

# B- Phénomènes de transport

## B1 Fluides en écoulement

### 1– Débits et lois de conservation

#### a– Champs des vitesses



#### DÉFINITION

L'observation du mouvement au niveau microscopique consiste à observer le mouvement des atomes et molécules ; il s'agit notamment du mouvement Brownien.



#### DÉFINITION

L'observation du mouvement au niveau macroscopique consiste à observer des objets dont le volume est discernable à l'œil nu.



#### DÉFINITION

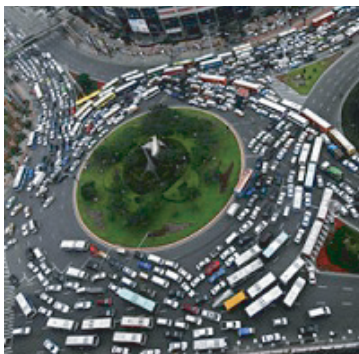
L'observation du mouvement au niveau mésoscopique est intermédiaire entre les deux précédents : les objets apparaissent ponctuels à l'œil nu, mais sont composés d'innombrables particules. C'est à ce niveau qu'est définie une cellule fluide, dont le mouvement fera l'objet de l'étude en PSI.



#### DÉFINITION

On appelle champ de vitesse l'ensemble des vecteurs vitesse  $\vec{v}(M, t)$  en chaque point  $M$  d'un fluide, pour chaque date  $t$ .

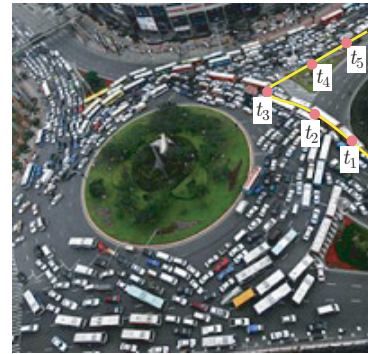
La mécanique des fluides étudiée en PSI consistera en une description Eulerienne du fluide, c'est-à-dire à l'étude du champ de vitesse des fluides, par opposition à une description Lagrangienne qui aurait conduit à étudier la trajectoire des particules fluides. Par exemple, la photo du schéma ci-dessous décrit le champ de vitesse dans une circulation routière : à un instant donné, la distribution des vecteurs vitesse est suggérée par la direction de chaque véhicule. En revanche, la troisième photo illustre la trajectoire d'un véhicule, c'est-à-dire la position qu'il occupe à différents instants ( $t_1, t_2, \dots$ )



Circulation routière



Ligne de courant : tangente en chacun de ses points aux véhicules et déterminée à un seul instant donné.



Trajectoire suivie par un véhicule = positions occupées aux différents instants  $t_1, t_2, \dots$

**DÉFINITION**

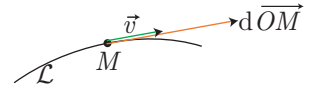
Une ligne de courant est une portion de courbe qui, en chacun de ses points  $M$ , est tangente au vecteur vitesse en  $M$ .

Sur la deuxième photo ci-dessus a été représentée une ligne de courant pour la circulation routière. Ces photos montrent également que ligne de courant et trajectoire peuvent ne pas coïncider.

Concrètement :

- rechercher la trajectoire d'une particule fluide, c'est déterminer ses coordonnées  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  afin de réaliser une courbe paramétrée par  $t$ ; il s'agit d'une description Lagrangienne.
- rechercher une ligne de courant  $\mathcal{L}$ , à un instant  $t$  fixé, c'est chercher une courbe  $\mathcal{L}$  tangente en chacun de ses points  $M$  à  $v(t)$ , ce qui revient à résoudre l'équation :

$$\forall M \in \mathcal{L}, d\vec{OM} \wedge \vec{v}(M, t) = \vec{0}$$



où  $d\vec{OM}$  désigne un déplacement élémentaire le long de  $\mathcal{L}$ . Par exemple, en coordonnées cartésiennes, cette équation génère un système de trois équations différentielles :

$$d\vec{OM} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_z dy - v_y dz \\ v_x dz - v_z dx \\ v_y dx - v_x dy \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} dy/dz = v_y/v_z \\ dx/dz = v_x/v_z \\ dx/dy = v_x/v_y \end{cases}$$

**EXERCICE**

Les coordonnées d'une particule fluide  $\mathcal{P}_0$ , en mouvement dans le plan  $z = 0$ , sont données dans le temps par les expressions :

$$x(t) = x_0 + \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t) \text{ et } y(t) = y_0 - \frac{V_0}{\omega} \cos(\omega t)$$

où  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  sont des constantes.

1. Quelle est la trajectoire de  $\mathcal{P}_0$ ? la représenter graphiquement.
2. Montrer que les lignes de courant sont des segments de droite dont la pente varie dans le temps comme  $\tan(\omega t)$ . Tracer une de ces lignes de courant.

**Corrigé**

1. La trajectoire de  $\mathcal{P}_0$  se déduit directement de l'expression des coordonnées :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{V_0^2}{\omega^2}$$

Il s'agit d'un cercle de centre  $\mathcal{C}_0(x_0, y_0)$  et de rayon  $R = \frac{V_0}{\omega}$ .

Puisque les valeurs de  $x_0$  et  $y_0$  ne sont pas fournies, on peut imaginer qu'il existe autant de trajectoires que de particules fluides, lesquelles trajectoires sont centrées en des points  $\mathcal{C}_i(x_i, y_i)$ .

2. Les lignes de courant se déduisent du champ de vitesse à un instant  $t$ , lequel s'obtient également à partir des coordonnées :

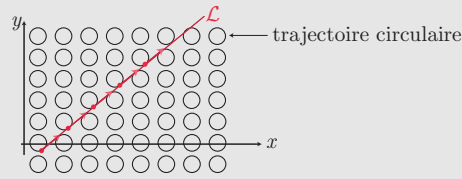
$$v_x = \frac{dx}{dt} = V_0 \cos(\omega t) \text{ et } v_y = \frac{dy}{dt} = V_0 \sin(\omega t)$$

Une des lignes de courant  $\mathcal{L}$  est un ensemble de points  $M$  vérifiant :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M) \wedge d\vec{OM} = \vec{0} &\Rightarrow \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow v_x dy = v_y dx \\ &\Rightarrow V_0 \cos(\omega t) dy = V_0 \sin(\omega t) dx \Rightarrow dy = a dx \end{aligned}$$

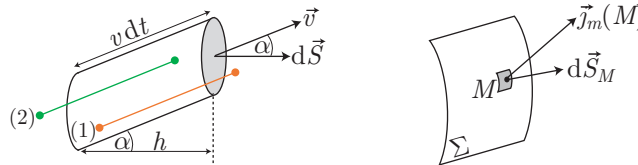
où  $a = \tan(\omega t)$  est une constante à chaque date  $t$  fixée.

C'est pourquoi l'équation :  $dy = a dx \Rightarrow y = ax + b$  montre qu'à chaque instant  $t$  les lignes de courant sont des segments de droite de pente  $a = \tan(\omega t)$ , parallèles les unes aux autres.



### b– Débit massique et débit volumique

Isolons, par la pensée, une surface  $dS$  et évaluons la masse  $\delta m$  qui traverse  $dS$  pendant  $dt$ .



On supposera que  $dS$  est assez petit au voisinage d'un point  $M$  pour que les vitesses soient localement homogènes et égales à  $\vec{v}(M, t) = \vec{v}$ . Représentons un volume élémentaire cylindrique  $\mathcal{V}$  de section de base  $dS$  et de hauteur  $h = v dt \cos \alpha$ . Puisque pendant  $dt$  les particules de fluides se déplacent d'une distance  $v dt$ , le schéma précédent montre que seules celles contenues dans  $\mathcal{V}$  sont susceptibles de traverser  $dS$  pendant  $dt$ . Donc, la masse qui traverse  $dS$  vaut :  $\delta m = \mu d\tau$  où  $\mu$  est la masse volumique du fluide et  $d\tau = h \times dS$  est le volume de  $\mathcal{V}$  :

$$\delta m = \mu h dS = \mu \times v dt \cos \alpha \times dS \Rightarrow \frac{\delta m}{dt} = \mu v dS \cos \alpha = \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

On définit le *vecteur densité de courant de masse* par :

$$\vec{j}_m = \mu \vec{v}$$

de sorte que le débit élémentaire de masse à travers  $dS$  s'écrit :

$$\delta D_m = \frac{\delta m}{dt} = \vec{j}_m \cdot d\vec{S}$$



#### DÉFINITION

Le débit massique à travers une surface ( $\Sigma$ ) est le rapport de la masse  $\delta m$  qui traverse ( $\Sigma$ ) avec la durée d'observation  $dt$ . Il se déduit directement du résultat précédent :

$$D_m = \frac{\delta m}{dt} = \left| \iint_{\Sigma} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M \right| \quad (\text{cf. schéma ci-dessus.})$$

Le débit massique sera toujours défini positivement.

#### REMARQUE

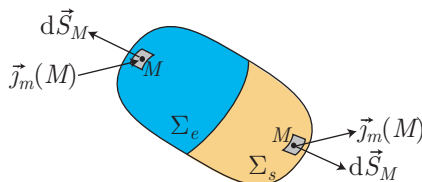
Si, en tout point de ( $\Sigma$ ),  $\vec{j}_m$  est uniforme (donc  $\vec{j}_m(M) = \vec{j}_m$  est indépendant de  $M$ ) et colinéaire à  $d\vec{S}_M$ , l'expression précédente se simplifie :

$$D_m = \left| \iint_{\Sigma} \vec{j}_m \cdot d\vec{S}_M \right| = \int_{\Sigma} j_m dS_m = j_m \iint_{\Sigma} dS_M \Rightarrow D_m = j_m \times \Sigma \quad (1)$$

**REMARQUE** Soient  $D_{me}$  et  $D_{ms}$  les débits massiques entrant et sortant d'une surface fermée ( $\Sigma$ ). Le flux de  $\vec{j}_m$  à travers  $\Sigma$  vaut :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M = D_{ms} - D_{me} \quad (2)$$

**DÉMONSTRATION** : Pour simplifier la démonstration, nous supposons les domaines d'entrée et de sortie du fluide bien séparés en une surface ( $\Sigma_e$ ) et une surface ( $\Sigma_s$ ) :



En tout point de ( $\Sigma_s$ ),  $\vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M$  est positif, de sorte que :

$$D_{ms} = \left| \iint_{\Sigma_s} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M \right| = \iint_{\Sigma_s} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Par contre, en tout point de ( $\Sigma_e$ ),  $\vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M$  est négatif, ce qui se traduit par :

$$D_{me} = \left| \iint_{\Sigma_e} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M \right| = - \iint_{\Sigma_e} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M$$

Il s'ensuit que :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M = \iint_{\Sigma_s} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M + \iint_{\Sigma_e} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M = D_{ms} - D_{me}$$



#### DÉFINITION

On appelle débit volumique  $Q_v$  le rapport du volume  $\delta\tau$  qui traverse une surface par la durée  $dt$  de cette observation :

$$Q_v = \frac{\delta\tau}{dt}$$

En s'inspirant du schéma de la page 3, il apparaît qu'à travers la surface élémentaire  $dS$  circulaire, pendant  $dt$ , le volume :

$$\delta\tau = h dS = v dt \cos \alpha dS \Rightarrow \frac{\delta\tau}{dt} = v dS \cos \alpha = \vec{v} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \delta Q_v = \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

En généralisant l'étude précédente, on peut alors poser :

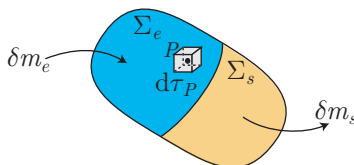
$$Q_v = \left| \iint_{\Sigma} \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}_M \right| \Rightarrow Q_v = v \times S \text{ si } \vec{v} = \vec{c}t\vec{e} \text{ et } \vec{v} \cdot d\vec{S} = v \times dS$$

et :

$$Q_{vs} - Q_{ve} = \oiint_{\Sigma} \vec{v}(M) \cdot d\vec{S}$$

### c– Conservation de la masse

Considérons un volume fermé ( $\mathcal{V}$ ) à l'intérieur duquel pénètre, pendant  $dt$ , une masse  $\delta m_e$  et d'où sort une masse  $\delta m_s$  :



Un volume élémentaire  $d\tau_P$  à l'intérieur de  $(\mathcal{V})$  présente alors une masse  $\delta m = \mu(P, t) d\tau_P$  où  $\mu(P, t)$  désigne la masse volumique au point  $P$  et à la date  $t$ . Donc, pendant  $dt$ , la masse de  $(\mathcal{V})$  passe de :

$$m(t) = \iiint_{\mathcal{V}} \mu(P, t) d\tau_P \text{ à } m(t + dt) = \iiint_{\mathcal{V}} \mu(P, t + dt) d\tau_P$$

Elle varie donc de la quantité :

$$\begin{aligned} dm &= m(t + dt) - m(t) = \iiint_{\mathcal{V}} [\mu(P, t + dt) - \mu(P, t)] d\tau_P \\ &= \iiint_{\mathcal{V}} dt \times \left. \frac{\partial \mu}{\partial t} \right|_{(P,t)} d\tau_P = dt \times \iiint_{\mathcal{V}} \left. \frac{\partial \mu}{\partial t} \right|_{(P,t)} d\tau_P \end{aligned}$$

Or, la conservation de la masse impose que la variation  $dm$  de la masse de  $(\mathcal{V})$  dépende uniquement de la masse qui y entre et qui en sort :

$$dm = \delta m_e - \delta m_s \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{\delta m_e}{dt} - \frac{\delta m_s}{dt} = D_{me} - D_{ms} \Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} \left. \frac{\partial \mu}{\partial t} \right|_{(P,t)} d\tau_P = - \oiint_{\Sigma} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}$$

où le théorème d'Ostrogradski fournit :

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M &= \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j}_m(P, t) d\tau_P \Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} \left. \frac{\partial \mu}{\partial t} \right|_{(P,t)} d\tau_P = - \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j}_m(P, t) d\tau_P \\ &\Rightarrow \iiint_{\mathcal{V}} \left[ \left. \frac{\partial \mu}{\partial t} \right|_{(P,t)} + \operatorname{div} \vec{j}_m(P, t) \right] d\tau_P = 0 \end{aligned}$$

Cette intégrale devant être nulle quel que soit le volume  $(\mathcal{V})$ , c'est-à-dire quelles que soient les bornes d'intégration, il s'ensuit que :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0 \text{ où } \vec{j}_m = \mu \vec{v}} \quad (3)$$

Cette équation, qui traduit la conservation de la masse, est aussi appelée *équation de continuité*.

#### d- Écoulement stationnaire



##### DÉFINITION

L'écoulement est stationnaire lorsque la masse volumique du fluide est indépendante du temps en chacun des points de l'espace :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0}$$

Dans ces conditions, l'équation de continuité (3) devient :

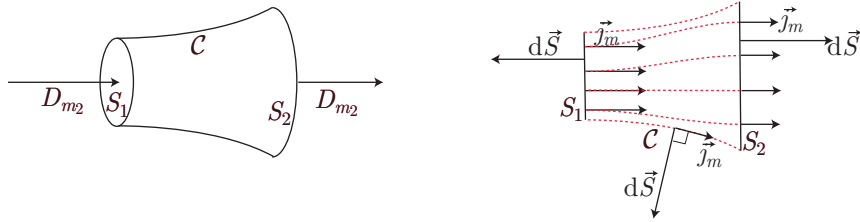
$$\boxed{\operatorname{div} \vec{j}_m = 0 \text{ c'est-à-dire } \operatorname{div}(\mu \vec{v}) = 0}$$

ATTENTION :  $\mu$  peut dépendre de l'espace, auquel cas  $\operatorname{div}(\mu \vec{v}) \neq \mu \operatorname{div} \vec{v}$ .

Considérons une surface fermée  $(\Sigma)$  à travers laquelle entre et sort des débits massiques  $D_{me}$  et  $D_{ms}$  respectivement. La relation (2) indique que :

$$\begin{aligned} D_{ms} - D_{me} &= \oiint_{\Sigma} \vec{j}_m(M) \cdot d\vec{S}_M = \iiint_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{j}_m(P) d\tau_P \text{ (Ostrogradski)} \\ &= 0 \Rightarrow \boxed{D_{ms} = D_{me}} \end{aligned}$$

Notamment, si  $(\Sigma)$  est un tube de courant prenant appui sur deux contours de sections  $S_1$ ,  $S_2$  et de surface latérale  $\mathcal{C}$  :



le débit massique à travers  $(C)$  est nul car, en tout point  $M$  de  $(C)$ ,  $\vec{j}_m(M, t) \perp d\vec{S}_M$  ( $\vec{j}_m$  est tangent aux lignes de courant tandis que  $d\vec{S}_m$  est orthogonal à  $(C)$ ), d'où il s'ensuit que  $\iint_C \vec{j}_m \cdot d\vec{S}_M = 0$ .

Ainsi, le transfert de masse ne s'effectue qu'à travers  $S_1$  et  $S_2$  de sorte que l'identité (2) devient :

$$\begin{cases} D_{me} = j_{m1} S_1 = \mu_1 v_1 S_1 \\ D_{ms} = j_{m2} S_2 = \mu_2 v_2 S_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\mu_1 v_1 S_1 = \mu_2 v_2 S_2} \text{ car } D_{me} = D_{ms}$$

Il faut donc retenir que :

l'écoulement stationnaire d'un fluide est caractérisé par :

- $\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$
- ou  $D_{me} = D_{ms}$
- ou  $\mu_1 v_1 S_1 = \mu_2 v_2 S_2$

## e- Écoulement incompressible



### DÉFINITION

Un écoulement est incompressible lorsque la masse volumique  $\mu$  du fluide est indépendante du temps et de l'espace :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \text{ et } \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial z} = 0}$$

Dans ces conditions, l'équation de continuité (3) devient :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \Rightarrow \mu \text{div} \vec{v} = 0 \Rightarrow \boxed{\text{div} \vec{v} = 0}$$

Or, l'étude précédente a permis de montrer que  $\text{div} \vec{v} = 0$  équivaut à  $Q_{ve} = Q_{vs}$  à travers une surface fermée et à  $v_1 S_1 = v_2 S_2$  à travers un tube de courant. C'est pourquoi il faut retenir que :

l'écoulement incompressible d'un fluide est caractérisé par :

- $\mu(M, t) = \mu = \text{cte}$
- ou  $Q_{ve} = Q_{vs}$
- ou  $v_1 S_1 = v_2 S_2$

## 2- Actions de contact

### a- Forces de pression



### DÉFINITION

Un fluide immobile exerce sur une surface d'aire  $dS$  une force  $\delta \vec{F}_p$  perpendiculaire à  $dS$  (et donc colinéaire à  $d\vec{S}$ ) :

$$\boxed{\delta \vec{F}_p = P d\vec{S}}$$

Le coefficient de proportionnalité  $P$  est la pression que le fluide exerce sur  $dS$ .

