

Liste des exercices

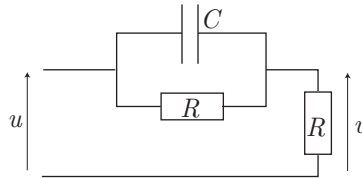
Physique	3
Electronique	3
Introduction	3
Montages à A.O.	7
Electromagnétisme	11
Loi de Coulomb et lignes de champ	11
Théorème de Gauss et calculs de potentiels	13
Capacité et énergie	17
Dipôles électrostatiques	19
Théorème d'Ampère	22
Dipôles magnétique	25
Equations de Maxwell - Induction	28
Equation de Laplace	36
Conducteur ohmique	39
Energie électromagnétique	43
Ondes planes progressives sinusoïdales	46
Propagation en milieux conducteurs	50
Réflexion sur un conducteur	55
Rayonnement dipolaire	59
Optique	65
Propagation de la lumière	65
Interférences en lumière cohérente	67
Interférences en lumière incohérente	72
Interférences à N ondes	75
Interféromètre de Michelson	78
Thermodynamique	81
Premier principe de la thermodynamique	81
Deuxième principe de la thermodynamique	84
Fluides en écoulement, machines thermiques	87
Conduction thermique	100
Résistances thermiques	106
Mécanique	109
Changement de référentiels	109
Dynamique en référentiel non galiléen	111
Mécanique du solide	113
Physique quantique	116
Fonctions d'onde	116
Particules dans des potentiels	118
Etats non stationnaires	122
Physique statistique	127
Statique des fluides	127
Distributions discrètes d'états	129
Distributions continue d'états	131

134	Chimie	134
	Révisions	134
	Thermodynamique chimique	135
	Enthalpie standard de réaction	135
	Effets thermiques des transformations	136
	Potentiels chimiques	138
	Enthalpie libre et entropie standard de réaction	140
	Constantes d'équilibre	141
	Optimisation des procédés chimiques	143
	Equilibres chimiques	145
	Electrochimie	147
	Courbes courant-potentiel	147
	La corrosion	151
	Piles et électrolyses	153

ÉLECTRONIQUE

1- Réponse à un échelon

On considère le montage suivant :



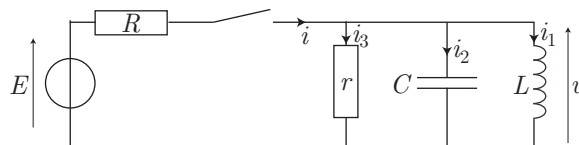
Dans lequel $u(t)$ est un échelon de tension :

$$u(t) = 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } u(t) = U_0 = \text{cte pour } t \geq 0$$

1. Établir l'équation différentielle satisfaite par $v(t)$.
2. Trouver l'expression de $v(t)$.
3. Quelle est l'énergie accumulée dans le condensateur au bout d'un temps infini ?

2- Régime pseudo-périodique d'un circuit

Dans le circuit schématisé ci-dessous, la source de tension a une f.é.m. E constante. Les résistances sont linéaires, de valeurs R et r . À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



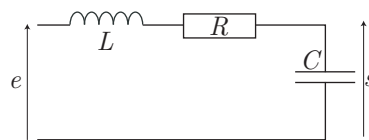
1. Établir l'équation différentielle liant i_3 à ses dérivées partielles par rapport au temps t . On posera :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } \lambda = \frac{R+r}{2RrC} \times \frac{1}{\omega_0}$$

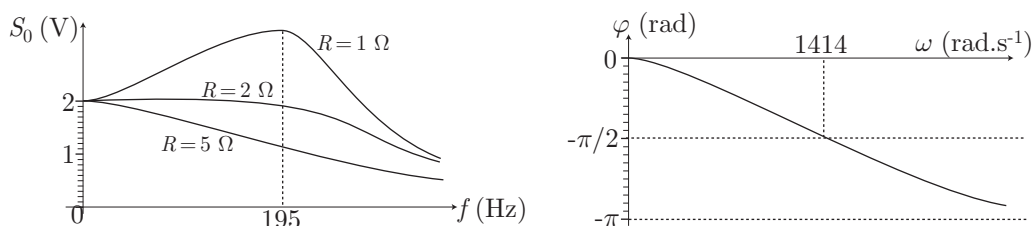
2. Quelle relation doit exister entre R , r , L et C pour que la solution de l'équation différentielle corresponde à un régime pseudo-périodique ?

3- Régime forcé d'un circuit

Le montage schématisé ci-dessous est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.



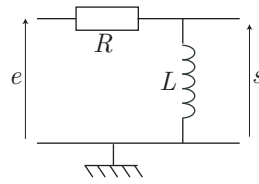
et produit une tension de sortie $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$ dont la dépendance de S_0 et de φ avec la fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ est représentée ci-dessous :



Déduire de ces courbes les valeurs de L et C .

4- Application de la fonction de transfert

On considère le filtre RL suivant :



1. Trouver, sans calcul, son comportement asymptotique et préciser sa nature (passe-bas, passe-bande, ...).
2. Établir sa fonction de transfert. Comment peut-on en déduire son équation différentielle en régime variable quelconque ?
3. Établir la réponse indicielle du filtre (ou réponse à un échelon de tension).
4. Est-il possible que le filtre fonctionne en intégrateur ? en dérivateur ?
En cas de réponse positive, préciser dans quel domaine de fréquence cela est possible.

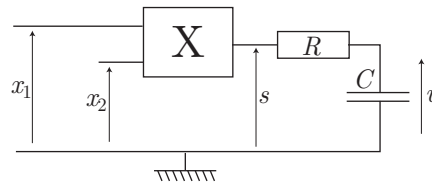
5- Filtrage d'un signal

On dispose d'un multiplieur analogique, qui transforme les signaux analogiques

$$x_1(t) = V_1 \cos(\omega t) \text{ et } x_2(t) = V_2 \cos(\omega t + \phi)$$

en un signal de sortie :

$$s(t) = k \times x_1(t) \times x_2(t) \text{ où } k = 0,1 \text{ V}^{-1}$$



1. a- Que vaut la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du filtre RC ?
b- En déduire la fonction du circuit RC.
c- On choisit $f = \frac{\omega}{2\pi} = 608 \text{ Hz}$, $R = 1 \text{ M}\Omega$ et $C = 1 \mu\text{F}$. Quelle conclusion peut-on déduire quant à la tension v ?
2. Les tensions x_1 et x_2 présentent la même fréquence $f = 608 \text{ Hz}$; on réalise successivement les conditions suivantes :

$$x_1(t) = x_2(t) = V_{01} \cos(\omega t) \Rightarrow v(t) = V_a = 21,2 \text{ mV}$$

$$x_1(t) = x_2(t) = V_{02} \cos(\omega t) \Rightarrow v(t) = V_b = 21,1 \text{ mV}$$

$$x_1(t) = V_{01} \cos(\omega t) \text{ et } x_2(t) = V_{02} \cos(\omega t + \phi) \Rightarrow v(t) = V_c = 6,4 \text{ mV}$$

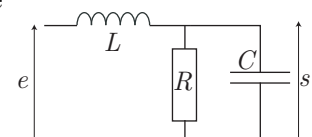
En déduire le déphasage ϕ .

6- Diagramme de Bode

On établit, à l'entrée du filtre ci-contre, une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$.

On posera :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$



1. Déterminer la fonction de transfert du montage en fonction des paramètres précédents.
2. Représenter, en fonction des valeurs de Q_0 , les diagrammes de Bode de ce circuit.

7- Analyseur de spectre

Un analyseur de spectre permet d'obtenir le spectre d'un signal. Il est réalisé à l'aide d'un filtre passe-bande de fréquence centrale réglable, mais de facteur de qualité Q constante et d'un voltmètre efficace vrai. Ce voltmètre mesure la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de Fourier du signal à la sortie du filtre.

Le signal étudié est un signal créneau impair d'amplitude 1 V et de fréquence 1 000 Hz. On rappelle que l'amplitude de l'harmonique de rang n est donnée par :

$$\begin{cases} a_n = \frac{4}{n\pi} \text{ pour } n \text{ impair} \\ a_n = 0 \text{ pour } n \text{ pair} \end{cases}$$

La fonction de transfert du filtre s'écrit :

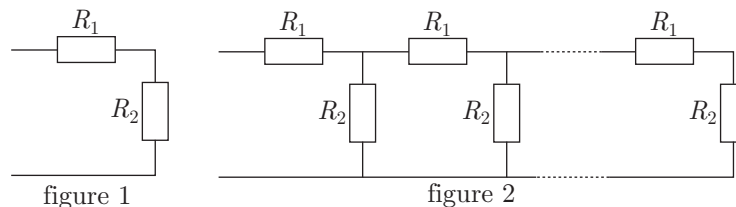
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{f}{f_c} - \frac{f_c}{f} \right)}$$

où f_0 est la fréquence centrale du filtre.

1. $f_c = 1$ kHz.
 - a- Déterminer la réponse du filtre pour les harmoniques 1 et 3.
 - b- Quelle est la valeur mesurée par le voltmètre (on ne prendra en compte que les harmoniques 1 et 3) ?
 - c- Quel doit être le coefficient de qualité du filtre pour que la valeur donnée par le voltmètre corresponde à 0,1 % près à l'amplitude du fondamental ?
2. $f_c = 3$ kHz et $Q = 2, 8$. Quelle est la valeur lue sur le voltmètre ?

★★ 8- Suite infinie de cellules

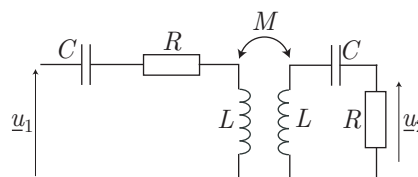
On considère une suite de n quadripôles identiques à celui de la figure 1, montés en cascade sur la figure 2. On appelle R_n la résistance d'entrée d'une ligne de n quadripôles.



1. Calculer l'impédance d'entrée R_∞ d'une ligne infinie de quadripôles. Dans le cas particulier où $R_1 = R_2 = R$, quelle est la valeur de $\lambda = \frac{R_\infty}{R}$?
2. Quelle est la résistance d'une ligne finie de n quadripôles fermée sur la résistance R_∞ ?

★ 9- Circuits couplés

Dans le circuit ci-dessous, les bobines possèdent une auto-inductance L et une inductance mutuelle (couplage magnétique) M .



On pose :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R} \quad X = \frac{1}{R} \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \quad \beta = \frac{M\omega}{R}$$

Exprimer, en régime sinusoïdal établi, le rapport $\underline{H} = \frac{u_2}{u_1}$ en fonction des grandeurs β et X .

★ 10- Filtrage numérique

Pour réaliser une intégration numérique d'un signal $x(t)$, on commence par échantillonner $x(t)$ à une fréquence d'horloge f_H , ce qui fournit une suite de valeurs $x_n = x(t_0 + nT_H)$ (on prélève la valeur du signal $x(t)$ tous les $\Delta t = T_H$ à partir de l'instant t_0).

L'intégrateur numérique fournit alors une suite de valeurs y_n définie par :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{T_H}{2\tau} (x_n + x_{n+1}) \quad n \geq 0 \text{ et } y_0 = 0$$

1. Montrer que l'on peut ainsi «approcher» l'opération d'intégration.
2. On suppose maintenant que le signal $x(t)$ est un signal sinusoïdal de fréquence f , soit en notation complexe : $\underline{x} = \underline{X}_0 e^{j2\pi ft}$.

On considère alors que les y_n constituent une suite sinusoïdale telle que :

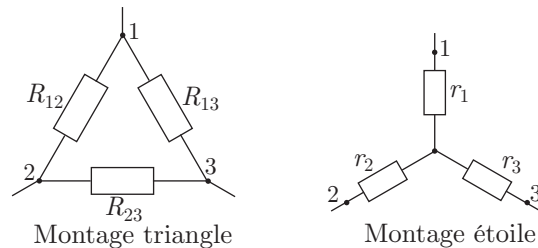
$$y_n = \Re(\underline{y}_n) \text{ avec } \underline{y}_n = \underline{Y}_0 e^{2\pi f t_n}$$

Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Y}_0}{\underline{X}_0}$.

Montrer qu'elle s'identifie à celle d'un montage intégrateur pour $f \ll f_H$.

★★ 11- Théorème de Kennely

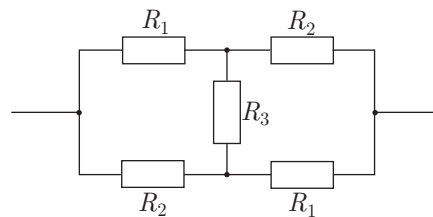
Trois résistances R_{12} , R_{13} , R_{23} sont montées «en triangle» :



1. Montrer que :

$$r_1 = \frac{R_{12} \times R_{13}}{S} \quad r_2 = \frac{R_{12} \times R_{23}}{S} \quad r_3 = \frac{R_{13} \times R_{23}}{S} \quad \text{où } S = R_{12} + R_{13} + R_{23}$$

2. En déduire la résistance équivalente r_{eq} du circuit ci-dessous :



★ 12- Filtre RLC

Le circuit ci-dessous est alimenté par un signal rectangulaire de valeur moyenne nulle, d'amplitude $E = 10 \text{ V}$ et de fréquence $f_0 = 1650 \text{ Hz}$.

$$L = 464 \text{ mH} \quad R = 100 \Omega \quad C = 2,2 \text{ nF}$$

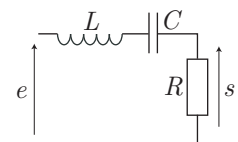
Quelle est la réponse $s(t)$?

On rappelle la décomposition spectrale d'un signal $u(t)$ de période T_0 :

$$u(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t) \text{ avec } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

et où :

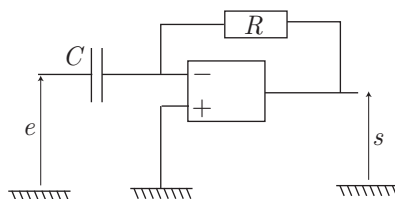
$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad b_n = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} u(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$



ÉLECTRONIQUE - ALI

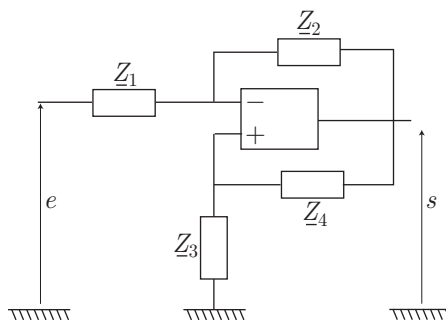
1- Montage dérivateur

En posant $\tau = RC$, calculer la fonction de transfert du montage ci-dessous, l'ALI étant supposé idéal.
En déduire la relation entre $e(t)$ et $s(t)$.
Que se passe-t-il à haute fréquence ?



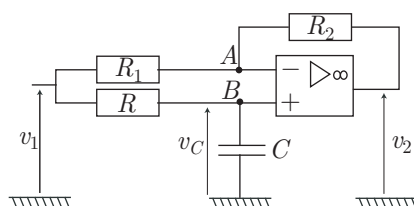
2- Fonction de transfert d'un montage

L'ALI étant supposé idéal et linéaire, exprimer la fonction de transfert du circuit schématisé ci-dessous, en fonction des impédances Z_i :



3- Circuit déphaseur

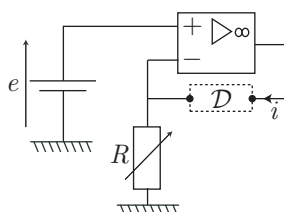
On considère le montage ci-dessous, dans lequel l'ALI est supposé idéal et linéaire :



1. Déterminer la fonction de transfert de ce montage.
2. On alimente ce montage avec une tension $v_1(t) = V_{10} \cos(\omega t)$ et on impose $R_1 = R_2$.
Montrer que $v_2(t) = V_{20} \cos(\omega t - \varphi)$, où l'on exprimera V_{20} et φ en fonction de V_{10} , R , C .

4- Source de courant

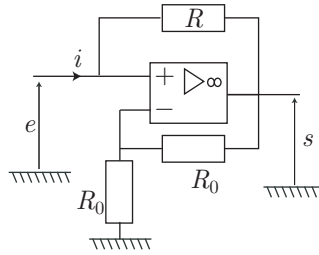
Montrer que le circuit ci-dessous permet de générer un courant i dans n'importe quel dipôle D .



Exprimer i en fonction de e et R .

5- Résistance négative

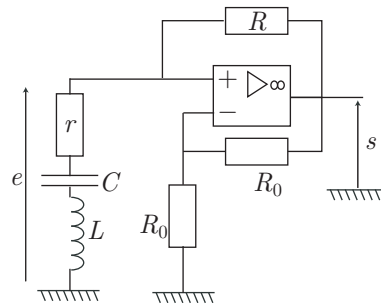
1. On considère le montage schématisé ci-dessous, dans lequel l'ALI est supposé linéaire et idéal.



Exprimer e en fonction de i et R .

Expliquer alors la dénomination de *résistance négative* donnée à ce montage.

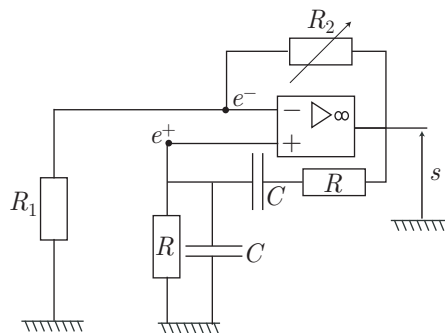
2. On intègre maintenant ce circuit au montage ci-dessous.



- a- Quelle est l'équation différentielle vérifiée par la tension $e = e^+$?
 b- Quelle valeur doit-on affecter à r pour que ce montage génère une tension sinusoïdale ?

6- Oscillateur quasi sinusoïdal

On considère le circuit schématisé ci-dessous, dans lequel l'ALI sera supposé idéal :



1. On suppose, dans un premier temps, que l'ALI est dans son régime linéaire, ce qui suggère l'égalité de e^+ et e^- .
- a- Exprimer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{e^+}{s}$ en fonction de R , C et ω .
 Exprimer également e^- en fonction de s , R_1 , R_2 .
- b- En déduire l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ sous la forme :

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \alpha \omega_0 \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

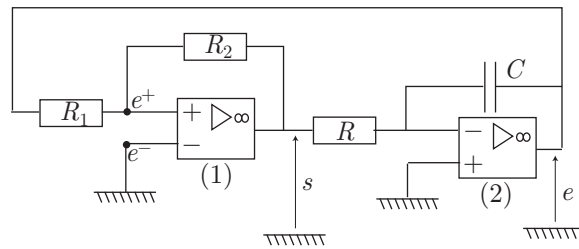
où l'on exprimera ω_0 en fonction de R , C et α en fonction de R_1 , R_2 .

- c- Quelle relation doivent vérifier R_1 et R_2 pour que ce circuit génère une tension sinusoïdale ?
 d- Lorsque le circuit est mis en route (à la date $t = 0$), on suppose que des signaux parasites affectent à s une valeur ε très petite ($\dot{s}(t=0)$ étant supposé négligeable). En déduire l'expression des signaux sinusoïdaux $s(t)$ pour $t \geq 0$ lorsque $\alpha = 0$.
 e- La question précédente montre que, dans la pratique, ce circuit ne pourra pas générer un signal sinusoïdal exploitable. Pour y remédier, on choisit $\alpha \neq 0$. Quelle est alors la solution $s(t)$?

- f- Selon le signe de α (avec $|\alpha| \ll 2$), représenter l'allure de la courbe $s(t)$.
Que conclure pour assurer le démarrage de l'oscillateur ?
2. L'étude précédente montre que le démarrage de l'oscillateur va rapidement conduire à la saturation du montage dès que s atteindra une valeur de saturation $\pm V_{\text{sat}}$.
- Pour quelle valeur de e^+ la saturation sera-t-elle atteinte ?
 - Lors de la saturation du montage, quelle équation différentielle est vérifiée par e^+ ?
 - Quelle est la solution générale de cette équation ?
 - En déduire l'allure des courbes $e^+(t)$ et $s(t)$. Pourquoi cet oscillateur est-il qualifié de *quasi sinusoïdal* ?

7- Oscillateur à relaxation

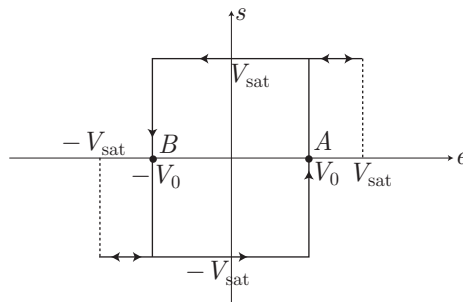
On considère le montage schématisé ci-dessous, dans lequel les deux ALI sont supposés idéaux :



1. L'ALI (1) fonctionne en régime saturé : la tension de saturation V_{sat} étant proche de 15 V :

$$\begin{cases} s = V_{\text{sat}} & \text{si } e^+ > e^- \\ s = -V_{\text{sat}} & \text{si } e^+ < e^- \end{cases}$$

Expliquer la courbe (dite *d'hystérésis*) ci-dessous, lorsque e varie entre $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$:

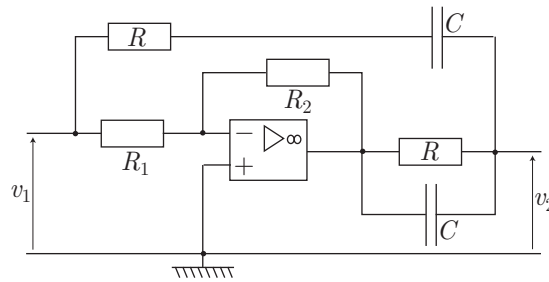


et exprimer V_0 en fonction de V_{sat} , R_1 et R_2 .

- L'ALI (2) fonctionne en régime linéaire. En déduire l'équation différentielle liant $e(t)$ et $s(t)$ (pas nécessairement sinusoïdales).
- On suppose qu'à la date $t = 0$, l'état du circuit est caractérisé par le point A du cycle d'hystérésis.
 - Quelle est l'expression de $e_1(t) = e(t)$ sur l'intervalle $t \in [0; T_1]$ pendant lequel l'état du circuit passe du point A au point B ?
 - Que se passe-t-il lorsque le point B est atteint ?
 - Quelle est l'expression $e_2(t) = e(t)$ sur l'intervalle $[T_1; T_1 + T_2]$ pendant lequel l'état du circuit passe du point B au point A ?
 - Que se passe-t-il lorsque le point A est de nouveau atteint ?
- Représenter graphiquement l'allure des courbes $e(t)$ et $s(t)$ pour $t \in [0; T_1 + T_2]$.
 - En déduire que ce montage réalise un oscillateur dont on donnera la période T en fonction de R , C , R_1 , R_2 .

★ 8- Circuit déphaseur à pont de Wien

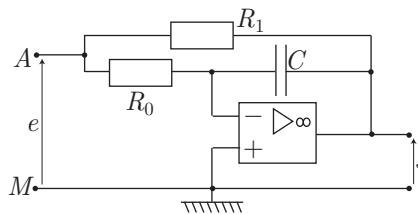
L'amplificateur linéaire (ALI) ci-dessous est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire sinusoïdal.



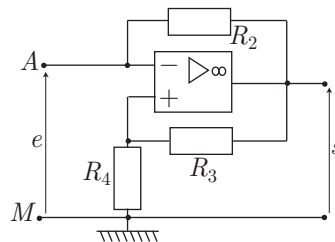
1. Identifier la fonction de transfert à : $\underline{H}(j\omega) = \frac{v_2}{v_1} = k \frac{1 - \alpha j \left(x - \frac{1}{x} \right)}{1 + \beta j \left(x - \frac{1}{x} \right)}$ où $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.
2. Quelle valeur faut-il donner au paramètre $\lambda = \frac{R_2}{R_1}$ pour que $|\underline{H}(j\omega)|$ soit indépendant de ω ?

★ 9- Simulation d'une inductance

1. On considère le circuit ci-dessous, en régime sinusoïdal permanent (l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire).



- a- Établir la relation liant les amplitudes complexes \underline{e} et \underline{s} ; à quoi correspond-elle ?
 - b- Calculer l'admittance d'entrée du montage. Montrer que c'est celle de trois éléments passifs en parallèle, dont on précisera la nature.
2. On monte en parallèle, entre les bornes A et M, le circuit suivant (ALI idéal et fonctionnant en régime linéaire).



- a- Exprimer l'admittance d'entrée de l'ensemble du montage.
- b- À quelle condition sur les résistances obtient-on l'équivalent d'une inductance pure ?
- c- *Application numérique* : $R_0 = R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,1 \mu\text{F}$.

ÉLECTROSTATIQUE

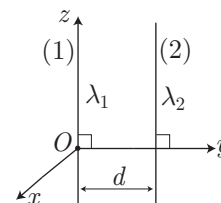
LOI DE COULOMB ET LIGNES DE CHAMP

1- Force entre deux fils

Un fil rigide, très fin et illimité (1) est disposé dans le vide selon l'axe Oz du repère $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Il est chargé uniformément avec la densité linéique $\lambda_1 > 0$. L'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point M , situé à la distance ρ du fil, dans la base cylindro-polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est :

$$\vec{E}(M) = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0\rho} \vec{e}_\rho$$

Un fil (2), illimité comme le fil (1), est uniformément chargé avec la densité linéique $\lambda_2 > 0$. Il est disposé dans le plan (yOz) parallèlement à l'axe Oz et à la distance d de celui-ci, comme l'indique la figure ci-contre.



1. Calculer la résultante \vec{f}_e des forces qu'exercent les charges du fil (1) sur l'unité de longueur du fil (2).

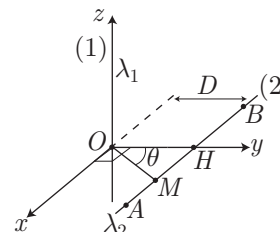
a. $\vec{f}_e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\epsilon_0} d \vec{e}_y$ b. $\vec{f}_e = \frac{\lambda_1\lambda_2 \ln d}{4\pi\epsilon_0} \vec{e}_y$

c. $\vec{f}_e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\epsilon_0 d} \vec{e}_y$ d. $\vec{f}_e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\epsilon_0 d} \vec{e}_x$

2. Le fil (2) est maintenant disposé perpendiculairement au fil (1), dans le plan (xOy) , parallèlement à Ox , à la distance D de celui-ci, comme l'indique la figure ci-dessous.

Calculer la résultante \vec{F}_e des forces qu'exercent les charges du fil (1) sur le segment AB du fil (2). A et B sont symétriques par rapport à l'axe Oy et situés à la distance $\frac{h}{2}$ de celui-ci.

Si M est le point courant de AB , il est commode d'utiliser la variable $\theta = (\vec{Oy}, \vec{OM})$.



a. $\vec{F}_e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\pi\epsilon_0} \frac{h}{D} \vec{e}_z$ b. $\vec{F}_e = -\frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{\sqrt{h^2 + D^2}} \vec{e}_x$

c. $\vec{F}_e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{D} \vec{e}_y$ d. $\vec{F}_e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\pi\epsilon_0} \arctan\left(\frac{h}{2D}\right) \vec{e}_y$

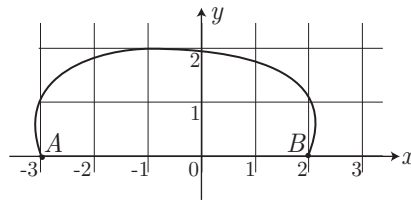
3. Dans ce dernier cas, en déduire la résultante \vec{F}'_e des forces qu'exercent les charges du fil (1) sur le fil (2) illimité. Les fils s'attirent-ils ou se repoussent-ils ?

a. $\vec{F}'_e \rightarrow \infty$ b. $\vec{F}'_e = \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\epsilon_0} \vec{e}_y$

- c. Il y a attraction. d. Il y a répulsion.

2- Ligne de champ

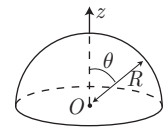
Le schéma ci-dessous représente une ligne de champ produite par deux charges ponctuelles q_A et q_B situées respectivement en A et B :



Sachant que $q_A = -1,06 \mu\text{C}$, calculer la charge q_B .

★ 3- Champ produit par une demi-sphère

1. Calculer le champ électrique au centre d'une sphère chargée en surface, avec la distribution surfacique de charges : $\sigma = \sigma_0 \cos^2 \theta$ (l'angle θ est celui des coordonnées sphériques).
2. Même question pour la demi-sphère correspondant à $z \geq 0$.



★ 4- Calcul d'une charge

On représente la charge élémentaire e par la densité volumique suivante :

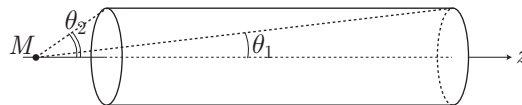
$$\rho(r) = \frac{e}{Cr} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

où a est une longueur caractéristique, C une constante et r la distance du point considéré au centre de la distribution.

1. Calculer la constante C .
2. Quelle est la charge contenue dans la sphère de centre O et de rayon $R = 3a$?

★★ 5- Champ créé par un cylindre fini

On considère un cylindre droit de rayon R , d'axe Oz , de hauteur h finie. Il est chargé en surface avec une densité superficielle σ uniforme.



Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ qu'il crée en un point M de l'axe, en fonction de σ , ε_0 et des angles θ_1 et θ_2 définis sur la figure.

★★ 6- Lignes de champ électrique

Sur un axe Ox , on place deux charges : $+q$ en $A(x = +a)$ et $-q$ en $B(x = -a)$. Soit M un point quelconque du plan (Oxy) , repéré par :

$$\varphi = (\vec{Ax}, \vec{AM}) \quad \varphi' = (\vec{Bx}, \vec{BM}) \quad \theta = (\vec{Ox}, \vec{OM}) \quad \|\vec{OM}\| = r$$

1. Calculer le flux du champ électrique à travers un disque d'axe Ox , dont le rayon R est «vu» de A sous l'angle φ_0 et de B sous l'angle φ'_0 . On exprimera le résultat en fonction de q , ε_0 , $\cos \varphi_0$ et $\cos \varphi'_0$.
2. a- Montrer que l'équation d'une ligne de champ peut s'écrire : $\cos \varphi - \cos \varphi' = K = \text{cte}$.
b- Soit C le point d'intersection entre la médiatrice de $[AB]$ et une ligne de champ. Expliciter la constance K en fonction de $c = OC$, où O est le milieu de $[AB]$.
c- En déduire l'angle α que fait la tangente en A de cette ligne de champ avec l'axe Ox .

ÉLECTROSTATIQUE

THÉORÈME DE GAUSS ET CALCULS DE POTENTIELS

1- Théorème de Gauss et potentiel (QCM)

Du point de vue du potentiel et du champ électriques qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a . On désigne par $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ le vecteur position d'un point P quelconque de l'espace. Pour $r < a$, la charge volumique $\rho(P)$ qui représente le noyau varie en fonction de $r = OP$ suivant la loi :

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

où ρ_0 est une constante positive.

1. Exprimer la charge totale Q du noyau.

$$(a) Q = \frac{1}{3} \pi \varepsilon_0 \rho_0 a^3 \quad (b) Q = \frac{8}{15} \pi \rho_0 a^3 \quad (c) Q = \frac{3}{5} \pi \varepsilon_0 \rho_0 a^2 \quad (d) Q = \frac{\rho_0 a^2}{2\pi}$$

2. Calculer le champ électrique $\vec{E}_e(P)$ en tout point P extérieur à la sphère ($r > a$).

$$(a) \vec{E}_e(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (b) \vec{E}_e(P) = \frac{\rho_0 a^3}{2\pi\varepsilon_0 r^3} \vec{r} \quad (c) \vec{E}_e(P) = \frac{2\pi\rho_0 a^2}{\varepsilon_0 r^2} \vec{r} \quad (d) \vec{E}_e(P) = \vec{0}$$

3. Calculer le champ électrique $\vec{E}_i(P)$ en tout point P intérieur à la sphère ($r < a$).

$$(a) \vec{E}_i(P) = \frac{\rho_0}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{2}{3} - \frac{3r^2}{4a^2} \right) \vec{r} \quad (b) \vec{E}_i(P) = \frac{3\rho_0}{2\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3}{4} - \frac{4r^2}{3a^2} \right) \vec{r}$$

$$(c) \vec{E}_i(P) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2} \right) \vec{r} \quad (d) \vec{E}_i(P) = \vec{0}$$

4. Exprimer le potentiel $V_e(P)$ créé par le noyau lorsque $r > a$.

$$(a) V_e(P) = \frac{\rho_0 a^2}{4\pi\varepsilon_0} \quad (b) V_e(P) = \frac{4\rho_0 a^2}{3\pi\varepsilon_0 r} \quad (c) V_e(P) = \frac{2\rho_0 a^3}{15\varepsilon_0 r} \quad (d) V_e(P) = \frac{\pi\rho_0 a^2}{3\varepsilon_0 r}$$

5. Exprimer le potentiel $V_i(P)$ créé par le noyau lorsque $r < a$.

$$a- V_i(P) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{20a^2} \right)$$

$$b- V_i(P) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{a^2}{3} - \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{a} \right)$$

$$c- V_i(P) = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{a^2}{6} - \frac{r^2}{3} + \frac{r}{3a} \right)$$

$$d- V_i(P) = \frac{4\pi\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{r^2}{6} + \frac{r^4}{4a^2} \right)$$

2- Mouvement d'une particule chargée

- En utilisant le théorème de Gauss, calculer le champ électrique produit en tout point de l'espace par une sphère de rayon R , de centre O , portant une charge Q uniformément répartie dans son volume.
- Un atome peut être considéré comme composé :
 - d'un nuage protonique sphérique centré en O , de rayon R et portant une charge Q uniformément répartie en volume ;
 - d'un électron de masse m , de charge $q_e = -e$, libre de se déplacer à l'intérieur du nuage protonique.
 - Donner l'équation du mouvement de l'électron. Pourquoi dit-on qu'il est lié élastiquement à l'atome ? Montrer que son mouvement est plan.
 - Quelle est la période du mouvement de l'électron ?

3- Calcul d'une distribution de charge

Un champ électrostatique radial a pour expression : $\vec{E} = E_0 \vec{e}_r$ où $E_0 = \text{cte}$. Retrouver l'expression de la densité volumique $\rho(r)$ responsable d'un tel champ.

4- Calcul d'un potentiel

On considère une sphère chargée en volume avec une densité volumique : $\rho = \frac{2\varepsilon_0}{r} E_0$, seule dans l'espace, où E_0 est une constante et r la distance d'un point de l'espace au centre O de la sphère de rayon R . Trouver l'expression du potentiel V_0 en O .

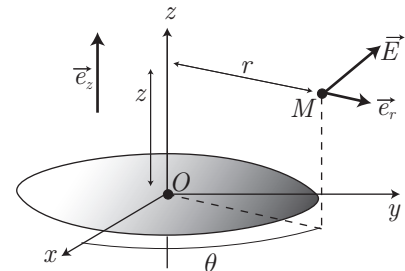
5- Calcul d'un champ électrique

Un disque, de rayon R , de centre O et d'axe Oz , porte une densité surfacique de charge σ uniforme.

1. Montrer que le champ électrique $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_z \vec{e}_z$ présente une symétrie de révolution autour de Oz .
2. Montrer qu'au voisinage de l'axe, dans une région vide de charge :

$$E_r \simeq -\frac{r}{2} \times \left(\frac{\partial E_z}{\partial z} \right)_{r=0}$$

Indication : On pourra utiliser le théorème de Gauss pour un cylindre élémentaire de rayon r , d'axe Oz , limité par les plans de cotes z et $z + dz$.



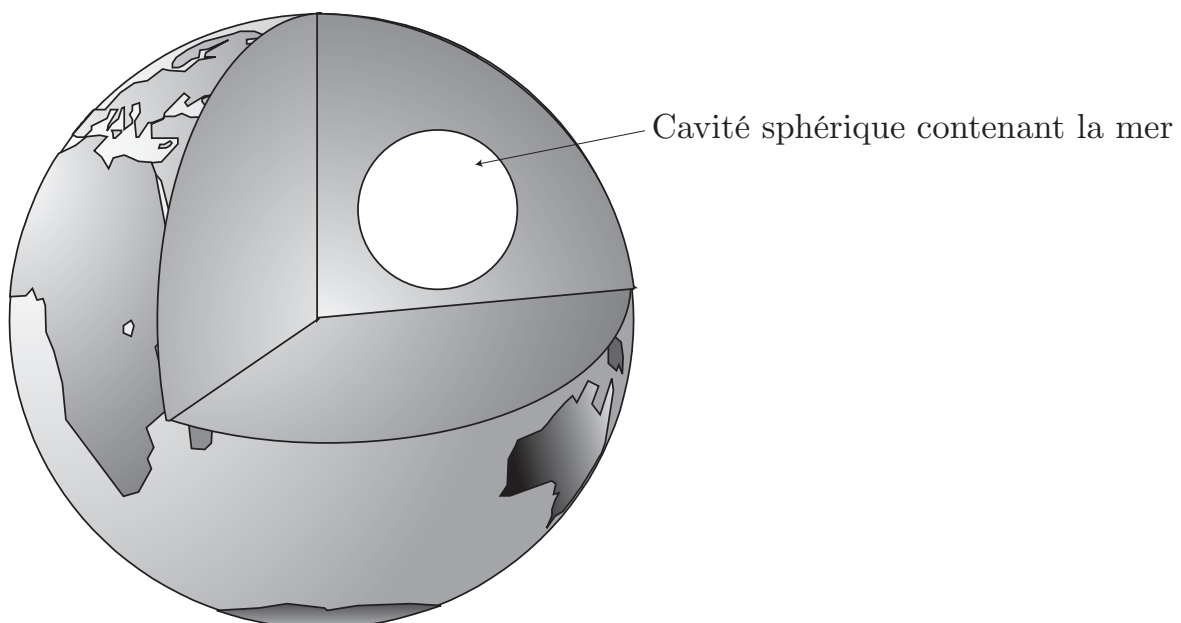
6- Champ produit par un cylindre creux

Soit un cylindre droit, de rayon R , d'axe Ox , de hauteur $h \gg R$, de sorte qu'on le considère comme infini et qu'on négligera les effets de bords. Ce cylindre est chargé en surface avec une densité superficielle uniforme σ .

1. Déterminer le champ électrostatique \vec{E} créé en tout point de l'espace à la distance r de l'axe du cylindre (on distinguera les cas $r < R$ et $r > R$).
2. Donner l'allure de la courbe $E(r)$. Qu'observe-t-on pour $r = R$?

7- Application à la gravitation

Dans son *voyage au centre de la Terre*, Jules Verne évoque l'existence d'une mer à l'intérieur de la Terre. La représenter :



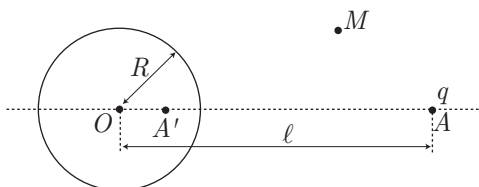
★★ 8- Calcul de potentiel

Considérons une sphère (\mathcal{S}) de centre O et de rayon R portant la charge Q uniformément répartie à sa surface.

Calculer directement le potentiel en un point M extérieur à la sphère ($OM = r > R$); pour cela, décomposer la surface de la sphère en éléments de surface dS_P autour de points courants sur (\mathcal{S}).

★★ 9- Calcul de potentiel

Une charge ponctuelle q est placée en A , à une distance ℓ d'une boule conductrice de centre O et de rayon $R < \ell$. La distance OA n'est pas nécessairement grande devant R .



La boule est portée au potentiel nul. Montrer qu'à l'extérieur de la sphère ($OM > R$) le potentiel peut s'exprimer sous la forme :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{AM} - \frac{R}{\ell A'M} \right) \text{ avec } OA' < R$$

On admettra que le lieu des points, dont le rapport des distances à deux points fixes est une constante (différente de l'unité), est une sphère.

★★ 10- Théorème de Gauss

Deux sphères de même rayon R sont uniformément chargées en volume : l'une porte la densité de charge $-\rho$, l'autre la densité de charge $+\rho$. Leurs centres sont aux abscisses $-a$ et $+a$ sur l'axe Oz , avec $a \ll R$.

1. Montrer que l'on peut considérer que le système ainsi formé constitue approximativement une couche sphérique de rayon R chargée en surface, la densité de charge en un point M étant donnée par $\sigma(M) = 2a\rho \cos \theta$, où θ est l'angle que fait OM avec Ox .
2. En déduire le champ à l'intérieur d'une couche sphérique chargée en surface suivant la loi $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ où σ_0 est une constante et où θ a la même signification que dans la première question.

★★ 11- Calcul de potentiel et théorème de Gauss

On considère un plasma contenant exclusivement des électrons de charge $-q$ et des ions positifs de charge $+q$ et on étudie la répartition des charges et des potentiels au voisinage d'un ion positif donné.

On désigne par $n_e(r)$ et $n_i(r)$ les densités particulières des électrons et des ions à la distance r du centre de l'ion positif pris comme origine et on admettra que ces densités obéissent à la loi de répartition statistique de Boltzmann :

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{qV}{kT}\right) \text{ et } n_i = n_0 \exp\left(-\frac{qV}{kT}\right)$$

où n_0 est une constante, V le potentiel électrostatique au point considéré, k la constante de Boltzmann et T la température absolue du plasma.

1. Écrire l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire la fonction $V(r)$, sous la forme :

$$\frac{2}{r} \frac{dV}{dr} + \frac{d^2V}{dr^2} = \frac{2n_0q}{\epsilon_0} \sinh\left(\frac{qV}{kT}\right)$$

2. En supposant que la température du plasma est assez élevée pour que $kT \gg qV$, résoudre cette équation.

★ 12- Pression électrostatique

On considère une sphère conductrice \mathcal{S} de rayon R uniformément chargée en surface.

1. Calculer la densité superficielle σ et la charge électrique totale prise par \mathcal{S} portée au potentiel V .
2. Montrer que la surface de la sphère est soumise à une pression électrostatique $P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$. On pourra considérer qu'un élément de surface dS (de charge σdS) est soumis à un champ provenant des autres charges et que l'on calculera en fonction de σ .

★ 13- Théorème de Gauss en gravitation

On considère, sur la surface terrestre, un plateau rocheux horizontal d'altitude h par rapport au niveau de la mer. On considère ce plateau homogène, de masse volumique μ_1 .

1. Calculer le champ gravitationnel créé par la masse du plateau en un point de sa surface, éloigné du bord.
2. Montrer que ce champ peut s'écrire : $\vec{g}_1 = -\frac{3}{2} \frac{g_0 \mu_1}{R \mu_m} h \vec{u}_z$ où g_0 représente l'intensité de la pesanteur au sol, R le rayon de la Terre supposée sphérique et μ_m la masse volumique de la Terre supposée homogène ; \vec{u}_z est le vecteur unitaire de la verticale ascendante.
3. On note $g(h)$ l'intensité de la pesanteur à l'altitude h . Calculer la correction Δg sur la valeur observée g de l'intensité de la pesanteur pour obtenir la valeur normale g_0 , compte tenu du champ créé par le plateau et de la correction d'altitude. On montrera que Δg peut se mettre sous la forme :

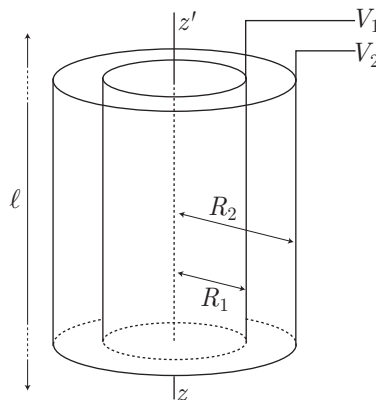
$$\Delta g = -h \frac{2g_0}{R} \left(\frac{3\mu_1}{4\mu_m} - 1 \right) \quad (\text{Formule de Bouguer})$$

ÉLECTROSTATIQUE

CAPACITÉ ET ÉNERGIE

1- Calcul d'une capacité

On considère un condensateur cylindrique d'axe (zz') et de longueur ℓ suffisamment grande pour qu'on puisse négliger les effets de bords. Ce condensateur est constitué de deux conducteurs cylindriques coaxiaux, de rayons R_1 , R_2 , portés aux potentiels respectifs V_1 , V_2 et contenant les charges respectives Q et $-Q$ uniformément réparties sur leur surface. L'espace séparant les deux conducteurs est assimilé à du vide.



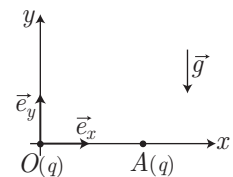
1. En utilisant le théorème de Gauss, exprimer le champ électrique \vec{E} en tout point situé à une distance $r \in [R_1, R_2]$ de l'axe (zz').
2. En déduire l'expression de la différence de potentiel $V_1 - V_2$ en fonction de Q .
3. Montrer que ce dispositif se comporte comme un condensateur de capacité $C = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln(R_2/R_1)}$.

2- Énergie électrostatique (QCM)

Chacune des questions suivantes admet une ou deux bonne réponses. Trouvez-les.

1. Deux charges électriques ponctuelles identiques (q) sont placées respectivement à l'origine et au point $A(a > 0, 0)$ du repère plan $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

Calculer les composantes E_x et E_y du vecteur champ électrostatique $\vec{E}(P)$ créé au point P du plan, de coordonnées x et y .



- (a) $E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x - a}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}} \right]$
- (b) $E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x + a}{[(x + a)^2 + y^2]^{3/2}} \right]$
- (c) $E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y}{[(x - a)^2 + y^2]^{3/2}} \right]$
- (d) $E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y}{[(x + a)^2 + y^2]^{3/2}} \right]$

2. Indiquer sur quelle droite Δ du plan $\vec{E}(P)$ est parallèle en tout point à l'axe Oy .

Donner l'expression correspondante de \vec{E} .

a- Δ est la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$

b- Δ est la droite d'équation : $x = y$

c- $\vec{E}(P) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{y^2} \vec{e}_y$

d- $\vec{E}(P) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \times \frac{y}{\left(y^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{3/2}} \vec{e}_y$

3. Une charge électrique ponctuelle q' , de masse m et de signe contraire à celui de q , se déplace sans frottements sur la droite Δ , à proximité immédiate de l'axe Ox ($|y| \ll a$), sous l'action de la force électrostatique due au champ des deux charges q et de son poids. Oy est la verticale ascendante et g est l'accélération de la pesanteur, supposée uniforme.

On pose : $k = -\frac{4}{\pi\epsilon_0} \times \frac{qq'}{a^3}$.

Constater qu'il existe une position d'équilibre P_e et calculer l'ordonnée y_e de P_e .

$$(a) y_e = \frac{mg}{k} \quad (b) y_e = -\frac{mg}{3k}$$

$$(c) y_e = -\frac{mg}{k} \quad (d) y_e = -\frac{mg}{4k}$$

4. Calculer la période T_0 des oscillations qu'effectue la charge q' écartée de sa position d'équilibre.

$$(a) T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}} \quad (b) T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

$$(c) T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} \quad (d) T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

★★ 3- Énergie électrostatique

On considère une suite infinie d'ions alignés, alternativement positif et négatifs, assimilés à des charges ponctuelles élémentaires et équidistantes de a .

1. Calculer le potentiel auquel est soumis un ion positif P de la part de tous les autres ions de la série.

2. Même question pour un ion négatif.

3. Déterminer l'énergie potentielle électrostatique (appelée énergie réticulaire) d'un cristal à une dimension composé d'une mole PN (\mathcal{N} ions P et \mathcal{N} ions N).

ÉLECTROSTATIQUE

DIPÔLES ÉLECTROSTATIQUES

1- Flux du champ produit

Un dipôle électrostatique est constitué de deux charges $(+q)$ et $(-q)$ portées par des points A et B situés sur un axe Ox , aux abscisses respectives $x_A = a$ et $x_B = -a$. Un point M est situé à une distance r de O , dans une direction définie par l'angle $\theta = (\vec{e}_r, \vec{Ox})$.

1. On suppose $r \gg a$. Trouver l'expression approchée du potentiel V créé par ce dipôle en M .
2. En déduire la composante radiale E_r du champ électrostatique décrit par $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$ en coordonnées sphériques.
3. Calculer le flux de \vec{E} à travers une surface (Σ) sphérique, de rayon r et centrée sur O . Ce résultat confirme-t-il le théorème de Gauss, en dépit des approximations réalisées ?

2- Surface équipotentielle

Un champ électrique uniforme \vec{E} règne dans tout l'espace. On place, en un point O , un dipôle de moment \vec{p} parallèle à \vec{E} .

1. Montrer qu'il existe une sphère (Σ) , de centre O , sur laquelle le potentiel est constant. Calculer le rayon a de (Σ) , ainsi que son potentiel.

On choisit, arbitrairement, le potentiel du point O nul pour le champ \vec{E} .

2. Calculer, en tout point de (Σ) , les composantes radiale et orthoradiale du champ total.

On rappelle l'expression du gradient d'une fonction scalaire ψ en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

3- Interaction charge-dipôle

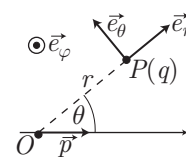
Soient, en présence l'un de l'autre, un dipôle électrostatique de moment \vec{p} au point O , et une charge q au point P .

1. De l'expression du potentiel V_p en P , dû au dipôle :

$$V_p = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

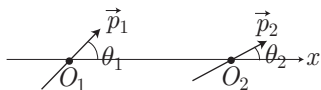
déduire la force \vec{F}_q qui s'exerce sur la charge q .

2. Déduire de la question précédente l'expression de la force \vec{F}_p qui s'exerce sur le dipôle.
3. On considère le système des deux points $\{O, P\}$. Calculer l'énergie potentielle d'interaction de l'ensemble et déterminer la valeur de θ qui assure au dipôle une position d'équilibre stable (on distinguera les cas $pq > 0$ et $pq < 0$).



4- Interaction dipôle-dipôle

Deux dipôles électrostatiques, de moments dipolaires \vec{p}_1 et \vec{p}_2 , peuvent tourner librement autour des points O_1 et O_2 , dans le plan de la feuille :



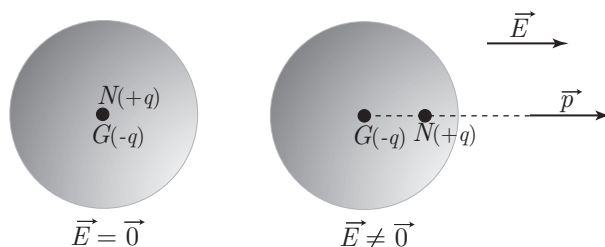
1. Donner l'expression de l'énergie d'interaction entre ces deux dipôles, en fonction de $p_1 = \|\vec{p}_1\|$, $p_2 = \|\vec{p}_2\|$, θ_1 , θ_2 et $r = O_1O_2$.
2. Dans le cas où $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, trouver les positions d'équilibre et discuter de leur stabilité.

5- Polarisabilité d'un atome

Un atome peut être (grossièrement) assimilé à un noyau ponctuel N , de charge $+q$, entouré d'un nuage électronique, supposé sphérique de rayon R , comportant une charge totale $-q$ répartie uniformément dans le volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. On note G le barycentre électrique de ce nuage électronique et on admet ici que G coïncide avec le centre géométrique du nuage électronique.

En l'absence de champ électrique, N et G sont supposés confondus. En revanche, sous l'influence d'un champ électrique \vec{E} uniforme, le déplacement relatif de N et G induit l'apparition d'un *moment dipolaire* électrique $\vec{\mu}$ défini par :

$$\vec{\mu} = q \times \overrightarrow{GN}$$



Montrer que μ et \vec{E} sont colinéaires : $\vec{\mu} = \alpha \vec{E}$, et exprimer la constante α (*polarisabilité* de l'atome) en fonction de R .

On supposera que $r = GN < R$.

★★ 6- Polarisation de l'atome de Thomson

Thomson a proposé le modèle de l'atome d'hydrogène suivant : le noyau est modélisé par une boule fixe de rayon R et de charge e uniformément répartie en volume et l'électron par une particule ponctuelle mobile, de charge $q_e = -e$ et de masse m , qui, lorsqu'elle pénètre dans la boule, s'y déplace librement.

1. Déterminer les positions d'équilibre de l'électron.
2. Initialement, l'électron se trouve dans la boule à une distance r . Quelle doit être sa vitesse minimale v_0 pour qu'il y ait ionisation de l'atome ?
3. On soumet l'atome d'hydrogène à un champ électrostatique uniforme \vec{E}_0 . Déterminer, lorsqu'elles existent, les nouvelles positions d'équilibre de l'électron. En déduire la polarisation de l'atome, c'est-à-dire le coefficient α de proportionnalité entre le champ électrostatique et le moment dipolaire \vec{p} qu'il induit dans l'atome : $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_0$.

★★ 7- Quadripôle

On considère une charge $2q$ placée en O et deux charges $-q$ placées sur l'axe Ox respectivement aux points d'abscisse $x = -a$ et $x = +a$.
Calculer le potentiel électrostatique en un point M situé à la distance $r \gg a$ de O . On posera $(Ox, OM) = \theta$.

★ 8- Force de Keezon

Considérons deux dipôles permanents, dont les moments \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont portés par le même axe Oz et qui sont à la distance r l'un de l'autre. Nous nous plaçons dans l'hypothèse restrictive où il n'y a que deux orientations possibles : \vec{p}_1 et \vec{p}_2 peuvent être soit parallèles, soit anti-parallèles ; l'axe Oz joint les deux dipôles.

1. Calculer, dans chaque cas, la force qui s'exerce entre les dipôles.
2. L'expression du travail élémentaire d'un couple est $\delta W = \Gamma d\theta$, où $d\theta$ désigne l'angle de rotation. Montrer de façon générale que, si un dipôle permanent est plongé dans un champ \vec{E} , de façon que son moment \vec{p} soit parallèle à \vec{E} au point considéré, son énergie potentielle doit s'accroître de $\Delta\varepsilon = 2pE$ lorsqu'il est retourné dans sa position anti-parallèle.
3. Nous supposons que l'agitation thermique est assez forte pour faire passer sans cesse les dipôles du 1. d'une position à l'autre. Calculer la force moyenne qui s'exerce entre les deux dipôles. On rappelle la loi de répartition de Boltzmann :

$$\mathcal{P}(\varepsilon) = \frac{1}{Z} e^{-\varepsilon/kT}$$

où k est la constante de Boltzmann, T la température absolue, ε l'énergie, Z la fonction de partition. On supposera que $\Delta\varepsilon \ll kT$.

★★ 9- Oscillations d'un dipôle

Un anneau de centre O et de rayon R est chargé avec la densité linéique λ . Un dipôle de moment $\vec{p} = p\vec{u}_z$ ($p > 0$), avec \vec{u}_z vecteur unitaire de l'axe Oz perpendiculaire au plan de l'anneau, se déplace librement sur (Oz) .

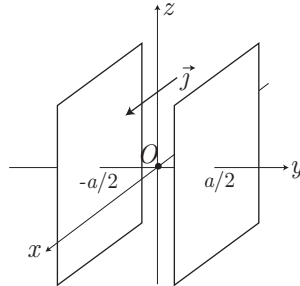
1. Calculer le champ \vec{E} en tout point de l'axe (Oz) .
2. Déterminer les deux positions d'équilibre du dipôle.
3. Appelons z_e la position d'équilibre stable du dipôle. À $t = 0$, on déplace le dipôle (de masse m) de $\varepsilon_0 = z_0 - z_e \ll z_e$. Déterminer la pulsation des petites oscillations du dipôle.

MAGNÉTOSTATIQUE

THÉORÈME D'AMPÈRE

1- Champ créé par une bande de courant

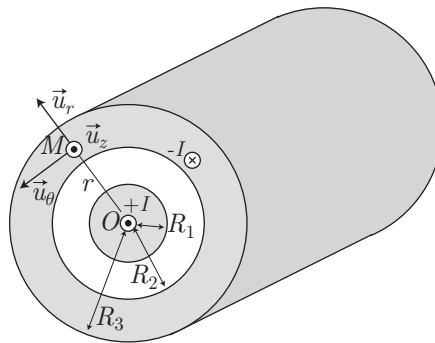
On envisage une distribution volumique de courant, constante, de densité volumique $\vec{j} = J_0 \vec{e}_x$ entre les plans (infinis dans les directions de x et z) $y = -\frac{a}{2}$, $y = \frac{a}{2}$ et nulle pour $|y| > \frac{a}{2}$.



1. Par une analyse des symétries, déterminer la direction de champ magnétique \vec{B} . Justifier que ce champ ne dépend que de y .
2. Montrer, également par un argument de symétrie, que $\vec{B} = \vec{0}$ en $y = 0$.
3. Déterminer l'expression de \vec{B} dans l'espace.

2- Champ magnétique dans un câble coaxial

Un câble coaxial d'axe Oz est constitué par un conducteur cylindrique infini et plein, de rayon R_1 , entouré d'un conducteur externe occupant le volume entre les cylindres de rayons R_2 et R_3 ($R_3 > R_2 > R_1$), les trois cylindres étant coaxiaux. Un courant I circule dans le conducteur intérieur dans un sens et «revient» en sens inverse dans le conducteur extérieur. Les deux conducteurs sont séparés par un matériau isolant.



- Déterminer la structure du champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace.
- En supposant que les densités de courant soient uniformes, déterminer l'expression de la norme B du champ magnétique en tout point de l'espace.
- Tracer l'allure de la courbe $B(r)$.

3- Champ magnétique produit par un cylindre

On considère un cylindre d'axe $z'z$ et de section circulaire de rayon a .

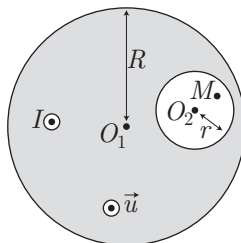
Ce cylindre est parcouru par des courants caractérisés par une distribution volumique $\vec{j} = j(r) \vec{u}_z$, créant ainsi un champ magnétique \vec{B} donné par :

$$\begin{cases} \vec{B}(r) = B_0 \times \left(\frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2} \right) \vec{u}_\theta \text{ pour } r < a \\ \vec{B}(r) = B_0 \times \frac{a}{r} \vec{u}_\theta \text{ pour } r > a \end{cases}$$

Déterminer la distribution volumique de courant sans utiliser l'expression du rotationnel d'un vecteur en coordonnées cylindriques.

4- Champ magnétique dans une cavité

Un cylindre \mathcal{C} , dont l'axe est perpendiculaire au plan de la figure ci-dessous, est parcouru par un courant constant d'intensité uniforme I , dans le sens défini par le vecteur \vec{u} de l'axe. On supposera la longueur de \mathcal{C} très grande devant son rayon R .

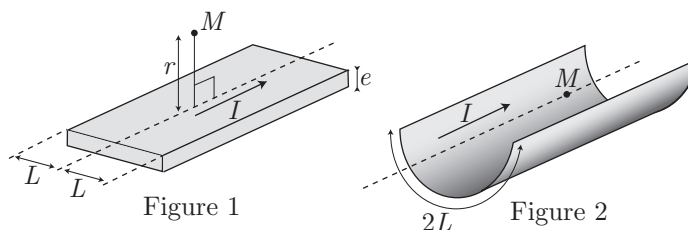


Le cylindre est percé d'une cavité cylindrique \mathcal{C}' , dont l'axe est parallèle à celui de \mathcal{C} , de rayon $r < \frac{R}{2}$. Les axes des deux cylindres sont séparés d'une distance O_1O_2 telle que \mathcal{C}' est contenu dans \mathcal{C} . Soit $\vec{B}(M)$ le champ magnétique qui règne en un point M de la cavité vide. Parmi les expressions suivantes, laquelle correspond à $\vec{B}(M)$?

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1O_2} & \text{(b)} \quad \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \vec{u} \wedge \overrightarrow{O_1O_2} \\ \text{(c)} \quad \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \overrightarrow{O_1O_2} & \text{(d)} \quad \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} \overrightarrow{O_1O_2} \end{aligned}$$

5- Champs créés par des rubans.

- Calculer le champ magnétique \vec{B} créé par un fil infini parcouru par un courant d'intensité I , à une distance a (on commencera par étudier les symétries et on utilisera le théorème d'Ampère).
- a- On considère un ruban infini d'épaisseur e négligeable (*cf.* figure 1).

