

D- Conversion de puissance

D1 Puissance électrique en régime sinusoïdal

1- Définitions

a- Grandeurs moyennes et efficaces



DÉFINITION

La valeur moyenne, sur une période T , d'une fonction T -périodique, vaut :

$$\langle f \rangle_T \hat{=} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt, \forall t_0$$

À partir de cette définition, on montre que :

- $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall \varphi \in \mathbb{R}$, $\langle \cos(n\omega t + \varphi) \rangle_T = 0$ car :

$$\begin{aligned} \langle \cos(n\omega t + \varphi) \rangle_T &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(n\omega t + \varphi) dt = \frac{1}{n\omega T} [\sin(n\omega t + \varphi)]_{t_0}^{t_0+T} \\ &= \frac{1}{n\omega T} [\sin(n\omega t_0 + 2n\pi + \varphi) - \sin(n\omega t_0 + \varphi)] \text{ car } \omega = \frac{2\pi}{T} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- $\langle \cos^2(\omega t) \rangle_T = \langle \sin^2(\omega t) \rangle_T = \frac{1}{2}$ car :

$$\begin{aligned} \langle \cos^2(\omega t) \rangle_T &\hat{=} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{1}{2T} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right]_{t_0}^{t_0+T} = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \langle \sin^2(\omega t) \rangle_T &= 1 - \langle \cos^2(\omega t) \rangle_T = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- La valeur moyenne de la dérivée temporelle de toute fonction T -périodique est nulle :

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle_T \hat{=} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{df}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_{f(t_0)}^{f(t_0+T)} = \frac{1}{T} [f(t_0+T) - f(t_0)] \Rightarrow \left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle_T = 0$$

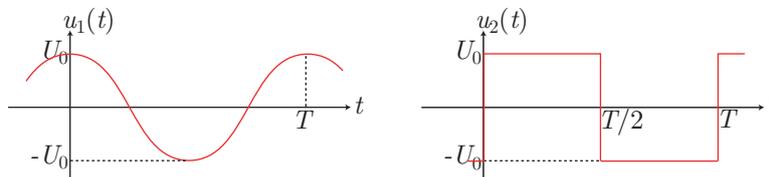


DÉFINITION

La valeur efficace U_{eff} d'une grandeur T -périodique $u(t)$ est définie par :

$$U_{\text{eff}} \hat{=} \langle u^2(t) \rangle_T$$

Par exemple, considérons une tension sinusoïdale $u_1(t) = U_0 \cos(\omega t)$ et une tension créneau $u_2(t)$ d'amplitude U_0 et de même période $T = \frac{2\pi}{\omega}$:



La valeur efficace de $u_1(t)$ est définie par :

$$\begin{aligned} U_{1\text{eff}}^2 &= \langle u_1^2(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \cos^2(\omega t) dt = \frac{U_0^2}{2T} \int_0^T [1 + \cos(2\omega t)] dt \\ &= \frac{U_0^2}{T} \left[t + \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T = \frac{U_0^2}{2T} \times T = \frac{U_0^2}{2} \Rightarrow U_{1\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

tandis que celle de $u_2(t)$ vérifie :

$$U_{2\text{eff}}^2 = \langle u_2^2(t) \rangle_T = \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} U_0^2 dt + \int_{T/2}^T (-U_0)^2 dt \right] = \frac{U_0^2}{T} \times T \Rightarrow U_{2\text{eff}} = U_0$$

b- Puissances moyennes

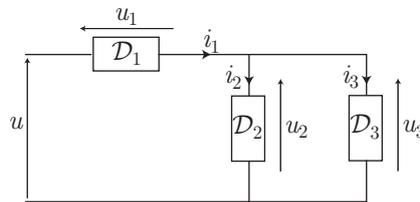
Soit \mathcal{D} un dipôle parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et soumis à une tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$. La puissance électrique moyenne¹ reçue par \mathcal{D} pendant une période T vaut :

$$\begin{aligned} P &= \langle \mathcal{P}(t) \rangle_T \text{ où } \mathcal{P}(t) = u(t) \times i(t) = U_0 I_0 \cos(\omega t + \varphi) \times \cos(\omega t) \\ &= \frac{U_0 I_0}{2} [\cos \varphi + \cos(2\omega t + \varphi)] \\ &\Rightarrow \boxed{P = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi} \end{aligned}$$

Dans cette expression, $\cos \varphi$ s'appelle le facteur de puissance.

REMARQUE La puissance moyenne reçue par un réseau de dipôles est la somme des puissances moyennes reçues par chacun des dipôles.

Cette proposition se démontre aisément : considérons des dipôles $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ associés en série ou en parallèle :



La puissance instantanée reçue par ce réseau vaut :

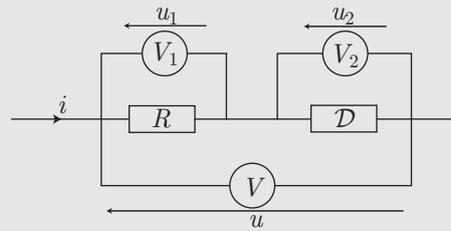
$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) &= u \times i_1 = (u_1 + u_2) \times i_1 = u_1 i_1 + u_2 i_1 \\ &= u_1 i_1 + u_2 (i_2 + i_3) \text{ car } i_1 = i_2 + i_3 \\ &= u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 \text{ car } u_2 = u_3 \\ &\Rightarrow \boxed{P = \langle \mathcal{P}(t) \rangle_T = \langle u_1 i_1 \rangle_T + \langle u_2 i_2 \rangle_T + \langle u_3 i_3 \rangle_T \Rightarrow P = P_1 + P_2 + P_3} \end{aligned}$$

EXERCICE

Afin de mesurer expérimentalement la puissance moyenne P absorbée par un dipôle \mathcal{D} , on lui adjoint en série une résistance R connue et on mesure les tensions à l'aide de trois voltmètres (c'est la méthode "des trois voltmètres") :

1. L'industrie distingue :

- la puissance moyenne $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$, en watt (W), aussi appelée puissance active ;
- la puissance apparente $P_{\text{app}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$, en voltampère (VA) ;
- la puissance réactive $Q = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \sin \varphi$, en voltampère-réactif (VAr ou VAR).



1. Exprimer la puissance instantanée \mathcal{P}_2 reçue par \mathcal{D} d'abord en fonction de u_2 et i , puis en fonction de u_2 , u_1 et R .
2. À l'aide de la relation entre u , u_1 et u_2 , trouver l'expression de $u_1 \times u_2$ en fonction de u^2 , u_1^2 et u_2^2 .
3. En déduire que la puissance moyenne reçue par \mathcal{D} vaut :

$$P_2 = \frac{1}{2R} (U_{\text{eff}}^2 - U_{1\text{eff}}^2 - U_{2\text{eff}}^2)$$

Corrigé

1. \mathcal{D} reçoit une puissance instantanée : $\mathcal{P}_2 = u_2 \times i = u_2 \times \frac{u_1}{R}$.
2. Puisque $u = u_1 + u_2$, il s'ensuit que :

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 + 2u_1 u_2 \Rightarrow u_1 u_2 = \frac{1}{2} (u^2 - u_1^2 - u_2^2)$$

3. De ce qui précède, il découle que :

$$P_2 = \frac{1}{2R} (u^2 - u_1^2 - u_2^2) \Rightarrow P_2 = \frac{1}{2R} (\langle u^2 \rangle + \langle u_1^2 \rangle - \langle u_2^2 \rangle) = \frac{1}{2R} (U_{\text{eff}}^2 - U_{1\text{eff}}^2 - U_{2\text{eff}}^2)$$

2– Notations complexes

a– Utilisation des impédances

Les images complexes $\underline{i} = I_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{u} = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$ fournissent :

$$\begin{aligned} \underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_0}{I_0} e^{j\varphi} &= Z e^{j\varphi} = Z (\cos \varphi + j \sin \varphi) \Rightarrow U_0 = Z I_0 \text{ et } \Re\{\underline{Z}\} = Z \cos \varphi \\ \Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{e^{-j\varphi}}{Z} = \frac{\cos \varphi}{Z} - j \frac{\sin \varphi}{Z} &\Rightarrow \frac{\cos \varphi}{Z} = \Re\left\{\frac{1}{\underline{Z}}\right\} \end{aligned}$$

C'est pourquoi la puissance moyenne s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} P &= U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi = Z I_{\text{eff}}^2 \cos \varphi \Rightarrow P = \Re\{\underline{Z}\} I_{\text{eff}}^2 \\ &= \frac{U_{\text{eff}}^2}{Z} \cos \varphi \Rightarrow P = \Re\left\{\frac{1}{\underline{Z}}\right\} U_{\text{eff}}^2 \end{aligned} \quad (1)$$

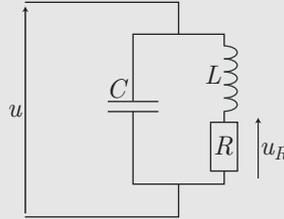
REMARQUE La puissance moyenne absorbée par une bobine ou un condensateur est nulle, ce qui montre que ces dipôles sont susceptibles d'emmagasiner pendant une demi-période de l'énergie qu'ils restituent au circuit pendant la deuxième demi-période.

REMARQUE Les images complexes \underline{u} et \underline{i} peuvent fournir directement l'expression de la puissance moyenne :

$$P = \frac{1}{2} \Re\{\underline{u} \underline{i}^*\} = \frac{1}{2} \Re\{\underline{u}^* \underline{i}\}$$

EXERCICE 

On considère le circuit RLC ci-dessous, alimenté sous une tension $u(t) = U_{\text{eff}}\sqrt{2} \cos(\omega t)$:



1. Soit \underline{Z} l'impédance de ce circuit. Déterminer $\frac{1}{\underline{Z}}$ et en déduire l'expression de la puissance moyenne reçue par ce circuit :

$$P = \frac{RU_{\text{eff}}^2}{R^2 + L^2\omega^2}$$

2. Justifier que P s'identifie à la puissance moyenne P_R reçue par la résistance R .
3. À l'aide d'un pont diviseur de tension, exprimer \underline{u}_R en fonction de \underline{u} , en déduire l'expression de P_R , puis celle de P .