L'unité officielle de la pression est le Pascal :

$$[P] = \text{Pa} \text{ où } 1 \text{ Pa} = 1 \text{ N.m}^{-2}$$

Cependant, il existe de nombreux domaines scientifiques qui exploitent d'autres unités de pression :

- En chimie, la *pression standard* s'exprime en bar :

$$P^0 = 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$$

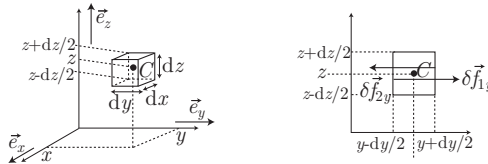
- En météorologie, on emploie fréquemment l'atmosphère ou le millimètre de mercure :

$$1 \text{ atm} = 1,013.10^5 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$$

La résultante des forces de pression  $\delta \vec{F}_p$  qui s'exerce sur une surface renfermant un volume  $\delta \tau$  admet pour densité volumique :

$$\vec{F}_{p,\text{vol}} = \frac{\delta \vec{F}_p}{\delta \tau} = -\vec{\text{grad}} P$$

DÉMONSTRATION : Considérons un volume parallélépipédique  $\delta \tau = dx dy dz$  immergé dans un fluide immobile :



Intéressons-nous, dans un premier temps, aux forces de pression  $\delta \vec{f}_{1y}$  et  $\delta \vec{f}_{2y}$  qui s'exercent sur deux surfaces verticales, d'aire  $dx dz$ , situées respectivement en  $y - \frac{dy}{2}$  et en  $y + \frac{dy}{2}$  :

$$\delta \vec{f}_{1y} = p(x, y - \frac{dy}{2}, z) dx dz \vec{e}_y = \left[ p(x, y, z) - \frac{dy}{2} \frac{\partial p}{\partial y} \right] dx dz \vec{e}_y$$

$$\delta \vec{f}_{2y} = -p(x, y + \frac{dy}{2}, z) dx dz \vec{e}_y = - \left[ p(x, y, z) + \frac{dy}{2} \frac{\partial p}{\partial y} \right] dx dz \vec{e}_y$$

La résultante de ces forces vaut alors :

$$\delta \vec{f}_y = \delta \vec{f}_{1y} + \delta \vec{f}_{2y} = - \frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz \vec{e}_y = - \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y \delta \tau$$

Un calcul similaire portant sur les deux autres composantes de la force de pression fournit :

$$\delta \vec{f}_x = - \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x \delta \tau \text{ et } \delta \vec{f}_z = - \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \delta \tau$$

et conduit donc à :

$$\delta \vec{F}_p = \delta \vec{f}_x + \delta \vec{f}_y + \delta \vec{f}_z = - \left[ \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right] \delta \tau = -\vec{\text{grad}} p \delta \tau \Rightarrow \frac{\delta \vec{F}_p}{\delta \tau} = -\vec{\text{grad}} p$$

REMARQUE

La force de pression ainsi calculée s'identifie à la poussée d'Archimède. Donc, dans le bilan des forces, il faudra choisir : forces de pression ou poussée d'Archimède, mais ne pas prendre en compte les deux phénomènes simultanément.

DÉMONSTRATION : Considérons un élément de fluide, en équilibre, de masse  $m_f$  et donc de poids  $m_f \vec{g}$  :



L'équilibre de cet élément de fluide, également soumis aux forces de pression  $\vec{F}_p$ , impose :

$$\vec{F}_p + m_f \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_p = -m_f \vec{g}$$

Remplaçons maintenant cet élément de fluide par un objet, de même forme, mais de masse  $m_o$ . Cet objet est alors soumis :

- à son poids  $\vec{P} = m_o \vec{g}$  ;
- aux mêmes forces de pression car celles-ci ne dépendent que du fluide extérieur à l'objet et de la surface de contact entre le fluide et l'objet :  $\vec{F}_p = -m_f \vec{g}$ .

Par conséquent, l'objet est soumis à une résultante :

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_p$$

que l'on écrit souvent :  $\vec{F} = \vec{P} + \vec{A}$ , où  $\vec{A}$  désigne la poussée d'Archimède, qui s'identifie donc bien avec  $\vec{F}_p = -m_f \vec{g}$  et qui coïncide bien avec l'opposé du poids du fluide déplacé.

## b– Éléments de statique des fluides

Isolons, dans un fluide de masse volumique  $\mu$ , un élément de volume  $\delta\tau$  en équilibre mécanique, dans le seul champ de pesanteur  $\vec{g}$ . Puisque cet élément est soumis à son poids  $\delta m \vec{g}$  et à la force de pression  $\delta \vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}} p \delta\tau$ , l'équilibre est conditionné par l'équation :

$$\delta m \vec{g} + \delta \vec{F}_p = \vec{0} \Rightarrow -\delta m g \vec{e}_z - \overrightarrow{\text{grad}} p \delta\tau = \vec{0} \Rightarrow -\frac{\delta m}{\delta\tau} g \vec{e}_z - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right) = \vec{0}$$


D'une part, la projection de cette équation selon  $\vec{e}_x$  et selon  $\vec{e}_y$  fournit :  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  et  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ , ce qui signifie que la pression  $p$  ne dépend que de  $z$ . D'autre part, la projection de cette équation selon  $\vec{e}_z$  se traduit par :

$$-\mu g - \frac{dp}{dz} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dz} = -\mu g} \quad (4)$$

Cette équation, connue comme *loi de la statique des fluides*, permet de retrouver l'expression de la pression  $p$  en fonction de l'altitude, dans quelques cas simples :

### – Cas du fluide incompressible (au programme des PSI)

Les liquides sont souvent assimilés à des fluides incompressibles, dont la masse volumique  $\mu = \mu_0$  est indépendante de  $z$ . L'équation (4) s'intègre alors facilement entre deux points  $A$  et  $B$  où règnent les pressions respectives  $P_A$  et  $P_B$ .

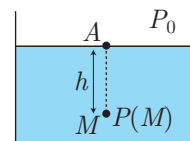
$$\int_{P_A}^{P_B} dp = - \int_{z_A}^{z_B} \mu g dz = -\mu g \int_{z_A}^{z_B} dz = -\mu g (z_B - z_A) \Rightarrow \boxed{P_A = P_B + \mu g h} \quad (5)$$


où  $h$  représente la profondeur du point  $A$  par rapport au point  $B$ . Illustrons cette expression sur deux exemples :

▷ **Exemple 1** : Soit  $P_0 = 1,013.10^5$  Pa la pression atmosphérique. Calculons la pression qui règne en un point  $M$  immergé dans l'eau, de masse volumique  $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ , à une profondeur  $h = 5$  m.

En choisissant  $A$  à la surface de l'eau, donc à la pression  $P_0$ , il apparaît que :

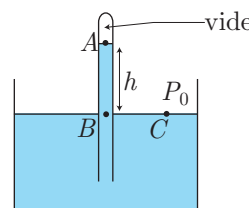
$$\boxed{P(M) = P_0 + \mu g h} = 1,013.10^5 + 10^3 \times 9,8 \times 5 \Rightarrow \boxed{P(M) \simeq 1,5 P_0}$$



▷ **Exemple 2** : Autrefois la pression atmosphérique  $P_0$  se mesurait à l'aide d'un grand tube en verre rempli d'un liquide de masse volumique  $\mu$ , retourné sur une cuve remplie du même liquide.

En retournant le tube sur la cuve, on constate que le fluide tombe sous son propre poids, ce qui génère un vide en  $A$  (en fait, le fluide se vaporise sous sa pression de vapeur saturante  $P_{\text{sat}}$  que l'on supposera négligeable devant  $P_0$ ). Soient deux points  $A$  et  $B$  situés dans le fluide, sous une même verticale. L'application de la relation (5) fournit :

$$P_B - P_A = \mu g h \Rightarrow P_B = P_{\text{sat}} + \mu g h$$



tandis que  $P_B = P_C = P_0$ , car les points  $B$  et  $C$  se trouvent sur une même horizontale :

$$P_0 = P_{\text{sat}} + \mu g h \simeq \mu g h$$

Si le baromètre contenait de l'eau, pour mesurer une pression  $P_0 = 1 \text{ atm} = 1,013.10^5$  Pa, il devait mesurer au moins :

$$h = \frac{P_0}{\mu g} = \frac{1,013.10^5}{10^3 \times 9,8} \Rightarrow h = 10,33 \text{ m}$$

C'est pourquoi on lui préférerait un baromètre à mercure, pour lequel :

$$h = \frac{1,013.10^5}{13,6.10^3 \times 9,8} \Rightarrow h = 0,76 \text{ m} = 760 \text{ mm}$$

C'est aussi cette valeur qui justifie la conversion :  $1 \text{ atm} = 760 \text{ mmHg}$ .

### – Cas du fluide compressible (pas au programme des PSI)

Dans ce cas, l'intégration de la loi (4) est plus délicate, car  $\mu$  dépend de l'espace (et donc de  $z$ ) :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g \Rightarrow \int_{P_A}^{P_B} dp = - \int_{z_A}^{z_B} \mu g dz \neq \mu g \int_{z_A}^{z_B} dz \text{ car } \mu \neq \text{cte}$$



Il conviendra donc d'exprimer  $\mu$  avant de procéder à cette intégration. En général, on commence par utiliser l'équation d'état du gaz parfait (de masse molaire  $M$ ) :

$$pV = nRT = m \frac{RT}{M} \Rightarrow \mu = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{pMg}{RT} \quad (6)$$

puis on intègre cette équation en tenant compte des hypothèses de l'énoncé :

▷ **Cas du milieu isotherme** : la température  $T = T_0$  est constante, de sorte que l'équation (6) devient :

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz} = -\frac{Mg}{RT_0} \times p &\Rightarrow \int_{P_0}^P dp = -\int_{z_0}^z \frac{Mg}{RT_0} dz = -\frac{Mg}{RT_0} \int_{z_0}^z dz = -\frac{Mg}{RT_0} \times (z - z_0) \\ &\Rightarrow \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{Mg}{RT_0} (z - z_0) \Rightarrow \boxed{P = P_0 \exp\left[-\frac{Mg}{RT_0} (z - z_0)\right]} \end{aligned}$$

▷ **Cas des échanges adiabatiques** : la température  $T = T(z)$  n'étant plus constante, la résolution précédente ne convient plus. Il faut alors utiliser la loi de Laplace :

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte} \Rightarrow \gamma \ln T + (1-\gamma) \ln p = \ln \text{cte} = \text{cte} \Rightarrow \gamma \frac{dT}{T} + (1-\gamma) \frac{dp}{p} = 0 \Rightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{dT}{T}$$

Ainsi, l'équation (6) devient :

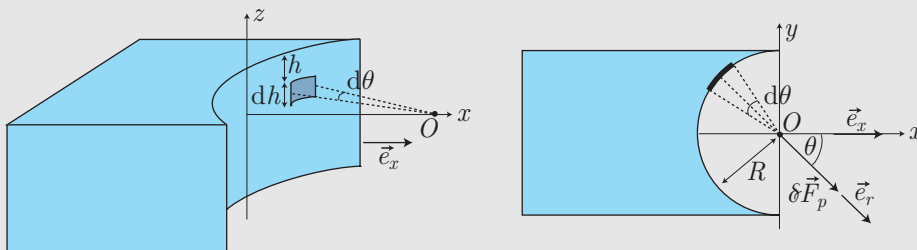
$$\begin{aligned} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dz &\Rightarrow \frac{-\gamma}{1-\gamma} \frac{dT}{T} = -\frac{Mg}{RT} dz \Rightarrow \int_{T_0}^T dT = -\frac{(\gamma-1)Mg}{\gamma R} \int_{z_0}^z dz = -\alpha \int_{z_0}^z dz \\ &\Rightarrow T - T_0 = -\alpha (z - z_0) \Rightarrow \boxed{T = T_0 - \alpha (z - z_0) \text{ où } \alpha = \frac{(\gamma-1)Mg}{\gamma R}} \end{aligned}$$

et :

$$T^\gamma p^{1-\gamma} = \text{cte} = T_0^\gamma p_0^{1-\gamma} \Rightarrow \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^\gamma \Rightarrow \boxed{p = p_0 \times \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = p_0 \left[1 - \frac{\alpha}{T_0} (z - z_0)\right]^{\gamma/\gamma-1}}$$

### EXERCICE

Un barrage hydraulique contient une hauteur  $H$  d'eau, supposée incompressible de masse volumique  $\mu$ . La pression atmosphérique sera supposée indépendante de l'altitude  $z$  et de valeur  $P_0$ . La section de ce barrage est un demi-cercle de rayon  $R$ .



1. Exprimer, en fonction de  $P_0$ ,  $\mu$ ,  $g$ ,  $h$  la pression  $P(h)$  qui règne à une profondeur  $h$  dans le barrage.
2. Soit  $dS$  une surface élémentaire du barrage, de hauteur  $dh$  et d'angle  $d\theta$ . Après avoir exprimé  $dS$ , donner l'expression de la force de pression  $\delta\vec{F}_{pe}$  que l'eau exerce sur  $dS$  ; on pourra faire intervenir le vecteur unitaire  $\vec{e}_r$  normal à  $dS$ .
3. Exprimer, de même, la force de pression  $\delta\vec{F}_{pa}$  exercée par l'air sur  $dS$  et en déduire la résultante des forces de pression  $\delta\vec{F}_p$  qui s'exerce sur  $dS$ .
4. Calculer alors la résultante des forces de pression  $\vec{F}_p$  qui s'exercent sur le barrage :

$$\vec{F}_p = \mu g H^2 R \vec{e}_x$$

## Corrigé

1. Dans un fluide incompressible, la pression est donnée par la loi (5), où  $P_B = P_0$  à la surface de l'eau :

$$p(h) = P_0 + \mu g h$$

2. L'aire d'une surface élémentaire valant  $dS = R d\theta \times dh$ , la force de pression que l'eau exerce sur  $dS$  est définie par :

$$\delta \vec{F}_{pe} = p(h) dS \vec{e}_r \text{ où } dS = R d\theta dh$$

3. De même, l'air (où la pression vaut uniformément  $P_0$ ) exerce sur  $dS$  une force de pression dirigée selon  $-\vec{e}_r$  :

$$\delta \vec{F}_{pa} = -P_0 dS \vec{e}_r$$

Par conséquent, la surface  $dS$  est soumise à une résultante de pression :

$$\delta \vec{F}_p = \delta \vec{F}_{pe} + \delta \vec{F}_{pa} = [p(h) - P_0] dS \vec{e}_r \Rightarrow \delta \vec{F}_p = \mu g h dS \vec{e}_r$$

4. La résultante des forces de pression qui s'exercent sur la totalité du barrage vaut alors :

$$\begin{aligned} \vec{F}_p &= \iint_{\text{barrage}} \delta \vec{F}_p = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \int_{h=0}^H \mu g h \times R d\theta dh \vec{e}_r \\ &= \mu g \frac{H^2}{2} R \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \vec{e}_r d\theta = \mu g \frac{H^2}{2} R \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \theta \vec{e}_x - \sin \theta \vec{e}_y) d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

Ses composantes sont donc :

$$\begin{aligned} F_{px} &= \mu g \frac{H^2}{2} R \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \mu g \frac{H^2}{2} R \times [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \mu g \frac{H^2}{2} R \times 2 = \mu g H^2 R \\ F_{py} &= \mu g \frac{H^2}{2} R \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} -\sin \theta d\theta = \mu g \frac{H^2}{2} R \times [\cos \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0 \end{aligned}$$

en conséquence de quoi :

$$\vec{F}_p = \mu g H^2 R \vec{e}_x$$

## REMARQUE

Il était possible d'obtenir ce résultat sans développer toutes les composantes du vecteur  $\vec{e}_r$ . Il suffisait de remarquer que  $\vec{F}_p$  est dirigé selon  $\vec{e}_x$  :

$$\vec{F}_p = F_p \vec{e}_x \Rightarrow \vec{F}_p \cdot \vec{e}_x = F_p \times \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x}_{=1}$$

L'intégrale (7) devient alors :

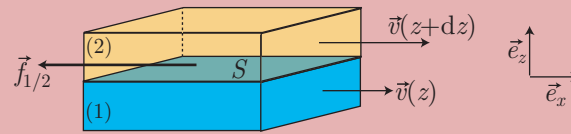
$$\begin{aligned} F_p &= \vec{e}_x \cdot \left( \frac{\mu g H^2 R}{2} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \vec{e}_r d\theta \right) = \frac{\mu g H^2 R}{2} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r}_{\cos \theta} d\theta \\ &= \frac{\mu g H^2 R}{2} [\sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \mu g H^2 R \Rightarrow \vec{F}_p = \mu g H^2 R \vec{e}_x \end{aligned}$$

## c– Viscosité dynamique



### DÉFINITION

Soient deux cellules fluides ayant une surface de contact  $S$  et éventuellement des vitesses différentes :



La cellule (1) exerce sur la cellule (2) une force de viscosité qui dépend de la variation du champ de vitesse :

$$\vec{f}_{1/2} = -\eta S \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_x \quad (8)$$

Le coefficient de viscosité  $\eta$  s'exprime en Pa.s ou en Poiseuille : Pl.