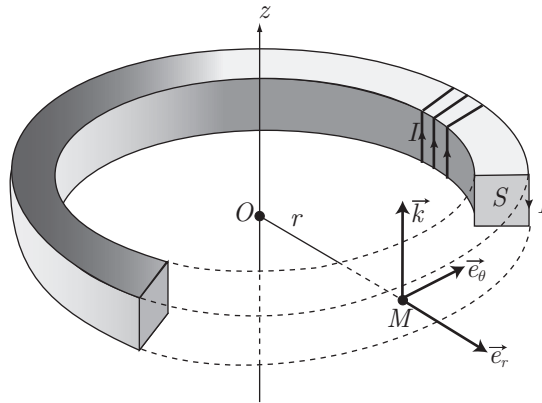


Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ que produit ce ruban en un point M .

- Même question dans le cas de la gouttière demi-cylindrique présentée sur la figure 2, en un point M de son axe.

6- Bobine torique

Soit, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) , une spire rectangulaire \mathcal{S} contenue dans le plan $\theta = 0$, ayant ses côtés définis par $r = r_1$ et $r = r_2 > r_1$ et $z = \pm \frac{h}{2}$. \mathcal{S} est orienté positivement par le vecteur unitaire \vec{e}_θ .

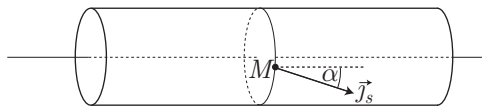


Une bobine torique est modélisée comme une distribution de $N \gg 1$ spires jointives déduites de \mathcal{S} par des rotations autour de (Oz) , d'angles $\frac{2\pi p}{N}$, avec p variant de 1 à N , et parcourues par le même courant d'intensité I .

1. En $M(r, \theta, z)$, déterminer la direction du champ magnétique \vec{B} et montrer que sa norme est constante le long d'une ligne de champ.
2. Calculer $\vec{B}(M)$ en distinguant les régions intérieures et extérieures à la bobine.
3. Calculer le flux magnétique ϕ à travers une spire, puis le flux total Φ à travers la bobine.
Montrer que l'on peut écrire : $\Phi = L \times I$.

★★ 7- Nappe de courant surfacique

On considère un cylindre infini de rayon R , parcouru par un courant surfacique $\vec{j}_s = j_s \vec{u}$ où j_s est une constante et le vecteur unitaire \vec{u} fait en tout point M de la surface cylindrique un angle α avec la génératrice du cylindre qui passe par M .



Calculer le champ magnétique créé dans tout l'espace privé de la nappe de courant.

★ 8- Boule de Rowland

Une boule de polystyrène (matériau non conducteur), de centre O et de rayon R , a été chargée uniformément en volume et porte la densité volumique ρ . Elle est mise en rotation autour de l'un de ses diamètres, confondu avec l'axe Oz , avec la vitesse angulaire ω constante.

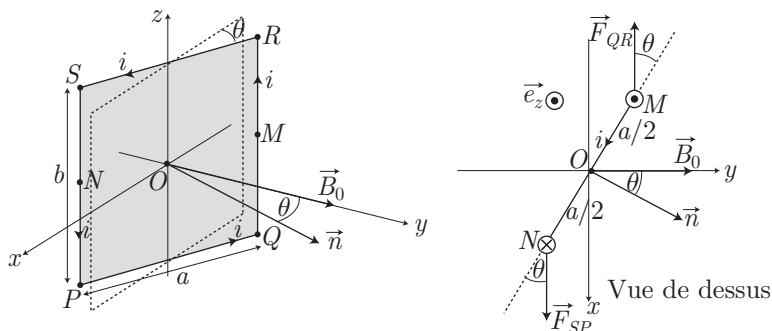
1. Calculer le vecteur densité volumique de courant \vec{j} de cette distribution.
2. Calculer l'intensité du courant à travers un demi-disque méridien.

MAGNÉTOSTATIQUE

DIPÔLES MAGNÉTIQUE

1- Couple des actions mécaniques

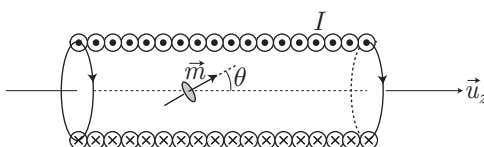
Un cadre rectangulaire ($PQRS$), de côtés a et b , est plongé dans un champ magnétique constant \vec{B}_0 , qui fait un angle θ avec la normale \vec{n} du cadre.



1. Lorsque le cadre est parcouru par un courant i , montrer que les forces de Laplace sont responsables d'un couple $\vec{\Gamma}$, que l'on exprimera en fonction de i , a , b , θ , \vec{u}_z et B_0 .
2. Définir le moment dipolaire \vec{m} du cadre.
En déduire une expression de $\vec{\Gamma}$

2- Induction mutuelle bobine-dipôle

Un solénoïde \mathcal{S} infiniment long, comportant n spires par mètre et parcouru par un courant d'intensité I , héberge sur son axe (Oz) un dipôle magnétique dont le moment dipolaire \vec{m} fait un angle $\theta = \omega t$ qui varie linéairement dans le temps.



On pourra assimiler le dipôle à une boucle de courant i , de section s très petite par rapport aux autres dimensions.

1. En exprimant le flux $\phi_{\mathcal{S}/m}$ du champ magnétique produit par \mathcal{S} sur le dipôle, trouver l'expression de l'inductance mutuelle M entre ces deux systèmes (en fonction de n , m , θ et μ_0 , perméabilité magnétique du vide).
2. Rappeler la loi de Faraday.
3. En déduire que la rotation du dipôle à la vitesse angulaire ω produit dans \mathcal{S} une force électro-motrice induite $e = E \sin(\omega t)$. Exprimer E en fonction de μ_0 , n , m , ω .

3- Interaction dipôle-dipôle

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, on fixe un dipôle magnétique de centre O et de moment dipolaire $\vec{m} = m \vec{u}_y$. Un autre dipôle (1), de centre P , a un moment dipolaire de même norme m ; on prend $\vec{OP} = x \vec{u}_x$ et $\vec{m}_1 = m \vec{u}_1$. On note θ l'angle (\vec{u}_x, \vec{u}_1) .

1. Exprimer la champ magnétique \vec{B} créé au point P par le dipôle fixe.
2. Le dipôle (1) possède un centre P fixe et est libre de tourner autour de l'axe (P, z) . Déterminer la valeur θ correspondant à une orientation d'équilibre stable.
3. Avec la valeur de θ déterminée à la question précédente, le dipôle (1) est maintenant astreint à se déplacer en translation sur l'axe x . Déterminer l'expression de la force subie par (1), qui dérive de l'énergie potentielle d'interaction. Comparer cette force à une force centrale newtonienne.

4- Champ géomagnétique

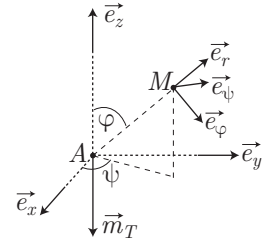
On admet que le champ magnétique terrestre \vec{B} est assimilable au champ magnétique d'un dipôle magnétique situé au centre A de la Terre, de moment :

$$\vec{m}_T = -m_T \vec{e}_z$$

m_T est positif et \vec{e}_z désigne le vecteur unitaire de l'axe géomagnétique de la Terre, qui est légèrement incliné par rapport à l'axe de rotation terrestre ; le signe négatif tient compte du fait que sud et nord magnétiques sont inversés par rapport aux sud et nord géographiques. Un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r, φ, ψ) par rapport à l'axe géomagnétique (A, \vec{e}_z) .

En un point M suffisamment éloigné de A , les composantes de \vec{B} s'écrivent :

$$\vec{B} = B_r \vec{e}_r + B_\varphi \vec{e}_\varphi + B_\psi \vec{e}_\psi \text{ avec } \begin{cases} B_r = -\frac{\mu_0 m_T}{4\pi} \times \frac{2 \cos \varphi}{r^3} \\ B_\varphi = -\frac{\mu_0 m_T}{4\pi} \times \frac{\sin \varphi}{r^3} \\ B_\psi = 0 \end{cases}$$



\vec{e}_r , \vec{e}_φ et \vec{e}_ψ sont les vecteurs unitaires de la base sphérique.

- Établir l'équation différentielle d'une ligne de champ. En intégrant cette équation, montrer que l'équation d'une ligne de champ est donnée par l'expression : $r = r_0 \sin^2 \varphi$, où r_0 désigne une constante.
- Tracer l'allure de quelques lignes de champ dans un plan méridien (plan défini par $\psi = \text{constante}$).
- Calculer l'intensité $B = B(\varphi)$ du champ magnétique sur une ligne de champ ; en désignant par B_0 l'intensité correspondante dans le plan équatorial magnétique (plan défini par $\varphi = \frac{\pi}{2}$), écrire B sous la forme $B = B_0 \times f(\varphi)$.

Exprimer B_0 en fonction de m_T , r_0 , μ_0 puis expliciter la fonction $f(\varphi)$.

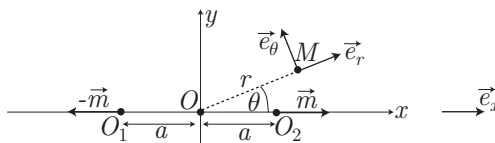
- Pour quelle valeur de φ l'intensité $B(\varphi)$ est-elle minimale ? Exprimer la valeur B_{\min} correspondante, en fonction de B_0 .
- Vérifier que $f(\pi - \varphi) = f(\varphi)$.
- Représenter le graphe de $f(\varphi)$ en précisant le domaine de variation de φ .
- On se propose de déterminer, en un point P (défini par l'angle $\varphi = \varphi_P$) situé à la surface de la Terre, l'intensité de la composante horizontale $B_h = |B_\varphi|$ du champ magnétique terrestre, en mesurant les petites oscillations dans un plan horizontal d'une aiguille aimantée.

L'aiguille aimantée est un petit solide qui peut tourner sans frottements autour de son axe vertical. Elle est assimilable à un dipôle magnétique de moment magnétique \vec{m} horizontal et de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation. On pose : $\alpha = (\vec{e}_\varphi, \vec{m})$.

- Quelle est la position d'équilibre stable de l'aiguille aimantée dans le champ magnétique terrestre ? justifier brièvement la réponse.
- Établir l'équation différentielle du mouvement de l'aiguille soumise au champ magnétique terrestre.
- En déduire la période τ_0 des petites oscillations de cette aiguille, en fonction de B_h , J et $m = \|\vec{m}\|$.
- Les valeurs de m et J n'étant pas connues, on utilise le champ magnétique \vec{B}_e , créé par une bobine parcourue par un courant électrique, pour s'en affranchir. On place d'abord la bobine telle que \vec{B}_e et la composante horizontale du champ terrestre soient parallèles et de même sens et de même sens la période τ_1 des petites oscillations de l'aiguille aimantée. On change ensuite le sens du courant dans la bobine et on mesure la nouvelle valeur τ_2 de la période des petites oscillations. En déduire B_h en fonction de l'intensité B_e du champ \vec{B}_e créé par la bobine et du rapport $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ (on supposera que $B_h < B_e$).
- Application numérique en un point P , défini par $\varphi_P = 50^\circ$, on a mesuré $B_e = 100 \mu\text{T}$ et $\frac{\tau_1}{\tau_2} = 0,78$. Calculer B_h .

★★ 5- Lignes de champ dipolaire

En deux points voisins O_1 et O_2 de l'axe sont placés deux dipôles magnétiques $-\vec{m}$ et \vec{m} de même direction que l'axe Ox . On posera $\overrightarrow{O_1O_2} = 2a\vec{e}_x$.



1. Exprimer les composantes radiale et orthoradiale du champ magnétique $\vec{B}(r, \theta)$.
2. Trouver l'équation des lignes de champ et les tracer.

On rappelle les composantes radiale et orthoradiale du champ $\vec{B}(M)$ produit par un dipôle magnétique situé en O , de direction \vec{e}_x , en un point M très éloigné :

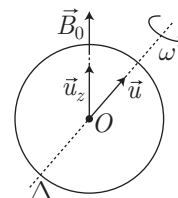
$$B_r = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \text{ et } B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r^3}$$

★ 6- Sphère chargée en rotation

Une sphère isolante de rayon a , de masse M , possède une charge $-e$ répartie uniformément en surface. Dans un référentiel \mathcal{R} , elle tourne à la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante autour de l'un de ses diamètres (Δ, \vec{u}) .

1. On la plonge dans un champ magnétique. Déterminer les efforts qu'elle subit.
2. Décrire son mouvement dans l'hypothèse où ω est assez grand, c'est-à-dire que son moment cinétique n'est dû qu'à sa rotation propre et peut s'écrire :

$$\vec{\sigma}_0 = J_\Delta \vec{\omega} \text{ où } J_\Delta = \frac{2}{5} Ma^2 \text{ (sphère pleine)}$$

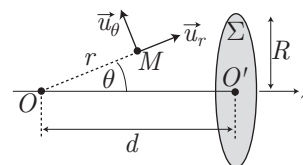


★★ 7- Flux d'un champ dipolaire

Un dipôle magnétique de moment $\vec{m} = m\vec{u}_z$, placé en O , produit en tout point de l'espace un champ magnétique de composantes :

$$B_r = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{2 \cos \theta}{r^3} \text{ et } B_\theta = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \times \frac{\sin \theta}{r^3}$$

Déterminer le flux de \vec{B} à travers la surface Σ d'un disque de rayon R , de centre O' tel que $OO' = d$.



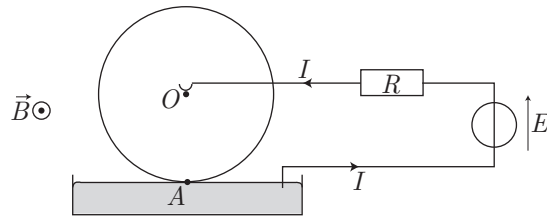
ÉLECTROMAGNÉTISME

ÉQUATIONS DE MAXWELL - INDUCTION

1- Roue de Barlow

Une roue métallique en forme de disque plan, de rayon a , tourne autour de son axe fixe horizontal Oz à la vitesse angulaire ω constante, dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme et constant porté par Oz .

Le centre O et le bord inférieur A de la roue sont reliés, par un frotteur en O et un contact au mercure en A , à un circuit électrique.



1. Déterminer le moment en O des efforts de Laplace qui agissent sur le disque, en fonction de I , B et a . On considérera que le courant suit, dans la roue, le rayon OA .
2. Montrer que le résultat précédent n'est pas modifié si, dans la roue, le courant suit des lignes de courant quelconques, passant par O et A .
3. Calculer la force électromotrice qui apparaît entre O et A en fonction de B , a et ω

On considère maintenant la roue reliée, par l'intermédiaire d'une résistance R , à un générateur de tension continue de f.é.m. E ; on appelle L l'inductance propre de cet ensemble. La roue est, de plus, soumise à un couple moteur et à un couple de frottement donnés par :

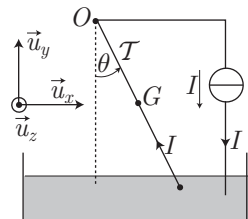
$$\vec{\Gamma}_m = \Gamma_m \vec{u}_z \text{ et } \vec{\Gamma}_f = -\lambda\omega \vec{u}_z \text{ (}\Gamma_m \text{ et } \lambda \text{ constantes positives).}$$

4. Établir les équations électrique et mécanique du circuit. On appellera J le moment d'inertie du système par rapport à l'axe Oz .
5. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant I .
6. Montrer qu'en régime permanent et en l'absence de f.é.m., ce dispositif est un générateur de courant continu, réglable au moyen du couple moteur appliqué.

2- Mouvement d'un pendule

Un pendule pesant est constitué d'une tige homogène \mathcal{T} de longueur a et de masse m , plongée dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g \vec{u}_y$ et dans le champ magnétique constant $\vec{B} = B \vec{u}_z$. Une source de courant impose le passage d'un courant I constant dans \mathcal{T} , libre de tourner sans frottements autour de (O, \vec{u}_z) d'un angle θ mesuré par rapport à la verticale.

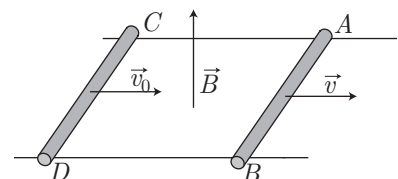
1. Trouver l'expression θ_e de θ à l'équilibre, en fonction de I , B , a , g et m .
2. \mathcal{T} est légèrement écarté de sa position d'équilibre. Quelle est la période des oscillations ?



On rappelle que le moment d'inertie de \mathcal{T} par rapport à l'axe (O, \vec{u}_z) vaut $\frac{ma^2}{3}$.

3- Rails de Laplace

Deux tiges AB et CD identiques, de résistance totale R et de masse m chacune, peuvent glisser sans frottements sur les rails parfaitement conducteurs, parallèles et distants de a . L'ensemble est soumis à un champ magnétique \vec{B} perpendiculaire au plan des rails et uniforme. Ce système est initialement au repos. À partir de l'instant $t = 0$, un opérateur déplace la tige CD à une vitesse constante \vec{v}_0 .



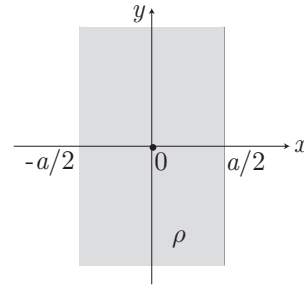
1. Déterminer la vitesse \vec{v} de la tige AB .
2. Faire un bilan d'énergie

4- Théorèmes de Gauss

Une plaque d'épaisseur a , infiniment longue en y et en z , est chargée uniformément par ρ .

Déterminer le champ électrique \vec{E} dans l'espace :

1. d'abord en utilisant le théorème de Gauss.
2. puis en utilisant l'équation de Maxwell-Gauss.

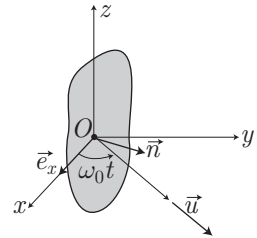


5- Induction magnétique

Une spire plane, de surface S , de résistance R , peut tourner autour de l'axe Oz .

Elle est soumise à un champ magnétique tournant $\vec{B}_0(t) = B_0 \vec{u}(t)$, où $\vec{u}(t)$ est un vecteur perpendiculaire à Oz : $(\vec{e}_x, \vec{u}) = \omega_0 t$.

On suppose que la spire est animée d'un mouvement de rotation uniforme à la vitesse angulaire constante ω ; on pose donc : $(\vec{e}_x, \vec{n}) = \omega t + \beta$. Déterminer la moyenne dans le temps du moment, selon Oz , des forces de Laplace s'exerçant sur la spire.

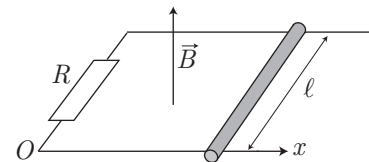


6- Rails de Laplace

Un circuit est constitué de deux rails rectilignes, parallèles, horizontaux, de résistance négligeable et dont l'écartement est ℓ . Ces rails sont reliés, à l'une de leurs extrémités, par une résistance R . Une barre parfaitement conductrice, de masse m , peut glisser sans frottements sur les deux rails. L'ensemble se trouve plongé dans un champ magnétique uniforme et vertical \vec{B} .

Pour $t = 0$, la barre, placée en $x = 0$, est lancée à la vitesse $\dot{x}_0 = v_0$ puis elle est abandonnée à elle-même.

1. Écrire l'équation du mouvement de la barre. En déduire $v = \dot{x}$ en fonction du temps.
2. Que devient l'énergie cinétique initiale de la barre ?

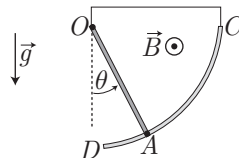


7- Pendule vertical

Une tige homogène OA , de longueur a et de masse m , est mobile sans frottements autour d'un axe horizontal passant par O , dans le champ de gravitation \vec{g} .

Le moment d'inertie de cette tige par rapport à cet axe vaut $J = \frac{1}{3} ma^2$.

1. Déterminer la pulsation ω_0 des petites oscillations de OA .
2. L'extrémité de A glisse sans frottements sur un profil cylindrique (CD) qui, avec OA et un fil, constitue un circuit C dont OA est la seule portion de résistance R non négligeable. Un champ magnétostatique uniforme \vec{B} , normal à C , règne dans la région où oscille OA .

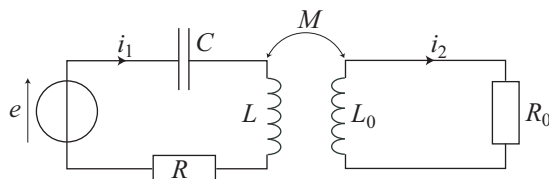


En négligeant le champ propre de C devant le champ extérieur \vec{B} , établir une équation différentielle du second ordre en $\theta = (\vec{g}, \vec{OA})$ caractéristique des petites oscillations de OA .

À quelle valeur B_0 , B doit-il être supérieur pour que OA , écarté de sa position d'équilibre, y revienne sans osciller ? On exprimera B_0 en fonction de ω_0 , a , m et R .

8- Induction mutuelle

Pour le circuit ci-dessous, alimenté en régime sinusoïdal permanent, on donne $e = E \cos(\omega t)$ et on note M le coefficient d'inductance mutuelle :



1. Donner les équations pour les deux circuits, en mettant l'intensité sous forme complexe et en négligeant la résistance des bobines.
2. On suppose $R_0 \gg L_0 \omega$. Montrer que le deuxième circuit peut être remplacé par une résistance qui se retrouvera dans le premier et déterminer cette résistance.

9- Haut-parleur

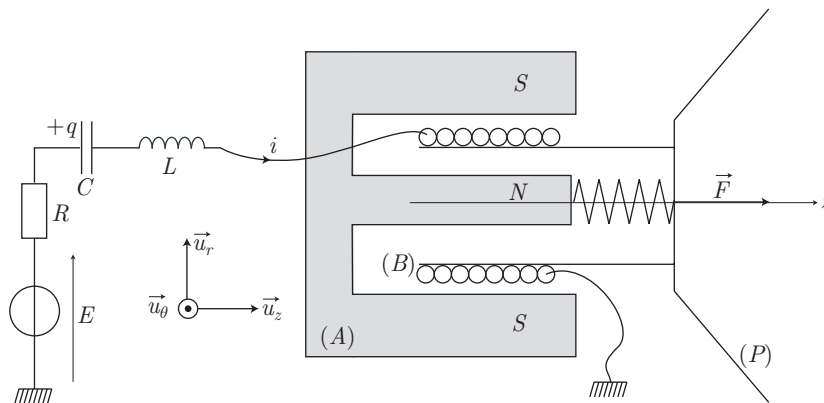
La figure ci-dessous présente un dispositif pouvant servir aussi bien de haut-parleur que de microphone.

(A) est un aimant permanent possédant une symétrie de révolution d'axe Oz . Dans son entrefer règne un champ magnétique radial, dans la région où se déplace le bobinage (B) solidaire du pavillon (P). Ce champ s'écrit, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = B \vec{u}_r$$

(P) est un système de masse totale m , susceptible de se déplacer le long de Oz ; il peut être mis en mouvement de translation par l'action d'une force extérieure $F \vec{u}_z$. Il subit, en outre, des forces dissipatives de somme $-h \dot{z} \vec{u}_z$, des forces de rappel de somme $-kz \vec{u}_z$, exercée par un système de ressorts, ainsi que des forces de Laplace de somme \vec{f} , exercées par (B). Ce dernier constitué d'une longueur totale de fil ℓ , transporte un courant d'intensité i . Négligeant l'hélicité de (B), on admet que chaque élément de fil est représentable, en coordonnées cylindriques, par :

$$d\vec{\ell} = d\ell \vec{u}_\theta$$



(B) est alimenté par une source de tension E à travers un circuit dont on note R , L et C les résistance, inductance et capacité totales (c'est-à-dire relatives à l'ensemble du circuit, (B) compris).

1. Exprimer \vec{f} en fonction de $i = \dot{q}$, B et ℓ . En déduire l'équation différentielle (M) vérifiée par $z(t)$, qui traduit le comportement mécanique du système.
2. On admettra que la fém créée dans (B), consécutivement à son déplacement, vaut $e = vB\ell$. En déduire l'équation différentielle (E) vérifiée par la fonction $q(t)$ et traduisant le comportement électrique du système.
3. Effectuer la combinaison $(M) \times v + (E) \times i$ et mettre celle-ci sous la forme :

$$\frac{dU}{dt} = Fv + Ei - Ri^2 - hv^2 \quad (1)$$

U étant une fonction que l'on explicitera et dont on donnera l'interprétation énergétique ainsi que celle de tous les termes de (1).

4. On suppose un régime sinusoïdal forcé de pulsation ω de toutes les grandeurs précédentes. En introduisant, dans une notation complexe en $e^{j\omega t}$, les grandeurs dont on donnera la signification :

$$\underline{Z} = R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \quad \underline{\zeta} = h + j \left(m\omega - \frac{k}{\omega} \right)$$

écrire les équations (M') et (E') qui relient les représentations complexes de v , i , F et E .

5. Dans le fonctionnement en *haut-parleur*, F est nul, l'énergie du système provenant de la source de tension E .

La réponse du système est alors caractérisée par une relation $\underline{v}(i)$ que l'on explicitera en notation complexe, ainsi que $\underline{i}(E)$.

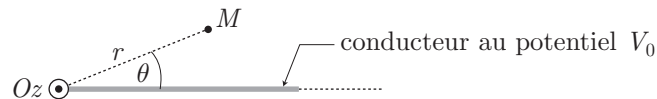
Expliquer pourquoi le système peut, pour des valeurs convenables de ω , être une source sonore.

6. Dans le fonctionnement en *microphone*, E est nul, l'énergie du système provenant de la force sinusoïdale F qui traduit l'action sur (P) des forces de pression d'une onde sonore.

La réponse du système est alors caractérisée par la fonction $\underline{i}(F)$, que l'on explicitera à l'aide des notations précédentes.

10- Potentiel produit par un demi-plan

On assimile un conducteur mince modélisé à un demi-plan dont l'épaisseur sera considérée comme nulle.



On propose de déterminer le potentiel V et le champ électrostatique \vec{E} dans l'espace vide du demi-plan.

Le potentiel du conducteur est noté V_0 .

On travaille en coordonnées cylindriques ($r \geq 0, \theta, z$). Le demi-plan correspond à $\theta = 0$ (ou 2π).

On cherche le potentiel au voisinage de l'axe Oz sous la forme :

$$V(r, z, \theta) = V_0 + f(r) \times g(\theta)$$

où f et g sont des fonctions de r et θ telles que le potentiel V tend vers V_0 quand on se rapproche du conducteur.

1. Sur un dessin, proposer l'allure qualitative des équipotentielles dans un plan $z = \text{cte}$. En déduire qualitativement le tracé de quelques lignes de champ. Pour ce schéma, on prendra $V_0 > 0$.
2. Rappeler les deux équations de Maxwell de l'électrostatique. Préciser leur nom.
3. En utilisant la forme proposée pour le potentiel ci-avant, exprimer E_r, E_θ, E_z (composantes du champ électrostatique en coordonnées cylindriques) en faisant intervenir f et g .
4. Déduire de l'une des équations de Maxwell l'équation qui relie nécessairement r, f, f', f'', g, g'' . Quelle équation (donner son nom) pour le potentiel électrostatique vient-on de retrouver ici (écrite ici en coordonnées cylindriques) pour le problème étudié?
5. Mettre cette relation obtenue sous la forme : $H(r) = K(\theta)$.
6. On veut déterminer $g(\theta)$. Préciser les conditions aux limites pour $g(\theta)$ en $\theta = 0$ et en $\theta = 2\pi$. Étudier la solution selon le signe de K et en déduire le signe à adopter pour K . Déterminer la forme possible pour $g(\theta)$ (infinité de solutions possibles). On indique alors que l'équipotentielle V_0 doit nécessairement être limitée au seul demi-plan. Finalement, exprimer $g(\theta)$ à une constante multiplicative près et tracer $g(\theta)$ en fonction de θ .
7. Expliciter alors l'équation vérifiée par $f(r)$ et en chercher des solutions sous la forme : $f(r) = r^\alpha$. Après avoir justifié que $f(0) = 0$, choisir la valeur convenable pour α et donner l'expression du potentiel (avec une constante arbitraire).

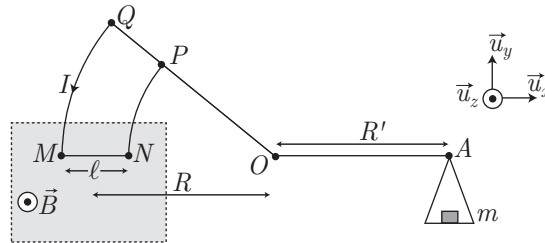
On donne, en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{e}_z \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

11- Balance de Cotton (induction)

Une balance de Cotton, réservée aujourd'hui au seul usage pédagogique, permet de mesurer un champ magnétique dans une zone où ce dernier est pratiquement uniforme, par exemple dans l'entrefer d'un aimant. Le circuit mobile est un circuit plan constitué d'une portion rectiligne MN de longueur ℓ , comprise entre deux arcs conducteurs MQ et NP . Les centres de courbure de MQ et NP coïncident avec l'intersection O du plan du circuit et de l'axe de rotation.

L'équilibre de la balance est réalisé à l'aide de masses marquées que l'on place sur le plateau accroché à l'extrémité A du fléau.



1. Évaluer les actions de Laplace s'exerçant sur les brins du circuit mobile, lorsque celui-ci est plongé dans un champ magnétique \vec{B} qui lui est orthogonal.
2. Écrire la condition d'équilibre.
3. Calculer B .

Données :

$$R = R' = 30 \text{ cm} \quad \ell = 20 \text{ cm} \quad I = 5,0 \text{ A} \quad m = 2,0 \text{ g} \quad g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$$

★ 12- Manipulation des équations de Maxwell

On suppose que règne dans l'espace le champ électromagnétique :

$$\vec{E}(M, t) = f(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_x \text{ et } \vec{B}(M, t) = g(z) e^{-t/\tau} \vec{e}_y$$

où τ est une constante de temps et f, g deux fonctions que l'on cherchera à déterminer. L'espace est vide de charge et de courant dans cet exercice.

1. Vérifier que la forme de ces deux champs est compatible avec les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Thomson.
2. Montrer que l'équation de Maxwell-Faraday impose une relation entre $g(z)$ et $f'(z)$.
3. Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère impose une relation entre $g'(z)$ et $f(z)$.
4. En déduire une équation différentielle vérifiée par f .
La résoudre en supposant que $\vec{E}(0, 0) = E_0 \vec{e}_x$ et que le champ électrique est nul en tout instant à l'infini.
5. En déduire l'expression complète du champ électromagnétique.

★★ 13- Diode à vide

On considère la diode plane de la figure ci-contre.

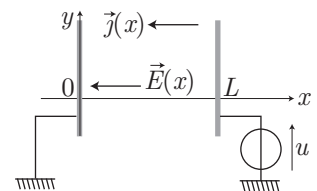
Une cathode plane, située dans le plan $x = 0$, émet des électrons (charge $-e$, masse m) à raison de N électrons par unité de surface et de temps.

Ces électrons sont émis sans vitesse initiale. Ils sont accélérés par le champ électrique existant entre la cathode et l'anode plane ($x = L$) portée au potentiel $u > 0$ par rapport à la cathode.

On considérera les électrons comme non relativistes et l'on suppose que toutes les variables du problème ne dépendent que de l'abscisse x (pas d'effet de bord).

On considérera les valeurs algébriques, selon l'axe Ox de la figure, des grandeurs physiques suivantes :

$$\text{Champ électrique } E(x) \quad \text{Densité de courant } j(x) \quad \text{Vitesse des électrons } v(x)$$



On remarquera qu'avec ces conventions, $j(x)$ est négatif pour des électrons se déplaçant vers la droite.

1. Montrer qu'en régime permanent, la densité $j(x)$ du courant traversant la diode est indépendante de x ; on posera $j(x) = J_0$ que l'on exprimera en fonction de e et N .

2. Quel est l'ensemble des relations (différentielles ou non) vérifiées par $v(x)$, $\rho(x)$, $V(x)$ où $\rho(x)$ et $V(x)$ représentent respectivement la densité volumique de charge et le potentiel électrostatique régnant en tout point de l'espace inter-électrodes.
3. Montrer que $V(x)$ satisfait à une équation différentielle de la forme $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{C}{\sqrt{V}}$ où C est une constante que l'on exprimera en fonction de J_0 , ε_0 , q et m .
4. On suppose que le champ électrique existant dans l'espace inter-électrodes s'annule en $x = 0$. Montrer alors que la caractéristique $J_0 = f(u)$ de la diode à vide peut se mettre sous la forme : $J_0 = B \times \frac{u^{3/2}}{L^2}$, B étant une constante négative dont on calculera la valeur numérique dans le système MKSA.
On donne : $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9.10^9$ SI; $e = 1,6.10^{-19}$ C; $m = 9.10^{-31}$ kg.
5. Ces électrons émis arrivent sur l'anode avec une vitesse v_f . Montrer que $v(x)$ vérifie la relation $\frac{v(x)}{v_f} = \left(\frac{x}{L}\right)^n$, dans laquelle on déterminera l'exposant n .
6. Exprimer le temps de transit inter-électrodes T des électrons en fonction de la tension u appliquée.
Application numérique : on donne $u = 100$ V et $L = 1$ cm. Calculer T et v_f .

★★ 14- Équation de Laplace

Le système représenté ci-contre est infini dans les directions $y > 0$ et zz' .

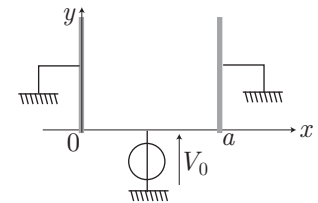
Les plaques $x = 0$ et $x = a$ sont portées au potentiel nul ($V = 0$).

La plaque définie par $y = 0$ et $0 < x < a$ est portée au potentiel V_0 .

Déterminer la fonction potentiel $V(x, y, z)$ dans le domaine \mathcal{D} limité par les trois plaques.

Le domaine \mathcal{D} est vide de charge.

On prendra $\lim_{y \rightarrow \infty} V = 0$.



★ 15- Sphère radioactive

On considère une sphère (\mathcal{S}) radioactive de rayon a , initialement neutre, homogène, qui émet par désintégration radioactive des particules chargées.

On note $Q(t)$ sa charge à l'instant t .

Cette émission se traduit par un courant de charge. On suppose le flux de particules isotrope et suffisamment intense pour justifier une description continue volumique.

On se place en régime permanent (la charge q située entre \mathcal{S} et une sphère de centre O et de rayon r est constante; il n'y a pas accumulation de charge).

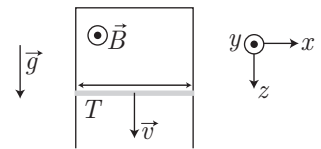
1. Exprimer la charge δq qui traverse, pendant dt , de l'intérieur vers l'extérieur, une sphère de centre O et de rayon $r > a$. En déduire le vecteur densité de courant $\vec{j}(r, t)$ en fonction de r et de $\dot{Q} = \frac{dQ}{dt}$.
2. Montrer que l'expression obtenue pour \vec{j} est compatible avec un régime permanent.
3. Exprimer le champ électrique créé par une telle distribution en tout point extérieur de la sphère.
4. Montrer que le théorème d'Ampère ne permet pas de décrire un tel système.
5. Montrer que l'équation de Maxwell-Ampère est, en revanche, vérifiée.

On donne l'expression de la divergence d'un vecteur \vec{A} en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

★ 16- Rails de Laplace (induction)

Une barre horizontale T de longueur a , de masse m et de résistance R , tombe dans un champ de pesanteur \vec{g} en glissant sans frottements le long d'un cadre métallique de résistance négligeable et de même largeur a . Un aimant permanent crée un champ magnétique \vec{B} que l'on supposera uniforme et normal au plan qui contient le cadre et la barre.

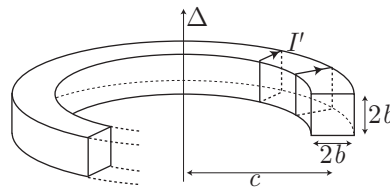


- On néglige le champ magnétique propre du circuit devant le champ créé par l'aimant. Déterminer l'expression de la vitesse de la barre en fonction du temps.
Exprimer en particulier la vitesse limite de ce mouvement et sa constante de temps en fonction de B , de μ (masse volumique de la barre) et de ρ (résistivité électrique de la barre).
- Montrer que la puissance de la force de pesanteur subie par la barre est égale à la somme de la puissance perdue par effet Joule et de la puissance cinétique (variation d'énergie cinétique par unité de temps). Que devient ce bilan d'énergie lorsque le régime stationnaire est atteint ?

★ 17- Solénoïde torique (induction)

Un cylindre conducteur (C), infiniment long, de section droite circulaire d'aire $s = \pi a^2$ et d'axe $z'z$, est constitué d'un matériau de conductivité γ . Il est le siège d'un courant électrique continu d'intensité I , de densité volumique \vec{j} parallèle à $z'z$.

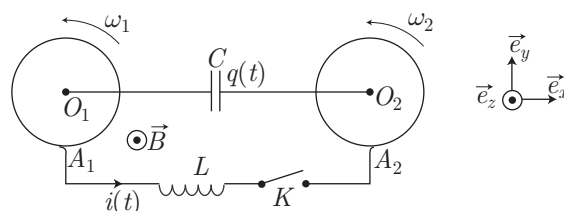
- Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M situé à la distance ρ de l'axe $z'z$.
- Une surface torique, de section carrée, est engendrée par un carré de côté $2b$ tournant autour d'un axe Δ de son plan, parallèle à deux de ses côtés. On réalise un solide torique (S) en enroulant un fil conducteur sur la surface précédente, de manière à constituer une seule couche de N spires jointives planes. Soit c le rayon moyen en ces spires. Un courant d'intensité I' circule dans les spires (orienté de l'intérieur vers l'extérieur sur la surface supérieure du tore).



- Calculer le champ magnétique $B'(M)$ en tout point M situé à distance ρ' de l'axe Δ , à l'intérieur et à l'extérieur de S .
 - Calculer le flux ϕ' de ce champ à travers S . En déduire son inductance propre $L' = \frac{\phi'}{I'}$.
- On considère le système formé par le cylindre conducteur (C) de longueur infinie, parcouru par un courant d'intensité I et le solénoïde (S) dont on réunit maintenant les extrémités entre elles ($I' \neq 0$) de manière à constituer un système fermé. Les axes $z'z$ et Δ sont confondus et $a < c - b$. Calculer le flux Φ du champ \vec{B} à travers (S) et en déduire l'inductance mutuelle $M = \frac{\Phi}{I}$.
 - L'inductance mutuelle peut être calculée indifféremment en considérant le flux envoyé par (C) à travers (S) ou par (S) à travers (C). Retrouver le résultat précédent, bien que le flux créé par le solénoïde soit nul en tout point du cylindre.

★★ 18- Roues de Barlow couplées (induction)

Deux roues de Barlow de rayon R , de masse m et contenues dans un plan O_1xy , sont placées dans un champ magnétique uniforme dirigé selon O_1z : $\vec{B} = B \vec{e}_z$. Leurs centres O_1 et O_2 sont reliés aux armatures d'un condensateur de capacité C et on place une bobine de coefficient d'autoinductance L entre leurs périmètres respectifs.



On posera :

$$\Omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \Omega_1 = \frac{BR}{\sqrt{mL}} \quad \Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + \Omega_1^2}$$

On note $i(t)$ le courant qui parcourt un tel circuit, $\omega_1(t)\vec{e}_z$ et $\omega_2(t)\vec{e}_z$ les vitesses angulaires de rotation des deux roues de Barlow et $q(t)$ la charge de l'armature du condensateur, reliée à O_2 . On choisit comme sens positif du courant le sens de rotation de l'axe Oz . Le moment d'inertie d'un cylindre par rapport à son axe de révolution vaut $J = \frac{1}{2}mR^2$.

1. Déterminer les équations différentielles en $i(t)$, $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$ lorsque l'interrupteur K est fermé.
2. À l'instant $t = 0$ où l'opérateur ferme l'interrupteur K , on suppose que $q(0) = 0$, $\omega_1(0) = \omega_0$, $\omega_2(0) = 0$. Donner les expressions de $\omega_1(t)$ et $\omega_2(t)$.

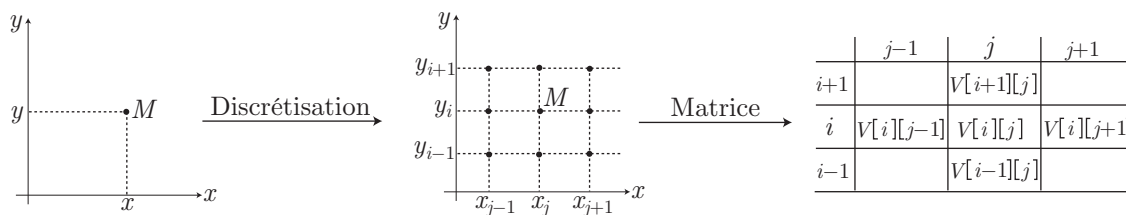
ÉLECTROSTATIQUE

ÉQUATION DE LAPLACE

On cherche ici à développer un script qui permettrait d'évaluer numériquement le potentiel $V(x, y)$, solution de l'équation de Laplace :

$$\Delta V = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

Pour y parvenir, nous adoptons le modèle suivant : la fonction $V(x, y)$ sera discrétisée, c'est-à-dire que les variables x et y seront supposées varier par incréments $dx = 1$ et $dy = 1$ (et non de manière continue), ce qui permettra de remplacer la fonction $V(x, y)$ par une matrice $V[i][j]$, dans laquelle se trouvent consignées les valeurs de V dans la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne :



1. Considérons la fonction $V(x, y)$ au voisinage du point $M(x_0, y_0)$. Écrire les développements limités d'ordre 2 de $V(x_0 \pm dx, y_0)$ et de $V(x_0, y_0 \pm dy)$.

a- En déduire qu'en posant $dx = dy = 1$, le Laplacien de V vérifie :

$$\Delta V \simeq V(x_0 + dx, y_0) + V(x_0 - dx, y_0) + V(x_0, y_0 + dy) + V(x_0, y_0 - dy) - 4V(x_0, y_0)$$

- b- Désormais, la fonction $V(x, y)$ sera remplacée par une matrice (encore appelée ici *tableau*). Montrer que l'élément $V[i][j]$ de ce tableau (à la ligne i et à la colonne j), vérifiant l'équation de Laplace (2), est donné par la relation :

$$V[i][j] = \frac{V[i-1][j] + V[i+1][j] + V[i][j-1] + V[i][j+1]}{4} \quad (3)$$

Ainsi, pour calculer l'élément $V[i][j]$, il suffira de connaître les quatre autres éléments qui l'encadrent dans le tableau.

L'objectif du script ci-dessous est la mise en œuvre de cette méthode.

2. Dans ce script :

- on définit au préalable deux tableaux de dimension $N \times N$ (par exemple 60×60) ; chaque élément du tableau `tab[i][j]` contient initialement une valeur de potentiel (arbitrairement 10 partout et 0 aux bords) et une valeur `B[i][j]` indique le statut de `tab[i][j]` : `B[i][j]=1` lorsque `tab[i][j]` est une condition limite (donc immuable) et `B[i][j]=0` si `tab[i][j]` peut être modifié par la relation (3) :

```

08 def inittab():# Donne la valeur de V[i][j]=tab[i][j] et son statut
09     B=np.zeros((N,N),bool)# B[i][j]=0 partout
10     tab=np.zeros((N,N))+10# tab[i][j]=10 partout
11     B[:,0]=1# B=1 au bord de gauche
12     B[:,N-1]=1# B=1 au bord de droite
13     B[0,:]=1# B=1 au bord supérieur
14     B[N-1,:]=1# B=1 au bord inférieur
15
16     tab[:,0]=V0# Potentiel au bord de gauche
17     tab[:,N-1]=V0# Potentiel au bord de droite
18     tab[0,:]=V0# Potentiel au bord supérieur
19     tab[N-1,:]=V0# Potentiel au bord inférieur
20     return (tab,B)

```

- la formule (3) sera appliquée à chaque élément `tab[i][j]` du tableau `tab`, sauf aux éléments immuables repérés par `B[i][j]=1`. À chaque itération, on calcule l'écart maximum e_{\max} entre le nouveau tableau (appelé `temp`) et le tableau `tab` avant l'opération (3). La fonction `itera(tab)` retourne ainsi le nouveau tableau de potentiel et son écart par rapport au précédent ¹

1. L'instruction `temp=tab.copy()` permet de garder les matrices `temp` et `tab` indépendantes. En utilisant l'instruction `temp=tab`, toute modification d'une matrice se reporterait sur l'autre matrice et l'écart `temp-tab` serait toujours nul !

```

22| def itera(tab):#
23|     ecart=0
24|     temp=tab.copy()# tab ne sera pas affecté par temp
25|     for i in range(N):
26|         for j in range(N):
27|             if B[i,j]==0:
28|                 temp[i][j]=(tab[i-1][j]+tab[i+1][j]+tab[i][j-1]+tab[i]
29| [j+1])/4
30|                 ecart=max(ecart,abs(temp[i][j]-tab[i][j]))
31|     return (temp,ecart)

```

- l'opération précédente est recommencée jusqu'à ce que e_{\max} soit inférieur à une valeur ϵ (choisie ici arbitrairement égale à 0,3 : compromis entre précision et temps de calcul) :

```

37| while (itera(pot)[1])>eps:# La récurrence est appliquée jusqu'à ce que
38|     e<eps
39|     pot=itera(pot)[0]

```

Dans sa configuration de base, le script s'écrit ainsi :

```

1  from math import* import matplotlib.pyplot as plt import numpy as np
2
3  V0=0 V1=200
4
5  def inittab():# Donne la valeur de V[i][j]=tab[i][j] et son statut
6      B=np.zeros((N,N),bool)# B[i][j]=0 partout
7      tab=np.zeros((N,N))+10# tab[i][j]=10 partout
8      B[:,0]=1# B=1 au bord de gauche de la matrice
9      B[:,N-1]=1# B=1 au bord de droite
10     B[0,:]=1# B=1 au bord supérieur
11     B[N-1,:]=1# B=1 au bord inférieur
12     tab[:,0]=V0# Potentiel au bord de gauche
13     tab[:,N-1]=V0# Potentiel au bord de droite
14     tab[0,:]=V0# Potentiel au bord supérieur
15     tab[N-1,:]=V0# Potentiel au bord inférieur
16     return (tab,B)
17
18     def itera(tab):
19         ecart=0
20         temp=tab.copy()# tab ne sera pas affecté par temp
21         for i in range(N):
22             for j in range(N):
23                 if B[i,j]==0:
24                     temp[i][j]=(tab[i-1][j]+tab[i+1][j]+tab[i][j-1]+tab[i][j+1])/4
25                     ecart=max(ecart,abs(temp[i][j]-tab[i][j]))
26         return (temp,ecart)
27
28     N=60# Dimensions du tableau eps=0.3# Ecart maximum entre deux itérations pot=inittab()[0]# Le
29     potentiel prend sa valeur initiale B=inittab()[1]# Les
30     bords sont définis dans la matrice B
31
32     while (itera(pot)[1])>eps:# La récurrence est appliquée jusqu'à ce que e<eps
33         pot=itera(pot)[0]
34
35     def graphe(B,f,a=0,nb_equipot=25):#Représentation de 25 équipotentielles
36         N,N=B.shape# Les bords du domaine apparaissent comme un cadre noir
37         plt.figure()
38         plt.imshow(B,origin='lower',cmap='binary',interpolation='nearest')
39         if (a==1):# Si a=1 les niveaux de potentiel sont colorés
40             plt.imshow(f,origin='lower')
41             plt.colorbar()
42         x=np.linspace(0,N-1,N)# L'axe x contient N valeurs (cases)
43         y=np.linspace(0,N-1,N)# L'axe y contient N valeurs
44         cont=plt.contour(y,x,f,nb_equipot,colors='k')# Trace les équipotentielles
45         plt.clabel(cont,fmt='%1.1f')# fmt contrôle l'affichage sur les courbes
46     plt.show() graphe(B,pot)

```

- a- Rajouter au script précédent les instructions permettant de représenter les équipotentielles générées par une charge ponctuelle de potentiel $V_1 = 200$ V, située au centre de la figure (*cf.* figure 1).

- b- Modifier le script de manière à représenter les équipotentielles générées par un dipôle électrostatique (*cf.* figure 2).

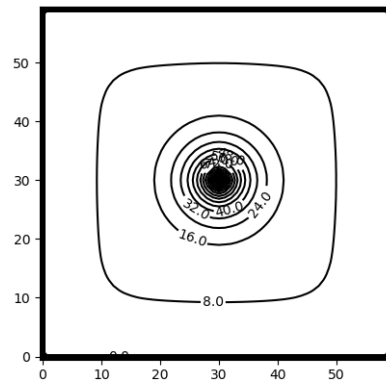


Figure 1

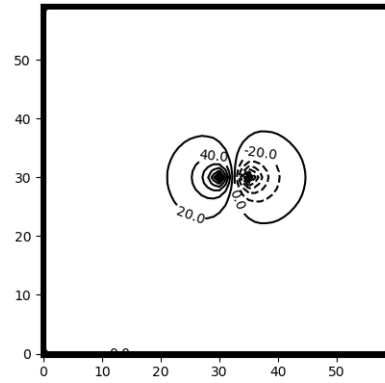


Figure 2

- c- Modifier à nouveau le script afin de représenter les équipotentielles générées par un condensateur (*cf.* figure 3).

- d- Enfin, ajouter les modifications nécessaires à la représentation de l'effet de pointe (*cf.* figure 4).

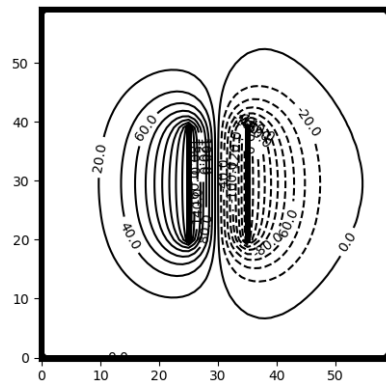


Figure 3

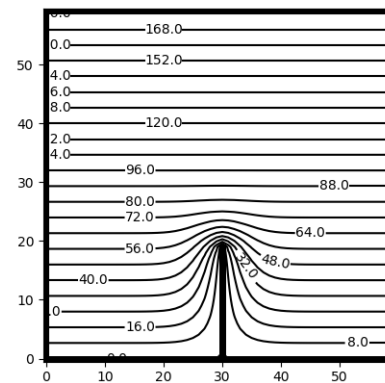


Figure 4

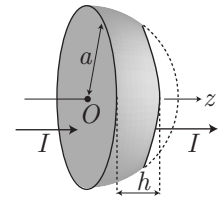
ÉLECTROMAGNÉTISME

CONDUCTEUR OHMIQUE

1- Conducteur sphérique

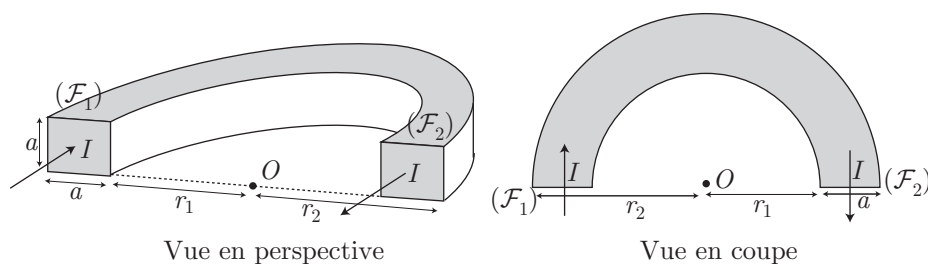
Un conducteur ohmique, de conductivité σ , a la forme d'une demi-sphère de rayon a , tronquée, de hauteur h (cf. figure ci-contre). Le courant électrique I traverse ce conducteur selon la direction de l'axe Oz .

1. Pour calculer la résistance électrique de ce conducteur, on peut le décomposer (par la pensée) en conducteurs cylindriques élémentaires de hauteur dz et de rayons $r = r(z)$. Quelle est l'expression de la résistance élémentaire δR d'un tel conducteur, en fonction de a , σ , z et dz .
2. En déduire l'expression de la résistance électrique totale R du conducteur, en fonction de a , σ , h .



2- Conducteur en fer à cheval

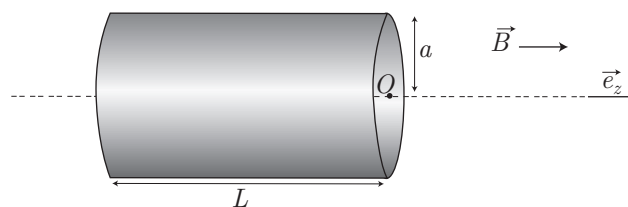
Un conducteur ohmique, de conductivité uniforme σ , a la forme d'un fer à cheval semi-circulaire, de section carrée de côté a :



Le courant électrique traverse ce conducteur dans sa longueur en reliant ses faces carrées (\mathcal{F}_1) et (\mathcal{F}_2) . Trouver l'expression de la résistance électrique R de ce conducteur (aucune hypothèse n'est formulée sur a), en fonction de σ , a , r_1 et r_2 .

3- Courants de Foucault

On place un cylindre de rayon a , de longueur L , de section $S = \pi a^2$, d'axe (Oz) et de conductivité σ dans un champ magnétique uniforme :



$$\vec{B} = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

1. Justifier qu'il va apparaître dans le milieu un champ électrique \vec{E} .
2. On admet que ce dernier est orthoradial. Pourquoi ?
3. Écrire la loi de Faraday et en déduire l'expression de $\vec{E}(M, t)$ en fonction de B_0 , ω , t , r (distance de M à l'axe du cylindre), pour $r \leq a$.
4. Exprimer la puissance moyenne P_m dissipée par effet Joule dans le cylindre, en fonction de σ , ω , B_0 , L et S .

- On remplace le cylindre par N cylindres de même hauteur L , de section $s = \frac{S}{N}$ (feuilletage axial). Calculer la puissance moyenne P'_1 dissipée dans chaque cylindre et en déduire la puissance P'_m moyenne dissipée dans l'ensemble du dispositif. Conclure.
- On réalise maintenant le grand cylindre en accolant N cylindres élémentaires coaxiaux, de rayon a et de longueur $dz = \frac{L}{N}$ (feuilletage plan). Répondre aux mêmes questions.

4- Four à induction

Un long solénoïde d'axe Oz et de rayon a , parcouru par un courant sinusoïdal de fréquence $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = 50$ Hz, est la source d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_a = \vec{B}_0 e^{-i\omega t}$ où $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$. L'intérieur solénoïde est entièrement occupé par un cylindre métallique \mathcal{C} de conductivité électrique $\sigma = 5 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

- En négligeant, devant \vec{B}_a , le champ produit par les courants induits, déterminer la densité de courant \vec{j} en tout point de \mathcal{C} .
Calculer, en tout point de \mathcal{C} situé à la distance r de Oz , la moyenne temporelle de la densité de puissance Joule dissipée.
Calculer la moyenne spatiale, sur l'ensemble de \mathcal{C} , de la quantité précédente.
Montrer que pour obtenir la fusion d'un métal donné, il faut en principe utiliser un four de rayon assez grand.
- Calculer le champ magnétique \vec{B}_1 engendré par les courants induits calculés précédemment.
Quelle valeur a ne doit pas dépasser pour que l'amplitude de \vec{B}_1 soit en tout point de \mathcal{C} inférieure au dixième de celle de \vec{B}_a ?
- Le calcul de la question 2. montre que l'hypothèse faite en 1. ne vaut pas pour les fours à induction de dimension habituelle et qu'il faut étudier le champ électromagnétique dans \mathcal{C} sans approximation préalable. Montrer que pour un conducteur de forme quelconque, soumis à un champ électromagnétique de dépendance temporelle quelconque, le champ électrique est solution de l'équation différentielle (qu'on ne cherchera pas à résoudre) :

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Donnée : perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ usi.

★ 5- Effet Hall

Une plaque conductrice de largeur a , d'épaisseur b , est traversée dans le sens de la longueur par un courant continu d'intensité I . On suppose que $b \ll a$. La plaque est soumise à un champ magnétique uniforme perpendiculaire à sa surface.

- En raisonnant qualitativement sur une particule mobile de charge q , montrer qu'une différence de potentiel V_H (appelée *tension de Hall*) prend naissance entre deux faces de la plaque, que l'on précisera.
- On désigne par n le nombre de porteurs de charge par unité de volume et par q leur charge.
 - Exprimer la tension de Hall V_H en fonction de I , B , b et de la constante de Hall $R_H = \frac{1}{nq}$.
 - Dans le cas particulier du cuivre, on suppose que chaque atome libère un électron. Calculer R_H .
On donne le nombre d'Avogadro $\mathcal{N} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$; la charge de l'électron $q = -e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; les masses molaire et volumique du cuivre $M = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $\mu = 8,96 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.
 - Lorsque le cuivre est remplacé par un semi-conducteur, on a constaté que l'effet Hall est beaucoup plus intense. Expliquer.
- En l'absence de \vec{B} , la loi d'Ohm s'écrit : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ où \vec{j} est la densité de courant en un point du conducteur.
Montrer qu'en présence de \vec{B} , elle devient : $\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j} + R_H \vec{B} \wedge \vec{j}$.
 - Montrer que les lignes de courant font un angle θ_H avec les lignes de champ. Exprimer θ_H en fonction de R_H , γ et \vec{B} .

★ 6- Magnétorésistance

On considère un conducteur électrique se présentant sous la forme d'une couronne cylindrique d'axe Oz , de hauteur h , délimitée par un cylindre intérieur de rayon r_1 et par un cylindre extérieur de rayon r_2 . À l'aide d'une source de tension, on impose les potentiels $V(r_1) = V_1$ et $V(r_2) = V_2$. On se place en régime permanent et on néglige les effets de bord, ce qui revient à supposer que le comportement de cette couronne est le même que si elle était infiniment haute. L'existence des deux équipotentielle cylindriques permet d'émettre l'hypothèse que le potentiel ne dépend que de r . Ainsi :

$$V = V(r) \quad \Delta V = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV}{dr} \right) \quad \vec{\text{grad}} V = \frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

1. Le conducteur est localement non chargé. Déterminer le potentiel électrique en un point M de ce conducteur. En déduire l'intensité E du champ électrique \vec{E} en ce même point, en fonction de V_1 , V_2 , r_1 , r_2 et r .

La couronne cylindrique est placée dans un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{u}_z$, avec $B > 0$. Le conducteur contient n électrons libres par m^3 . On considère de plus le modèle de Drude dans lequel chaque électron de vitesse \vec{v} est soumis, en plus des forces électromagnétiques, à une force de frottement s'exprimant sous la forme $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$, avec $\lambda > 0$.

2. Pour chaque électron, établir en régime permanent la relation entre \vec{v} , \vec{B} , \vec{E} paramétrée par λ et la charge élémentaire e . En déduire l'expression, dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, des coordonnées de \vec{v} en fonction de e , λ , E et B , puis celles du vecteur densité de courant \vec{j} .
3. Exprimer l'intensité du courant électrique traversant la surface équipotentielle de rayon r . En déduire la résistance électrique R de la couronne, en fonction de e , n , λ , B , h , r_1 et r_2 . On note R_0 la résistance en l'absence de champ magnétique. Exprimer l'écart relatif $\varepsilon = \frac{R - R_0}{R_0}$ en fonction de e , B et λ . Calculer la valeur numérique R_0 puis celle de ε pour $B = 1,0 \text{ mT}$; $r_1 = 1,0 \text{ mm}$; $r_2 = 3,0 \text{ mm}$; $h = 1,0 \text{ mm}$, $n = 1,1 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$ et $\lambda = 1,8 \cdot 10^{27} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

★★ 7- Charge d'une boule

Une boule conductrice, de centre O et de rayon R , porte initialement une charge Q_0 uniformément répartie en surface. Elle est abandonnée dans l'air supposé légèrement conducteur, de conductivité γ .

On admettra que celui-ci suit la loi d'Ohm $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

À l'instant $t = 0$, la boule porte la charge $Q(t)$.

On cherche le champ électromagnétique $\left\{ \vec{E}(M, t); \vec{B}(M, t) \right\}$ en un point M de l'espace repéré par $OM = r$, à une date t supérieure à celle (t_0) à laquelle il a été atteint une première fois par les charges en mouvement ($\rho(M)$ ne dépend plus du temps $t > t_0$).

