Lycée Charlemagne Paris

Physique - Chimie MP

Problème

Effet tunnel - Radioactivité α

Considérons un problème qui s'impose en mécanique quantitque : que se passe-t-il si le potentiel a la forme que montre la figure (1), quand la hauteur V_0 de la barrière est plus grande que E ?

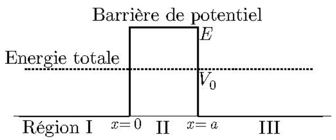


Figure 1 : La ligne continue représente le potentiel et la ligne en tirets gras indique l'énergie totale.
Selon la théorie classique, une particule incidente provenant de la gauche ne peut pas passer à travers cette barrière. Selon la mécanique quantique il y a probabilité finie pour que la particule «passe à travers». On appelle ce phénomène *effet tunnel*.

Il est facile de deviner la réponse : une onde incidente en provenance de la gauche sera partiellement capable de traverser la barrière jusqu'à la région III. Classiquement, une particule issue de la région I serait réfléchie au point $x = 0$, et ne pourrait pas pénétrer dans les régions II et III. Le fait qu'une particule puisse «s'échapper» à travers une barrière de potentiel, qui classiquement est absolument opaque, est l'une des propriétés frappantes de la mécanique quantique. On appelle ce phénomène : *effet tunnel*. Nous pourrions procéder de manière habituelle pour résoudre : nous trouvons la solution générale dans chacune des trois régions I, II et III, puis nous imposons la condition que la fonction d'onde, ainsi que sa dérivée première, soient continues partout, en particulier aux deux points limites $x = 0$ et $x = a$. Par conséquent, le problème de la barrière de la figure précédente ne présente pas de difficulté de principe, mais il est quelque peu laborieux de trouver la solution détaillée. Heureusement, nous pouvons comprendre les aspects essentiels de ce problème sans réellement résoudre complètement l'équation de Schrödinger.
Nous allons considérer la solution dans le cas particulier suivant : une particule est incidente en provenant de la gauche. Elle est partiellement réfléchie par la barrière et partiellement capable de la traverser. Cela veut dire que nous nous intéressons à une solution de l'équation de Schrödinger pour laquelle la fonction d'onde est de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ dans la région III, ce qui représente une particule se propageant vers la droite dans cette région. Nous aurons nécessairement deux ondes dans la région I : l'une se propageant vers la gauche et l'autre vers la droite. La première de ces ondes représente l'onde réfléchie, la seconde l'onde transmise. Par conséquent, la fonction d'onde dans la région I est de la forme :

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} + A\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \tag{1}$$

où A est une constante qui décrit l'amplitude de l'onde réfléchie. Sa valeur absolue doit être inférieure à 1 car une partie de l'onde incidente traverse la barrière.

Question Q1 Exprimer k en fonction de E et de la masse m de la particule.

Dans la barrière, la fonction d'onde sera essentiellement une fonction exponentielle de la forme :

$$\varphi(x) \simeq B\,\mathrm{e}^{-xq} \tag{2}$$

où B est une constante. Cette fonction d'onde n'est qu'une approximation, mais cette approximation est bonne si la barrière de potentiel n'est pas trop basse.

Question Q2 Exprimer q en fonction de E, V_0 et m.

Supposons que aq soit grand devant l'unité. Dans ce cas, le rapport $\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(0)} \simeq \mathrm{e}^{-aq}$ pour la fonction donnée par (2) est un petit nombre. Si nous nous rappelons la façon de raccorder les deux solutions au point limite, nous pouvons montrer que la valeur absolue du rapport de l'amplitude de l'onde dans la région III, à l'amplitude de l'onde qui se propage vers la droite dans la région I doit être donnée *en gros* par $\dfrac{\varphi(a)}{\varphi(0)} \simeq \mathrm{e}^{-aq}$.
Nous avons supposé que l'onde incidente a une amplitude unité. L'amplitude de l'onde qui pénètre dans la

région III est inférieure. Sa grandeur, ou plus exactement son ordre de grandeur, est approximativement égale à e^{-aq}. Le carré (en valeur absolue) T de cette amplitude a une interprétation physique simple. Il est égal à la probabilité pour qu'une particule frappant la barrière la traverse. Cette probabilité est donc donnée par :

$$T = |\varphi(a)|^2 \sim \mathrm{e}^{-2aq} \tag{3}$$

On appelle la quantité T *coefficient de transmission* de la barrière. Nous nous intéressons surtout au cas où $a \times q$ est grand, ce qui veut dire que T est très petit. Considérons, au lieu de la barrière de potentiel rectangulaire que montre la figure 1, une barrière de forme arbitraire, comme le montre la figure suivante :