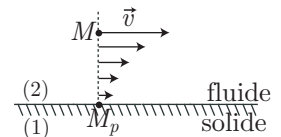
$$[\eta] = \text{Pa.s avec } 1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ Pl}$$

On retiendra quelques ordres de grandeur pour  $\eta$  :

$$\eta_{\text{air}} \sim 10^{-6} \text{ Pl} \quad \eta_{\text{eau}} \sim 10^{-3} \text{ Pl} \quad \eta_{\text{huile}} \sim 1 \text{ Pl}$$

La définition d'un fluide visqueux impose que la vitesse  $v$  soit une fonction continue de l'espace (sans quoi  $\frac{\partial v}{\partial z}$  deviendrait infini). Or, les molécules d'une paroi immobile ayant une vitesse nulle, elle impose une condition d'adhérence du fluide en chaque point  $M_p$  de la paroi :

$$\text{adhérence} \Rightarrow \lim_{M \rightarrow M_p} \vec{v}(M, t) = \vec{0}$$



## 3– Écoulements laminaires et turbulents

### a– Introduction

Selon sa vitesse, un fluide peut adopter plusieurs régimes :

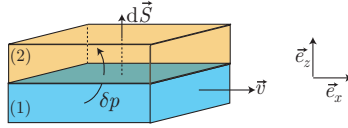
- **Le régime laminaire** : pour les faibles vitesses, les cellules les plus rapides communiquent leur quantité de mouvement aux autres cellules par diffusion : il n'y a pas d'échange de matière, mais seulement transfert d'énergie. La première image de la séquence ci-dessous illustre ce régime car les cellules colorées en bleu restent confinées dans leur tube de courant et pourtant elles peuvent mettre en mouvement le fluide environnant.
- **Le régime turbulent** : pour les vitesses élevées, les échanges de quantité de mouvement se font par convection, c'est-à-dire par transfert de matière avec son énergie. C'est ce qu'illustre la dernière image de la séquence ci-dessous en montrant que les cellules colorées en bleu s'échappent de leur tube de courant et transmettent alors leur énergie en se déplaçant.



## b– Transfert de quantité de mouvement par diffusion

La relation (8), qui définit la viscosité, traduit également un phénomène de diffusion de la quantité de mouvement.

DÉMONSTRATION : Considérons une cellule fluide (1) de vitesse  $v$ , en contact avec une autre cellule fluide (2), la surface de contact étant associée au vecteur  $d\vec{S} = dS \vec{e}_z$ .



Pendant la durée  $dt$ , la quantité de mouvement de (2) s'accroît d'une valeur  $d\vec{p}$  donnée par la relation (8) :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\eta dS \frac{\partial v}{\partial z} \vec{e}_x \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\eta \frac{\partial v}{\partial z} dS \text{ car } \vec{p} = p \vec{e}_x$$

En outre,  $dp$  est aussi la quantité de mouvement  $\delta p$  qui est transférée à travers  $dS$  de (1) vers (2) :

$$\frac{\delta p}{dt} = -\eta \frac{\partial v}{\partial z} dS \quad (9)$$

Définissons alors la densité volumique de quantité de mouvement  $\mathcal{P}_{\text{vol}}$  à partir de la quantité de mouvement d'une cellule de masse  $\delta m$ , de volume  $\delta\tau$  et de vitesse  $v$  :

$$\delta p = \delta m v \Rightarrow \mathcal{P}_{\text{vol}} = \frac{\delta p}{\delta\tau} = \frac{\delta m}{\delta\tau} v = \mu v \Rightarrow v = \frac{\mathcal{P}_{\text{vol}}}{\mu}$$

Ainsi, si  $\mu \simeq \text{cte}$ , l'équation (9) devient :

$$\frac{\delta p}{dt} = -\frac{\eta}{\mu} \frac{\partial \mathcal{P}_{\text{vol}}}{\partial z} dS$$

Or, en remarquant que :

$$\vec{\text{grad}} \mathcal{P}_{\text{vol}} \cdot d\vec{S} = \left( \frac{\partial \mathcal{P}_{\text{vol}}}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \mathcal{P}_{\text{vol}}}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \mathcal{P}_{\text{vol}}}{\partial z} \vec{e}_z \right) \cdot (dS \vec{e}_z) = \frac{\partial \mathcal{P}_{\text{vol}}}{\partial z} dS$$

on obtient finalement :

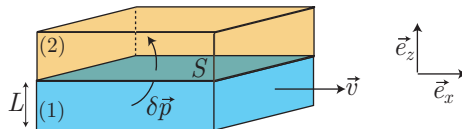
$$\frac{\delta p}{dt} = \left( -\frac{\eta}{\mu} \vec{\text{grad}} \mathcal{P}_{\text{vol}} \right) \cdot d\vec{S} \quad (10)$$

En outre, la diffusion des particules est déterminée par l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\delta N}{dt} &= \vec{j} \cdot d\vec{S} \text{ où } \vec{j} = -D \vec{\text{grad}} C \text{ (loi de Fick)} \\ \Rightarrow \frac{\delta N}{dt} &= \left( -D \vec{\text{grad}} C \right) \cdot d\vec{S} \text{ (où } C = \frac{\delta N}{\delta\tau} \end{aligned}$$

L'analogie avec l'équation (10) confirme bien que l'équation (8) traduit la diffusion de la quantité de mouvement ; il s'agit du terme caractéristique du régime laminaire.

Considérons une cellule fluide dont une surface  $S$  est traversée par une quantité de mouvement  $\delta p$  pendant la durée  $dt = \tau_d$  que dure le phénomène de diffusion.



L'équation (9) indique alors que :

$$\frac{\delta p}{\tau_d} = -\eta \frac{\partial v}{\partial z} S$$

Admettons alors, pour simplifier, que la vitesse  $v$  décroît linéairement avec  $z$ , de sorte que :

$$\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{V}{L} \Rightarrow \frac{\delta p}{\tau_d} = \frac{\eta S V}{L} \Rightarrow \tau_d = \delta p \times \frac{L}{\eta S V} \quad (11)$$

## c– Transfert de quantité de mouvement par convection

Désormais, on considère que pendant une durée  $dt = \tau_c$ , la même quantité de mouvement est transférée à travers  $S$  par convection, c'est-à-dire qu'une masse  $\delta m$  traverse  $S$  :

$$\frac{\delta p}{dt} = \frac{\delta m}{dt} V \Rightarrow \frac{\delta p}{\tau_c} = D_m V$$

où  $D_m = \frac{\delta m}{dt} = \mu S V$  est le débit massique à travers  $S$ . Il s'ensuit que :

$$\frac{\delta p}{\tau_c} = \mu S V^2 \Rightarrow \tau_c = \frac{\delta p}{\mu S V^2} \quad (12)$$

## d– Nombre de Reynolds



### DÉFINITION

Le nombre de Reynolds est le rapport des temps caractéristiques diffusion et de convection :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\tau_d}{\tau_c}$$

Compte tenu de cette définition, on peut distinguer deux régimes :

- Si  $\mathcal{R}_e$  est grand,  $\tau_d \gg \tau_c$  indique que la diffusion est beaucoup plus lente que la convection, qui semble alors être la seule en œuvre ; le régime est turbulent.
- Si  $\mathcal{R}_e$  est petit,  $\tau_d \ll \tau_c$  montre que la convection est beaucoup plus lente que la diffusion, qui semble être la seule à se produire ; le régime est laminaire.

En conclusion, il faut retenir que :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_e > 2000 \leftrightarrow \text{régime turbulent} \\ \mathcal{R}_e < 2000 \leftrightarrow \text{régime laminaire} \end{cases}$$

Par exemple, comparons les écoulements de l'huile dans une bouteille et de l'eau dans une rivière, avec les ordres de grandeurs suivants :

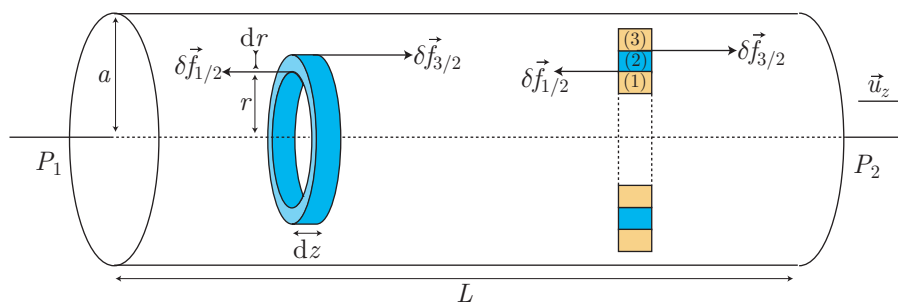
	huile	eau
$\mu$	$10^3 \text{ kg.m}^{-3}$	$10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
$L$	0,1 m	10 m
$V$	$10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
$\eta$	1 Pl	$10^{-3}$ Pl
$\mathcal{R}_e$	1	$10^7$

Ces valeurs indiquent que dans l'eau apparaissent des turbulences que l'on n'observe pas dans l'huile.

## 4– Écoulement dans une conduite cylindrique

### a– Champ des vitesses

On s'intéresse à l'écoulement laminaire d'un fluide dans une canalisation cylindrique, de rayon  $a$  et de longueur  $L$ . À l'entrée et à la sortie de la canalisation, la pression vaut respectivement  $P_1$  et  $P_2$  et on cherche la perte de charge  $\Delta P = P_1 - P_2$ , c'est-à-dire la chute de pression dans la canalisation. Pour cela, isolons un petit élément fluide  $\mathcal{E}$  ayant la forme d'un anneau de rayon  $r$ , d'épaisseur  $dr$  et de longueur  $dz$  :



On se place en régime stationnaire pour lequel cet élément n'est pas accéléré, ce qui impose une composante nulle des forces qui s'exercent sur  $\mathcal{E}$ . Or, ces forces sont :

- les forces de pression  $\delta \vec{F}_p$ , dont la densité volumique vaut  $-\overrightarrow{\text{grad}} p$  :

$$\delta \vec{F}_p = -\overrightarrow{\text{grad}} p \delta \tau \text{ où } \delta \tau = 2\pi r dr dz$$

– les forces de viscosité : conformément à l'expression (8),  $\mathcal{E}$  est soumis à une force :

$$\delta \vec{f}_{1/2} = -\eta S_{1/2} \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_r \vec{u}_z \text{ où } S_{1/2} = 2\pi r \, dz$$

de la part de la cellule de fluide située à l'intérieur de  $\mathcal{E}$  et exerce une force :

$$\delta \vec{f}_{2/3} = -\eta S_{2/3} \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r+dr} \vec{u}_z \text{ où } S_{2/3} = 2\pi (r + dr) \, dz$$

sur la cellule (3) juste située à l'extérieur.

En remarquant que la loi des actions réciproques impose  $\delta \vec{f}_{2/3} = -\delta \vec{f}_{3/2}$  (force que la cellule 3 exerce sur  $\mathcal{E}$ ), l'élément  $\mathcal{E}$  est soumis à une résultante de viscosité :

$$\delta \vec{F}_{\text{visc}} = \delta \vec{f}_{1/2} + \delta \vec{f}_{3/2} = -2\pi\eta \, dz \, \vec{u}_z \left[ r \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_r - (r + dr) \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r+dr} \right] = -2\pi\eta \, dz \, \vec{u}_z [\psi(r) - \psi(r + dr)]$$

si l'on définit la fonction :

$$\begin{aligned} \psi(r) = r \left. \frac{\partial v}{\partial r} \right|_r &\Rightarrow \psi(r + dr) \simeq \psi(r) + dr \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &\Rightarrow \psi(r) - \psi(r + dr) \simeq -\frac{\partial \psi}{\partial r} dr = -\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) dr \end{aligned}$$

on obtient finalement :

$$\delta \vec{F}_{\text{visc}} = 2\pi\eta \, dz \, dr \, \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

Par conséquent :

$$\vec{0} = \delta \vec{F}_p + \delta \vec{F}_{\text{visc}} = - \left( \frac{\partial p}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{u}_z \right) 2\pi r \, dr \, dz + 2\pi\eta \, dz \, dr \, \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right)$$

La projection de cette équation selon  $\vec{u}_x$  ou  $\vec{u}_y$  fournit :  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$ , ce qui montre que  $p$  ne dépend que de  $z$ .

Quant à la projection de l'équation selon  $\vec{u}_z$ , elle fournit :

$$-\frac{dp}{dz} 2\pi r \, dr \, dz + 2\pi\eta \, dz \, dr \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dp(z)}{dz} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right)$$

Si on admet que  $v$  ne dépend que de  $r$ , le membre de droite de cette équation ne dépend également que de  $r$  tandis que son membre de gauche ne dépend que de  $z$ . Par conséquent :

$$\frac{dp}{dz} = K = \text{cte} \Rightarrow \int_{P_1}^{P_2} dp = K \int_0^L dz \Rightarrow P_2 - P_1 = -\Delta P = KL \Rightarrow K = -\frac{\Delta P}{L}$$

et :

$$\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = K = -\frac{\Delta P}{L} \Rightarrow \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = -\frac{\Delta P}{\eta L} r \Rightarrow r \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r^2 + A$$

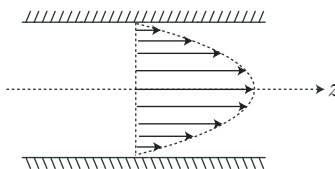
où  $A$  est une constante facilement identifiable en choisissant  $r = 0$  :

$$A = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r \Rightarrow v = -\frac{\Delta P}{4\eta L} r^2 + B$$

où  $B$  est une constante qui doit s'adapter à la condition d'adhérence du fluide aux parois du cylindre en  $r = a$  :

$$v(r = a) = 0 \Rightarrow B = \frac{\Delta P}{4\eta L} a^2 \Rightarrow v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (a^2 - r^2) \quad (13)$$

Cette expression permet donc de décrire le champ de vitesse dans la conduite :

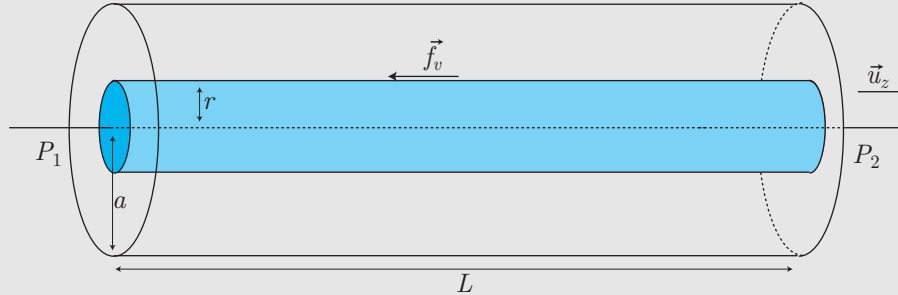


On remarque que c'est en  $r = 0$  que  $v$  prend sa valeur maximale :

$$v_{\max} = \frac{\Delta P a^2}{4\eta L} \Rightarrow v(r) = v_{\max} \times \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

### EXERCICE

On isole maintenant, dans le fluide, un cylindre  $\mathcal{C}$  de longueur  $L$ , de rayon  $r$  :



1. Exprimer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur  $\mathcal{C}$ , en fonction de  $\Delta P = P_1 - P_2$ ,  $r$  et  $\vec{u}_z$ .
2. Le fluide entourant  $\mathcal{C}$  exerce sur  $\mathcal{C}$  une force de viscosité  $\vec{F}_{1/2}$ ; l'exprimer en fonction de  $\eta$ ,  $r$ ,  $\frac{dv}{dr}$ ,  $L$  et  $\vec{u}_z$ .
3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $v(r)$ , en régime stationnaire.
4. Résoudre cette équation et trouver l'expression de  $v(r)$ .

### Corrigé

1. Le cylindre est soumis à des forces de pression :
  - sur sa face de gauche :  $\vec{F}_{p1} = P_1 S \vec{u}_z$  où  $S = \pi r^2$
  - sur sa face de droite :  $\vec{F}_{p2} = -P_2 S \vec{u}_z$
  - sur sa face latérale :  $\vec{F}_{p\ell} = \vec{0}$  à cause de la symétrie de révolution du cylindre dont la résultante vaut alors :

$$\vec{F}_p = (P_1 - P_2) S \vec{u}_z = \Delta P \times \pi r^2 \vec{u}_z$$

2. Compte tenu de la relation (8) de la page 11, le cylindre exerce sur le fluide (adhérent à sa surface latérale  $S_\ell = 2\pi r L$ ), une force de viscosité :

$$\vec{F}_{1/2} = -\eta S_\ell \frac{\partial v}{\partial r} \vec{u}_z$$

et est donc soumis à la force :

$$\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2} = 2\pi L r \eta \frac{dv}{dr} \vec{u}_z$$

3. En régime stationnaire  $\mathcal{C}$  n'accélère pas, ce qui signifie aussi que :

$$\vec{0} = \vec{F}_p + \vec{F}_{2/1} = \Delta P \pi r^2 \vec{u}_z + 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \vec{u}_z \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{2\eta L} r$$

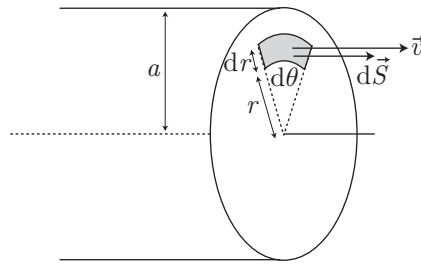
4. En remarquant que  $v = 0$  en  $r = a$ , cette équation s'intègre aisément :

$$\int_0^v dv = -\frac{\Delta P}{2\eta L} \int_a^r r dr \Rightarrow v = -\frac{\Delta P}{4\eta L} \times (r^2 - a^2)$$

On remarque que cette expression est totalement compatible avec le résultat (13).