1. Déterminer $\vec{B}(M, t)$ et $\vec{E}(M, t)$ à l'extérieur de la boule.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $Q(t)$. La résoudre.
3. Calculer de deux façons différentes l'énergie totale dissipée dans le milieu.

★★ 8- Déformation d'un faisceau

Un faisceau cylindrique d'axe Oz et de rayon a , constitué de particules identiques de charge q , toutes animées de la même vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_z$ (faisceau homocinétique), transporte une intensité électrique I répartie uniformément sur sa section.

1. Déterminer les densités de charge et de courant qui décrivent cette distribution, assimilée à un cylindre illimité.
2. En utilisant les coordonnées cylindriques d'axe Oz , montrer que le champ électrique est de la forme $\vec{E} = E(r) \vec{u}_r$ et déterminer $E(r)$.
3. De même, déterminer l'expression du champ magnétique.
4. Vérifier que les deux champs obéissent bien aux équations de Maxwell locales.
5. Vérifier que $\vec{B} = \frac{\vec{v}}{c^2} \wedge \vec{E}$. D'où provient cette équation ?
6. Exprimer la force \vec{F} subie par une particule intérieure au faisceau, en fonction de q , \vec{E} et $\beta = \frac{v}{c}$. Quel est l'effet de cette force sur le faisceau ?
7. Commenter l'affirmation selon laquelle le champ magnétique propre est négligeable pour un système de particules faiblement relativistes. Que peut-on dire pour des particules ultra-relativistes ?

Quels que soient les vecteurs \vec{A} et \vec{B} :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= B \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{B} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) &= \vec{A} \operatorname{div} \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{B} \text{ où } (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{A} = \sum_i B_i \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_j} \end{aligned}$$

On donne, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \psi &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{u}_z \\ \operatorname{div} \vec{A} &= \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A} &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right] \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z \end{aligned}$$

ÉLECTROMAGNÉTISME

ÉNERGIE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

1- Énergie magnétique d'un solénoïde

On considère un solénoïde de volume fini, de section circulaire de rayon R et de longueur $\ell \gg R$. Il comporte n spires par mètre de longueur, parcourues par un courant constant i .

1. Démontrer, à partir des équations de Maxwell, que le champ magnétique est uniforme (de valeur B_i) à l'intérieur du solénoïde et uniforme (de valeur B_e) à l'extérieur.
2. En écrivant l'expression de l'énergie magnétique produite par le solénoïde, conclure que le champ B_e est nul.
3. Calculer le champ B_i .
4. En déduire l'expression de l'inductance linéique Λ du solénoïde, en fonction de n et R .

2- Décharge électrique

Deux sphères métalliques minces S_1 et S_2 , de centre commun O et de rayons r_1 et $r_2 > r_1$, sont séparées par un gaz initialement isolant dont les propriétés électriques peuvent être confondues avec celles du vide.

S_2 est initialement non chargé et S_1 porte la charge Q uniformément répartie sur sa surface. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le gaz devient intantanément un conducteur ohmique de conductivité σ (une telle opération est envisageable, en ionisant le gaz par un « flash » de photons de haute énergie).

1. Décrire qualitativement le phénomène qui se produit ainsi que l'état final du système (c'est-à-dire la répartition de la charge).
2. En analysant les symétries du problème, montrer que le champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ ne peut être qu'identiquement nul.
3. Montrer de même que, \vec{u}_r désignant un vecteur unitaire radial, le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_r$$

4. Examiner toutes les équations de Maxwell et montrer que l'une d'elles fournit une équation différentielle (1) vérifiée par la fonction $E(r, t)$ dans tout l'espace entre les sphères.

Mettre en évidence dans (1) un temps de relaxation τ .

5. En intégrant (1), déterminer $E(r, t)$ pour $r_1 < r < r_2$.
6. Montrer que la densité volumique de charge $\rho(r, t)$ entre les sphères reste nulle tout au long de l'évolution. Que peut-on déduire de la comparaison de ce résultat avec le caractère non nul de la densité de courant $\vec{j}(r, t)$?
7. Déterminer également $E(r, t)$ dans les régions $r < r_1$ et $r > r_2$.

8. Donner l'expression de la puissance volumique $p(r, t) = \frac{\delta P}{d\tau}$ dissipée par effet Joule dans l'espace entre les sphères.

En intégrant cette expression, calculer l'énergie W_J dissipée au cours de l'évolution du système.

9. Calculer les énergies W_0 et W_1 contenues dans l'ensemble du champ électromagnétique, respectivement dans l'état initial du système et dans son état final.

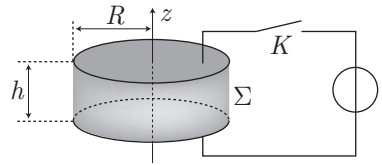
Conclure en proposant un bilan énergétique.

On rappelle l'expression de la divergence d'un champ vectoriel \vec{A} , en coordonnées sphériques :

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

3- Condensateur

Un condensateur plan, d'épaisseur h , est constitué de deux plaques circulaires de rayon R . Initialement déchargé, il est relié à un générateur via un interrupteur K .



À l'instant $t = 0$, un opérateur ferme l'interrupteur. Le condensateur se charge alors et atteint en t_0 un nouvel équilibre. Entre les instants 0 et t_0 , le champ électrique reste uniforme entre les deux armatures et varie suivant la loi :

$$\vec{E} = E(t) \vec{e}_z$$

Le champ magnétique induit par la variation de $E(t)$ est supposé orthoradial et à symétrie cylindrique. Les lignes de champ sont circulaires, centrées sur l'axe de symétrie du condensateur Oz et contenues dans des plans perpendiculaires à Oz .

1. Déterminer l'énergie qui, entre les instants 0 et t_0 , pénètre dans le condensateur par la surface Σ qui relie les deux armatures. On exprimera cette énergie en fonction de $E_0 = E(t_0)$.
2. Calculer l'énergie de constitution électrostatique du condensateur chargé. Conclusion ?

★ 4- Vecteur de Poynting complexe

Une onde électromagnétique se propage suivant Oz . Les composantes de \vec{E} sont :

$$E_x = E_{0x} \cos(kz - \omega t + \varphi_1) \quad E_y = E_{0y} \cos(kz - \omega t + \varphi_2) \quad E_z = 0$$

1. Déterminer le vecteur de Poynting.
2. Calculer la puissance moyenne traversant un élément de surface S disposé normalement à la direction de propagation.
3. $\underline{\vec{E}}$ et $\underline{\vec{B}}$ sont les images complexes de ce champ. On définit le vecteur de Poynting complexe par :

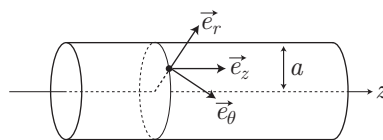
$$\underline{\vec{\Pi}} = \frac{1}{2\mu_0} \underline{\vec{E}} \wedge \underline{\vec{B}}^*$$

où $\underline{\vec{B}}^*$ est la quantité complexe conjuguée de $\underline{\vec{B}}$.

Montrer que la puissance électromagnétique traversant une surface S disposée normalement à la direction de propagation est donnée par : $\vec{S} \cdot \Re \{ \underline{\vec{\Pi}} \} \times S$.

★★ 5- Bilan d'énergie d'un solénoïde

Soit un solénoïde circulaire d'axe Oz , de longueur ℓ suffisamment supérieure à a pour qu'on puisse le considérer comme infini.



On suppose le champ magnétique : $\vec{B} = B(t) \vec{e}_z$ avec $B(t) = B_0 e^{-t/\tau}$.

1. Montrer qu'un champ électrique orthoradial s'établit dans le système, mais qu'en régime lentement variable la contribution magnétique à l'énergie est prépondérante.
2. Calculer le flux du vecteur de Poynting à travers la surface du solénoïde et effectuer une vérification du résultat obtenu.

★★ 6- Câble coaxial

Un câble coaxial est constitué de deux très longs cylindres d'axe commun Oz , de rayons a et $b < a$. Le cylindre intérieur, où *âme*, est parcouru par un courant représenté par $I(z, t) = I(z) \times e^{i\omega t}$ en notation complexe. Le cylindre extérieur, ou *gaine*, est parcouru par le courant $-I(z, t)$. On admet que $\vec{E} = E(r, z, t) \vec{u}_r$ (vérifier que cela est compatible avec les symétries du problème, le vecteur densité de courant étant porté par Oz).

1. Justifier que $\vec{B} = B(r, z, t) \vec{u}_\theta$ et exprimer ce champ entre les cylindres.
2. En déduire le champ électrique en fonction de I .
3. Trouver alors l'équation différentielle qui régit les variations spatiales de I . La résoudre.
4. On prend $I(z) = I_0 e^{-ikz}$ en notation complexe, avec $k = \frac{\omega}{c}$. Calculer le vecteur de Poynting et en déduire la puissance moyenne transportée par le câble.

On donne le rotationnel d'un vecteur \vec{A} en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_z$$

ÉLECTROMAGNÉTISME

ONDES PLANES PROGRESSIVES SINUSOÏDALES

1- Propagation d'une OPPM

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

1. Rappeler et établir l'équation aux dérivées partielles à laquelle satisfont les champs électrique et magnétique.
2. On suppose que le champ électrique est de la forme : $\vec{E}(M, t) = E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y$.
 - a- À quelle équation doit satisfaire k pour que ce champ soit solution de l'équation rappelée à la question 1 ?
 - b- Quelles sont la direction, le sens et la vitesse de propagation de cette onde ?
 - c- Quel est l'état de polarisation de cette onde ?
 - d- Quelle est la structure de cette onde ?
 - e- Calculer le champ magnétique associé au champ électrique. En déduire le vecteur de Poynting.
 - f- Faire de même en adoptant la notation complexe pour les champs électrique et magnétique, en calculant le vecteur de Poynting.
 - g- Que vaut la moyenne temporelle de la puissance qui traverse une surface S perpendiculaire à l'axe Oy ?

2- Énergie véhiculée par une OPPM

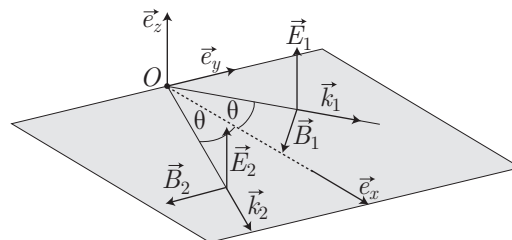
Un laser émet, en continu avec une puissance de 10 W, une OPPM d'étendue transversale 1 mm^2 . Calculer les amplitudes des champs électrique et magnétique

3- Superposition de deux ondes

On considère deux ondes électromagnétiques planes, de même pulsation ω , de même amplitude et polarisées sur la même direction \vec{e}_z , qui se propagent dans le vide :

$$\vec{E}_1 = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{OM})} \vec{e}_z \text{ et } \vec{E}_2 = E_0 e^{j(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{OM})} \vec{e}_z$$

Les directions de propagation sont contenues dans le plan (Ox, Oy) et font entre elles un angle 2θ .



1. Exprimer, en tout point, les champs résultants $\vec{E}(x, y, z, t)$ et $\vec{B}(x, y, z, t)$.
2. Exprimer le vecteur de Poynting associé à cette onde et donner sa valeur moyenne temporelle.
3. Exprimer la vitesse de phase de cette onde (vitesse de propagation de la phase).

4- Charge lente d'un condensateur cylindrique

On considère un condensateur cylindrique de rayons a et b ($a < b$), de longueur $2h$. On charge le condensateur par son plan central (qu'on définit par $z = 0$). On admet qu'en coordonnées cylindriques :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\sigma(t)b}{\varepsilon_0 r} \vec{e}_r$$

où $\sigma(t)$ est la charge surfacique de l'armature extérieure, qu'on suppose uniforme.

On rappelle que la capacité et l'énergie d'un tel condensateur sont :

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \times 2h}{\ln(b/a)} \text{ et } \mathcal{E} = \frac{Q^2}{2C}$$

En coordonnées cylindriques, le rotationnel d'un champ vectoriel \vec{A} s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

1. Calculer le champ magnétique \vec{B} à l'intérieur de ce condensateur.
2. Calculer le vecteur de Poynting ainsi que son flux entrant ϕ à travers les deux anneaux couvercles du condensateur. Comparer ϕ à $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$.

5- Onde cylindrique

À partir d'un fil source (l'axe Oz) est émise, dans le vide, une onde dont le champ électrique est donné, en coordonnées cylindriques, par : $\vec{E} = f(r) e^{i(\omega t - kr)} \vec{u}_z$.

1. Trouver le champ magnétique \vec{B} correspondant.
2. Déterminer le vecteur de Poynting instantané \vec{R} , puis sa moyenne temporelle $\langle \vec{R} \rangle$.
3. Quelle est la puissance moyenne rayonnée à travers un cylindre de rayon r et de hauteur h ? En déduire la fonction $f(r)$.
4. Donner l'expression de \vec{B} à grande distance (pour $r \gg \lambda$) et commenter.

On rappelle que, pour tout champ scalaire ψ et pour tout champ vectoriel \vec{A} :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\psi \vec{A}) = \psi \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} \psi \wedge \vec{A}$$

6- Onde le long d'une ligne coaxiale, sans amortissement

Soit un câble coaxial de longueur L_0 . Un élément de câble de longueur δx possède une inductance $\delta L = \Lambda \delta x$ et une capacité $\delta C = \Gamma \delta x$. La tension entre l'âme et l'armature du câble est notée $u(x, t)$ alors que le câble est parcouru par un courant $i(x, t)$.

1. Établir une relation entre $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial i}{\partial t}$.
2. Établir, de même, une relation entre $\frac{\partial u}{\partial t}$ et $\frac{\partial i}{\partial x}$.
3. En déduire que les fonctions $u(x, t)$ et $i(x, t)$ vérifient l'équation de d'Alembert.
4. On admet que la tension peut se mettre sous la forme :

$$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) + g\left(t + \frac{x}{v}\right)$$

Donner les significations physiques de f et g , puis exprimer $i(x, t)$ en fonction de f, g, Λ et Γ .

5. On branche à l'extrémité du câble, repérée par $x = 0$, un conducteur ohmique de résistance R . Exprimer $g(x = 0, t)$ en fonction de $f(x = 0, t), R, \Gamma$ et Λ .
6. Pour quelle valeur R_c de R n'y a-t-il pas d'onde réfléchie en $x = 0$?

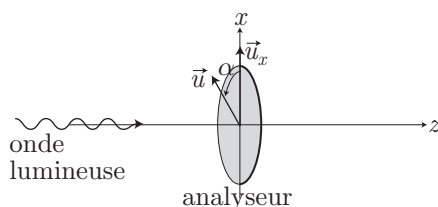
7- Polarisation d'une O.E.M.

Pour chacune des ondes suivantes, décrire l'état de polarisation et préciser si c'est une onde progressive, ses éventuels sens et direction de propagation et si elle est plane.

1. $\vec{E} = E_0 \sin(\omega t - kx) \vec{u}_y + E_0 \sin\left(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}\right) \vec{u}_z$
2. $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t + ky - \frac{\pi}{12}\right) \vec{u}_x + E_0 \cos\left(\omega t + ky - \frac{\pi}{12}\right) \vec{u}_z$
3. $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x + E_0 \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{6}\right) \vec{u}_y$
4. $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + kz) \vec{u}_x + E_0' \cos\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{6}\right) \vec{u}_x$
5. $\vec{E} = E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\sqrt{3}}{2}ky - \frac{1}{2}kz\right) \vec{u}_x$

8- lame quart d'onde

On étudie le montage de la figure suivante. Un analyseur est placé dans le plan $z = 0$. On appelle \vec{u} le vecteur unitaire donnant la direction de transmission privilégiée de l'analyseur. On pose $\alpha = (\vec{u}_x, \vec{u})$.



1. On considère une onde polarisée rectilignement dont le champ électrique se met sous la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x$$

Déterminer l'intensité (ou l'éclairement) de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur en fonction de α et E_0 . Comment est appelée cette loi ?

2. On considère une onde polarisée elliptiquement dont le champ électrique se met sous la forme :

$$\vec{E} = E_{0x} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{u}_x + E_{0y} \sin(\omega t - k_0 z) \vec{u}_y$$

Déterminer l'intensité (ou l'éclairement) de l'onde lumineuse en sortie de l'analyseur, en fonction de α , E_{0x} et E_{0y} .

3. On remplace l'analyseur par une lame quart d'onde $\frac{\lambda}{4}$, d'épaisseur e . Pour une OPPM incidente polarisée rectilignement suivant Ox , l'indice de réfraction de la lame est n_x . Pour une OPPM polarisée rectilignement suivant Oy , l'indice de la lame est n_y . L'axe lent coïncide avec l'axe Ox et l'axe rapide coïncide avec l'axe Oy .

Donner une relation d'ordre entre les indices n_x et n_y .

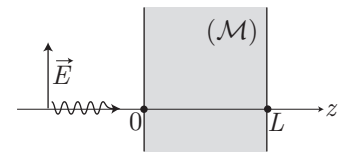
Quelle relation a-t-on entre e , n_x , n_y et $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}$ pour une OPPM incidente ?

4. L'onde incidente est l'onde étudiée dans la question 2. Donner l'expression du champ électrique à la sortie de la lame quart d'onde.

★★ 9- lame polarisante

Un milieu (\mathcal{M}) se caractérise par des vitesses de phase différentes c_g et c_d , associées à la propagation d'ondes planes progressives monochromatiques (de pulsation ω) polarisées circulairement gauche ou droite. On pourra noter :

$$c_g = \frac{c}{n_g} \text{ et } c_d = \frac{c}{n_d}$$



c est la vitesse de la lumière dans le vide.

On envoie sur un tel milieu une OPPM polarisée rectilignement.

Comment ressort-elle après avoir parcouru une distance L dans (\mathcal{M}) ?

On ne se préoccupera pas des problèmes associés aux interfaces $\{\text{vide} - \mathcal{M}\}$.

★ 10- Interférences entre deux OPPM

Deux ondes progressives monochromatiques, polarisées rectilignement, se propagent dans le vide dans le même sens (vecteur unitaire \vec{u}).

À l'endroit où l'on se trouve, le champ électrique de la première s'écrit $\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \cos(\omega_1 t)$ et celui de la seconde $\vec{E}_2 = \vec{E}_{02} \cos(\omega_2 t + \theta)$; ω_1 et ω_2 sont positifs.

1. Calculer les valeurs moyennes $\vec{\phi}_1$ et $\vec{\phi}_2$ des vecteurs de Poynting de chaque onde.
2. Calculer la valeur moyenne $\vec{\phi}$ du vecteur de Poynting de l'onde résultante.
Quand a-t-on $\vec{\phi} = \vec{\phi}_1 + \vec{\phi}_2$? De quel phénomène s'agit-il ?

★ 11- Vecteur de Poynting d'une OPPM

Une onde plane progressive monochromatique, polarisée rectilignement, se propage dans le vide.

1. Expliciter les champs électrique et magnétique en notation réelle.
2. Calculer le vecteur de Poynting.
3. Refaire la même étude en notation complexe.

ÉLECTROMAGNÉTISME

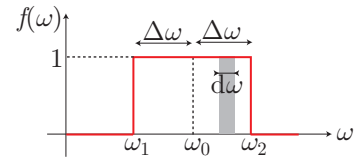
PROPAGATION EN MILIEUX CONDUCTEURS

1- Propagation d'un paquet d'ondes

On s'intéresse à la propagation d'un champ électrique \vec{E} polarisé rectilignement selon \vec{u}_x et se propageant selon \vec{u}_z :

$$\vec{E} = E(z, t) \vec{u}_x$$

Ce champ est généré par une infinité d'ondes composant un «paquet» de largeur spectrale $2\Delta\omega$. On considère que la «quantité des ondes» de pulsations comprises entre ω et $\omega + d\omega$ vaut $f(\omega) \frac{d\omega}{2\Delta\omega}$, où $f(\omega)$ est la densité spectrale du paquet d'ondes. Le champ ainsi véhiculé s'écrit :



$$\delta E = \delta E_0 \cos(\omega t - kz) = \frac{f(\omega) d\omega}{2\Delta\omega} \times E_0 \cos(\omega t - kz)$$

1. En adoptant les notations complexes, exprimer le champ total E sous la forme d'une intégrale en ω .
2. On suppose que $\Delta\omega$ est suffisamment petit devant ω_0 pour qu'il soit possible d'écrire :

$$\forall \omega \in [\omega_1, \omega_2], \omega = \omega_0 + \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \ll \omega_0$$

Sachant que $k = k(\omega)$ est une fonction de ω (donnée par la relation de dispersion), exprimer k en fonction de $k_0 = k(\omega_0)$, de ε et de $k' = \frac{dk}{d\omega}$, à l'aide d'un développement limité du premier ordre.

3. Effectuer alors le changement de variable $\omega \leftrightarrow \varepsilon$ dans l'intégrale du 1. et montrer que le champ résultant s'écrit :

$$E(z, t) = \mathcal{E}(z, t) \times \cos(\omega_0 t - k_0 z)$$

où $\mathcal{E}(z, t)$ est l'enveloppe du paquet d'ondes.

Représenter l'allure du paquet d'ondes à une date t fixée.

4. Exprimer la vitesse de propagation du paquet d'ondes en fonction de k' .
5. On fixe maintenant $z = z_0$. Représenter $\mathcal{E}(z = z_0, t)$.

Comment peut-on définir une «durée de vie» τ du paquet d'ondes ? Montrer que $\Delta\omega \times \tau = 2\pi$.

2- Onde électromagnétique dans un supraconducteur

Un supraconducteur est un matériau au sein duquel la densité de courant est proportionnelle au potentiel vecteur \vec{A} :

$$\vec{j} = -\lambda \vec{A} \text{ où } \text{rot } \vec{A} = \vec{B}$$

1. Déterminer l'équation de propagation du champ magnétique dans un supraconducteur.
2. En déduire le comportement du champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur en régime permanent.
3. On soumet un supraconducteur de conductivité σ à une onde électromagnétique plane et harmonique :

$$\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

Déterminer la condition sur k et ω (relation de dispersion) pour qu'une telle onde puisse se propager.

3- Propagation d'une onde dans un plasma

Un plasma gazeux, globalement neutre, comprend, placés dans le vide, des ions positifs supposés fixes et des électrons de masse m et de charge $-e$ susceptibles de se déplacer. Soit n le nombre d'électrons par unité de volume du plasma au repos, supposé homogène et $u(z, t)$ un petit déplacement d'ensemble suivant l'axe Oz des électrons situés en z quand le plasma est au repos. L'agitation thermique et le poids sont négligés.

1. En raisonnant sur une tranche comprise entre z et $z + dz$ quand le plasma est au repos, donner la densité d'électrons n^- lors du déplacement en supposant $\left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|$ petit devant 1 et en déduire la densité de charge totale ρ du plasma.
2. Montrer qu'il apparaît un champ électrique \vec{E} et que, sous l'action de ce champ, les électrons effectuent des oscillations sinusoïdales avec la pulsation $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}}$.

Application numérique : calculer $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi}$ pour $n = 10^{12} \text{ m}^{-3}$ (ionosphère) et $n = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ (décharge dans un gaz à forte densité).

Données :

- charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- permittivité électrique du vide : $\epsilon_0 \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ SI}$;
- masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

4- Effet de peau

Le demi-espace $z > 0$ est occupé par un milieu conducteur (cuivre) de conductivité $\gamma = 6 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

1. Écrire les équations de Maxwell dans le milieu ainsi que l'équation de conservation de la charge. Montrer que la densité de charges ρ peut être considérée comme nulle dans le conducteur.
2. Le champ électrique varie de manière sinusoïdale dans le temps, avec la pulsation ω . Montrer que, dans l'équation de Maxwell-Ampère, le courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est négligeable devant le courant de conduction \vec{j} .

Montrer alors que \vec{j} vérifie l'équation : $\Delta \vec{j} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \vec{0}$.

On donne la valeur numérique de la permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

3. On cherche \vec{j} sous la forme :

$$\vec{j} = J_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{u}_x \Rightarrow \vec{j} = j_0(z) \cos[\omega t - \phi(z)] \vec{u}_x$$

Déterminer $j_0(z)$ et $\phi(z)$. Commenter.

On fera apparaître la quantité $\delta = \sqrt{\frac{2}{\gamma \mu_0 \omega}}$, dont on précisera l'unité et la signification physique.

4. En déduire les expressions des champs $\vec{E}(z, t)$ et $\vec{B}(z, t)$.
5. Déterminer la densité volumique d'énergie \mathcal{E}_{vol} et sa valeur moyenne temporelle. Comparer les contributions magnétique et électrique.
6. Quelle est la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le parallélépipède de longueur a selon Ox , de largeur b selon Oy et de profondeur infinie selon Oz ? Comparer cette puissance à la puissance moyenne transférée au conducteur, à travers la surface de longueur a selon Ox , de largeur b selon Oy , située dans le plan $z = 0$. Conclure.

5- Onde dans un conducteur non parfait

On considère un milieu conducteur, globalement neutre, non parfait, de conductivité γ .

1. Donner les équations de Maxwell dans le cadre de l'approximation des régimes quasi permanents.
2. Exprimer l'équation de propagation vérifiée par le champ électrique \vec{E} .
3. On cherche une solution du type OPPM, polarisée selon Ox , se propageant selon Oz .

$$\text{On pose : } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\gamma}}.$$

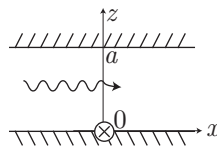
Le milieu, semi-infini, est constitué du volume caractérisé par :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < a \\ 0 < y < b \\ 0 < z < \infty \end{array} \right. .$$

- a- Donner la forme générale du champ \vec{E} .
 - b- En déduire la relation de dispersion.
 - c- Montrer que le champ se propage dans le milieu tout en s'atténuant ; exprimer la longueur caractéristique de pénétration.
4. Quel résultat retrouve-t-on pour une conductivité infinie ?
 5. Donner l'expression du champ magnétique associé.
 6. Exprimer la puissance électromagnétique moyenne (dans le temps) qui pénètre dans le milieu conducteur.
 7. Quelle est la puissance moyenne (dans le temps) cédée par le champ aux charges de ce même volume ? Conclure.

★ 6- Onde progressive non plane

Une onde électromagnétique se propage dans le vide dans la direction Ox d'un repère $Oxyz$, entre deux plans d'équations respectives $z = 0$ et $z = a$.



Le champ électrique \vec{E} s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{E} = E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{a}\right) \cos(kx - \omega t) \vec{e}_y$$

1. Déterminer la relation de dispersion $k(\omega)$. Quelle est la condition d'existence d'une onde progressive ? Donner l'expression de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe. Le milieu est-il dispersif ?
2. Donner l'expression du champ magnétique de cette onde.
3. Calculer la moyenne spatiale et temporelle de la densité volumique d'énergie électromagnétique et du vecteur de Poynting. En déduire la vitesse de propagation de l'énergie.
4. On suppose deux ondes du type précédent, de même amplitude et de pulsations respectives $\omega_1 = \omega - \frac{\Delta\omega}{2}$ et $\omega_2 = \omega + \frac{\Delta\omega}{2}$, avec $\Delta\omega \ll \omega$. Déterminer l'expression du champ électrique. En déduire la vitesse de l'enveloppe du signal.

★ 7- Plasma soumis à un champ magnétique longitudinal

L'ionosphère est assimilée à un plasma, dans lequel on ne tiendra compte que du mouvement des électrons, de densité volumique n .

Les électrons sont soumis :

- d'une part à l'action du champ magnétique terrestre \vec{B}_t , supposé constant et uniforme, de direction parallèle à Oz et de même sens ;

- d'autre part à l'action des champs d'une onde électromagnétique plane transversale se propageant suivant la direction Oz . Soient $\vec{E}(E_x, E_y, 0)$ et $\vec{B}(B_x, B_y, 0)$ les champs de cette onde.

Dans tout ce qui suit, on négligera l'action du champ magnétique \vec{B} de l'onde (et uniquement de l'onde) sur le mouvement de l'électron et on considérera que l'amplitude des mouvements de l'électron est négligeable devant la longueur d'onde dans le milieu (*c.a.d* $\frac{d}{dt}$ équivaut à $\frac{\partial}{\partial t}$)

1. Écrire les équations différentielles donnant les composantes (v_x, v_y, v_z) de la vitesse \vec{v} de l'électron. On pose :

$$v^* = v_x + i\varepsilon v_y \quad j^* = -ne v^* = j_x + i\varepsilon v_y \quad E^* = E_x + i\varepsilon E_y \quad B^* = B_x + i\varepsilon B_y \text{ avec } \varepsilon = \pm 1$$

En déduire la relation : $\frac{dv^*}{dt} + K v^* = -\frac{e}{m} E^*$, où K est une constante à déterminer

2. À partir des équations de Maxwell, écrire deux équations différentielles entre j^* , E^* et B^* .

On rappelle l'expression de la pulsation plasma : $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$.

3. En supposant que les grandeurs complexes E^* , B^* et v^* sont de la forme progressive $X^* = X_0 e^{i(kz - \omega t)}$, établir la relation de dispersion de ce type d'onde :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + \varepsilon \omega_B)} \right]$$

où l'on exprimera ω_B en fonction de e , B_t et m .

4. a- Quelle est la polarisation des ondes se propageant avec le vecteur d'onde $k\vec{e}_z$, vérifiant cette équation de dispersion pour $\varepsilon = +1$ et pour $\varepsilon = -1$?
b- Y a-t-il propagation quelle que soit ω ?
5. On considère une lame de plasma limitée par les plans $z = 0$ et $z = L$. On envoie en $z = 0$, sous incidence nulle, une onde électromagnétique plane progressive de pulsation ω supérieure aux pulsations de coupure, polarisée rectilignement suivant Ox . Quelle sera la polarisation de l'onde à la sortie, en $z = L$?

★★ 8- Ondes EM longitudinales dans un plasma

Un plasma d'hydrogène est un gaz totalement ionisé constitué de protons de charge e , de masse m_p et d'électrons de charge $-e$, de masse m_e . Au repos, les densités volumiques d'électrons et de protons ont même valeur n_0 , de telle sorte que le plasma est totalement neutre. On étudie la propagation, dans ce plasma, d'une onde électromagnétique plane se propageant dans la direction \vec{u}_x et décrite par les champs :

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_1(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_x \quad \vec{B} = \vec{B}_1(x, t)$$

Cette onde met en mouvement les charges et on note $\vec{v}_e(M, t) = v_{1e}(x, t) \vec{u}_x$ la vitesse de l'électron qui passe au point M à l'instant t et $\vec{v}_p(M, t) = v_{1p}(x, t) \vec{u}_x$ la vitesse d'un proton qui passe en M à l'instant t . Du fait de ces mouvements, la répartition des charges ne reste pas uniforme et on note $n_e = n_0 + n_{e1}(x, t)$ et $n_p = n_0 + n_{p1}(x, t)$ les densités volumiques d'électrons et de protons. Tous les champs portant l'indice 1 ont une valeur moyenne temporelle nulle et sont supposés infiniment petits devant 1. On limite tous les calculs à l'ordre 1. On néglige toute autre force que les forces électromagnétiques.

1. Une telle onde est qualifiée de plane, longitudinale électrique ; justifier ce qualificatif. Montrer que le champ magnétique est nul et établir une relation entre $\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}$, \vec{v}_{e1} et \vec{v}_{p1} .
2. Écrire l'équation du mouvement d'un électron d'abscisse $x(t)$. Dans la suite, on néglige les variations de la phase du champ électrique dues au déplacement de l'électron (on pourra assimiler $\frac{d\vec{v}_{e1}}{dt}$ à $\frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t}$). Établir dans ce cas une relation entre $\frac{\partial \vec{v}_{e1}}{\partial t}$ et \vec{E}_1 .
Écrire l'équation analogue pour les protons et conclure sur l'influence relative des électrons et des protons sur la densité de courant.
3. Déduire des questions précédentes la relation de dispersion des ondes.
4. Calculer les valeurs moyennes des grandeurs énergétiques associées au champ électromagnétique de l'onde et commenter.

★ ★ 9- Énergie électromagnétique dans un milieu conducteur

I- Partie A

On modélise le laiton comme un milieu conducteur caractérisé par une conductivité $\gamma = 0,125 \cdot 10^8 \text{ S.m}^{-1}$, sans propriétés diélectriques ni magnétiques.

1. Écrire les équations de Maxwell liant les vecteurs champ magnétique \vec{B} et champ électrique \vec{E} aux sources du champ \vec{j} (vecteur densité volumique de courant) et ρ (densité volumique de charge).
2. Montrer que la charge volumique tend très rapidement vers zéro avec une constante de temps τ que l'on calculera. On donne $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ F.m}^{-1}$.
3. On néglige le courant de déplacement devant le courant de conduction. Justifier cette approximation pour le laiton.
4. Avec ces approximations, trouver l'équation différentielle reliant \vec{B} et \vec{j} , lorsque ces champs sont de la forme :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{B}_0 e^{i\omega t} \text{ et } \vec{j}(M, t) = \vec{j}_0(M) e^{i\omega t}$$

Rappeler les conditions aux limites pour \vec{E} et \vec{B} à la traversée de la surface séparant l'air et le milieu considéré.

II- Partie B

On soumet une tôle de laiton d'épaisseur $2b$, de dimension très grande suivant Ox et Oy , à un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 e^{i\omega t} \vec{e}_x$. Il apparaît une densité de courant \vec{j} à l'intérieur de la plaque et un champ \vec{B} dont l'amplitude dépend de la cote z .

1. En admettant la continuité de \vec{B} , montrer que la solution $\vec{B}_z = B_0 \frac{\cosh\left[(1+i)\frac{z}{\delta}\right]}{\cosh\left[(1+i)\frac{b}{\delta}\right]} e^{i\omega t} \vec{e}_x$ convient.

Déterminer δ en fonction des grandeurs caractéristiques du matériau et de la fréquence.

Donner sa valeur numérique pour $f = 200 \text{ Hz}$ et pour $f = 480 \text{ kHz}$.

2. Calculer la densité de courant \vec{j} qui apparaît dans le matériau.
3. Calculer la puissance Joule moyenne $\langle P \rangle$ dissipée par unité de volume. On fera une moyenne dans le temps et dans l'espace. On pourra mettre $\langle P \rangle$ sous la forme :

$$\langle P \rangle = A \times \frac{\sinh\left(\frac{2b}{\delta}\right) - \sin\left(\frac{2b}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2b}{\delta}\right) + \cos\left(\frac{2b}{\delta}\right)}$$

où A est une constante que l'on exprimera en fonction de B_0 , b , γ , μ_0 .

ÉLECTROMAGNÉTISME

RÉFLEXION SUR UN CONDUCTEUR

1- Onde le long d'un conducteur parfait

On considère le plan Oxz conducteur parfait, à droite duquel on étudie la propagation d'une onde électromagnétique du type :

$$E_x = 0 \quad E_y = 0 \quad E_z = f(y) \cos(\omega t - kx)$$

1. Déterminer l'expression générale du champ magnétique, en supposant que $\omega > kc$.
2. À partir de l'équation de d'Alembert, déterminer $f(y)$ à une constante près, que l'on notera E_0 .
3. Quels sont les charges et les courants surfaciques portés par le conducteur parfait ?

2- Modes propres d'une cavité sans pertes

Une cavité sans pertes, d'axe Oy et de longueur L selon Ox , est constituée par l'association de deux miroirs métalliques parfaits, confondus respectivement avec les plans $x = 0$ et $x = L$. On suppose qu'à l'intérieur de la cavité le champ électromagnétique d'une onde monochromatique polarisée selon \vec{u}_z a pour représentation complexe :

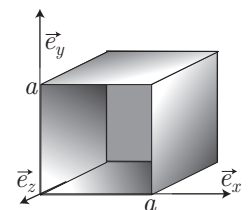
$$\vec{E}(x, t) = E_1 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_z + E_2 e^{i(\omega t + kx)} \vec{u}_z$$

1. Quelles sont les conditions aux limites imposées par la présence d'un métal parfait en $x = 0$ et $x = L$?
2. En déduire l'expression de E_2 en fonction de E_1 et la suite f_n des valeurs possibles de la fréquence de telles ondes pouvant exister dans la cavité. On exprimera f_n en fonction d'un entier non nul et d'une fréquence particulière f_1 dépendant de L et de la célérité c de la lumière dans le vide. Ces fréquences correspondent aux modes propres de la cavité.
3. a- Établir l'expression $\underline{E}_n(x, t)$ du champ électrique dans la cavité, à la fréquence f_n , en fonction de E_1 , n , L , x et c .
 b- Justifier l'expression d'onde stationnaire qu'on donne à ce type d'ondes.
 c- Montrer qu'il existe des abscisses x_p où le champ électrique est constamment nul. Donner la distance entre deux valeurs successives de x_p .
 d- En déduire le champ magnétique $\vec{B}_n(x, t)$ associé à cette onde. Expliciter les abscisses x'_n des points où le champ magnétique est constamment nul.
4. Calculer l'expression du vecteur de Poynting puis celle de la densité volumique d'énergie électromagnétique. En déduire la norme du vecteur de Poynting et sa moyenne temporelle. Que remarque-t-on ?

3- Onde électromagnétique dans une cavité

On considère une cavité cubique :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < x < a \\ 0 < y < a \\ 0 < z < a \end{array} \right.$$



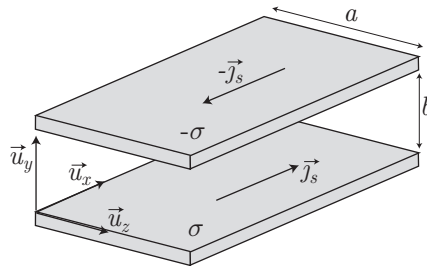
Cette dernière est entourée de plans parfaitement conducteurs et sera considérée vide.

On admet l'existence, dans cette cavité, d'une onde électromagnétique dont le champ électrique $\vec{E}(x, y, t)$ est polarisé rectilignement dans la direction \vec{e}_z

1. Déterminer les différents modes de cette onde.
2. Exprimer le champ magnétique associé à cette onde.
3. Calculer les énergies électrique et magnétique moyennes contenues dans cette cavité. Conclure.

4- Propagation entre deux rubans

Une ligne est constituée de deux rubans conducteurs parfaits, de faible épaisseur, de largeur a , distants de b et infinis selon x , l'espace entre les rubans étant vide. Les rubans sont parcourus par des courants de densités surfaciques $\vec{j}_s = j_s(x, t) \vec{u}_x$ et $-\vec{j}_s$ et présentent, sur leurs faces en regard, des densités surfaciques de charge $\sigma(x, t)$ et $-\sigma(x, t)$.



On étudie les champs \vec{E} et \vec{B} uniquement dans l'espace situé entre les rubans, en supposant qu'ils ne dépendent que de x (pas d'effet de bord) et de t .

1. Exprimer, après examen des conditions aux limites, les champs $\vec{E}(x, t)$ et $\vec{B}(x, t)$ en fonction de j_s et de σ .
2. Déterminer les énergies magnétique dU_m et électrique dU_e d'une tranche d'épaisseur dx de ligne et en déduire respectivement l'inductance propre linéique Λ et la capacité linéique Γ de la ligne.
Quelle relation existe-t-il entre Λ et Γ ?
3. Déterminer, à partir des équations de Maxwell, deux équations aux dérivées partielles liant $j_s(x, t)$ et $\sigma(x, t)$. Pourquoi peut-on parler d'ondes de courant surfacique et de charge surfacique ? Quelle est leur vitesse de phase ?
4. Quelles sont les expressions complexes \vec{E} et \vec{B} des champs lorsque le ruban supérieur est parcouru par un courant électrique $\vec{i}(x, t) = I_0 e^{i(\omega t - kx)}$?
Quelle est la structure de l'onde électromagnétique sur la ligne ?

5- Réflexion normale d'une OPPM polarisée circulairement

Une OPPM incidente, de pulsation ω , se propage dans le vide dans le sens des z croissants. En notation

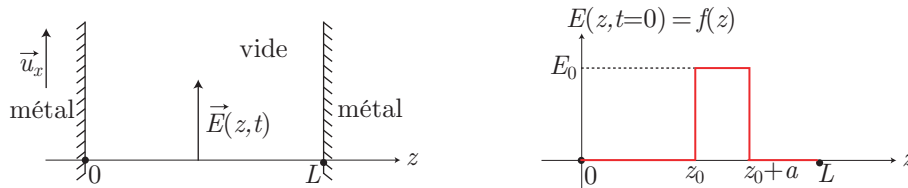
complexe, son champ électrique est : $\vec{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \times \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$ Le conducteur plan parfait occupe la partie de

l'espace correspondant à $z > 0$, sa surface correspondant au plan xOy .

1. Donner l'expression du champ \vec{E}_r de l'onde réfléchie. Comparer la polarisation des ondes incidente et réfléchie.
En déduire le champ \vec{E} de l'onde résultante.
2. Déterminer les champs magnétiques \vec{B}_i et \vec{B}_r , puis le champ \vec{B} total.
Que peut-on dire de \vec{E} et \vec{B} ?
3. Calculer les valeurs instantanées du vecteur de Poynting \vec{R} et de la densité d'énergie électromagnétique u ; commenter.
4. Quelles est la densité superficielle de courant \vec{j}_s à la surface du conducteur ?

6- Paquet d'ondes dans une cavité

Un guide d'ondes, vide de charge et infini selon Oy , est constitué de deux conducteurs parfaits plans, distants de L :



Une onde électromagnétique est caractérisée par son champ électrique $\vec{E}(z,t) = E(z,t) \vec{u}_x$ polarisé selon \vec{u}_x . À la date $t = 0$, le champ est décrit par un créneau $f(z)$ d'amplitude E_0 et situé dans l'intervalle $z \in [z_0, z_0 + a]$ (cf. schéma ci-dessus).

- Rappeler l'équation de propagation vérifiée par $E(z,t)$, ainsi que les conditions limites en $z = 0$ et $z = L$.
- On cherche les solutions de cette équation sous la forme d'ondes stationnaires. Exprimer les modes propres $E_n(z,t)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) en tenant compte des conditions limites. On choisira la date $t = 0$, celle à laquelle $E_n(z,t)$ prend les plus grandes valeurs, c'est-à-dire : $\left. \frac{\partial E_n}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$.
- Montrer que la solution générale s'écrit :

$$E(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{0n} \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \text{ avec } \omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

- À la date $t = 0$, $E_n(z,t = 0)$ s'identifie à $f(z)$, qui n'est pas périodique. Cependant, sur l'intervalle $z \in [0, L]$, $f(z)$ peut s'identifier à une fonction impaire $f^*(z)$ $2L$ -périodique. Représenter les courbes de $f(z)$ et $f^*(z)$.
- Puisque $f^*(z)$ est une fonction impaire et $2L$ -périodique, alors elle admet une décomposition en série de Fourier :

$$f^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \text{ avec } b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^*(z) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz$$

En déduire que b_n se met sous la forme :

$$b_n = \frac{4E_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi a}{2L}\right) \times \sin\left[\frac{n\pi}{L} \left(z_0 + \frac{a}{2}\right)\right]$$

On rappelle que $\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \times \sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$ et $\sin a \times \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

- En déduire l'expression de $E(z,t)$.
- Peut-on prévoir l'évolution ultérieure du paquet d'ondes ?

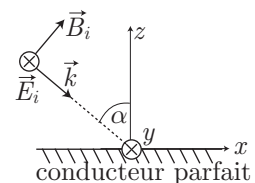
★ 7- Réflexion oblique sur un conducteur parfait

Une OPPM se réfléchit, dans le vide, sur un plan métallique parfaitement conducteur.

Son vecteur d'onde \vec{k} fait un angle α avec la normale à la surface du conducteur et son champ électrique est parallèle à cette surface; il s'écrit :

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t)} \vec{u}_y$$

- Déterminer le champ magnétique incident \vec{B}_i et les champs électrique $\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{OM} - \omega t)}$ et magnétique \vec{B}_r de l'onde réfléchie.
- Calculer les densités surfaciques de courant et de charges induites par cette onde à la surface du conducteur.

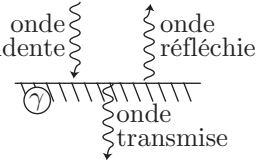


★★ 8- Réflexion normale sur un conducteur imparfait

On éclaire un conducteur de conductivité $\gamma = 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ uniforme, en incidence normale, avec une onde plane harmonique de pulsation ω et polarisée rectilignement.

On suppose que γ est réel et que la loi d'Ohm locale reste vérifiée à cette pulsation. De telles hypothèses ne sont valables qu'aux basses fréquences ($f \leq 10^{12} \text{ Hz}$).

1. On suppose que, à l'instant initial, la densité initiale de charge est non nulle dans le conducteur et vaut $\rho(M, 0) = \rho_0$ en M . Déterminer son évolution au cours du temps. En déduire que dans ce conducteur, on peut considérer que la densité de charge est nulle.
2. Déterminer les équations vérifiées par les champs électrique et magnétique dans le conducteur.
3. En déduire une relation de dispersion d'une OPPH se propageant dans le conducteur.
4. On admet que lorsque le conducteur est éclairé en incidence normale par une OPPM de pulsation ω , les ondes réfléchi et transmise se propagent aussi à la pulsation ω et normalement à la surface du conducteur.
 - a- Après avoir justifié leur existence, déterminer les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique.
 - b- Que deviennent ces résultats dans le cas limite du conducteur parfait (γ infini) ?



Donnée : permittivité électrique du vide : $\epsilon_0 \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.

★★ 9- Angle de Brewster

Une OPPM arrive en incidence quelconque à l'interface entre deux diélectriques linéaires, homogènes, isotropes d'indices n_1 et n_2 respectivement.

Ces matériaux, parfaitement isolants, peuvent voir apparaître des charges à leur surface.

L'onde est polarisée TB, ce qui signifie que les champs magnétiques incident (\vec{B}_i), réfléchi (\vec{B}_r) et transmis (\vec{B}_t) sont perpendiculaires au plan d'incidence. On note ainsi :

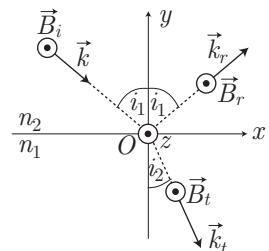
$$\vec{B}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 \end{pmatrix} e^{i\phi} \quad \vec{B}_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_r \end{pmatrix} e^{i\phi_r} \quad \vec{B}_t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_t \end{pmatrix} e^{i\phi_t}$$

où $\phi = \vec{k} \cdot \vec{OM} - \omega t$, $\phi_r = \vec{k}_r \cdot \vec{OM} - \omega t$ et $\phi_t = \vec{k}_t \cdot \vec{OM} - \omega t$.

1. Déterminer les champs électriques \vec{E}_i , \vec{E}_r et \vec{E}_t associés aux champs magnétiques précédent.
2. On note $E_i = E_0 e^{i\phi}$, $E_r = r E_0 e^{i\phi_r}$, $E_t = t E_0 e^{i\phi_t}$ où r et t sont les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude du champ électrique.
Trouver les expressions de B_r et B_t en fonction de r , t , B_0 , n_1 et n_2 .
3. En utilisant les relations de passage, établir que :

$$r = \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2}$$

4. Montrer qu'il existe un angle d'incidence (appelé *angle de Brewster*) $i_1 = i_b$ qui annule r .
Montrer que $i_b + i_2 = \frac{\pi}{2}$ et trouver l'expression de i_b en fonction de n_1 et n_2 .
Expliquer rapidement l'intérêt d'un tel angle.



ÉLECTROMAGNÉTISME

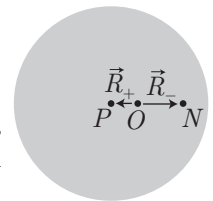
RAYONNEMENT DIPOLAIRE

1- Dipôle atomique (*Extrait de Centrale-Supélec MP 2013*)

A- Modèle de l'électron élastiquement lié

Dans le modèle de l'atome de Thomson, un atome d'hydrogène est assimilé à un système matériel constitué d'un noyau de masse M et d'un électron de masse m . La charge électrique $+e$ du noyau est supposée uniformément répartie dans une sphère de rayon a , de centre P . Un électron, considéré comme ponctuel, de charge $-e$, est libre de se déplacer dans cette sphère chargée.

1. On repère un point N à l'intérieur du noyau par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) relative au centre P .
 - a- Donner l'expression de la densité volumique de charge $\rho(N)$, associée au noyau, en tout point N à l'intérieur de la sphère.
 - b- Exprimer le champ électrostatique créé par cette distribution de charge en un point N à l'intérieur de la sphère.
 - c- En déduire l'expression de la force électrique ressentie par l'électron situé au point N . Exprimer cette force en faisant apparaître le vecteur \overrightarrow{PN} . Donner aussi l'expression de la force que l'électron exerce sur le noyau.
2. Dans un état excité de l'atome, le noyau et l'électron peuvent osciller autour de leur barycentre O , sous le seul effet de leur interaction électrique mutuelle. On note $\vec{R}_+(t) = \overrightarrow{OP}(t)$ et $\vec{R}_-(t) = \overrightarrow{ON}(t)$ les déplacements respectifs du noyau et de l'électron par rapport à O . On admet que le noyau garde sa forme sphérique. On pose $\vec{R}(t) = \vec{R}_+(t) - \vec{R}_-(t)$. Le référentiel dans lequel on étudie les mouvements du noyau et de l'électron est supposé galiléen.
 - a- Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron et au noyau.
 - b- En déduire l'équation différentielle vérifiée par $\vec{R}(t)$
 - c- Justifier que les mouvements relatifs de l'électron et du noyau se ramènent à celui d'une particule fictive, de masse μ , soumise à une force de rappel élastique de la forme $-\mu\omega_0^2 \vec{R}(t)$. Donner l'expression de μ en fonction de m et M et l'expression de ω_0 en fonction des différents paramètres du modèle.
 - d- En envisageant le cas d'un atome d'hydrogène, proposer la valeur numérique de μ .
On prendra $a \simeq 0,1 \text{ nm}$; commenter ce choix.
Calculer la valeur de ω_0 . À quel type de rayonnement électromagnétique correspond cette pulsation ?



B- Polarisation de l'atome

On suppose qu'un atome, immobile dans le référentiel d'étude, supposé galiléen, est placé à l'origine O de l'espace. Il est soumis à une onde électromagnétique plane dont les champs électrique et magnétique s'écrivent :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x \quad \vec{B}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kz) \vec{e}_y$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ où c est la célérité de la lumière dans le vide. On convient aussi d'appeler l'intensité I de cette onde la valeur moyenne temporelle de son vecteur de Poynting :

$$I = \langle \Pi \rangle = c \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}$$

Pour décrire les oscillations du noyau et de l'électron, on utilise le modèle de l'électron élastiquement lié : une particule fictive, de masse μ , dont la position est repérée par le vecteur $\vec{R}(t)$, est soumise à une force de rappel élastique $-\mu\omega_0^2 \vec{R}$, à une force de frottement $-\mu\Gamma \frac{d\vec{R}}{dt}$ et à l'action de l'onde électromagnétique. On suppose que

$k \|\vec{R}\| \ll 1$ et que $\left\| \frac{d\vec{R}}{dt} \right\| \ll c$. On admet que la particule fictive doit être affectée d'une charge électrique égale à $+e$.

1. Compte tenu des hypothèses, justifier que l'équation différentielle vérifiée par $\vec{R}(t)$ peut se simplifier sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} + \Gamma \frac{d\vec{R}}{dt} + \omega_0^2 \vec{R} = \frac{e}{\mu} E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$$

2. Montrer qu'en régime sinusoïdal forcé, on a :

$$\vec{p} = e \vec{R}(t) = \alpha(\omega) E_0 \cos(\omega t + \psi) \vec{e}_x$$

Exprimer $\alpha(\omega)$ en fonction de e , μ , ω , ω_0 , Γ et $\sin \psi$ en fonction de Γ , ω et ω_0 .

3. On note $\Delta = \omega - \omega_0$. Lorsque $\omega_0 \gg \Gamma$ et $\omega_0 \gg \|\Delta\|$ (voisinage de la résonance où $\omega \simeq \omega_0$) montrer les relations simplifiées suivantes :

$$\alpha(\omega) \simeq \frac{e^2}{\mu\omega} \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 + 4\Delta^2}} \text{ et } \sin \psi \simeq \frac{-\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 + 4\Delta^2}}$$

Données :

- permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$;
- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$;
- masse de l'électron : $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- masse du proton : $M = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$;
- charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

2- Énergie rayonnée par un dipôle (Extrait de Centrale-Supélec MP 2013)

Dans le modèle de l'atome de Thomson, un atome d'hydrogène est assimilé à un système matériel constitué d'un noyau de masse M et d'un électron de masse m . La charge électrique $+e$ du noyau est supposée uniformément répartie dans une sphère de rayon a , de centre P . Un électron, considéré comme ponctuel, de charge $-e$, est libre de se déplacer dans cette sphère chargée.

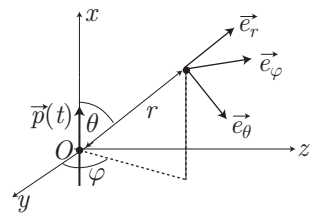
A- Onde électromagnétique rayonnée par l'atome

Les oscillations de l'électron et du noyau sont à l'origine d'un rayonnement électromagnétique. On suppose, par soucis de simplicité, que les oscillations étudiées sont unidimensionnelles, selon le vecteur unitaire \vec{e}_x . On propose de calculer la puissance électromagnétique moyenne rayonnée par l'atome situé au point O .

1. On définit la grandeur vectorielle $\vec{p}(t) = e \times \vec{R}(t)$ où $\vec{R}(t) = \overrightarrow{NP}$. Que représente $\vec{p}(t)$?
On pose $\vec{p}(t) = p(t) \vec{e}_x$, avec $p(t) = e \times x(t)$.
2. On utilise le système de coordonnées sphériques d'origine O .

- a- Dans la zone de rayonnement, parmi les champs électrique et magnétique, lequel admet au point M l'expression :

$$\frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \ddot{p}(t - r/c) \vec{e}_\varphi$$



Justifier la réponse en utilisant un argument d'analyse dimensionnelle.

- b- Sachant que l'onde rayonnée a, dans la zone de rayonnement, une structure locale d'onde plane progressant dans le sens du vecteur unitaire radial \vec{e}_r , compléter la détermination des champs électrique et magnétique.
 - c- On note λ la longueur d'onde de l'onde sinusoïdale rayonnée par l'atome. Rappeler la hiérarchie des différentes échelles de longueur $\|\vec{R}\|$, r et λ qui permet de valider les expressions des différents champs dans la zone de rayonnement. On prendra soin de dégager le sens physique des différentes inégalités écrites.
3. Établir l'expression du vecteur de Poynting dans la zone de rayonnement et donner une expression de sa valeur moyenne temporelle faisant intervenir $\langle \dot{x}^2 \rangle$.
 4. Montrer que la puissance moyenne rayonnée par l'atome à travers une sphère de rayon r s'écrit :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} \langle \dot{x}^2 \rangle$$

On rappelle que $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$.

B- Amortissement des oscillations par rayonnement

Le rayonnement électromagnétique de l'atome entraîne l'amortissement des oscillations de l'électron et du noyau. On propose d'en déduire que l'atome, dans son état excité, peut être modélisé par un oscillateur amorti.

- On souhaite mettre la puissance moyenne rayonnée $\langle \mathcal{P} \rangle$ sous la forme $\langle F \dot{x} \rangle$. Sachant que $\langle \ddot{x}^2 \rangle = -\langle \ddot{x} \ddot{x} \rangle$, déterminer l'expression de la force $\vec{F} = F \vec{e}_x$.
- On suppose qu'en plus de la force de rappel élastique $\vec{F}_{\text{élast}} = -\mu \omega_0^2 \vec{R}(t)$ ($\mu = \frac{mM}{m+M}$ désignant la masse réduite de la particule fictive et ω_0 sa fréquence de résonance), la force $-\vec{F}$ agit aussi sur la particule fictive. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
- En notation complexe, on cherche une solution de cette équation sous la forme $\underline{x} = \underline{x}_0 e^{i\omega t}$. On pose $\omega = \omega_0 + \delta\omega$, avec $\delta\omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\delta\omega| \ll \omega_0$. La force \vec{F} est traitée comme une perturbation des oscillations harmoniques : on suppose $\frac{\omega e^2}{\varepsilon_0 \mu c^3} \ll 1$.
 - Montrer qu'à l'ordre d'approximation le plus faible : $\delta\omega = i \frac{e^2 \omega_0^2}{12\pi \varepsilon_0 \mu c^3}$.
 - En déduire l'expression de $\underline{x}(t)$ sous la forme : $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{-\Gamma t/2} e^{i\omega_0 t}$. Donner l'expression de Γ en fonction des différents paramètres.
 - Application numérique*
Calculer la valeur numérique de Γ pour l'atome de rubidium ; la valeur obtenue est-elle compatible avec la valeur expérimentale figurant dans les données numériques ?

Données :

- permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$;
- perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$;
- célérité de la lumière dans le vide : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$;
- masse de l'électron : $m = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- masse du proton : $M = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$;
- charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- pour le rubidium :
 - masse atomique : $m = 1,41 \cdot 10^{-25} \text{ kg}$;
 - pulsation propre de la molécule : $\omega_0 = 2,42 \cdot 10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$;
 - largeur naturelle de la raie : $\Gamma = 3,70 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$.

3- Champs rayonnés par un dipôle

Un dipôle électrostatique variable, de moment $\vec{p} = p_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ et situé en O , émet dans l'espace un champ électromagnétique. En coordonnées sphériques, le champ magnétique rayonné s'écrit :

$$\vec{B} = B_\varphi \vec{e}_\varphi \text{ avec } B_\varphi = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial p(t')}{\partial t'} + \frac{1}{rc} \frac{\partial^2 p(t')}{\partial t'^2} \right]$$

où l'on pose $t' = t - \frac{r}{c}$.

- À l'aide des équations de Maxwell, montrer que les composantes non nulles du champ électrique s'écrivent :

$$E_r = \frac{\cos \theta}{2\pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} p(t') + \frac{1}{r^2 c} \frac{\partial p(t')}{\partial t'} \right] \text{ et } E_\theta = \frac{\sin \theta}{4\pi \varepsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} p(t') + \frac{1}{r^2 c} \frac{\partial p(t')}{\partial t'} + \frac{1}{rc^2} \frac{\partial^2 p(t')}{\partial t'^2} \right]$$

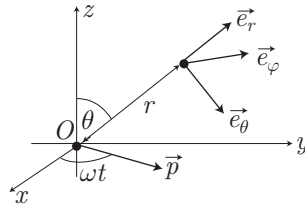
- Commenter ces expressions en régime stationnaire.
- Calculer la puissance moyenne rayonnée dans la zone de rayonnement ($r \gg \lambda$).

On rappelle l'expression du rotationnel d'un vecteur \vec{V} en coordonnées sphériques :

$$\text{rot } \vec{V} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial(\sin \theta V_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial \varphi} \right] \vec{e}_r + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r V_\varphi)}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r V_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \vec{e}_\varphi$$

4- Rayonnement d'un dipôle tournant

On considère un dipôle \vec{p} de norme p_0 , tournant à la vitesse angulaire uniforme ω autour du point O dans le plan xOy . On s'intéresse au rayonnement de ce dipôle à grande distance.



En suivant la même démarche que dans l'exercice précédent, on peut obtenir l'expression générale des champs magnétique et électrique. Ce calcul est lourd. On admettra que les termes dominants des champs rayonnés à une distance r très grande devant $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ par un dipôle quelconque sont en $\frac{1}{r}$ et s'expriment comme suit :

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi r c} \left(\frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial t^2} \right)_{t-\frac{r}{c}} \wedge \vec{u}_r \text{ et } \vec{E} \simeq c\vec{B} \wedge \vec{u}_r$$

où $\vec{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$.

Question 1. Déterminer les champs électrique et magnétique rayonnés à grande distance ($\lambda \ll r$) par le dipôle tournant.

Question 2. En déduire la puissance moyenne rayonnée par ce dipôle dans tout l'espace.

Question 3. On considère maintenant un électron en rotation circulaire autour d'un proton. Montrer qu'à cause de son rayonnement, le rayon de sa trajectoire diminue lentement.

Question 4. Évaluer le temps τ que met l'électron de l'atome d'hydrogène pour rejoindre son noyau. Conclure.