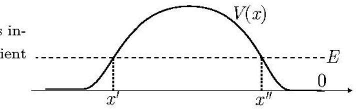


Figure 2 : La courbe en trait plein représente le potentiel et la ligne en tirets indique l'énergie totale E. Comment pouvons-nous obtenir une expression du coefficient de transmission de cette barrière ?

Supposons qu'une onde d'énergie E soit incidente en venant de la gauche. Cette onde sera partiellement réfléchie et partiellement transmise. Nous nous intéressons surtout au coefficient de transmission global T de cette barrière. Pour trouver ce coefficient avec précision, nous devons résoudre l'équation de Schrödinger pour le potentiel $V(x)$. Nous pouvons cependant obtenir une expression approchée pour T par une méthode différente, fondée sur notre discussion précédente. Cette approximation est d'autant meilleure que la longueur d'onde est plus petite devant la largeur de la barrière.
Pour obtenir une expression approchée du coefficient de transmission T, nous imaginons que nous divisons la région de la barrière de potentiel en plusieurs sous-régions, comme l'indique la figure ci-dessous.

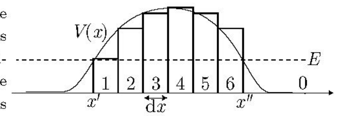


Figure 3 : Illustration de notre démonstration de l'expression approchée du coefficient de transmission de la barrière que montre la figure 5. Nous imaginons que nous remplaçons le potentiel qui varie continûment par un ensemble de barrières rectangulaires. Le coefficient de transmission global est alors le produit des coefficients de transmission de toutes les barrières rectangulaires. Remarquer que cette méthode n'est qu'approximativement correcte : on n'a pas tenu compte des réflexions multiples.

Question Q3 Montrer qu'en passant à la limite $\mathrm{d}x \to 0$:

$$\ln T \simeq -2\int_{x'}^{x''} \mathrm{d}x \sqrt{\frac{2m\,[V(x) - E]}{\hbar^2}} \tag{4}$$

Théorie de la radioactivité α

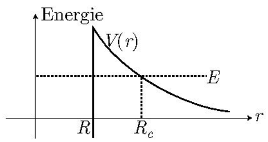
. Nous allons essayer d'appliquer notre théorie de la pénétration d'une barrière à une situation physique réelle.
Nous devons considérer comme anormalement longue la durée de vie du noyau de radium $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ émetteur de particules α.

Tant que la particule α est à l'intérieur du noyau, elle est soumise à de grandes forces nucléaires ; ces forces ont une courte portée. On peut donc imaginer qu'elles n'agissent pas à l'extérieur de la surface nucléaire, de rayon R. La force dominante à l'extérieur de la surface nucléaire est la répulsion électrostatique entre la particule α, qui porte la charge $+2e$, et le noyau résiduel qui reste après la désintégration. Il porte la charge $+Z'e$, si Z' est le numéro atomique du nouveau noyau. Le noyau original, le *parent*, porte la charge Ze où $Z = Z' + 2$ est son numéro atomique.
Nous avons schématiquement montré la situation sur la figure ci-dessous. La distance au centre du noyau augmente vers la droite. La courbe en trait plein représente l'énergie potentielle de la particule α en présence du noyau résiduel. À l'extérieur de la surface nucléaire, c'est-à-dire pour $r > R$, ce potentiel est simplement celui de Coulomb :

$$V(r) = \frac{2e^2 Z'}{r} \text{ pour } r > R \tag{5}$$

La force nucléaire fortement attractive se met à agir quand nous atteignons la surface du noyau, ce qui veut dire que le potentiel doit chuter brusquement. Nous avons idéalisé la situation sur la figure en supposant que nous avons un saut de potentiel. Nous n'avons pas dessiné la courbe de potentiel à l'intérieur du noyau car elle n'est pas bien connue : en effet, elle n'est pas bien définie car la particule α peut perdre son individualité dans le fort champ de force nucléaire.
La ligne en tirets représente l'énergie totale de la particule α. Cette énergie (E) est aussi l'énergie avec laquelle la particule α émerge finalement à de grandes distances du noyau, où l'énergie potentielle électrostatique est effectivement nulle.