### b– Débit et vitesse débitante

Soit  $(\Sigma)$  une section droite du cylindre et  $d\vec{S} = r dr d\theta \vec{u}_z$  une surface élémentaire sur  $(\Sigma)$  :



Le débit volumique à travers  $(\Sigma)$  est défini par :

$$\begin{aligned}
 Q_v &= \iint_{(\Sigma)} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^a \frac{\Delta P}{4\eta L} (a^2 - r^2) \times r \, dr \, d\theta \\
 &= \frac{\Delta P}{4\eta L} \times 2\pi \int_{r=0}^a (a^2 r - r^3) \, dr = \frac{\Delta P}{4\eta L} \times 2\pi \left[ a^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\Delta P}{4\eta L} \times 2\pi \times \frac{a^4}{4} \\
 &\Rightarrow \boxed{Q_v = \frac{\Delta P}{8\eta L} \times \pi a^4}
 \end{aligned}$$

Cette expression, aussi connue comme *loi de Hagen-Poiseuille*, peut s'exprimer en fonction de la section  $S = \pi a^2$  de la conduite :

$$\boxed{Q_v = \frac{S^2}{8\pi\eta L} \Delta P} \quad (14)$$



#### DÉFINITION

La vitesse débitante  $\bar{v}$  est la vitesse uniforme sur  $(\Sigma)$  que devrait avoir le fluide pour présenter le débit  $Q_v$  :

$$\boxed{Q_v = S \bar{v}}$$

#### REMARQUE

Compte tenu de la définition de  $Q_v$ ,  $\bar{v}$  apparaît aussi comme une vitesse moyenne sur  $(\Sigma)$  :

$$\iint_{(\Sigma)} \vec{v} \cdot d\vec{S} = S \bar{v} \Rightarrow \boxed{\bar{v} = \frac{1}{S} \iint_{(\Sigma)} \vec{v} \cdot d\vec{S}}$$

Dans le cas de la conduite cylindrique, la vitesse débitante vaut :

$$\bar{v} = \frac{1}{S} Q_v = \frac{1}{\pi a^2} \times \frac{\Delta P}{8\eta L} \pi a^4 \Rightarrow \boxed{\bar{v} = \frac{\Delta P a^2}{8\eta L} = \frac{v_{\max}}{2}}$$

### c- Résistance hydraulique

La loi de Poiseuille (14) montre que  $\Delta P = P_1 - P_2$  est proportionnel au débit volumique  $Q_v$  :

$$P_1 - P_2 = \frac{8\pi\eta L}{S^2} Q_v$$



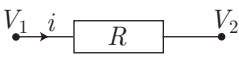
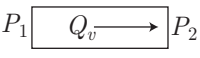
#### DÉFINITION

La résistance hydraulique est le coefficient de proportionnalité entre la perte de charge  $\Delta P$  et le débit volumique :

$$\boxed{\Delta P = R_h \times Q_v}$$

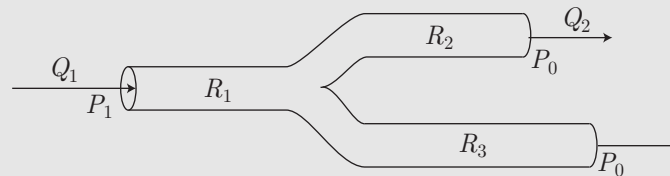


Cette définition traduit l'analogie avec l'électrocinétique :

Électrocinétique	Hydrodynamique
	
$V_1 - V_2 = Ri$	$P_1 - P_2 = R_h Q_v$
$R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S}$	$R_h = 8\pi\eta \frac{L}{S^2}$

### EXERCICE

Une canalisation  $\mathcal{C}_1$  cylindrique, de résistance hydraulique  $R_1$ , est alimentée par un fluide de débit volumique  $Q_1$ , sous la pression  $P_1$ . Elle se scinde en deux canalisations  $\mathcal{C}_2$ ,  $\mathcal{C}_3$ , de résistances hydrauliques respectives  $R_2$ ,  $R_3$ , à la sortie desquelles règne la même pression  $P_0$ .



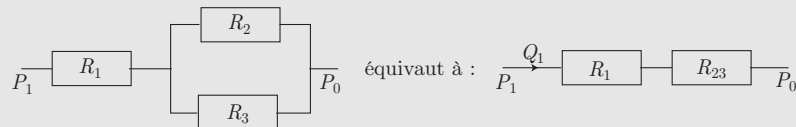
Déterminer le débit volumique  $Q_2$  qui sort de  $\mathcal{C}_2$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $P_0$ ,  $P_1$ .

### Corrigé

Utilisons l'analogie avec l'électrocinétique afin de définir par  $R_{23}$  la résistance hydraulique équivalente aux résistances  $R_2$  et  $R_3$  en parallèle :

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}$$

Ainsi, le dispositif proposé est-il analogue au circuit ci-dessous :



Les résistances  $R_1$  et  $R_{23}$  équivalent alors à une seule résistance  $R = R_1 + R_{23}$  soumise à une différence de pression  $\Delta P = P_1 - P_0$  et traversée par un débit  $Q_1$ . Par conséquent :

$$P_1 - P_0 = R Q_1 \Rightarrow Q_1 = \frac{\Delta P}{R} = \frac{\Delta P}{R_1 + R_{23}} \quad (15)$$

Notons enfin  $P_{23}$  la pression du fluide au niveau de l'embranchement des conduites. Par définition, les débits volumiques  $Q_2$  et  $Q_3$  à travers  $R_2$  et  $R_3$  vérifient :

$$\begin{cases} P_{23} - P_0 = R_2 Q_2 \\ P_{23} - P_0 = R_3 Q_3 \end{cases} \Rightarrow R_2 Q_2 = R_3 Q_3 \Rightarrow Q_3 = \frac{R_2}{R_3} Q_2$$

$$\Rightarrow Q_1 = Q_2 + Q_3 = Q_2 \left( 1 + \frac{R_2}{R_3} \right) \Rightarrow Q_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} Q_1$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la relation (15) :

$$Q_2 = \frac{R_3}{R_2 + R_3} \times \frac{\Delta P}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \Rightarrow Q_2 = \frac{R_3 \times (P_1 - P_0)}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$$

### d- Perte de charge et nombre de Reynolds

La loi de Poiseuille (14) :  $Q_v = \frac{S^2}{8\pi\eta} \frac{\Delta P}{L}$  montre que la grandeur  $\frac{\Delta P}{L}$  joue un rôle dans l'écoulement du fluide. Or,  $\Delta P$  a les dimensions d'une densité volumique d'énergie ( $PV = nRT \Rightarrow [P] = \frac{[nRT]}{[V]} = \text{J.m}^{-3}$ ) tandis

que  $L$  a les dimensions d'une longueur.

De même, si  $\mu$  désigne la masse volumique du fluide, de vitesse débitante  $\bar{v}$ ,  $\frac{1}{2} \mu \bar{v}^2$  a les dimensions d'une densité volumique d'énergie, tandis que le diamètre  $D$  de la conduite a les dimensions d'une longueur.

Par conséquent,  $\frac{\Delta P}{L}$  et  $\frac{1}{2} \frac{\mu \bar{v}^2}{L}$  ont les mêmes dimensions.



#### DÉFINITION

Le coefficient de friction  $f$  est un coefficient, sans dimension, traduisant la proportionnalité entre  $\frac{\Delta P}{L}$  et  $\frac{1}{2} \frac{\mu \bar{v}^2}{L}$  :

$$\frac{\Delta P}{L} = f \times \frac{\mu \bar{v}^2}{2D} \quad (16)$$

La perte de charge  $\Delta P$  dépend alors du régime d'écoulement. On distingue les pertes de charge régulières, qui proviennent de la viscosité du fluide (et qui dépendent du régime laminaire ou turbulent) des pertes de charge singulières provoquées par les accidents de canalisation (coudes, rétrécissement, robinet,...).

– **Écoulement laminaire** : C'est le régime d'écoulement qui a permis d'établir la loi de Poiseuille (14) :

$$Q_v = \frac{\pi a^4}{8\eta L} \Delta P \Rightarrow \frac{\Delta P}{L} = \frac{8\eta}{\pi a^4} Q_v = \frac{8\eta}{\pi a^4} \times S\bar{v} = \frac{8\eta\bar{v}}{a^2} \text{ car } S = \pi a^2$$

De même, puisque  $D = 2a$  :

$$f = \frac{\Delta P/L}{\mu \bar{v}^2 / 2D} = \frac{8\eta\bar{v}}{a^2} \times \frac{2D}{\mu \bar{v}^2} = \frac{8\eta\bar{v}}{a^2} \times \frac{4a}{\mu \bar{v}^2} = \frac{32\eta}{\mu a \bar{v}}$$

Enfin, le nombre de Reynolds est défini par :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\mu \bar{v} D}{\eta} \Rightarrow \frac{\mu \bar{v} a}{\eta} = \frac{\mathcal{R}_e}{2} \Rightarrow f = \frac{64}{\mathcal{R}_e} \quad (17)$$

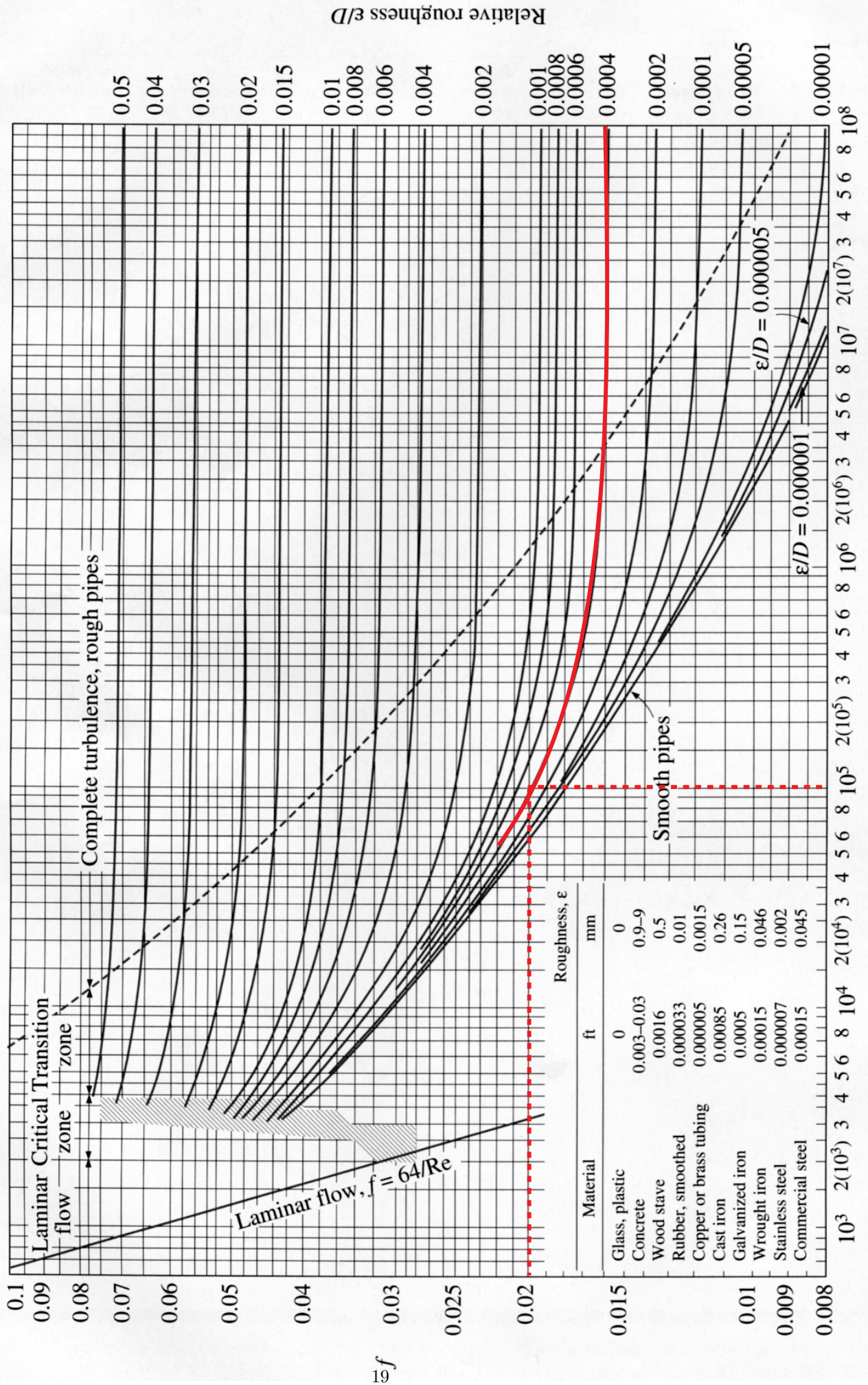
Ce résultat montre que pour un écoulement laminaire, la connaissance du nombre de Reynolds entraîne celle du coefficient de friction et donc celle de la perte de charge  $\Delta P$ .

- **Écoulement turbulent** : Ce régime est caractérisé par le diagramme de MOODY (cf. page suivante). Dans ce diagramme, le coefficient  $f$  peut être évalué de la manière suivante :
- ▷ Déterminer la rugosité  $\varepsilon$  de la canalisation (fonction du matériau constitutif et évaluer la rugosité relative définie par  $\frac{\varepsilon}{D}$ ).
  - ▷ Repérer, à droite du diagramme, la courbe qui correspond à cette valeur et la suivre jusqu'au nombre de Reynolds (en abscisses) qui correspond à l'écoulement.
  - ▷ Projeter alors le point de la courbe sur l'axe vertical de gauche et y lire directement la valeur numérique de  $f$ .

#### REMARQUE

On remarquera, sur ce diagramme, que pour une valeur  $\mathcal{R}_e \lesssim 2000$ , la représentation graphique de  $\ln f$  en fonction de  $\ln \mathcal{R}_e$  est une droite décroissante, ce qui est en accord avec la loi (17) :

$$f = \frac{64}{\mathcal{R}_e} \Rightarrow \ln f = \ln 64 - \ln \mathcal{R}_e$$



Reynolds number Re

FIGURE A-27

EXERCICE 

On s'intéresse à une canalisation cylindrique de diamètre  $D = 10$  cm, de rugosité  $\varepsilon = 0,04$  mm, dans laquelle s'écoule de l'eau ( $\mu = 10^3$  kg.m<sup>-3</sup> et  $\eta = 10^{-3}$  Pl) avec une vitesse moyenne  $\bar{v} = 1$  m · s<sup>-1</sup>.

1. Évaluer la rugosité relative et le nombre de Reynolds correspondant à cet écoulement.
2. À l'aide du diagramme de MOODY, donner une estimation de  $f$ .
3. En amont de la canalisation, la pression vaut le double de la pression atmosphérique :  $P_e = 2P_0 = 2 \cdot 10^5$  Pa. Évaluer la perte de charge dans la canalisation, en fonction des longueurs suivantes :  $L = 100$  m et  $L = 1$  km. Conclure dans chaque cas.

## Corrigé

1. En utilisant les unités internationales, la rugosité relative vaut :

$$\frac{\varepsilon}{D} = \frac{0,04 \cdot 10^{-3}}{0,1} = 4 \cdot 10^{-4} = 0,0004$$

et le nombre de Reynolds vaut :

$$\mathcal{R}_e = \frac{\mu \bar{v} D}{\eta} = \frac{10^3 \times 1 \times 0,1}{10^{-3}} = 10^5$$

2. En reportant sur le diagramme de MOODY ces coordonnées, on trouve un point dont l'ordonnée de gauche vaut :

$$f = 0,02$$

3. Ainsi, la perte de charge régulière vaut :

$$\Delta P = f \times \frac{L}{D} \times \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 = 0,02 \times \frac{L}{0,1} \times \frac{10^3 \times 1^2}{2} \Rightarrow \Delta P = L \times 100$$

Puisque la pression en entrée de canalisation vaut  $P_e = 2P_0$  alors elle prend une valeur  $P_s$  en sortie, telle que :

$$\Delta P = P_e - P_s \Rightarrow P_s = P_e - \Delta P = 2 \cdot 10^5 - \Delta P$$

Donc :

- ▷ Si  $L = 100$  m,  $\Delta P = 10^4$  Pa  $\Rightarrow P_s = 2 \cdot 10^5 - 10^4 = 1,9 \cdot 10^5$  Pa. Puisque  $P_s > P_0$ , l'eau peut sortir de la canalisation à grand débit.
- ▷ Si  $L = 1000$  m,  $\Delta P = 2 \cdot 10^5 - 10^5 = 10^5$  Pa =  $P_0$ . Puisque  $P_s = P_0$ , l'eau peut sortir de la canalisation mais avec un débit très faible.