Corrigé

1. L'impédance \underline{Z} du dipôle vérifie :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\underline{Z}} &= C\omega j + \frac{1}{R + L\omega j} = C\omega j + \frac{R - L\omega j}{R^2 + L^2\omega^2} \Rightarrow \Re\left\{\frac{1}{\underline{Z}}\right\} = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} \\ &\Rightarrow P = \Re\left\{\frac{1}{\underline{Z}}\right\} U_{\text{eff}}^2 = \frac{RU_{\text{eff}}^2}{R^2 + L^2\omega^2} \end{aligned}$$

2. Soit P_Z la puissance absorbée par un dipôle Z ; la puissance absorbée par le circuit RLC vaut alors :

$$P = P_R + P_L + P_C = P_R \text{ car } P_L = 0 \text{ et } P_C = 0$$

3. D'après la loi (1) : $P_R = \frac{1}{R} U_{R\text{eff}}^2$ où la tension \underline{u}_R s'obtient à l'aide de la loi du diviseur de tension :

$$\underline{u}_R = \frac{R}{R + L\omega j} \underline{u} \Rightarrow U_{R\text{eff}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} U_{\text{eff}} \Rightarrow P = P_R = \frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} U_{\text{eff}}^2$$

b- Représentation de Fresnel

Soit $\underline{Z} = Z e^{j\varphi}$ l'impédance d'un dipôle parcouru par un courant d'intensité $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ et soumis à une tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$.



DÉFINITION

Les images complexes \underline{u} et \underline{i} associées à $u(t)$ et $i(t)$ vérifient :

$$\begin{cases} \underline{i} = I_0 e^{j\omega t} \\ \underline{u} = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i(t) = \Re\{\underline{i}\} \\ u(t) = \Re\{\underline{u}\} \end{cases} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$$


DÉFINITION

Les images complexes \underline{u} et \underline{i} ont des amplitudes complexes $\underline{I} = I_0$ et $\underline{U} = U_0 e^{j\varphi}$ telles que :

$$\boxed{\underline{i} = \underline{I} e^{j\omega t} \quad \underline{u} = \underline{U} e^{j\omega t} \quad \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}}$$

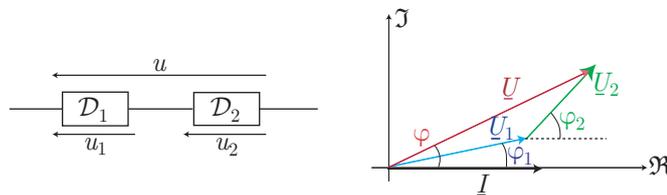
La représentation de Fresnel consiste à représenter les amplitudes complexes \underline{U} dans le plan complexe, par des vecteurs \vec{U} :

- de norme $U = \|\vec{U}\| = |\underline{U}| = U_0$ car $\underline{U} = U_0 e^{j\varphi}$;
- d'abscisse $U \cos \varphi = \Re \{\underline{U}\}$ et d'ordonnée $U \sin \varphi = \Im \{\underline{U}\}$.

Deux situations peuvent se présenter :

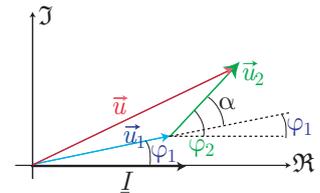
- Si les dipôles sont en série, le courant est pris comme référence des phases :

$$\begin{cases} \underline{i} = I_0 e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t} \\ \underline{u} = U_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U} e^{j\omega t} \end{cases} \text{ avec } \begin{cases} \underline{I} = I_0 \\ \underline{U} = U_0 e^{j\varphi} \end{cases}$$



Par exemple, la représentation de Fresnel donne immédiatement l'amplitude U_0 de la tension $u(t)$:

$$\begin{aligned} \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 &\Rightarrow U_0^2 = U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_2 \\ &\Rightarrow U_0 = \sqrt{U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2U_{01}U_{02} \cos \alpha} \\ &\Rightarrow U_0 = \sqrt{U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2U_{01}U_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{aligned}$$



Ce résultat peut évidemment être confirmé plus directement :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t) = U_{01} \cos(\omega t + \varphi_1) + U_{02} \cos(\omega t + \varphi_2) \\ &= U_{01} [\cos \varphi_1 \cos(\omega t) - \sin \varphi_1 \sin(\omega t)] + U_{02} [\cos \varphi_2 \cos(\omega t) - \sin \varphi_2 \sin(\omega t)] \\ &= (U_{01} \cos \varphi_1 + U_{02} \cos \varphi_2) \cos(\omega t) - (U_{01} \sin \varphi_1 + U_{02} \sin \varphi_2) \sin(\omega t) \\ &= U_0 \cos(\omega t + \varphi) = U_0 \cos \varphi \cos(\omega t) - U_0 \sin \varphi \sin(\omega t) \end{aligned}$$

avec :

$$U_0 \cos \varphi = U_{01} \cos \varphi_1 + U_{02} \cos \varphi_2 \text{ et } U_0 \sin \varphi = U_{01} \sin \varphi_1 + U_{02} \sin \varphi_2$$

de sorte que :

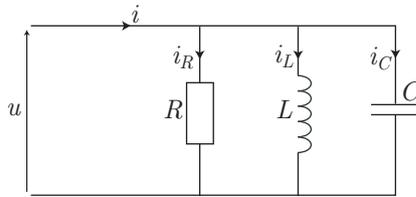
$$\begin{aligned} U_0^2 &= (U_0 \cos \varphi)^2 + (U_0 \sin \varphi)^2 \\ &= (U_{01} \cos \varphi_1 + U_{02} \cos \varphi_2)^2 + (U_{01} \sin \varphi_1 + U_{02} \sin \varphi_2)^2 \\ &= U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2U_{01}U_{02} (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) \\ &\Rightarrow U_0 = \sqrt{U_{01}^2 + U_{02}^2 + 2U_{01}U_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \end{aligned}$$

Cet exemple montre l'intérêt de la représentation de Fresnel : elle permet parfois d'accéder aux résultats par des calculs simplifiés (mais pas toujours!)

- Si les dipôles sont en parallèle, la tension est prise comme référence des phases :

$$\underline{u} = U_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{u}}{\underline{Z}} = \frac{U_0 e^{j\omega t}}{Z e^{j\varphi}} = I_0 e^{j(\omega t - \varphi)} = \underline{I}_0 e^{j\omega t} \text{ avec } \underline{I}_0 = I_0 e^{-j\varphi}$$

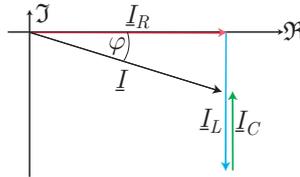
Par exemple, considérons le circuit RLC parallèle alimenté par une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$ d'image complexe $\underline{u} = U_0 e^{j\omega t}$:



Les courants i_R , i_L et i_C ont alors des images complexes qui vérifient :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= R \underline{i}_R = U_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{i}_R = \frac{U_0}{R} e^{j\omega t} = \underline{I}_R e^{j\omega t} / \underline{I}_R = \frac{U_0}{R} \Rightarrow I_R = \frac{U_0}{R} \\ \underline{u} &= L\omega j \underline{i}_L = U_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{i}_L = \frac{U_0}{L\omega j} e^{j\omega t} = \underline{I}_L e^{j\omega t} / \underline{I}_L = \frac{U_0}{L\omega} e^{-j\pi/2} \Rightarrow I_L = \frac{U_0}{L\omega} \\ \underline{u} &= \frac{1}{C\omega j} \underline{i}_C = U_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{i}_C = U_0 C\omega j e^{j\omega t} = \underline{I}_C e^{j\omega t} / \underline{I}_C = U_0 C\omega e^{j\pi/2} \Rightarrow I_C = U_0 C\omega \end{aligned}$$

La représentation de Fresnel de ce circuit est alors :



En choisissant comme référence des phases la tension $u(t) = U_0 \cos(\omega t)$, on impose :

$$\begin{cases} i(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi) \\ u(t) = U_0 \cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{i} = I_0 e^{-j\varphi} e^{j\omega t} \\ \underline{u} = U_0 e^{j\omega t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{I} = I_0 e^{-j\varphi} \\ \underline{U} = U_0 \end{cases}$$

où φ se détermine rapidement soit à l'aide de la représentation de Fresnel :

$$\tan \varphi = \frac{I_L - I_C}{I_R} = R \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right)$$

soit directement par le calcul de l'impédance du circuit :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi} \Rightarrow \tan \varphi = -\frac{\Im\{1/\underline{Z}\}}{\Re\{1/\underline{Z}\}}$$

avec :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{L\omega j} + C\omega j = \frac{1}{R} + j \left(C\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \Rightarrow \tan \varphi = R \left(\frac{1}{L\omega} - C\omega \right)$$

EXERCICE

Un dipôle \mathcal{D}_u est alimenté par une tension sinusoïdale de valeur efficace $U_{\text{eff}} = 100$ V et de fréquence $f = 50$ Hz. Il absorbe alors une puissance moyenne $P_1 = 50$ W et son facteur de puissance vaut 0,5.

1. Déduire de ces informations l'impédance \underline{Z}_1 de \mathcal{D}_1 (son module Z_1 et son argument φ_1 qu'on supposera positif).
2. On adjoint en série à \mathcal{D}_1 un dipôle \mathcal{D} purement inductif ou capacitif, de manière à relever le facteur de puissance de l'ensemble $\{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}\}$ à la valeur 0,866.
 - a- À l'aide d'une représentation de Fresnel, trouver les caractéristiques de \mathcal{D} (son inductance L ou sa capacité C).
 - b- Vérifier ce résultat par le calcul direct de l'impédance \underline{Z}' du dipôle $\mathcal{D}' = \{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}\}$.