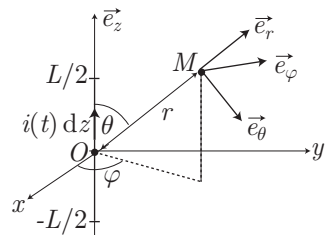
Données numériques :

- Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 \simeq 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$.
- Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.
- Masse de l'électron : $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.
- Rayon de l'atome de Bohr : $a_0 = 0,5 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.
- Célérité de la lumière : $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.
- Charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

★ 5- Rayonnement d'une antenne

On se propose d'examiner quelques phénomènes mis en œuvre dans un système de communication. Dans tout le problème, le souligné est utilisé pour dénoter les grandeurs complexes ($\underline{Z}, \underline{A}$) où j est tel que $j^2 = -1$.

Dans cet exercice, l'atmosphère terrestre est considérée comme un milieu dont les propriétés sont celles du vide : $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} \text{ F.m}^{-1}$ et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$. Un élément de courant $i(t) dz \vec{e}_z$, placé à l'origine O des espaces le long de l'axe (O, z) , crée un champ électromagnétique $\delta \vec{E}(M, t), \delta \vec{B}(M, t)$ en un point M repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) . Le courant $i(t) = I \cos(\omega t)$ est sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude I .



1. Identifier, parmi les deux expressions données ci-dessous en notation complexe, celle du champ magnétique $\delta \vec{B}$ et celle du champ électrique $\delta \vec{E}$ créés en un point M de la zone de rayonnement, par l'élément de courant $i(t) dz \vec{e}_z$:

$$\frac{j\omega\mu_0 I}{4\pi} \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \sin \theta dz \vec{e}_\theta \quad jk \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{e^{j(\omega t - kr)}}{r} \sin \theta dz \vec{e}_\varphi \quad \text{où } k = \frac{\omega}{c}$$

2. Une antenne demi-onde est constituée d'un fil rectiligne de longueur $L = \frac{\lambda}{2}$ colinéaire à l'axe (O, \vec{e}_z) et de point milieu O . Alimenté par un amplificateur de puissance, il est parcouru par un courant $i(z, t) = I_0 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right)$. On souhaite déterminer le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ en M , dans la zone de rayonnement.

- a- Pour ce faire, on considère un élément de courant $\underline{i}(z, t) dz \vec{e}_z$ au point N de l'antenne à la cote z . Exprimer, en fonction de z et θ , la différence de marche δ entre les ondes rayonnées par l'antenne entre N et O , dans la direction (θ, φ) .
- b- Déterminer, en notation complexe, l'expression du champ électrique $\vec{E}(M, t)$ rayonné par l'antenne en M , dans la direction (θ, φ) . On donne :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \exp(j\alpha x) dx = \frac{2 \cos(\alpha\pi/2)}{1 - \alpha^2}$$

- c- En déduire le champ électrique cherché :

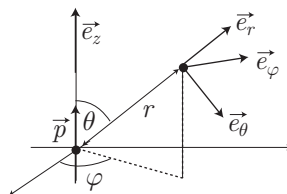
$$\vec{E}(M, t) = -\frac{c\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right)}{\sin\theta} \sin(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$$

3. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(\vec{r}, t)$ rayonné par l'antenne.
4. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ et la moyenne temporelle de sa norme $\langle \Pi \rangle$.
5. Sachant que $\int_0^\pi \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \frac{d\theta}{\sin\theta} = 1,22$, calculer la puissance moyenne P rayonnée par cette antenne.
6. Par définition, la résistance de rayonnement de l'antenne est la résistance R_r définie par $P = R_r \frac{I_0^2}{2}$ où I_0 est l'intensité du vent de courant de l'antenne. Déterminer R_r pour une antenne demi-onde et justifier la dénomination de *résistance de rayonnement*. Calculer numériquement R_r .
Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0 pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est $P = 2100$ kW (puissance de l'émetteur Grandes Ondes de France Inter) ?

★★ 4- Rayonnement d'une antenne

On place en un point O un dipôle \vec{m} orienté selon l'axe Oz : $\vec{m} = m \vec{e}_z$. La distance qui sépare les deux charges $+q$ et $-q$ constituant ce dipôle oscille à la fréquence ω . En notation complexe :

$$\ell(t) = \ell_0 e^{i\omega t}$$



Question 5. Montrer qu'avec une bonne approximation, tout se passe comme si on avait en O un courant sinusoïdal $\underline{I} = I_0 e^{i\omega t}$. Exprimer la constante I_0 en fonction de ω et q .

Question 6. Montrer que les équations de Maxwell ne sont pas compatibles avec la définition du potentiel électrostatique V .

Question 7. Montrer que l'introduction d'un vecteur \vec{A} (appelé *potentiel vecteur*), tel que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, permet de résoudre le problème.

Qu'en est-il des autres équations de Maxwell ?

Question 8. On donne l'expression générale du potentiel vecteur :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\text{espace}} \frac{\vec{j}(P, t')}{PM} d\tau_P \text{ où } t' = t - \frac{MP}{c}$$

Donner l'expression de $\vec{A}(M, t)$ en fonction de μ_0 , I_0 , ℓ_0 , t et \vec{e}_z

Question 9. Calculer le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ produit en M et montrer que sa seule composante non nulle s'écrit :

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 I_0 \ell_0}{4\pi r} \sin\theta \left[\frac{1}{r} + \frac{i\omega}{c} \right] e^{i\omega t'}$$

Question 10. Déterminer l'expression de $\vec{\text{rot}} \vec{e}_\varphi$, sans utiliser la formule du rotationnel de l'exercice précédent.

Question 11. À l'aide des équations de Maxwell, montrer que les composantes non nulles de \vec{E} sont :

$$E_r = \frac{I_0 \ell_0}{4\pi \varepsilon_0 i \omega r^3} \times 2 \cos \theta \left[1 + i \omega \frac{r}{c} \right] e^{i \omega t'} \quad \text{et} \quad E_\theta = \frac{I_0 \ell_0}{4\pi \varepsilon_0 i \omega r^2} \times \sin \theta \left[1 + i \omega \frac{r}{c} - \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \right] e^{i \omega t'}$$

Question 12. Dans le cas où $r \ll \lambda$, calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting. Conclure.

Question 13. Dans la limite où $r \gg \lambda$, calculer la puissance moyenne P rayonnée par le dipôle dans tout l'espace et montrer que :

$$P = \frac{\pi}{3 \varepsilon_0 c} \left(\frac{\ell_0}{\lambda} \right)^2 I_0^2$$

Question 14. Le dipôle émet une puissance de 5 W. Calculer la valeur maximale du module du champ électrique à 10 km dans le vide.

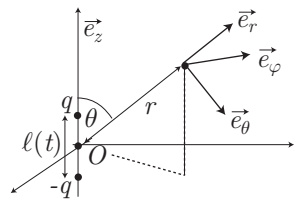
Question 15. Une antenne de longueur $\frac{\lambda}{2}$ (antenne demi-onde), orientée selon Oz et centrée sur O , est parcourue par le courant $I(z, t)$ suivant :

$$I(z, t) = I_0 \cos(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) \quad \text{pour} \quad z \in \left[-\frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{4}\right]$$

Justifier cette expression dans le cas où l'antenne est isolée à ses extrémités.

Question 16. Montrer que le champ électrique rayonné à grande distance de O ($r \gg \lambda$) peut s'écrire

$$\vec{E} = -\frac{I_0}{2\pi \varepsilon_0 r c} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \sin\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \vec{e}_\theta$$



Formulaire :

- Permittivité électrique du vide : $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
- Analyse vectorielle :

$$\vec{\text{rot}}(K\vec{u}) = K \times \vec{\text{rot}} \vec{u} + \vec{\text{grad}} K \wedge \vec{u}$$

- Gradient d'une fonction scalaire ψ en coordonnées sphériques :

$$\vec{\text{grad}} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

- Formules trigonométriques :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cos a \times \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

OPTIQUE

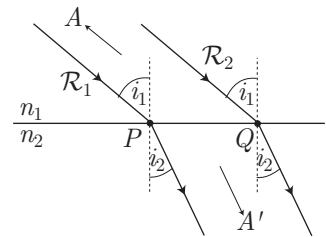
PROPAGATION DE LA LUMIÈRE

1- Caractéristiques spectrales des ondes lumineuses

1. Rappeler les définitions du train d'onde et de la largeur à mi-hauteur.
2. Définir la durée du train d'onde, la lier à la longueur de cohérence et la lier aux caractéristiques spectrales de la source (on s'attachera en particulier à relier la largeur à mi-hauteur en longueur d'onde $\Delta\lambda$ à celle en fréquence $\Delta\nu$).
3. Donner un ordre de grandeur de la longueur d'onde moyenne du domaine visible, ainsi que la largeur à mi-hauteur du spectre visible (si l'on définit d'une part le spectre visible comme une raie dont la longueur d'onde dans le vide est la moyenne, et d'autre part la largeur à mi-hauteur comme la moitié du spectre visible).
4. En déduire la fréquence moyenne de ces ondes, puis la longueur de cohérence et la durée de cohérence.
5. La longueur d'onde moyenne de la raie rouge du spectre d'un laser He/Ne est $\lambda_{0m} = 643,816$ nm et la largeur à mi-hauteur $\Delta\lambda = 1,3$ pm. Calculer les mêmes grandeurs qu'à la question précédente puis conclure quant à la faisabilité d'obtenir des interférences en lumière blanche comparativement au laser.

2- Loi de Snell-Descartes

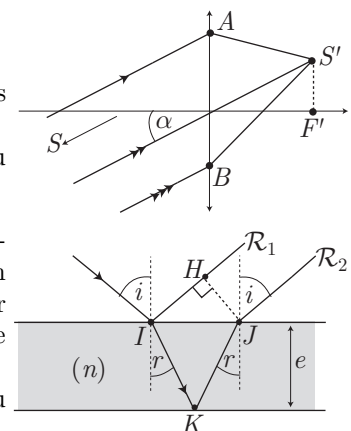
Deux rayons parallèles (\mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2) provenant d'un même point A «à l'infini», se propagent dans un milieu homogène d'indice n_1 et arrivent aux points P et Q d'une interface avec un autre milieu transparent d'indice n_2 . Les rayons réfractés, également parallèles, convergent donc en un point A' «l'infini» dans ce milieu.



1. Que peut-on dire des chemins optiques (APA') et (AQA') ?
2. Calculer la différence de marche $\delta = (APA') - (AQA')$ en fonction de n_1 , n_2 , i_1 , i_2 et PQ .
3. En déduire la loi de Schell-Descartes relative à la réfraction.

3- Calculs de chemins optiques

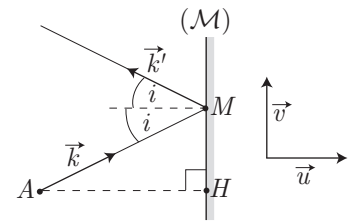
1. Soit une source S à l'infini et une lentille convergente. L'image de la source est en S' dans le plan focal image de la lentille. Calculer la différence de chemin optique $\delta = (SA) - (SB)$ puis $\delta' = (AS') - (BS')$ en fonction de l'angle α et de la distance AB . Les points A et B sont situés à l'entrée de la lentille, dans un milieu d'indice 1.
2. Soit une lame d'indice n et d'épaisseur e . Un rayon incident (angle d'incidence i) soit se réfléchit sur la face d'entrée de la lame et donne le rayon \mathcal{R}_1 , soit pénètre dans la lame (transmission, angle r) et peut se réfléchir sur la face de sortie et être transmis par la face d'entrée pour donner le rayon \mathcal{R}_2 . Les deux rayons émergents sont parallèles et se propagent dans un milieu d'indice 1.



Calculer la différence de marche au point M «à l'infini» entre les deux parcours, définis par $\delta = (IM)_2 - (IM)_1$, en fonction de n , e , $\cos r$. La réflexion sur un milieu plus réfringent procède d'un déphasage de π . Si la lame est une lame d'air, que vaut δ ?

★★ 4- Chemin optique et stigmatisme

Un miroir plan (\mathcal{M}) est plongé dans un milieu d'indice de réfraction égal à 1. Un point A , situé du côté réfléchissant de (\mathcal{M}), émet des rayons lumineux, qui interceptent le miroir en des points M . Après réflexion, ces rayons atteignent tous un point fixe A' . On note \vec{k} et \vec{k}' les vecteurs unitaires directeurs de \overrightarrow{AM} et de $\overrightarrow{MA'}$ lorsque A et A' sont du même côté du miroir. Le projeté de A sur (\mathcal{M}) est noté H , tel que $\overrightarrow{AH} = AH \vec{u}$. Enfin, \overrightarrow{HM} a pour vecteur directeur unitaire \vec{v} .



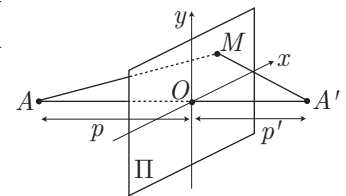
- Exprimer le chemin optique $\mathcal{L} = (AMA')$ en fonction de \overrightarrow{AH} , $\overrightarrow{HA'}$, \vec{k} et \vec{k}' .
- On cherche la position du point A' image de A par (\mathcal{M}).
 - Lorsque \overrightarrow{HM} varie de $d\overrightarrow{HM}$ (les points A et A' demeurant fixes), les vecteurs \vec{k} et \vec{k}' varient de $d\vec{k}$ et $d\vec{k}'$. Expliquer pourquoi $\overrightarrow{AH} \cdot d\vec{k} = -\overrightarrow{AH} \cdot d\vec{k}'$.
 - En déduire l'expression de $d\mathcal{L}$ en fonction de \overrightarrow{AH} , $\overrightarrow{HA'}$ et $d\vec{k}'$.
 - Quelle conséquence a sur $d\mathcal{L}$ le stigmatisme rigoureux de (\mathcal{M}) pour les points A et A' ? Montrer alors que A et A' sont conjugués lorsque $\overrightarrow{HA'} = \overrightarrow{AH}$.

★★ 5- Relation de conjugaison

Une lentille mince convergente transforme, dans les conditions de Gauss, une onde sphérique issue d'un point A , situé sur son axe, en une onde sphérique qui converge vers un point A' .

- Exprimer, en fonction des coordonnées (x, y) d'un point M du plan Π de la lentille, de $p = OA$ et de $p' = OA'$, les déphasages $\varphi_g(M) - \varphi(A)$ et $\varphi_d(M) - \varphi(A')$ où $\varphi_g(M)$ et $\varphi_d(M)$ représentent les phases en M respectivement à gauche et à droite de Π .
- Montrer que la lentille se comporte comme un transformateur de phase, en exprimant $\Delta\varphi = \varphi_g(M) - \varphi_d(M)$ en fonction de x, y, p, p' .
- Faire de même lorsque A est situé «à l'infini» et A' confondu avec le foyer image de la lentille.
- En déduire la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'}$$

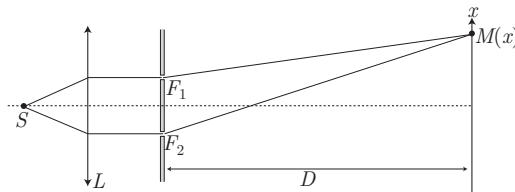


OPTIQUE

INTERFÉRENCES EN LUMIÈRE COHÉRENTE

1- Translation d'une figure d'interférence

Dans un écran opaque ont été percées deux fentes F_1 et F_2 à bords parallèles, très fines et distantes de a petit.



1. De manière à éclairer ce dispositif au moyen d'un faisceau de lumière parallèle, on place la source de lumière monochromatique, de longueur d'onde λ , au foyer principal objet d'une lentille convergente L dont l'axe optique passe au milieu des deux fentes.

L'air est supposé d'indice $n = 1$.

- a- Exprimer l'intensité, en un point M de l'écran, en fonction de la différence de marche optique δ .
- b- Calculer δ en fonction des données de l'exercice.
- c- Calculer l'interfrange et l'ordre d'interférence en M .
- d- *Application numérique* : on donne $a = 2$ mm, $\lambda = 0,55$ μm et $D = 2$ m. Calculer l'abscisse de la cinquième frange brillante.

2. On considère le dispositif précédent. Devant la fente F_1 , on place une lame à faces parallèles, d'indice n et d'épaisseur e .

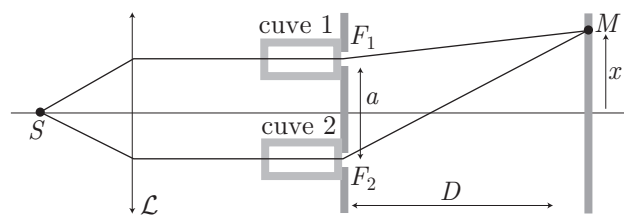
Calculer l'interfrange et la position de la frange centrale.

2- Détermination d'un indice de réfraction

Un dispositif de fentes d'Young (S_1 et S_2) est éclairé par un laser He-Ne, dont la longueur d'onde dans le vide vaut 543,365 nm. La distance entre les fentes et l'écran est notée $D = 2,00$ m et la distance entre les fentes : $a = 200$ μm . On suppose D très grand devant a et devant la dimension caractéristique dans laquelle les franges sont observables sur l'écran. La largeur à mi-hauteur $\Delta\lambda$ de la raie émise par le laser est de 1,5 pm.

Une première expérience consiste à placer deux cuves creuses en verre, parallélépipédiques, identiques, contenant de l'air, devant chacune des fentes. Le contenant d'une des cuves a pour épaisseur $e = 2,5$ cm et l'épaisseur totale du verre est $e' = 0,5$ cm. On notera n_a et n_v les indices de réfraction respectifs de l'air à pression normale et du verre à cette longueur d'onde.

Les deux cuves sont éclairées par des rayons parallèles issus d'une même source S placée au foyer objet d'une lentille convergente \mathcal{L} .



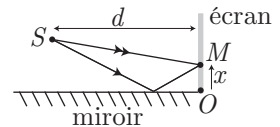
1. Quelle est la couleur de la raie ? Calculer sa largeur $\Delta\nu$ dans le domaine fréquentiel.
2. En déduire la durée de cohérence τ_c , puis la longueur de cohérence L_c .
3.
 - a- Montrer que les interférences sont possibles avec le laser. Dans quelles limites théoriques ?
 - b- Représenter le champ d'interférences et montrer que ce sont des interférences non localisées.

4. Comment la différence de marche est-elle affectée par rapport au dispositif des fentes d'Young sans cuve ?
5. Le vide est établi progressivement dans une cuve grâce à une pompe à vide. On assimilera son contenu à un vide parfait. Que vaut la différence de marche à l'endroit qui était le centre des franges de l'expérience précédente ?
6. Où est située la nouvelle frange centrale ?
7. Montrer que le déplacement de la frange centrale permet de mesurer l'indice de l'air à la longueur d'onde du laser.
8. La frange centrale s'est déplacée de 13,5 franges. En déduire l'indice de l'air à la pression normale. Est-il légitime d'assimiler l'indice de l'air à l'indice du vide ?

3- Miroir de Lloyd

Un rayon lumineux arrive sous incidence rasante sur un plan métallique Π parfaitement conducteur. Il est polarisé rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence (la réflexion s'accompagne d'un déphasage de π).

Une source ponctuelle, monochromatique, est placée à une distance a au dessus du plan Π . Une figure d'interférence est observée au point M d'un écran, tel que $OM = x \ll d$ et $a \ll d$.

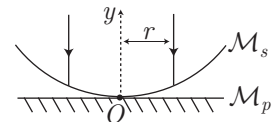


1. Quelle est la forme des franges d'interférence ?
2. Que vaut l'interfrange i ?
3. La frange centrale (en O) est-elle brillante ou sombre ?

4- Anneaux de Newton

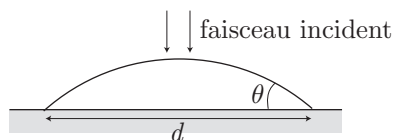
On considère le dispositif de Newton constitué d'un miroir sphérique \mathcal{M}_s partiellement réfléchissant, d'épaisseur négligeable, de rayon R , de centre C , reposant sur un miroir plan \mathcal{M}_p . Le point de contact est O . On éclaire le système par un faisceau de lumière monochromatique, de longueur d'onde λ , parallèle à l'axe de révolution Oy .

1. Où visualise-t-on les franges d'interférence ?
2. Donner l'expression de l'intensité lumineuse obtenue à cet endroit. On suppose que les deux rayons qui interfèrent ont la même intensité et on s'intéressera à des points situés à une distance r de l'axe telle que $r \ll R$. On démontrera que $r^2 \simeq 2eR$, avec e l'épaisseur du coin d'air ainsi formé.
3. Décrire le système d'interférence observé (allure, écartement des franges brillantes,...).
Application numérique : $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ et $R = 5 \text{ m}$.
4. Que se passe-t-il si le miroir \mathcal{M}_s est translaté vers le haut d'une distance y ?



★★ 5- Mesure d'un angle de contact

Soit une goutte liquide (indice n) étalée sur un support solide réfléchissant et soit θ l'angle dit *de contact*. Un faisceau incident monochromatique, parallèle, suffisamment large, éclaire toute la goutte. On admet que la surface de séparation air-liquide est une calotte sphérique (portion de sphère) de rayon R très grand. On donne le diamètre d de la goutte. On pourra négliger la réfraction du rayon incident à l'interface air-liquide.



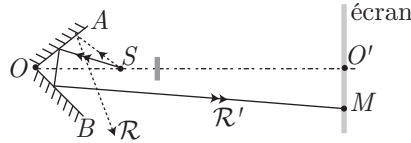
1. Montrer que l'on obtient un phénomène d'interférence. Donner la forme des franges.
2. Quel est le nombre de franges observées, en fonction de l'angle de contact ?
En déduire un principe de mesure de l'angle de contact.
Faire l'application numérique avec $n = 1,4$; $d = 0,5 \text{ mm}$; $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ et on observe 48 anneaux.

★★ 6- Variante des miroirs de Fresnel

Une source ponctuelle monochromatique, de longueur d'onde λ , est placée dans le plan bisecteur d'un dièdre réflecteur. Les faces du dièdre font entre-elles un angle égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ($\alpha \ll \pi$).

Un cache est placé en arrière de S pour qu'aucun rayon ne puisse atteindre directement l'écran.

La taille des miroirs OA et OB est suffisamment petite pour qu'un rayon (\mathcal{R}') arrivant en M doive se réfléchir deux fois (le rayon \mathcal{R} ne parvient pas en M).

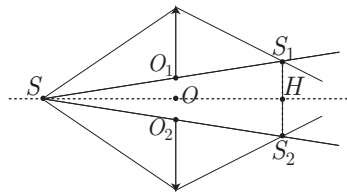


Déterminer l'interfrange de la figure d'interférence observée au voisinage du centre O' de l'écran dans la mesure où cet écran est placé suffisamment loin du système source-miroirs.

Application numérique : $OS = d = 10$ cm ; $OO' = D = 60$ cm ; $\lambda = 0,5$ μm ; $\alpha = 3'$ d'arc.

★★ 7- Demi-lentilles de Billet

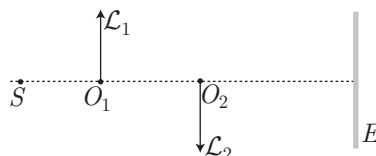
On découpe en deux, par un plan diamétral, une lentille convergente de distance focale $f = 0,5$ m et de rayon d'ouverture $R = 2$ m. On écarte les deux demi-lentilles obtenues symétriquement de $e = 1,2$ mm normalement à l'axe de révolution initial de la lentille unique. Sur cet axe, à une distance $p = 1$ m en avant de la position initiale du centre optique O de la lentille unique, on place une fente source infiniment fine S émettant une lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,55$ μm .



1. Déterminer les positions des images S_1 et S_2 de S à travers les deux demi-lentilles.
2. Déterminer la distance minimale d des demi-lentilles à l'écran pour laquelle il y a interférences.
3. L'écran est placé à $D = 2$ m des demi-lentilles. Calculer l'interfrange, la largeur du champ d'interférence et le nombre de franges brillantes.

★★ 8- Bilentilles de Meslin

Un dispositif interférentiel est composé d'une source ponctuelle de lumière monochromatique (longueur d'onde λ) éclairant deux demi-lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , obtenues à partir d'une même lentille convergente (distance focale $f' = 20$ cm) sciée suivant un diamètre et décalées suivant l'axe optique de $d = O_1O_2 = 10$ cm.



Le rayon de chaque demi-lentille est $R = 2$ cm.

On a $\lambda = 0,5$ μm et $SO_1 = 30$ cm.

1. Déterminer le champ d'interférence.
2. En un point M du champ d'interférence, déterminer la différence de chemin optique entre les deux rayons qui interfèrent. On appellera r la distance de M à l'axe.
On ne tiendra pas compte de l'avance de phase lors du passage d'une onde par un foyer et on se placera dans le cas où r reste très petit devant S_1H et S_2H (H étant le projet de M sur l'axe).
3. On place un écran perpendiculairement à l'axe SO_1O_2 , à une distance $D = 85$ cm de S .
Déterminer le nombre de franges brillantes dans ce plan.

9- D'autres planètes habitables ?

Extrait de CCP TSI

Alors que la Terre est actuellement la seule planète connue pour abriter la vie les astrophysiciens ont découvert une exoplanète bleue, nommée *Isis*.

On se propose dans cette partie d'analyser une technique de détection d'exoplanètes faisant appel à l'interférométrie.

I.A. La recherche d'exoplanètes

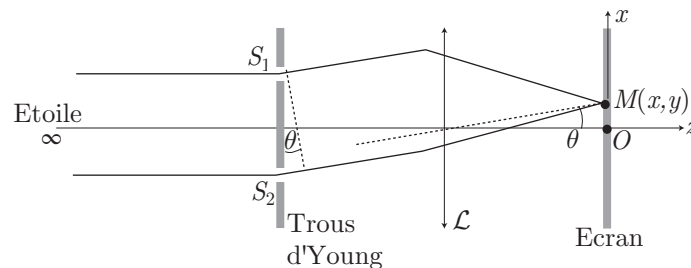
Comme notre planète, *Isis* orbite tourne autour d'une étoile.

L'observation du couple étoile-exoplanète est réalisé à une longueur d'onde λ (généralement située dans l'infrarouge).

Dans un premier temps, on considère uniquement l'étoile. On l'assimile à une source plane monochromatique de longueur d'onde λ se propageant suivant l'axe Oz à la célérité c .

Perpendiculairement à cet axe, on dispose un écran opaque percé de deux trous d'Young écartés d'une distance a . On note S_1 et S_2 les centres des deux trous d'Young (voir figure ci-dessous).

L'observation est effectuée sur un écran situé dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale f . On s'intéresse à l'onde lumineuse $s(M, t)$ en un point $M(x, y)$ de l'écran, résultant de la superposition des ondes venant de S_1 et S_2 . On note A l'amplitude de ces deux ondes et on suppose que leur déphasage à l'origine est nul.



Question 1. On rappelle que les capteurs optiques quadratiques fournissent un signal proportionnel à l'intensité lumineuse, c'est-à-dire proportionnel à la moyenne du carré du signal, notée $\langle s^2(M, t) \rangle$.

On note $I_0 = \frac{A^2}{2}$ l'intensité lumineuse de chacune des ondes.

On donne la formule de linéarisation suivante :

$$\cos a \times \cos b = \frac{1}{2} \times [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

Exprimer l'intensité lumineuse $I(M, t) = \langle s^2(M, t) \rangle$ au point M , en fonction de I_0 et de la différence de marche δ entre les deux chemins optiques.

Question 2. Rappeler les conditions principales pour que le phénomène d'interférences apparaissent. Ces conditions sont-elles réunies ici ?

Question 3. Déterminer la valeur du contraste.

L'utilisation d'une lentille impose d'être dans les conditions de Gauss.

Question 4. Rappeler les conditions de Gauss.

Question 5. On suppose les conditions de Gauss vérifiées. L'angle θ défini sur le schéma de la figure précédente est tel que :

$$\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta$$

L'indice optique de l'air est égal à 1.

Montrer que la différence de marche a pour expression : $\delta = \frac{a \times x}{f}$. En déduire l'expression de l'interfrange.

Question 6. Quelle est la forme des franges observées ? Sont-elles localisées ? Justifier.

On considère, dans un second temps, l'étoile et son exoplanète comme deux sources incohérentes planes monochromatiques de longueur d'onde λ , se propageant suivant l'axe Oz à la célérité c .

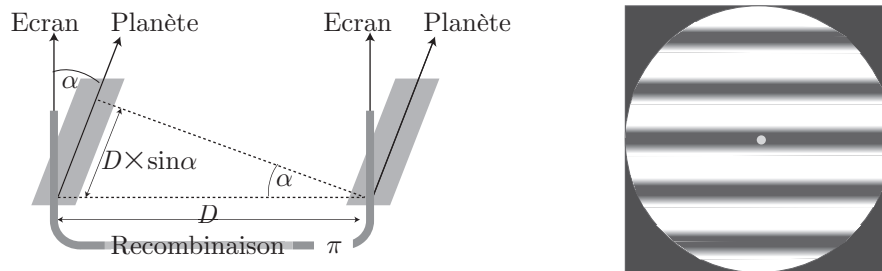
Question 7. Pour quelle raison ce dispositif ne permet-il pas de déterminer la présence d'une exoplanète ?

Pour mettre en évidence une exoplanète, on utilise deux télescopes sur une recombinaison optique située au milieu des deux télescopes. Ces faisceaux seront en phase et l'on obtiendra des interférences constructives. Ainsi, dans l'interférométrie classique, les signaux des deux télescopes se combinent pour construire une frange centrale

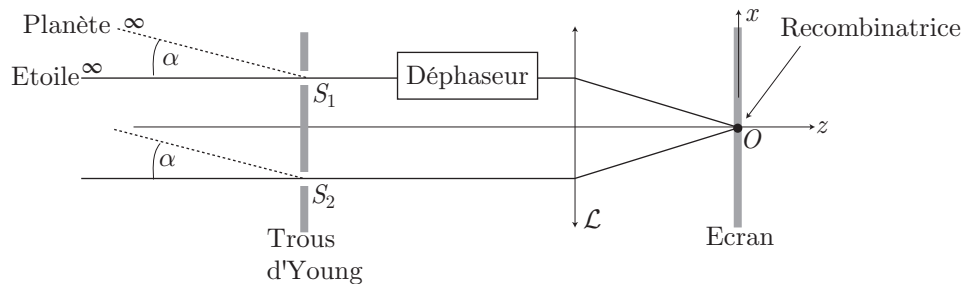
d'intensité maximale sur la ligne de visée, c'est-à-dire dans la direction de l'étoile observée. Cependant, à l'aide d'un principe ingénieux, l'interféromètre de Bracewell (voir figure ci-dessous), il est possible d'introduire sur le faisceau de l'un des télescopes un déphaseur achromatique de π , de sorte que les interférences deviennent destructrices dans la direction de l'étoile. On «éteint» ainsi le flux de l'étoile; c'est ce qu'on appelle *l'interférométrie à frange noire*.

Dans la direction de la planète, qui fait un angle α par rapport à la direction de l'étoile, on introduit une différence de marche supplémentaire de $D \times \sin \alpha$, où D est la distance entre les deux télescopes. Si on adapte D , on peut s'arranger pour qu'à la longueur d'onde d'observation, la différence de marche supplémentaire compense exactement le déphasage π introduit par le déphaseur. On réalise alors, dans la direction de la planète, des interférences constructives.

Toute source sur l'axe (ici l'étoile), donc sur la frange sombre, est éteinte de manière très efficace. Une source hors-axe (ici l'exoplanète), sur une frange claire, n'est pas ou peu affectée et est donc détectée avec un bien meilleur contraste.



Pour comprendre le fonctionnement de l'interféromètre de Bracewell, on se ramène à l'expérience des trous d'Young en considérant la direction de l'étoile suivant l'axe Oz et la direction de la planète (inclinée d'un angle α par rapport à la direction de l'étoile). Un déphaseur est introduit avant la lentille et la recombinaison est associée au point O de l'écran (cf. figure suivante).



Question 8. Lorsque l'interféromètre de Bracewell pointe en direction de l'étoile, quelle est l'expression de l'intensité lumineuse due uniquement à l'étoile en un point de la recombinaison? Quelle est la valeur de l'ordre d'interférences dans un tel cas?

Question 9. Lorsque l'interféromètre de Bracewell pointe en direction de l'étoile, quelle est l'expression de l'intensité lumineuse due uniquement à l'exoplanète en un point de la recombinaison pour un réglage optimal?

Question 10. Justifier que l'interféromètre de Bracewell permet de mettre en évidence la présence d'une exoplanète.

OPTIQUE

INTERFÉRENCES EN LUMIÈRE INCOHÉRENTE

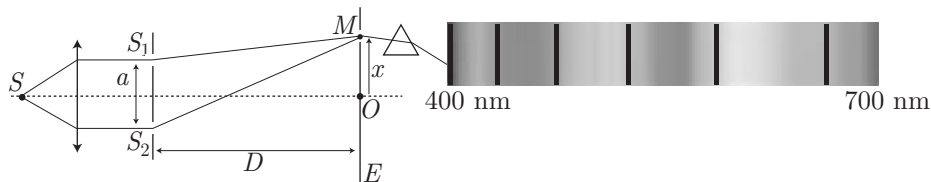
1- Source polychromatique

Deux fentes d'Young sont distantes de $a = 4 \text{ mm}$. Elles sont éclairées par une raie lumineuse de même intensité I_0 pour les deux longueurs d'onde $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$. On observe des franges d'interférences sur un écran situé à $D = 1 \text{ m}$ des fentes.

À quelle distance de la frange centrale celles-ci disparaissent-elles pour la première fois ?

2- Spectre cannelé

On réalise, en lumière blanche, une expérience de fentes d'Young classique avec $D = 1,5 \text{ m}$. On perce dans l'écran, à $x = 5 \text{ mm}$ de la médiatrice de S_1S_2 , une petite fente (parallèle aux fentes d'Young) derrière laquelle on place un prisme disperseur. À l'aide du spectre obtenu, calculer a .

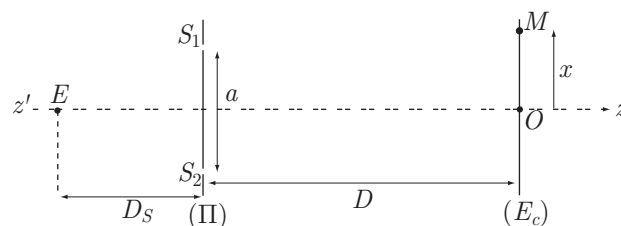


3- Séparation de deux étoiles

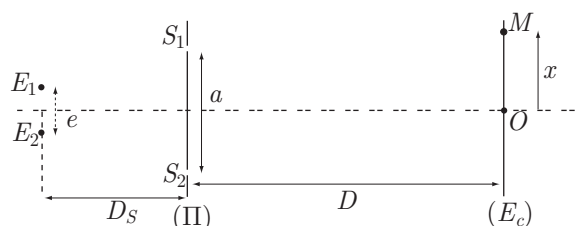
On veut déterminer la distance apparente entre deux étoiles par une méthode interférométrique.

On utilise un dispositif des trous d'Young, soit deux trous S_1 et S_2 de petite taille, percés dans un plan (II) de part et d'autre, à la même distance $\frac{a}{2}$, d'un axe optique $z'z$ orthogonal à (II). On éclaire ces trous à l'aide d'une source E lumineuse monochromatique, ponctuelle, de longueur d'onde λ située sur l'axe optique à une distance D_S de (II), et on observe le phénomène sur un écran (E_c), situé à une distance D de (II) et qui lui est parallèle.

- Donner l'expression de l'intensité (ou éclairement) $I(M)$ en un point M de l'écran, repéré par son abscisse x sur l'axe orienté $x'Ox$. L'étude se fait dans le plan de la figure.



- On étudie, à l'aide de ce dispositif d'Young, deux étoiles E_1 et E_2 , de même magnitude (leur intensité est la même). Par un filtrage approprié, on ne s'intéresse qu'à une seule de leur radiation commune λ . Les étoiles sont éloignées de e l'une de l'autre et à la distance D_S de la Terre. L'écartement a des trous S_1 et S_2 est réglable.



- Déterminer l'expression de l'intensité $I(M)$ en un point M de l'écran, repéré par son abscisse x sur l'axe orienté $x'Ox$.

b- On définit la visibilité par le rapport :

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

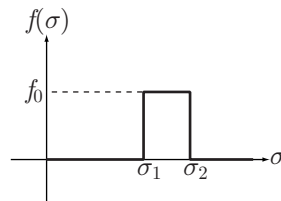
Déterminer la visibilité et représenter la fonction $\mathcal{V}(a)$.

c- En déduire que l'on peut déterminer l'angle apparent $\beta = \frac{e}{D_S}$ à partir de la valeur a_1 de a correspondant à la première annulation de la visibilité.

4- Lumière à bande spectrale

On réalise une expérience d'interférences lumineuses (deux fentes éclairées par une fente source) en utilisant une fente qui possède une faible largeur spectrale.

La répartition de l'intensité émise en fonction du nombre d'onde $\sigma = \frac{1}{\lambda}$ est représentée ci-dessous :



Dans un intervalle $d\sigma$, la source émet l'intensité $\delta I_0 = f(\sigma) d\sigma$. On posera :

$$\sigma_2 - \sigma_1 = \Delta\sigma \ll \sigma_0 = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

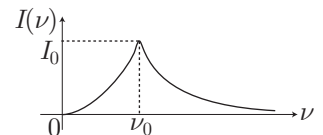
1. Déterminer l'intensité en fonction de δ , différence de marche en tout point.
2. Pour quelles valeurs de δ les franges disparaissent-elles ?

On rappelle que $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

★★ 5- Incohérence temporelle : source polychromatique

Deux fentes d'Young sont distantes de a . Elles sont éclairées par une source S dont le spectre est gaussien ; l'intensité de la lumière émise est de la forme $I(\nu) d\nu$, avec :

$$I(\nu) = I_0 \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\nu_m}\right)^2\right]$$



Le facteur ν_m est supposé petit devant ν et ν_0 de telle façon que l'intensité $I(\nu)$ décroisse rapidement au voisinage de ν_0 .

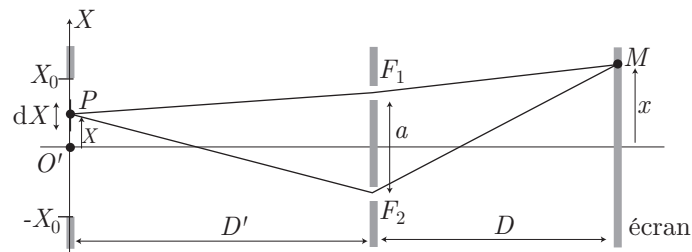
On observe les franges d'interférence sur un écran situé à $D = 1$ m des fentes.

1. Calculer, pour une bande de fréquences $d\nu$, la différence de marche en M d'abscisse x .
2. Calculer alors l'intensité lumineuse reçue par ce point.
3. Discuter succinctement de l'influence de la largeur du spectre sur le phénomène observé.

On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

★★ 6- Incohérence spatiale : source inhomogène

S est une source rectiligne dans la direction $O'X$, centrée sur O' . Elle est de longueur $2X_0$ et située à une distance D' d'un plan contenant deux fentes F_1 et F_2 , distantes de a , éclairant un écran situé à une distance D . On supposera $D \gg x$, $D \gg a$, $D' \gg a$ et $D' \gg 2X_0$.



1. Un élément de S , de longueur dX et centré sur P , émet une radiation monochromatique de longueur d'onde λ_0 , dont l'intensité est $\delta I_0(X) = \frac{I_0}{2X_0} \cos\left(\frac{\pi X}{2X_0}\right) dX$. Donner l'expression de l'intensité lumineuse produite en un point M du plan d'observation.
2. Donner l'expression du contraste.

OPTIQUE

INTERFÉRENCES À N ONDES

1- Réseau par transmission

On considère un réseau par transmission formé de traits fins, identiques, parallèles, distants de $a = 1 \mu\text{m}$ et de longueur très grande devant a . Le faisceau incident a une direction fixe et une longueur d'onde λ_0 dans le vide. Le réseau peut tourner autour de l'axe vertical Oz .

1. Comment obtenir expérimentalement un faisceau de lumière parallèle ? Comment observer une image à l'infini avec une lentille convergente de distance focale $f = 1 \text{ m}$?
2. Déterminer les valeurs de l'angle de diffraction pour lesquelles on observe un maximum de lumière à l'ordre k .
3. Pour un ordre k non nul, déterminer la déviation minimale D_m en fonction de k , λ_0 et a .
4. La source S est une lampe à vapeur de sodium. On étudie le spectre à l'ordre 2. Calculer la distance qui sépare les deux raies jaunes sur l'écran (longueurs d'onde dans le vide : $\lambda_{01} = 589,0 \text{ nm}$ et $\lambda_{02} = 589,6 \text{ nm}$) en se plaçant au minimum de déviation pour λ_{01} .

2- Aile du papillon Morpho Retenor

Le *morpho retenor* est un papillon, connu pour la couleur bleue électrique de ses ailes. Or, après analyse chimique des ailes, aucun pigment ne permet d'en expliquer la couleur. En revanche, une étude d'aile au microscope électronique révèle une structure crénelée régulière.

1. Expliquer comment cette structure permettrait d'en expliquer la couleur.
2. On modélise la structure crénelée par un escalier. La lumière naturelle arrive perpendiculairement aux «marches» équidistantes. Calculer la différence de marche entre deux rayons successifs en supposant, dans un premier temps, que l'air a pour indice n .
3. En supposant $n = 1$, établir l'ordre de grandeur de la distance entre les marches. À cet effet, vous écrirez une condition liant la différence de marche et la longueur d'onde.
4. Justifier pourquoi les ordres d'interférences supérieurs à 1 sont à exclure.

3- Pouvoir de séparation d'un réseau

Soit un réseau par transmission, éclairé en incidence normale par le doublet du sodium ($589,0 \text{ nm}$ et $589,6 \text{ nm}$) sur une longueur $L = 5 \text{ mm}$. On observe la séparation du doublet à partir du spectre d'ordre 2.

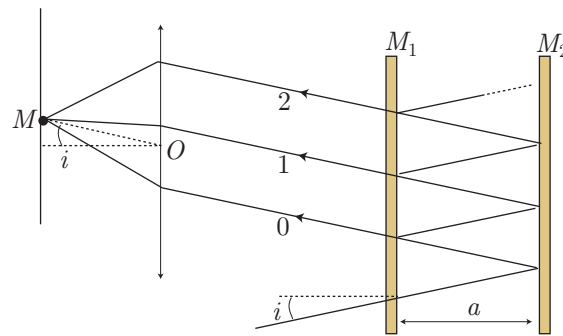
1. Quelle est la valeur limite a_ℓ du pas du réseau ?
2. Quelle est la largeur utile L' de ce réseau (de pas a_ℓ) autorisant la séparation, à partir du spectre d'ordre 3, des radiations de longueurs d'onde $\lambda_1 = 460,00 \text{ nm}$ et $\lambda_2 = 460,13 \text{ nm}$?

4- Interféromètre de Fabry-Perot

Un interféromètre de Fabry-Perot est formé de deux miroirs parallèles M_1 et M_2 , semi-réfléchissants, distants de a . On note r le coefficient de réflexion en amplitude de l'onde lumineuse et t le coefficient de transmission des miroirs :

$$r = \frac{a_r}{a_i} \in \mathbb{R} \quad t = \frac{a_t}{a_i} \in \mathbb{R}$$

Une onde lumineuse incidente frappe M_1 avec un angle d'incidence i très faible. Elle subit une suite infinie de transmissions et de réflexions. On fait l'observation à l'infini dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f' .



On note $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ les amplitudes complexes des ondes lumineuses en M , des rayons successifs émergent de M_1 . On pose : $\varphi = \frac{4\pi a \cos i}{\lambda_0}$.

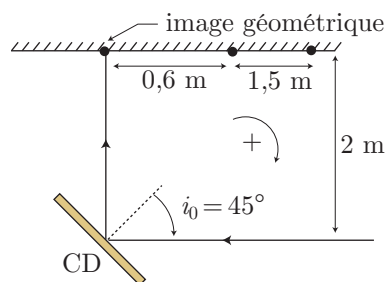
1. Déterminer la différence de marche en M entre les rayons n et $n + 1$.
2. Déterminer le rapport entre les amplitudes complexes des ondes correspondantes.
3. Montrer que l'intensité lumineuse en M s'écrit :

$$I(\varphi) = \frac{J_0}{1 + m \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}$$

Exprimer m en fonction de r et faire l'application numérique avec $r = 0,9$.

5- Capacité de stockage des CD et DVD

1. On étudie un réseau en réflexion. Établir la formule du réseau dans cette utilisation, en orientant les angles.
2. Avec un pointeur LASER ($\lambda = 0,633 \mu\text{m}$) et un CD ou un DVD, vous pouvez faire chez vous la manipulation suivante : vous «attaquez» la surface du CD avec le faisceau LASER sous un angle d'environ 45° . Sur le mur, à une distance d'environ 2 m, on observe un point lumineux qui correspond à l'image géométrique et deux traits légèrement courbés, le premier étant à une distance de 0,6 m environ du point lumineux. La distance entre les deux traits est de 1,5 m.



Avec le DVD, on observe sur le mur un point lumineux et un seul trait lumineux à plus de 2 mètres de l'image géométrique (on observe aussi une sous-structure au niveau des traits, selon que le CD ou le DVD est simple ou double couche).

Interpréter ces observations.

3. Donner un ordre de grandeur, en octets, de la capacité de stockage de ces deux supports.

★★ 6- Réseau avec défaut

On étudie un réseau plan par transmission, pour lequel la gravure n'a pas été parfaite. Les abscisses des traits sont données par :

$$x_m = a \times \left(m + \varepsilon \sin \frac{2\pi m}{P} \right) \text{ où } m \in \{0; 1; \dots; N - 1\}$$

où le terme ε représente le défaut.

Montrer que chaque raie principale du réseau sans défaut ($\varepsilon = 0$) est entourée de deux raies secondaires dont

l'existence résulte du mauvais tracé des traits.

On pourra admettre que la valeur de ε est suffisamment petite pour pouvoir linéariser les exponentielles : $e^{j\varepsilon K} \sim 1 + j\varepsilon K$.

★ 7- Pouvoir de résolution d'un réseau

On s'intéresse au cas d'un réseau constitué de fentes infiniment fines et parallèles entre elles, toutes équidistantes deux à deux, cette distance étant appelée *pas du réseau* a . Soit une source ponctuelle monochromatique située à l'infini et dont la direction du faisceau est colinéaire à la normale au réseau.

1.
 - a- Donner le déphasage, à l'infini, entre deux rayons successifs.
 - b- Que vaut alors l'amplitude totale en un point M hors de l'axe, à l'infini ?
 - c- En déduire l'intensité.
 - d- Tracer les variations de l'intensité en fonction de la position sur l'écran.
 - e- Quels sont les lieux des maxima d'éclairement ? Comparer la loi du réseau.
2. Considérons un réseau parfait.
 - a- Exprimer la loi générale du réseau.
 - b- Comment peut être simplifiée la loi du réseau dans le cas où, en incidence normale, la direction de la lumière diffractée par rapport à la normale est d'angle faible par rapport à 1 rad.
 - c- Dans le cas d'une lumière polychromatique, comparer le spectre obtenu aux ordres $+1$ et -1 à celui de générerait un prisme.
 - d- Exprimer la loi générale du réseau puis en déduire celle du minimum de déviation.
3. Choisissons cette fois une source lumineuse constituée d'une fente colinéaire à la direction principale des fentes du réseau. La largeur de cette fente est b . La fente est placée au foyer objet d'une lentille convergente de distance focale f' . La lumière éclaire le réseau au minimum de déviation. On souhaite séparer deux raies dont les longueurs d'onde sont proches et séparées de $\Delta\lambda$. La lumière est recombinaée après diffraction à l'aide d'une lentille convergente identique à la première. Soit i_p l'angle sous lequel ressort le faisceau après diffraction, à l'ordre p , à longueur d'onde donnée.
 - a- Sous quels angles extrêmes la lumière arrive-t-elle sur le réseau ? En déduire la largeur angulaire Δi_0 du faisceau incident, en fonction de b et f' .
 - b- Montrer que les deux raies sont séparées si b est inférieur à une valeur maximale qu'on exprimera en fonction de f' , p , a , $\Delta\lambda$, en supposant i_p petit.
 - c- Exprimer la dispersion $\frac{di_p}{d\lambda}$ puis le pouvoir séparateur $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ du dispositif. Montrer en particulier que le pouvoir séparateur s'exprime en fonction de l'ordre p et du nombre total de fentes éclairées.
 - d- Conclure quant à la nature des paramètres sur lesquels il faut jouer pour réussir à séparer les deux raies.

OPTIQUE

INTERFÉROMÈTRE DE MICHELSON

1- Doublet du sodium

Un interféromètre de Michelson est réglé en miroirs parallèles et est éclairé en lumière parallèle au moyen d'une lampe à vapeurs de sodium ne fournissant que les seules raies du doublet D , avec $\lambda_1 = 589,0$ nm et $\lambda_2 = 589,6$ nm. Un moteur déplace lentement un des miroirs perpendiculairement à son plan, de sorte que la distance x entre les miroirs soit égale, à l'instant t , à $V \times t$, où V est la vitesse de translation du miroir. On mesure en permanence l'éclairement au centre de la figure d'interférence en disposant un appareil de mesure au foyer principal image d'une lentille mince convergente disposée en sortie de l'interféromètre.

1. Établir l'expression de l'intensité I en fonction du temps t et donner l'allure de la courbe correspondante.
2. Calculer le nombre de franges claires enregistrées entre deux annulations du contraste.

2- Interféromètre avec lame

On interpose, sur le trajet du miroir M_1 d'un Michelson réglé en lame d'air, une très mince lame transparente d'indice $n = 1,52$ et d'épaisseur ℓ inconnue, parallèlement au miroir. On observe un défilement de 36 franges avec la raie du cadmium à $\lambda = 509$ nm. Que vaut ℓ ?

3- Configuration du coin d'air

On étudie un interféromètre de Michelson monté en coin d'air et on observe directement à l'œil.

Le faisceau est monochromatique de longueur d'onde λ_1 ; la source, ponctuelle, est placée au foyer objet d'une lentille convergente. On suppose que les miroirs sont à égale distance de la séparatrice et on fait tourner le miroir M_1 d'un angle α très faible autour de son axe.

1. Déterminer l'intensité en un point P de M_2 , repéré par son abscisse X à partir du centre de la figure d'interférences.

En déduire l'expression de l'interfrange i en fonction de λ_1 et α .

2. Donner une application pratique de ce phénomène pour le miroir M_1 , en supposant le miroir M_2 parfait.
3. La source n'est plus, cette fois-ci, monochromatique. S provient d'une lampe à vapeur de sodium dont le spectre d'émission ne contient que deux raies de couleur jaune, de longueurs d'onde $\lambda_1 = 0,5889 \mu\text{m}$ et $\lambda'_1 = \lambda_1 + \Delta\lambda$, avec $\Delta\lambda \ll \lambda_1$.

On déplace M_1 dans la direction de la séparatrice de manière à faire défiler les franges étudiées dans les questions précédentes. On constate que les franges se brouillent et disparaissent au bout de 500 franges.

Expliquer ce phénomène.

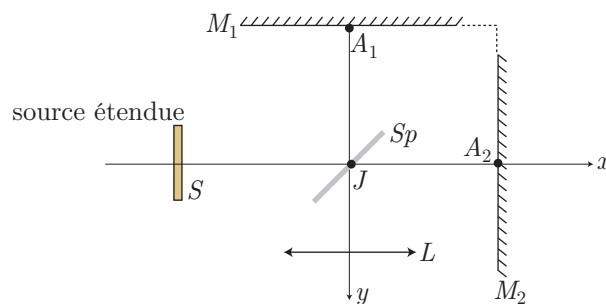
En déduire $\Delta\lambda$ et λ'_1 .

4- Raie à profil rectangulaire

Un interféromètre de Michelson est constitué par une lame semi-réfléchissante, non absorbante, appelée séparatrice (Sp), dont les facteurs de transmission et de réflexion valent $\frac{1}{2}$, et de deux miroirs plans M_1 , M_2 perpendiculaires l'un à l'autre. Les distances JA_1 et JA_2 sont égales. La lame Sp est inclinée à 45° par rapport aux normales à M_1 et M_2 .

La radiation utilisée est la raie rouge du cadmium à profil rectangulaire. On appelle A la densité spectrale de fréquence de l'éclairement. L'éclairement dû à la bande spectrale $[\nu, \nu + \Delta\nu]$, lorsque l'une des voies de l'interféromètre est occultée, est $A d\nu$ pour une fréquence comprise entre $\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}$ et $\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}$. ν_0 est la fréquence centrale de la raie correspondant à la longueur d'onde dans le vide $\lambda_0 = 643,8$ nm. L'indice de l'air vaut 1,0. On se place au contact optique. On fait tourner le miroir M_2 d'un angle $\alpha \ll 1$ autour d'un axe perpendiculaire au plan (JA_1A_2) et passant par A_2 .

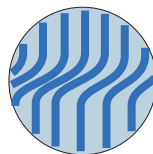
On rappelle que : $\sin p - \sin q = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$



1. Calculer la différence de marche et caractériser le système de franges.
2. On translate le miroir M_2 de façon à faire défiler les franges. Le contraste s'annule la première fois au point A_1 pour $e = 15$ cm. Calculer $\Delta\nu$.
3. Calculer la longueur de cohérence et la durée moyenne d'un train d'onde. Conclusion ?

5- Michelson en coin d'air

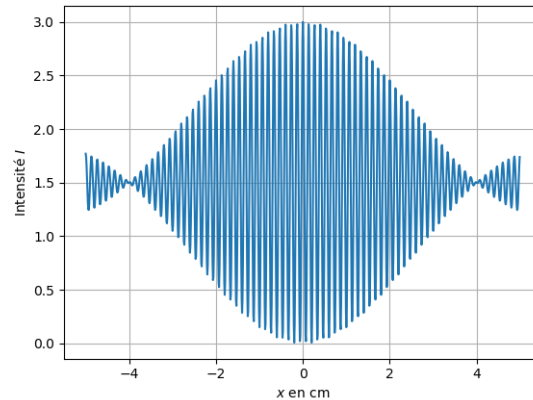
Un Michelson, réglé en coin d'air, est éclairé en lumière monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 580$ nm. On observe sur un écran les franges du coin d'air :



1. La figure observée peut être interprétée comme un défaut de planéité d'un des miroirs. Dans cette hypothèse, évaluer l'épaisseur de ce défaut.
2. Elle peut également provenir de la présence, sur un des miroirs, d'une nappe d'air d'épaisseur $e = 1$ mm, d'indice n différent de 1. Évaluer cet indice.

★★ 6- Bande passante d'un filtre

Un Michelson est réglé en lame d'air au voisinage du contact optique. Il est éclairé par une lumière blanche avec un filtre interférentiel. On utilise un dispositif d'enregistrement des franges d'égale inclinaison : caméra CCD ou photodiode reliée à une table traçante d'abscisse x . On enregistre l'interférogramme : intensité I en fonction de x (en cm) au centre des anneaux en faisant varier l'épaisseur e de la lame d'air. On donne v_t la vitesse de translation du miroir mobile du Michelson (1 tour – $500 \mu\text{m}$ pour 30 minutes) et la vitesse v_d du système enregistreur (pour la table traçante, c'est la vitesse de déplacement du papier : 8 cm par minute).



Sur l'enregistrement, on peut mesurer $N = 61$ oscillations entre deux brouillages. En déduire la longueur d'onde moyenne et l'ordre de grandeur de la bande passante.

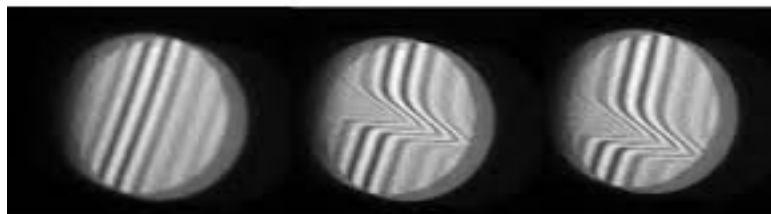
★★ 7- Signal détecté par une cellule

L'interféromètre de Michelson est utilisé en lumière monochromatique (longueur d'onde λ) dans la configuration lame à faces parallèles (épaisseur e). Dans le plan focal image de la lentille d'observation (distance focale f) on place un récepteur sensible à l'intensité. Il s'agit d'une cellule dont la face d'entrée, centrée sur le foyer de la lentille, possède un diamètre $2R$.

1. Déterminer le signal délivré par la cellule ($f \gg R$).
2. On fait varier e très lentement. Comment évolue le contraste ?

★ 8- Défauts sur une lame de verre

On règle un interféromètre de Michelson pour observer les franges d'égale épaisseur du coin d'air en lumière de la lampe au sodium, considérée comme monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = 590 \text{ nm}$. On introduit devant le miroir M_1 une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e' et d'indice $n' = 1,5$ parfaitement homogène, qui n'a pas la même épaisseur e' partout. On peut ainsi détecter les défauts. La figure ci-dessous montre la déformation due à une «bosse». Donner une évaluation de la hauteur $\Delta e'$ de la bosse.



THERMODYNAMIQUE

PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

1- Travail d'une force extérieure

Un corps de pompe cylindrique et horizontal, à parois parfaitement diathermanes, est fermé par un piston de masse négligeable, coulissant sans frottements. À l'extérieur du cylindre, la température est T_0 et la pression est p_0 . À l'intérieur se trouve une mole de gaz sous la pression $p_i > p_0$. On raisonnera sur une mole de gaz, dont l'équation d'état est :

$$p(V - b) = RT$$

où b et R sont des constantes.

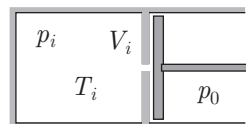
Le système est maintenu en équilibre au moyen d'une force F appliquée sur le piston, perpendiculairement à celui-ci.

1. On supprime brusquement la force F et on attend que le gaz atteigne un nouvel état d'équilibre. Quel est alors le volume V_f du gaz ?
Calculer le travail échangé par le gaz avec le milieu extérieur au cours de cette transformation.
2. Le gaz est maintenant détendu de manière quasi statique, de l'état initial à l'état final précédent. Quel est alors le travail échangé entre le gaz et le milieu extérieur ?
3. Que se passe-t-il lorsque la pression p_i est très voisine de la pression extérieure ?

2- Application du premier principe

Un cylindre, à parois parfaitement calorifugées, contient un compartiment, de volume V_i constant, qui communique avec un piston par un petit trou. Initialement, le compartiment est rempli d'un gaz parfait et le piston est maintenu contre l'ouverture du compartiment. L'ensemble est immergé dans l'atmosphère où règne la pression constante p_0 .

On relâche la contrainte sur le piston, qui se met alors en mouvement. Lorsque celui-ci s'arrête, la température du gaz vaut T_f .



Le gaz parfait se trouve initialement sous la pression $p_i > p_0$ et à la température T_i .

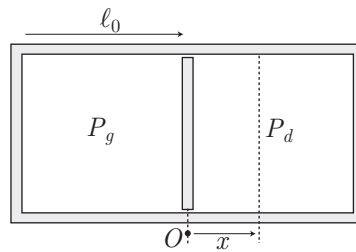
1. Exprimer le travail W qu'exerce l'atmosphère au cours de cette transformation, en fonction de T_i , p_0 , p_i , T_f , n (quantité de matière) et R (constante des gaz parfaits).
2. Exprimer T_f en fonction de p_0 , p_i , T_i et $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$.
3. On appelle $\Delta p = p_i - p_0$ la surpression initiale qui règne dans le compartiment. Montrer que la variation relative de température vérifie la loi :

$$\frac{T_f - T_i}{T_i} = \frac{1 - \gamma}{\gamma} \frac{\Delta p}{p_i}$$

Commenter le signe de $T_f - T_i$

3- Oscillations adiabatiques réversibles

Un cylindre calorifugé, horizontal, séparé en deux compartiments par un piston calorifugé, de masse m , mobile sans frottements, contient à l'état initial une mole de gaz parfait (P_0 , V_0 , T_0) de chaque côté.



À l'instant $t = 0$, l'opérateur écarte le piston de sa position d'équilibre x_0 , faible devant la longueur ℓ_0 d'un compartiment ($V_0 = \ell_0 s$).

En appelant, à l'instant t (*cf.* figure), x la coordonnée de position du piston, exprimer, en supposant les transformations mécaniquement réversibles :

1. les pressions instantanées à droite et à gauche et la force qui en résulte (on suppose que la loi de Laplace est vérifiée) ;
2. la période des petites oscillations obtenues, en fonction de m , ℓ_0 , γ , P_0 et s .

