FILIÈRE MP

RÉVISIONS

PHYSIQUE

MÉCANIQUE CÉLESTE

Exercice 1

Le premier satellite artificiel avait son apogée à une altitude $h_A = 327$ km et son périgée à $h_P = 180$ km.

1. L'intensité du champ de gravitation au sol étant $g_0 = 9,81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et le rayon terrestre valant $R = 6\,370$ km, calculer la période T de révolution du satellite.
2. Calculer la vitesse V_A du satellite au passage par son apogée.

Exercice 2

On suppose la Terre de masse m en trajectoire circulaire (de rayon R_0) autour du Soleil, de masse M.

1. Déterminer sa vitesse V_0, son énergie cinétique E_{c0}, son énergie mécanique, sa période T_0 et son moment cinétique en fonction de m, M, R_0 et G (constante de gravitation).
2. Une comète arrive et se trouve en son périhélie à la vitesse $2V_0$ à une distance $\dfrac{R_0}{2}$ du Soleil ; quelle est sa trajectoire ?
3. La trajectoire de la comète coupe celle de la Terre en deux points A et B. Montrer que la distance AB est égale au diamètre de la trajectoire de la Terre. On admettra qu'en coordonnées polaires, la distance r qui sépare la Terre de la comète vérifie : $r = \dfrac{p}{1+\cos\theta}$, où p et une constante.

Exercice 3

I- Généralités

On considère un point P, de masse m, en mouvement dans un champ de force centrale, dont on prend le centre O comme origine du référentiel dans lequel s'effectue l'étude.

On note : A la norme de tout vecteur $\vec{A}$, $\vec{r}$ le vecteur $\overrightarrow{OP}$, $\vec{v}$ la vitesse de P, $\vec{\sigma}$ son moment cinétique en O, $\mathcal{E}_p$ son énergie potentielle, $\mathcal{E}_m$ son énergie mécanique.

1. Exprimer, en fonction de $\mathcal{E}_p$, la force $\vec{f}$ subie par le point P.
2. Écrire l'expression de $\mathcal{E}_m$ et montrer que cette énergie est conservée au cours du mouvement.
3. Montrer que $\vec{\sigma}$ est aussi conservé et en déduire que le mouvement de P est plan.
4. On repère, dans ce plan, la position de P par ses coordonnées polaires r, θ et on note $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ leur dérivée temporelle.
   a- Exprimer σ à l'aide de ces variables, et en déduire la loi des aires de Kepler, qu'on traduira en posant : $\Gamma = \dfrac{\sigma}{m}$.
   b- Exprimer l'énergie cinétique de P en fonction de m, σ et des variables $u = \dfrac{1}{r}$ et $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}$.

II- Cas de la gravitation

Dans cette partie, on considère le mouvement d'une planète assimilée à un point matériel P, de masse m, dans le champ de gravitation du Soleil, de centre O et de masse $M \gg m$. On pose $g = GM$ et on utilise la variable $u = \dfrac{1}{r}$.

1. Exprimer l'énergie potentielle newtonienne, $\mathcal{E}_p$, de cette planète.

2. Montrer que la trajectoire de P vérifie l'équation différentielle :

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2 - \alpha u = \beta \qquad (1)$$

où α et β sont des constantes que l'on exprimera en fonction de g, de la masse m, de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ et du moment cinétique σ de la planète.

3. Résoudre l'équation (1). Montrer que la trajectoire de P est une conique dont on calculera l'excentricité e.

Exercice 4

Un satellite décrit, autour de la Terre de rayon R, une orbite circulaire de rayon r_0. On exerce sur le satellite une force $\vec{F}$ supposée constante et tangente à l'orbite circulaire pendant un temps très court τ (brusque variation de vitesse sans déplacement). On observe que le satellite vient s'écraser sur la Terre, son rayon-vecteur ayant tourné d'un angle $\dfrac{\pi}{2}$ entre l'instant où l'on exerce la force et celui où le satellite s'écrase au sol.

On rappelle qu'en coordonnées polaires une ellipse a pour équation :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

où p est le paramètre de l'ellipse et e son excentricité ; son demi-grand axe a pour valeur :

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

1. Le satellite ayant une masse m, déterminer la norme v de sa vitesse, après lui avoir appliqué la force $\vec{F}$, en fonction de R, r_0 et g_0 (intensité de la pesanteur au niveau du sol).
2. En déduire $\left\|\vec{F}\right\|$ en fonction m, r_0, R, τ et g_0.

Réponses

Exercice N°1–

1. $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2 a^3}{g_0 R^2}} \simeq 5\,200$ s
2. $V_A = \sqrt{2g_0R^2 \times \dfrac{r_p}{r_A(r_A+r_P)}} \simeq 7\,800\ \mathrm{m.s^{-1}}$ avec $r_A = 6\,697$ km et $r_P = 6\,550$ km

Exercice N°2–

1. $V_0 = \sqrt{\dfrac{GM}{R_0}}$; $E_{c0} = \dfrac{GMm}{2R_0}$; $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{R_0^3}{GM}}$; $L_0 = m\sqrt{GMR_0}$.
2. Parabole

Exercice N°3– I- Généralités

1. $\vec{f} = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r$ 2. $E_m = \dfrac{1}{2}mv^2 + E_p$ 4.a- $S = \dfrac{\Gamma}{2}\times T$ 4.b- $E_c = \dfrac{\sigma^2}{2m}\left[\left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + u^2\right]$

II- Cas de la gravitation

1. $\mathcal{E}_p = -mgu$
2. $\alpha = \dfrac{2m^2g}{L^2}$ et $\beta = \dfrac{2mE_m}{L^2}$
3. $e = \sqrt{1 + \dfrac{4\beta}{\alpha^2}} = \sqrt{1 + \dfrac{2E_mL^2}{m^3g^2}}$

Exercice N°4–

1. $v = \sqrt{g_0} \times \dfrac{R}{r_0}$
2. $F = \dfrac{m\sqrt{g_0R}}{\tau}\left(\sqrt{\dfrac{R}{r_0}} - \dfrac{R}{r_0}\right)$