Corrigé

1. Soit $\underline{Z}_1 = Z_1 e^{j\varphi_1}$ l'impédance de \mathcal{D}_1 , qui absorbe alors une puissance moyenne :

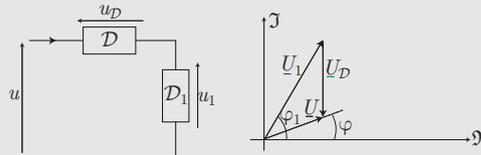
$$P_1 = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi_1 = \frac{U_{\text{eff}}^2}{Z_1} \cos \varphi_1 \text{ car } U_{\text{eff}} = Z_1 I_{\text{eff}} \Rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{Z_1}$$

$$\Rightarrow Z_1 = \frac{U_{\text{eff}}^2 \cos \varphi_1}{P_1} = \frac{10^4 \times 0,5}{50} = 100 \Omega$$

avec :

$$\cos \varphi_1 = 0,5 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

2. a- Soient \underline{U}_1 , $\underline{U}_{\mathcal{D}}$ et \underline{U} les amplitudes complexes des tensions aux bornes de \mathcal{D}_1 , de \mathcal{D} et de l'association $\mathcal{D}' = \{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}\}$ respectivement :



Si l'on souhaite augmenter le facteur de puissance $\cos \varphi$ de l'ensemble $\mathcal{D}' = \{\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}\}$, il convient de diminuer φ , c'est-à-dire d'orienter $\underline{U}_{\mathcal{D}}$ vers le bas du diagramme de Fresnel. Le dipôle \mathcal{D} est alors un condensateur de capacité C car :

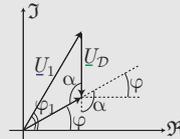
$$\underline{u}_{\mathcal{D}} = \frac{1}{C\omega j} i \Rightarrow \underline{U}_{\mathcal{D}} = \frac{I_0}{C\omega} e^{-j\pi/2} \text{ où } i = I_0 \cos(\omega t)$$

tandis qu'une bobine aurait généré une tension d'amplitude complexe :

$$\underline{U}_L = L\omega j I_0 = L\omega I_0 e^{j\pi/2}$$

orientée vers le haut du diagramme.

Soient ainsi : $U_1 = Z_1 I_0$ et $U_{\mathcal{D}} = \frac{1}{C\omega} I_0$ les amplitudes des tensions aux bornes de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D} respectivement :



La représentation de Fresnel du circuit fait alors apparaître un triangle dans lequel s'applique la relation :

$$\frac{U_{\mathcal{D}}}{\sin(\varphi_1 - \varphi)} = \frac{U_1}{\sin \alpha} \text{ où } \alpha = \frac{\pi}{2} + \varphi \Rightarrow \sin \alpha = \cos \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{I_0/C\omega}{\sin(\varphi_1 - \varphi)} = \frac{Z_1 I_0}{\cos \varphi} \Rightarrow C\omega = \frac{\cos \varphi}{Z_1 \sin(\varphi_1 - \varphi)} \quad (2)$$

où $\omega = 2\pi f = 314 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\cos \varphi = 0,866 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi = \frac{\pi}{3}$. C'est pourquoi :

$$C = \frac{\cos(\pi/3)}{100 \times 314 \times \sin(\pi/3)} \simeq 18 \mu\text{F}$$

- b- Le dipôle $\mathcal{D}' = \{\mathcal{D} + \mathcal{D}'\}$ possède une impédance :

$$\underline{Z}' = \underline{Z}_{\mathcal{D}} + \underline{Z}_1 \Rightarrow Z' \cos \varphi + jZ' \sin \varphi = Z \cos \varphi_1 + j \left(Z_1 \sin \varphi_1 - \frac{1}{C\omega} \right)$$

$$\Rightarrow Z' \cos \varphi = Z_1 \cos \varphi_1 \Rightarrow Z' = Z_1 \frac{\cos \varphi_1}{\cos \varphi}$$

et :

$$\frac{1}{C\omega} = Z_1 \sin \varphi_1 - Z' \sin \varphi = Z_1 \left(\sin \varphi_1 - \frac{\cos \varphi_1 \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) = \frac{Z_1}{\cos \varphi} (\sin \varphi_1 \cos \varphi - \cos \varphi_1 \sin \varphi)$$

$$= \frac{Z_1}{\cos \varphi} \sin(\varphi_1 - \varphi) \Rightarrow C\omega = \frac{\cos \varphi}{Z_1 \sin(\varphi_1 - \varphi)}$$

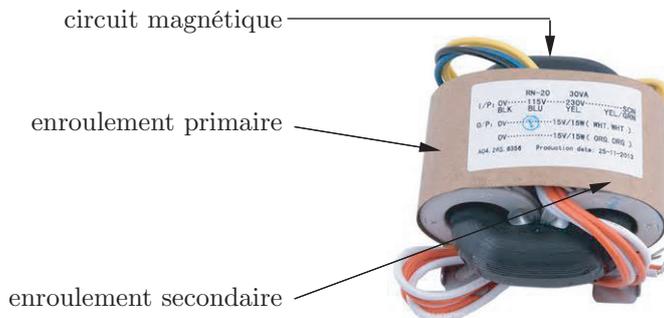
D2 Transformateur

1- Introduction

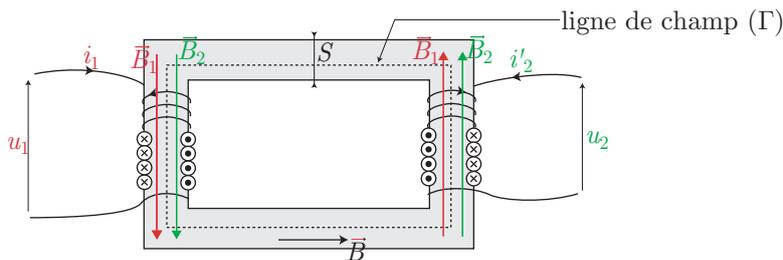
a- Présentation et modélisation

Un transformateur comporte :

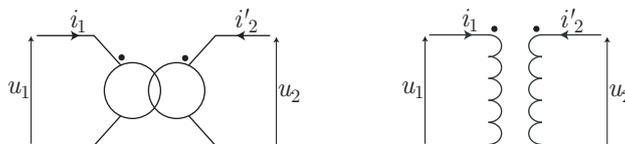
- un circuit magnétique \mathcal{C} composé d'un matériau ferromagnétique de perméabilité μ et de section S constante ;
- d'un enroulement primaire \mathcal{B}_1 comportant N_1 spires d'un fil de résistance r_1 ;
- d'un enroulement secondaire \mathcal{B}_2 comportant N_2 spires d'un fil de résistance r_2 .



Nous supposons les enroulements \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 répartis uniformément sur \mathcal{C} de sorte que le champ magnétique \vec{B} (ou l'excitation \vec{H}) dans \mathcal{C} soit uniforme ($B = \|\vec{B}\|$ et $H = \|\vec{H}\|$ ne dépendent pas de l'espace).



Ce transformateur admet deux représentations schématiques :

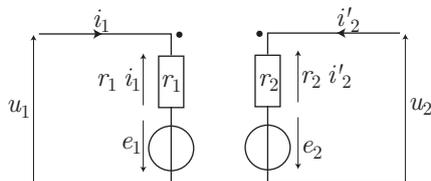


DÉFINITION

Les bornes homologues sont les bornes par lesquelles doivent arriver les courants i_1 et i'_2 pour que les flux magnétiques $\varphi_1 = SB_1$ et $\varphi_2 = SB_2$ qu'ils génèrent s'additionnent. Le flux φ à travers une section S vaut alors $\varphi = SB = SB_1 + SB_2$.

Les bornes homologues sont repérées par des points.

Le schéma électrique équivalent de ce dispositif est alors :



Les forces électromotrices e_1 et e_2 sont orientées conventionnellement dans le sens des courants i_1 et i'_2 qui alimentent ces enroulements.

De manière générale, les équations du transformateur sont issues :

- du théorème d'Ampère, en vertu duquel² :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{OM} = N_1 i_1 + N_2 i'_2 \quad (4)$$

où Γ est une ligne de champ de longueur ℓ à l'intérieur de \mathcal{C} . Il s'ensuit que :

$$H\ell = N_1 i_1 + N_2 i'_2 \Rightarrow \boxed{N_1 i_1 + N_2 i'_2 = \frac{B\ell}{\mu}} \text{ car } B = \mu H \quad (5)$$

- du modèle électrique des enroulements :

$$u_1 = r_1 i_1 - e_1 \text{ et } u_2 = r_2 i'_2 - e_2$$

où la loi de Faraday relie les forces électromotrices e_i aux flux du champ magnétique $\Phi_i = N_i \varphi$ à travers chaque enroulement³ :

$$e_i = -\frac{d\Phi_i}{dt} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\Phi_1}{dt} \\ u_2 = r_2 i'_2 + \frac{d\Phi_2}{dt} \end{cases}} \text{ où } \Phi_i = N_i \varphi \quad (6)$$

- du modèle magnétique des enroulements :

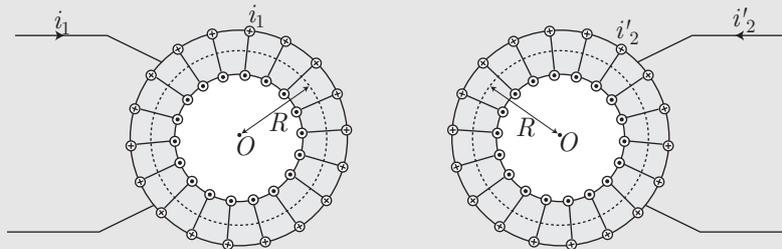
$$\boxed{\Phi_1 = L_1 i_1 + M i'_2 \text{ et } \Phi_2 = L_2 i'_2 + M i_1} \quad (7)$$

EXERCICE

Un transformateur est constitué :

- d'un matériau ferromagnétique (\mathcal{C}) torique de rayon moyen R et de section S constante ;
- d'un enroulement primaire (\mathcal{B}_1) de N_1 fils sans résistance, répartis uniformément sur le tore ;
- d'un enroulement secondaire (\mathcal{B}_2) de N_2 fils sans résistance, répartis uniformément sur le tore.

Les courants i_1 et i'_2 circulant dans \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 engendrent dans \mathcal{C} des flux magnétiques qui s'additionnent.