- **Les pertes singulières**, provenant des «accidents» sur la conduite, ne dépendent plus directement des dimensions  $L$  et  $D$ . On définit alors un coefficient  $f$  tel que :

$$\Delta P = f \times \frac{1}{2} \mu \bar{v}^2 \quad (18)$$

où  $f$  dépend de la nature de l'accident. Par exemple :

▷ lors d'un rétrécissement de la conduite d'une section  $S$  à une section  $s < S$  :  $f = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{S}\right)$

▷ lors d'un évasement de la conduite d'une section  $s$  à une section  $S > s$  :  $f = \left(1 - \frac{s}{S}\right)^2$

## e– Loi de similitude

Considérons une cellule fluide de masse  $m$  et de vitesse  $v$ , qui reçoit pendant  $dt$  une quantité de mouvement  $\delta p_{\text{diff}}$  par diffusion et  $\delta p_{\text{conv}}$  par convection. La variation de sa quantité de mouvement  $m \frac{dv}{dt}$  vaut alors :

$$m \frac{dv}{dt} = \left(\frac{\delta p}{dt}\right)_{\text{diff}} + \left(\frac{\delta p}{dt}\right)_{\text{conv}} \quad (19)$$

Nous cherchons désormais à exprimer cette équation à l'aide de grandeurs adimensionnées ( $\nu$  pour la vitesse,  $\tau$  pour le temps,  $\xi$  pour les distances). C'est pourquoi, en définissant par  $V_0$  une unité de vitesse,  $T_0$  une unité de temps,  $L_0$  une unité de longueur, on peut poser :

$$v = V_0 \times \nu \quad t = T_0 \times \tau \quad z = L_0 \times \xi \quad T_0 = \frac{L_0}{V_0} \quad S = L_0^2$$

À l'aide de ces grandeurs, chaque terme de l'équation (19) peut s'exprimer à l'aide de ses dimensions :

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= \mu L_0^3 \times \frac{V_0}{T_0} \frac{d\nu}{d\tau} = \mu L_0^3 \times \frac{V_0}{L_0/V_0} \frac{d\nu}{d\tau} = \mu L_0^2 V_0^2 \frac{d\nu}{d\tau} \\ \left( \frac{\delta p}{dt} \right)_{\text{diff}} &= \eta S \times \frac{\partial v}{\partial z} = \eta L_0^2 \times \frac{V_0}{L_0} \frac{\partial \nu}{\partial \xi} = \eta L_0 V_0 \frac{\partial \nu}{\partial \xi} \\ \left( \frac{\delta p}{dt} \right)_{\text{conv}} &= \frac{\delta m v}{dt} = D_m \times v = \mu S v \times v = \mu L_0^2 V_0 \nu \times V_0 \nu = \mu L_0^2 V_0^2 \nu^2 \end{aligned}$$

Ce faisant, l'équation (19) devient :

$$\begin{aligned} \mu L_0^2 V_0^2 \frac{d\nu}{d\tau} &= \eta L_0 V_0 \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \mu L_0^2 V_0^2 \nu^2 \Rightarrow \frac{d\nu}{d\tau} = \frac{\eta}{\mu V_0 L_0} \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \nu^2 \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{d\nu}{d\tau} = \frac{1}{\mathcal{R}_e} \frac{\partial \nu}{\partial \xi} + \nu^2} \end{aligned}$$

Cette équation adimensionnée ne dépend que de  $\mathcal{R}_e$  et ses solutions mathématiques ne dépendent que de  $\mathcal{R}_e$  ; d'où la loi de similitude :

Les écoulements autour de deux objets de même nombre de Reynolds sont similaires.

Cette loi est utilisée, en pratique, dans les souffleries. Par exemple, si l'on souhaite étudier l'aérodynamisme d'un véhicule de taille caractéristique  $L_0$ , soumis à un vent de vitesse relative  $v_0 = 100$  km/h, il est possible d'utiliser en soufflerie une maquette (par exemple au  $1/10^e$ , c'est-à-dire de taille caractéristique  $L_1 = \frac{L_0}{10}$ ), soumise à un vent de vitesse relative  $v_1$ . Les deux écoulements seront analogues si les deux nombres de Reynolds  $\mathcal{R}_0 = \frac{\mu v_0 L_0}{\eta}$  et  $\mathcal{R}_1 = \frac{\mu v_1 L_1}{\eta}$  sont égaux, c'est-à-dire :

$$v_1 L_1 = v_0 L_0 \Rightarrow v_1 \frac{L_0}{10} = v_0 L_0 \Rightarrow v_1 = 10 v_0 = 1\,000 \text{ km/h}$$

Cet exemple montre que l'échelle de la maquette ne peut être choisie trop petite, ce qui impose des souffleries de taille considérable, notamment en aéronautique.

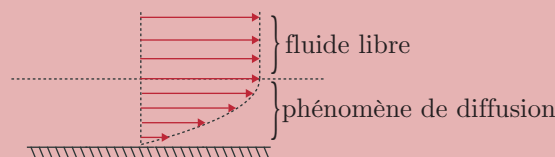
## 5– Écoulement autour d'un obstacle

### a– Couche limite



#### DÉFINITION

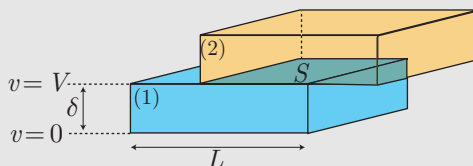
Loin d'un obstacle immobile, le fluide s'écoule de manière laminaire tandis qu'à proximité de l'obstacle, la vitesse du fluide s'annule. Il existe donc une zone de transition dans laquelle s'opèrent des phénomènes de diffusion, entre le fluide immobile et le fluide « libre » :



C'est cette zone de transition que l'on désigne par couche limite.

EXERCICE 

Considérons que la couche limite est une zone, d'épaisseur  $\delta$ , qui sépare le fluide de vitesse nulle ( $v = 0$ ) au contact d'un obstacle immobile, du fluide « libre » de vitesse  $v = V$ . Au delà de la couche limite, la cellule de fluide (2) se déplace librement à la vitesse  $V$ . Soit  $S$  la surface de contact entre les deux cellules :



1. On suppose que sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  la vitesse de la cellule (2) varie linéairement de 0 à  $V$ . En déduire l'expression de  $\frac{\partial v}{\partial t}$  en fonction de  $V$  et  $T$ .
2. Pendant la même durée, on suppose que la cellule (2) se déplace d'une longueur  $L$ . En déduire que :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{V^2}{L}$$

3. La diffusion de la quantité de mouvement dans la couche limite est décrite par la loi fondamentale de la dynamique, où s'exerce la force de viscosité :  $m \frac{\partial v}{\partial t} = \eta S \frac{\partial v}{\partial z}$ . En supposant à nouveau que  $v$  varie linéairement de 0 à  $V$  sur l'intervalle  $z \in [0, \delta]$ , montrer que  $m \frac{\partial v}{\partial t} = \eta S \frac{V}{\delta}$ .
4. En exprimant  $m$  en fonction de la masse volumique  $\mu$  du fluide, en déduire une expression de  $\delta$  en fonction de  $L$ ,  $\eta$ ,  $\mu$  et  $V$ .

## Corrigé

1. Puisque  $v(z, t)$  varie linéairement en fonction de  $t$ , il existe des coefficients  $a$  et  $b$  indépendants de  $t$  (mais pas nécessairement de  $z$ ) tels que :  $v = at + b$ . Or,  $v(t = 0) = 0$  impose  $b = 0$ , tandis que :

$$v(t = T) = V \Rightarrow V = aT \Rightarrow a = \frac{V}{T} \Rightarrow v = \frac{V}{T} t \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{V}{T}}$$

2. Pendant le temps  $T$ , la cellule se déplace d'une distance  $L$  avec une vitesse moyenne  $V = \frac{L}{T} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{V}{L}$ . Donc le résultat précédent devient :

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{V^2}{L}} \quad (20)$$

3. À nouveau, en supposant que  $v$  varie linéairement de 0 à  $V$  pour  $z \in [0, \delta]$ , on admet l'existence de coefficients  $c$  et  $d$  tels que :  $v = cz + d$ . Or,  $v(z = 0, t) = 0$  impose  $d = 0$  et :

$$v(z = \delta) = V \Rightarrow V = c\delta \Rightarrow c = \frac{V}{\delta} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{V}{\delta}$$

Par conséquent, la loi de la dynamique devient :

$$\boxed{m \frac{\partial v}{\partial t} = \eta S \frac{V}{\delta}}$$

4. Puisque  $m = \mu S \delta$ , l'équation précédente associée à l'équation (20) fournit :

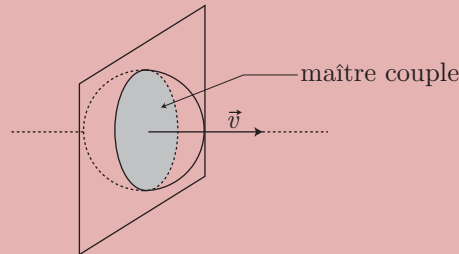
$$\mu S \delta \times \frac{V^2}{L} = \eta S \frac{V}{\delta} \Rightarrow \delta^2 = \frac{\eta L}{\mu V} \Rightarrow \boxed{\delta = \sqrt{\frac{\eta L}{\mu V}}}$$

## b– Force de traînée



## DÉFINITION

On appelle maître-couple d'un objet  $\mathcal{O}$  l'aire de la surface du projeté de  $\mathcal{O}$  sur un plan perpendiculaire à la vitesse relative  $\vec{v}$  du fluide qui arrive sur  $\mathcal{O}$ .



Par exemple, le maître-couple d'une sphère de rayon  $R$  vaut  $S = \pi R^2$ .

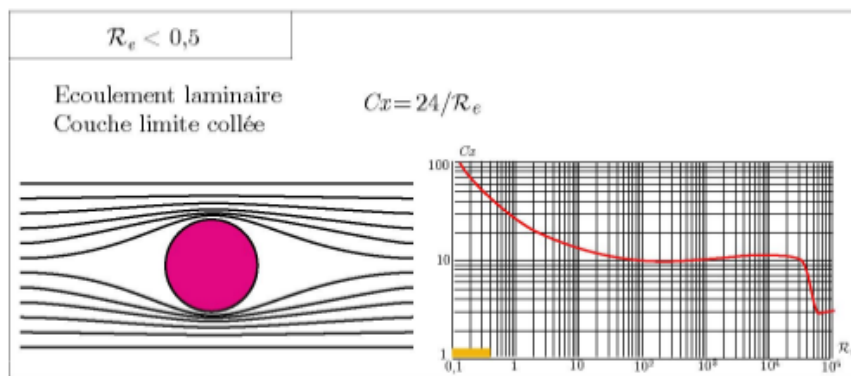
Sous l'influence d'un fluide de vitesse relative  $\vec{v}$ , un objet  $\mathcal{O}$  est soumis à une force, appelée *traînée*, dirigée dans la même direction et le même sens que  $\vec{v}$ , et de norme :

$$T_x = \frac{1}{2} \mu S v^2 \times C_x$$

- $\mu$  est la masse volumique du fluide ;
- $S$  est le maître-couple de  $\mathcal{O}$  ;
- $C_x$  est un coefficient sans dimension, appelé *coefficient de traînée*.

Le coefficient  $C_x$  dépend du nombre de Reynolds. Par exemple, autour d'un objet  $\mathcal{O}$  sphérique :

1. **Pour les faibles valeurs de  $\mathcal{R}_e$**  (typiquement  $\mathcal{R}_e \leq 0,5$ ) : l'écoulement est laminaire, la couche limite reste collée à l'objet et  $C_x \simeq \frac{24}{\mathcal{R}_e}$  (car la courbe  $\ln C_x = f(\ln \mathcal{R}_e)$  est décroissante de pente  $-1$ ) :



## EXERCICE

Montrer que, dans ce cas, la force de traînée est proportionnelle à  $v$  et exprimer le coefficient de proportionnalité en fonction de  $\eta$  et  $R$ .

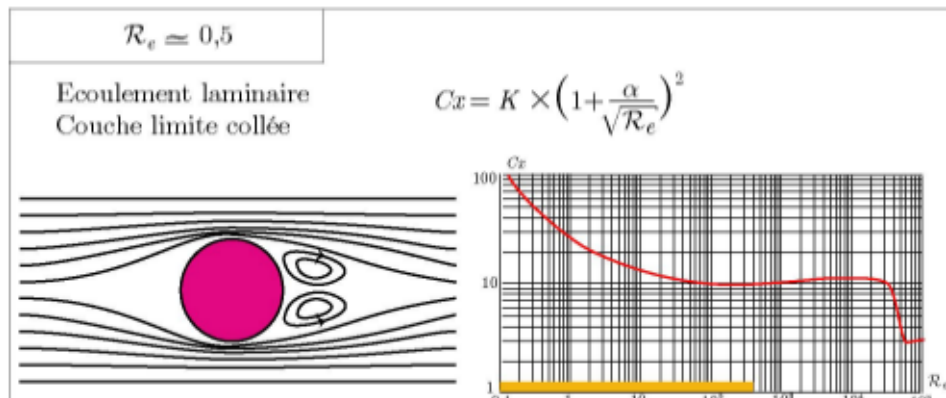
## Corrigé

La force de traînée vaut :  $T_x = C_x \times \frac{1}{2} \mu S v^2 = \frac{24}{\mathcal{R}_e} \times \frac{1}{2} \mu S v^2 = \frac{12}{\mathcal{R}_e} \times \mu \pi R^2 v^2$  où :

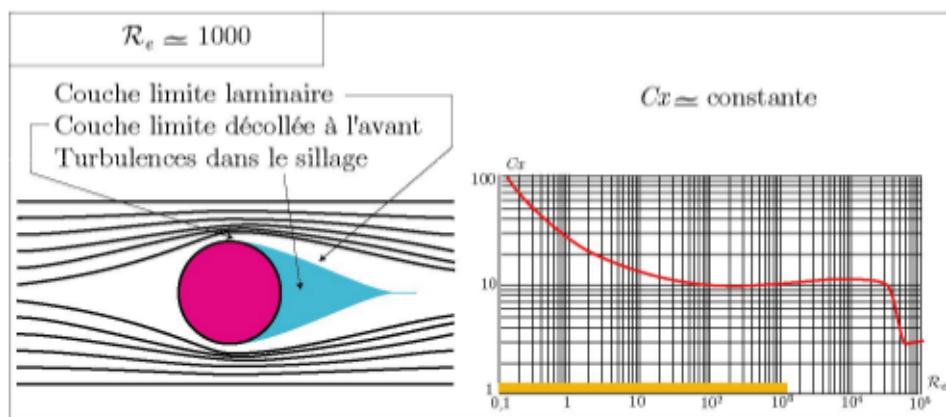
$$\mathcal{R}_e = \frac{\mu v \times 2R}{\eta} \Rightarrow T_x = 12 \times \frac{\eta}{2\mu v R} \times \mu \pi R^2 v^2 \Rightarrow T_x = 6\pi \eta R \times v$$

Cette loi constitue la loi de Stokes qui stipule que pour les faibles nombres de Reynolds, le frottement fluide est proportionnel à  $v$ , avec un coefficient de proportionnalité qui vaut  $6\pi\eta R$  dans le cas d'une sphère.

2. Pour les valeurs intermédiaires de  $\mathcal{R}_e$ ,  $C_x$  est une fonction décroissante de  $\mathcal{R}_e$  :



3. Pour les valeurs de  $\mathcal{R}_e$  voisines de 1000 : l'expérience montre que  $C_x$  demeure sensiblement constant :

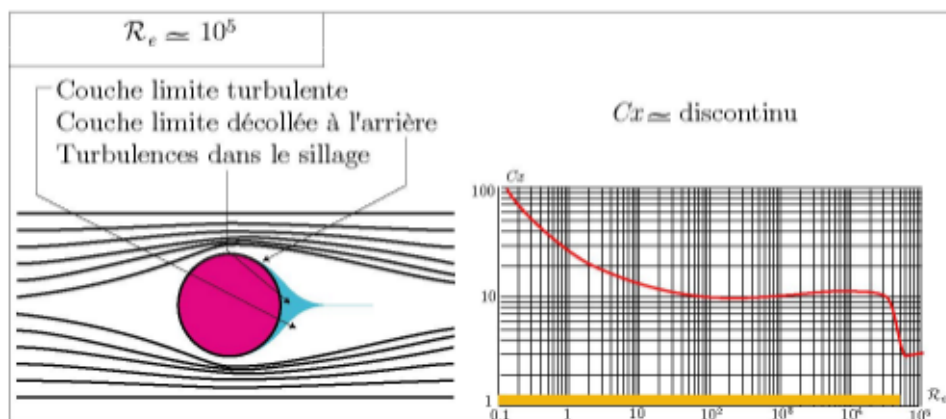


Ainsi :

$$T_x = \frac{1}{2} \mu S v^2 \times C_x = \text{cte} \times v^2$$

C'est pourquoi on peut lire que pour des vitesses assez grandes (donc des valeurs de  $\mathcal{R}_e$  appréciables), la force de frottement fluide devient proportionnelle à  $v^2$ .

4. Pour des valeurs de  $C_x$  très grandes, la courbe expérimentale  $C_x = f(\mathcal{R}_e)$  chute brusquement, tandis qu'un sillage se forme par décollement de la couche limite :



Dans ce cas,  $T_x$  diminue brutalement, ce qui signifie que l'objet peut se déplacer sous l'effet de frottements moindres.

Les valeurs de  $\mathcal{R}_e$  pour lesquelles s'observent ces différents régimes dépendent de la nature (laminaire ou turbulente) de l'écoulement, qui peut être déterminée par la nature de la surface de  $\mathcal{O}$  :

- les objets rugueux produisent assez rapidement des turbulences, ce qui permet d'atteindre le cas (4) pour des vitesses assez faibles. C'est ce qui est recherché, par exemple, avec des balles de golf (pourvues d'alvéoles) ou des ballons de football. Avec une vitesse relativement faible, ils peuvent être envoyés très loin (étant soumis à des frottements faibles).



- les objets lisses produisent préférentiellement des écoulements laminaires, de sorte que le cas (4) ne se rencontre pratiquement pas. C'est aussi ce qui est recherché avec des balles de tennis de table ou des ballons de plage : l'existence de frottements considérables les empêche de parcourir de grandes distances.

### c– Exemple : l'aile d'avion

Le fluide, de vitesse relative  $\vec{v}$  par rapport à l'aile, exerce sur celle-ci une force  $\vec{F}$  qui se décompose en :

- une traînée  $\vec{T}_x$  colinéaire à  $\vec{v}$  et dont la norme :

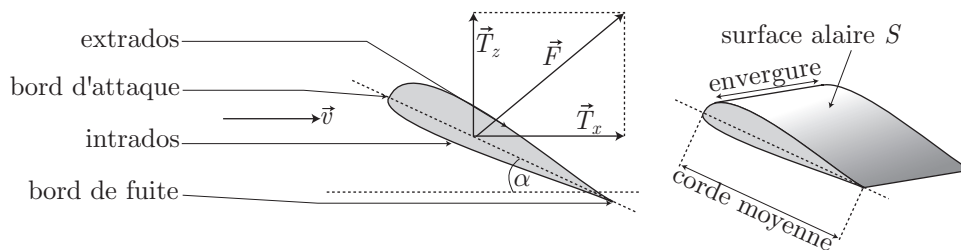
$$T_x = \frac{1}{2} \mu S v^2 \times C_x$$

fait intervenir la surface alaire  $S$ , c'est à dire le produit de la corde moyenne par l'envergure (il ne s'agit pas du maître-couple, trop dépendant des phases du vol).