4- Les principes de la thermodynamique

Dans l'exercice, on considérera un gaz parfait monoatomique : le rapport des capacités thermiques respectivement à pression et à volume constants sera pris égal à $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3}$.

On rappelle la valeur de la constante des gaz parfaits : $R = 8,32 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

On dispose d'un gaz parfait monoatomique à la température $T_0 = 1000 \text{ K}$ et à pression $P_0 = 10^6 \text{ Pa}$ et l'on cherche à extraire de ce fluide une énergie mécanique maximale (on pourra imaginer, par exemple, qu'il s'agit d'une source géothermique).

Nous allons étudier deux processus de détente d'une mole, de son état initial (P_0, T_0) à différents états notés (P, T) .

1. Détente adiabatique réversible

Déterminer la loi d'évolution du rapport des températures finale et initiale $\frac{T_1}{T_0}$, en fonction du rapport des pressions finale et initiale $\frac{P_1}{P_0}$.

Évaluer également le travail mécanique fourni par le fluide ainsi que sa variation d'entropie.

Calculer numériquement la température finale T_1 et l'énergie extraite, par mole, pour $P_1 = 10^5 \text{ Pa}$.

2. Deuxième type de détente

On enferme une mole de gaz parfait avec les conditions : $P_0 = 10^6 \text{ Pa}$, $T_0 = 1000 \text{ K}$, dans un cylindre fermé par un piston de masse négligeable. La détente est réalisée de façon adiabatique irréversible en relâchant le piston sur lequel s'applique cependant une pression P_2 .

Soit T_2 la température de l'état d'équilibre final à la pression P_2 .

a- Montrer que :

$$\frac{T_2}{T_0} = \frac{1}{\gamma} \left[1 + (\gamma - 1) \frac{P_2}{P_0} \right]$$

b- Calculer numériquement T_2 , l'énergie mécanique fournie par le fluide ainsi que sa variation d'entropie pour $P_2 = 10^5 \text{ Pa}$.

c- Tracer, sur le même graphe, le rapport des températures initiale et finale $\frac{T}{T_0}$ en fonction du rapport $\frac{P}{P_0}$ pour les deux modes de détente des questions 2. et 3.

Placer soigneusement les deux courbes l'une par rapport à l'autre. Commenter.

★★ 5- Remplissage d'un récipient vide

Un récipient, à parois parfaitement calorifugées et de volume $V_0 = 10 \text{ L}$, est placé dans une atmosphère composée d'un gaz parfait de température $T_0 = 20^\circ\text{C}$, sous la pression atmosphérique $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

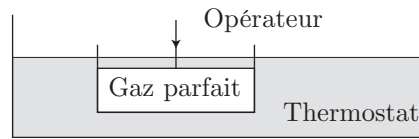
Le récipient étant initialement vide, on le perce d'un petit trou et on laisse le gaz pénétrer à l'intérieur du récipient.

Quelle est la température du gaz à l'intérieur du récipient lorsque celui-ci est rempli ?

Le gaz de cette atmosphère a un rapport des capacités thermiques $\gamma = 1,4$.

★ 6- Calorimétrie par changement d'état

Une mole de gaz parfait est isolée dans un cylindre fermé par un piston de masse négligeable. L'appareil est plongé dans un thermostat à 0°C , constitué par un mélange d'eau et de glace à l'équilibre. Par sa face supérieure, le piston reste en contact avec l'atmosphère. La pression atmosphérique est $P_0 = 1 \text{ bar}$, la température du gaz est $T_1 = 0^\circ\text{C}$ et sa pression est $P_1 = 2,72 \text{ bar}$.



Un opérateur agit sur le piston mobile pour détendre réversiblement le gaz jusqu'à la pression $P_2 = 1 \text{ bar}$, à laquelle correspond le volume $V_2 = 22,4 \text{ L}$ occupé par le gaz.

Durant cette détente, calculer :

1. le travail effectué par l'opérateur (en Joules) ;
2. la masse de glace (en grammes) qui se forme dans le thermostat.

Données :

- chaleur latente de fusion de la glace : $L_f = 334 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$;
- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

★★ 7- Relation de Mayer généralisée

On considère un système fermé constitué de n moles d'un fluide quelconque, de capacités thermiques C_p et C_V .

1. Montrer que, d'une manière générale :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 1 \text{ et } \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = -1$$

2. Montrer que :

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V \text{ et } \left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p$$

Pour établir ces relations, on pourra admettre que, d'une manière générale :

$$dU = C_V dT + \ell dV \text{ et } dH = C_p dT + h dp$$

où $\ell(T, V)$ et $h(T, p)$ sont des fonctions qui sont nulles pour un gaz parfait.

3. Établir que :

$$C_p - C_V = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

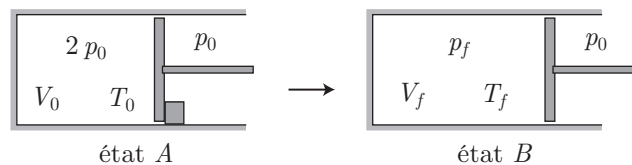
4. Examiner le cas du gaz parfait.

THERMODYNAMIQUE

DEUXIÈME PRINCIPE DE LA THERMODYNAMIQUE

1- Transformation irréversible

Un gaz parfait, initialement à la température T_0 et sous la pression $2p_0$, occupe le volume V_0 d'un cylindre fermé par un piston, maintenu en place à l'aide d'une cale. La pression extérieure vaut $p_{\text{ext}} = p_0$ et le déplacement du piston peut s'effectuer sans frottements. La cale est retirée soudainement, ce qui provoque la détente du gaz jusqu'à ce qu'il occupe un volume V_f à la température T_f , lorsque le piston s'immobilise à nouveau. On notera A et B les deux états d'équilibre du gaz.



Les parois du récipient sont supposées calorifugées, de même que le piston.

1. À l'aide du premier principe de la thermodynamique, exprimer la température T_f en fonction de T_0 et du rapport $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{Vm}} = 1,4$ des capacités thermiques molaires du gaz parfait à pression et volume constants.
2. En déduire l'expression de la variation d'entropie ΔS entre les états A et B .
3. Quel est le signe de ΔS ? Commenter.

2- Création d'entropie

Pour comprimer un gaz de façon monotherme, on opère en deux temps :

- Compression rapide (pratiquement adiabatique et irréversible) depuis l'état (p_0, T_0) jusqu'à l'état (p_1, T_1) ;
- refroidissement monobare de T_1 à T_0 .

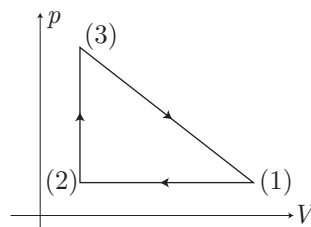
L'air ambiant reste à la température T_0 . Calculer la variation d'entropie du gaz et l'entropie créée dans le gaz.

Application numérique :

$$p_0 = 10^5 \text{ Pa} \quad p_1 = 25 p_0 \quad R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \quad \gamma = 1,4 \quad n = 1 \text{ mole}$$

3- Transformation cyclique

Une mole de gaz parfait subit les transformations réversibles suivantes : isobare ($1 \rightarrow 2$), isochore ($2 \rightarrow 3$) et la transformation $3 \rightarrow 1$ se fait de manière qu'il existe des constantes α et β telle que $p = \alpha V + \beta$.



1. Déterminer, en fonction des pressions et volumes p_1, V_1 et p_3, V_3 des états (1) et (3), les constantes α et β .
2. Déterminer, en fonction des mêmes paramètres, le travail total reçu par le gaz au cours du cycle.
3. Calculer la variation d'entropie du gaz au cours de chaque transformation, en fonction des mêmes paramètres, ainsi que des coefficients calorimétriques γ et R .

4- Entropie d'une phase condensée

Un corps (S) non gazeux, de capacité thermique constante C , se trouve initialement à la température $T = T_0$. Il est mis en contact avec un thermostat de température T_1 , de sorte que T finit par adopter la valeur T_1 .

1. Quelles sont les états initial et final du solide ?
Pourquoi la transformation proposée n'est-elle pas réversible ? Comment envisager une transformation réversible qui permettrait de relier ces deux mêmes états.
2. En déduire la variation d'entropie ΔS de (S) au cours de cette transformation, en fonction de C , T_0 et T_1 .
3. Établir l'expression de l'entropie d'un corps non gazeux.
4. Quelle est l'expression de l'entropie créée S_c au cours de cette transformation, en fonction des mêmes paramètres ?
5. Quel est le signe de S_c ? Commenter.

5- Entropie de contact entre deux solides

On met en contact, sans fournir de chaleur et à pression constante, une masse m d'un solide, de capacité thermique massique c , à la température T_{10} avec une masse double d'un solide de même nature à la température T_{20} .

Calculer la variation d'entropie ΔS du système lorsque le nouvel état d'équilibre est atteint.

Trouver le signe de ΔS et commenter.

★ 6- Bilan d'énergie

On fait subir, à un kilogramme de gaz contenu dans un cylindre muni d'un piston, une transformation isotherme réversible qui le fait passer de l'état $P_1 = 0,68$ atm, $T_1 = 422$ K à l'état $P_2 = 4,56$ atm. Calculer les échanges d'énergie (travail et chaleur) nécessaires à la réalisation de cette transformation.

Les tables donnent les enthalpies massiques (h en kJ.kg^{-1}), les entropies massiques (s en $\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$) et les volumes massiques (v en $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$) et on rappelle que $1 \text{ atm} = 1,013.10^5 \text{ Pa}$.

	$P_1 = 0,68 \text{ atm et } T_1 = 422 \text{ K}$	$P_2 = 4,56 \text{ atm et } T_2 = 422 \text{ K}$
h	2 777	2 743
s	7,785	6,846
v	2,809	0,4035

★ 7-Bilan d'énergie

Une masse de 1 kg de vapeur d'eau est contenue dans un cylindre muni d'un piston.

L'état initial est fixé par $P_0 = 2,04$ atm et $T_0 = 422$ K.

Après compression, on fait passer la vapeur d'eau à l'état $P_f = 4,08$ atm et $T_f = 533,6$ K.

1. On suppose le cylindre et le piston calorifugés. Déterminer le travail qu'il a fallu fournir pour réaliser la transformation adiabatique. Est-elle réversible ?
2. Envisager une suite de deux transformations réversibles simples subies par la vapeur, qui conduirait au même état final.

Déterminer, dans chaque cas, les échanges d'énergie avec le milieu extérieur.

On rappelle que $1 \text{ atm} = 1,013.10^5 \text{ Pa}$ et on donne :

P (atm)	v ($\text{m}^3.\text{kg}^{-1}$)	h (kJ.kg^{-1})	s ($\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$)	T (K)
2,04	1,0426	2 766	7,2853	422
4,08	0,5870	2 984	7,4013	533,3

★★ 8- Suite infinie de transformations

On fait subir à n moles de gaz parfait ($\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \text{cte}$) une suite de compressions isothermes réversibles et de détentes adiabatiques réversibles entre les pressions P_1 et $P_2 > P_1$ (chaque compression est suivie d'une détente).

Dans l'état initial, la pression du gaz est P_1 et sa température T_0 .

1. Représenter, dans un diagramme de Clapeyron, la suite des transformations subies par le gaz. Déterminer les températures T_k des différentes isothermes (après la première détente isentropique, la température du gaz est noté $T_1 \dots$).
2. Calculer les échanges énergétiques (transferts thermiques et travaux) ayant lieu entre le gaz et l'extérieur. On calculera notamment le travail total W_N et l'énergie thermique totale Q_N reçus par le gaz après une succession de N compressions-détentes.
3. Déterminer les limites $W_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} W_N$ et $Q_\infty = \lim_{N \rightarrow \infty} Q_N$ à T_0 , P_1 et T_f fixés (T_f représente la température finale). Commenter ces résultats.

On pourra poser $\alpha = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

THERMODYNAMIQUE

FLUIDES EN ÉCOULEMENT, MACHINES THERMIQUES

1- Cycle de Beau De Rochas

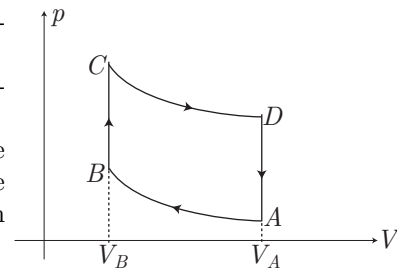
Le cycle d'un moteur à explosion à quatre temps comprend :

- deux transformations adiabatiques réversibles : compression AB d'un mélange air-combustible et détente CD des gaz brûlés.
- deux transformations à volume constant : échauffement de T_B à T_C (volume $V_B = V_C$) et refroidissement de T_D à T_A (volume $V_D = V_A$).

En supposant que tout se passe comme si le cycle se rapportait à une masse invariable d'air se comportant comme un gaz parfait de capacité thermique C_V , calculer le rendement ρ du cycle, en fonction du taux de compression

$$a = \frac{V_A}{V_B} \text{ et de } \gamma = \frac{C_p}{C_V}.$$

Application numérique : $a = 8$ et $\gamma = 1,3$.



2- Écoulement et création d'entropie

De l'azote, assimilé à un gaz parfait diatomique (masse molaire $M = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $\gamma = 1,4$) s'écoule en régime permanent dans une turbine, avec un débit massique $D_m = 4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Les conditions d'écoulement sont :

- à l'entrée : pression $P_1 = 4$ bars ; vitesse $v_1 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$;
- à la sortie : pression $P_2 = 2$ bars ; vitesse $v_2 = 180 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

La turbine fournit à l'extérieur une puissance mécanique $\mathcal{P} = 80 \text{ kW}$, le gaz sortant à une température T_2 égale à la température extérieure $T_a = T_2 = 298 \text{ K}$.

1. a- Dans l'hypothèse où la transformation subie par l'azote est isotherme, quelle est la puissance thermique \dot{Q} reçue par le gaz ?
b- Calculer la variation d'entropie par seconde de l'azote et en déduire la création d'entropie par seconde pour la turbine.
2. a- Si le gaz a subi une transformation adiabatique, quelle est sa température à l'entrée de la turbine ?
b- En déduire la création d'entropie par seconde dans la turbine.

Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

3- Équilibre liquide-vapeur

1. Calculer, à $T = 100^\circ\text{C}$ et sous $P = 1 \text{ bar} = P_{\text{sat}}$, les volumes massiques de la vapeur d'eau et de l'eau liquide en équilibre.
2. On dispose à cette température d'une masse totale d'eau $m = 9,1 \text{ g}$ dans un récipient de volume total $V = 5,4 \text{ L}$.
a- L'eau est-elle à l'état liquide, vapeur ou mélange liquide-vapeur dans le récipient ?
b- Calculer la masse de liquide m_ℓ , la masse de vapeur m_v , le volume de liquide V_ℓ , le volume de vapeur V_v , le titre de vapeur x_v et la pression dans le récipient.

4- Échangeur thermique

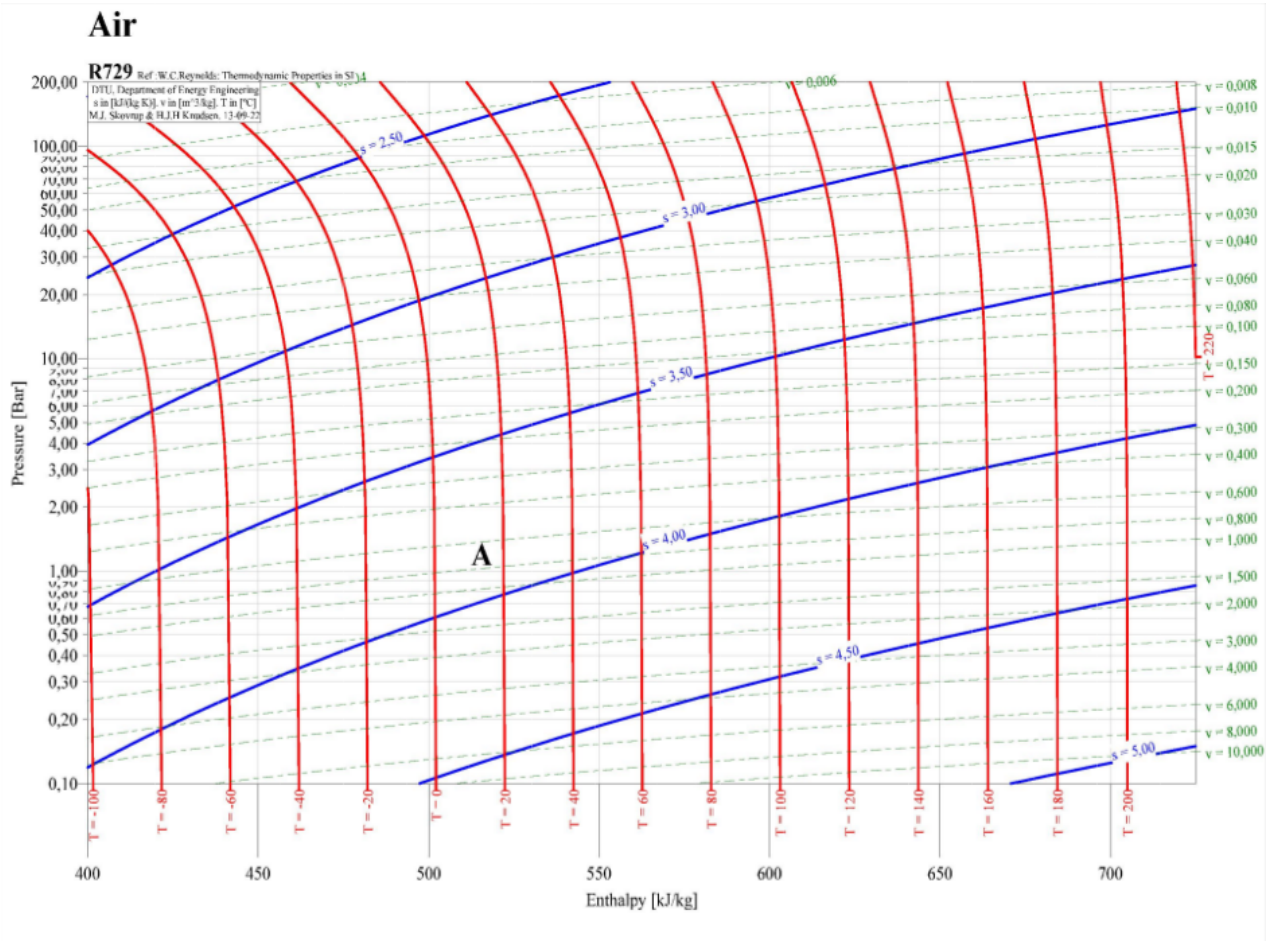
On considère un échangeur de chaleur isolé de l'extérieur à deux entrées et deux sorties fonctionnant avec deux fluides identiques de capacité calorifique c_p constante. Le premier fluide entre en e et sort en s . Il a un débit massique D_m . Le second fluide entre en e' et sort en s' avec un débit massique D'_m .

1. Trouver une relation entre les débits massiques, les température d'entrée T_e , T'_e et les températures de sortie T_s et T'_s .
2. Comment serait modifiée cette relation s'il existait des pertes de chaleur des fluides vers l'extérieur, correspondant à une puissance thermique \mathcal{P} ?

- Ici, $\mathcal{P} = 0$. L'échange thermique est supposé parfait entre les deux liquides (la surface et le temps de contact sont très longs). Quelle relation supplémentaire peut-on en déduire ?
- Application numérique : dans ce cas, $T_e = 80^\circ\text{C}$, $T'_e = 20^\circ\text{C}$, $D_m = 2 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et $D'_m = 8 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer T_s et T'_s .

5- Approche du diagramme (p, h) de l'air

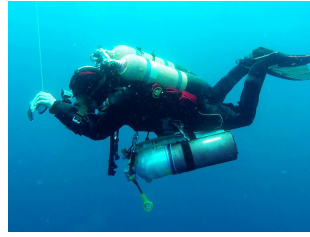
On donne le diagramme (p, h) de l'air entre 0, 1 et 200 bar. La masse molaire de l'air vaut environ $M = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$. On convient de définir les conditions ambiantes par les valeurs $T_a = 20^\circ\text{C}$ et $P_a = 1 \text{ bar}$ (point A sur le diagramme).



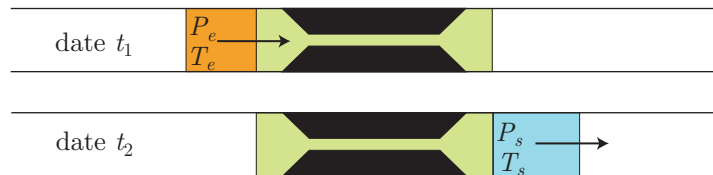
- L'air vérifie-t-il l'équation d'état d'un gaz parfait dans les conditions ambiantes ?
On rappelle la valeur de la constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- Sur le diagramme (p, h) , les isenthalpes sont-elles conformes aux propriétés d'un gaz parfait ? Qu'en est-il au voisinage du point A ?
- Mesurer la capacité thermique massique à pression constante c_p au voisinage du point A. En déduire le coefficient γ en adoptant le modèle du gaz parfait.

6- Le détendeur

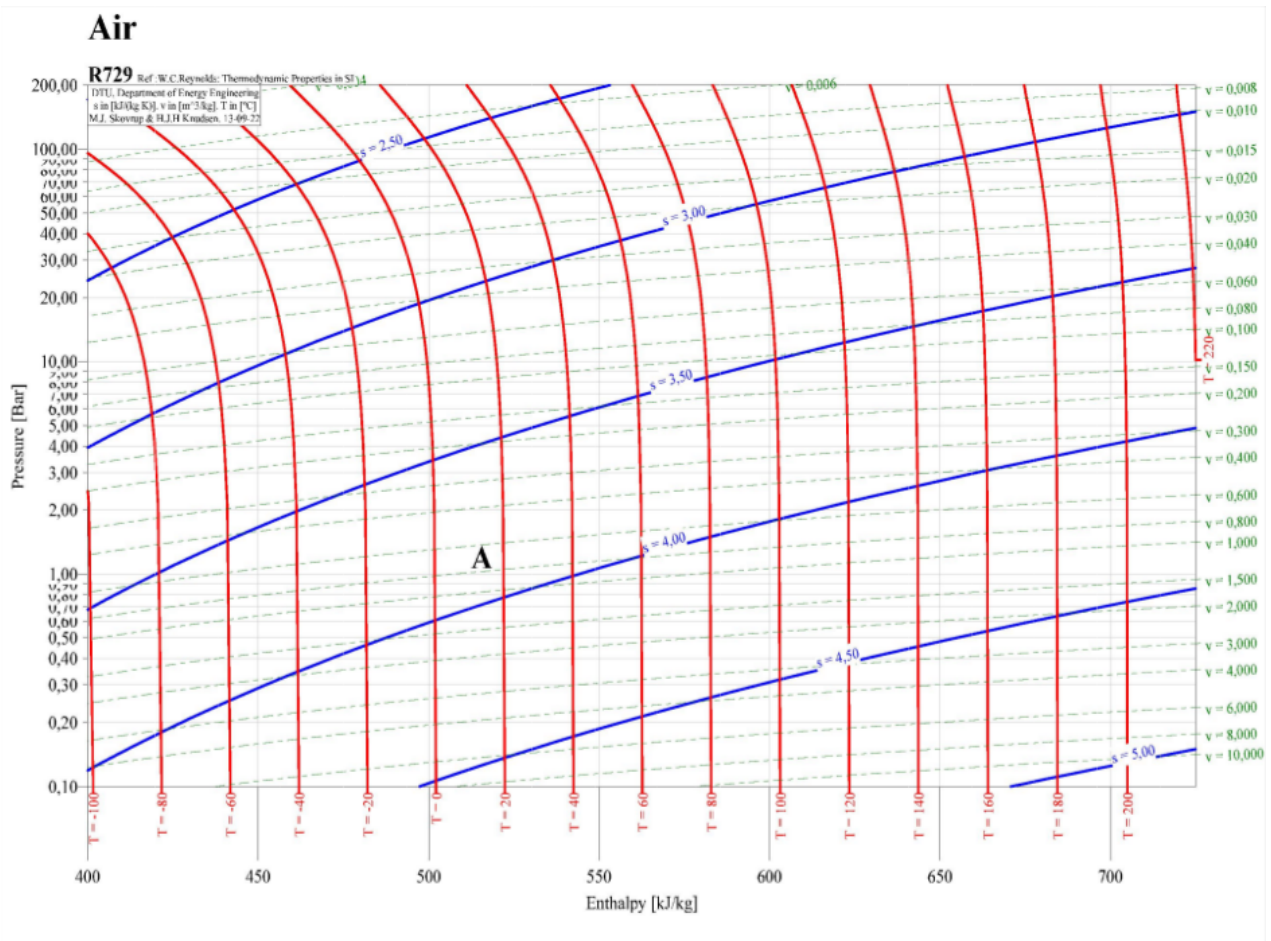
Pour pratiquer la plongée sous-marine, l'air est stocké dans des bouteilles à la pression $P_e \simeq 200$ bar.



La respiration du plongeur se faisant à la pression $P_s \simeq 1$ bar, il est nécessaire de munir la bouteille d'un détendeur assurant la chute de pression lorsque l'air est soutiré (on parle de perte de charge).



À l'aide d'un système complexe de membranes déformables et de ressorts que nous ne décrirons pas, le détendeur fait circuler l'air à travers un mince étranglement de manière adiabatique. À cause de la viscosité du fluide, cet écoulement s'accompagne de la perte de charge souhaitée.



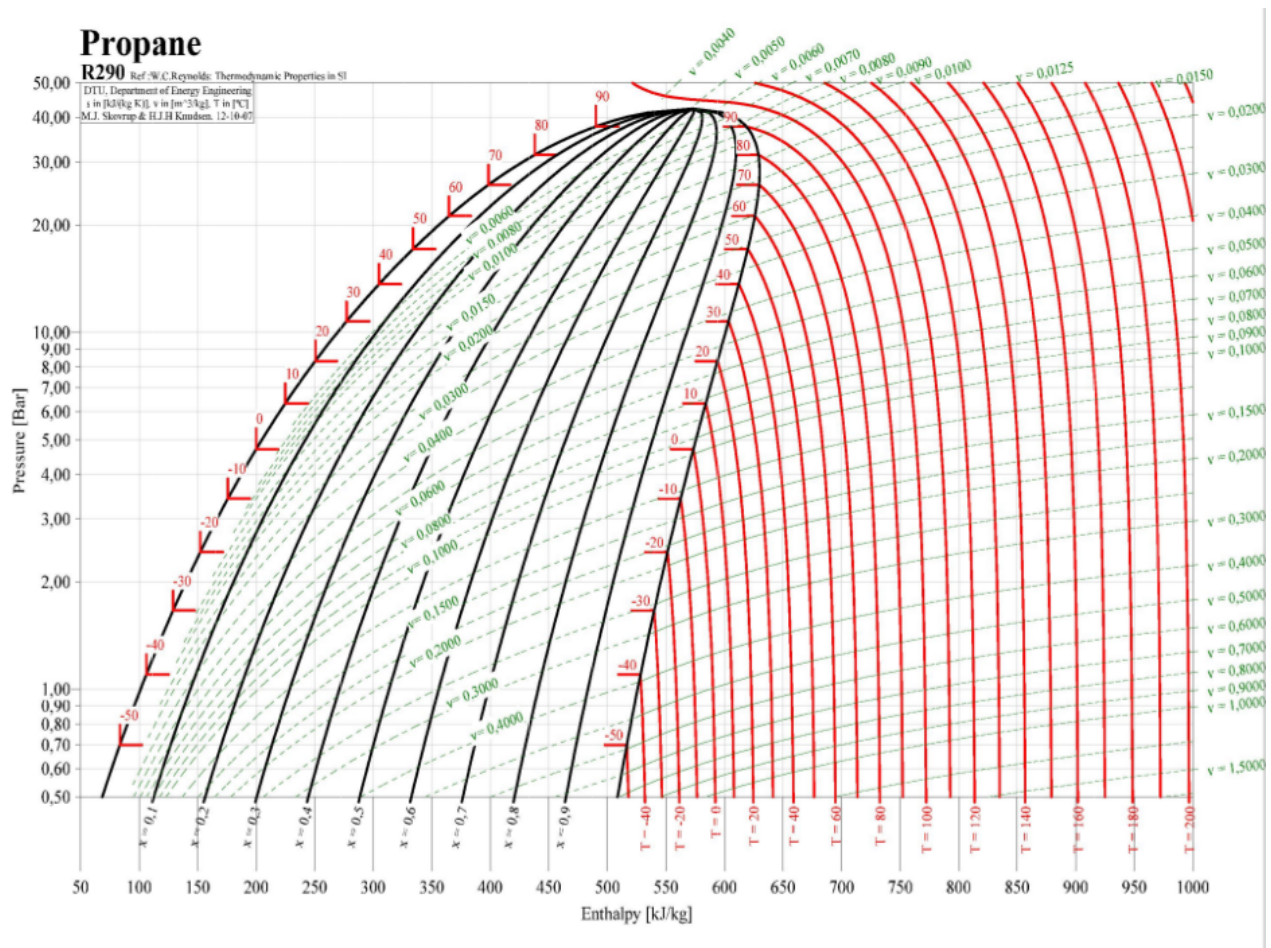
1. Pour de l'air stocké à la température $T_e = 20^\circ\text{C}$, utiliser le diagramme (P, h) de l'air pour évaluer la température de sortie T_s du fluide.
2. Pourquoi est-il nécessaire d'éliminer toute trace d'eau lors du remplissage de la bouteille ?

7- Stockage du GPL

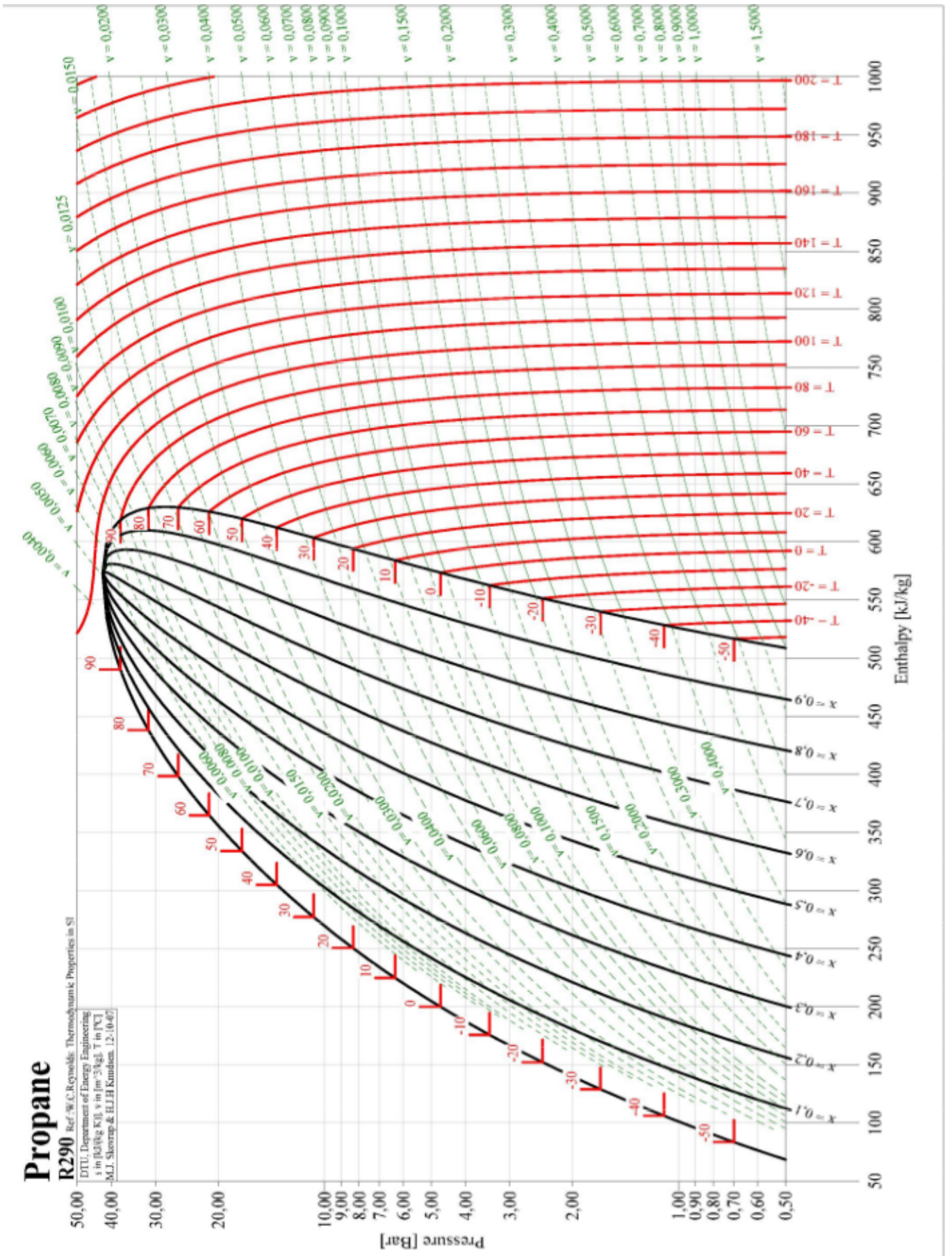
Le GPL (gaz de pétrole liquéfié) est un mélange de propane et de butane, utilisé comme carburant par certains véhicules. Le GPL est stocké sous la forme d'un mélange liquide-gaz dans le réservoir.

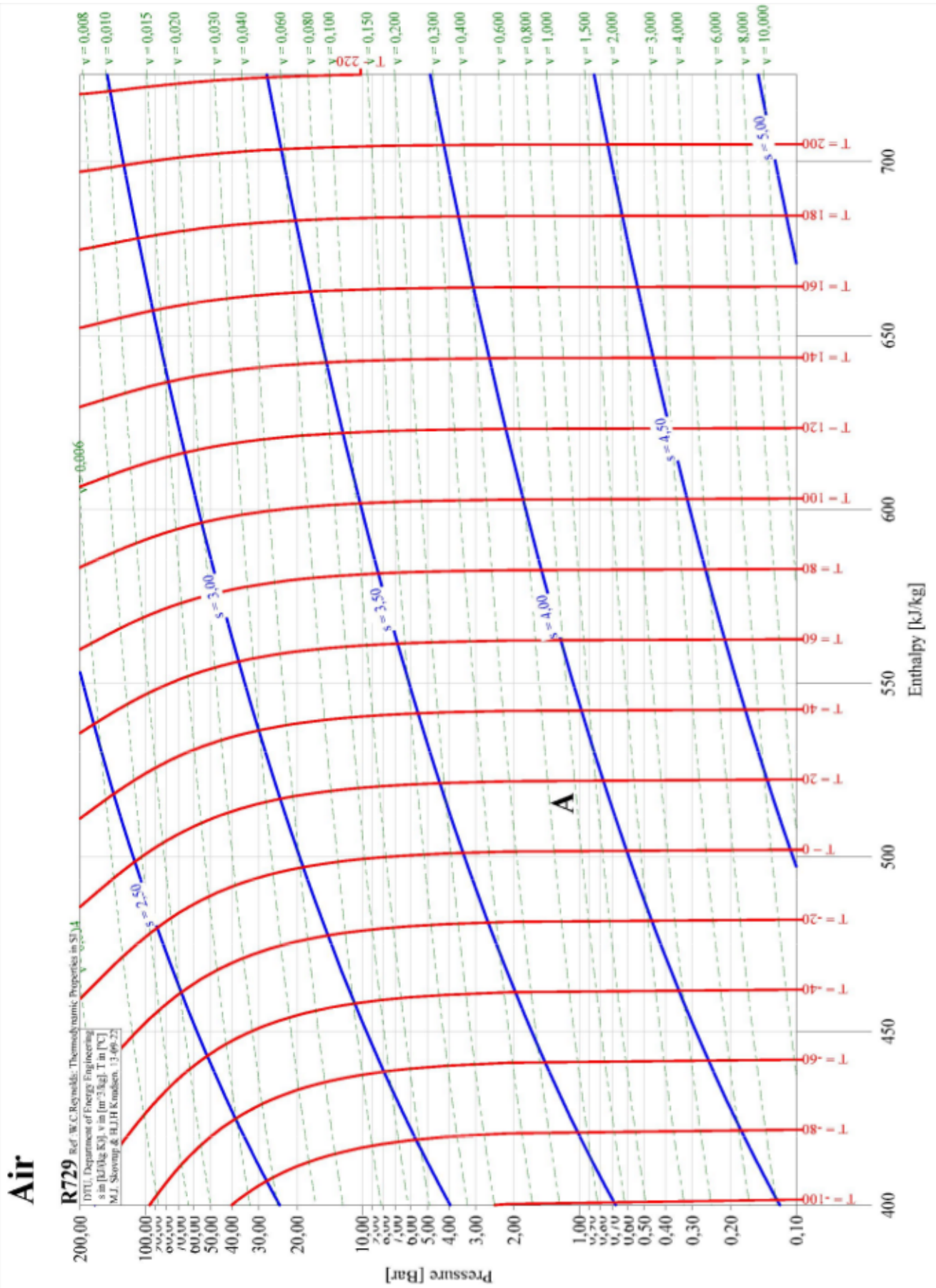


Pour simplifier, nous allons assimiler le GPL à du propane pur (le diagramme enthalpique est fourni ci-dessous et à la page suivante), initialement stocké à 20°C, avec le titre en vapeur $x = 0,2$.



1. Quelle pression règne-t-il dans le réservoir ? Pour un réservoir de 50 L, quelle est la masse de propane stockée ? Le volume massique du liquide saturant étant égal à $2.10^{-3} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}$, quelle est la capacité maximale du réservoir ?
2. Le réservoir est éprouvé pour résister à une pression de 30 bar. En cas d'incendie ou d'échauffement accidentel, à quelle température y a-t-il risque d'explosion ?
3. Depuis 2001, les réservoirs GPL sont munis d'une soupape permettant d'évacuer le fluide dès que la pression dépasse 25 bar. Expliquer l'intérêt de cette soupape.
4. Entre la sortie du réservoir et les injecteurs du moteur, le GPL circule dans un vapo-détendeur où il subit une détente isenthalpique. Comment évolue la température et la composition du mélange liquide-vapeur ?







CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

Physique–Chimie 2

TSI

2018

4 heures

Calculatrices autorisées

De nombreuses villes disposent de centres aquatiques permettant la pratique d'activités ludiques ou sportives. La construction ou la rénovation de ces centres aquatiques s'accompagne d'exigences de développement durable d'où, par exemple, le recours à des solutions innovantes de chauffage de l'eau des bassins. La sécurité des installations et la gestion de la qualité de l'eau des bassins sont aussi des enjeux importants du fonctionnement des centres, un problème de sécurité ou une mauvaise qualité d'eau pouvant entraîner leur fermeture immédiate. Ce sujet aborde quelques uns de ces aspects.

Certaines questions, repérées par une barre en marge, ne sont pas guidées et demandent de l'initiative de la part du candidat. Elles sont très significativement valorisées dans le barème. Même si elles n'ont pas abouti, les pistes de recherche doivent être consignées par le candidat et seront valorisées si elles sont pertinentes. Le barème tient compte du temps nécessaire pour explorer ces pistes et élaborer un raisonnement.

Les différentes parties sont indépendantes.

I Utiliser une source d'énergie gratuite

Cette partie étudie le principe du procédé Degrés Bleus® de la société Suez. Ce procédé consiste en la récupération d'une partie de l'énergie thermique des eaux usées (véhiculées dans les collecteurs d'égouts), dont la température peut varier approximativement entre 15 et 23 °C selon le mois de l'année. Un échangeur thermique est ainsi directement placé dans les collecteurs, comme illustré figure 1. Ce système a été mis en place pour la première fois au centre aquatique de Levallois-Perret en 2010.

Le schéma de principe de l'installation est représenté figure 2. Il est constitué de trois modules : l'échangeur thermique placé dans les collecteurs d'eaux usées, la pompe à chaleur (PAC) et le ballon tampon d'eau chaude de 700 L.

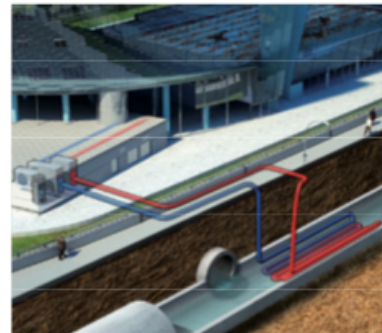


Figure 1

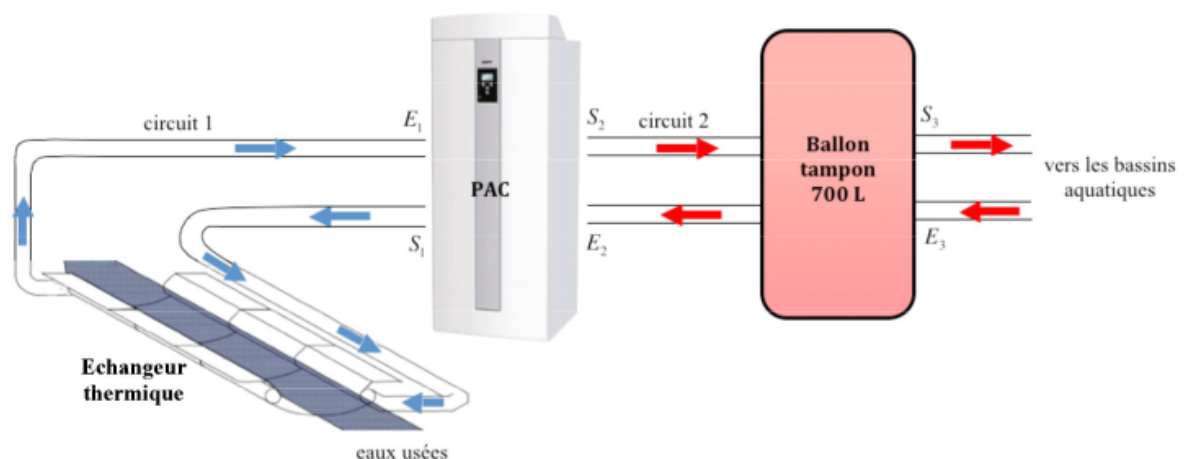


Figure 2

I.A – Étude d'une pompe à chaleur idéale

Le principe de fonctionnement d'une pompe à chaleur est rappelé figure 3. Le cycle est supposé réversible. Au contact de la source froide de température T_f , le fluide se vaporise complètement, il est ensuite comprimé par le

compresseur et se liquéfie dans le condenseur, au contact de la source chaude de température T_c . Il est ensuite détendu dans le détendeur.

Par transfert thermique, le fluide reçoit une énergie Q_f de la part de la source froide et Q_c de la part de la source chaude. Le fluide reçoit un travail W de la part du compresseur. Le détendeur est calorifugé et ne présente pas de pièces mobiles.

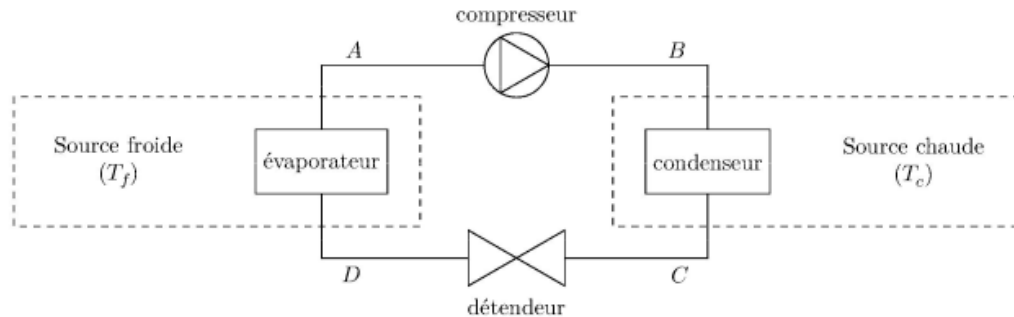


Figure 3

- Q 1.** Définir l'efficacité (ou COP pour Coefficient de Performance) η de la pompe à chaleur. Préciser le signe des grandeurs algébriques Q_f , Q_c et W .
- Q 2.** Établir l'expression de η en fonction de T_f et T_c .
- Q 3.** Calculer η pour $T_f = 13^\circ\text{C}$ et $T_c = 44^\circ\text{C}$. Commenter la valeur obtenue.

I.B – Étude de la pompe à chaleur du centre aquatique

- Q 4.** Établir le premier principe de la thermodynamique pour un écoulement stationnaire unidimensionnel d'un système à une entrée et une sortie. On fera intervenir des grandeurs massiques que l'on prendra soin de définir et de positionner sur un schéma illustratif. Les systèmes (ouvert ou fermé) y seront clairement distingués par leurs frontières à deux instants t et $t + dt$. Les travaux des forces de pression d'admission et de refoulement seront clairement explicités.

On néglige dans la suite toute variation d'énergie cinétique et d'énergie potentielle.

La page suivante présente, dans le diagramme des frigorigènes, le cycle réversible de la PAC du centre aquatique de Levallois-Perret pour un fonctionnement nominal typique en période froide (janvier-février). Le fluide frigorigène est du tétrafluoroéthane R134a. Les isothermes sont gradués en $^\circ\text{C}$; les isochores sont repérés par $v = \text{en m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$; les isentropiques sont marqués avec $s = \text{en kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; les isotitres $x =$ sont gradués sur l'échelle des abscisses.

La puissance prélevée à la source froide est $\dot{Q}_f = 60 \text{ kW}$.

- Q 5.** Identifier et justifier la nature des quatre transformations $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 5$, $5 \rightarrow 6$ et $6 \rightarrow 1$ du cycle.
- Q 6.** Quel est l'intérêt de la transformation $7 \rightarrow 1$?
- Q 7.** Quel est l'intérêt de la transformation $4 \rightarrow 5$?
- Q 8.** Calculer le débit massique D_m du fluide caloporteur de la pompe à chaleur.
- Q 9.** Calculer l'efficacité théorique η_{th} de la pompe à chaleur.
- Q 10.** La puissance réellement fournie au compresseur est $P = 19 \text{ kW}$. Calculer l'efficacité réelle de la pompe à chaleur et conclure quant au calcul de la question précédente.

I.C – Dimensionnement simplifié de l'échangeur du collecteur

L'échangeur repose sur le fond de la conduite cylindrique d'eaux usées, comme indiqué figure 4b. La figure 4a présente un tronçon d'échangeur de 1 m de longueur. On réalise ainsi un module d'échangeur de longueur L_0 par mise en série de L_0 tronçons de 1 m.

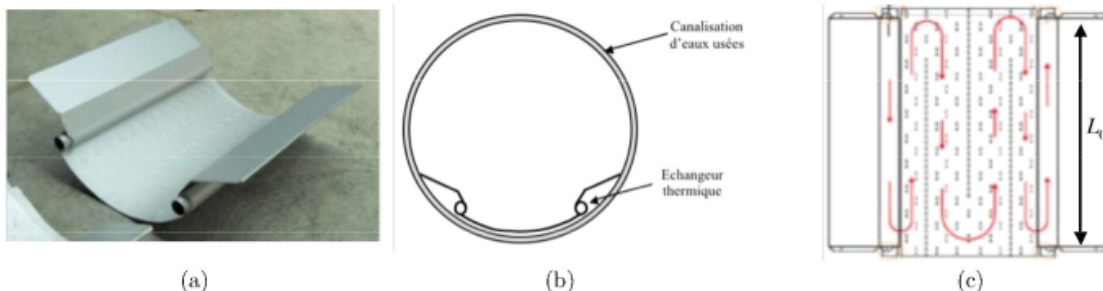
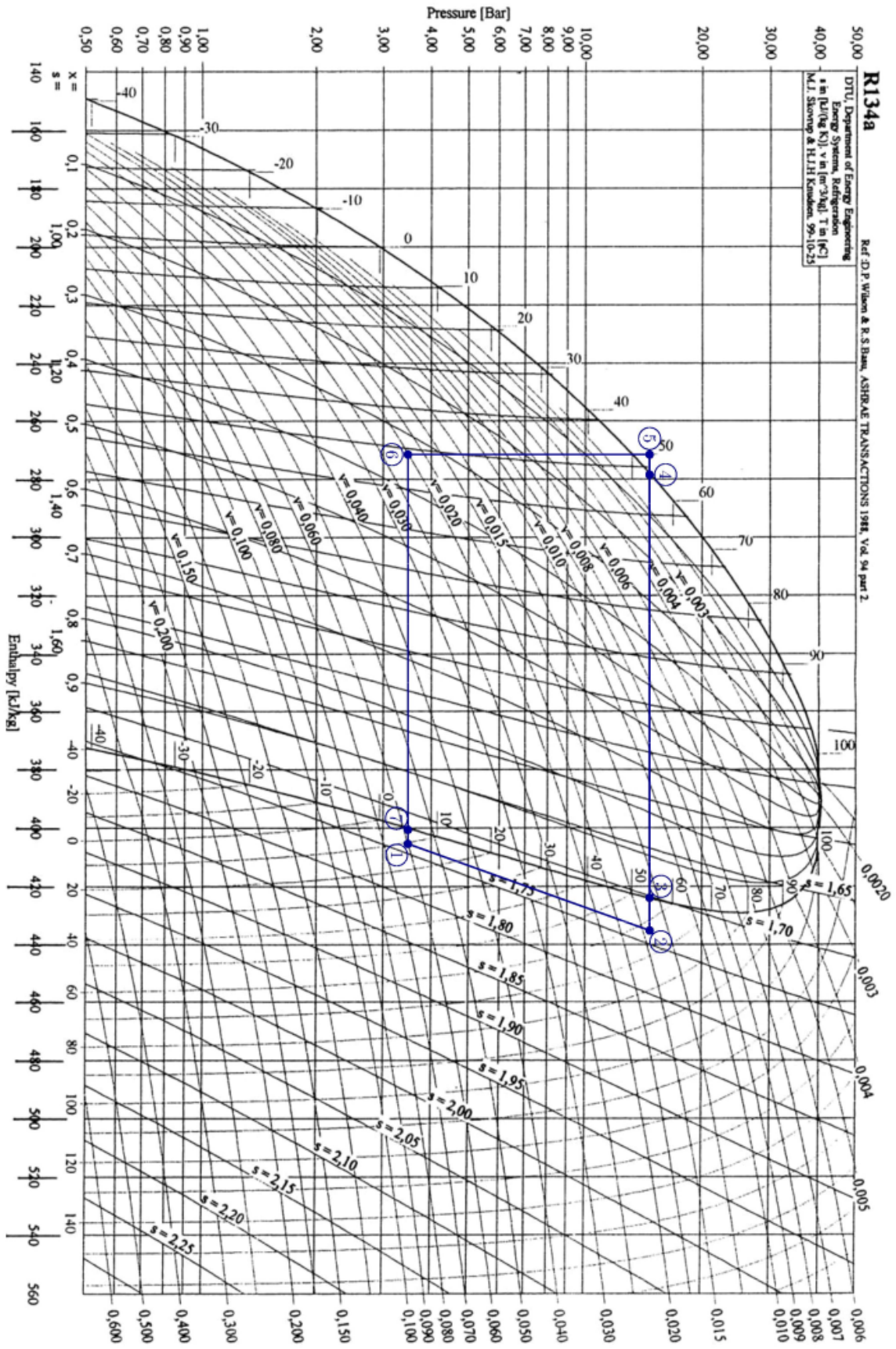


Figure 4



Après mise en série des tronçons, le fluide circule dans un module selon le schéma technique de la figure 4c (vue de dessus du module). Il se réchauffe progressivement au contact des eaux usées, de température T_e supposée uniforme. On supposera pour simplifier que l'échange thermique se fait uniquement sur la partie métallique incurvée ce qui correspond, d'après la figure 4c, à 2 aller-retour, soit $N = 4$ passages du fluide sur la longueur du tronçon considéré. Le module est donc équivalent au schéma théorique de la figure 5.

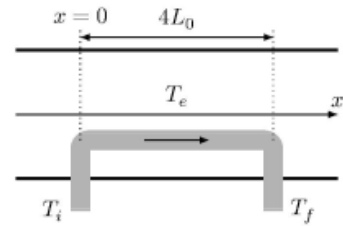


Figure 5

Les hypothèses suivantes sont formulées.

- L'écoulement est supposé parfait, permanent, unidimensionnel, de variation d'énergie cinétique négligeable. On note D_{m_0} le débit massique dans un module, $c_e = 4180 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ la capacité thermique massique du fluide assimilé à de l'eau.
- La température T du fluide ne dépend que de x . Le fluide entre à la température T_i et ressort à la température T_f .
- Le fluide à la température $T(x)$ reçoit, par unité de longueur, une puissance thermique linéique $p_{th} = \alpha(T_e - T(x))$, avec $\alpha = 143 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

I.C.1) Détermination de $T(x)$ dans un module

Q 11. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $T(x)$.

Q 12. Montrer que $T(x)$ s'écrit sous la forme $T(x) = T_e + A \exp\left(-\frac{x}{l_c}\right)$. Exprimer A et l_c en fonction des données du problème.

Q 13. Quelle est la signification physique de l_c ?

I.C.2) Détermination de la longueur totale L de l'échangeur

On impose $T_e = 16^\circ\text{C}$, $T_i = 12,5^\circ\text{C}$ et $T_f = 15,5^\circ\text{C}$. Ces températures correspondent au fonctionnement hivernal envisagé. En tenant compte des pertes thermiques dans les canalisations du circuit 1 (figure 2), les températures T_{E_1} et T_{S_1} du circuit 1 en entrée et sortie de l'évaporateur de la pompe à chaleur sont alors $T_{E_1} = 15,0^\circ\text{C}$ et $T_{S_1} = 13,0^\circ\text{C}$.

Q 14. L'évaporateur étant supposé parfaitement calorifugé, déterminer l'expression analytique du débit massique D_{m_1} de l'eau dans le circuit 1 en fonction de \dot{Q}_f , c_e , T_{S_1} et T_{E_1} . Faire l'application numérique.

Q 15. L'installation est constituée de $N_m = 45$ modules *indépendants* (donc correspondant à une association parallèle) posés les uns à la suite des autres sur une longueur totale L . Exprimer D_{m_0} en fonction de D_{m_1} et N_m .

Q 16. Exprimer L en fonction de l_c , T_i , T_f , T_e et N_m .

Q 17. Calculer L . Conclure.

Q 18. Le calcul d'une installation constituée d'un seul module aurait donné une longueur d'échangeur équivalente. Pourquoi cette solution n'a-t-elle pas été retenue ?

II Éviter les pertes

Pour des centres aquatiques équipés de bassins extérieurs chauffés, les coûts de chauffage sont très importants. Une solution simple de réduction des coûts consiste en l'installation de couvertures de surface amovibles. À l'ouverture du centre aquatique, la couverture est positionnée sur son enrouleur. Après la fermeture, elle est déployée à la surface de l'eau. La figure 6 montre un bassin équipé de deux couvertures dont l'une est déployée et l'autre encore enroulée.

À partir des documents 1 à 3, on se propose de chiffrer les gains d'énergie obtenus avec l'utilisation des couvertures thermiques et de les comparer aux gains escomptés.

Q 19. Déterminer l'expression de la résistance thermique de la couverture en fonction de λ , e et S , la surface du bassin.

Q 20. Déterminer l'expression de la résistance thermique associée aux transferts thermiques convectifs à la surface du bassin en fonction de h et S .

Q 21. Évaluer numériquement les pertes d'énergie annuelles sans, puis avec, utilisation de la couverture thermique. Chiffrer les gains d'énergie obtenus et comparer avec les gains escomptés.

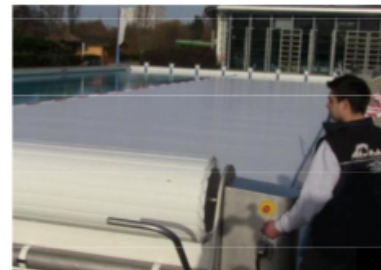
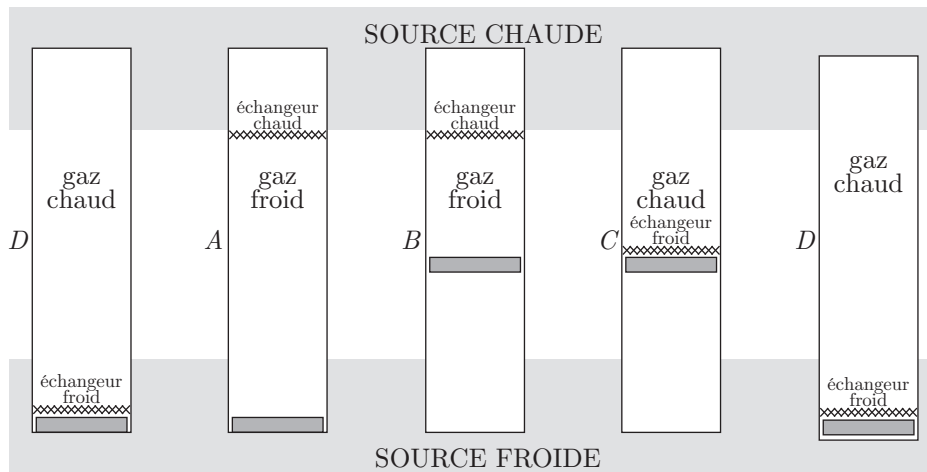


Figure 6

8- Moteur de Stirling

Une masse donnée (n moles) de gaz, supposé parfait, subit cycliquement les transformations imposées par le moteur de Stirling.

Ce moteur est constitué par un cylindre vertical dont la base est fermée par un piston, appelé *piston de travail*. Le cylindre contient la masse déterminée de gaz et la position du piston de travail détermine le volume du gaz. Le haut du cylindre peut être mis en contact avec la source chaude (résistance chauffante). La partie basse du cylindre est en contact avec la source froide constituée d'un écoulement d'eau froide entre la paroi interne du cylindre et sa paroi externe. À l'intérieur du cylindre, un échangeur de chaleur peut coulisser. Il est constitué par un tampon de laine de cuivre percé de quelques trous permettant le passage du gaz au travers de l'échangeur. Les différentes phases de fonctionnement (supposé réversible) en moteur thermique sont représentées sur la figure ci-dessous.



- De A à B , le piston de travail comprime de manière isotherme le gaz froid et l'échangeur, demeuré chaud, reste en haut du cylindre. Au cours de cette étape, le gaz échange de la chaleur avec la source froide de température T_f .
- De B à C , le piston de travail reste à son point mort haut, l'échangeur descend dans la colonne de gaz et l'échauffe, tout en se refroidissant.
- De C à D , le gaz est en contact avec la source chaude. Il se détend à la température constante T_c de la source chaude; l'échangeur et le piston de travail descendent à la tête du cylindre.
- De D à A , l'échangeur remonte en haut du cylindre en refroidissant le gaz, le piston de travail restant immobile.

Les déplacements du tampon permettent des transferts thermiques internes : la chaleur émise par le gaz pendant $D \rightarrow A$ est intégralement re-transmise au gaz pendant $B \rightarrow C$ (les seuls transferts thermiques avec l'extérieur se font au cours des transformations CD et AB). On remarque que, à part dans la phase CD , le piston de travail et l'échangeur bougent à tour de rôle.

Représenter le cycle dans un diagramme de Clapeyron.

Exprimer le rendement de ce cycle moteur en fonction de T_f et T_c .