On admettra qu'à l'intérieur du tore le champ magnétique \vec{B} , ainsi que l'excitation magnétique \vec{H} , sont uniformes (leurs normes B et H ne varient pas d'un point à l'autre).

1. En appliquant le théorème d'Ampère, donner les expressions des auto-inductances L_1 , L_2 et de l'inductance mutuelle M en fonction de N_1 , N_2 , R , μ , S .
2. En déduire que $\frac{L_1}{M} = \frac{1}{m}$ et $\frac{M}{L_2} = \frac{1}{m}$ où $m = \frac{N_2}{N_1}$ est le rapport de transformation.
3. Le couplage magnétique entre les enroulements est-il parfait ?

2. En tenant compte des courants de Foucault qui se développent dans \mathcal{B} , la loi (4) devient :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{OM} = N_1 i_1 + N_2 i'_2 - i_F \text{ où } i_F > 0 \quad (3)$$

3. Dans le cas où des pertes magnétiques se produiraient, la condition (6) : $\Phi_i = N_i \varphi$ serait remplacée par :

$$\Phi_1 = N_1 \varphi \text{ et } \Phi_2 = N_2 \varphi' \text{ où } \varphi \neq \varphi'$$

Corrigé

1. Une ligne de champ (Γ) circulaire, de rayon R , circonscrit une surface traversée par le courant $I = N_1 i_1 + N_2 i'_2$. Le théorème d'Ampère s'y applique alors, en remarquant que $\vec{H}(M)$ et $d\vec{OM}$ sont colinéaires sur une ligne de champ :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{OM} = I \Rightarrow H \times 2\pi R = N_1 i_1 + N_2 i'_2 \text{ où } B = \mu H \Rightarrow H = \frac{B}{\mu}$$

$$\Rightarrow B \times \frac{2\pi R}{\mu} = N_1 i_1 + N_2 i'_2 \Rightarrow B = \frac{\mu N_1}{2\pi R} i_1 + \frac{\mu N_2}{2\pi R} i'_2$$

Donc, le flux magnétique à travers les enroulements \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 vaut respectivement :

$$\Phi_1 = B \times N_1 S = \frac{\mu N_1^2 S}{2\pi R} i_1 + \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi R} i'_2 = L_1 i_1 + M i'_2$$

et :

$$\Phi_2 = B \times N_2 S = \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi R} i_1 + \frac{\mu N_2^2 S}{2\pi R} i'_2 = M i_1 + L_2 i'_2$$

où :

$$L_1 = \frac{\mu N_1^2 S}{2\pi R} \quad L_2 = \frac{\mu N_2^2 S}{2\pi R} \quad M = \frac{\mu N_1 N_2 S}{2\pi R}$$

2. On en déduit que :

$$\frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{m} \text{ et } \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{m}$$

3. Du résultat précédent, il découle que :

$$\frac{L_1}{M} = \frac{M}{L_2} \Rightarrow L_1 L_2 = M^2$$

ce qui prouve que, dans le modèle adopté, le couplage magnétique entre les enroulements est parfait.

D'une manière générale, les relations (7) s'écrivent :

$$L_1 i_1 + M i'_2 = \Phi_1 = N_1 \varphi \text{ et } L_2 i'_2 + M i_1 = \Phi_2 = N_2 \varphi' \quad (8)$$

Deux cas extrêmes peuvent être envisagés :

- À vide, le primaire est alimenté par un courant i_1 tandis que le secondaire demeure ouvert, ce qui impose $i'_2 = 0$. Les relations précédentes deviennent :

$$L_1 i_1 = N_1 \varphi \text{ et } M i_1 = N_2 \varphi'$$

Si le couplage magnétique entre les bobinages est parfait, $\varphi = \varphi'$. Or, si des pertes magnétiques entre les bobinages sont à déplorer, φ' est plus petit que φ , ce que l'on peut écrire :

$$\varphi' = \alpha \varphi \text{ avec } \alpha < 1$$

d'où il s'ensuit que :

$$\frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2} \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{1}{\alpha m}$$

- Si le secondaire est alimenté par un courant i_2 alors que le primaire demeure ouvert, les relations (8) deviennent :

$$M i'_2 = N_1 \varphi \text{ et } L_2 i'_2 = N_2 \varphi'$$

À nouveau, si le couplage magnétique était parfait, il assurerait $\varphi' = \varphi$, tandis que les pertes magnétiques réduiraient la valeur de φ par rapport à φ' :

$$\varphi = \alpha' \varphi' \text{ avec } \alpha' < 1$$

ce qui implique que :

$$\frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{\alpha'}{m}$$

Donc, d'une manière générale :

$$\begin{cases} \frac{L_1}{M} = \frac{1}{\alpha m} \\ \frac{M}{L_2} = \frac{1}{m} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{\alpha L_1}{M} = \frac{M}{\alpha' L_2} \Rightarrow \frac{M^2}{L_1 L_2} = \alpha \alpha' < 1$$

En conclusion :

- Si le couplage magnétique est parfait :

$$\frac{L_1}{M} = \frac{1}{m} \quad \frac{M}{L_2} = \frac{1}{m} \quad \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1$$

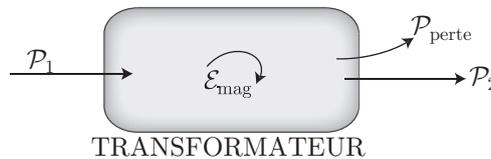
- S'il existe des pertes de flux magnétique :

$$\frac{L_1}{M} = \frac{1}{\alpha m} \quad \frac{M}{L_2} = \frac{\alpha'}{m} \quad \frac{M^2}{L_1 L_2} = \alpha \alpha' < 1 \text{ car } \alpha < 1 \text{ et } \alpha' < 1 \quad (9)$$

b- Transfert de puissance

Lorsqu'un transformateur reçoit une puissance électrique moyenne P_1 , il peut :

- transférer une puissance électrique moyenne P_2 ;
- perdre une puissance moyenne P_{pertes} sous forme d'effet Joule (les fils électriques du transformateur possèdent une résistance non nulle) ou sous forme de courants de Foucault (qui échauffent également le transformateur) ou encore sous forme d'hystérésis (la mise en oscillation des dipôles magnétiques qui composent le matériau ferromagnétique consomme de l'énergie).
- emmagasiner une énergie magnétique \mathcal{E}_{mag} (par exemple dans les bobines constituées par les enroulements).



Ces transferts d'énergie peuvent alors se traduire par l'équation :

$$\mathcal{P}_1(t) = \mathcal{P}_2(t) + \mathcal{P}_{\text{pertes}}(t) + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} \Rightarrow P_1 = P_2 + P_{\text{pertes}} + \left\langle \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} \right\rangle \quad (10)$$

Désormais, ces transferts seront résumés par le tableau suivant :

	PERTES CUIVRE	PERTES FER		
	Joule	Foucault	Hystérésis	\mathcal{E}_{mag}
$\mu_r \neq \infty$			×	×
Feuilletage		×		
$r_i \neq \infty$	×			
φ_{perdu}				×

qui rappelle que :

- si la perméabilité du matériau ferromagnétique (\mathcal{C}) n'est pas infinie, non seulement des pertes par hystérésis se produiront, mais (\mathcal{C}) accumulera également une énergie magnétique \mathcal{E}_{mag} donnée par :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint_{(\mathcal{C})} \frac{B^2}{2\mu} d\tau \neq 0 \text{ si } \mu \neq \infty \quad (11)$$

- des courants de Foucault dissipatifs peuvent se développer dans (C), sauf si un feuilletage efficace compose (C).
- la résistance électrique des fils est à l'origine de pertes thermiques par effet Joule.
- des pertes de flux magnétique peuvent provenir d'une accumulation d'énergie magnétique \mathcal{E}_{mag} dans (C) (ce résultat sera démontré ultérieurement).

2– Transformateur idéal

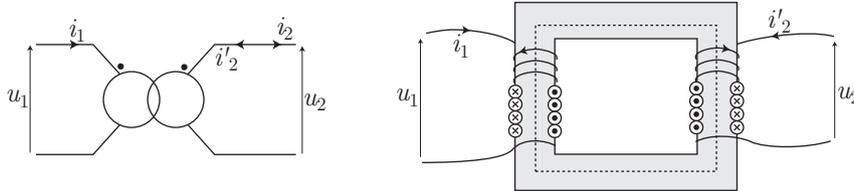


DÉFINITION

Un transformateur est idéal si :

- le matériau ferromagnétique qui le compose possède une perméabilité magnétique infinie ;
- les courants de Foucault ne peuvent pas se développer ;
- les fils électriques n'ont pas de résistance ;
- le couplage magnétique entre les enroulements est parfait (pas de perte de flux magnétique).

On remarque que cette définition vise à supprimer tous les facteurs qui apparaissent dans le tableau précédent. Examinons les conséquences des divers contraintes qui définissent le transformateur idéal, à partir du schéma conventionnel suivant :



- En l'absence de courants de Foucault, le théorème d'Ampère vérifie la loi (5) :

$$N_1 i_1 + N_2 i'_2 = \frac{B\ell}{\mu}$$

- Si la perméabilité du matériau ferromagnétique est infinie ($\mu \rightarrow \infty$) la loi précédente se simplifie :

$$N_1 i_1 + N_2 i'_2 = 0 \Rightarrow i'_2 = -\frac{N_1}{N_2} i_1 \Rightarrow \boxed{i'_2 = -\frac{i_1}{m} \text{ ou } i_2 = \frac{i_1}{m}} \quad (12)$$

- En l'absence de résistance électrique, les lois (6) deviennent :

$$u_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} \text{ et } u_2 = \frac{d\Phi_2}{dt}$$

- La nature parfaite du couplage magnétique entre les enroulements impose, quant à elle :

$$\begin{cases} \Phi_1 = N_1 \varphi \\ \Phi_2 = N_2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt} \\ u_2 = N_2 \frac{d\varphi}{dt} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{N_2}{N_1} u_1 = m u_1}$$

En désignant par $\mathcal{P}_1 = u_1 i_1$ et $\mathcal{P}_2 = u_2 i_2$ respectivement la puissance électrique instantanée reçue par le primaire et celle émise par le secondaire, il apparaît alors que :

$$\mathcal{P}_2 = u_2 \times i_2 = m u_1 \times \frac{i_1}{m} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2 \Rightarrow P_2 = P_1}$$

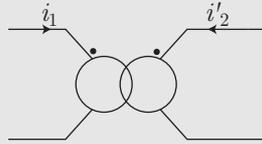
ce qui confirme l'identité (10). En conclusion :

Un transformateur idéal est caractérisé par les lois de transformation :

$$u_2 = m u_1 \quad i_2 = -i'_2 = \frac{1}{m} i_1 \quad P_2 = P_1$$

EXERCICE 

L'enroulement primaire et l'enroulement secondaire d'un transformateur sont alimentés par les courants respectifs i_1 et i'_2 :



On note $m = \frac{N_2}{N_1}$ le rapport de transformation et on rappelle qu'en l'absence de courants de Foucault, le flux magnétique dans le matériau ferromagnétique suit les lois (7) :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i'_2 = N_1 \varphi \text{ et } \Phi_2 = L_2 i'_2 + M i_1 = N_2 \varphi'$$

où L_1 , L_2 et M sont respectivement les auto-inductances et l'inductance mutuelle des enroulements.