- une portance  $\vec{T}_z$  perpendiculaire à  $\vec{T}_x$ , dirigée de l'intrados vers l'extrados et de norme :

$$T_z = \frac{1}{2} \mu S v^2 \times C_z$$

ATTENTION :  $\vec{T}_z$  n'est pas nécessairement vertical et dirigé vers le haut : lorsqu'un avion de chasse vole verticalement,  $\vec{T}_z$  est horizontal et lorsque l'avion vole « sur le dos »,  $\vec{T}_z$  est dirigé vers le sol.

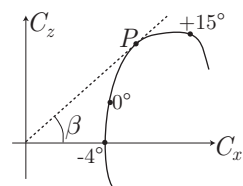


#### DÉFINITION

On appelle polaire de l'aile la courbe qui représente  $C_z$  en fonction de  $C_x$ , laquelle courbe est paramétrée par l'angle d'incidence  $\alpha$ .

On remarque sur cette courbe que :

- pour  $\alpha = 0$ ,  $C_z \neq 0$  (l'avion peut décoller) et  $C_x \neq 0$  (il existe des frottements) ;
- pour  $\alpha \simeq -4^\circ$ ,  $C_z = 0$  : l'avion ne peut pas décoller mais les frottements subsistent ( $C_x \neq 0$ ) ;
- pour  $\alpha \gtrsim 15^\circ$ ,  $C_z$  chute brusquement, ce qui annule rapidement la portance ; c'est le décrochage (l'air ne « porte » plus l'avion).



#### DÉFINITION

La finesse  $f$  d'une aile est le rapport des coefficients de portance et de traînée :

$$f = \frac{C_z}{C_x}$$

Pour chaque point  $P$  de la polaire, il existe un segment de droite ( $\Delta$ ) passant par  $O$  et par  $P$  qui fait avec l'axe des abscisses un angle  $\beta$  tel que :

$$\tan \beta = \frac{C_z}{C_x} = f$$

Ainsi, la finesse maximale se trouve-t-elle au point  $P$  pour lequel ( $\Delta$ ) est tangent à la polaire. Cette finesse donne une estimation de la distance  $D$  que peut parcourir un avion lorsqu'il plane à partir d'une hauteur  $H$  :

$$D = f \times H$$

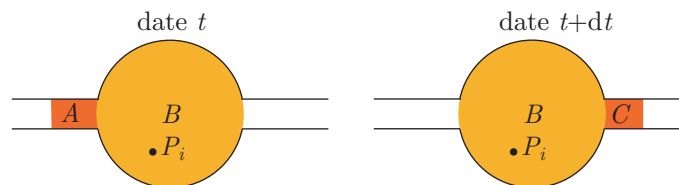
## B2 Bilans macroscopiques

### 1– Généralités



#### DÉFINITION

Un système fermé est un système qui contient, au cours du temps, les mêmes constituants. Par exemple, dans le schéma ci-dessous, à la date  $t$  le système fermé est composé des molécules contenues dans  $A$  et  $B$ , tandis qu'à la date  $t + dt$ , ces mêmes molécules se retrouvent dans les parties  $B$  et  $C$ .



#### DÉFINITION

Un système ouvert est un système qui ne conserve pas les mêmes constituants au cours du temps. Par exemple, dans le schéma ci-dessus, la partie  $B$  est un système ouvert : toutes les molécules qui s'y trouvent à la date  $t$  ne s'y retrouvent pas à la date  $t + dt$ .

Soit une grandeur physique  $\psi$ , scalaire ou vectorielle (par exemple l'énergie, la quantité de mouvement, la masse...) véhiculée en même temps que le fluide en mouvement. On note :

- $\psi_A = \delta\psi_e$  la grandeur  $\psi$  en  $A$  qui est aussi celle qui entre dans le système ouvert ( $B$ , en rouge) pendant  $dt$  ;
- $\psi_B = \psi_{\text{ouvert}}$  la grandeur  $\psi$  en  $B$  qui est aussi celle contenue dans le système ouvert ;
- $\psi_C = \delta\psi_s$  la grandeur  $\psi$  en  $C$  qui est aussi celle qui sort du système ouvert pendant  $dt$ .

À la date  $t$ , le système fermé est composé de  $A$  et  $B$  et contient donc la grandeur :

$$\psi_{\text{fermé}}(t) = \psi_A + \psi_B = \delta\psi_e + \psi_{\text{ouvert}}(t)$$

alors qu'à la date  $t + dt$ , il contient :

$$\psi_{\text{fermé}}(t + dt) = \psi_B + \psi_C = \psi_{\text{ouvert}}(t + dt) + \delta\psi_s$$

Donc, pendant  $dt$ ,  $\psi_{\text{fermé}}$  et  $\psi_{\text{ouvert}}$  varient de :

$$\begin{cases} d\psi_{\text{fermé}} = \psi_{\text{fermé}}(t + dt) - \psi_{\text{fermé}}(t) \\ d\psi_{\text{ouvert}} = \psi_{\text{ouvert}}(t + dt) - \psi_{\text{ouvert}}(t) \end{cases} \Rightarrow d\psi_{\text{fermé}} = d\psi_{\text{ouvert}} + \delta\psi_s - \delta\psi_e$$

ce qui s'écrit aussi :

$$d\psi_{\text{ouvert}} = d\psi_{\text{fermé}} + \delta\psi_e - \delta\psi_s \text{ ou encore } \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\text{ouvert}} = \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\text{fermé}} + \left(\frac{\delta\psi_e}{dt} - \frac{\delta\psi_s}{dt}\right) \quad (21)$$

Dans cette équation, on rencontre deux termes remarquables :

- $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\text{fermé}}$  se remplace souvent par des lois physiques fondamentales :
  - ▷ loi fondamentale de la dynamique (si  $\psi$  est la quantité de mouvement) ;
  - ▷ théorème du moment cinétique (si  $\psi$  est un moment cinétique) ;
  - ▷ premier principe de la thermodynamique (si  $\psi$  désigne une énergie) ;
  - ▷ deuxième principe de la thermodynamique (si  $\psi$  désigne une entropie).

- le terme  $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\text{ouvert}}$ , nul dans le cas d'un régime stationnaire. En effet, soit  $\psi(P_i, t)$  la grandeur  $\psi$  en chaque point  $P_i$  du système ouvert. Par définition :

$$\begin{cases} \psi_{\text{ouvert}}(t) = \sum_i \psi(P_i, t) \\ \psi_{\text{ouvert}}(t + dt) = \sum_i \psi(P_i, t + dt) \end{cases} \Rightarrow d\psi_{\text{ouvert}} = \sum_i [\psi(P_i, t + dt) - \psi(P_i, t)] = \sum_i \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{P_i, t} dt = 0$$

car, en régime stationnaire,  $\frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{P_i, t} = 0$ . On peut donc retenir que :

$$\boxed{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\text{ouvert}} = 0 \text{ en régime stationnaire}}$$

- Les forces de pression sont habituellement prises en compte dans le terme  $\left(\frac{d\psi}{dt}\right)_{\text{fermé}}$ . Considérons, par exemple, une surface fermée ( $\Sigma$ ), de volume ( $\mathcal{V}$ ), soumise à une pression extérieure  $p_{\text{ext}} = P_0$  uniforme. En notant  $d\vec{S}$  chaque vecteur surface élémentaire dirigé vers l'extérieur de ( $\mathcal{V}$ ), la force de pression qui s'exerce sur ( $\Sigma$ ) vaut :

$$\delta \vec{F}_p = -p_{\text{ext}} d\vec{S} = -P_0 d\vec{S} \Rightarrow \vec{F}_p = -\oint_{\Sigma} P_0 d\vec{S} = -P_0 \oint_{\Sigma} d\vec{S}$$

Notons alors  $\vec{I} = \oint_{\Sigma} d\vec{S}$  le vecteur dont les composantes vérifient :

$$\vec{I} = I_x \vec{e}_x + I_y \vec{e}_y + I_z \vec{e}_z = \sum_{\alpha=1}^3 I_{\alpha} \vec{e}_{\alpha}$$

où les vecteurs  $\vec{e}_{\alpha}$  de la base cartésienne sont indépendants de l'espace (donc  $\text{div}(\vec{e}_{\alpha}) = 0$ ). Par conséquent, le théorème d'Ostrogradski conduit à :

$$I_{\alpha} = \vec{I} \cdot \vec{e}_{\alpha} = \vec{e}_{\alpha} \cdot \oint_{\Sigma} d\vec{S} = \oint_{\Sigma} \vec{e}_{\alpha} \cdot d\vec{S} = \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\vec{e}_{\alpha}) d\tau = 0 \Rightarrow \vec{I} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_p = -P_0 \vec{I} = \vec{0}$$

On peut donc retenir que :

$$\boxed{\vec{F}_p = -\oint_{\Sigma} P_0 d\vec{S} = \vec{0} \text{ (pour une pression uniforme)}}$$

## 2– Bilan mécanique

### a– Bilan de quantité de mouvement

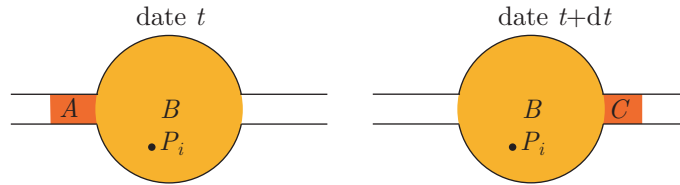
Développons cette étude autour du cas d'un aéronef en adoptant les conventions suivantes :

- L'aéronef, de masse  $m(t)$ , est modélisé par un système ouvert  $B$  (*cf.* page suivante) et se déplace par rapport au référentiel terrestre (supposé galiléen) à une vitesse  $\vec{v} = \vec{v}_{B/T}$ .
- Pendant  $dt$ , une masse  $\delta m_e$  de gaz (de l'air), modélisée par  $A$ , entre dans les réacteurs, avec une vitesse  $\vec{v}_{A/T}$  par rapport au référentiel terrestre. Or, si on note  $\vec{v}_{A/B} = \vec{v}_e$  la vitesse d'admission de l'air (dans le référentiel de l'aéronef), la loi de composition des vitesses impose :

$$\vec{v}_{A/T} = \vec{v}_{A/B} + \vec{v}_{B/T} = \vec{v}_e + \vec{v}$$

- Pendant  $dt$ , une masse  $\delta m_s$  de gaz (mélange de combustion, modélisée par  $C$ ) sort des réacteurs, avec une vitesse  $\vec{v}_{C/T}$  par rapport au référentiel terrestre. Or, en notant  $\vec{v}_{C/B} = \vec{v}_s$  la vitesse d'éjection des gaz (dans le référentiel de l'aéronef), il vient :

$$\vec{v}_{C/T} = \vec{v}_{C/B} + \vec{v}_{B/T} = \vec{v}_s + \vec{v}$$



Un premier bilan de masse peut être réalisé, qui s'écrit, selon l'équation (21) :

$$(dm)_{\text{ouvert}} = (dm)_{\text{fermé}} + \delta m_e - \delta m_s \Rightarrow dm = \delta m_e - \delta m_s \quad (22)$$

car, par définition,  $(dm)_{\text{fermé}} = 0$  (un système fermé n'échange pas de matière).

Enfin, un bilan de quantité de mouvement peut être conduit de la même manière :

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\text{ouvert}} = \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\text{fermé}} + \left(\frac{\delta\vec{p}_e}{dt} - \frac{\delta\vec{p}_s}{dt}\right)$$

où :

- d'après la loi fondamentale de la dynamique, l'aéronef subit des forces extérieures  $\vec{F}_{\text{ext}}$  (poids, frottements,...) qui vérifient :

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\text{fermé}} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

- la quantité de mouvement de l'aéronef  $\vec{p}_{\text{ouvert}} = m_B \vec{v}_{B/T} = m(t) \vec{v}(t)$  admet pour dérivée :

$$\left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\text{ouvert}} = \frac{dm}{dt} \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de l'équation (22), qui introduit les débits massiques :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\delta m_e}{dt} - \frac{\delta m_s}{dt} = D_{me} - D_{ms} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{p}}{dt}\right)_{\text{ouvert}} = (D_{me} - D_{ms}) \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- les quantités de mouvement qui entrent et qui sortent de l'aéronef valent :

$$\begin{cases} \delta\vec{p}_e = \delta m_e \vec{v}_{A/T} \\ \delta\vec{p}_s = \delta m_s \vec{v}_{C/T} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\delta\vec{p}_e}{dt} = \frac{\delta m_e}{dt} \vec{v}_{A/T} = D_{me} \times (\vec{v}_e + \vec{v}) \\ \frac{\delta\vec{p}_s}{dt} = \frac{\delta m_s}{dt} \vec{v}_{C/T} = D_{ms} \times (\vec{v}_s + \vec{v}) \end{cases}$$

Il s'ensuit que :

$$(D_{me} - D_{ms}) \vec{v} + m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + D_{me} (\vec{v}_e + \vec{v}) - D_{ms} (\vec{v}_s + \vec{v})$$

soit encore :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} + (D_{me} \vec{v}_e - D_{ms} \vec{v}_s) = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{poussée}} \quad (23)$$

ce qui permet de définir la force de poussée qui s'exerce sur l'aéronef.

#### EXERCICE

On s'intéresse au vol d'un avion à réaction en admettant les hypothèses suivantes :

- La vitesse de l'avion vaut  $\vec{v} = v \vec{u}_x$  et celle d'éjection des gaz vaut  $\vec{v}_z = -v_z \vec{u}_x$ .
- L'atmosphère est stable et immobile, ce qui se traduit par :  $\vec{v}_e = -\vec{v} = -v \vec{u}_x$ .
- L'avion est soumis à une pression atmosphérique  $P_0$  uniforme.
- Le vol est stationnaire.

1. Quelles sont les conséquences des deux dernières hypothèses ?
2. On suppose également que  $D_{ms} \simeq D_{me} = D_m$ . En déduire que la portance et la traînée vérifient :

$$T_z = mg \text{ et } T_x = D_m \times (v_s - v)$$

Conclusion ?



## Corrigé

1. Si l'avion est soumis à une pression uniforme  $P_0$ , la force de pression qui s'y exerce vaut :

$$\vec{F}_p = \iint P_0 d\vec{S} = P_0 \iint d\vec{S} = \vec{0}$$

Donc, la résultante des forces extérieures vaut :

$$\vec{F}_{\text{ext}} = -mg \vec{u}_z + T_z \vec{u}_z - T_x \vec{u}_x$$

En outre, si le vol est stationnaire :  $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ .

2. Étant donné que  $D_{me} = D_{ms} = D_m$  et en tenant compte de la relation :  $\vec{v}_e = -\vec{v} = -v \vec{u}_x$ , l'équation (23) devient :

$$\vec{0} = \vec{F}_{\text{ext}} + D_m (\vec{v}_e - \vec{v}_s) = -mg \vec{u}_z + T_z \vec{u}_z - T_x \vec{u}_x + D_m (-v + v_s) \vec{u}_x$$

La projection de cette équation selon  $\vec{u}_z$  fournit :

$$mg = T_z$$

et selon  $\vec{u}_x$  :

$$-T_x + D_m (v_s - v) = 0 \Rightarrow T_x = D_m \times (v_s - v)$$

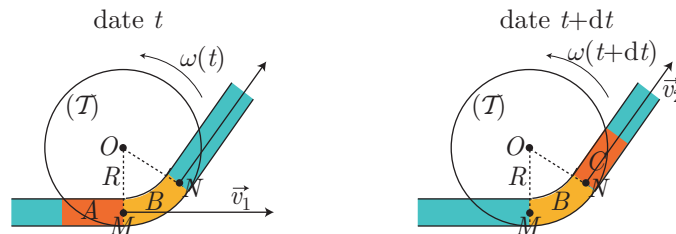
Puisque la traînée ne peut être que positive :

$$T_x \geq 0 \Rightarrow v \leq v_s$$

ce qui montre que la vitesse  $v$  de l'avion ne peut excéder la vitesse d'éjection des gaz.

## b– Bilan de moment cinétique

Ce bilan est particulièrement adapté aux turbines, c'est pourquoi il sera développé autour de l'exemple d'une turbine modélisée par une roue de centre  $O$ , de rayon  $R$ , pouvant tourner autour d'un axe  $(O, \vec{u}_z)$  perpendiculaire au plan de la feuille :



Pendant le temps  $dt$  :

- une masse  $\delta m$  (partie A) entre en M avec une vitesse  $\vec{v}_1$  et donc avec un moment cinétique :

$$\delta \vec{L}_e = \overrightarrow{OM} \wedge \delta m \vec{v}_1 = \delta m \times R v_1 \vec{u}_z$$

- une masse  $\delta m$  (partie C) sort par N avec une vitesse  $\vec{v}_2$  et donc avec un moment cinétique :

$$\delta \vec{L}_s = \overrightarrow{ON} \wedge \delta m \vec{v}_2 = \delta m \times R v_2 \vec{u}_z$$

- Le moment cinétique  $L_B = J\omega \vec{u}_z$  du système ouvert composé de la turbine et du fluide situé dans la partie B varie de la quantité :

$$\left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{ouvert}} = \frac{d\vec{L}_B}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} \vec{u}_z$$

car le moment d'inertie  $J$  demeure constant (pendant  $dt$ , la configuration du système ouvert demeure constante).

- Le moment cinétique du système fermé (turbine + A + B à la date  $t$  et turbine + B + C à la date  $t + dt$ ) varie sous l'influence des moments extérieurs  $\vec{M}_{\text{ext}} = \mathcal{M}_{\text{ext}} \vec{u}_z$  conformément au théorème du moment cinétique :

$$\left( \frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{\text{fermé}} = \vec{M}_{\text{ext}}$$

L'équation (21) devient alors :

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{ouvert}} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{fermé}} + \left(\frac{\delta\vec{L}_e}{dt} - \frac{\delta\vec{L}_s}{dt}\right) \Rightarrow \boxed{J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{\text{ext}} + D_m R \times (v_1 - v_2)}$$

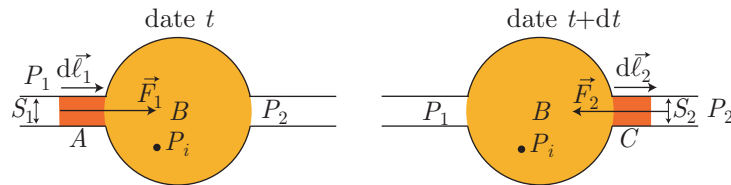
Cette équation décrit ainsi le comportement mécanique de la turbine.