9- Diagramme entropique de l'eau

Le document donné ci-après présente le diagramme entropique (θ en $^{\circ}\text{C}$ et s en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) d'une masse $m = 1$ kg d'eau pure. Sur ce diagramme figurent :

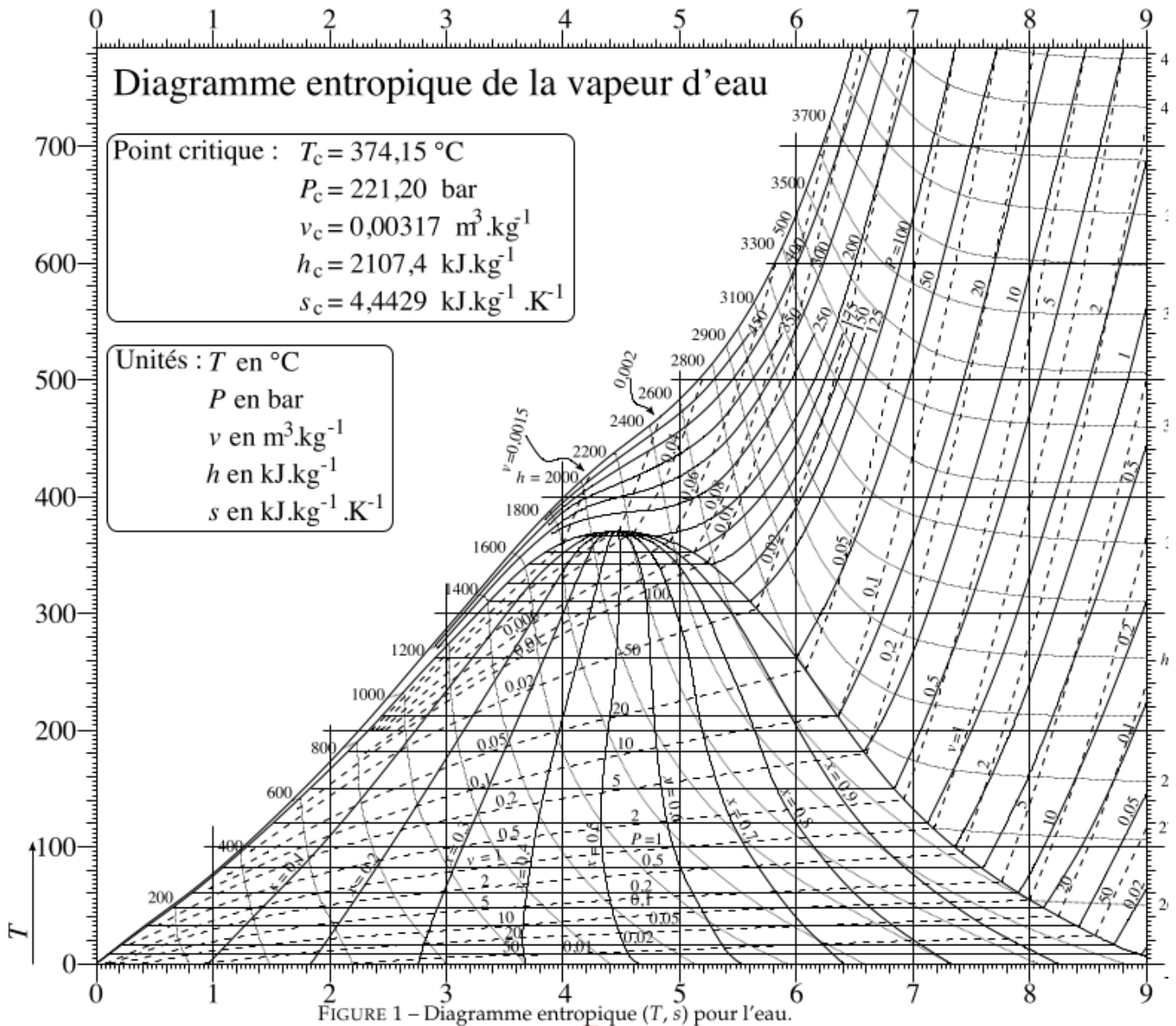
- en trait renforcé, les courbes d'ébullition (titre en vapeur $x_v = 0$: liquide juste saturé) et de rosée (titre en vapeur $x_v = 1$: vapeur juste saturante), qui se rejoignent au point critique;
- en trait fin continu, dans le domaine d'équilibre liquide-vapeur, les réseaux d'isotitres en vapeur ($x = \text{cte}$);
- en trait fin pointillés, dans tout le domaine du diagramme, un réseau d'isenthalpes ($h = \text{cte}$);
- en traits continus, un réseau d'isobares $p = \text{cte}$ confondues avec les isothermes dans le domaine d'équilibre liquide-vapeur (équilibre diphasé monovariant);
- en traits fins, dans tout le domaine, des isochores (volume massique $v = \text{cte}$).

Une masse $m = 1$ kg d'eau (vapeur juste saturante), initialement maintenue à la pression $p = 20$ bar, est détendue de manière adiabatique réversible, donc isentropique, jusqu'à la pression $p = 0,5$ bar.

1. En utilisant le diagramme, déterminer les caractéristiques de l'état initial, de l'état final et porter les résultats dans le tableau ci-dessous :

	θ	x_v	p	s	h	v
état 1			20			
état 2			0,5			

2. En déduire les variations des fonctions d'état Δs et Δh du système au cours de la transformation.



Page 2/2

★★ 10- Sources à températures variables

On dispose de deux masses égales d'eau (de même capacité thermique C) aux températures initiales T_{10} et $T_{20} > T_{10}$.

On les réunit par une machine réversible, à laquelle elles servent de sources et qui fournit un travail jusqu'à ce que les deux sources soient à la même température T_f .

1. Exprimer T_f en fonction de T_{10} et T_{20} .
2. Quel est le travail W fourni par la machine, à l'issue de la totalité des cycles ? Trouver son signe et conclure.

★ 11- Création d'entropie lors d'un écoulement

1. Un gaz parfait ($\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \text{cte}$; masse molaire M ; constante molaire des gaz parfaits R) subit une détente du type Joule-Thomson de l'état (T_1, P_1) à l'état (T_2, P_2) . le régime est stationnaire. Rappeler la relation liant les enthalpies massiques en amont $h_1 = h(T_1, P_1)$ et en aval $h_2 = h(T_2, P_2)$.
2. Montrer que la détente s'accompagne d'une création d'entropie massique σ que l'on exprimera en fonction de R, M, P_1, P_2 . Commenter le résultat.
3. Le gaz s'écoule maintenant dans une conduite perméable à l'énergie thermique. Le milieu extérieur est équivalent à une source d'énergie thermique de température T_0 . L'écoulement étant stationnaire, calculer σ en fonction de $\gamma, T_0, T_1, T_2, P_1, P_2, R$ et M .
4. Commenter le résultat obtenu pour un écoulement isobare.

★ 12- Cycle dans un diagramme enthalpique

Une machine frigorifique est utilisée pour abaisser la température d'un courant d'eau liquide (débit massique $D_{me} = 10 \text{ kg.s}^{-1}$) de la température $\theta_i = 25^\circ\text{C}$ à la température $\theta_f = 10^\circ\text{C}$.

Le fluide caloporteur dans la machine est de l'eau. Il pénètre dans un compresseur adiabatique sous forme de vapeur saturante, dans les conditions $\theta_1 = 3,89^\circ\text{C}$ et $P_1 = 0,008 \text{ bar}$, d'où il en repart dans l'état $\theta_2 = 242,7^\circ\text{C}$ et $P_2 = 0,07 \text{ bar}$. Puis il passe dans un condenseur isobare d'où il ressort sous forme de liquide saturant ($\theta_3 = 38,9^\circ\text{C}$). Il traverse alors un détendeur adiabatique qui abaisse sa pression à la valeur P_1 (sa température θ_1 étant celle du mélange liquide-vapeur). Enfin, le liquide finit de se vaporiser dans un évaporateur isobare où il échange de l'énergie thermique avec le courant d'eau liquide à refroidir.

Valeurs numériques :

θ ($^\circ\text{C}$)	P (bar)	h_ℓ (kJ.kg^{-1}) liquide	h_v (kJ.kg^{-1}) vapeur	s_ℓ ($\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$) liquide	s_v ($\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$) vapeur
3,89	0,008	16,33	2508	0,0594	9,056
242,7	0,07	—	2963	—	9,243
38,9	0,07	162,8	2409	0,557	7,723

Le courant d'eau liquide est à une pression de 1 atm (1,013 bar); la capacité thermique de cette eau sera prise égale $c = 4,186 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$.

1. Représenter le cycle de la machine dans un diagramme (p, h) .
2. Déterminer la puissance mécanique P_u nécessaire au bon fonctionnement du compresseur.
3. Quelle est l'efficacité η de la machine frigorifique? Déterminer le titre en vapeur à la sortie du détendeur.

★★ 12- Cycle dans un diagramme entropique

Une machine thermique est constituée d'un compresseur, d'une turbine et de deux échangeurs d'énergie thermique.

- Le fluide subit une détente isentropique dans la turbine et le travail ainsi récupéré est utilisé d'une part pour faire fonctionner le compresseur, d'autre part comme travail disponible à l'extérieur. Les températures du fluide en entrée et en sortie sont T_3 et T_4 .
- Le compresseur fonctionne de façon isentropique, l'état du fluide passant de (P_1, T_1) à (P_2, T_2) . On note $\tau = \frac{P_2}{P_1}$ le taux de compression.
- Les échangeurs d'énergie thermique sont isobares.

1. Représenter, sur un schéma, le fonctionnement de cette machine (moteur ou non) en précisant les échanges énergétiques. Tracer, pour chacun des cas, le cycle suivi par le fluide, en diagramme de Clapeyron (p, V) puis en diagramme entropique (T, S) .
2. Exprimer le rendement η de la machine qui fonctionne en moteur, en fonction de τ et de $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = 1,4$. On suppose que le fluide reste à l'état gazeux durant tout le cycle et qu'il peut être assimilé à un gaz parfait.
3. On fixe les températures T_1 et T_3 à l'entrée du compresseur et de la turbine. Pour quelle valeur τ_m du taux de compression τ le travail produit par la machine est-il maximal? Quelle est alors la valeur du rendement?

Application numérique : $T_1 = 293 \text{ K}$ et $T_3 = 773 \text{ K}$.

THERMODYNAMIQUE

CONDUCTION THERMIQUE

1- Conduction en coordonnées sphériques

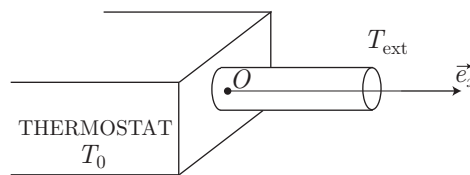
Un matériau homogène est compris entre deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2 ($R_1 < R_2$), de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c et de masse volumique ρ . Les parois sphériques de ce matériau sont maintenues aux températures T_1 ($r = R_1$) et T_2 ($r = R_2$) et on suppose $T_1 > T_2$.

Établir l'équation spatio-temporelle de diffusion en coordonnées sphériques et donner, en régime stationnaire, la distribution de température $T(r)$.

2- Ailette de refroidissement

Soit une barre cylindrique métallique, de rayon R et de conductivité thermique λ , illimitée selon un axe Ox . Cette tige est en contact en $x = 0$ avec un thermostat de température T_0 et baigne dans une atmosphère à la température $T_{\text{ext}} < T_0$.

Cette tige sert d'ailette de refroidissement. On note r la distance à l'axe de la barre et on admet qu'en régime permanent la température à l'intérieur de la barre est donnée par $T(x)$.



Le contact entre la tige et l'atmosphère est le siège de fuites thermiques auxquelles on associe le vecteur densité de courant thermique :

$$\vec{j}_{\text{fuite}} = -h [T_{\text{ext}} - T(x)] \vec{e}_r \text{ où } h = \text{cte}$$

Expliciter $T(x)$.

3- Étude d'un régime transitoire

Un barreau cylindrique, limité par ses plans $x = 0$ et $x = L$, est caractérisé par sa chaleur massique c , sa masse volumique μ et sa conductivité thermique λ . Ce barreau est isolé sur sa face latérale.

- Démontrer l'équation de diffusion à une dimension :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\mu c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t}$$

- Le barreau est placé dans un milieu de température constante T_0 et a pour répartition initiale de température :

$$T(x, 0) = T_0 + T_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \text{ où } T_1 = \text{cte}$$

En admettant qu'une solution du problème est donnée par $T(x, t) = \alpha + f(x) \times g(t)$ (α étant une constante), déterminer $T(x, t)$.

- Exprimer le vecteur densité de courant thermique. Quels résultats retrouve-t-on au bout d'un temps très long ?

4- Étude d'une onde de chaleur

On considère le sol terrestre, de masse volumique μ , de capacité thermique massique c et de conductivité thermique K . Ce dernier est éclairé par le Soleil. Cet éclairage varie avec l'heure de la journée et le jour de l'année.

Dans ce modèle, on assimile le sol à un milieu infini le long de Ox ($x \geq 0$ et $x = 0$ représente la surface) illimité sur y et z .

On donne la température de surface en fonction du temps : $T(x = 0, t) = T_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$ ainsi que $\frac{K}{\mu c} = 7,5 \cdot 10^{-7}$ USI.

À quelle profondeur les variations de température sont-elles le dixième de celles qui existent en surface pendant une journée ? pendant une année ? Pourquoi parle-t-on d'onde de chaleur ?

5- Gel de l'eau d'un lac

L'air recouvrant un lac de montagne est à la température constante T_a (l'atmosphère est un immense réservoir de chaleur). L'eau liquide du lac est à la température constante de solidification T_e (avec $T_a < T_e$).

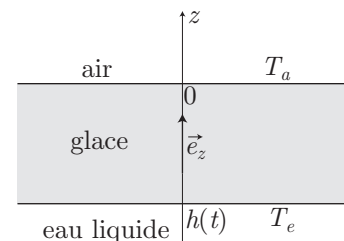
Totalement liquide à $t = 0$ (instant initial), l'étendue d'eau se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur varie avec le temps.

L'espace est toujours orienté par l'axe vertical ascendant Oz de vecteur unitaire \vec{e}_z , l'origine O étant choisie sur la surface de séparation glace-air. L'interface eau solide-eau liquide est le plan d'équation $z = -h(t) < 0$.

L'eau solide, de masse volumique μ et de conductivité thermique K (constante positive), présente une chaleur latente massique de fusion L . On admet que la pression ne modifie pas la température T_e de l'équilibre liquide-solide.

La solidification est associée à un dégagement de chaleur : cette énergie est évacuée à travers la glace vers l'interface air-glace et dissipée dans l'atmosphère.

Soit $T_0(t)$ la température variable de la glace à la surface $z = 0$ au cours du temps.



- La capacité calorifique de la glace étant négligée, on admet qu'à l'intérieur du solide le vecteur densité de courant de chaleur, donné par :

$$\vec{j}_Q = -K \overrightarrow{\text{grad}} T$$

est un vecteur indépendant de z .

Dans la glace :

- préciser la direction et le sens du vecteur \vec{j}_Q ;
- montrer qu'à chaque instant la température $T(z, t)$ est une fonction affine de z ;
- en déduire $T(z, t)$, en fonction de $T_0(t)$, $h(t)$, T_e et z .

- La puissance thermique \mathcal{P}' échangée à la surface glace-air est donnée par la relation :

$$\mathcal{P}' = \alpha [T_0(t) - T_a] \times S$$

dans laquelle α est une constante positive et S la surface de la glace.

- Relier \mathcal{P}' à \vec{j}_Q .
 - En exprimant la continuité du flux de chaleur à l'interface glace-air, exprimer $T_0(t)$ en fonction de $h(t)$.
 - Quelle valeur limite doit atteindre $h(t)$ pour que $T_0(t)$ soit égal à T_a ?
- La quantité dm est la masse de glace formée, par unité de surface, pendant la durée dt .
 - Relier la vitesse de solidification $\frac{dm}{dt}$ à la norme du vecteur \vec{j}_Q .
 - Quelle relation existe-t-il entre $\frac{dm}{dt}$ et $\frac{dh(t)}{dt}$?
 - En déduire l'équation différentielle liant $h(t)$ et $T_0(t)$.
 - Établir une équation différentielle ne faisant intervenir que $h(t)$.
 - Tracer l'allure du graphe donnant $h(t)$ en fonction de t .
 - Donner la valeur de $h(t)$ au bout de 24 heures.

Données numériques :

$$\begin{array}{ll} \mu = 9 \cdot 10^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} & K = 1,5 \text{ J} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ L = 334 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} & \alpha = 30 \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T_a = 260 \text{ K} & T_e = 273 \text{ K} \end{array}$$

6- Diffusion thermique dans l'Uranium

Un barreau d'Uranium a la forme d'un cylindre de rayon $a = 10^{-2}$ m. Des réactions nucléaires y produisent une puissance thermique P par unité de volume.

La conductivité thermique, dans le domaine de température considéré, est $\lambda = 38 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

Déterminer la puissance maximale (rapportée à l'unité de volume) que l'on peut extraire du barreau si l'on ne veut pas que sa température dépasse la valeur de 600°C à l'intérieur du barreau.

La température de surface est fixée à 400°C . L'étude se fera en régime stationnaire et on supposera que la température ne dépend que de la distance r à l'axe : $T = T(r)$.

7- Diffusion thermique dans un conducteur électrique

Une barre conductrice (conductivité électrique σ , longueur L , section S , résistance totale R) est parcourue par un courant électrique uniforme I . Les extrémités de cette barre sont maintenues à la température T_0 . On suppose nulles les pertes thermiques par la surface latérale (barre calorifugée) et on note K le coefficient de conductivité thermique.

1. Déterminer, en régime permanent, la loi de distribution $T(x)$ de la température dans la barre.
2. Représenter graphiquement $T(x)$ en indiquant la position et l'expression du maximum T_{\max} de température.

8- Diffusion thermique en régime non stationnaire

On considère une tige rectiligne, de longueur $L = 1$ m, de capacité thermique massique c , de masse volumique μ , de conductivité thermique λ .



Ses extrémités $x = 0$ et $x = L$ sont maintenues aux températures constantes T_1 et T_2 .

On supposera que la diffusion thermique ne se produit que dans la direction (O, x) et on négligera les pertes thermique latérales (notamment par convection).

Cette tige peut être le siège d'une production d'énergie, dont la puissance volumique sera notée s .

I- Approche analytique

1. Établir l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + S \quad (4)$$

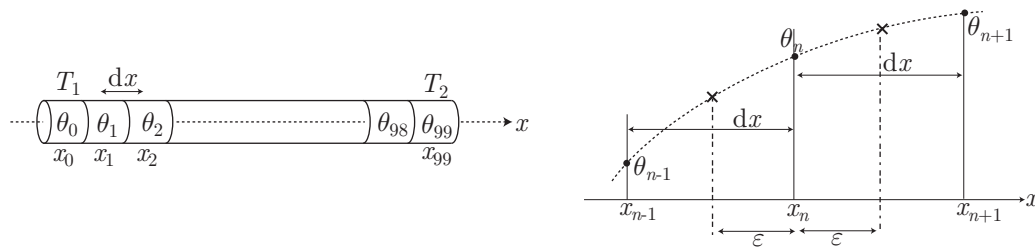
où l'on exprimera les constantes D (*diffusivité*) et S en fonction de μ , c , λ , s .

Cette équation peut être résolue en régime stationnaire dans diverses conditions.

2. On suppose que $T_1 = 400$ K, $T_2 = 300$ K et $S = 0 \text{ K.s}^{-1}$.
Résoudre cette équation en régime stationnaire et donner sa représentation graphique.
3. On suppose maintenant que $T_1 = T_2 = 400$ K ; $S = 0, 10 \text{ K.s}^{-1}$ et $D = 0, 25.10^{-3} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.
 - a- Résoudre cette équation différentielle en régime stationnaire.
 - b- Trouver la position x_m du maximum de $T(x)$ et calculer la valeur T_m de ce maximum.
 - c- Représenter graphiquement $T(x)$.
4. On suppose que $T_1 = 400$ K, $T_2 = 200$ K ; $S = 0, 20 \text{ K.s}^{-1}$ et $D = 0, 25.10^{-3} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$.
 - a- Résoudre cette équation.
 - b- Trouver la position x_m du maximum T_m de $T(x)$ et calculer la valeur numérique de T_m .
 - c- Représenter graphiquement $T(x)$.

II- Approche numérique

On cherche une solution numérique à l'équation de la chaleur (4) lorsque le régime stationnaire n'est pas encore atteint. Pour cela, on développera une résolution s'inspirant d'une méthode d'Euler explicite : la tige sera décomposée en un grand nombre de cylindres élémentaires (par exemple 100), chacun étant repéré par sa position x_n et par sa température θ_n :



1. En choisissant dx assez petit pour assimiler la dérivée d'une fonction à un taux d'accroissement, exprimer $\theta'(x_n + \varepsilon) = \frac{d\theta}{dx} \Big|_{(x_n + \varepsilon)}$ en fonction de θ_{n+1} , θ_n , dx , puis $\theta'(x_n - \varepsilon) = \frac{d\theta}{dx} \Big|_{(x_n - \varepsilon)}$ en fonction de θ_n , θ_{n-1} , dx .

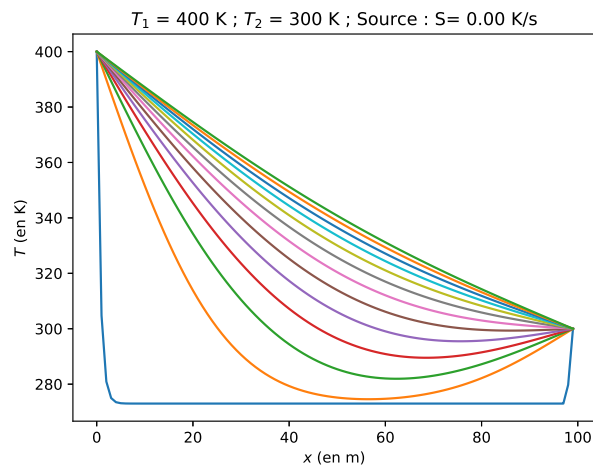
En déduire que le Laplacien de θ en x_n vérifie :

$$\Delta\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \Big|_{x_n} \simeq \frac{1}{(dx)^2} [\theta_{n+1} + \theta_{n-1} - 2\theta_n]$$

2. On choisira $D = 0,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

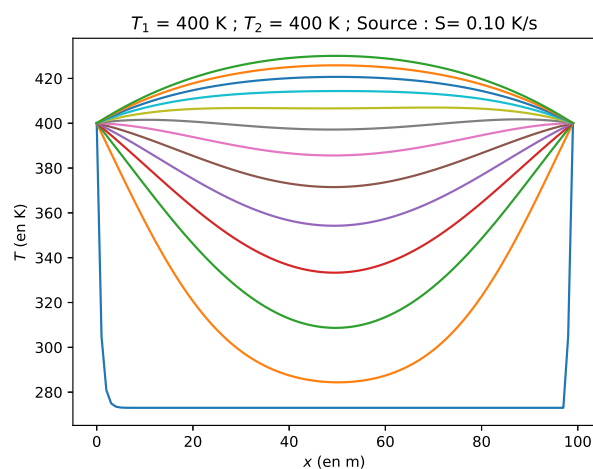
Créer alors un script qui permet la visualisation de la température T de la tige, solution de l'équation (4), à divers instants t , dans les conditions suivantes :

- a- $S = 0 \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$; $T_1 = 400 \text{ K}$; $T_2 = 300 \text{ K}$.



Comparer $\lim_{t \rightarrow \infty} T(x, t)$ au régime permanent de la question I-2.

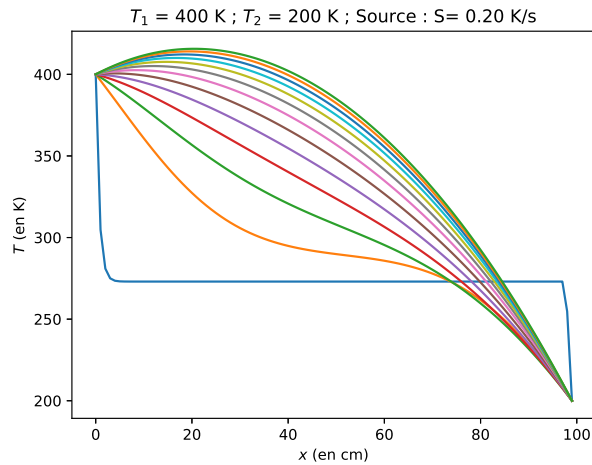
- b- $S = 0,10 \text{ K} \cdot \text{s}^{-1}$; $T_1 = T_2 = 400 \text{ K}$.



En modifiant la période t_{\max} d'étude, faire aussi apparaître l'allure du régime permanent de la question I-3-c.

Peut-on retrouver, à l'aide de la souris, les valeurs de x_m et T_m ? les comparer aux valeurs de la question I-3.b.

c- $S = 0,20 \text{ K}\cdot\text{s}^{-1}$; $T_1 = 400 \text{ K}$; $T_2 = 200 \text{ K}$.



En modifiant la période t_{\max} d'étude, faire aussi apparaître l'allure du régime permanent de la question I-4-c.

Peut-on retrouver, à l'aide de la souris, les valeurs de x_m et T_m ? les comparer aux valeurs de la question I-4.b.

Indications

À la date $t = 0$, définir le profil de température par une liste $T[n]$:

n	0	1	2	3	98	99
	T_1	273	273	273	273	T_2

et les positions x_n seront discrétisées par un incrément dx (par exemple $dx=0.01$), ce qui permettra également de définir les positions par une liste $X=[0, dx, 2*dx, \dots]$.

Pour passer à la date suivante, $t = dt$ (par exemple $dt=0.1$), appliquer à chaque valeur de $T[n]$ l'équation différentielle (4), les températures T_1 et T_2 restant constantes :

T_1	$T[1]$	$T[2]$	$T[3]$	T_2
-------	--------	--------	--------	-------	-------

puis recommencer à la date $dt + dt = 2 dt$, jusqu'à une date t_{\max} préalablement définie (par exemple $t_{\max}=12*60$ si l'on souhaite représenter l'évolution de t pendant 12 minutes).

Enfin, parmi toutes les listes T qui se forment à chaque incrément de t , ne représenter graphiquement (X, T) que lorsque $t/60$ est un entier (chaque minute).

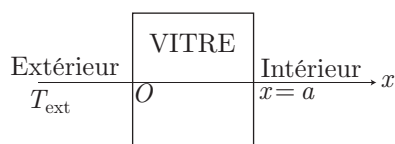
★ **9- Diffusion thermique dans une vitre**

La vitre d'une fenêtre séparant l'extérieur, d'une pièce est assimilée à une lame plane d'épaisseur a , de section S et de conductivité thermique λ .

Le Soleil crée dans vitre une puissance volumique :

$$P_v = \frac{I_0}{\delta} \times e^{-x/\delta}$$

I_0 et δ sont des constantes caractéristiques du matériau qui constitue la vitre, x désigne la profondeur de la vitre. On se place en régime stationnaire.



On note T_{ext} la température de l'air à l'extérieur et T_0 la température de la face de la vitre en $x = 0$. Les transferts thermiques entre la face extérieure ($x = 0$) et le milieu ambiant sont associés à un coefficient h et obéissent à la loi :

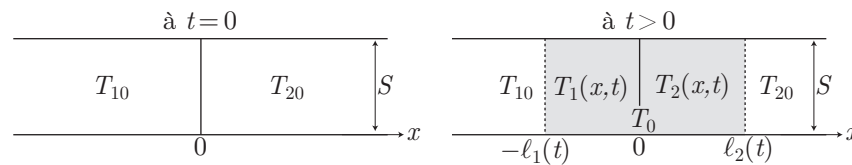
$$\vec{j}_{\text{th}} = h \times (T_{\text{ext}} - T_0) \vec{e}_x$$

On négligera, en $x = a$, les échanges thermiques entre la vitre et l'intérieur de la pièce. Toutes les grandeurs ne dépendent que de x .

1. Exprimer la densité volumique de courant thermique $j_{\text{th}}(x)$ en tout point de la vitre en fonction de x , I_0 , a et δ .
2. En déduire la température $T(x)$ en tout point de la vitre, en fonction de x , T_0 , I_0 , λ , a et δ .
3. Exprimer T_0 en fonction de T_{ext} , h , I_0 , a et δ .

★★ 10- Régime non stationnaire

Deux barres calorifugées, de même section S , ont des températures initiales T_{10} et T_{20} ($T_{20} > T_{10}$), des capacités thermiques massiques c_1 et c_2 , des masses volumiques ρ_1 et ρ_2 et des conductivités thermiques K_1 et K_2 .



On se propose de déterminer la température T_0 à la jonction en $x = 0$. Les barres sont considérées comme infinies et le contact est supposé parfait.

1. Dans cette question, on modélise la répartition de température de la manière suivante :
 - $T_1(x, t) = T_{10}$ pour $x < -\ell_1(t)$
 - $T_1(x, t)$ fonction affine de x pour $-\ell_1(t) \leq x \leq 0$
 - $T_2(x, t)$ fonction affine de x pour $0 \leq x \leq \ell_2(t)$
 - $T_2(x, t) = T_{20}$ pour $x > \ell_2(t)$

En déduire la température T_0 en fonction de T_{10} , T_{20} et des quantités :

$$\alpha_1 = \sqrt{\rho_1 c_1 K_1} \text{ et } \alpha_2 = \sqrt{\rho_2 c_2 K_2}$$

2. On rappelle que la fonction $\text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-y^2} dy$, avec $u = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ et $D = \frac{K}{\rho c}$ est solution de l'équation de la chaleur.

De plus : $\lim_{u \rightarrow 0} \text{erf}(u) = 0$ et $\lim_{u \rightarrow \infty} \text{erf}(u) = 1$.

Déterminer la répartition de température au sein de chaque barre. On cherchera les solutions sous la forme :

$$T(x, t) = \alpha + \beta \text{erf}(u)$$

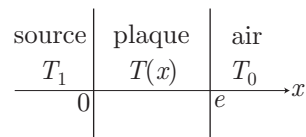
Retrouver ainsi l'expression de T_0 établie au 1.

THERMODYNAMIQUE

RÉSISTANCES THERMIQUES

1- Conduction et convection thermiques

Une source thermique, qui maintient une température constante et uniforme T_1 , occupe l'espace $x < 0$; elle est séparée de l'air ambiant, à la température $T_0 < T_1$ (pour $x > e$), par une plaque d'épaisseur e constituée d'un matériau de conductivité thermique λ . La plaque se refroidit par convection au contact de l'air, le coefficient de convection est h (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$) : la puissance thermique perdue dans l'air par une surface S de plaque vaut : $P = Sh \times [T(e) - T_0]$



On considère uniquement le régime permanent (aucune température ne dépend du temps), le problème est à une seule dimension x (pas d'effet de bord) et les échanges en $x = 0$ et $x = e$ sont limités à une surface transversale S .

1. Donner le profil de température $T(x)$ dans la plaque.
2. Après avoir rappelé la loi de Newton donnant j_{th} en $x = e$ entre la plaque et l'air, déterminer l'expression de la température de surface $T(e)$ de la plaque en fonction de T_0, T_1, λ, h et e . Écrire ensuite j_{th} en fonction des mêmes données et en déduire l'expression de la résistance thermique R_{th} équivalente; la commenter.
3. Examiner les deux cas limites suivant la valeur du rapport $\frac{he}{\lambda}$, préciser dans chaque cas les conditions physiques, donner la valeur de $T(e)$, de la puissance thermique totale de refroidissement et proposer un exemple simple de la vie courante.

2- Conduction en coordonnées cylindriques

Un tronçon de longueur h d'une gaine d'isolation de conduite, de conductivité λ , a la forme d'un cylindre creux de rayon intérieur R_1 (température T_1) et de rayon extérieur R_2 (température T_2).

1. Établir l'équation spatio-temporelle de diffusion, en coordonnées cylindriques, sans utiliser la formule rappelée ci-dessous.
2. Retrouver cette équation en utilisant la formule du laplacien d'un champ scalaire ψ en coordonnées cylindriques :

$$\Delta\psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

3. Quel est, en régime stationnaire, la distribution de température $T(r)$? En déduire la résistance thermique R_{th} .

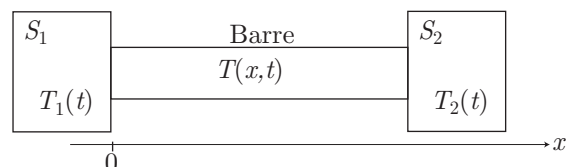
3- Étude d'un régime quasi stationnaire (ARQS)

Une enceinte calorifugée contient un solide S_1 à la température uniforme $T_1(t)$, de capacité thermique C et un solide S_2 à la température uniforme $T_2(t)$, de même capacité thermique C . Ces deux solides sont reliés par une barre de section S , de longueur L , de conductivité thermique λ et de capacité thermique massique négligeable.

À la date $t = 0$: $T_1 = T_{10}$ et $T_2 = T_{20}$.

On admet que :

- les seuls échanges thermiques à considérer se font entre les solides et la barre;
- dans la barre, la température s'écrit $T(x, t)$.



1. À partir d'un bilan d'énergie, montrer que le vecteur densité d'énergie thermique J_Q dans la barre ne dépend que du temps.
2. En déduire $T(x, t)$ en fonction de $T_1(t)$, $T_2(t)$, L et x .
3. En appliquant le premier principe de la thermodynamique au solide S_1 , déterminer une équation différentielle liant $T_1(t)$ et $T_2(t)$.
4. En tenant le même raisonnement pour le solide S_2 , déterminer une autre équation liant $T_2(t)$ et $T_1(t)$.
5. Exprimer $T_1(t)$ et $T_2(t)$ puis les représenter en fonction du temps.

4- Résistance thermique à symétrie sphérique

L'espace compris entre deux armatures sphériques concentriques, de centre O et de rayons R_1 et R_2 ($R_2 > R_1$) est rempli d'un matériau homogène et isotrope, de conductivité thermique K supposée indépendante de la température.

L'armature de rayon R_1 est maintenue à la température T_1 et l'armature de rayon R_2 est maintenue à la température extérieure T_2 ($T_2 < T_1$). Le régime stationnaire est supposé atteint.

1. Déterminer, sans calculer $T(r)$ et en fonction des données :
 - a- le flux de chaleur ϕ à travers une surface quelconque du matériau ;
 - b- la résistance thermique $R_{th} = \frac{T_1 - T_2}{\phi}$ de ce matériau.

On justifiera cette définition par analogie avec celle de la résistance électrique.

2. Retrouver l'expression de R_{th} par un calcul direct (qui n'utilise pas l'expression de $T_1 - T_2$).
3. Exprimer, à l'aide de R_1 , R_2 , T_1 et T_2 :
 - a- la loi de température $T(r)$ dans le matériau, à la distance r de O ;
 - b- le vecteur densité de flux de chaleur au voisinage immédiat de l'armature externe.
4. On entoure l'armature sphérique de rayon R_2 par une gaine métallique d'épaisseur homogène e , de conductivité thermique K' constante. L'armature interne est maintenue à la température T_1 et la surface externe de la gaine métallique est maintenue à la température extérieure T_2 .

Déterminer, en régime stationnaire, la température T_0 sur la surface sphérique commune aux matériaux de conductivités thermiques K et K' .

5- Double vitrage

Une vitre de fenêtre, de surface $S = 0,5 \text{ m}^2$ et d'épaisseur $e = 4 \text{ mm}$, est constituée d'un verre de conductivité thermique $\kappa = 1,2 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

La température de la pièce est $T_i = 20^\circ\text{C}$ et la température extérieure : $T_e = 5^\circ\text{C}$.

On se place en régime stationnaire.

On tient compte des échanges thermiques par convection entre le verre et l'air. Ceux-ci sont décrits par la loi empirique de Newton : la densité surfacique de puissance thermique échangée entre la surface d'un solide (de température T_s) et l'air (de température T_a) vaut $h \times (T_s - T_a)$, où h est un coefficient conducto-convectif. On prend comme coefficients de transfert conducto-convectif : $h_i = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ du côté intérieur et $h_e = 15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ du côté extérieur.

On considère un double vitrage constitué de deux vitres identiques, d'épaisseur $e = 4 \text{ mm}$ enfermant, sur une épaisseur $e' = 8 \text{ mm}$, de l'air sec supposé au repos, de conductivité $\kappa' = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

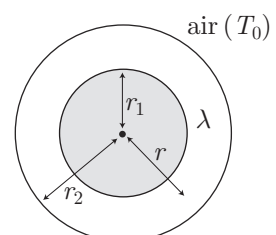
Conclure quant à l'efficacité d'un double vitrage.

★ 6- Conduction cylindrique

Un tube, de rayon r_1 et de longueur ℓ (conduite d'eau chaude, fil électrique...) et de température T_1 uniforme est entouré d'un manchon (rayon intérieur r_1 , rayon extérieur r_2 , conductivité thermique λ) qui «l'isole» du milieu extérieur (ici l'air à la température constante T_0).

Les échanges thermiques entre la surface du tube et l'isolant sont supposés parfaits. Ceux entre l'isolant et l'air sont caractérisés par un coefficient de transfert h : la puissance thermique échangée par unité de surface est donnée par l'expression : $h \times (T_2 - T_0)$ où $T_2 = T(r = r_2)$.

Déterminer la puissance thermique ϕ_{th} échangée, en régime permanent, entre le tube et l'air. On supposera que la température ne dépend que de r (distance à l'axe) et on exprimera ϕ_{th} en fonction de ℓ , λ , r_1 , r_2 , h , T_1 et T_0 .



★★ 7- Flux thermiques multiples

La toiture d'un véhicule est constituée, de l'extérieur vers l'intérieur : d'une partie métallique (épaisseur e_1 , conductivité thermique λ_1), d'une couche isolante (épaisseur e_2 , conductivité thermique λ_2) et d'un revêtement (épaisseur e_3 , conductivité thermique λ_3).

On donne :

$$\begin{array}{lll} e_1 = 2 \text{ mm} & e_2 = 4 \text{ mm} & e_3 = 2 \text{ mm} \\ \lambda_1 = 50 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} & \lambda_2 = 0,02 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} & \lambda_3 = 0,05 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1} \end{array}$$

La température extérieure est $\theta_e = 25^\circ\text{C}$ et la température intérieure $\theta_i = 45^\circ\text{C}$.

Les coefficients d'échange thermique en surface (convection et rayonnement) ont pour valeur :

$$h_e \text{ (métal/extérieur)} = 8 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \quad h_i \text{ (revêtement/intérieur)} = 1 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

1. Calculer la température T_s de la face extérieure de la voiture, de surface S .
2. La toiture, assimilée à un corps opaque, absorbe en surface un flux ϕ_0 dû au rayonnement solaire. L'absorption sur la surface externe métallique se traduit par la création de deux flux : l'un (ϕ_1) vers l'intérieur du métal et l'autre (ϕ_2) vers l'extérieur : $\phi_2 = h_e S (T_s - T_e)$ (convection et rayonnement).
 - a- Déterminer la température T_s de la face externe de la toiture, en fonction de ϕ_0 , T_e , T_i , $G_e = h_e S$ et :

$$G = \frac{S}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_3}{\lambda_3} + h_i}$$

- b- Montrer l'existence d'une valeur minimale de ϕ_0 au delà de laquelle les flux ϕ_1 et ϕ_2 sont bien définis positifs.

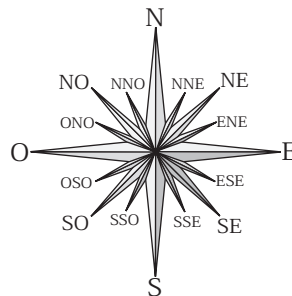
MÉCANIQUE

CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL

1- Direction d'un vent

Un bateau se déplace vers l'est sur un plan d'eau immobile. Il est animé d'une vitesse constante égale à 15 km/h. Une girouette, placée sur le bateau et qui indique *d'où vient le vent*, marque le nord-nord-est (NNE). Quand le bateau s'arrête, la girouette indique nord-ouest (NO). Quelle est la vitesse réelle du vent ?

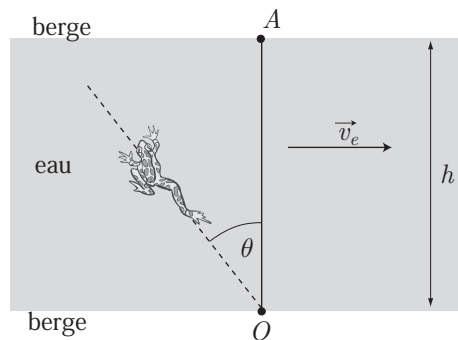
La figure suivante rappelle les points cardinaux :



2- Déplacement dans un liquide

Une grenouille tente de traverser une rivière, dont le cours d'eau possède une vitesse \vec{v}_e (parallèle aux berges et constante) et est dépourvu de tourbillons.

L'animal (remarquablement perspicace) a déjà remarqué que, dans un lac immobile, il peut atteindre une vitesse v constante. Son objectif est de réaliser la traversée de la rivière, de largeur h , en empruntant le chemin le plus court OA .



Pour parvenir à ses fins, la grenouille doit orienter son corps de manière à compenser le courant de la rivière ; on appelle θ l'angle que fait l'axe de son corps par rapport à OA .

1. Exprimer l'angle θ en fonction de v et de $v_e = \|\vec{v}_e\|$.
2. Quelle est, en fonction de h , v et v_e , la durée Δt de cette traversée.
3. Interpréter le cas où $v = v_e$.

★ 3- Pendule souple

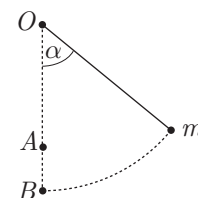
Une masse ponctuelle est attachée à l'extrémité d'un fil souple, de longueur $5a$, fixé en un point O .

Au point A situé sur la verticale de O , tel que $OA = 4a$, est placé un clou.

On lâche la masse, sans vitesse initiale, le fil faisant un angle α avec la verticale.

Calculer la valeur minimale de α pour que la masse fasse le tour complet de

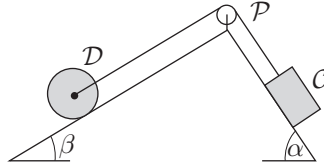
A .



★ 4- Mouvement sur des plans inclinés

\mathcal{D} est un disque homogène de masse m et de rayon R . Il ne peut que rouler sans glisser sur le plan incliné d'un angle β sur l'horizontale. \mathcal{C} est un cube de masse M . Il n'y a pas de frottements entre \mathcal{C} et le plan incliné d'un angle α sur lequel il est posé.

\mathcal{P} est une poulie de masse négligeable et le fil inextensible (de masse négligeable), qui passe sur \mathcal{P} , est attaché au centre d'une face de \mathcal{C} .



Exprimer l'accélération de \mathcal{D} en fonction de M , m , α , β .

On donne le moment d'inertie de \mathcal{D} par rapport à son axe : $J = \frac{1}{2} mR^2$.

★★ 5- Poulies couplées

Les poulies \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont reliées par un fil \mathcal{F} inextensible.

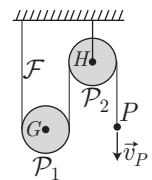
La poulie \mathcal{P}_2 est raccordée au plafond par l'intermédiaire d'un câble inextensible qui passe par son centre H .

La poulie \mathcal{P}_1 , de centre G , peut se déplacer librement verticalement.

Le fil \mathcal{F} ne glisse pas sur les poulies.

Un point P , situé à l'extrémité libre de \mathcal{F} se déplace verticalement avec une vitesse \vec{v}_P .

Exprimer la vitesse \vec{v}_G du point G en fonction de \vec{v}_P .

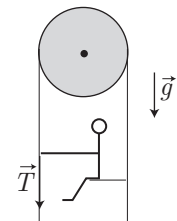


★★ 6- Mécanique dans un référentiel en mouvement

Un homme, assis sur une chaise accrochée à un fil qui passe sur une poulie, se hisse en tirant sur l'extrémité libre du fil.

On négligera la masse de la poulie et on notera z et m l'altitude et la masse du système {homme + chaise}.

L'homme tire sur le fil avec une force \vec{T} dirigée vers le bas (on posera $T = \|\vec{T}\|$).



1. Établir l'équation du mouvement par le théorème de la résultante cinétique (ou PFD).
2. Interpréter en précisant la puissance fournie par l'homme.

MÉCANIQUE

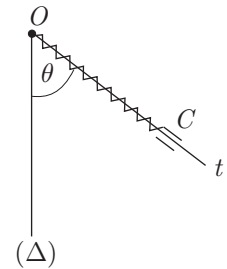
DYNAMIQUE EN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

1- Équilibre relatif

On dispose d'un ressort à spires non jointives, de longueur au repos l_0 et de raideur k . On négligera la masse du ressort dans tout l'exercice proposé.

On enfle ce ressort sur une tige Ot , soudée en O à un axe vertical (Δ) et inclinée obliquement par rapport à la verticale descendante d'un angle θ ($\theta < 90^\circ$).

Une des extrémités du ressort est fixée en O tandis qu'à l'autre on accroche un corps C , de masse m , coulissant sans frottements sur Ot . L'ensemble tourne autour de Δ à la vitesse angulaire constante ω ; le ressort n'oscille pas et a une longueur constante l .



1. Préciser la trajectoire décrite par C .
2. Exprimer la longueur l du ressort.
3. Exprimer, littéralement, l'intensité R de la force exercée par la tige sur C en fonction de m , g , θ , ω et l que l'on considérera comme un paramètre commode pour ne pas surcharger l'expression littérale de R .

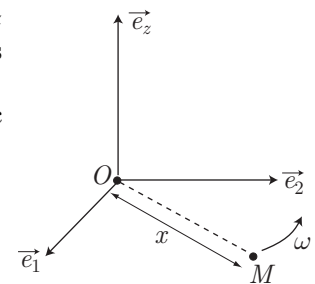
2- Force centrifuge

Un axe horizontal tourne à vitesse angulaire ω constante autour d'un axe Oz vertical. Un point matériel M , de masse m , est mobile sur l'axe Ox , sans frottements.

À la date $t = 0$, on abandonne M en M_0 sur Ox , tel que $\overline{OM}_0 = x_0 > 0$, avec une vitesse nulle par rapport à Ox .

1. Étudier le mouvement relatif de M sur Ox .
2. Déterminer la réaction de Ox sur M

On note g l'intensité de la pesanteur.

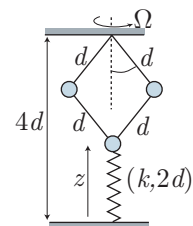


3- Régulateur à boules

Dans le dispositif ci-contre, les diverses tiges ont une longueur d et une masse négligeable. Les trois billes ont une masse m . Le ressort a une constante de raideur k et une longueur à vide $2d$. Le système tourne à une vitesse angulaire constante Ω .

1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle associée à la force d'entraînement.
2. Déterminer la ou les valeurs de θ à l'équilibre.

On note g l'intensité de la pesanteur.



4- Déviation vers l'Est

Calculer la déviation d lors de la chute d'un corps (de masse m quelconque) dans un puits de profondeur $h = 100$ m situé près de Mexico (latitude $\lambda = 20^\circ$). Que pensez-vous de l'approximation galiléenne du référentiel terrestre ?

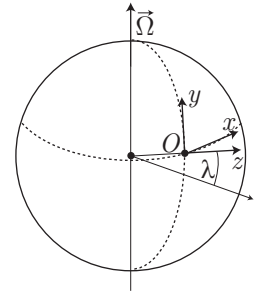
On prendra $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et on supposera \vec{g} vertical.

On exprimera préalablement les équations différentielles résultant du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel non galiléen; on les résoudra après avoir formulé des approximations justifiées.

Capacité numérique : écrire un script Python permettant de résoudre le problème par la méthode d'Euler. Comparer les résultats à ceux obtenus analytiquement (avec approximations).

5- Pendule de Foucault

Le pendule de Foucault est un pendule simple dont le fil inextensible, accroché au sommet S du dôme du Panthéon de Paris, de latitude $\lambda = 48,85^\circ$, a une longueur $L = 67$ m et soutient un mobile M de masse $m = 28$ kg. L'intensité de la pesanteur est $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$. On note O le point du sol à la verticale de S . Les axes du repère sont (O, x) dirigé vers l'est, (O, y) dirigé vers le nord et (O, z) vertical vers le haut.



1. L'amplitude des oscillations du pendule est supposée suffisamment faible pour qu'on puisse supposer que M reste dans le plan horizontal. En déduire que la tension s'écrit : $\vec{T} = -\frac{mg}{L} \vec{SM}$.
2. En déduire que x et y vérifient le système d'équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x = 2\beta \dot{y} \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y = -2\beta \dot{x} \end{cases}$$

en précisant les expressions de ω_0 et β en fonction de L , g , Ω et λ . Vérifier que $\beta \ll \omega_0$.

3. On définit la variable complexe : $\underline{\rho} = x(t) + iy(t)$.
Établir l'équation différentielle vérifiée par $\underline{\rho}$ et la résoudre en prenant les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = a \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$$

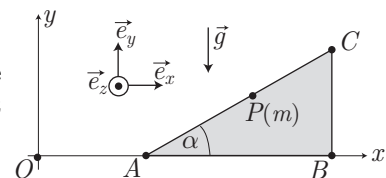
4. En déduire $x(t)$ et $y(t)$ et montrer que le mouvement de M correspond à des allers-retours quasi rectilignes, selon un segment de centre O et de longueur $2a$ qui tourne très lentement à une vitesse angulaire Ω_F qu'on précisera. En déduire la période T_F du pendule de Foucault.

★★ 6- Mécanique dans un référentiel non galiléen

Un point matériel P , de masse m , glisse sans frottements sur une équerre, de masse M .

Cette équerre, de côté $BC = h$, reste dans le plan vertical xOy et glisse sans frottement sur l'axe horizontal Ox . À $t = 0$ le point P est en C et l'ensemble est abandonné sans vitesse initiale.

Quel temps met le point matériel pour atteindre le point A ?



★ 7- Mécanique dans un référentiel non galiléen

Une tige OA , de masse m et de longueur 2ℓ , est contenue dans un plan tournant yOz . Dans ce plan, elle peut tourner librement par rapport à l'axe Ox .

On impose au plan yOz une vitesse angulaire de rotation ω autour de l'axe vertical Oz . On note $\omega = \eta\omega_0$ et $\omega_0^2 = \frac{3g}{4\ell}$.

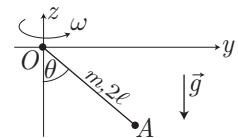
1. Montrer que l'équation du mouvement en $\theta(t)$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{2}{3} m\ell^2 \ddot{\theta}^2 + Ep(\theta) = E_0 = \text{cte}$$

Donner l'expression de $Ep(\theta)$ en fonction de θ , $mg\ell$ et η .

2. Étudier les différents cas possibles selon les valeurs du paramètre η . On envisagera les cas $\eta < 1$, $\eta = 1$, $\eta > 1$.

On rappelle que le moment d'inertie d'une barre de longueur L par rapport à un axe Δ qui lui est perpendiculaire, est $I = \frac{1}{3} mL^2$.



MÉCANIQUE

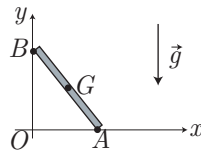
MÉCANIQUE DU SOLIDE

1- Équilibre d'une barre

On considère une barre homogène de longueur L , de centre d'inertie G , qui repose sur deux axes perpendiculaires.

On suppose qu'il n'a pas de frottements en B et qu'il existe un coefficient de frottement f en A .

On note α l'angle entre les axes OA et OG .

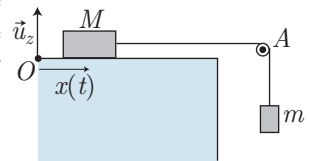


1. Quelle est la trajectoire du point G , si la tige glisse ?
2. Trouver la condition sur α pour que la barre reste immobile.

2- Mesure d'un coefficient de frottement

La masse M frotte sur un support avec un coefficient f . Son abscisse est notée $x(t)$. Cette masse est reliée par un fil (sans masse) à une masse m au travers d'une poulie de rayon R en pivot parfait autour de l'axe fixe Ay . Le fil ne glisse pas sur la poulie. En conséquence, il n'y a aucune déperdition d'énergie mécanique entre le fil et la poulie.

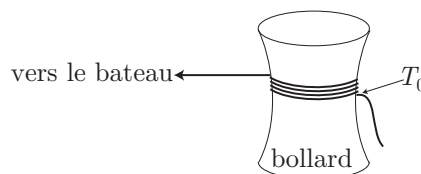
La poulie est considérée d'abord sans masse.



1. Écrire, en cas de mouvement, le théorème de la puissance mécanique à l'ensemble des deux masses, du fil et de la poulie.
2. En déduire l'accélération $a = \ddot{x}$ de la masse M s'il y a mouvement.
3. À quelle condition y a-t-il mouvement ? Expliquer l'intérêt de l'expérience.
On donne $M = 500$ g et $m \geq 230$ g pour qu'il y ait mouvement.
4. Désormais, la poulie a un moment d'inertie I par rapport à son axe Ay . Quels sont les changements ?

3- Arrimage d'un bateau

Afin d'arrimer un bateau au quai, on attache au bateau une corde dont on enroule l'autre extrémité autour d'un bollard fixé sur le quai. La corde est enroulée sur $n + \frac{1}{2}$ tours. On supposera, pour simplifier, que la partie enroulée de la corde se trouve dans un plan horizontal dont l'intersection avec le bollard est un cercle de centre O . On repère un point M de la partie enroulée de la corde grâce à l'angle $\theta = (\vec{OM}_0, \vec{OM})$, M_0 se trouvant à la limite de la partie enroulée avec la partie reposant sur le quai (en M_0 , la tension de la corde est T_0). On suppose que les frottements entre la corde et le bollard obéissent aux lois de Coulomb, avec un coefficient de frottement μ .

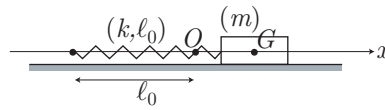


Lorsque le bateau s'éloigne du quai, la corde se tend et s'immobilise. On se place à la limite du glissement, c'est-à-dire dans le cas hypothétique où la force exercée par le bateau sur la corde est suffisante pour que celle-ci se mette à glisser sur le bollard. Calculer alors la tension T de la corde en fonction de θ .

Application numérique : $\mu = 0,4$, $T_0 = 1$ N et $n = 5$. Calculer la force que doit exercer le bateau sur la corde pour qu'elle soit à la limite du glissement. Conclure.

4- Oscillations avec frottement solide

Un solide S de masse m est posé sur un support plan horizontal. On identifie le coefficient de frottement $\mu = \mu_s = \mu_d$. S est placé à l'extrémité d'un ressort à spires non jointives, de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k . Il est en mouvement de translation selon l'axe (Ox) , sa position est repérée par l'abscisse x , O correspondant en $x = 0$ à la position d'équilibre du ressort.



À $t = 0$, on lâche le solide sans vitesse initiale depuis l'abscisse $x_0 = \frac{8,5 \mu m g}{k}$.

1. Établir l'équation horaire $x(t)$ pour la première phase du mouvement (le mobile glisse dans le sens des x décroissants).
2. Déterminer l'abscisse x_1 à laquelle la vitesse du solide s'annule. On prend la date correspondante comme nouvelle origine des dates.
3. Vérifier que le solide ne s'immobilise pas définitivement en $x = x_1$ et établir l'équation horaire $x(t)$ pour la deuxième phase du mouvement.
4. En poursuivant le même raisonnement, déterminer le mouvement complet du solide jusqu'à son immobilisation définitive.
5. Tracer l'allure de la courbe $x(t)$ et justifier le terme "enveloppe affine". Quelle est la forme de l'enveloppe si on remplace le frottement solide par un frottement fluide du type $-\alpha \vec{v}$?

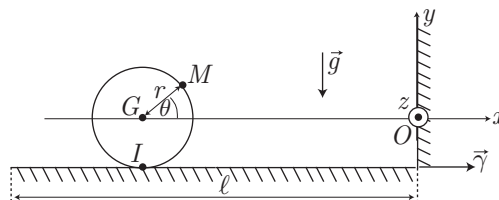
Capacité numérique : Composer un script permettant de résoudre ce problème par la méthode d'Euler, qui représente la courbe $x(t)$ jusqu'à l'immobilité de S .

On pourra prendre :

$$\mu = 1 \quad m = 1 \text{ kg} \quad g = 9,8 \text{ m.s}^{-1} \quad k = 9,8 \text{ N.m}^{-1}$$

★★ 5- Roulement d'un cylindre dans un camion

Un cylindre roule sans glisser sur le plateau d'un camion qui démarre avec une accélération $\vec{\gamma}$. $(Oxyz)$ est un repère de base $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, lié au camion.



G , centre de gravité du cylindre, est repéré par son abscisse x .

La rotation du cylindre est repérée par θ .

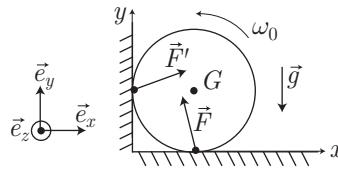
Au départ le cylindre, homogène, de masse m et de moment d'inertie par rapport à son axe $J = \frac{1}{2} m r^2$, est contre l'axe vertical Oy .

1. Quelle est la distance parcourue par le camion lorsque le cylindre commence à tomber ?
2. Quelle est la condition sur $\vec{\gamma}$ pour que le roulement soit sans glissement ?

On notera f le coefficient de frottement de glissement.

★ 6- Frottement d'un cylindre sur un dièdre

Un cylindre, de masse m et de rayon R , tourne comme indiqué sur la figure ci-dessous, avec une vitesse angulaire initiale ω_0 .



On note f le coefficient de frottement.

Le moment d'inertie du cylindre par rapport à son axe vaut $J = \frac{1}{2} mR^2$.

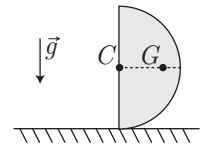
Trouver l'expression de la vitesse angulaire $\omega(t)$ en fonction de t, g, f, R .

★★ 7- Roulement sans glissement

On considère un demi-cerceau de masse m et de rayon R . On donne $CG = h = \frac{2R}{\pi}$ et son moment d'inertie par rapport à un axe qui passe par C perpendiculairement au plan du cerceau : $J_{Gz} = mR^2$.

Le coefficient de frottement du cerceau sur le sol vaut f .

Déterminer la condition pour qu'au début du mouvement il y ait roulement sans glissement ; le solide est lâché sans vitesse initiale, dans la position indiquée sur la figure ci-contre.

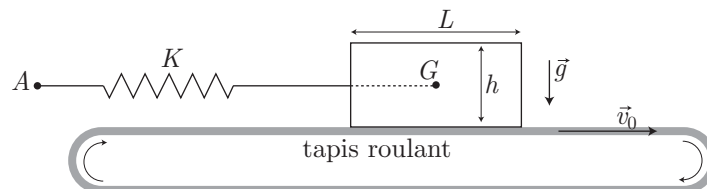


★★ 8- Glissement sur un tapis roulant

Un solide rectangulaire, de masse m , peut glisser sur un tapis roulant horizontal qui avance à la vitesse $v_0 > 0$.

Un ressort de rappel (de constante K) est accroché à un point fixe A .

Les coefficients de frottement sont : f (dynamique) et $2f$ (statique).



On pose $\omega = \sqrt{\frac{K}{m}}$ et $a = \frac{fmg}{K}$.

On lâche le solide sans vitesse initiale par rapport au référentiel \mathfrak{R} dans lequel le tapis roulant avance à la vitesse \vec{v}_0 , alors que le ressort est au repos.

Donner l'expression de la période des oscillations en fonction de ω, v_0, a .

PHYSIQUE QUANTIQUE

FONCTIONS D'ONDE

1- Particule confinée

On propose la fonction d'onde $\psi(x, t) = A \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-i\omega t}$ pour une particule confinée dans l'espace compris entre $\left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right]$.

1. Déterminer A .
2. Expliquer pourquoi cette écriture ne convient pas. Proposer une explication convenable de la fonction d'onde. On admettra la continuité de la fonction d'onde sur \mathbb{R} .

2- Atome de Bohr

On rappelle l'équation de Schrödinger pour une particule non relativiste de masse m , décrite par la fonction d'onde $\psi(\vec{r}, t)$, dans un champ d'énergie potentielle $E_p(\vec{r})$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + E_p(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$$

où \vec{r} désigne le vecteur position d'un point M quelconque de l'espace (M est repéré par ses coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques, d'origine O) et Δ est l'opérateur Laplacien.

1. On s'intéresse aux états stationnaires d'énergie E de l'électron de l'atome d'hydrogène ; on note :

$$\psi(\vec{r}, t) = \kappa(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$$

Écrire l'équation de Schrödinger indépendante du temps concernant la partie spatiale de la fonction d'onde $\kappa(\vec{r})$ (on n'explicitera, à ce stade, ni la fonction énergie potentielle, ni le Laplacien).

Afin de simplifier la résolution de l'équation obtenue, nous nous limiterons à considérer que l'électron n'est spatialement détectable qu'en un lieu de points formés de cercles dans le plan d'équation $z = 0$, concentriques au point O où se trouve le proton (supposé ponctuel) et avec des rayons de valeurs quantifiées. Les points M où est évaluée la fonction d'onde sont ainsi repérés par leurs coordonnées polaires ($r = R, \theta$), d'axe Oz , avec r contraint à prendre des valeurs R discrètes (que l'on cherche à déterminer). $\kappa(\vec{r})$ est alors une fonction continue de la variable θ ; on la notera $\kappa(\theta)$.