1. Montrer qu'en l'absence de pertes magnétiques : $M = m L_1$ et $M = \frac{L_2}{m}$.
2. Rappeler l'expression de l'énergie magnétique \mathcal{E}_{mag} emmagasinée dans le transformateur, en fonction de L_1 , L_2 , M , i_1 et i'_2 .
3. En déduire qu'en l'absence de pertes magnétiques :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{M}{2m} (i_1 + m i'_2)^2$$

4. Un transformateur idéal peut-il emmagasiner de l'énergie magnétique ?

Corrigé

1. En l'absence de pertes magnétiques, les flux magnétiques vérifient :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M i'_2 = N_1 \varphi \text{ et } \Phi_2 = L_2 i'_2 + M i_1 = N_2 \varphi'$$

Notamment :

- si $i_2 = 0$, le courant qui traverse le primaire produit les flux :

$$\begin{cases} L_1 i_1 = N_1 \varphi \\ M i_1 = N_2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{L_1}{M} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{m} \Rightarrow M = m L_1$$

- si $i_1 = 0$, le courant qui traverse le secondaire produit les flux :

$$\begin{cases} M i'_2 = N_1 \varphi \\ L_2 i'_2 = N_2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{M}{L_2} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{m} \Rightarrow M = \frac{L_2}{m}$$

2. Les enroulements étant en influence magnétique, l'énergie \mathcal{E}_{mag} emmagasinée dans le transformateur vaut :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i'_2{}^2 + M i_1 i'_2 = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2M i_1 i'_2 + L_2 i'_2{}^2)$$

3. En tenant compte des résultats de la première question, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{mag}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{M}{m} i_1^2 + 2M i_1 i'_2 + M m i'_2{}^2 \right) = \frac{M}{2m} (i_1^2 + 2i_1 \times m i'_2 + m^2 i'_2{}^2) \\ &\Rightarrow \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{M}{2m} (i_1 + m i'_2)^2 \end{aligned}$$

4. La loi de transformation des courants pour un transformateur idéal s'écrit :

$$i_1 = -m i'_2 \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{mag}} = 0$$

ce qui suffit à montrer qu'il ne peut y avoir accumulation d'énergie magnétique.

3– Les pertes

a– Pertes fer et pertes cuivre



DÉFINITION

Les pertes cuivre d'un transformateur sont les pertes d'énergie par effet Joule provoquées par les résistances non nulles r_1 et r_2 des bobinages.



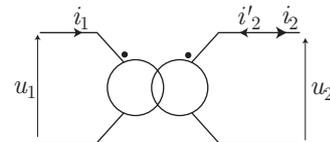
DÉFINITION

Les pertes fer d'un transformateur sont les pertes d'énergie produites par :

- les courants de Foucault qui se développent dans le matériau ferromagnétique qui s'échauffe alors. Pour limiter ces pertes, il convient d'utiliser un matériau ferromagnétique mauvais conducteur de l'électricité et de le sectionner en tôles électriquement isolées les unes des autres (feuilletage).
- le cycle d'hystérésis qui révèle le mouvement des dipôles magnétiques, lequel mouvement consomme de l'énergie.

L'étude qui suit ne portera que sur les pertes cuivre et pertes fer :

	PERTES CUIVRE	PERTES FER		
	Joule	Foucault	Hystérésis	\mathcal{E}_{mag}
$\mu_r \neq \infty$			✗	✗
Feuilletage		✗		
$r_i \neq \infty$	✗			
φ_{perdu}				✗



Considérons un transformateur dont le primaire (constitué de N_1 spires) est alimenté par une tension u_1 et par un courant i_1 . Le secondaire produit une tension u_2 et délivre un courant i_2 (opposé au courant i'_2 qui rentrerait dans la borne homologue du secondaire ; il suffira de remplacer i'_2 par $-i_2$ dans les lois du transformateur).

Les lois (6) s'écrivent alors :

$$u_1 = r_1 i_1 + \frac{d\Phi_1}{dt} \text{ et } u_2 = -r_2 i_2 + \frac{d\Phi_2}{dt}$$

d'où sont issues les expressions des f.c.é.m. :

$$e'_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = u_1 - r_1 i_1 \text{ et } e'_2 = \frac{d\Phi_2}{dt} = u_2 + r_2 i_2$$

Dans l'hypothèse d'un couplage parfait :

$$\begin{cases} \Phi_1 = N_1 \varphi \\ \Phi_2 = N_2 \varphi \end{cases} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{e'_1}{N_1} = \frac{e'_2}{N_2} \Rightarrow N_2 e'_1 = N_1 e'_2 \quad (13)$$

Quant au théorème d'Ampère, en présence de courants de Foucault i_F , il généralise l'identité (5) :

$$N_1 i_1 - N_2 i_2 - i_F = Hl \Rightarrow N_1 i_1 = N_2 i_2 + Hl + i_F \Rightarrow N_1 e'_1 i_1 = N_2 e'_1 i_2 + e'_1 Hl + e'_1 i_F$$

où la f.c.é.m. est définie par :

$$e'_1 = N_1 \frac{d\varphi}{dt} = N_1 S \frac{dB}{dt}$$

Aussi, en utilisant la relation (13), on obtient :

$$\begin{aligned} N_1 e'_1 i_1 &= N_1 e'_2 i_2 + N_1 S \frac{dB}{dt} Hl + N_1 i_F \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow e'_1 i_1 = e'_2 i_2 + SlH \frac{dB}{dt} + i_F \frac{d\varphi}{dt} \\ &\Rightarrow i_1 (u_1 - r_1 i_1) = i_2 (u_2 + r_2 i_2) + SlH \frac{dB}{dt} + i_F \frac{d\varphi}{dt} \\ &\Rightarrow u_1 i_1 = u_2 i_2 + r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + SlH \frac{dB}{dt} + i_F \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned} \quad (14)$$

On reconnaît, dans cette expression :

- la valeur instantanée de la puissance électrique $\mathcal{P}_1 = u_1 i_1$ reçue par le primaire et celle de la puissance électrique $\mathcal{P}_2 = u_2 i_2$ fournie par le secondaire, auxquelles sont associées les valeurs moyennes pendant une période T :

$$P_1 = \langle u_1 i_1 \rangle_T \text{ et } P_2 = \langle u_2 i_2 \rangle_T$$

- la valeur instantanée de la puissance $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2$ dissipée par effet Joule par les fils électriques composant les enroulements ; sa valeur moyenne vaut :

$$P_{\text{Joule}} = \langle r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 \rangle_T$$

- la valeur instantanée de la puissance $\mathcal{P}_{\text{hyst.}}(t) = SlH \frac{dB}{dt}$ perdue par hystérésis dans le matériau ferromagnétique de volume $\mathcal{V} = Sl$, pendant la période T ; sa valeur moyenne est définie par :

$$P_{\text{hyst.}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}_{\text{hyst.}}(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{V} H \frac{dB}{dt} dt = \frac{\mathcal{V}}{T} \oint H dB \quad (15)$$

$$\Rightarrow P_{\text{hyst.}} = \mathcal{V} f \mathcal{A}$$

où $f = \frac{1}{T}$ désigne la fréquence du courant et $\mathcal{A} = \oint H dB$ l'aire du cycle d'hystérésis⁴

- la puissance instantanée $\mathcal{P}_{\text{Fouc.}}(t) = i_F \frac{d\varphi}{dt}$ dissipée par les courants de Foucault, de valeur moyenne :

$$P_{\text{Fouc.}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}_{\text{Fouc.}}(t) dt$$

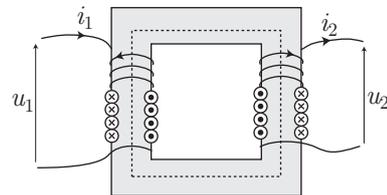
Par conséquent, la relation (14) rend compte des diverses pertes d'énergie par le transformateur :

$$P_1 = P_2 + \underbrace{P_{\text{Joule}}}_{\text{pertes cuivre}} + \underbrace{P_{\text{hyst.}} + P_{\text{Fouc.}}}_{\text{pertes fer}}$$

b– Énergie magnétique emmagasinée

L'étude de l'énergie magnétique emmagasinée dans le matériau ferromagnétique (\mathcal{C}) n'est pas exigible. Elle est fournie pour justifier la présence du terme \mathcal{E}_{mag} dans le tableau qui recense les causes de non-idéalité d'un transformateur.