### 3– Bilans thermodynamiques

#### a– Bilan d'énergie (premier principe de la thermodynamique)

Considérons un système ouvert ( $B$ ) qui, pendant  $dt$  :

- reçoit une masse  $\delta m_A = \delta m_e$  (en  $A$ ) d'un fluide en mouvement, qui effectue un déplacement  $d\vec{\ell}_1$  dans une conduite de section  $S_1$ , sous l'influence d'une pression extérieure  $P_1$  ; on note  $\delta U_1$  son énergie interne.
- perd une masse  $\delta m_C = \delta m_s$  (en  $C$ ) avec le fluide en mouvement qui effectue un déplacement  $d\vec{\ell}_2$  dans une conduite de section  $S_2$ , sous l'influence d'une pression extérieure  $P_2$  ; on note  $\delta U_2$  son énergie interne.
- reçoit également de l'extérieur une puissance  $\mathcal{P}_u$  (dite *puissance utile*, par exemple d'une pompe...) et une énergie thermique  $\delta Q$  de puissance  $\mathcal{P}_{th} = \frac{\delta Q}{dt}$ .



En notant  $\delta W_p$  le travail des forces de pression qui s'exercent sur un système fermé,  $dU$  la variation de son énergie interne,  $\delta W_c = -dE_p$  le travail des forces conservatives qui s'identifie à la variation de l'énergie potentielle  $E_p$  et  $\delta W_{nc}$  le travail des forces non conservatives (qui inclut  $\delta W_u$  et le travail des éventuels frottements), le premier principe de la thermodynamique stipule que :

$$\begin{aligned} dU + dE_c &= \delta W_{\text{tot}} + \delta Q = \delta W_p + \delta W_c + \delta W_{nc} + \delta Q = \delta W_p - dE_p + \delta W_{nc} + \delta Q \\ \Rightarrow dU + dE_c + dE_p &= \delta W_p + \delta W_{nc} + \delta Q \end{aligned}$$

Il existe donc une grandeur  $\mathcal{E}$  telle que :

$$\boxed{\mathcal{E} = U + E_c + E_p \Rightarrow d\mathcal{E} = \delta W_p + \delta W_{nc} + \delta Q} \quad (24)$$

Enfin, nous supposons le régime stationnaire atteint. Ce faisant :

- Chaque point  $P_i$  du système ouvert  $B$  présente une énergie interne  $U_i$  constante (si la température est stationnaire), une énergie cinétique  $E_{c_i}$  et une énergie potentielle  $E_{p_i}$  constantes également. Donc, la grandeur  $\mathcal{E}_B$  associée à  $B$  est aussi constante :

$$\mathcal{E}_B = \sum_i (U_i + E_{c_i} + E_{p_i}) \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_B}{dt} = \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\text{ouvert}} = 0$$

- Conformément à la loi (24), la grandeur  $\mathcal{E}$  associée au système fermé (composé des parties  $A$  et  $B$  à la date  $t$ , puis de  $B$  et  $C$  à la date  $t + dt$ ) vérifie :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\text{fermé}} = \frac{\delta W_p}{dt} + \frac{\delta W_u}{dt} + \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta W_p}{dt} + \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th}$$

où  $\mathcal{P}_u$  et  $\mathcal{P}_{th}$  désignent respectivement les puissances utile et thermique reçues par le système fermé. Quant aux travaux des forces de pression, ils sont définis par :

$$\begin{cases} \delta W_{p_1} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{\ell}_1 = F_1 d\ell_1 = P_1 \times S_1 d\ell_1 = P_1 \delta V_1 = \delta(P_1 V_1) \\ \delta W_{p_2} = \vec{F}_2 \cdot d\vec{\ell}_2 = -F_2 d\ell_2 = -P_2 \times S_2 d\ell_2 = -P_2 \delta V_2 = -\delta(P_2 V_2) \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\text{fermé}} = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th} + \frac{\delta(P_1 V_1)}{dt} - \frac{\delta(P_2 V_2)}{dt}$$

- Pendant  $dt$ , il rentre dans le système ouvert la grandeur :  $\delta\mathcal{E}_e = \delta E_{c_1} + \delta E_{p_1} + \delta U_1$  et il en sort la grandeur  $\delta\mathcal{E}_s = \delta E_{c_2} + \delta E_{p_2} + \delta U_2$  associées aux parties  $A$  et  $C$  respectivement.

Le bilan (21) de la page 26 se traduit alors par :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\text{ouvert}} &= \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{\text{fermé}} + \left(\frac{\delta\mathcal{E}_e}{dt} - \frac{\delta\mathcal{E}_s}{dt}\right) \\ \Rightarrow 0 &= \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th} + \frac{\delta(P_1V_1)}{dt} - \frac{\delta(P_2V_2)}{dt} + \frac{(\delta E_{c_1} + \delta E_{p_1} + \delta U_1)}{dt} - \frac{(\delta E_{c_2} + \delta E_{p_2} + \delta U_2)}{dt} \\ \Rightarrow \frac{1}{dt} [\delta E_{c_2} + \delta E_{p_2} + \delta(U_2 + P_2V_2)] &- \frac{d}{dt} [\delta E_{c_1} + \delta E_{p_1} + \delta(U_1 + P_1V_1)] = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th} \end{aligned}$$

où l'on reconnaît les enthalpies de  $A$  et de  $C$  :

$$\delta H_1 = \delta(U_1 + P_1V_1) \text{ et } \delta H_2 = \delta(U_2 + P_2V_2)$$

En outre, on introduit l'énergie cinétique massique  $e_c$ , l'énergie potentielle massique  $e_p$  et l'enthalpie massique  $h$  à partir de la masse  $\delta m$  qui transite dans le dispositif :

$$\delta E_c = \delta m \times e_c \quad \delta E_p = \delta m \times e_p \quad \delta H = \delta m \times h$$

On obtient ainsi :

$$\frac{\delta m_s}{dt} (e_{c_2} + e_{p_2} + h_2) - \frac{\delta m_e}{dt} (e_{c_1} + e_{p_1} + h_1) = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{th} \quad (25)$$

D'une part on admettra le fluide incompressible de manière à identifier les débits massiques entrant et sortant :

$$D_{m_e} = D_{m_s} \Rightarrow \frac{\delta m_e}{dt} = \frac{\delta m_s}{dt} = \frac{\delta m}{dt} = D_m$$

et d'autre part on introduit la puissance utile massique  $w_u$  et la chaleur massique  $q$  par :

$$\mathcal{P}_u = \frac{\delta m w_u}{dt} = D_m \times w_u \text{ et } \mathcal{P}_{th} = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta m q}{dt} = D_m \times q$$

Ainsi, l'équation (25) devient :

$$(e_{c_2} + e_{p_2} + h_2) - (e_{c_1} + e_{p_1} + h_1) = w_u + q \Leftrightarrow \Delta(e_c + e_p + h) = w_u + q \quad (26)$$

### EXERCICE

On considère une tuyère horizontale constituée d'une canalisation calorifugée de section constante, qui conduit les gaz de combustion vers l'extérieur d'un aéronef :

- à gauche, les gaz qui entrent dans la tuyère sont portés à une température  $T_1$  (sortie du réacteur) avec une vitesse  $v_1$ .
- à droite, les gaz ressortent de la tuyère à une température  $T_2 < T_1$  avec une vitesse  $v_2 \gg v_1$ .



1. Exprimer les énergies cinétiques massiques  $e_{c_1}$  et  $e_{c_2}$  à l'entrée et à la sortie de la tuyère, en fonction de  $v_1$  et  $v_2$ .
2. Faire de même avec les énergies potentielles de pesanteur massiques. Quelle est la conséquence de l'horizontalité de la tuyère ?
3. Une masse  $\delta m$  de gaz, supposé parfait, passe de la température  $T_1$  à la température  $T_2$ .
  - a- Exprimer, en fonction de la masse molaire  $M$  du gaz, de son coefficient  $\gamma$  et de la constante des gaz parfaits, la capacité thermique massique  $c_p$  du gaz, à pression constante.
  - b- Exprimer la variation d'enthalpie  $\Delta H$  et en déduire que  $h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$ .
4. Le gaz est assimilé à de l'air. En supposant que  $v_1$  est négligeable devant  $v_2$ , évaluer la différence de température  $\Delta T = T_1 - T_2$  qu'il faut imposer pour produire une vitesse  $v_2 = 1\,000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Données :

- Masse molaire de l'air :  $M = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$
- Rapport des capacités thermiques de l'air :  $\gamma = 1,4$
- Constante molaire des gaz parfaits :  $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$

## Corrigé

1. Une masse  $\delta m$  possède une énergie cinétique  $\delta E_c = \frac{1}{2} \delta m v^2$  et donc une énergie cinétique massique :

$$e_c = \frac{\delta E_c}{\delta m} = \frac{1}{2} v^2 \Rightarrow e_{c1} = \frac{1}{2} v_2^2 \text{ et } e_{c2} = \frac{1}{2} v_1^2$$

2. Cette masse, située à une hauteur  $z$  par rapport à l'origine des énergies potentielles, possède alors une énergie potentielle de pesanteur  $\delta E_p = \delta m g z$  à laquelle est associée une énergie massique :

$$e_p = \frac{\delta E_p}{\delta m} = g z \Rightarrow e_{p2} = g z_2 \text{ et } e_{p1} = g z_1$$

Puisque la tuyère est horizontale, il s'ensuit que  $e_{p1} = e_{p2}$ .

- 3.a- La capacité thermique à pression constante  $C_p$  dépend de la quantité de matière  $\delta n$  du gaz parfait :

$$C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \delta n = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \frac{\delta m}{M} \Rightarrow c_p = \frac{C_p}{\delta m} = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)}$$

- b- Lorsque la température d'une masse  $\delta m$  de gaz varie de  $T_1$  à  $T_2$ , son enthalpie varie également de la quantité :

$$\Delta H = C_p \times (T_2 - T_1) \Rightarrow \delta m \Delta h = \delta m c_p \times (T_2 - T_1) \Rightarrow h_2 - h_1 = c_p \times (T_2 - T_1)$$

4. L'équation (26) s'écrit ici :

$$\Delta(e_c + e_p + h) = w_u + q \Rightarrow (e_{c2} + e_{p2} + h_2) - (e_{c1} + e_{p1} + h_1) = 0$$

car  $q = 0$  (la conduite est calorifugée) et  $w_u = 0$  (il n'y a pas de travail autre que celui des forces de pression).  
Ainsi :

$$e_{c2} - e_{c1} + h_2 - h_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = c_p (T_1 - T_2) = c_p \Delta T$$

c'est-à-dire, en négligeant  $v_1$  par rapport à  $v_2$  :

$$\frac{1}{2} v_2^2 \simeq c_p \Delta T = \frac{\gamma R}{M(\gamma - 1)} \Delta T \Rightarrow \Delta T \simeq \frac{M(\gamma - 1)}{2\gamma R} v_2^2 \Rightarrow \Delta T \simeq \frac{29.10^{-3} \times 0,4}{2 \times 1,4 \times 8,31} \times (1000)^2 \Rightarrow \Delta T \simeq 500\text{K}$$

## b- Bilan d'entropie

Considérons un échange d'entropie dans un fluide en écoulement, pour lequel l'équation (21) devient :

$$(dS)_{\text{ouvert}} = (dS)_{\text{fermé}} + \delta S_e - \delta S_s$$

où :

- le régime étant supposé stationnaire pour le système ouvert :  $(dS)_{\text{ouvert}} = 0$ .
- le deuxième principe de la thermodynamique s'applique au système fermé :

$$(dS)_{\text{fermé}} = \delta S_{\text{éch}} + \delta S_{\text{cr}} = \delta m \times (s_{\text{éch}} + s_{\text{cr}})$$

les grandeurs  $s_{\text{éch}}$  et  $s_{\text{cr}}$  désignant respectivement l'entropie massique échangée par voie thermique et l'entropie massique créée dans le système fermé.

- pendant  $dt$ , il rentre dans le système ouvert les entropies :

$$\delta S_e - \delta S_s = \delta m (s_1 - s_2) = -\delta m \times \Delta s$$

$\Delta s = s_2 - s_1$  désignant la différence d'entropies massiques entre l'entrée et la sortie du système ouvert. Il s'ensuit que :

$$0 = \delta m \times (s_{\text{éch}} + s_{\text{cr}}) - \delta m \Delta s \Rightarrow \Delta s = s_2 - s_1 = s_{\text{éch}} + s_{\text{cr}}$$

## c- Relation de Bernoulli





## DÉFINITION

Un écoulement est parfait si :

- les lignes de courant glissent les unes sur les autres sans viscosité et sans échanger de chaleur ;
- l'écoulement est isentropique.

Soit un fluide incompressible ( $\mu = \text{cte}$ ), en écoulement parfait ( $q = 0$ ), stationnaire ( $D_m = 0$ ) et qui n'échange pas de travaux utiles ( $w_u = 0$ ). Dans ces conditions, le long d'une ligne de courant l'équation (26) devient :

$$(e_{c_2} + e_{p_2} + h_2) - (e_{c_1} + e_{p_1} + h_1) = w_u + q = 0 \quad (27)$$

où l'on retrouve aux deux extrémités de la ligne de courant :

- l'énergie cinétique massique :  $e_c = \frac{1}{\delta m} E_c = \frac{1}{\delta m} \times \left( \frac{1}{2} \delta m v^2 \right) = v^2$
- l'énergie potentielle massique ; notamment dans le champ de pesanteur :  $e_p = \frac{1}{\delta m} E_p = \frac{1}{\delta m} \times (\delta m g z) = g z$
- l'enthalpie massique, dont la variation est donnée par l'identité thermodynamique :

$$\begin{aligned} dH &= T dS + V dp = \delta Q + V dp = V dp \quad (\text{écoulement adiabatique}) \\ \Rightarrow m dh &= \frac{m}{\mu} dp \Rightarrow dh = \frac{1}{\mu} dp = d \left( \frac{p}{\mu} \right) \quad (\text{fluide incompressible}) \\ \Rightarrow h &= h_0 + \frac{p}{\mu} \quad \text{où } h_0 = \text{cte} \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (27) conduit à la *relation de Bernoulli* :

$$\boxed{\frac{1}{2} v_1^2 + g z_1 + \frac{p_1}{\mu} = \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 + \frac{p_2}{\mu}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\frac{1}{2} \mu v_1^2 + \mu g z_1 + p_1 = \frac{1}{2} \mu v_2^2 + \mu g z_2 + p_2}$$

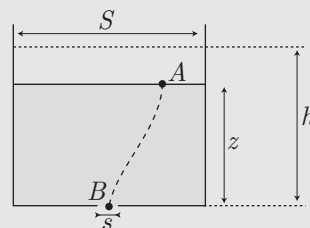
## EXERCICE

Le *clepsydre* est un instrument ancien permettant de mesurer le temps à l'aide de l'eau qui s'écoule.

1. Dans un premier temps, le clepsydre est constitué d'un récipient cylindrique de section constante  $S$  et est percé à sa base par un petit trou de section  $s \ll S$ . Il est initialement rempli, sur une hauteur  $h$ , d'eau considérée comme fluide parfait et incompressible, de masse volumique  $\mu$ .

- a- En appliquant la relation de Bernoulli à une ligne de courant, dont les deux extrémités  $A$  et  $B$  sont à l'air libre (pression atmosphérique  $P_0$ ), montrer que la hauteur  $z(t)$  de l'eau suit l'équation différentielle :

$$\frac{dz}{dt} = -\sqrt{\frac{2gs^2}{S^2 - s^2}} \sqrt{s} \simeq -\sqrt{2g} \frac{s}{S} \sqrt{z} \quad \text{car } s \ll S$$

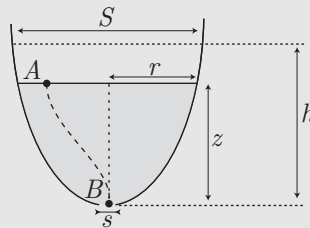


- b- En déduire l'expression de  $z(t)$ .  
Les graduations du clepsydre sont-elles régulièrement espacées ?

2. On peut également réaliser un clepsydre ayant une symétrie de révolution, dont le rayon  $r$  dépend de  $z$  selon une loi exponentielle :  $r = A \times z^n$  ( $A$  et  $n$  sont des constantes).

- a- En remarquant que  $s \ll S$ , montrer que  $z(t)$  suit maintenant l'équation différentielle :

$$\left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \times \left( \frac{\pi r^2}{s} \right)^2 \simeq 2gz$$



- b- On souhaite réaliser un instrument dont les graduations soient régulièrement espacées. Quelle valeur doit-on imposer à  $n$  ?

