 |
| 1- | Courant électrique | 23 |
| a- | Définitions | 23 |
| b- | Symétries et invariants | 26 |
| 2- | Théorème d'Ampère | 27 |
| a- | Énoncé | 27 |
| b- | Champ créé par un fil infini | 28 |
| c- | Champ créé par un câble | 29 |
| d- | Champ produit par un solénoïde | 31 |
| e- | Lignes de champ | 32 |
| 3- | Dipôle magnétique | 34 |
| a- | Champ créé | 34 |
| b- | Lignes de champ | 34 |
| c- | Champ géomagnétique | 35 |
| d- | Actions subies | 36 |
| III | Équations de Maxwell | 37 |
| 1- | Analyse vectorielle | 37 |
| a- | Opérateurs en coordonnées cartésiennes | 37 |
| b- | Opérateurs en coordonnées cylindriques | 38 |
| c- | Opérateurs en coordonnées sphériques | 38 |
| d- | L'opérateur vectoriel <i>nabla</i> | 39 |
| e- | Relations entre opérateurs | 39 |
| f- | Théorème de Stokes-Ampère | 40 |
| g- | Théorème de Green-Ostrogradski | 40 |
| 2- | Formulations locales et intégrales | 40 |
| 3- | Conséquences | 42 |
| a- | Conservation de la charge | 42 |
| b- | Propagation dans le vide | 43 |
| c- | Équations de Poisson et de Laplace | 44 |
| 4- | Action sur les charges mobiles | 44 |
| a- | Loi d'Ohm | 44 |
| b- | Puissance volumique | 45 |
| c- | Effet Joule | 45 |

| | | |
|-----------|---|-----------|
| IV | Énergie électromagnétique | 46 |
| 1- | Densité d'énergie | 46 |
| 2- | Vecteur de Poynting | 47 |
| 3- | Bilan d'énergie | 47 |
| V | Propagation et rayonnement | 48 |
| 1- | Propagation dans le vide | 48 |
| a- | Équation de d'Alembert | 48 |
| b- | Solutions à une dimension | 49 |
| c- | Ondes Planes Progressives Monochromatiques (OPPM) | 50 |
| d- | Structure d'une OPPM | 52 |
| e- | Aspects énergétiques | 54 |
| f- | Propagation de l'énergie | 55 |
| 2- | Polarisation de l'onde | 56 |
| 3- | Propagation en milieu conducteur | 57 |
| a- | Vitesse de groupe, vitesse de phase | 57 |
| b- | Milieu dispersif | 59 |
| c- | Propagation dans un plasma | 59 |
| d- | Conducteur ohmique | 61 |
| 4- | Réflexion sur un plan conducteur | 63 |
| a- | Relations de passage | 63 |
| b- | Champs électrique et magnétique | 64 |
| c- | Aspects énergétiques | 66 |
| d- | Courant et charge surfaciques | 66 |
| e- | Modes d'onde dans une cavité | 66 |
| 5- | Rayonnement par un dipôle oscillant | 69 |
| a- | Champs produits | 69 |
| b- | Structure de l'onde | 71 |
| c- | Énergie rayonnée | 72 |