	PERTES CUIVRE		PERTES FER		\mathcal{E}_{mag}
	Joule	Foucault	Hystérésis		
$\mu_r \neq \infty$			×	×	
Feuilletage		×			
$r_i \neq \infty$	×				
φ_{perdu}					×



Rappelons que l'énergie magnétique emmagasinée dans (\mathcal{C}) est donnée par :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint_{(\mathcal{C})} \frac{B^2}{2\mu} d\tau \text{ où } B \neq 0$$

4. Compte tenu de la relation : $B = \mu H \Rightarrow H = \frac{B}{\mu}$, l'aire du cycle d'hystérésis s'écrit :

$$\mathcal{A} = \oint H dB = \oint \frac{B}{\mu} dB \Rightarrow \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{A} = 0$$

ce qui prouve qu'une perméabilité magnétique non infinie suffit à produire des pertes par hystérésis.

ce qui confirme que si $\mu \neq \infty$ (ou $\mu_r \neq \infty$), $\mathcal{E}_{\text{mag}} \neq 0$.

En outre, \mathcal{E}_{mag} peut s'exprimer en fonction du courant i_1 qui alimente le primaire, du courant i_2 délivré par le secondaire (il convient de remplacer i'_2 par i_2 dans les relations (6) et (7), des auto-inductances L_1, L_2 , et de l'inductance mutuelle M :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - M i_1 i_2$$

où les coefficients d'induction qui tiennent compte des pertes de flux magnétique sont donnés par les identités (9) :

$$L_1 = \frac{M}{\alpha m} \quad L_2 = \frac{mM}{\alpha} \quad \text{en supposant que } \alpha = \alpha' \leq 1 \quad (16)$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{mag}} &= \frac{1}{2} \left[\frac{M}{\alpha m} i_1^2 - 2M i_1 i_2 + \frac{mM}{\alpha} i_2^2 \right] = \frac{M}{2\alpha m} [i_1^2 - 2\alpha m i_1 i_2 + m^2 i_2^2] \\ &= \frac{M}{2\alpha m} [i_1^2 - 2i_1 (mi_2) + (mi_2)^2 + 2i_1 (mi_2) - 2\alpha mi_1 i_2] \\ &= \frac{M}{2\alpha m} [(i_1 - mi_2) + 2i_1 i_2 (1 - \alpha)] \end{aligned}$$

où $i_1 > 0$, $i_2 > 0$ et $\alpha \leq 1$ suffisent à prouver que :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} \geq \frac{M}{2\alpha m} \times 2i_1 i_2 m (1 - \alpha) \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{mag}} > 0 \text{ si } \alpha < 1}$$

Cette inégalité prouve qu'une énergie accumulée dans (C) peut être à l'origine de pertes de flux magnétiques.

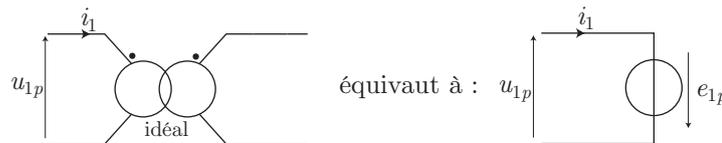
c- Modèle de Kapp

Ce modèle n'est pas une exigence du programme de PSI, mais sa présentation permettra de faire une synthèse entre le transformateur idéal et le transformateur réel. Ce modèle consiste à associer à un transformateur idéal des résistances et bobinages qui justifient l'écart à l'idéalité du transformateur réel.

- Modélisation des pertes du primaire

Afin de n'étudier que les pertes provenant de l'enroulement primaire, nous étudierons le transformateur à vide ($i'_2 = 0$).

Si le transformateur était idéal, il recevrait un courant i_1 sous une tension u_{1p} :



où $u_{1p} = -e_{1p} = \frac{d\Phi_{1p}}{dt}$, le flux Φ_{1p} vérifiant alors :

$$\Phi_{1p} = L_{1p} i_1 + M i'_2 = L_{1p} i_1$$

En revanche, si des pertes de flux magnétique affectent le transformateur, son auto-inductance est donnée par l'identité (16) :

$$L_1 = \frac{M}{\alpha m} \text{ et } L_{1p} = \frac{M}{m} \text{ où } \alpha \leq 1$$

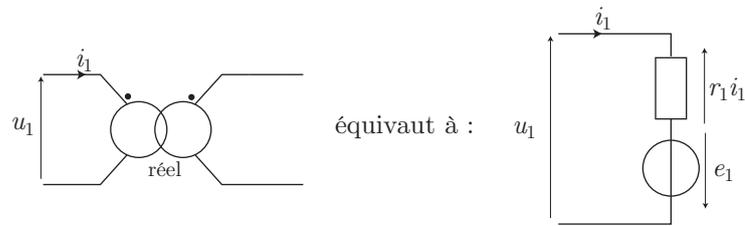
Donc $L_1 \geq L_{1p}$ montre qu'il existe un nombre réel positif \mathcal{L}_1 tel que :

$$L_1 = L_{1p} + \mathcal{L}_1$$

Dans ce cas, le flux magnétique à travers le primaire s'écrit :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 = L_{1p} i_1 + \mathcal{L}_1 i_1 = \Phi_{1p} + \mathcal{L}_1 i_1$$

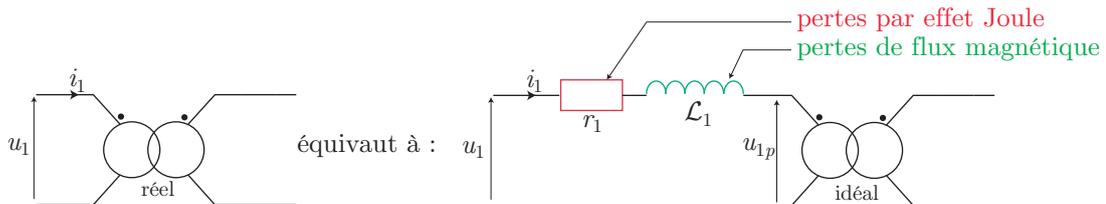
Le transformateur réel est alors traversé par un courant i_1 sous une tension u_1 :



de sorte que :

$$u_1 = r_1 i_1 - e_1 = r_1 i_1 + \frac{d\Phi_1}{dt} = r_1 i_1 + \mathcal{L}_1 \frac{di_1}{dt} + \frac{d\Phi_{1p}}{dt} \Rightarrow u_1 = r_1 i_1 + \mathcal{L}_1 \frac{di_1}{dt} + u_{1p}$$

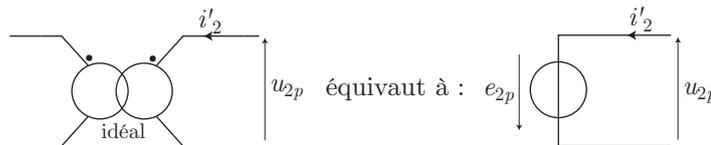
Par conséquent, l'adjonction d'une résistance r_1 et d'une bobine d'inductance \mathcal{L}_1 en série avec un transformateur idéal permet d'en expliquer une partie des pertes :



– Modélisation des pertes du secondaire

À nouveau, l'étude du secondaire sera réalisée en supposant le primaire ouvert ($i_1 = 0$).

Si le transformateur était idéal, il recevrait le courant i'_2 sous une tension u_{2p} :



avec :

$$\Phi_{2p} = L_{2p} i'_2 + M i_1 = L_{2p} i'_2 \text{ et } u_{2p} = -e_{2p} = \frac{d\Phi_{2p}}{dt}$$

En présence de pertes magnétiques, l'auto-inductance du secondaire est donnée par l'identité (16) :

$$L_2 = \frac{mM}{\alpha} \text{ et } L_{2p} = mM \text{ où } \alpha \leq 1$$

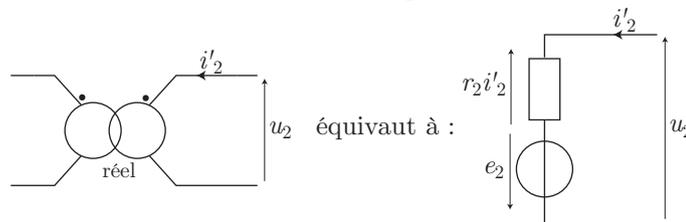
Par conséquent : $L_2 \geq L_{2p}$ montre qu'il existe un nombre réel positif \mathcal{L}_2 tel que :

$$L_2 = L_{2p} + \mathcal{L}_2$$

Dans ce cas, le flux magnétique à travers le secondaire s'écrit :

$$\Phi_2 = L_2 i'_2 = L_{2p} i'_2 + \mathcal{L}_2 i'_2 = \Phi_{2p} + \mathcal{L}_2 i'_2$$

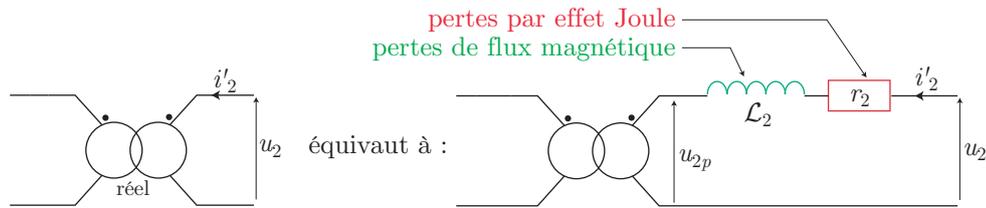
Le transformateur réel est alors traversé par un courant i'_2 , sous une tension u_2 :



de sorte que :

$$u_2 = r_2 i'_2 - e_2 = r_2 i'_2 + \frac{d\Phi_2}{dt} = r_2 i'_2 + \mathcal{L}_2 \frac{di'_2}{dt} + \frac{d\Phi_{2p}}{dt} \Rightarrow u_2 = r_2 i'_2 + \mathcal{L}_2 \frac{di'_2}{dt} + u_{2p}$$

Par conséquent, l'adjonction d'une résistance r_2 et d'une bobine d'inductance \mathcal{L}_2 en série avec un transformateur idéal permet d'en expliquer une partie des pertes :



- Courants de Foucault et énergie emmagasinée

Considérons un transformateur idéal à vide ($i'_2 = 0$), en négligeant les pertes mentionnées précédemment.



La loi (12) $i_{1p} = m i_{2p}$ montre qu'un tel transformateur recevrait un courant nul alors que l'expérience montre le contraire ($i_1 \neq 0$). Pour en rendre compte, il conviendra d'adjoindre un ou des dipôles en parallèle avec le primaire.