- c- En sachant que le clepsydre se vide au bout d'un temps  $T$ , montrer que :

$$A = \left( \frac{2gs^2 T^2}{\pi^2 h^2} \right)^{1/4}$$

## Corrigé

- 1.a- Soient  $z_A, v_A$  l'altitude et la vitesse du point  $A$  situé à la surface du liquide et soient  $z_B, v_B$  l'altitude et la vitesse d'écoulement d'eau au point  $B$  de sortie du clepsydre. Puisque la pression qui règne en  $A$  et  $B$  vaut la pression atmosphérique  $P_0$ , la relation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{1}{2} \mu v_A^2 + \mu g z_A + P_0 = \frac{1}{2} \mu v_B^2 + \mu g z_B + P_0 \Rightarrow v_B^2 - v_A^2 = 2g(z_A - z_B) = 2gz$$

Or, l'eau est supposée incompressible, ce qui se traduit par un flux conservatif :

$$v_A S = v_B s \Rightarrow v_B = v_A \frac{S}{s} \Rightarrow v_A^2 \times \left( \frac{S^2}{s^2} - 1 \right) = 2gz \Rightarrow v_A^2 = 2gz \times \frac{s^2}{S^2 - s^2} \quad (28)$$

Enfin, puisque le fluide descend dans le clepsydre :

$$\frac{dz}{dt} = -v_A = -\sqrt{\frac{2gs^2}{S^2 - s^2}} \sqrt{z} \simeq -\sqrt{2g} \frac{s}{S} \sqrt{z} \text{ car } s \ll S$$

- b- De cette équation, il découle que :

$$\int_h^z \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\sqrt{2g} \frac{s}{S} \int_0^t dt \Rightarrow [2\sqrt{z}]_h^z = -\sqrt{2g} \frac{s}{S} t$$

$$\Rightarrow \sqrt{z} - \sqrt{h} = -\sqrt{\frac{g}{2}} \frac{s}{S} t \Rightarrow z(t) = [\sqrt{h} - \alpha t]^2 \text{ où } \alpha = \sqrt{\frac{g}{2}} \frac{s}{S}$$

En outre, ce résultat montre que :

$$\frac{dz}{dt} = -2\alpha(\sqrt{h} - \alpha t) \Rightarrow dz = -2\alpha(\sqrt{h} - \alpha t) \times dt$$

c'est-à-dire que pendant  $dt$  le niveau de l'eau s'abaisse d'une hauteur  $dz$  qui dépend de la date  $t$  de la mesure et pas exclusivement de la durée  $dt$  de l'observation. Donc, les graduations du clepsydre ne sont pas régulièrement espacées.

- 2.a- L'équation (28), toujours valable, peut se simplifier :

$$\frac{S^2}{s^2} - 1 \simeq \frac{S^2}{s^2} = \frac{(\pi r^2)^2}{s^2} \Rightarrow \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \times \left( \frac{\pi r^2}{s} \right)^2 \simeq 2gz$$

- b- En choisissant  $r(z) = A \times z^n$ , l'équation précédente devient :

$$\left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \times \frac{\pi^2 A^4 z^{4n}}{s^2} = 2gz \Rightarrow \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{2s^2 g}{\pi^2 A^4} \times z^{1-4n}$$

Or, si l'on souhaite que les graduations soient régulièrement espacées, il faut imposer que  $\frac{dz}{dt}$  ne dépende

pas de  $z$ , c'est-à-dire  $n = \frac{1}{4}$

- c- Dans les conditions précédentes, on souhaite que la variation  $\Delta z = -h$  de hauteur de fluide se fasse pendant  $\Delta t = T$  :

$$\left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = \text{cte} = \left( \frac{\Delta z}{\Delta t} \right)^2 = \frac{h^2}{T^2} = -\frac{2s^2 g}{\pi^2 A^4} \Rightarrow A = \left( \frac{2s^2 g T^2}{\pi^2 h^2} \right)^{1/4}$$

EXERCICE 

L'objectif de cet exercice est de montrer qu'un écoulement dans un gaz à une vitesse inférieure à celle du son peut être considéré comme incompressible. Pour cela, choisissons deux points  $A$  et  $B$  à la même altitude, où le gaz en écoulement se trouve aux pressions respectives  $P_A$  et  $P_B$ . En  $A$ , l'écoulement se fait avec une vitesse  $v_A \neq 0$  tandis qu'en  $B$  un obstacle empêche l'écoulement ( $v_B = 0$ ).



On admettra que dans un gaz de masse volumique  $\mu$  et de coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_s$ , la célérité du son vaut :

$$c_s = \frac{1}{\sqrt{\chi_s \mu}} \text{ où } \chi_s = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S \text{ par définition}$$

1. La définition du coefficient  $\chi_s$  suppose que  $\mu = \mu(P, S)$ . Écrire  $\mu_B = \mu(P_B, S)$  en fonction de  $\mu_A = \mu(P_A, S)$ , de  $\Delta P = P_B - P_A$  et de  $\chi_s$ . On supposera que  $\Delta P \ll P_A$
2. En admettant vérifiée la relation de Bernoulli entre  $A$  et  $B$ , exprimer  $\Delta P$  en fonction de  $\mu_A$  et  $v_A$ .
3. Le gaz est considéré comme incompressible si  $\frac{\mu_B - \mu_A}{\mu_A} = \frac{\Delta \mu}{\mu_A} \ll 1$ . En déduire que cette hypothèse est vérifiée lorsque  $v_A \ll c_s$ .

### Corrigé

1. Supposons  $\Delta P = P_B - P_A$  assez petit pour justifier le développement limité :

$$\begin{aligned} \mu(P_B, S) &\simeq \mu(P_A, S) + (P_B - P_A) \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{P_A, S} \text{ où } \left( \frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_{P, S} = \mu \chi_s \\ \Rightarrow \mu_B &\simeq \mu_A + \Delta P \times \mu_A \chi_s \Rightarrow \frac{\Delta \mu}{\mu_A} \simeq \Delta P \chi_s \end{aligned} \quad (29)$$

2. Entre  $A$  et  $B$  la loi de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{1}{2} \mu_A v_A^2 + P_A + \mu g z_A = \frac{1}{2} \mu_A v_B^2 + P_B + \mu g z_B \Rightarrow \frac{1}{2} \mu_A v_A^2 + P_A = P_B \text{ car } v_B = 0 \text{ et } z_A = z_B$$

où l'on a admis que  $\mu$  varie peu entre  $A$  et  $B$ . Par conséquent :

$$\Delta P = P_B - P_A = \frac{1}{2} \mu_A v_A^2$$

3. Le résultat précédent permet d'écrire la relation (29) sous la forme :

$$\frac{\Delta \mu}{\mu_A} \simeq \frac{1}{2} v_A^2 \times \mu_A \chi_s = \frac{1}{2} \times \frac{v_A^2}{c_s^2}$$

Or, on peut considérer le fluide comme incompressible si  $\Delta \mu$  est petit devant  $\mu$ , c'est-à-dire :

$$\frac{\Delta \mu}{\mu_A} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{c_s^2} \ll 1 \Rightarrow v_A^2 \ll c_s^2 \Rightarrow v_A \ll c_s$$

### d- Perte de charge et énergie

Lorsque des forces dissipatives s'exercent dans le fluide supposé incompressible, elles se traduisent par un travail massique résistant  $w_d = -|w_d|$  dans l'équation (26) :

$$\begin{aligned} (e_{c_2} + e_{p_2} + h_2) - (e_{c_1} + e_{p_1} + h_1) &= w_u + q + w_d \text{ où } w_u + q = 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{2} v_2^2 + g z_2 + \frac{1}{\rho} (P_2 - P_1) - \frac{1}{2} v_1^2 - g z_1 &= -|w_d| \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2 + P_2 &= \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 + P_1 - |w_d| \end{aligned}$$

Appliquée à une conduite cylindrique horizontale, de section  $S$  constante, cette équation devient :

$$P_2 = P_1 - |w_d| \text{ car } S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_1 = v_2$$

ce qui montre que les pertes de charge  $\Delta P = P_1 - P_2 > 0$  ont pour origine une perte d'énergie. En outre, si  $z_1 = z_2$ , l'équation s'écrit :

$$\frac{1}{2} \rho v_2^2 + P_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + P_1 - |w_d| = \frac{1}{2} \rho v_1^2 + P_1 - \Delta P$$

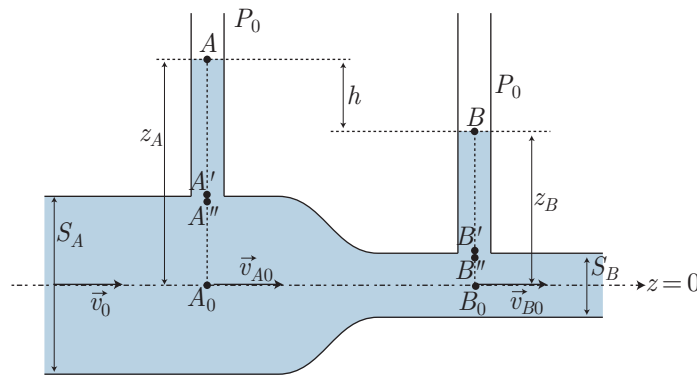
ce qui justifie que la perte de charge singulière soit définie proportionnellement à  $\frac{1}{2} \rho v^2$  :

$$\Delta P = f \times \frac{1}{2} \rho v^2$$

où, comme indiqué en page 20, le coefficient  $f$  dépend de la singularité. Par exemple,  $f = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{S}\right)$  ou  $f = \left(1 - \frac{s}{S}\right)^2$  dans les cas respectifs d'un rétrécissement, d'un évasement...

### e- Débit-mètre

Il s'agit d'un dispositif (schématisé ci-dessous) permettant de calculer le débit d'un fluide en mouvement dans une canalisation, à partir de la mesure de la hauteur  $h$  du fluide entre au moins deux tubes verticaux.



On supposera le fluide parfait, incompressible, homogène, irrotationnel, de sorte que la relation de Bernoulli puisse s'y appliquer. On admettra également qu'en tout point d'une section droite de la canalisation la vitesse est uniforme. Enfin, l'aire de cette section passe de  $S_A$  à  $S_B < S_A$ .

- La relation de Bernoulli s'applique entre les points  $A'$  et  $A_0$ , où  $v_{A''} = V_{A_0} = v_0$  (les deux points appartiennent à la même section droite) et  $z_{A_0} = 0$  (l'axe de la conduite est choisi comme référence des hauteurs) :

$$P_{A_0} + \frac{1}{2} \rho v_{A_0}^2 = P_{A'} + \frac{1}{2} \rho v_{A''}^2 = 0 + \rho g z_{A''} \Rightarrow P_{A_0} = P_{A'} + \rho g z_{A''} \quad (30)$$

- Les points  $A'$  et  $A''$  sont infiniment proches ( $z_{A'} \simeq z_{A''}$ ) et un équilibre des pressions ( $P_{A'} = P_{A''}$ ) assure l'absence de transfert de fluide entre le tube vertical et la canalisation horizontale. Ainsi, l'équation (30) devient :

$$P_{A_0} = P_{A'} + \rho g z_{A'} \quad (31)$$

- Dans le tube vertical, l'immobilité du fluide permet d'y appliquer la loi de la statique des fluides :

$$P_{A'} = P_A + \rho g (z_A - z_{A'}) \Rightarrow P_{A'} + \rho g z_{A'} = P_A + \rho g z_A \text{ car } P_A = P_0$$

Ce faisant, l'équation (31) devient :

$$P_{A_0} = P_0 + \rho g z_A \quad (32)$$

- Le même raisonnement, appliqué aux points  $B, B', B'', B_0$  conduit à une relation analogue :

$$P_{B_0} = P_0 + \rho g z_B \quad (33)$$

- La relation de Bernoulli peut également s'appliquer entre les points  $A_0$  et  $B_0$  :

$$P_{A_0} + \frac{1}{2} \rho v_{A_0}^2 = P_{B_0} + \frac{1}{2} \rho v_{B_0}^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \rho (v_{B_0}^2 - v_{A_0}^2) = P_{A_0} - P_{B_0} = \rho g (z_A - z_B) = \rho g h$$

- Enfin, l'incompressibilité du fluide implique que :

$$S_A v_{A_0} = S_B v_{B_0} \Rightarrow v_{B_0} = \frac{S_A}{S_B} v_{A_0} \Rightarrow \frac{1}{2} v_{A_0} \left( \frac{S_A^2}{S_B^2} - 1 \right) = gh \Rightarrow v_{A_0} = \sqrt{\frac{2ghS_B^2}{S_A^2 - S_B^2}}$$

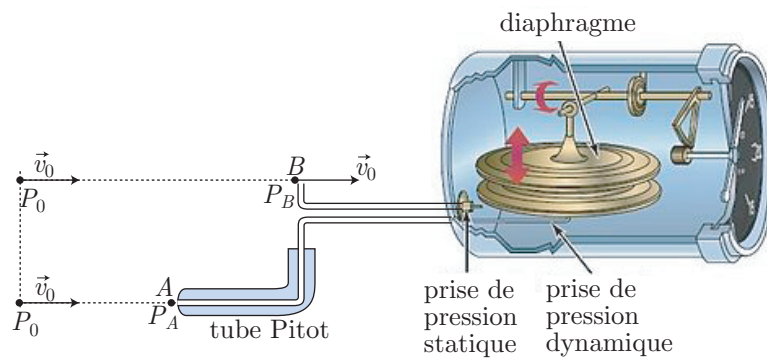
ce qui fournit l'expression du débit volumique comme fonction de  $h$  :

$$Q_v = S_A v_0 = S_A v_{A_0} \Rightarrow Q_v = S_A S_B \sqrt{\frac{2gh}{S_A^2 - S_B^2}}$$

### f– Tube Pitot

Le tube Pitot est un dispositif qui permet d'évaluer la vitesse d'un avion par rapport à l'air ambiant. Il contient :

- une prise d'air dynamique, matérialisée par un trou ( $A$ ) dirigé dans le sens du déplacement de l'avion. La pression de l'air y vaut  $P_A$  tandis que la vitesse de l'air vaut  $v_A = 0$  (en régime stationnaire, le tube arrête l'air).
- une prise statique matérialisée par un trou ( $B$ ) dirigé perpendiculairement à l'écoulement de l'air (en général situé sur les côtés de l'avion) et qui ne s'oppose donc pas à cet écoulement ; on note  $v_B \neq 0$  la vitesse relative de l'air et  $P_B$  la pression de l'air en  $B$ .
- une capsule anéroïde, qui peut se déformer grâce à la différence de pression  $\Delta P = P_A - P_B$  de part et d'autre de sa membrane. Cette déformation est transcrite en  $\text{m.s}^{-1}$  sur un écran visible par le pilote.



Soient  $v_0$  et  $P_0$

# Index

- Aéronef, 27
- Adhérence (condition), 11
- Angle d'incidence, 25
- Atmosphère, 7
  
- Bar, 7
- Bernoulli (relation de), 33
  
- Capsule anéroïde, 37
- Cellule fluide, 1
- Champ de vitesse, 1
- Clepsydre, 33
- Coefficient de friction, 18
- Coefficient de traînée, 23
- Condition d'adhérence, 11
- Conservation de la masse, 5
- Continuité (équation de), 5
- Convection, 11
- Corde moyenne, 25
- Couche limite, 21
  
- Débit de masse, 3
- Débit massique, 3
- Débit volumique, 4
- Débit-mètre, 36
- Décrochage, 25
- Densité de courant de masse, 3
- Diagramme de Moody, 18
- Diffusion (de quantité de mouvement), 11
  
- Ecoulement incompressible, 6
- Ecoulement parfait, 33
- Ecoulement stationnaire, 5
- Envergure, 25
- Equation de continuité, 5
- Eulerienne (description), 1
- Extradados, 25
  
- Fermé (système), 26
- Finesse, 25
- Force de poussée, 28
- Force de viscosité, 11
  
- Hagen-Poiseuille (loi de), 16
  
- Incidence (angle), 25
- Incompressible (écoulement), 6
- Intradados, 25
  
- Lagrangienne (description), 1
- Laminaire (régime), 11
- Ligne de courant, 2
- Loi de Hagen-Poiseuille, 16
- Loi de la statique des fluides, 8
- Loi de similitude, 20
- Loi de Stokes, 23
  
- Mésoscopique (niveau), 1
- Maître-couple, 23
- Macroscopique (niveau), 1
  
- Microscopique (niveau), 1
- Millimètre de mercure, 7
- Moody (diagramme de), 18
  
- Nombre de Reynolds, 13
  
- Ouvert (système), 26
  
- Parfait (écoulement), 33
- Perte de charge, 13, 16, 18
- Perte de charge régulière, 18
- Perte de charge singulière, 18, 36
- Pitot (tube de), 37
- Poiseuille, 11
- Poiseuille (loi de), 16
- Polaire (courbe), 25
- Portance, 25
- Poussée d'Archimède, 7
- Pression, 6
- Pression standard, 7
- Prise dynamique, 37
- Prise statique, 37
- Puissance utile, 30
  
- Régime laminaire, 11–13
- Régime turbulent, 11, 13
- Régulière (perte de charge), 18
- Résistance hydraulique, 16
- Relation de Bernoulli, 33
- Reynolds (nombre de), 13
- Rugosité, 18
- Rugosité relative, 20
  
- Similitude (loi de), 20
- Singulière (perte de charge), 18
- Stationnaire (écoulement), 5
- Statique des fluides (loi), 8
- Stokes (loi de), 23
- Surface alaire, 25
- Système fermé, 26
- Système ouvert, 26
  
- Traînée, 23
- Traînée (pour un avion), 25
- Tube Pitot, 37
- Turbulent (régime), 11
- Tuyère, 31
  
- Viscosité (force), 11
- Vitesse débitante, 16

# Table des matières

<b>B1 Fluides en écoulement</b>	<b>1</b>
1- Débits et lois de conservation	1
a- Champs des vitesses	1
b- Débit massique et débit volumique	3
c- Conservation de la masse	4
d- Écoulement stationnaire	5
e- Écoulement incompressible	6
2- Actions de contact	6
a- Forces de pression	6
b- Éléments de statique des fluides	8
c- Viscosité dynamique	10
3- Écoulements laminaires et turbulents	11
a- Introduction	11
b- Transfert de quantité de mouvement par diffusion	12
c- Transfert de quantité de mouvement par convection	12
d- Nombre de Reynolds	13
4- Écoulement dans une conduite cylindrique	13
a- Champ des vitesses	13
b- Débit et vitesse débitante	15
c- Résistance hydraulique	16
d- Perte de charge et nombre de Reynolds	17
e- Loi de similitude	20
5- Écoulement autour d'un obstacle	21
a- Couche limite	21
b- Force de traînée	23
c- Exemple : l'aile d'avion	25
<b>B2 Bilans macroscopiques</b>	<b>26</b>
1- Généralités	26
2- Bilan mécanique	27
a- Bilan de quantité de mouvement	27
b- Bilan de moment cinétique	29
3- Bilans thermodynamiques	30
a- Bilan d'énergie (premier principe de la thermodynamique)	30
b- Bilan d'entropie	32
c- Relation de Bernoulli	32
d- Perte de charge et énergie	35
e- Débit-mètre	36
f- Tube Pitot	37