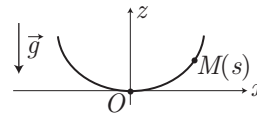


A1– Mécanique

*** Exercice N°1–

L'espace est rapporté à un trièdre galiléen $\mathcal{R}_y(O, x, y, z)$ où l'axe Oz est dirigé vers le haut. Une particule M , de masse m , glisse sans frottement dans le plan vertical sur une branche de courbe d'équation :

$$\begin{cases} x = R \times [2\xi + \sin(2\xi)] \\ z = R \times [1 - \cos(2\xi)] \end{cases}$$



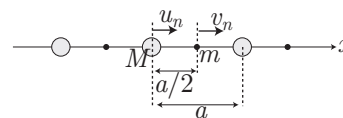
Le champ de pesanteur est donné par $\vec{g} = -g \vec{e}_z$. La position de M est repérée par son abscisse curviligne s comptée à partir de O . La particule est placée initialement en $M_0(s_0)$ avec une vitesse nulle

1. Exprimer l'abscisse curviligne s en fonction de ξ .
2. Déterminer l'angle que fait la tangente en un point de la courbe avec l'axe Ox . En déduire que $\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \xi$.
3. Montrer que le temps τ mis par la particule pour arriver au point O est indépendant de la position initiale et exprimer τ en fonction de R et g .

*** Exercice N°2–

On modélise un cristal par une chaîne linéaire constituée de deux types d'atomes de masses respectives M et m . Au repos, les atomes de masse M sont disposés aux nœuds d'un réseau de période a . Les atomes de masse m sont, quant à eux, disposés aux nœuds d'un réseau de même taille élémentaire que le précédent, mais décalé de $\frac{a}{2}$. On note u_n (resp. v_n) le déplacement par rapport à sa position d'équilibre de l'atome de masse M (resp. v_n) situé en $x = na$ (resp. $x = na + \frac{a}{2}$).

On suppose que par l'intermédiaire de ressorts de longueur à vide $\frac{a}{2}$ chaque atome subit de la part de ses plus proches voisins une force de rappel élastique de constante α , proportionnelle à la variation de longueur des liaisons.



1. Écrire les équations différentielles vérifiées par u_n et v_n .
2. On étudie la propagation d'une OPPH longitudinale $\underline{u}_n = A e^{i(kna - \omega t)}$ et $\underline{v}_n = B e^{i(kna + ka/2 - \omega t)}$. Déterminer la relation de dispersion $\omega(k)$.
3. Lorsque tous les atomes sont identiques, trouver l'équation de d'Alembert et exprimer la célérité de l'onde mécanique en fonction de α , a et m .

★★ Exercice N°3–

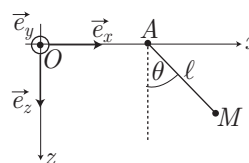
Une fusée amène un satellite sur une trajectoire circulaire d'altitude $h_1 = 200$ km, située dans le plan équatorial. On veut transférer le satellite sur une orbite géostationnaire. À cet effet, on donne au satellite un accroissement instantané de vitesse ΔV_1 qui l'amène sur une orbite elliptique de transfert. Un deuxième accroissement ΔV_2 est alors nécessaire pour le caler sur une orbite géostationnaire. Déterminer le rapport $\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1}$ en fonction des rayons r_1 et r_2 des orbites circulaires puis faire l'application numérique avec :

- constante gravitationnelle : $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-2}$;
- masse de la Terre : $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$;
- rayon de la Terre : 6 400 km.

★★ Exercice N°4–

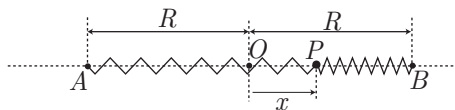
On maintient $\vec{OA} = a \cos(\omega t) \vec{e}_x$.

1. Déterminer l'équation différentielle en θ dans le référentiel galiléen d'origine O .
2. Même question dans le référentiel non galiléen d'origine A .
3. On suppose $\omega \neq \omega_0$ et θ petit. Déterminer $\theta(t)$, avec $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.
4. Que se passe-t-il lorsque $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$?



★ Exercice N°5–

Deux ressorts horizontaux identiques sont fixés en des points A et B d'un axe horizontal et sont distants de $2R$. Ils sont reliés par l'intermédiaire d'une particule de masse m . On appelle ℓ_0 leur longueur à vide, k leur raideur et leur masse est négligeable.



O est le centre du segment $[AB]$ et la position de la particule P est repérée par son abscisse x par rapport à O .

1. Exprimer l'énergie potentielle de la particule sous l'action des ressorts, en fonction de x et des constantes du problème.
2. Montrer que cette énergie potentielle admet un minimum en une abscisse $x = x_m$ que l'on exprimera.
3. Exprimer la pulsation des oscillations autour de la position d'équilibre.

Réponses

Exercice N°1–

1. $s = 4R \sin \xi$
2. $\theta = \xi$
3. $\tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4R}{g}}$

Exercice N°2–

1. $\frac{d^2 v_n}{dt^2} = \frac{\alpha}{m} (u_{n+1} + u_n - 2v_n)$ et $\frac{d^2 u_{n+1}}{dt^2} = \frac{\alpha}{M} (v_{n+1} + v_n - 2u_{n+1})$
2. $(\omega_2^2 - \omega^2)(\omega_1^2 - \omega^2) = \omega_1^2 \omega_2^2 \cos^2\left(\frac{ka}{2}\right)$ où $\omega_1^2 = \frac{2\alpha}{m}$ et $\omega_2^2 = \frac{2\alpha}{M}$
3. $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ avec $c = \sqrt{\frac{\alpha a^2}{8m}}$

Exercice N°3– $\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \frac{\sqrt{r_1 + r_2} - \sqrt{2r_1}}{\sqrt{2r_2} - \sqrt{r_1 + r_2}} = 0,58$

Exercice N°4–

1. $\ell \ddot{\theta} - a\omega^2 \cos \theta \cos(\omega t) = -g \sin \theta$
2. Même équation.
3. $\theta = \frac{a\omega^2}{\ell(\omega_0^2 - \omega^2)} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)]$
4. $\theta \simeq \frac{a\omega_0^2 t}{2\ell\omega_0} \sin(\omega_0 t)$. L'hypothèse des petits angles devient vite fausse !

Exercice N°5–

1. $\mathcal{E}_p = \frac{1}{2} k (R + x - \ell_0)^2 + \frac{1}{2} k (R - x - \ell_0)^2$
2. $x_m = 0$
3. $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$