En présence de courants de Foucault (i_F), la relation (5) se généralise :

$$\begin{aligned} H\ell = N_1 i_1 + N_2 i'_2 - i_F &\Rightarrow N_1 i_1 = H\ell + i_F \text{ car } i'_2 = 0 \text{ à vide} \\ &\Rightarrow N_1 i_1 = \frac{B}{\mu} \ell + i_F \Rightarrow i_1 = \frac{\ell}{N_1 \mu} B + \frac{i_F}{N_1} \end{aligned}$$

En outre, u_1 est lié au flux Φ_1 du champ magnétique B à travers les N_1 spires du primaire (de section S) :

$$u_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = N_1 S \frac{dB}{dt} \Rightarrow B = \frac{1}{N_1 S} \int u_1 dt \Rightarrow i_1 = \frac{\ell}{N_1^2 \mu S} \int u_1 dt + \frac{i_F}{N_1}$$

Donc, le courant i_1 est la somme de deux courants :

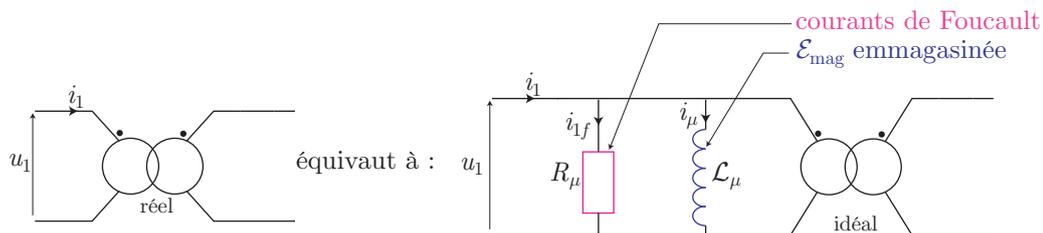
- un courant i_{1f} proportionnel à i_F et qui génère un échauffement par effet Joule, comme le fait une résistance ;
- un courant i_μ , proportionnel à la primitive de u_1 :

$$i_\mu = \frac{1}{\mathcal{L}_\mu} \int u_1 dt$$

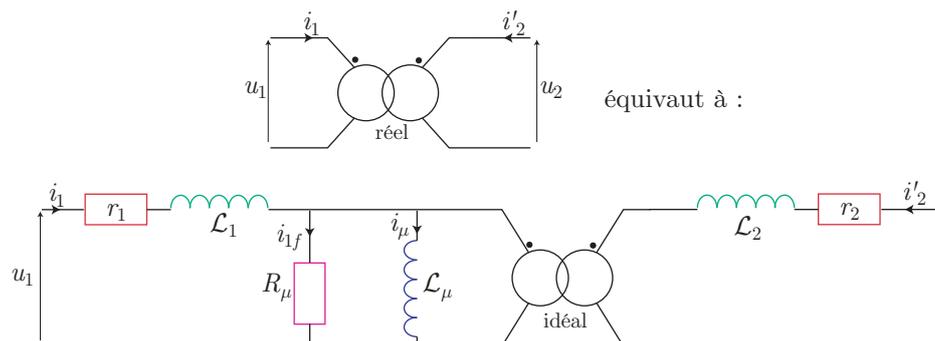
qui peut être assimilé à un courant qui passerait dans une bobine d'auto-inductance \mathcal{L}_μ :

$$u_1 = \mathcal{L}_\mu \frac{di_\mu}{dt}$$

C'est pourquoi l'effet des courants de Foucault et de l'énergie magnétique emmagasinée est modélisé par une résistance R_μ et par une bobine d'inductance \mathcal{L}_μ en parallèle avec le transformateur idéal :



En conclusion le modèle de KAPP suggère l'équivalence d'un transformateur réel avec :

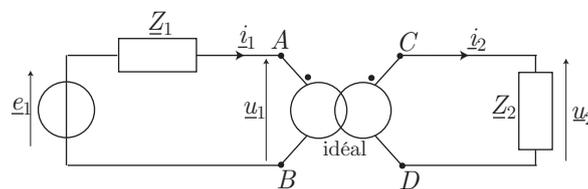


Le modèle de KAPP permet ainsi d'associer un dipôle à chaque défaut du transformateur :

	PERTES CUIVRE	PERTES FER		\mathcal{E}_{mag}
	Joule	Foucault	Hystérésis	
$\mu_r \neq \infty$			×	×
Feuilletage		×		
$r_i \neq \infty$	×			
φ_{perdu}				×
KAPP	$r_1 \ r_2$	R_μ	\mathcal{L}_μ	$\mathcal{L}_1 \ \mathcal{L}_2$

4- Transfert d'impédance

Considérons, dans un premier temps, un transformateur idéal dont le primaire est alimenté par un générateur (f.é.m. e_1) en série avec une impédance Z_1 , alors que le secondaire est relié à une charge d'impédance Z_2 :



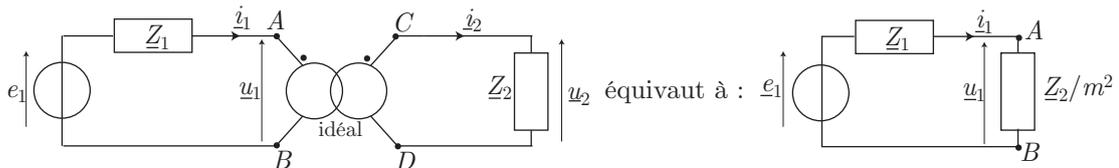
- Impédance équivalente rapportée au primaire

Puisque le transformateur est idéal : $u_1 = \frac{1}{m} u_2$, c'est-à-dire :

$$u_1 = \frac{1}{m} \times Z_2 i_2 \text{ avec } i_2 = \frac{1}{m} i_1 \Rightarrow u_1 = \frac{Z_2}{m^2} i_1$$

Donc, vu du primaire, tout se passe comme si une impédance $Z'_2 = \frac{Z_2}{m^2}$ était reliée aux bornes A et B ;

il s'agit de l'impédance du secondaire rapportée au primaire :



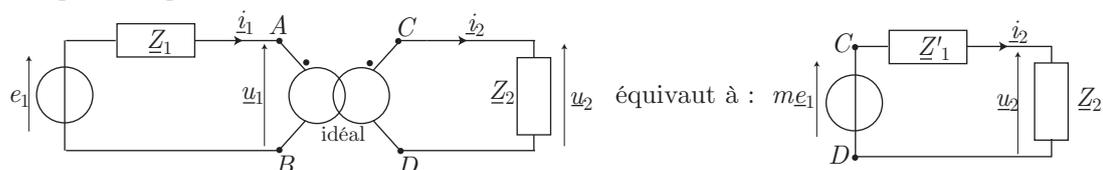
- Impédance équivalente rapportée au secondaire

La tension u_2 délivrée par le secondaire vérifie :

$$u_2 = m u_1 = m (e_1 - Z_1 i_1) = m e_1 - Z_1 \times m i_1 \text{ où } i_1 = m i_2$$

$$\Rightarrow u_2 = m e_1 - Z'_1 i_2 \text{ avec } Z'_1 = m^2 Z_1$$

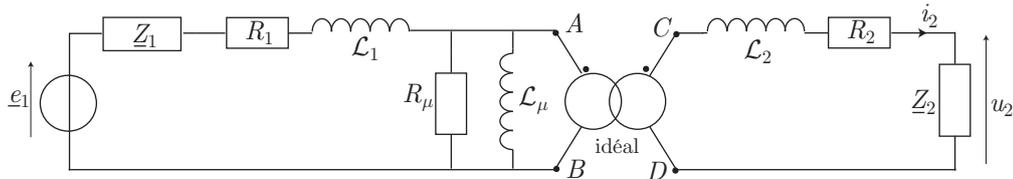
Par conséquent, le secondaire se comporte comme un générateur de tension de f.é.m. $m e_1$ et d'impédance interne $Z'_1 = m^2 Z_1$:



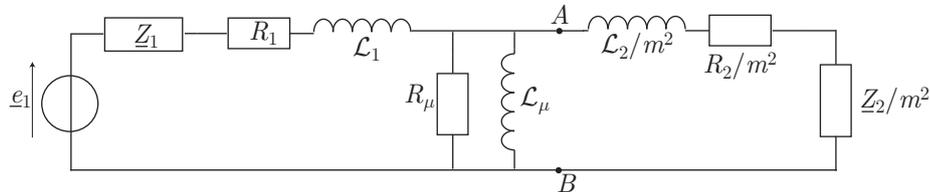
Si le transformateur n'est pas idéal, le transfert d'impédance s'opère en tenant compte des éléments du modèle de KAPP.

– Impédance équivalente rapportée au primaire

Le montage :



équivalent, pour le primaire, à :

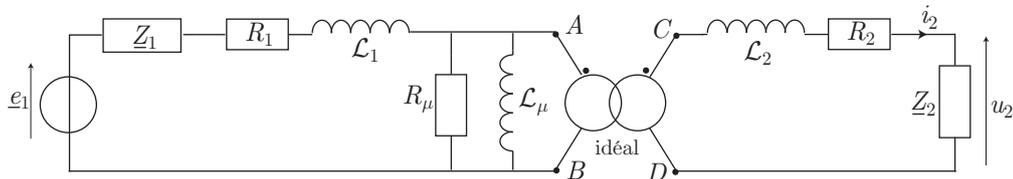


– Impédance équivalente rapportée au secondaire

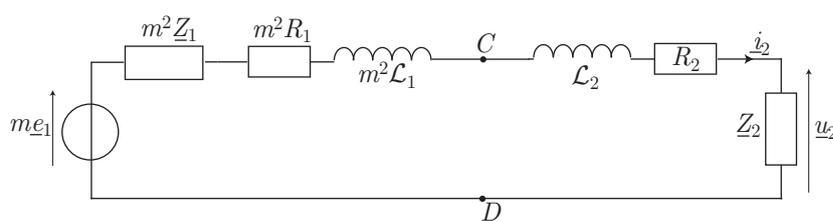
Le transfert d'impédance vers le secondaire se fait également par une simple multiplication par m^2 .