Figure 4 : Représentation schématique (par la courbe en trait plein) du potentiel que voit une particule α au voisinage d'un noyau. À l'extérieur du noyau, c'est-à-dire au-delà de la distance R, le potentiel est le potentiel de Coulomb. À l'intérieur du noyau, les forces d'attraction sont très grandes. On ne connaît pas la forme précise du potentiel mais on représente la force attractive par une chute soudaine du potentiel en R. La ligne en tirets représente l'énergie totale de la particule α. Selon la mécanique quantique, la particule α peut traverser la barrière de potentiel. C'est ce qui a lieu dans la désintégration α des noyaux lourds.



Question Q4 Montrer que

$$\ln T \simeq -\frac{4e^2Z'}{\hbar}\sqrt{\frac{2m_\alpha}{E}}\int_X^1 \mathrm{d}x\sqrt{\frac{1}{x}-1} \text{ où } x=\frac{r}{R_c} \text{ et } X=\frac{R}{R_c} \tag{6}$$

Question Q5 En remarquant que $X \ll 1$, montrer qu'il existe deux constantes A et B telles que :

$$\ln T \simeq -\frac{A}{\sqrt{E}}+B \tag{7}$$

Exprimer A et B en fonction de e, Z', $\hbar$, E, m_α, R.

Pour la désintégration α du radium, on trouve par exemple :

$$\log T \simeq -\frac{148}{\sqrt{E_{/\mathrm{MeV}}}}+32,5 \tag{8}$$

Nous avons maintenant trouvé l'expression générale du coefficient de transmission T, en fonction de l'énergie E, à travers la barrière de potentiel que la particule α doit traverser au cours de l'émission α. Voyons comment on peut utiliser ce résultat pour trouver la période de l'émetteur.
Nous allons considérer dans ce but un modèle très naïf du processus. Nous supposons qu'avant l'émission, la particule α rebondisse d'un côté à l'autre du noyau le long d'un diamètre. Soit τ_0 le temps entre deux collisions successives contre les «murs». À chaque collision, il y a une certaine chance pour que la particule fuie à travers la barrière de potentiel, la probabilité de cette émission étant en fait juste égale au coefficient de transmission T.

Question Q6 Pour établir l'expression du temps de vie du noyau père, il a faut admettre que pendant le temps $\mathrm{d}t$ la particule α devait effectuer un nombre de collisions δN_{coll}.

1. Exprimer δN_{coll} en fonction de $\mathrm{d}t$ et τ_0 (avec $\mathrm{d}t \gg \tau_0$).
2. On note $N(t)$ le nombre d'atomes pères à l'instant t dans l'échantillon d'uranium étudié. Exprimer le nombre total de collisions (δN_i) subies par l'ensemble des particules α de l'échantillon, pendant $\mathrm{d}t$ (en fonction de $N(t)$, $\mathrm{d}t$ et τ_0).
3. Soit δN_t le nombre de particules α qui traversent la barrière suite aux chocs subis par les δN_i particules α incidentes. Après avoir exprimé δN_t en fonction de T et de δN_i, écrire l'équation différentielle vérifiée par $N(t)$.
4. Résoudre cette équation et établir l'expression de $N(t)$ en fonction de T, t, τ_0 et $N_0 = N(t=0)$.

Question Q7 On cherche le temps de vie moyen d'un noyau père. Pour cela, on pourra :

1. écrire la probabilité $\mathcal{P}_{\text{confinée}}(t)$ qu'une particule α soit confinée dans l'atome père jusqu'à une date t (en fonction de t, T, τ_0).
2. écrire la probabilité $\delta\mathcal{P}_{\text{émise}}(\mathrm{d}t)$ qu'a une particule α d'être émise pendant $\mathrm{d}t$ (en fonction de T, τ_0 et $\mathrm{d}t$) :
3. écrire la probabilité $\delta\mathcal{P}_{\text{émise}}(t, t+\mathrm{d}t)$ qu'elle a d'être émise dans l'intervalle $[t, t+\mathrm{d}t]$:

Question Q8 En déduire l'expression du temps de vie moyen d'un noyau père. Comparer avec l'expression donnée dans la littérature scientifique : $\tau = \dfrac{\tau_0}{T}$.