2. Expliciter la fonction énergie potentielle électrostatique de l'électron, pour laquelle on impose $r = R$.
3. Sachant que $E_p = 2E$, montrer que $\kappa(\theta)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\hbar^2}{2m_e R^2} \frac{d^2 \kappa(\theta)}{d\theta^2} = E \kappa(\theta)$$

Résoudre cette équation pour les états liés de l'électron, en posant $\eta^2 = \frac{m_e R e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}$.

4. En remarquant que $\kappa(\theta + 2\pi) = \kappa(\theta)$, déterminer une relation de quantification de valeurs de R , puis des énergies E . Commenter ces résultats.

On rappelle l'expression du Laplacien scalaire en coordonnées cylindriques :

$$\Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

Extrait de CCINP 2018

3- Orbitale atomique de l'hydrogène

1. Soit l'orbitale $1s$ de l'atome d'hydrogène. On donne, en coordonnées sphériques :

$$\psi_{1s}(r, \theta, \varphi) = A \times \exp\left(-\frac{r}{a_0}\right)$$

où A est une constante et a_0 le rayon de Bohr : $a_0 = 52.10^{-12}$ m.

- Exprimer la probabilité élémentaire δP de trouver l'électron dans un volume $d\tau$ autour du point $M(r, \theta, \varphi)$. On exprimer l'élément de volume $d\tau$ en coordonnées sphériques. Comment pourrait-on déterminer la constante A ? (aucun calcul de A n'est demandé à cette étape).
- En intégrant sur les variables angulaires, déterminer alors la probabilité radiale δP_r .
- Évaluer la densité de probabilité radiale $F_{1s} = \frac{\delta P_r}{dr}$.
- Étudier F_{1s} en fonction de r et montrer que la courbe passe par un maximum dont on interprétera l'existence.

2. Reprendre l'étude précédente pour l'orbitale $2s$:

$$\psi_{2s}(r, \theta, \varphi) = B \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) \times \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right)$$

On montrera que F_{2s} présente quatre extrema dont un maximum absolu. Comparer la position de ce maximum avec celui de la question précédente.

★ 4- Étalement d'un paquet d'ondes gaussien

On considère une particule décrite par une fonction d'onde gaussienne à l'instant initial $t = 0$:

$$\psi(x, 0) = \psi_0 e^{ik_0 x} e^{-x^2/\sigma^2}$$

- Quelle forme a la densité de probabilité de présence ?
 - Exprimer l'indétermination en position Δx en fonction de σ .
- La résolution de l'équation de Schrödinger conduit au résultat :

$$\psi(x, t) = \psi_0 e^{i\theta(t)} e^{ik_0 x} \frac{\exp\left[-(x - \frac{\hbar k_0}{m} t)^2 / (\sigma^2 + 2i\hbar t/m)\right]}{\left[1 + \left(\frac{2\hbar t}{m\sigma^2}\right)^2\right]^{1/4}}$$

où $\theta(t)$ est une fonction réelle de t .

Déterminer la loi d'évolution de la largeur $\Delta x(t)$ du paquet d'onde.

PHYSIQUE QUANTIQUE

PARTICULES DANS DES POTENTIELS

1- Puits de potentiel infini

Quelles sont les valeurs possibles que peut prendre l'énergie d'une particule de masse m dans un puits de potentiel à une dimension, infiniment profond, de largeur a ?

On rappelle que pour un état stationnaire : $\psi(x, t) = \phi(x) \exp\left(-\frac{iEt}{\hbar}\right)$.

L'équation de Schrödinger s'écrit pour la partie spatiale de la fonction d'onde :

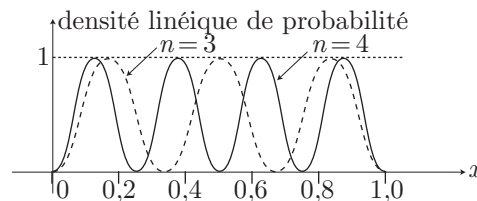
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\phi}{dx^2} + V\phi = E\phi$$

2- Modes propres d'un puits de potentiel infini

Une particule qui se déplace sur un axe Ox est soumise à un potentiel V tel que $V = 0$ pour $0 < x < a$ et $V = \infty$ pour $x < 0$ et $x > a$. On écrit les fonctions d'onde des états stationnaires sous la forme : $\psi_n(x, t) = \phi_n(x) \times f_n(t)$. On désigne par E_n les énergies correspondantes. On rappelle que l'équation de Schrödinger s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + V\psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

1. Déterminer $\psi_n(x, t)$.
2. Tracer la densité linéique de probabilité de présence en fonction de x pour $n = 1$ et pour $n = 2$.
3. La figure ci-dessous représente la densité linéique de probabilité de présence pour $n = 3$ et $n = 4$.
Quelle est la relation entre le niveau d'énergie E_n et le nombre de nœuds entre 0 et a ?



4. Que se passe-t-il si a diminue ? Comment est modifié l'écart entre deux niveaux d'énergie successifs ? Comment est modifiée l'énergie cinétique ? Comment est modifiée l'énergie minimale de la particule ? Retrouver qualitativement l'énergie minimale à partir de l'inégalité de Heisenberg spatial.
5. Quel cas limité retrouve-t-on si a tend vers l'infini ?
À quoi est due la quantification de l'énergie ?
Dans quel autre domaine de la physique a-t-on déjà rencontré une quantification des pulsations propres ?

3- Puits semi-infini

Une particule de masse m est placée dans un champ énergétique de potentiel :

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } x < 0 \\ 0 & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ V_0 > 0 & \text{pour } x > a \end{cases}$$

On cherche une solution stationnaire d'énergie E de l'équation de Schrödinger et on suppose que $0 < E < V_0$. On pose :

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad k_0 = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}} \quad \delta = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m(V_0 - E)}} \quad \beta = k_0 a$$

1. Justifier que l'on peut chercher le terme spatial de la fonction d'onde sous la forme :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ A_1 \cos(kx) + B_1 \sin(kx) & \text{pour } 0 \leq x \leq a \\ A_2 e^{-x/\delta} + B_2 e^{x/\delta} & \text{pour } x > a \end{cases}$$

2. Justifier que $B_2 = 0$.
3. Par application des conditions de continuité, écrire le système de trois équations vérifiées par A_1 , A_2 et B_1 .
4. En éliminant ces trois constantes entre les équations, établir la relation entre k , a et δ . Montrer qu'on eut l'écrire sous la forme :

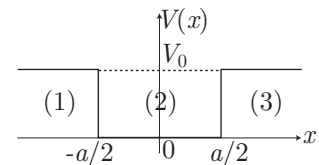
$$|\sin(ka)| = \frac{k}{k_0} \text{ avec } \tan(ka) < 0$$

5. Cette équation se résout graphiquement. Rechercher les solutions pour $\beta = \frac{\pi}{2}$ et pour $\beta = 5\pi$.
6. En déduire que :
- si $k_0 < \frac{\pi}{2a}$ le problème n'a pas de solution stationnaire ;
 - si $k_0 > \frac{\pi}{2a}$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs possibles pour l'énergie et le problème est quantifié ;
 - si $k_0 \gg \frac{\pi}{2a}$, on retrouve la quantification du puits infini.

4- Puits de potentiel fini

On considère un puits de potentiel à une dimension :

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{si } |x| < \frac{a}{2} \\ V(x) = V_0 > 0 & \text{si } |x| > \frac{a}{2} \end{cases}$$



et on étudie les états stationnaires d'énergie $\mathcal{E} > 0$ (et $\mathcal{E} < V_0$).

1. Établir les équations différentielles satisfaites par la fonction d'onde spatiale $\varphi(x)$ dans les domaines (1), (2) et (3). On introduira les paramètres :

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - \mathcal{E})} \quad p = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} \mathcal{E}} \quad \alpha = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0}}$$

2. Montrer que l'ensemble des fonctions d'onde solutions de ces équations peuvent être regroupées en fonctions paires ($\varphi_s(x)$) et fonctions impaires ($\varphi_a(x)$).
3. Montrer que les solutions $\varphi_s(x)$ s'obtiennent pour :

$$\tan\left(\frac{pa}{2}\right) = \frac{k}{p} > 0 \text{ et } \left|\cos\left(\frac{pa}{2}\right)\right| = \alpha p \quad (5)$$

À l'aide du paramètre $u = \frac{pa}{2}$, trouver une méthode géométrique conduisant aux solutions (5) : $|\cos u| = \frac{2\alpha}{a} u$.

4. Faire de même pour les solutions anti-symétriques $\varphi_a(x)$, avec :

$$\tan\left(\frac{pa}{2}\right) = -\frac{p}{k} < 0 \text{ et } \left|\sin\left(\frac{pa}{2}\right)\right| = \alpha p \Rightarrow |\sin u| = \frac{2\alpha}{a} u$$

5. Dans le cas général, montrer qu'il existe un nombre maximum N_{\max} de valeurs de \mathcal{E} :

$$N_{\max} = E\left(\frac{a}{\pi\alpha}\right) \text{ où } \alpha = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0}} \text{ et } E(x) = \text{partie entière de } x$$

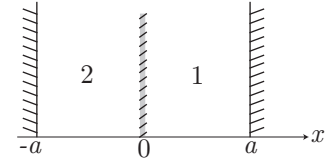
6. Montrer que lorsque V_0 tend vers l'infini, on retrouve la quantification habituelle de l'énergie d'une particule confinée dans un puits infini :

$$\mathcal{E}_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \text{ où } n \in \mathbb{N}^*$$

★★ 5- Puits de potentiel avec pic de Dirac

Une particule se trouve confinée dans un puits de potentiel défini par :

$$V(x) = \begin{cases} \alpha \delta(x) & \text{pour } |x| < a \\ \infty & \text{pour } |x| > a \end{cases} \quad \text{où } \alpha > 0$$



On rappelle que la distribution de Dirac $\delta(x)$ est définie telle que, pour toute fonction f sommable et continue sur l'intervalle $[-A; A]$:

$$\int_{-A}^A f(x) \delta(x) dx = f(0)$$

On se limitera au cas où $\xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \gg 1$ et aux états stationnaires.

1. Les solutions stationnaires de l'équation de Schrödinger seront notées $\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-iEt/\hbar}$ avec $E > 0$. Expliquer pourquoi des fonctions paires $\varphi(x) = \varphi(-x)$ sont solutions du problème, ainsi que des fonctions impaires.
2. On cherche d'abord les solutions impaires, que l'on notera $\varphi^-(x)$. En résolvant l'équation de Schrödinger, montrer que ces états ont un spectre d'énergie qui s'exprime simplement :

$$E_n^- = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \text{ avec } \begin{cases} \varphi_1^-(x) = \varphi_0 \sin [k(x-a)] & \text{pour } x > 0 \\ \varphi_2^-(x) = \varphi_0 \sin [k(x+a)] & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

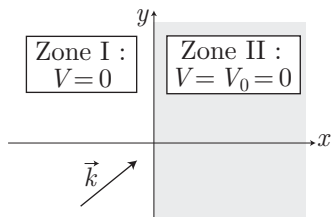
où les indices 1 et 2 font référence aux domaines 1 et 2.

3. Montrer que $\begin{cases} \varphi_1^+(x) = \varphi_0 \sin [k(x-a)] \\ \varphi_2^+(x) = -\varphi_0 \sin [k(x+a)] \end{cases}$ pour les fonctions paires.
4. En étudiant la condition de raccordement en $x = 0$, établir que $\tan ka = -\frac{\hbar^2 k}{m\alpha}$.
5. Montrer que le spectre d'énergie de ces solutions se met sous la forme : $E_n^+ \simeq \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \left(1 - \frac{2}{\xi}\right)$.

★★ 6- Marche de potentiel à 3 dimensions

Un faisceau de particules non relativistes d'énergie E rencontre une «marche» de potentiel à 3 dimensions, comme illustré sur le schéma ci-dessous.

$$V(x, y, z) = \begin{cases} V_0 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Comme le problème est plan, on ne considérera que les deux directions x et y .

Un point de cet espace est donc repéré par le vecteur $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

1. Interpréter les différents termes de la partie spatiale de la fonction d'onde décrivant ces particules :

$$\varphi(\vec{r}) = \begin{cases} A e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + B e^{i\vec{k}_1\cdot\vec{r}} & \text{si } x < 0 \\ C e^{i\vec{k}_2\cdot\vec{r}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

où $\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$ est le vecteur d'onde associé aux particules incidentes.

2. Écrire les équations de continuité à l'interface $x = 0$. Ces relations sont-elles valables pour un y particulier ? En déduire que $k_{1y} = k_{2y} = k_y$.
3. Quelle est l'énergie cinétique des particules dans la zone I ? En déduire l'expression de k_{1x} en fonction de k_x . Faire de même dans la zone II et en déduire l'expression de k_{2x} en fonction de k_x et V_0 .
4. En utilisant les conditions de continuité, exprimer les rapports $\frac{B}{A}$ et $\frac{C}{A}$ en fonction de k_x et k_{2x} .

5. On définit le coefficient de réflexion R comme le rapport $\frac{|B|^2}{|A|^2}$, puis le coefficient de transmission par la relation $T = 1 - R$.
Exprimer R et T en fonction de k_x et k_{2x} . Le coefficient T est-il égal à $\frac{|C|^2}{|A|^2}$?
6. Montrer que les angles d'incidence θ et de réflexion θ_1 sont égaux.
7. Exprimer le rapport $n = \frac{\lambda_2}{\lambda}$ des longueurs d'onde incidente et transmise, en fonction de $\frac{V_0}{E}$.
8. Si $\frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} > V_0$, montrer que la direction de propagation de l'onde transmise obéit à une loi du type Snell-Descartes où la quantité n joue le rôle d'un indice de réfraction.

PHYSIQUE QUANTIQUE

ÉTATS NON STATIONNAIRES

1- Oscillations quantiques entre deux états

Une particule possède deux états stationnaires d'énergies respectives E_1 et E_2 .

1. Donner les pulsations correspondantes ω_1 et ω_2 .
2. Exprimer les fonctions d'onde correspondantes en notant $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$ les termes spatiaux associés.
3. Exprimer les densités de probabilité $\rho_1(x)$ et $\rho_2(x)$ correspondantes.
4. On pose :

$$\phi(x) = \varphi_1(x) \varphi_2^*(x) = r(x) e^{i\theta(x)}$$

Donner l'expression de la densité $\rho(x, t)$ de la superposition des deux ondes en fonction de $\rho_1(x)$, $\rho_2(x)$, $r(x)$, $\theta(x)$, E_1 et E_2 . En déduire la pulsation ω_{12} .

2- Superposition de deux fonctions d'onde

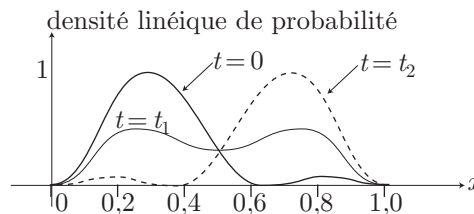
Une particule, qui se déplace sur un axe Ox , est soumise à un potentiel V tel que $V = 0$ pour $0 < x < a$ et $V = \infty$ pour $x < 0$ et $x > a$. Les fonctions d'onde normées des états stationnaires peuvent s'écrire sous la forme :

$$\psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \exp\left(-\frac{iE_n t}{\hbar}\right)$$

On place le système à $t = 0$ dans l'état représenté par :

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_1(x) + \phi_2(x)]$$

1. Donner l'expression de $\psi(x, t)$. On posera dans les calculs : $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$.
2. Établir l'expression de la densité linéique de probabilité de présence.
On donne les graphes représentant la densité linéique de probabilité de présence en fonction de x à $t = 0$, $t = t_1 = \frac{\pi}{2\omega}$ et $t = t_2 = \frac{\pi}{\omega}$:



Interpréter ces graphes. Que se passe-t-il pour $t > \frac{\pi}{\omega}$?

3. La valeur moyenne de x à l'instant t peut s'écrire sous la forme :

$$\langle x \rangle = \int_{x=0}^a x |\psi|^2 dx = \frac{a}{2} - \frac{16a}{9\pi^2} \cos(\omega t)$$

Représenter graphiquement la valeur moyenne de x en fonction du temps t . En déduire une estimation de l'intervalle de temps Δt au bout duquel le système a évolué de façon appréciable.

3- Molécule d'ammoniac (concours Centrale-Supélec)

III.A – Conformations de la molécule d'ammoniac

La molécule d'ammoniac $^{14}\text{NH}_3$, se présente sous la forme d'une pyramide symétrique, l'atome d'azote étant à son sommet. Les trois atomes d'hydrogène définissent le plan de référence. La position de l'atome d'azote est repérée par l'abscisse x telle que $|x|$ soit la distance de l'atome au plan de référence Oyz (figure 8).

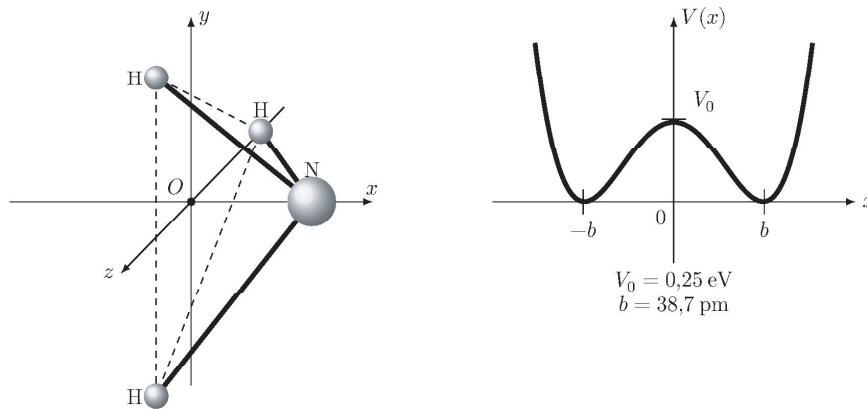


Figure 8 Géométrie et énergie potentielle de la molécule d'ammoniac

III.A.1) Interpréter la forme, la symétrie et les points particuliers de la courbe d'énergie potentielle $V(x)$.

La molécule d'ammoniac peut se trouver dans deux états de conformation, selon que l'atome se trouve du côté $x > 0$ (conformation D, figure 9) ou du côté $x < 0$ (conformation G). Les deux états sont séparés par une barrière de potentiel $V_0 = 0,25\text{ eV}$. On appelle inversion le passage d'une conformation à l'autre, lorsque l'atome d'azote traverse la barrière d'énergie due aux trois atomes d'hydrogène.

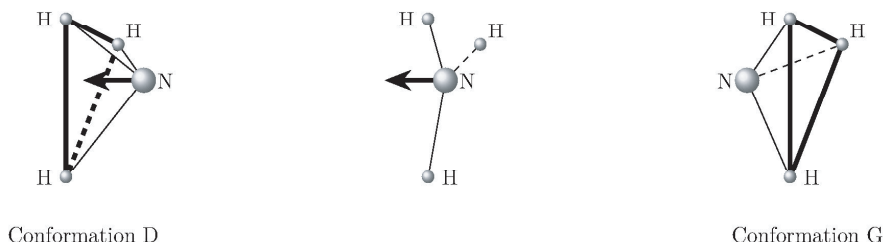


Figure 9 Inversion de la molécule d'ammoniac

III.A.2) L'énergie $k_B T$ est-elle suffisante pour que la molécule puisse s'inverser si la température est celle du point triple de l'eau T_{PT} ?

À partir de quelle température cette inversion peut-elle s'effectuer ? Commenter.

III.B – Inversion quantique de la molécule d'ammoniac

On se propose de montrer que l'inversion de la molécule d'ammoniac est possible du point de vue quantique, indépendamment de la température. La fonction d'onde décrivant le mouvement relatif de l'atome d'azote et des trois atomes d'hydrogène est notée $\psi(x, t)$; elle vérifie l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(x, t) + V(x)\psi(x, t)$$

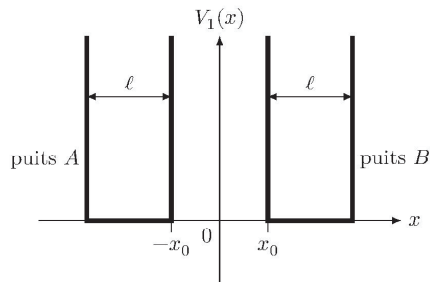
où m est la masse réduite du système composé de l'atome d'azote et des trois atomes d'hydrogène (on prendra $m \approx 2,5 m_H$).

III.B.1) On s'intéresse aux états stationnaires d'énergie E et on pose $\psi(x, t) = \varphi(x) \exp(-iEt/\hbar)$.

Montrer que $\varphi(x)$ vérifie l'équation III.1

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2} \varphi(x) = 0 \quad (\text{III.1})$$

On considère dans un premier temps un modèle de potentiel $V_1(x)$ à double puits infini symétrique rectangulaire (figure 10).



$$V_1 = \begin{cases} +\infty & \text{si } |x| < x_0 \\ 0 & \text{si } x_0 \leq |x| \leq x_0 + \ell \\ +\infty & \text{si } x_0 + \ell \leq |x| \end{cases}$$

Figure 10 Profil en double puits infini symétrique rectangulaire

Les fonctions d'onde localisées dans le puits A sont notées $\psi_A(x, t)$, celles localisées dans le puits B , $\psi_B(x, t)$. Les fonctions $\varphi(x)$ associées sont notées respectivement $\varphi_A(x)$ et $\varphi_B(x)$.

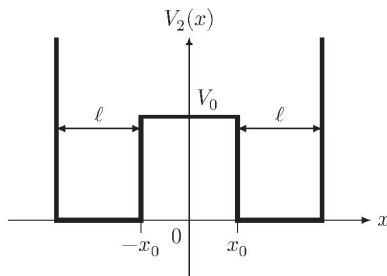
III.B.2)

- Que veut dire qu'une fonction d'onde est localisée sur un domaine ?
- Pourquoi doit-on considérer les fonctions d'onde identiquement nulles pour $|x| < x_0$ et $|x| > x_0 + \ell$? Quelles sont les conditions aux limites de $\varphi_A(x)$ et $\varphi_B(x)$?
- Donner, sous forme intégrale, sans les calculer, les conditions de normalisation pour $\varphi_A(x)$ et $\varphi_B(x)$.

III.B.3)

- Résoudre l'équation III.1 pour le potentiel $V_1(x)$ dans l'intervalle $[-x_0 - \ell, -x_0]$ correspondant au puits A . On donnera les solutions normalisées $\varphi_{A,n}(x)$ indicées par un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et les énergies E_n^A associées.
- Quelles sont, sans calculs, les solutions $\varphi_B(x)$ et les énergies E_n^B ?
- Soit une molécule d'ammoniac dans un état décrit par $\psi_{A,n}(x, t)$ d'énergie E_n^A à un instant t donné. Quelle est la probabilité de trouver l'atome d'azote dans l'intervalle $[x_0, x_0 + \ell]$ à l'instant $t' > t$? Conclure.

On modélise cette fois le profil d'énergie potentielle par un double puits infini rectangulaire à saut fini, $V_2(x)$ (figure 11).



$$V_2 = \begin{cases} V_0 & \text{si } |x| < x_0 \\ 0 & \text{si } x_0 \leq |x| \leq x_0 + \ell \\ +\infty & \text{si } x_0 + \ell \leq |x| \end{cases}$$

Figure 11 Profil en double puits à saut fini

On donne $V_0 = 0,25 \text{ eV}$, $x_0 = 10 \text{ pm}$. On considère $0 \leq E \leq V_0$.

III.B.4) Justifier que dans le domaine $x_0 \leq x \leq x_0 + \ell$, la solution de l'équation III.1 s'écrit

$$\varphi_B(x) = \mathcal{B} \sin(k(x - x_0 - \ell)) \quad \text{avec } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

où \mathcal{B} une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer. En déduire une forme de solution $\varphi_A(x)$ dans le domaine $-x_0 - \ell \leq x \leq -x_0$.

III.B.5) Dans le domaine $x_0 < x < x_0 + \ell$, les solutions de l'équation III.1 s'écrivent

$$\varphi_C(x) = C_1 \cosh(Kx) + C_2 \sinh(Kx)$$

où C_1 , C_2 et K sont des constantes.

- Exprimer K en fonction de E , V_0 , m et \hbar .

b) Quelles conditions doivent être vérifiées par la fonction d'onde $\psi(x, t)$ en tout point où le potentiel est borné ?

En déduire deux relations entre $\varphi_C(x_0^-)$, $\varphi_B(x_0^+)$, $\frac{d\varphi_C}{dx}(x_0^-)$ et $\frac{d\varphi_B}{dx}(x_0^+)$.

À partir de ces relations qui relient K à k , il est possible de déterminer l'énergie E de l'état stationnaire $\varphi(x)$, selon qu'il est symétrique (ou pair en x , ce qui conduit à $C_2 = 0$) ou antisymétrique (ou impair en x , donc $C_1 = 0$).

III.B.6) La première solution symétrique $\varphi_1^{\text{sym}}(x)$ d'énergie E_1^{sym} et la première solution antisymétrique, impaire en x , $\varphi_1^{\text{anti}}(x)$ d'énergie E_1^{anti} sont représentées figure 12. Dans le cas où les énergies de ces deux états sont très petites devant V_0 , leur différence est

$$\delta E = E_1^{\text{anti}} - E_1^{\text{sym}} = \frac{4\pi^2\hbar^3}{m\ell^3} \frac{\exp(-2x_0\sqrt{2mV_0}/\hbar)}{\sqrt{2mV_0}}$$

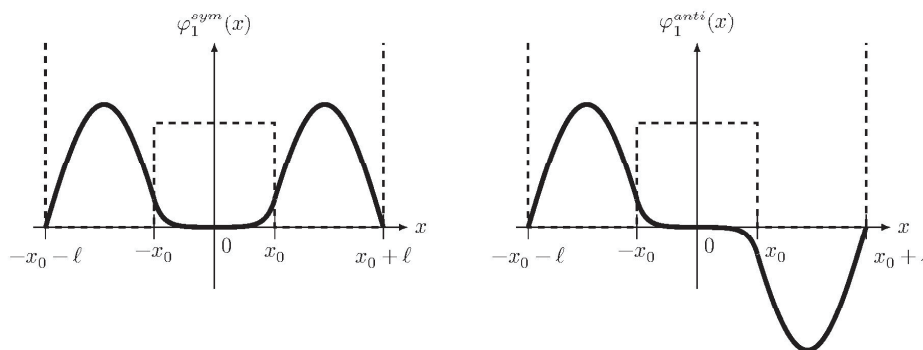


Figure 12 Solutions φ_1^{sym} et φ_1^{anti}

À l'instant $t = 0$, la molécule d'ammoniac est dans une conformation G (figure 13), décrite par la fonction d'onde

$$\psi(x, 0) = \varphi_G(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1^{\text{sym}}(x) + \varphi_1^{\text{anti}}(x))$$

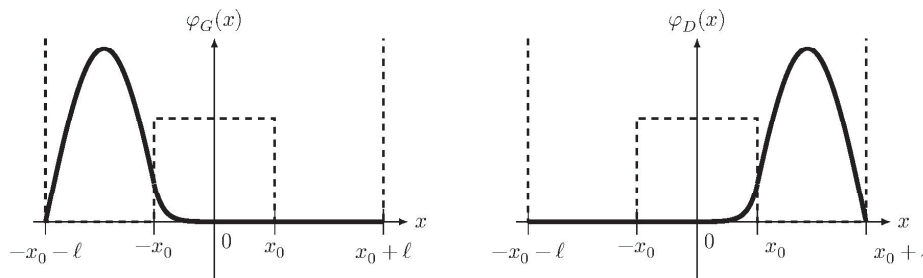


Figure 13 Fonctions φ_G et φ_D

a) Écrire l'expression de la fonction d'onde $\psi(x, t)$ de la molécule d'ammoniac à un instant t quelconque, en fonction de φ_1^{sym} , φ_1^{anti} , des énergies E_1^{anti} et E_1^{sym} et de \hbar .

b) Pourquoi deux fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2 telles que $\psi_1 = \psi_2 \exp(i\alpha)$, où $\exp(i\alpha)$ est un nombre complexe de module 1, décrivent-elles le même état physique ?

c) En déduire que la fonction d'onde $\psi(x, t)$ décrit une évolution périodique de l'état de la molécule d'ammoniac, dont on exprimera la période τ en fonction de δE et de \hbar . Calculer la fréquence f correspondante si $\delta E = 9,85 \times 10^{-5}$ eV. Dans quel domaine spectral se situe une onde électromagnétique de fréquence f ?

C'est sur cette transition que fonctionna le premier maser construit par C. Townes, J. Gordon et H. Ziegler en 1954.

d) Décrire l'état de la molécule d'ammoniac à l'instant $t = \tau/2$. En quoi ce changement d'état entre les instants $t = 0$ et $t = \tau/2$ permet-il d'illustrer l'effet tunnel ?

e) Quelle est l'influence de la barrière de potentiel V_0 et de la largeur x_0 sur la fréquence d'oscillation f ? Pour l'arsine, de formule AsH_3 , de même structure que NH_3 , la hauteur de la barrière de potentiel est multipliée par six et sa largeur par cinq. Calculer la fréquence f' d'inversion de l'arsine ainsi que la période τ' . Commenter.

★★ 4- États non stationnaires dans un puits infini

On considère une particule à une dimension piégée dans la région $0 < x < L$ (puits infini).

Sa fonction d'onde peut se développer sous la forme $\psi(x, t = 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x)$ dans la base orthonormée $\{u_n(x)\}$ des états stationnaires :

$$\begin{cases} u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n\pi \frac{x}{L}\right) \text{ pour } x \in [0, L] \\ u_n(x) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

On considère plus particulièrement une fonction d'onde bien localisée entre $x = \frac{L}{4}$ et $x = \frac{L}{2}$ (comme celle issue d'une mesure «réaliste» de position), définie par :

$$\varphi(x) = \sin\left(4\pi \frac{x}{L}\right) \text{ pour } x \in \left[\frac{L}{4}, \frac{L}{2}\right] \text{ et } \varphi(x) = 0 \text{ pour } x \notin \left[\frac{L}{4}, \frac{L}{2}\right]$$

1. Exprimer A_n sous forme d'un produit scalaire, puis calculer A_n .
2. Donner l'expression de $\psi(x, t)$. On pourra poser $\omega_0 = \frac{\pi^2 \hbar}{2mL^2} = \frac{2\pi}{T_0}$.
3. Le script ci-dessous permet une représentation animée de $\psi(x, t)$ dans le temps. LE modifier afin d'obtenir sur un même graphe les représentations de $\psi(x, t)$ aux dates $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{T_0}{12}$ et $t_3 = \frac{T_0}{2}$.

```

1 from math import*
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import matplotlib.animation as animation
4
5 N,L,w0=30,1,1 #Nombre d'harmoniques (N), largeur du puits (L), pulsation w0
6
7 T=2*pi/w0# Période associée à w0
8 dt=T/200#Incréments de temps
9
10 def A(n):#Amplitude de chaque harmonique
11     if n==4:
12         return sqrt(L/32)
13     else:
14         return sqrt(L/2)*8/(pi*(n**2-16))*(sin(n*pi/2)+sin(n*pi/4))
15
16 def psi2(x,t):#Densité de probabilité P(x,t)=|psi(x,t)|^2
17     Y=0
18     for n in range(1,N+1):
19         Y=Y+A(n)*sqrt(2/L)*sin(n*pi*x/L)*e**(-1j*n**2*w0*t)
20     return abs(Y)**2
21
22 #On crée la figure une fois puis on la modifie régulièrement dans le temps
23 fig=plt.figure()
24 ax1=fig.add_subplot(1,1,1)
25 fig.show()
26
27 x=[i*L/1000 for i in range(1000)]#Création de la liste des valeurs de x
28
29 def anime(i):
30     y=[]#Création des valeurs de P à l'instant i*dt
31     for X in x:
32         y.append(psi2(X,i*dt))
33     ax1.clear()#On efface le graphique précédent
34     ax1.plot(x,y,"blue",label="t={:.2f}*T={:.3f}".format(i*dt/T,i*dt))#On trace le nouveau
35     graphique
36     plt.ylim(0,1)
37     plt.xlabel("distance_□(m)")
38     ax1.legend(loc='upper_□right')
39
40 #Appelle la fonction anime toutes les 50 ms avec un indice i de plus en plus grand
41 simulation=animation.FuncAnimation(fig,anime,interval=100)

```

PHYSIQUE STATISTIQUE

STATIQUE DES FLUIDES

1- Hémisphères de Magdebourg

Il s'agit d'une expérience réalisée par OTTO VON GUERICKE, bourgmestre de Magdebourg en 1655 pour mettre en évidence la pression atmosphérique.

Deux hémisphères creux sont assemblés pour former une sphère dans laquelle on réalise le vide à l'aide d'une pompe. Deux équipages de chevaux ont été attachés aux deux demi-sphères pour tenter de les séparer.



Combien de chevaux sont nécessaires ?

2- Ascension d'une montgolfière

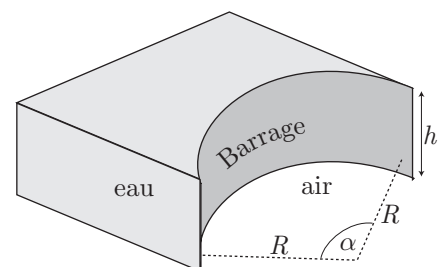
Nous supposons l'atmosphère isotherme (température $T = 290$ K), constituée d'air au repos, assimilé à un gaz parfait de masse molaire uniforme ($M_a = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$). Le champ de gravitation est également supposé de norme $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ uniforme aux altitudes considérées. L'axe Oz est orienté selon la verticale ascendante et, à la surface du sol (altitude $z = 0$), la pression vaut $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$.

1. Établir l'expression de la pression p en tout point de l'atmosphère, en fonction de l'altitude z et des autres données.
2. Un scientifique décide de s'envoler à bord d'une montgolfière (sphère de rayon $r = 5 \text{ m}$). Il la gonfle avec de l'hélium, à la pression atmosphérique et à la température ambiante T , puis il la ferme hermétiquement. La masse totale de la montgolfière, y compris l'hélium et le passager, est $M = 600 \text{ kg}$. Déterminer la force ascensionnelle au départ et la condition sur M pour qu'elle puisse s'envoler
3. Déterminer l'altitude-plafond atteinte par la montgolfière.
4. Une fois que celle-ci a été atteinte, le scientifique largue une masse $m = \frac{M}{20}$. Déterminer la nouvelle altitude-plafond.
5. À cette altitude, les frottements fluides sont négligés. Montrer que la montgolfière est en équilibre.
6. Déterminer la période de ses oscillations si elle est légèrement déplacée de sa position d'équilibre.

★ 3- Résultante des forces de pression sur un barrage

Un barrage a la forme d'un secteur cylindrique de hauteur h , caractérisé par son rayon R et l'angle α . Il est rempli d'eau, de masse volumique μ et l'air ambiant est à la pression uniforme P_0 .

1. Écrire la loi de pression $P(z)$ dans l'eau, en précisant bien l'orientation de l'axe et le choix de l'origine.
2. En déduire la résultante \vec{F} des forces de pression s'exerçant sur la paroi du barrage.



★ 4- Équilibre polytropique de l'atmosphère

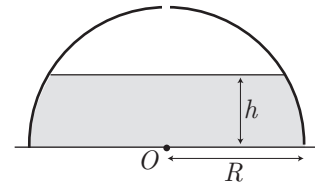
Pour une altitude inférieure à 10 km, la température de l'air diminue linéairement avec l'altitude : $T(z) = T_0 - a z$ où T_0 est la température au sol et $a = 6,5^\circ\text{C}/\text{km}$. L'air est assimilé à un gaz parfait et le champ de pesanteur est pris uniforme.

1. Montrer que cela conduit à la relation : $\frac{P(z)}{P_0} = \left[\frac{T(z)}{T_0} \right]^\alpha$. Donner l'expression et la valeur numérique de α .
2. Reprendre, dans ce modèle, le calcul de la pression au sommet du Mont-Blanc. Commenter.
3. En déduire une relation simple entre $P(z)$ et $\mu(z)$.

★ 5- Soulèvement d'une calotte sphérique

Une demi-sphère de rayon R et de masse m , posée sur le sol, est percée d'un trou en son sommet. On la remplit progressivement d'eau, de masse volumique μ uniforme.

Pour quelle hauteur h d'eau se soulève-t-elle ?



PHYSIQUE STATISTIQUE

DISTRIBUTIONS DISCRÈTES D'ÉTATS

1- Molécules à deux niveaux d'énergie

On considère un système composé d'un grand nombre de molécules N , chacune des molécules possédant deux niveaux d'énergie ε_1 et ε_2 ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$) de même degré de dégénérescence $g = 1$. On posera $\varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Ce système obéit à la statistique de Maxwell-Boltzmann et est en équilibre avec un thermostat à la température thermodynamique T .

1. Écrire les expressions des nombres N_1 et N_2 de molécules ayant respectivement les énergies ε_1 et ε_2 . En déduire les probabilités p_1 et p_2 pour une molécule d'être respectivement sur les niveaux ε_1 et ε_2 .
2. Calculer $N_1 - N_2$.
3. Définir une température caractéristique θ du système.
4. Quelles sont les limites de N_1 , N_2 , $N_1 - N_2$ dans les deux cas suivants :
 - a- $T \ll \theta$;
 - b- $T \gg \theta$.

Retrouver les résultats précédents par des arguments physiques simples.

5. Établir l'expression de l'énergie interne U du système considéré. Tracer la courbe représentative de U en fonction de $\frac{T}{\theta}$.
6. En supposant que ε_1 et ε_2 sont indépendants de la température à volume constant, calculer la capacité thermique molaire C_{vm} du système. Tracer la courbe représentative de C_{vm} en fonction de la température (on portera $\frac{T}{\theta}$ en abscisses et $\frac{C_{vm}}{R}$ en ordonnées, R désignant la constante des gaz parfaits).

On étudiera plus particulièrement les limites asymptotiques de $\frac{C_{cm}}{R}$ pour $T \ll \theta$ et $T \gg \theta$.

7. Application numérique : Quelles sont les valeurs prises par N_1 , N_2 , $N_1 - N_2$ dans les deux cas particuliers suivants : $N = \mathcal{N} = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ (nombre d'Avogadro) et $T = 300 \text{ K}$:
 - a- $\varepsilon = 10^{-5} \text{ eV}$;
 - b- $\varepsilon = 1 \text{ eV}$.

2- Trois niveaux équidistants

On considère trois niveaux équidistants, c'est-à-dire tels que :

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon_3 - \varepsilon_2 = \Delta\varepsilon$$

Les dégénérescences, ou poids statistiques, des différents niveaux sont $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 1$. Par un choix convenable de l'origine des énergies, trouver une expression simple de la fonction de partition Z .

En déduire l'énergie interne U et la capacité thermique C_v .

3- Modèle d'Einstein

Le mouvement suivant un axe d'un atome ou d'un ion appartenant à un solide peut, en première approximation, être assimilé au mouvement d'un oscillateur harmonique suivant cet axe. L'énergie de vibration de l'atome ou de l'ion est quantifiée et peut prendre une des valeurs ε_n :

$$\varepsilon_n = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

h désignant la constante de Planck et ν la fréquence classique de l'oscillateur : $\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$, m étant la masse de l'atome et k la constante de raideur d'un ressort équivalent au potentiel qui tend à ramener l'atome vers sa position d'équilibre. En fait, un atome peut vibrer suivant trois directions indépendantes et son énergie est :

$$\varepsilon_{n_1 n_2 n_3} = \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2} \right) h\nu \quad (6)$$

où n_1, n_2, n_3 sont des entiers positifs ou nuls. Les niveaux d'énergie écrits sous la forme (9) sont tels que :

$$g_{n_1 n_2 n_3} = 1 \forall (n_1, n_2, n_3)$$

Dans le modèle d'Einstein, on admet que tous les atomes vibrent avec la même fréquence. On admettra que les atomes du solide obéissent à la statistique de Maxwell-Boltzmann.

1. Écrire l'expression du nombre N_i^0 d'atomes se trouvant sur le niveau d'énergie ε_i et définir la fonction de partition relative à un atome du solide.
2. Calculer la fonction de partition Z de deux manières :
 - a- en remarquant que la série représentant Z peut s'écrire comme le produit de trois séries simples ;
 - b- en remarquant que les niveaux d'énergie écrits en (9) peuvent encore s'écrire :

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{3}{2} \right) h\nu \quad (7)$$

où $n = n_1 + n_2 + n_3$. Sous la forme (13) les niveaux d'énergie ε_n ont une dégénérescence g_n que l'on calculera pour en déduire Z .

3. Établir l'expression de l'énergie interne U du solide à partir de Z et calculer U . Quelle est l'énergie moyenne de vibration d'un atome ? Quelle est l'énergie de vibration d'un atome suivant un axe ?
4. Représenter la variation de l'énergie interne en fonction de la température. Il sera commode de définir une température caractéristique de vibration θ .
5. Calculer la capacité thermique molaire du solide C_{vm} . Étudier la variation de C_{vm} en fonction de la température. Vers quelle limite tend C_{vm} si $T \gg \theta$. Retrouver cette limite à partir du théorème de l'équipartition² de l'énergie. Représenter graphiquement variation de C_{vm} en fonction de la température.
6. Dans la grande majorité des problèmes physiques, le calcul de la fonction de partition Z ne peut se faire exactement. Le problème de la vibration des atomes, où les niveaux d'énergie sont équidistants, est l'un des rares cas où l'on puisse calculer Z exactement et il est intéressant de comparer le résultat exact ainsi obtenu à celui approché que l'on obtiendrait en assimilant la série représentant Z à une intégrale. Calculer Z à cette approximation et en déduire C_{vm} . Dans quel domaine physique cette approximation est-elle valable ?

4- Paramagnétisme : modèle discret simple

On modélise un système thermodynamique à N particules par un ensemble de dipôle magnétiques de moment individuels $\vec{\mu}_k = i_k \vec{S}_k$ (intensité multipliée par le vecteur surface). Le moment magnétique total est $\vec{\mathcal{M}} = \sum_{k=1}^N \vec{\mu}_k$.

On place ce système dans un champ magnétique extérieur \vec{B} très supérieur à celui créé par les dipôles. On néglige les interactions entre les dipôles devant celles entre \vec{B} et les dipôles dont l'énergie individuelle est $\varepsilon_k = -\vec{\mu}_k \cdot \vec{B}$. On constate expérimentalement la loi de Curie :

$$\vec{\mathcal{M}} = \frac{C}{T} \vec{B}$$

où C est la constante de Curie.

On pose $\vec{B} = B_0 \vec{u}$ et on suppose que le moment dipolaire individuel ne peut prendre que deux valeurs opposées : $\vec{\mu}_k = \pm \mu_0 \vec{u}$. On pose : $\varepsilon_0 = \mu_0 B_0$.

1. Quelles sont les hypothèses qui permettent d'appliquer la statistique de Maxwell-Boltzmann ?
2. Exprimer p^+ et p^- les probabilités respectives que le moment dipolaire $\vec{\mu}_k$ de l'atome soit $+\mu_0 \vec{u}$ ou $-\mu_0 \vec{u}$.
3. Exprimer l'énergie moyenne $\langle \varepsilon_k \rangle$ d'un atome.
4. Exprimer son moment dipolaire moyen $\langle \vec{\mu}_k \rangle$.
5. En déduire $\langle \vec{\mathcal{M}} \rangle$.
6. La loi de Curie est-elle vérifiée ?

2. Seulement pour les 5/2.

PHYSIQUE STATISTIQUE

DISTRIBUTIONS CONTINUE D'ÉTATS

1- Paramagnétisme : théorie de Langevin

Les ions ou atomes d'une substance paramagnétique sont assimilables à de petits aimants de moment magnétique $\vec{\mu}$. Placé dans un champ magnétique uniforme d'induction B_0 , l'énergie d'un ion est, en théorie classique :

$$\varepsilon = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0 = -\mu B_0 \cos \theta = -\mu_z B_0$$

1. En admettant que les ions paramagnétiques obéissent à la statique de Maxwell-Boltzmann, calculer la probabilité pour un ion d'avoir son moment magnétique pointant dans l'angle solide $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ repéré par rapport à la direction du champ magnétique.
2. Définir le moment magnétique total M de la substance suivant la direction du champ magnétique. Trouver l'équation d'état de la substance. Remarquer que cette équation est de la forme : $M = f\left(\frac{B_0}{T}\right)$.
3. Étudier l'équation d'état ainsi trouvée pour les basses et hautes températures et en donner une représentation graphique. Montrer que pour une induction suffisamment faible, la substance suit la loi de Curie :

$$M = C \frac{B_0}{T} \text{ où } C \text{ est la constante de Curie}$$

Quelle est l'expression de cette constante ?

2- Gaz parfait dans un champ de gravitation

On se propose d'étudier, pour un gaz parfait, l'incidence de la pesanteur sur les lois de répartition dans l'espace.

Lorsqu'un gaz formé de molécules identiques de masse m , se trouve dans un champ de pesanteur constant suivant une direction zz' , chaque molécule possède en plus de son énergie cinétique une énergie potentielle fonction de z . On considère une colonne verticale de section S , de hauteur L , dans laquelle se trouve un gaz à température supposée uniforme.

1. Calculer la fonction de partition Z de ce système ; on exprimera Z à l'aide d'un paramètre arbitraire Δ , volume d'une cellule de l'espace des phases. Calculer d^6N , nombre de particules dans le volume élémentaire $d\tau = d^3r d^3p = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ de l'espace des phases.
2. a- Calculer le nombre de molécules dans un volume $d^3r = dx dy dz$ de l'espace réel. En déduire le nombre $n(z)$ de particules par unité de volume de l'espace réel, à l'altitude z .
b- Calculer le nombre de molécules se trouvant entre l'altitude z et $z + dz$. Dans quel cas ce nombre peut-il être considéré comme indépendant de z ?
c- En déduire le rapport des densités à deux altitudes z_1 et z_2 .
d- Application numérique : On considère un cylindre de 1 mètre de haut, rempli d'azote ($M = 28 \text{ g.mol}^{-1}$) à la température ambiante $T = 300 \text{ K}$. Calculer le rapport entre les densités du gaz dans la partie supérieure et la partie inférieure du cylindre. L'effet de pesanteur est-il observable ?
3. On déduit de ce qui précède que seul le cas de fortes variations d'altitude présente un intérêt. On considère donc dans la suite une colonne de hauteur infinie (comprise entre $z = 0$ et $z = \infty$), comprenant N molécules. Donner les nouvelles expressions de Z , d^6N , ainsi que le nombre de molécules par unité de volume et le nombre de molécules comprises entre z et $z + dz$.
4. Rappeler la relation entre la pression p et le nombre de molécules N d'un gaz parfait comprises dans un volume V à la température T . Quelle est la loi de variation de p dans une atmosphère isotherme ? Discuter de l'intérêt physique de ce modèle.

On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$.

3- Gaz parfait dans une centrifugeuse

Un cylindre de révolution, de rayon R et de hauteur H , contient N molécules d'un gaz parfait. On fait tourner ce cylindre autour de son axe à la vitesse angulaire constante ω . On travaillera dans le référentiel tournant avec le cylindre et on supposera la température uniforme et égale à T .

1. Calculer le nombre de molécules comprises entre les cylindres de rayons r et $r + dr$ et de hauteur H .
2. En déduire la densité volumique de molécules $n(r)$ à la distance r de l'axe.
3. Calculer la pression $P(r)$ dans le gaz.
4. Application numérique : Calculer le rapport des pressions $\frac{P(R)}{P(0)}$ pour un cylindre de rayon $R = 10$ cm tournant à 6000 tours/min et rempli d'azote à la température $t = 27^\circ\text{C}$.

★★ 4- Polarisation d'un diélectrique

On étudie ici un mode de polarisation : la polarisation d'orientation.

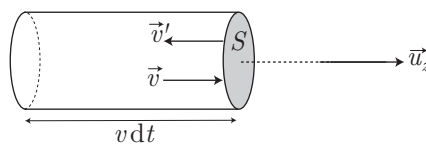
Soit un milieu contenant N molécules, chacune d'elles possédant un moment dipolaire \vec{p} . Ce milieu est placé dans un champ électrostatique $\vec{E} = E \vec{u}_z$.

1. a- Montrer que la probabilité qu'un moment dipolaire \vec{p} fasse avec \vec{E} un angle θ à $d\theta$ près est proportionnelle à $\sin \theta d\theta$.
b- En déduire la probabilité qu'une molécule possède un moment dipolaire \vec{p} , dont l'angle avec \vec{E} est θ à $d\theta$ près, en introduisant le facteur sans dimension $x = \frac{pE}{kT}$.
2. Calculer le moment dipolaire résultant $\vec{P} = P \vec{u}_z$ en fonction de N , p et x .
3. Étudier la fonction (de Langevin) : $x \mapsto \mathcal{L}(x) = \frac{P}{Np}$, notamment lorsque x tend vers zéro ou vers l'infini.

★★ 5- Théorie cinétique des gaz parfaits

1. Premier modèle

Un récipient de volume V contient N particules de gaz parfait monoatomique à la température T (la densité volumique de ce gaz est définie par $n = \frac{N}{V}$). Dans ce premier modèle, on suppose que toutes les molécules, de même masse, possèdent la même vitesse v orientée seulement selon les trois directions de l'espace (c'est-à-dire avec six sens possibles). Intéressons-nous à la force exercée sur un élément de surface S sous l'effet des chocs exercés par ces particules.



Pendant le temps dt , considérons un élément de volume $\delta\tau = v dt \times S$.

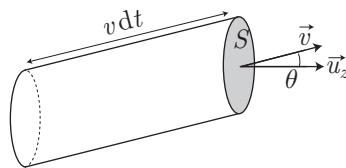
- a- On suppose les chocs élastiques, c'est-à-dire que $\vec{v}' = -\vec{v}$. Montrer que pendant dt , une molécule exerce sur S une force $\vec{F}_{1/S} = \frac{2mv}{dt} \vec{u}_z$.
- b- Déterminer, en fonction de n , S , v , dt , le nombre de chocs subis par S pendant dt (seulement 1/6 des molécules contenues dans $\delta\tau$ ont leur vitesse bien orientée pour provoquer un choc).
- c- En déduire l'expression de la pression exercée par ce gaz en fonction de n , m et v .
- d- On suppose que l'équation d'état du gaz parfait s'écrit $pV = N_{\text{mol}}RT$ (où $N_{\text{mol}} = \frac{N}{\mathcal{N}}$ désigne le nombre de moles correspondant à N et où \mathcal{N} désigne la constante d'Avogadro). Montrer que l'énergie cinétique moyenne d'une molécule vaut :

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{3}{2} kT \text{ où } k \text{ est la constante de Boltzmann}$$

En déduire l'expression de la capacité thermique molaire C_{Vm} liant la variation d'énergie interne dU à la variation de température dT .

2. Deuxième modèle

On considère maintenant que la vitesse $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ des particules peut prendre toutes les orientations d'une manière isotrope et que sa norme v peut prendre toutes les valeurs positives. À nouveau, $\delta\tau$ désigne le volume du cylindre de section S , de longueur $v dt$, incliné d'un angle θ par rapport à \vec{u}_z .



- a- Soit \vec{v} la vitesse incidente d'une particule qui se réfléchit élastiquement (la vitesse \vec{v}' après le choc a la même norme v que celle de \vec{v} avant le choc).
Exprimer la force $\vec{F}_{1/S}$ qu'une particule exerce sur S pendant la durée dt d'un choc, en fonction de m , v , θ , dt et \vec{u}_z .
- b- Exprimer la probabilité $\mathcal{P}(\delta\tau)$ que la particule se trouve dans $\delta\tau$, en fonction de S , v , dt , θ , V .
- c- Montrer que la probabilité que la vitesse \vec{v} soit dirigée selon les angles sphériques θ et φ peut s'écrire :

$$\delta\mathcal{P}(v, \theta, \varphi) = A e^{-mv^2/2kT} \times v^2 dv \sin \theta d\theta d\varphi = f(v) \sin \theta d\theta d\varphi dv$$

où A est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer et $f(v)$ une fonction de v .

- d- On note u la vitesse quadratique moyenne, définie par $u^2 = \langle v^2 \rangle$. Établir l'expression de u^2 en fonction de l'intégrale $\int_{v=0}^{\infty} v^2 f(v) dv$.
- e- Exprimer la force moyenne $\langle \vec{F} \rangle$ subie par S et en déduire l'expression de la pression p . Comparer avec le résultat de la question 1.c-.

RÉVISIONS

I- Moments dipolaires

1. Le moment dipolaire de la molécule de sulfure d'hydrogène H_2S vaut $\mu = 0,97 \text{ D}$, tandis que celui d'une liaisons $\text{S} - \text{H}$ vaut $\mu_0 = 0,758 \text{ D}$. On rappelle que $1 \text{ Debye (D)} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C.m.}$
 - a- Représenter la molécule H_2S ainsi que les moments dipolaires $\vec{\mu}$ et $\vec{\mu}_0$.
 - b- En déduire l'angle des liaisons (HSH).
2.
 - a- Que vaut le moment dipolaire de la molécule de méthane CH_4 ?
 - b- Calculer l'angle entre les liaisons $\text{C} - \text{H}$ dans cette molécule.

II- Équilibre de précipitation

La solubilité de l'hydroxyde de cuivre (II) dans l'eau pure est $1,7 \cdot 10^{-7} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ à 25°C .

1. Calculer le pH d'une solution saturée d'hydroxyde de cuivre (II) dans l'eau pure.
2. Quelle est la valeur du produit de solubilité de $\text{Cu}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ dans l'eau pure ?
3. Calculer la solubilité de $\text{Cu}(\text{OH})_{2(\text{sol})}$ dans une solution tampon de $\text{pH} = 7$.

III- Effet d'ion commun

Calculer la solubilité du chlorure d'argent dans :

- l'eau pure ;
- une solution de chlorure de potassium, KCl , de concentration $C_1 = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- une solution de chlorure de baryum, BaCl_2 , de concentration $C_2 = 10^{-5} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Donnée : produit de solubilité de AgCl : $\text{pKs} = 10$.

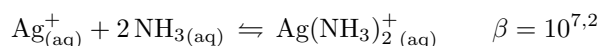
IV- Précipitation et complexation

Dans un litre d'eau, on ajoute sans variation de volume une mole de nitrate d'argent AgNO_3 et deux moles d'ammoniac.

1. Calculer les concentrations volumiques molaires des différentes espèces chimiques présentes en solution.
2. On ajoute maintenant de l'acide nitrique. Que se passe-t-il ?
3. Pour quelle valeur du pH le complexe aura-t-il disparu à 99 % ?

Données :

- Constante de formation globale du complexe $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2^+$:



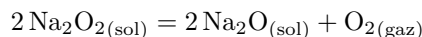
- Constante d'acidité du couple $\text{NH}_4^+/\text{NH}_3$: $\text{pKa} = 9,2$.

THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE

ENTHALPIE STANDARD DE RÉACTION

I- Calcul de $\Delta_r H^0$

Quelle est la valeur de l'enthalpie standard de réaction, à 25°C, de :

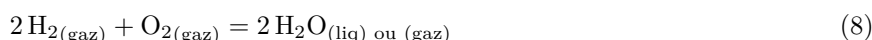


Données : enthalpies standard de formation :

$$\Delta_f H^0(\text{Na}_2\text{O}_{2(\text{sol})}) = 513,2 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1} \quad \Delta_f H^0(\text{Na}_2\text{O}_{(\text{sol})}) = -418,0 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

II- Discontinuité de $\Delta_r H^0$ lors d'un changement d'état

On étudie la synthèse de l'eau selon l'équation-bilan :



On donne un extrait des tables à 25°C :

	$\text{H}_{2(\text{gaz})}$	$\text{O}_{2(\text{gaz})}$	$\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}$
$\Delta_f H^0$ (en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$)	0	0	-285,2
C_{pm}^0 (en $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$)	28,8	29,4	75,3

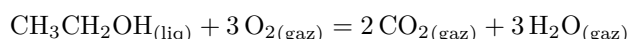
- Calculer l'enthalpie standard de réaction à 25°C.
- Exprimer l'enthalpie standard de réaction pour toute température inférieure à 100°C.
- À 100°C, l'eau se vaporise, avec une enthalpie standard de vaporisation $\Delta_{\text{vap}} H^0 = 43,4 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$. Déterminer l'enthalpie standard de réaction (9) pour une température comprise entre 100°C et 200°C, connaissant la capacité thermique molaire standard de l'eau à l'état gazeux :

$$C_{pm}^0(\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}) = 33,6 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$$

- Tracer le graphe $\Delta_r H^0 = f(T)$ pour $T \in [25^\circ\text{C}; 200^\circ\text{C}]$.
- Que penser de l'approximation de Ellingham ?

III- Combustion de l'éthanol

Considérons la combustion de l'éthanol liquide en dioxyde de carbone et vapeur d'eau, selon l'équation chimique ci-dessous :



- Donner une estimation de l'enthalpie standard $\Delta_r H^0$ de cette réaction à l'aide des valeurs des énergies de liaison fournies ci-dessous et de l'enthalpie standard de vaporisation de l'éthanol :

$$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}_{(\text{liq})} = \text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}_{(\text{gaz})} \quad \Delta_r H_1^0 = 43,0 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

- Calculer $\Delta_r H^0$ à partir des enthalpies standard de formations dont les valeurs sont fournies ci-dessous.

Données numériques pour les deux exercices :

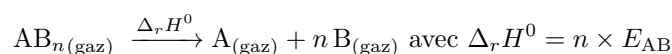
- Températures de fusion et de vaporisation du zinc : $T_{\text{fus}} = 692,7 \text{ K}$ et $T_{\text{vap}} = 1180 \text{ K}$.
- Énergies de liaison (en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$) :

$$\left| \begin{array}{l} E_{\text{C-C}} = 345 \\ E_{\text{O-O}} = 143 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} E_{\text{C-H}} = 415 \\ E_{\text{C=O}} = 804 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} E_{\text{O-H}} = 463 \\ E_{\text{H-H}} = 436 \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} E_{\text{O=O}} = 498 \\ E_{\text{C-O}} = 356 \end{array} \right|$$

- Enthalpies standard de formation, à 298 K (en $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$) :

Composés	$\text{Zn}_{(\text{liq})}$	$\text{Zn}_{(\text{gaz})}$	$\text{CO}_{(\text{gaz})}$	$\text{CO}_{2(\text{gaz})}$	$\text{ZnO}_{(\text{sol})}$	$\text{CH}_3\text{CH}_2\text{OH}_{(\text{liq})}$	$\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$
$\Delta_f H^0$	6,67	121,44	-110,54	-393,5	-347,98	-234,8	-241,8

On admettra que l'enthalpie standard de rupture de N liaisons A-B est liée à l'énergie de liaison $E_{\text{A-B}}$:



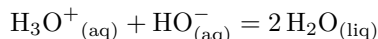
THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE

EFFETS THERMIQUES DES TRANSFORMATIONS

I- Étude calorimétrique de la synthèse de l'eau

Une solution contenant $4,55 \cdot 10^{-4}$ mol d'ions H_3O^+ est ajoutée à 1 L d'une solution de soude concentrée, placée dans un calorimètre Dewar.

La réaction :



se produit et consomme tous les ions H_3O^+ introduits. Une élévation de température de $0,1028^\circ\text{C}$ est mesurée. Un courant de 0,1 A passant pendant 10,75 s à travers une résistance de $252,7 \Omega$, immergée dans la solution finale, provoque une augmentation de température de $0,1087^\circ\text{C}$.

Calculer l'enthalpie standard de la réaction.

II- Étude calorimétrique de la décomposition de l'eau oxygénée

On introduit, dans un calorimètre adiabatique de capacité thermique totale $K = 184 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, 500 cm^3 d'une solution aqueuse d'eau oxygénée H_2O_2 à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

La température est de $22,72^\circ\text{C}$.

L'introduction de 20 g de MnO_2 (catalyseur), pris à la même température, provoque la décomposition de l'eau oxygénée en dioxygène et eau. La température dans le calorimètre s'élève alors à $24,75^\circ\text{C}$.

Calculer l'enthalpie standard de réaction.

