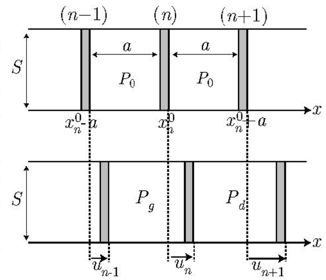
Filière MP

PHYSIQUE

Équations de propagation

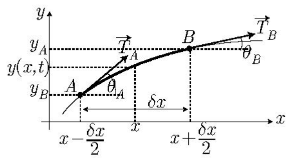
I- Propagation d'une onde sonore



On considère un cylindre de section S contenant un gaz parfait au repos ; la pression y est uniformément égale à P_0.
Ce système est séparé en compartiments d'égale longueur a, par des cloisons de masse m, infiniment fines, pouvant se déplacer horizontalement sans frottements.
Lors du passage d'une onde sonore, chaque paroi (i) présente un déplacement algébrique $u_i \ll a$. Ainsi, la paroi (n) se trouve soumise aux pressions P_d et P_g des compartiments situés respectivement à droite et à gauche, de volumes V_d et V_g.
Les perturbations sont supposées s'effectuer de manière adiabatique et réversible.

1. Rappeler la relation entre P_0, P_d, V_d, V_0 (volume initial des compartiments au repos) et γ (rapport des capacités thermiques C_p et C_v). Faire de même avec P_0, P_g, V_g, V_0, γ.
2. Trouver l'expression de V_d en fonction de u_{n+1}, u_n, a et S ; faire de même avec V_g, u_{n-1}, u_n, S, a.
3. En admettant que les déplacements u_i sont petits devant a, établir que :
$$P_d \simeq P_0 S \times \left(1-\gamma\,\frac{u_{n+1}-u_n}{a}\right) \text{ et } P_g \simeq P_0 S \times \left(1-\gamma\,\frac{u_n-u_{n-1}}{a}\right)$$
4. En déduire une équation différentielle liant $\dfrac{\mathrm{d}^2u_n}{\mathrm{d}t^2}$, u_n, u_{n+1}, u_{n-1}.
5. On suppose désormais que a est suffisamment petit pour qu'on puisse définir une fonction continue $u(x,t)$ telle que :
$$u_n = u(x_n^0,t) \qquad u_{n+1} = u(x_n^0+a,t) \qquad u_{n-1} = u(x_n^0-a,t)$$
Déduire de l'équation différentielle précédente une équation de d'Alembert de la fonction $u(x,t)$. En déduire l'expression de la célérité de l'onde acoustique, en fonction de P_0, γ, S, a et m.
6. On suppose maintenant que les cloisons sont elles-même constituées de cylindres d'air de section S, de hauteur a, de masse molaire M, à la température constante T. Montrer que :
$$c \simeq \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$
Faire l'application numérique avec :
$$\gamma = 1{,}4 \qquad R = 8{,}31\ \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}} \qquad T = 298\ \mathrm{K} \qquad M = 29\ \mathrm{g.mol^{-1}}$$
puis conclure

II- Propagation d'une onde sur une corde

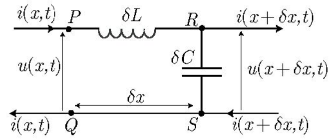


Une onde mécanique se propage horizontalement sur une corde de masse linéique λ uniforme.
On étudie ici le mouvement (strictement vertical) d'un morceau de corde $(\mathcal{M})$, de longueur δx, repéré par son ordonnée $y(x,t)$.
On note $\vec{T}$ la tension de la corde : la force exercée par la partie de corde situé à droite de chaque point de celle-ci (*p. ex.* $\vec{T}_A$ et $\vec{T}_B$ en A et B) et on néglige le poids.

1. Le système $(\mathcal{M})$ étudié est soumis aux forces extérieures $\vec{T}_B$ et $\vec{T'}_A = -\vec{T}_A$.
À l'aide du P.F.D., montrer qu'il existe une grandeur T_0 constante (appelée *tension de la corde*) telle que $T_A \cos\theta_A = T_B \cos\theta_B = \mathrm{cte} = T_0$.
2. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $y(x,t)$, en fonction de T_0, $\tan\theta_A$, $\tan\theta_B$, λ et δx.
3. À l'aide d'un développement limité, montrer que cette équation devient une équation de d'Alembert, où l'on exprimera la célérité c en fonction de T_0 et λ.

III- Onde électrique dans un câble coaxial

Un câble coaxial est composé de deux conducteurs cylindriques coaxiaux, comportant une inductance linéique Λ et une capacité linéique Γ.
Le courant qu'un conducteur achemine dans un sens est acheminé dans le sens inverse dans l'autre conducteur.
Un élément de câble situé entre les bornes (P,Q) et (R,S), de longueur δx, comporte ainsi une auto-inductance $\delta L = \Lambda\,\delta x$ et une capacité $\delta C = \Gamma\,\delta x$.



On note $i(x,t)$ le courant qui entre en P dans cet élément, sous une tension $u(x,t)$ et $i(x+\delta x,t)$ le courant qui en sort, en R, sous la tension $u(x+\delta x,t)$.

1. En appliquant la loi des mailles à la maille (P,R,S,Q), établir une relation entre $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial i}{\partial t}$.
2. En appliquant la loi des nœuds en R, au premier ordre en δx, établir une relation entre $\dfrac{\partial i}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial u}{\partial u}$.
3. À l'aide de ces deux relations, établir l'équation de d'Alembert pour la tension u (équation *des télégraphistes*) et en déduire la célérité de l'onde électrique qui se propage dans le câble, en fonction de Γ et Λ.

Réponses

I- Propagation d'une onde sonore

1. $P_d\,V_d^\gamma = P_0\,V_0^\gamma$ et $P_g\,V_g^\gamma = P_0\,V_0^\gamma$
2. $V_d = S\times(a+u_{n+1}-u_n)$ et $V_g = S\times(a+u_n-u_{n-1})$
4. $m\,\dfrac{\mathrm{d}^2u_n}{\mathrm{d}t^2} = \dfrac{P_0S\gamma}{a}\times[u_{n+1}+u_{n-1}-2\,u_n]$
5. $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=0$ avec $c=\sqrt{\dfrac{P_0\gamma Sa}{m}}$
6. $c\simeq 340\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

II- Propagation d'une onde sur une corde

2. $\lambda\,\delta x\,\dfrac{\partial^2y}{\partial t^2} = T_0\times(\tan\theta_B-\tan\theta_A)$
3. $\dfrac{\partial^2y}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2y}{\partial t^2}=0$ avec $c=\sqrt{\dfrac{T_0}{\lambda}}$

III- Câble coaxial

1. $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda\,\dfrac{\partial i}{\partial t}$
2. $-\dfrac{\partial i}{\partial x} = \Gamma\,\dfrac{\partial u}{\partial t}$
3. $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}=0$ avec $c=\dfrac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$