Données :

- Masse molaire de l'eau : $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- Masse volumique de l'eau : $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 1 \text{ kg} \cdot \text{L}^{-1}$.
- On néglige la capacité thermique de MnO_2 .
- Capacités thermiques :

$$C_{pm}^0(\text{O}_2) = 29,4 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \quad C_{pm}^0(\text{H}_2) = 28,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \quad C_p^0(\text{H}_2\text{O}) = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

III- Température de flamme

Un des procédés industriels d'obtention du dioxyde de soufre nécessaire à la synthèse du trioxyde de soufre consiste à réaliser la combustion du soufre avec le dioxygène de l'air dans un four :



Un mélange constitué de soufre et de la quantité d'air appropriée pour réaliser la combustion totale du soufre, tout en ne consommant que la moitié de la quantité initiale de dioxygène introduite, entre à 298 K dans le four.

Calculer la température des gaz à la sortie du four, après la combustion effectuée sous une pression constante de 1,00 bar, en admettant que le système gazeux évolue de manière adiabatique.

La composition molaire de l'air est : 80 % de N_2 et 20 % de O_2 .

Les capacités thermiques molaires standard à pression constante sont regroupées dans le tableau suivant :

	$\text{SO}_{2(\text{gaz})}$	$\text{O}_{2(\text{gaz})}$	$\text{N}_{2(\text{gaz})}$
C_p^0 (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$)	51,10	34,24	30,65

IV- Température de flamme adiabatique

Déterminer la température maximale théorique T_{\max} de la combustion isobare du monoxyde de carbone dans les trois cas suivants :

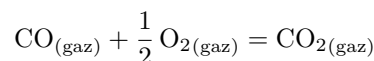
1. avec la quantité stœchiométrique de dioxygène ;
2. avec des réactifs pris en quantités équimolaires ;
3. avec la quantité stœchiométrique d'air.

On supposera la combustion suffisamment rapide pour qu'elle puisse être considérée comme adiabatique.

L'air est constitué d'un volume de O_2 et de quatre volumes de N_2 .

Données à 298 K :

– Pour la réaction :



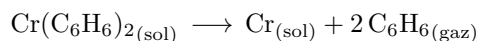
$$\Delta_r H^0(298\text{ K}) = -282,98 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

– Capacités thermiques molaires standard (en $J \cdot K^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$) :

$$C_p^0(CO_2) = 44,22 \quad C_p^0(N_2) = 28,58 \quad C_p^0(O_2) = 29,96 \quad C_p^0(CO) = 29,31$$

V- Transformation isochore

La dissociation totale de 0,1 mole du composé chrome-dibenzène $Cr(C_6H_6)_2$, réalisée à 583 K dans les conditions isochores, suivant :



libère une quantité de chaleur égale à 80 kJ.

1. Montrer que, dans ces conditions, la chaleur échangée s'identifie à la variation de l'énergie interne de réaction.
2. Calculer l'enthalpie standard de la réaction.

Les gaz sont supposés parfaits et on rappelle la valeur de la constante : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

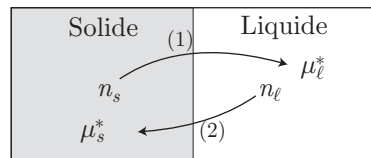
POTENTIELS CHIMIQUES

I- Potentiel chimique et changement d'état

1. **Généralités** – Une espèce X peut exister sous forme solide ou liquide et effectuer un changement d'état à température T et pression p fixées :



Les phases solide et liquide contiennent des quantités de matière respectives n_s, n_ℓ et sont caractérisées par les potentiels chimiques $\mu_s^*(T, p)$ et $\mu_\ell^*(T, p)$.



- Rappeler l'expression de l'enthalpie libre G du système, en fonction de $\mu_s^*, \mu_\ell^*, n_s, n_\ell$.
- En déduire qu'une variation $d\xi$ de l'avancement associé à l'équation (9) se traduit par une variation de G : $dG = (\mu_\ell^* - \mu_s^*) \times d\xi$.
- Rappeler le signe de dG à T et p constant, en l'absence de travail extérieur.
- Si $\mu_s^* > \mu_\ell^*$, quel est le signe de $d\xi$? Y a-t-il formation du liquide ou du solide ? Répondre aux mêmes questions si $\mu_s^* < \mu_\ell^*$.
En déduire une tendance générale : une espèce chimique migre-t-elle vers le milieu où son potentiel chimique est le plus grand ou le plus petit ?
- Déduire de la question précédente une relation entre $\mu_s^*(T, p)$ et $\mu_\ell^*(T, p)$ lorsque l'équilibre solide/liquide est établi.

2. Application

- a- En utilisant une identité thermodynamique, montrer que le volume molaire V_{mi}^* (supposé invariable) d'une espèce permet de définir :

$$\left(\frac{\partial \mu_i^*}{\partial p} \right)_{T, n_i} = V_{mi}^* \quad (10)$$

En déduire que, pour une phase condensée :

$$\mu_{mi}^*(T, p) = \mu_{mi}^0(T) + V_{mi}^* \times (p - p_0) \quad (11)$$

- b- On donne les potentiels chimiques standard (en $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$) de l'acide éthanoïque à l'état liquide et à l'état solide, sous 1 bar :

$$\mu_\ell^0(T) = -344\,800 - 160 \times T \text{ et } \mu_s^0(T) = -356\,540 - 119 \times T \text{ avec } T \text{ en K.}$$

Quel est l'état physique de l'acide éthanoïque à 25°C ?

- Déterminer la température de fusion de l'acide éthanoïque sous $p = 1$ bar.
- On donne les volumes molaires : $V_\ell = 57,20 \text{ cm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ et $V_s = 56,12 \text{ cm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$, qu'on suppose indépendants de la température et de la pression.
Évaluer la pression à laquelle on observe l'équilibre solide/liquide de l'acide éthanoïque à 25°C .

II- Potentiel chimique et pression

1. Cas d'un gaz parfait

- Rappeler l'expression du potentiel chimique $\mu_i^*(T, p)$ pour un gaz parfait pur, en fonction de son activité a_i puis de sa pression p .
- Écrire l'identité thermodynamique qui lie dG à dT, dp, dn_i (quantité de matière du gaz pur). En déduire que $\left(\frac{\partial \mu_i^*}{\partial p} \right)_{T, n_i} = \frac{RT}{p}$ puis retrouver l'expression de la question précédente.

- c- La pression du gaz varie de $P_1 = 1$ bar à $P_2 = 5$ bar, à la température constante $T_0 = 298$ K. Calculer la variation $\Delta\mu_{\text{GP}}^*$ du potentiel chimique du gaz parfait.

2. Cas de l'eau

- a- Rappeler l'expression du potentiel chimique de l'eau, en fonction de son activité a_i . Que vaut a_i si l'eau est considérée comme un fluide parfait incompressible?
Dans ce cas, que vaut $\Delta\mu_{\text{eau}}^*$ lorsque la pression passe de P_1 à P_2 , à la température constante $T_0 = 298$ K.
- b- Toujours à l'aide de l'identité thermodynamique qui relie dG à dT , dp , dn_i , montrer que la variation de μ_i^* est liée au volume molaire (équation 12 de l'exercice précédent).
Dans ce cas, retrouver l'expression de $\Delta\mu_{\text{eau}}^*$ en fonction de $V_{m\text{eau}}^*$ et de $\Delta p = P_2 - P_1$.
- c- Faire l'application numérique.

Données :

- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- masse molaire de l'eau : $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- masse volumique de l'eau liquide à 298 K : $\rho = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

III- Application du potentiel chimique

Quelle est la pression de vapeur saturante du diiode gazeux en équilibre avec le diiode solide à 298 K ?

Données à 298 K :

- potentiel chimique standard du diiode solide : $\mu_s^0 = 0 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- potentiel chimique standard du diiode gazeux : $\mu_g^0 = 19,37 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

IV- Relation de Clapeyron

Soit un corps pur X en équilibre, à T et p , sous deux phases α et β . Soient respectivement $S_{m\alpha}^*$, $S_{m\beta}^*$, $V_{m\alpha}^*$ et $V_{m\beta}^*$ les entropies et les volumes molaires de X dans ces deux phases à l'équilibre.

1. En vous inspirant des résultats de l'exercice I-1.e-, écrire la condition, portant sur les potentiels chimiques, traduisant l'équilibre entre les deux phases α et β :
 - a- à la température T et sous la pression p ;
 - b- à la température $T + dT$ et sous la pression $p + dp$.
 - c- En déduire une relation entre les variations des potentiels chimiques $d\mu_\alpha^*$ et $d\mu_\beta^*$, puis une relation entre $S_{m\alpha}^*$, $S_{m\beta}^*$, $V_{m\alpha}^*$ et $V_{m\beta}^*$.
2. Soit $\Delta_{\alpha\beta}V = V_{m\beta}^* - V_{m\alpha}^*$ la variation du volume molaire au cours du changement d'état. On admet que la variation d'entropie molaire $\Delta_{\alpha\beta}S = S_{m\beta}^* - S_{m\alpha}^*$ est liée à celle de l'enthalpie molaire $\Delta_{\alpha\beta}H = H_{m\beta}^* - H_{m\alpha}^*$ du changement d'état et à la température de ce changement d'état T :

$$\Delta_{\alpha\beta}S = \frac{\Delta_{\alpha\beta}H}{T}$$

En déduire la *troisième relation de Clapeyron* :

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta_{\alpha\beta}H}{T \times \Delta_{\alpha\beta}V}$$

3. Déterminer la température de solidification de l'eau sous une pression $p_f = 100,0$ bar.

Données supposées indépendantes de p et T dans cette question :

- masse volumique de l'eau liquide : $\rho(\text{H}_2\text{O}_{(\text{liq})}) = 1,000 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$;
- masse volumique de l'eau solide : $\rho(\text{H}_2\text{O}_{(\text{sol})}) = 0,9168 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$;
- enthalpie standard de fusion de l'eau : $\Delta_{\text{fus}}H^0(\text{H}_2\text{O}) = 6,00 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- à la température $T_0 = 273,15$ K, la fusion de l'eau se produit sous la pression $p^0 = 1$ bar ;
- masse molaire de l'eau : $M = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE

ENTHALPIE LIBRE ET ENTROPIE STANDARD DE RÉACTION

I- Évolution d'un système

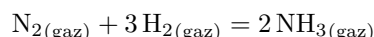
Soit un système comprenant, à 298 K, du diazote, du dihydrogène et de l'ammoniac en phase gazeuse, aux pressions partielles respectives de 2,00 bar, 1,00 bar et 3,00 bar.

Ce système est-il en équilibre ? sinon, comment doit-il évoluer ?

Donnée : $\Delta_f G^0(\text{NH}_3(\text{gaz})) = -16,63 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ à 298 K.

II- Enthalpie libre de réaction

On considère la synthèse de l'ammoniac, selon l'équation :



Pour cette réaction, l'enthalpie libre standard s'écrit :

$$\Delta_r G^0 = -79,23 \cdot 10^3 + 44,00 \times T \ln T - 96,40 \times T \text{ en } (\text{J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

Déterminer l'enthalpie libre de réaction du système suivant et prévoir son sens d'évolution :

$$\begin{array}{lll} P = 10,0 \text{ bar} & T = 500 \text{ K} & n_{\text{H}_2} = 20,0 \text{ mol} \\ n_{\text{N}_2} = 60,0 \text{ mol} & n_{\text{NH}_3} = 20,0 \text{ mol} & \end{array}$$

Donnée : constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

III- Enthalpie libre standard de réaction

- Écrire les équations des oxydations de l'ammoniac par le dioxygène, les coefficients stœchiométriques étant entiers et minimaux :
 - en monoxyde d'azote et eau (vapeur) ;
 - en diazote et eau (vapeur).
- Calculer, pour chacune de ces réactions, les enthalpies et entropies standard de réaction à 298 K.
- En supposant ces grandeurs indépendantes de la température, exprimer les enthalpies libres standard de ces deux réactions en fonction de T .

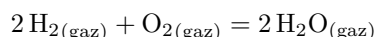
Sachant que la réaction la plus favorisée, d'un point de vue thermodynamique, est celle de plus basse enthalpie libre standard, déterminer, à 800°C, la réaction la plus favorisée.

Données à 298 K : Enthalpie standard de formation (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) et entropies molaires standard absolues (en $\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$) :

	N_2	O_2	NO	$\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$	NH_3
$\Delta_f H^0$	0	0	90	-242	-46
S_m^0	192	205	211	189	193

IV- Calculs à partir de $\Delta_r G^0(T)$

L'enthalpie libre standard $\Delta_r G^0(T)$ de la réaction de synthèse de l'eau en phase gazeuse, selon l'équation-bilan :



varie avec la température selon :

$$\Delta_r G^0(T) = -495\,000 + 7,70 \times T \ln T + 33,0 \times T + 0,01 \times T^2 \quad (\text{J} \cdot \text{mol}^{-1})$$

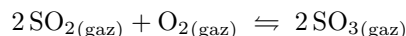
- Exprimer $\Delta_r H^0(T)$, $\Delta_r S^0(T)$ et pour cette réaction.
- Interpréter le signe de $\Delta_r H^0(T)$ et $\Delta_r S^0(T)$ pour $T > 1 \text{ K}$.

THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE

CONSTANTES D'ÉQUILIBRE

I- Constante d'équilibre

Calculer, à 298 K, la constante d'équilibre thermodynamique de l'équilibre de synthèse du trioxyde de soufre d'équation-bilan :



Données :

- enthalpies libres standard de formation, $\Delta_f G^0$ (en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$), à 298 K :

espèces	$\text{SO}_{2(\text{gaz})}$	$\text{SO}_{3(\text{gaz})}$
$\Delta_f G^0$	-300,2	-377,1

- constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

II- Estérification

On mélange, à 50°C, une mole d'acide propanoïque et 0,5 mole d'éthanol ; lorsque l'équilibre est atteint, il reste 0,55 mole d'acide propanoïque.

1. Calculer la constante K^0 d'équilibre de cette réaction.
2. On mélange 3 moles d'acide propanoïque et 0,5 mole d'éthanol. Quelle est la composition du mélange à l'équilibre ?

III- Étude d'un équilibre

À 400°C, sous la pression $p = 2,00$ bar, le facteur de dissociation du phosgène COCl_2 , selon l'équation :

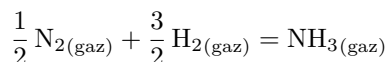


vaut $\alpha = 0,174$.

1. Calculer, à 400°C, la constante d'équilibre de cette réaction.
2. À quelle pression aurait-il fallu se placer, à 400°C, pour obtenir un facteur de dissociation égal à 0,150 ?
3. Un mélange d'une quantité $n_0 = 10,0$ mmol de phosgène et d'une quantité $n_0 = 10,0$ mmol de dichlore est porté à 400°C, sous la pression $p = 2,00$ bar. Quelles sont les quantités des différents constituants à l'équilibre ?
4. Quelle devrait être la valeur de la constante d'équilibre pour que le facteur de dissociation du phosgène, introduit seul, soit égal à 0,100 %, toujours sous une pression de 2,00 bar ?

IV- Synthèse de l'ammoniac

L'enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^0$ de la synthèse de l'ammoniac, en phase gazeuse :



varie avec la température selon :

$$\Delta_r H^0(T) = -1,97 \cdot 10^{-6} \times T^3 + 1,54 \cdot 10^{-2} \times T^2 - 31,2 \times T - 38\,200 \text{ (en } \text{J} \cdot \text{mol}^{-1}\text{)}$$

1. Démontrer que $\frac{d}{dT} \left(\frac{\Delta_r G^0}{T} \right) = -\frac{\Delta_r H^0}{T^2}$ et en déduire l'expression de $\Delta_r G^0(T)$.
2. Déterminer la composition du système à 398 K, sachant que les réactifs ont été introduits dans les proportions stoechiométriques, la pression restant égale à $P_0 = 1$ bar.

Donnée : enthalpie libre standard de formation de l'ammoniac, à 298 K :

$$\Delta_f G^0(\text{NH}_{3(\text{gaz})}) = -16,5 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

V- Étude d'une réaction

On s'intéresse à la réduction de l'oxyde de chrome Cr_2O_3 en chrome métallique. On considérera, dans cet exercice, que l'enthalpie standard et l'entropie standard de réaction sont indépendantes de la température ; la pression est maintenue à la valeur $P_0 = 1$ bar.

1. Écrire le bilan de la réduction de Cr_2O_3 par le dihydrogène à 400 K (de l'eau est formée).
2. Donner l'expression de l'enthalpie libre standard $\Delta_r G^0 = f(T)$. Calculer la constante d'équilibre de cette réaction à 400 K. Comment évolue-t-elle avec la température ?
3. À la température $T = 1200$ K, on charge un réacteur avec 100 kg d'oxyde de chrome Cr_2O_3 . Quelle est la masse de H_2 à utiliser pour obtenir une réduction totale ?

Données :

- Enthalpies molaires standard de formation ($\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$) et entropies molaires standard ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$) à 298 K :

	Cr	Cr_2O_3	H_2	H_2O
état	solide	solide	gaz	gaz
$\Delta_f H^0$	0	-1 139,7	0	-241,8
S_m^0	23,8	81,2	130,6	188,7

- Masses molaires :

$$M_{\text{Cr}} = 52 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_{\text{H}} = 1 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1} \quad M_{\text{O}} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

- Températures de fusion (sous 1 bar) :

$$\text{Chrome} \dots \dots \dots T_f = 1852^\circ\text{C}$$

$$\text{Oxyde de chrome} \dots T_f = 2435^\circ\text{C}$$

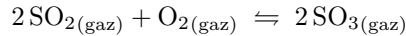
- Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE

OPTIMISATION DES PROCÉDÉS CHIMIQUES

I- Influence de la température

La synthèse du trioxyde de soufre ;



en phase gazeuse, est effectuée dans l'industrie à 410 – 440°C, sous 1,00 bar.

Pour la réaction :

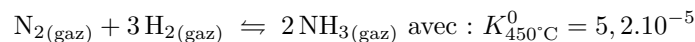
$$\Delta_r H^0 = -185 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ et } \ln K^0(600 \text{ K}) = 16,5$$

1. Quel est l'effet d'une augmentation de température, à pression constante, sur cet équilibre ?
2. Confirmer ce résultat en calculant $K^0(700 \text{ K})$, $\Delta_r H^0$ étant supposé constant sur l'intervalle de température considéré.

Donnée : constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

II- Influence de la pression

Soit la synthèse de l'ammoniac, en phase gazeuse, considérée à 450°C :

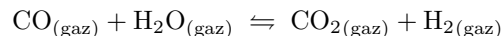


Le rendement de la synthèse, lorsque les réactifs sont pris en proportions stœchiométriques, est $\rho = 0,49$, sous une pression de 300 bar et à 450°C.

1. Quel est l'effet d'une augmentation de pression, à température constante, sur la synthèse de l'ammoniac ?
2. Vérifier ce résultat en déterminant le rendement de la synthèse à 450°C, sous 400 bar, les réactifs étant pris en proportions stœchiométriques.

III- Influence de l'ajout d'un réactif

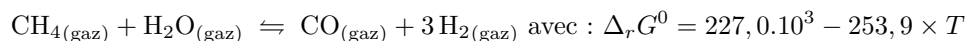
Déterminer l'influence de l'ajout, à température et pression constantes, de vapeur d'eau sur l'équilibre de conversion du monoxyde de carbone à la vapeur d'eau :



Quels sont les facteurs d'équilibre ?

IV- Production de dihydrogène

La conversion du méthane par la vapeur d'eau, afin de produire du dihydrogène est modélisée par l'équation de réaction :

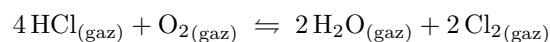


en $\text{J} \cdot \text{mol}^{-1}$ pour T en K.

1. a- A-t-on intérêt à réaliser cette transformation à haute ou à basse température pour améliorer le rendement en dihydrogène ?
b- Dans l'industrie, cette réaction est réalisée sous une pression de 30 bar ; est-ce pour améliorer le rendement en dihydrogène ou pour limiter la taille des installations ?
2. a- Quelle est l'influence de l'ajout isobare et isotherme d'un gaz inerte sur cet équilibre ?
b- Quelle est l'influence de l'ajout isobare et isotherme de $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$ sur cet équilibre ?
c- Quelle est l'influence de l'ajout isochore et isotherme d'un gaz inerte sur cet équilibre ?
d- Quelle est l'influence de l'ajout isochore et isotherme de $\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$ sur cet équilibre ?

V- Équilibre de DEACON

On introduit, dans un réacteur, du chlorure d'hydrogène et du dioxygène en présence d'un catalyseur. On observe l'équilibre chimique de réaction :



Pour cette réaction, $\Delta_r H_{800\text{ K}}^0 = -115 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

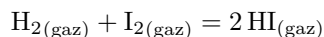
1. À $T = 800 \text{ K}$ et sous une pression totale de 1 bar, la température T et la pression P étant maintenues constantes, dans quelles proportions doit-on introduire les réactifs (HCl et O_2) pour que la pression partielle en dichlore soit maximale à l'équilibre ?
2. L'équilibre réalisé, on introduit de façon isotherme et isobare du dioxygène gazeux. Dans quel sens l'équilibre sera-t-il déplacé ?

THERMODYNAMIQUE CHIMIQUE

ÉQUILIBRES CHIMIQUES

I- Le iodure d'hydrogène

On se propose d'étudier la synthèse de l'iodure d'hydrogène, selon la réaction en phase gazeuse :

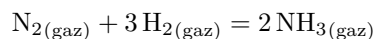


Une expérience réalisée à 650 K, à partir d'un mélange de dihydrogène et de diiode équimolaire (n_0), conduit à un taux de conversion de 80 %.

1. Calculer la constante d'équilibre à cette température et l'enthalpie libre standard de la réaction.
2. Préciser l'influence de la pression sur un tel équilibre. Justifier.

II- Déplacement des équilibres

Soit l'équilibre de synthèse de l'ammoniac en phase gazeuse :

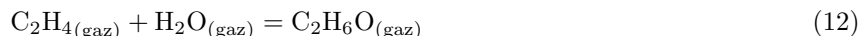


Par un calcul, étudier l'effet de l'ajout, à température et pression constantes, d'une quantité infinitésimale :

1. de diazote ;
2. d'ammoniac.

III- Synthèse de l'éthanol

Il est possible de synthétiser industriellement de l'éthanol par hydratation de l'éthylène en présence d'un catalyseur acide (procédé Shell). Cette réaction conduit à l'équilibre ci-dessous, de constante $K_1^0(T)$:



On introduit initialement, à une température fixée de 400 K et sous une pression maintenue à 1 bar, une mole d'éthylène et une mole d'eau. On notera α la fraction d'éthylène transformée à l'équilibre.

1. Exprimer la constante d'équilibre $K_1^0(T)$ en fonction de α .
2. Énoncer l'approximation d'Ellingham.
3. Déterminer la valeur, à 400 K, de la constante d'équilibre $K_1^0(T)$, ainsi que celle de α .
4. Quelle sera l'influence d'une augmentation de la température sur l'équilibre (12) à composition et pression fixées ? Justifier en utilisant l'enthalpie libre de réaction.
5. Quelle sera l'influence d'une augmentation de la pression sur l'équilibre (12) à température et composition fixées. Justifier en utilisant l'enthalpie libre de la réaction.

Données :

- Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- Enthalpies standard de formation et entropies molaires à 298 K :

	$\text{C}_2\text{H}_4_{(\text{gaz})}$	$\text{H}_2\text{O}_{(\text{gaz})}$	$\text{C}_2\text{H}_6\text{O}_{(\text{gaz})}$
$\Delta_f H^0$ (kJ.mol ⁻¹)	52,3	-241	-235
S_m^0 (J.K ⁻¹ .mol ⁻¹)	220	189	283

IV- Produit ionique de l'eau

Le cologarithme du produit ionique de l'eau, pK_e , est donné à deux températures : $\text{pK}_e = 14,94$ à 273 K et $\text{pK}_e = 13,26$ à 323 K.

1. La réaction de dosage d'un monoacide fort par une monobase forte est-elle endothermique, exothermique ou athermique ? Justifier la réponse.
Calculer l'enthalpie standard de cette réaction en la supposant constante sur l'intervalle [273 K ; 323 K].
2. Que est le pH de l'eau pure à 308 K ?

V- Équilibres simultanés

1. Soit l'équilibre en phase gazeuse :



réalisé à 400°C dans une enceinte fermée. Après avoir attendu le temps nécessaire pour l'établissement de l'équilibre à partir d'iodure d'hydrogène pur, on trouve que le coefficient de dissociation est 0,200.

Calculer la constante K_1^0 de cet équilibre.

2. On porte à 400°C, dans un récipient vide d'air, de l'iodure d'ammonium NH_4I mis en quantité suffisante pour qu'il reste toujours présent à l'état solide dans le récipient. L'équilibre :

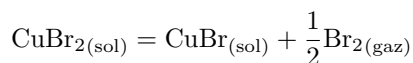


s'établit très rapidement ; la pression est alors de 0,900 bar. On constate ensuite que la pression évolue, l'iodure d'hydrogène se dissociant à son tour partiellement selon l'équilibre (13). Lorsque la pression se stabilise, il y a coexistence des deux équilibres.

Quelles sont alors les pressions partielles des composés gazeux contenus dans le récipient ?

VI- Rupture d'équilibre

On considère l'équilibre :



de constante d'équilibre K^0 .

Les deux solides ne sont pas miscibles, ils sont purs.

Entre 423 K et 523 K, $\ln K^0$ varie avec la température selon la relation :

$$\ln K^0(T) = -\frac{4000}{T} + 6,98$$

Dans une enceinte de volume 1,00 L, initialement vide, on introduit 0,0100 mol de bromure de cuivre (II) à 200°C.

- Déterminer l'état final du système en calculant les quantités de matière des espèces chimiques présentes à l'équilibre.
- On considère le système précédent à l'équilibre. On augmente alors le volume V de l'enceinte. Tracer la courbe $p = f(V)$ où p est la pression d'équilibre du système.

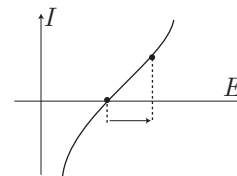
CINÉTIQUE ÉLECTROCHIMIQUE

COURBES COURANT-POTENTIEL

I- Interprétation d'une courbe

Sur le schéma ci-dessous :

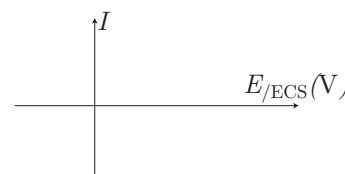
- hachurer le demi-plan correspondant à un fonctionnement anodique ;
- indiquer les demi-réactions dans chaque demi-plan, avec les conventions usuelles, en prenant l'exemple du couple $\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$;
- Que représente la flèche pour le point de fonctionnement représenté en noir ?



II- Représentation d'une courbe

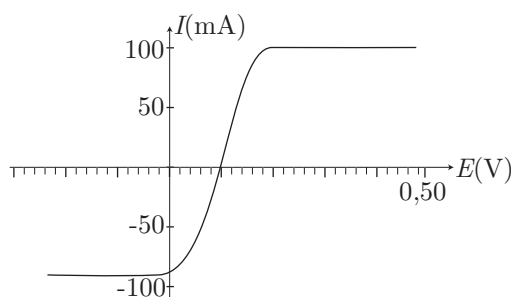
Représenter, sur le schéma suivant, la courbe intensité-potentiel d'un système comprenant une électrode de travail inattaquable plongée dans une solution aqueuse désaérée contenant des ions Fe^{2+} (sans ions Fe^{3+}). L'électrode de référence est une électrode au calomel saturé. On admettra que les murs du solvant correspondent à des réactions rapides (à $\text{pH} = 0$).

$$\begin{aligned} E(\text{ECS}) &= +0,24 \text{ V} \\ E^0(\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}) &= +0,77 \text{ V}_{/\text{ESH}} \\ E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) &= 0 \text{ V}_{/\text{ESH}} \text{ à } \text{pH} = 0 \\ E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) &= +1,23 \text{ V}_{/\text{ESH}} \text{ à } \text{pH} = 0 \end{aligned}$$

III- Courbe intensité-potentiel du couple $\text{Fe}^{\text{II}}/\text{Fe}^{\text{III}}$

On souhaite tracer la courbe intensité-potentiel pour le couple $\text{Fe}(\text{CN})_6^{3-}/\text{Fe}(\text{CN})_6^{4-}$; on utilise un montage à trois électrodes.

1. Faire un schéma du montage et préciser la nature des électrodes utilisées.
2. On introduit, dans une cellule, 50 mL d'une solution d'hexacyanoferrate (III) de potassium à $0,020 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et 50 mL d'une solution d'hexacyanoferrate (II) de potassium à $0,020 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On enregistre la courbe ci-dessous, les potentiels étant mesurés par rapport à une électrode au calomel saturé.



Sur l'électrode utilisée, le couple étudié est-il rapide ou lent ? Justifier la réponse à partir des résultats expérimentaux.

Calculer le potentiel pour lequel $I = 0$. Vérifier la compatibilité avec l'expérience.

Indiquer les réactions électrochimiques correspondant aux différentes parties de la courbe $I(E)$.

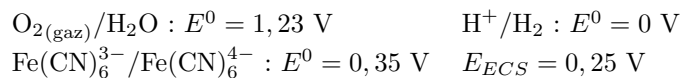
À quoi sont dus les paliers observés ?

3. On reprend l'expérience en utilisant 50 mL de la solution d'hexacyanoferrate (III), mais 5 mL de la solution d'hexacyanoferrate (II) et 45 mL d'eau. Représenter l'aspect de la courbe $I(E)$ en commentant les différences avec la courbe correspondant à la première expérience.
4. On répète l'expérience 2, mais on élargit l'intervalle de potentiel exploré. On observe alors que :
 - quand $V_{\text{travail}} - V_{\text{référence}}$ atteint environ $-0,95 \text{ V}$, l'intensité du courant se remet à croître (en valeur absolue), tandis que des bulles de gaz apparaissent sur l'électrode de travail ;

- quand la ddp atteint 1,6 V environ, l'intensité du courant se remet à croître, tandis que des bulles de gaz apparaissent sur l'électrode de travail.

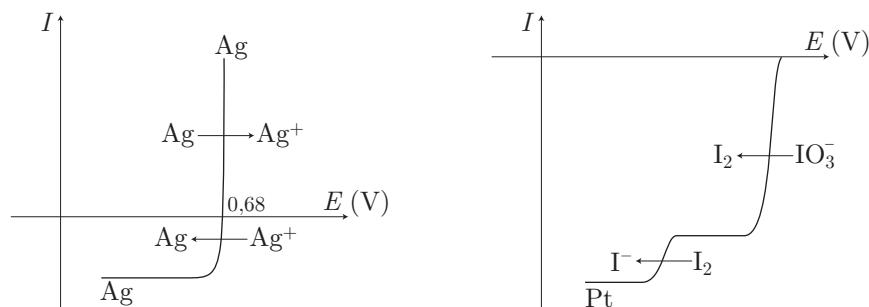
Interpréter ces observations, quantitativement et qualitativement, sachant que le pH de la solution est voisin de 6.

Données : Potentiels standard d'oxydo-réduction :



IV- Lecture d'une courbe intensité-potentiel

On donne les courbes intensité-potentiel suivantes :

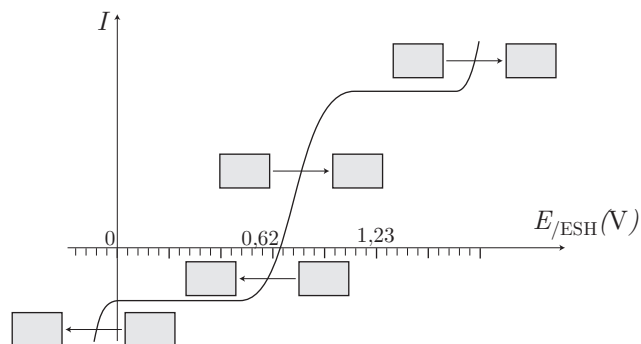


- Système $\text{Ag}^+/\text{Ag}_{(\text{sol})}$** à la concentration $C_0 = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ avec $E^0 = 0,80 \text{ V}$.
 - Le système $\text{Ag}^+/\text{Ag}_{(\text{sol})}$ sur électrode d'argent est-il rapide ou lent ?
 - Pourquoi la courbe $I = f(E)$ coupe-t-elle l'axe des abscisses pour $E = 0,68 \text{ V}$?
 - Pourquoi n'observe-t-on pas de palier de diffusion anodique ?
- Système $\text{IO}_3^-/\text{I}_2/\text{I}^-$**
 - Écrire les demi-équations redox associées aux couples IO_3^-/I_2 et I_2/I^- .
 - Pourquoi observe-t-on des vagues de réduction de hauteur différente ?
 - Prévoir l'allure de la courbe d'oxydation d'une solution d'ions iodure sur électrode de platine.

V- Courbe $i = f(E)$ d'une solution de diiode et d'ions iodure

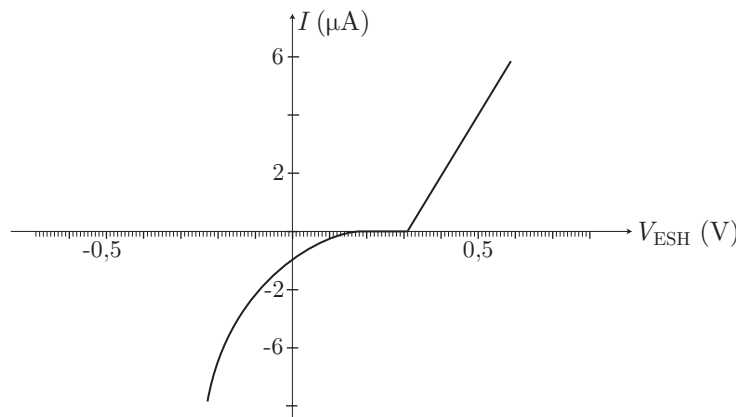
On veut tracer la courbe intensité-potentiel d'une solution de diiode et d'iodure de potassium dans l'eau désaérée, sur une électrode de travail de platine. On considère que la solution contient, comme espèces électro-actives, l'ion iodure I^- , le diiode aqueux $\text{I}_{2(\text{aq})}$ et l'eau.

- Indiquer le montage expérimental nécessaire pour tracer cette courbe.
- Reproduire la courbe ci-dessous et compléter chaque case avec l'espèce électro-active correspondante, en respectant le sens des flèches.
- Des paliers sont observés sur la courbe expérimentale. Quel phénomène physique est responsable de la limitation du courant ?
- Expliquer pourquoi ces paliers ne sont pas observés dans les parties extrêmes gauche et droite de la courbe.
- De I^- ou de $\text{I}_{2(\text{aq})}$, quelle espèce vous semble majoritaire ?
- Quel est, à courant nul, le potentiel de l'électrode de platine plongeant dans la solution ?



VI- Courbe intensité-potentiel du cuivre

- Le document ci-dessous fournit la courbe $I = f(V)$ pour une électrode de cuivre au contact d'une solution de sulfate de cuivre CuSO_4 à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Préciser les réactions électrochimiques mises en jeu.



- Calculer le surpotentiel anodique η_a et le surpotentiel cathodique η_c pour $|I| = 2 \mu\text{A}$
- Si on augmente la tension, on voit apparaître un palier sur l'une des branches. Compléter qualitativement le diagramme et expliquer l'origine de ce palier.

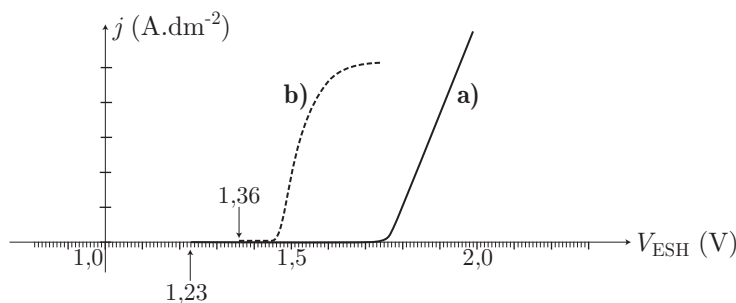
Données : potentiels standard de couples, à 298 K :

$$E^0 (\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = 0,34 \text{ V} \quad E^0 (\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$$

VII- Réactions concurrentes et courbes $I = f(V)$

Il arrive que plusieurs réactions électrochimiques soient en compétition au niveau d'une même électrode. Le document ci-dessous représente l'allure des courbes $j(V)$ enregistrées avec une électrode de platine comme électrode de travail et, comme électrolyte :

- une solution d'acide sulfurique à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- une solution d'acide chlorhydrique à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.



- Écrire les réactions anodiques réalisées dans les conditions expérimentales ci-dessus.
- Donner un ordre de grandeur des surtensions du dioxygène d'une part, du dichlore d'autre part, sur le platine métal pour $j \neq 0$.
- Compléter la courbe $j(V)$ pour la solution d'acide chlorhydrique quand V varie jusqu'à 2 V.

Données : Potentiels standard de quelques couples, à 298 K :

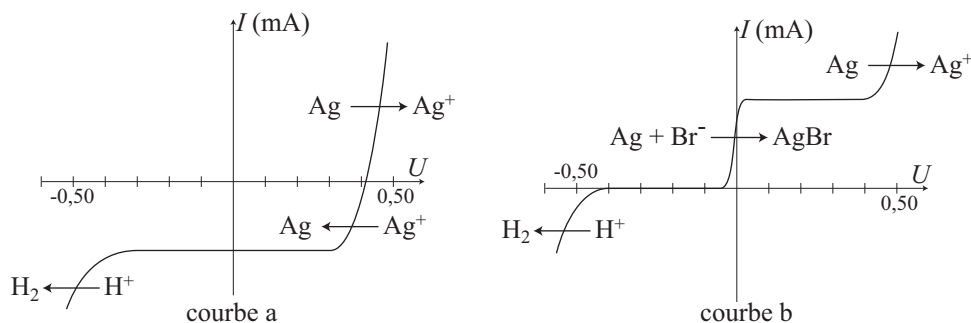
$$E^0 (\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) = 1,36 \text{ V} \quad E^0 (\text{S}_2\text{O}_8^{2-}/\text{SO}_4^{2-}) = 2,08 \text{ V} \quad E^0 (\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$$

VIII- couple Ag^+/Ag en milieu bromure

Le document ci-dessous fournit les courbes $I = f(U)$ pour une électrode d'argent au contact de différentes solutions, où U désigne la tension entre l'électrode d'argent (au potentiel E) et l'électrode de référence (au potentiel E_{ECS}).

- **courbe a** : solution de nitrate d'argent AgNO_3 à $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et d'acide perchlorique à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.
- **courbe b** : solution de bromure de potassium à $2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et d'acide perchlorique à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Une agitation assure l'uniformité de la composition.



Données :

- En solution aqueuse, les ions NO_3^- et ClO_4^- ne sont pas électroactifs pour la réduction.
- Potentiel de l'électrode au calomel saturé en KCl : $E_{\text{ECS}} = +0,245 \text{ V}$.
- $\alpha = \frac{RT \ln 10}{\mathcal{F}} = 0,06 \text{ V}$.
- L'acide perchlorique est un acide fort.

Donner une estimation du produit de solubilité de AgBr .

CINÉTIQUE ÉLECTROCHIMIQUE

LA CORROSION

I- Réaction du magnésium

1. Une lame de magnésium, décapée, est plongée dans une eau désaérée. Montrer que le système peut être le siège d'une réaction. Calculer sa constante d'équilibre en tenant compte des espèces majoritaires dans ces conditions.
2. En réalité, aucune réaction n'est perceptible.
On répète l'opération en remplaçant l'eau par une solution d'acide sulfurique à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; on observe alors un faible dégagement gazeux.
On touche alors la lame de magnésium avec une lame de fer et l'on observe un abondant dégagement gazeux sur la lame de fer.
Interpréter cette série d'observations en représentant les courbes intensité-potentiel des différents systèmes. Préciser la circulation des porteurs de charge dans la dernière expérience.
3. Déduire de ce qui précède une application du magnésium à la lutte contre la corrosion.

Données : Potentiels standard à 298 K :

$$E^0(\text{Mg}^{2+}/\text{Mg}) = -2,37 \text{ V} \quad E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$$

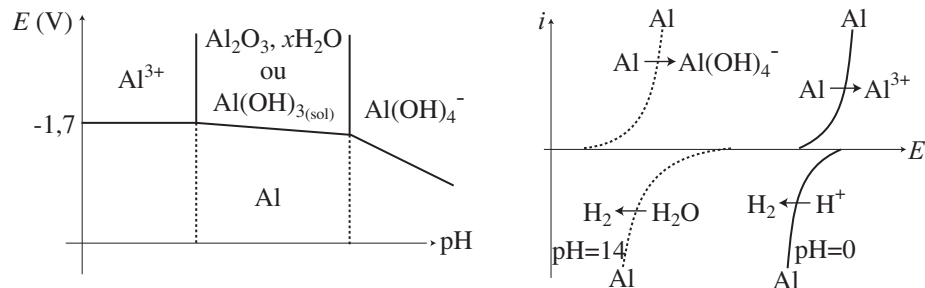
II- Corrosion de l'aluminium et alliage d'aluminium

On réalise les expériences suivantes :

Expérience 1 : quand on trempe une plaque d'aluminium non décapée dans une solution d'acide chlorhydrique (concentration égale à $3 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$), l'attaque de celle-ci est très lente.

Expérience 2 : on décape la plaque d'aluminium en la frottant à l'aide d'un papier de verre, puis on plonge à nouveau la plaque dans la solution d'acide chlorhydrique précédente. On observe une attaque un peu moins lente.

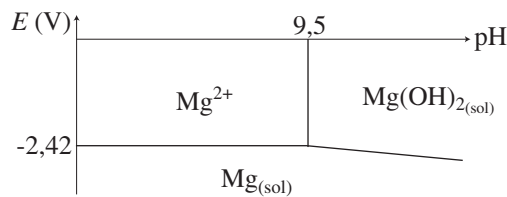
Expérience 3 : on trempe une plaque d'aluminium dans une solution de soude concentrée ($10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) et on observe un abondant dégagement gazeux.



1. À l'aide du diagramme potentiel-pH et des courbes intensité-potentiel, interpréter les résultats des diverses expériences.
2. On dispose d'un alliage aluminium-nickel. On attaque ce solide par de la soude concentrée. Que se passe-t-il sachant que le nickel ne peut pas être oxydé. Qu'obtient-on à la fin de la réaction ? À quoi peut servir le composé obtenu ?

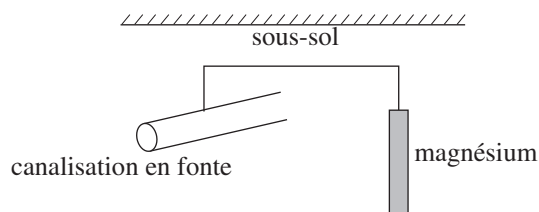
III- Magnésium en solution aqueuse

Le diagramme potentiel-pH du magnésium est tracé ci-dessous pour une concentration de travail $c = 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.



1. Définir les termes corrosion, immunité, passivation. Indiquer dans quelle(s) zone(s) du diagramme intervient chacun de ces phénomènes.
2. Déterminer le potentiel standard du couple Mg^{2+}/Mg d'après le diagramme potentiel-pH.
3. Calculer le produit de solubilité K_s de l'hydroxyde de magnésium $\text{Mg}(\text{OH})_2$.

Une canalisation en fonte (alliage à base de fer) est enterrée dans le sol. Pour la protéger de la corrosion, on la relie à une électrode de magnésium elle aussi enterrée.



4. La canalisation en fonte est-elle protégée de la corrosion et, si oui, comment s'appelle ce mode de protection ?
On donne $E^0 (\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0,44 \text{ V}$.
5. Quel rôle joue l'électrode de magnésium : est-elle anode ou cathode ? pourquoi ? écrire la demi-équation électronique correspondante.
6. Exprimer la durée de vie t d'une électrode en fonction de sa masse m , de l'intensité du courant de protection I , de la constante de Faraday \mathcal{F} et de la masse molaire du magnésium.

CINÉTIQUE ÉLECTROCHIMIQUE

PILES ET ÉLECTROLYSES

I- Caractéristiques d'une pile

On considère une pile constituée :

- d'une électrode de zinc plongeant dans 100 mL d'une solution de ZnSO_4 à $0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$;
- d'une électrode de cuivre plongeant dans 100 mL d'une solution de CuSO_4 à $0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

Les systèmes sont rapides et on donne les potentiels standard :

$$E^0(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) = -0,76 \text{ V} \quad E^0(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = 0,34 \text{ V}$$

1. Tracer l'allure des courbes intensité-potentielle.
2. Repérer sur la courbe la fém de la pile ainsi que l'intensité maximale qui peut être débitée.
3. Calculer la capacité de la pile en A.h.

II- Électrolyse d'une solution de chlorure d'étain

La figure ci-contre présente les potentiels des couples pouvant intervenir lors de l'électrolyse d'une solution de chlorure d'étain (II) désaérée.

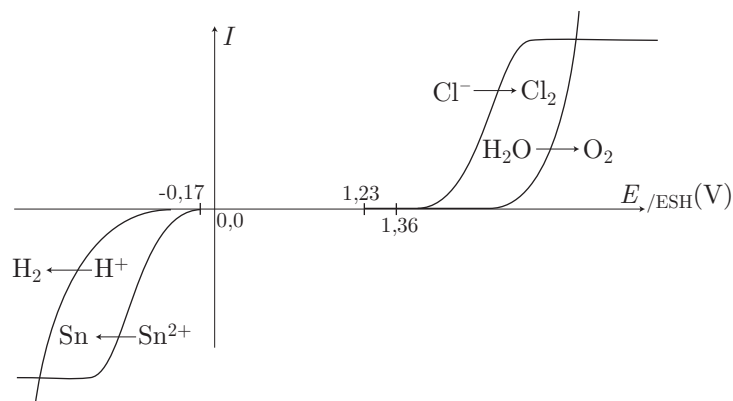
L'ordre de grandeur des potentiels correspond à une solution dont la composition initiale est la suivante :

$$[\text{Sn}^{2+}] = 0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad [\text{H}^+] = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \quad [\text{Cl}^-] = 1,2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

Les pressions partielles des gaz sont prises égales à la pression standard.

1. À l'aide des données de la figure ci-dessus, prévoir les réactions qu'on devrait observer aux électrodes lors de l'électrolyse d'une solution de chlorure d'étain (II) acidifiée à l'acide chlorhydrique.
2. L'expérience montre que, lorsqu'on fait croître la tension entre les bornes de l'électrolyseur à partir de 0, l'électrolyse de la solution entre les électrodes de graphite donne un dégagement de dichlore à l'anode et des arborescences d'étain à la cathode. Interpréter ces résultats à l'aide de la figure ci-dessous.

	↑ E (V)	
Cl ₂	1,36	Cl ⁻
O ₂	1,23	H ₂ O
H ⁺	0,00	H ₂
Sn ²⁺	-0,17	Sn



III- Électrolyse d'une solution de chlorure de sodium

Le dichlore est produit par électrolyse d'une solution aqueuse concentrée de chlorure de sodium (saumure). Celle-ci doit être traitée préalablement à l'aide de carbonate ou de chlorure de baryum afin d'éliminer les ions sulfate, puis à l'aide de soude et de carbonate de sodium pour éliminer les ions calcium, magnésium et autres ions métalliques gênants.

Données : Potentiels standard à 25°C et à pH = 0 :

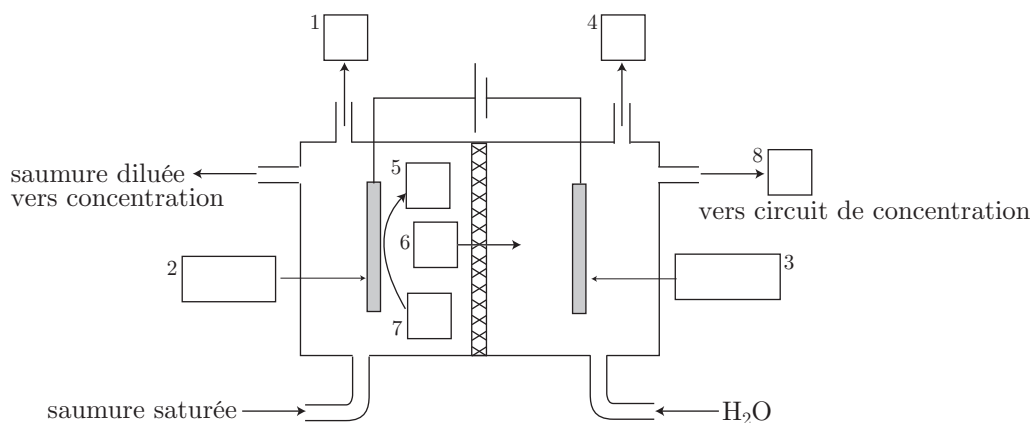
$$\begin{aligned} E^0(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) &= 1,23 \text{ V} & E^0(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) &= 1,39 \text{ V} \\ E^0(\text{H}^+/\text{H}_2) &= 0,00 \text{ V} & E^0(\text{Na}^+/\text{Na}) &= -2,71 \text{ V} \end{aligned}$$

A- Étude préliminaire

1. D'après les valeurs des potentiels standard, quelles sont les demi-équations d'oxydoréduction possibles à l'anode ? à la cathode ?
2. À quelle réaction d'oxydoréduction pourrait-on s'attendre au cours de l'électrolyse en l'absence de surtension au niveau des électrodes ? Calculer la constante d'équilibre de cette réaction.

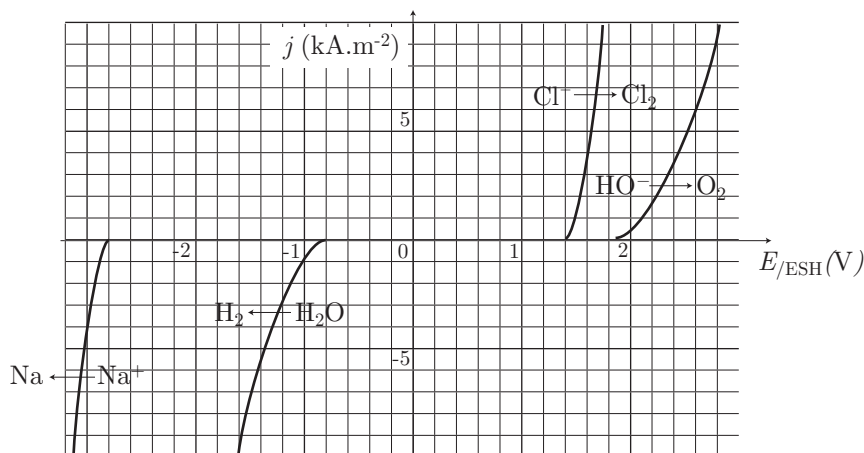
B- Procédé à cellules à membrane

Un schéma de principe d'une cellule à membrane, à compléter, est représenté ci-après :



Les anodes sont de type DSA (*Dimensionally Stable Anodes*) en titane recouvertes d'oxydes de titane et de ruthénium ; les cathodes sont en nickel. La séparation entre les compartiments cathodiques et anodiques est constituée de membranes cationiques (perméables aux cations) très peu conductrices. Ces membranes sont des polymères perfluorosulfoniques ou perfluorocarboxyliques.

On obtient les courbes densité de courant-potential suivantes :



3. Quelle est la réaction qui a effectivement lieu dans ce procédé pour une valeur de densité de courant n'excédant pas les limites du tracé des courbes ?
4. À l'aide de ces courbes, donner un nom à chacune des cases numérotées de 1 à 8 du schéma de principe.
5. La densité de courant j utilisée dans ce procédé est égale à 4 kA.m^{-2} . Quelle est la valeur de la tension appliquée aux bornes de l'électrolyseur pour ce procédé ?

IV- Thermodynamique d'une pile

On réalise au laboratoire, à la température constante $T = 298 \text{ K}$, la pile à combustible suivante :

- la demi-pile de gauche est constituée d'un fil de platine plongeant dans une solution aqueuse d'acide sulfurique H_2SO_4 dans laquelle barbote du dihydrogène sous la pression P_{H_2} ;
- la demi-pile de droite est constituée d'un fil de platine plongeant dans une solution aqueuse d'acide sulfurique H_2SO_4 dans laquelle barbote du dioxygène sous la pression P_{O_2} .

Les deux demi-piles sont reliées par un pont salin et la solution aqueuse d'acide sulfurique est la même dans les deux demi-piles.

1. a) Donner l'écriture conventionnelle de cette cellule électrochimique.
b) Préciser le rôle du pont salin.
2. a) Montrer que la force électromotrice e de cette pile est indépendante de la concentration de la solution d'acide sulfurique.
b) Pourquoi a-t-on cependant intérêt à utiliser une solution d'acide sulfurique concentrée ?
c) Calculer la valeur de la force électromotrice e de la pile lorsque $P_{\text{O}_2} = P_{\text{H}_2} = 2 \text{ bar}$.
d) Quelle serait la valeur de la force électromotrice si la pile fonctionnait dans les conditions standard ?
3. On relie les deux électrodes de platine à une résistance.
 - a) Faire un schéma détaillé de la pile en fonctionnement sur lequel on précisera le sens de circulation des électrons, le nom des électrodes et la polarité de la pile.
 - b) Écrire les réactions électrochimiques qui se déroulent aux électrodes.
 - c) Écrire l'équation de la réaction de fonctionnement de la pile et calculer son enthalpie libre standard de réaction à 298 K .
 - d) Calculer le coefficient de température de la pile $\frac{de^0}{dT}$ dans l'approximation d'Ellingham.

Données :

- potentiel standard : $E^0(\text{O}_2(\text{liq})/\text{H}_2\text{O}(\text{liq})) = 1,23 \text{ V}$;
- enthalpie standard de formation de l'eau : $\Delta_f H_{\text{H}_2\text{O}(\text{liq})}^0 = -286 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- Faraday : $\mathcal{F} = 96500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$.

V- Rendement faradique

Soit Δm_{th} la masse théorique d'un métal qu'on peut produire par électrolyse, en faisant circuler un courant I constant pendant une durée Δt et soit Δm_{exp} la masse de métal réellement obtenue. On appelle *rendement faradique* le rapport : $\eta_F = \frac{\Delta m_{\text{exp}}}{\Delta m_{\text{th}}}$.

Deux cellules d'électrolyse sont placées en série. Dans la première, on dépose du zinc à partir d'une solution d'ions $\text{Zn}(\text{CN})_3^-$ sur une électrode de surface $S = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$. La deuxième cellule contient des ions Cu^{2+} .

Au bout de 20 minutes d'électrolyse, les masses respectives de zinc et de cuivre déposées sont de 1,82 g et 2,10 g.

On suppose le rendement faradique de l'électrolyse du cuivre égal à 100 %.

1. Calculer le rendement faradique de l'électrolyse du zinc.
2. Calculer l'épaisseur du dépôt de zinc.

Données :

- Masses molaires du cuivre et du zinc : $M_{\text{Cu}} = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{Zn}} = 65,4 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.
- Masse volumique du zinc : $\rho_{\text{Zn}} = 7,13 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

VI- Électrolyse du manganèse

Le dioxyde de manganèse (MnO_2) obtenu par méthode électrochimique est utilisé comme électrode positive de piles Leclanché du commerce. On peut produire MnO_2 par oxydation anodique des ions Mn^{2+} à une interface électrode inattaquable/solution aqueuse. L'électrolyse est réalisée entre deux électrodes de graphite dans une solution de MnSO_4 à $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et H_2SO_4 ($\text{pH} = 1$) maintenue à 90°C . Une circulation de la solution est assurée dans la cellule afin de maintenir constantes les concentrations des espèces électroactives en son sein. En régime de fonctionnement stationnaire, la densité de courant anodique est $80 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ et la ddp mesurée aux bornes de la cellule électrochimique est 2,3 V. Dans les conditions expérimentales précédentes, le rendement faradique de production de MnO_2 est supposé égal à 100 %.

1. Quelles sont les réactions susceptibles de se dérouler à la surface de l'anode de la cellule et à la surface de la cathode, si l'on considère le graphite inattaquable, les ions HSO_4^- électroinertes et la réduction cathodique de O_2 négligeable ?
2. Quelles sont les réactions effectives qui se déroulent aux deux électrodes ? Que peut-on penser des cinétiques respectives des réactions ?
3. Quelle est la quantité d'électricité (exprimée en kAh) théorique nécessaire pour produire 1 kg d'oxyde ?
4. On arrête l'électrolyse pour récupérer MnO_2 lorsque la couche d'oxyde atteint 1 cm à la surface du graphite. Combien de jours sont nécessaires pour atteindre cette épaisseur supposée uniforme à la surface de l'anode ?
5. Quelle est la quantité d'énergie (exprimée en kWh) théoriquement nécessaire pour produire 1 kg d'oxyde ? Comment se décomposent les 2,3 V mesurés aux bornes de la cellule.

Données :

- Potentiels standard par rapport à l'ESH :

$$E^0 (\text{MnO}_2/\text{Mn}^{2+}) = 1,23 \text{ V} \quad E^0 (\text{Mn}^{2+}/\text{Mn}) = -1,17 \text{ V}$$

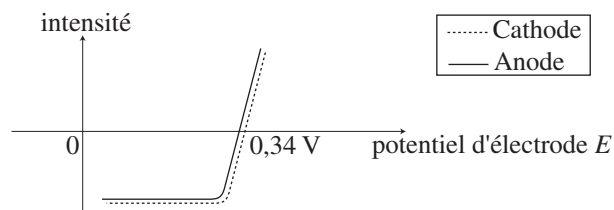
- Masses molaires : $M_{\text{Mn}} = 55 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{O}} = 16 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- Masse volumique de MnO_2 : $\rho_{\text{MnO}_2} = 5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$;
- Faraday : $\mathcal{F} = 96500 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$.

VII- Hydrométallurgie du cuivre

1. Raffinage par le procédé à « anode soluble »

Le raffinage électrolytique se produit dans une cuve à électrolyse remplie d'une solution concentrée de sulfate cuivrique en milieu sulfurique. L'anode (électrode reliée au pôle positif du générateur de courant) est constituée de cuivre impur et la cathode est constituée d'une feuille de cuivre très pur sur laquelle le cuivre formé par électrolyse va se déposer.

- a). Sur le schéma de courbes intensité-potentiel donné ci-dessous, écrire les réactions qui ont lieu à l'anode et à la cathode. Après avoir fixé, sur ce schéma, le point de fonctionnement de cette électrolyse (intensité, tension entre les électrodes), justifier pourquoi la tension doit rester faible ($\leq 0,3 \text{ V}$) aux bornes de la cuve.



- b). Expliquer pourquoi les traces d'argent contenues dans l'anode ne sont pas oxydées à l'anode et pourquoi les traces de fer sont oxydées à l'anode mais non réduites à la cathode.

On donne les potentiels standard :

$$E^0 (\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = 0,34 \text{ V} \quad E^0 (\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$$

$$E^0 (\text{Ag}^+/\text{Ag}) = 0,80 \text{ V} \quad E^0 (\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = -0,44 \text{ V}$$

- c). Établir la relation qui existe entre la quantité m de cuivre raffiné (en gramme), l'intensité du courant I (en ampère) et le temps t (en heure). La masse molaire du cuivre est $M = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Application numérique : industriellement, le rendement de cette électrolyse est proche de 100 %. Quelle est (en kWh) l'énergie consommée par tonne de métal raffiné ? On fixera la tension d'électrolyse à 0,3 V.

On donne la valeur du Faraday $\mathcal{F} = 96\,500 \text{ C}$.

2. Extraction par électrolyse

La solution concentrée et acide de sulfate de cuivre issue de l'étape de lixiviation est électrolysée dans une cuve, avec anode en plomb passivé, sur laquelle il y a dégagement de dioxygène et cathode en cuivre très pur sur lequel le cuivre se dépose.

- a). Quelles sont les réactions aux électrodes ? Calculer la tension théorique minimale à appliquer aux bornes des électrodes pour que l'électrolyse ait lieu. La concentration des ions cuivre dans la solution est égale à $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, le pH est égal à 0 et la pression de dioxygène est égale à 0,2 bar. Les couples redox du plomb n'interviennent pas.

- b). Faire un schéma des courbes intensité-potentiel à l'anode et à la cathode.
Faire figurer, sur ce schéma, l'intensité et la tension de fonctionnement. Dans ce schéma, on négligera les surtensions aux électrodes.
- c). En réalité, compte tenu de phénomène de surtension à l'anode et de chute ohmique de tension dans l'électrolyte, la tension à appliquer est de 2,1 V.
Application numérique : calculer l'énergie électrique (en kWh) nécessaire pour produire 1 tonne de cuivre par ce procédé. On supposera le rendement égal à 100 %. Comparer à l'énergie consommée par le procédé d'électroaffinage.