Attention : Les dipôles de perte fer (R_μ et L_μ) ne sont pas transférés vers le secondaire.

Ainsi, le montage :



équivalent à :

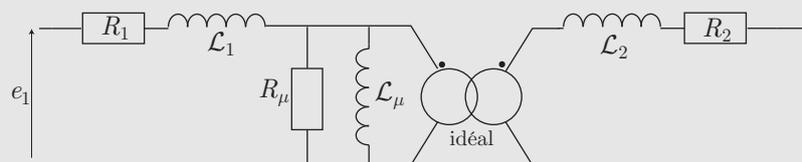


EXERCICE

Un transformateur monophasé porte les indications suivantes sur la plaque signalétique :

fréquence 50 Hz
 rendement 95 %
 primaire $V_{1n} = 220 \text{ V} - I_{1n} = 10 \text{ A} - R_1 = 0,27 \Omega$
 secondaire $V_{2n} = 127 \text{ V} - I_{2n} = 17,3 \text{ A}$

Or rappelle le modèle de KAPP d'un transformateur réel :

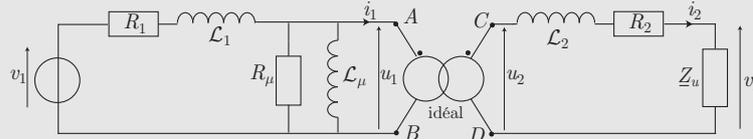


1. Le rendement fourni correspond à une charge traversée par le courant efficace I_{2n} , sous la tension efficace V_{2n} et présentant un facteur de puissance $\cos \varphi = 0,8$. Calculer la valeur des pertes dans le transformateur, dans ces conditions.
2. Représenter un schéma équivalent, ramené au secondaire, du transformateur en faisant apparaître les éléments du modèle de KAPP.
3. La tension du secondaire à vide de ce transformateur a pour valeur efficace $V_0 = 133 \text{ V}$. Calculer alors le rapport de transformation m en négligeant le courant traversant R_μ et L_μ .

4. En supposant qu'au régime nominal les pertes sont uniformément réparties entre pertes fer et pertes Joule, calculer la valeur de tous les éléments résistifs du schéma.
5. Calculer la valeur de l'inductance de fuite totale \mathcal{L} ramenée au secondaire du transformateur.

Corrigé

1. Soit $\underline{Z}_u = Z_u \cos \varphi$ l'impédance de la charge connectée au secondaire :



La puissance instantanée $\mathcal{P}_1(t)$ reçue par le primaire se répartit en une puissance $\mathcal{P}_2(t)$ distribuée à la charge, en une puissance $\mathcal{P}_{\text{pertes}}$ perdue (pertes fer dans R_μ , \mathcal{L}_μ et pertes Joule dans R_1 , R_2) et à une énergie magnétique emmagasinée \mathcal{E}_{mag} dans le transformateur (\mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2) :

$$\mathcal{P}_1(t) = \mathcal{P}_2(t) + \mathcal{P}_{\text{pertes}}(t) + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} \quad (17)$$

– Les valeurs moyennes de \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 et $\mathcal{P}_{\text{pertes}}$ seront notées :

$$P_i \hat{=} \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{P}_i(t) dt$$

La valeur moyenne de la puissance magnétique emmagasinée dans le transformateur vaut :

$$\left\langle \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} \right\rangle_T \hat{=} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} dt = \frac{1}{T} \int_0^T d\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{T} [\mathcal{E}_{\text{mag}}(T) - \mathcal{E}_{\text{mag}}(0)] = 0$$

Donc, en moyenne sur une période, l'identité (17) devient :

$$P_1 = P_2 + P_{\text{pertes}}$$

où P_2 représente 95% de P_1 :

$$P_2 = 0,95 P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{P_2}{0,95}$$

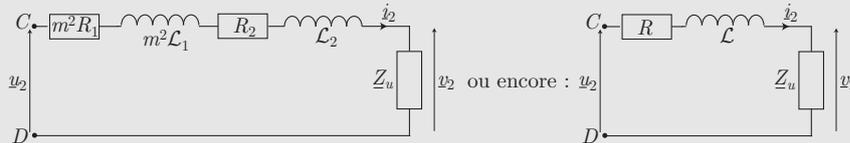
tandis que la puissance moyenne reçue par la charge s'écrit à l'aide des grandeurs efficaces V_{2n} et I_{2n} :

$$P_2 = V_{2n} I_{2n} \cos \varphi$$

Par suite :

$$\begin{aligned} P_{\text{pertes}} &= P_1 - P_2 = P_2 \left(\frac{1}{0,95} - 1 \right) = V_{2n} I_{2n} \cos \varphi \times \left(\frac{1}{0,95} - 1 \right) \\ &= 127 \times 17,3 \times 0,8 \times \left(\frac{1}{0,95} - 1 \right) \Rightarrow \boxed{P_{\text{pertes}} = 92,5 \text{ W}} \end{aligned}$$

2. Ramenée au secondaire, l'impédance $\underline{Z}_1 = R_1 + \mathcal{L}_1 \omega j$ devient $\underline{Z}'_1 = m^2 \underline{Z}_1$ alors que les pertes ne sont pas rapportées :



3. À vide, c'est-à-dire lorsque $i_1 = 0$ et $i_2 = 0$, la tension aux bornes de R_1 , \mathcal{L}_1 , R_2 , \mathcal{L}_2 sont nulles et le schéma de la question 1. montre alors que :

$$\begin{cases} v_1 = u_1 \\ v_2 = u_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_{1n} = V_{1 \text{ eff}} = U_{1 \text{ eff}} \\ V_0 = V_{2 \text{ eff}} = U_{2 \text{ eff}} \end{cases}$$

Or, dans le modèle de KAPP, le transformateur est idéal, ce qui impose :

$$u_2 = m u_1 \Rightarrow U_{2 \text{ eff}} = m U_{1 \text{ eff}} \Rightarrow m = \frac{U_{2 \text{ eff}}}{U_{1 \text{ eff}}} = \frac{V_0}{V_{1n}} = \frac{133}{220} \Rightarrow \boxed{m = 0,605}$$

4. puisque les pertes se répartissent équitablement entre pertes Joule (P_J) et pertes fer :

$$P_{\text{pertes}} = P_J + P_{\text{fer}} = 2 P_J \Rightarrow P_{\text{fer}} = P_J = \frac{P_{\text{pertes}}}{2} = 46,25 \text{ J}$$

Or, le schéma de la question 2. montre que les pertes Joule s'évaluent à travers la résistance $R = R_2 + m^2 R_1$ traversée par le courant $i_2(t)$ de valeur efficace I_{2n} :

$$\begin{aligned} P_J &= R I_{2n}^2 = (R_2 + m^2 R_1) I_{2n}^2 \\ \Rightarrow R_2 &= \frac{P_J}{I_{2n}^2} - m^2 R_1 = \frac{46,25}{(17,3)^2} - (0,605)^2 \times 0,27 \Rightarrow \boxed{R_2 \simeq 0,06 \Omega} \end{aligned} \quad (18)$$

Remarque : Le modèle de KAPP de la question 1. montre également que les pertes Joule s'observent à travers les résistances R_1 et R_2 traversées par les courants i_1 et i_2 :

$$\mathcal{P}_J(t) = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$$

où $i_1 = m i_2$ pour le transformateur idéal :

$$\mathcal{P}_J(t) = (m^2 R_1 + R_2) i_2^2 \Rightarrow P_J = (m^2 R_1 + R_2) I_{2n}^2$$

ce qui confirme l'équation (18).

Quant aux pertes fer, elles sont modélisées par les impédances R_μ et $\mathcal{L}_\mu \omega j$:

$$\mathcal{P}_{\text{fer}} = \mathcal{P}_{R_\mu}(t) + \mathcal{P}_{\mathcal{L}_\mu}(t) \Rightarrow P_{\text{fer}} = P_{R_\mu} \text{ car } \Re\{\mathcal{L}_\mu \omega j\} = 0$$

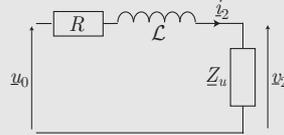
c'est-à-dire, en supposant négligeable la chute de tension aux bornes de R_1 et \mathcal{L}_1 (ce que suggère le rendement de 95 %) :

$$u_1 \simeq v_1 \Rightarrow P_{\text{fer}} = P_{R_\mu} = \frac{U_{1\text{eff}}^2}{R_\mu} \simeq \frac{V_{1n}^2}{R_\mu} \Rightarrow R_\mu \simeq \frac{V_{1n}^2}{P_{\text{fer}}} = \frac{(220)^2}{46,25} \Rightarrow \boxed{R_\mu \simeq 1046 \Omega}$$

5. À vide, le schéma de la question 2. révèle que :

$$u_2 = v_2 \Rightarrow U_{2\text{eff}} = V_0 \text{ car } i_2 = 0 \text{ à vide.}$$

Dans le modèle de KAPP, le transformateur étant idéal, la tension u_2 doit rester, en charge, voisine de sa valeur à vide (à condition de négliger encore R_1 et \mathcal{L}_1). On notera désormais $u_2 = u_0 = U_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ cette tension et $\underline{u}_0 = U_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}$ son image complexe.



Soit $i_2(t) = I_{02} \cos(\omega t)$ le courant débité par le secondaire, d'image complexe $\underline{i}_2 = I_{20} e^{j\omega t}$ et soit $v_2 = V_{20} \cos(\omega t + \varphi')$ la tension aux bornes de la charge, d'image complexe $\underline{v}_2 = V_{20} e^{j(\omega t + \varphi')}$. La loi des mailles impose :

$$\begin{aligned} \underline{u}_0 &= (R + \mathcal{L}\omega j) \underline{i}_2 + \underline{v}_2 \Rightarrow U_0 e^{j\varphi_0} = R I_{20} + \mathcal{L}\omega j I_{20} + V_{20} e^{j\varphi} \\ \Rightarrow U_0 (\cos \varphi_0 + j \sin \varphi_0) &= R I_{20} + \mathcal{L}\omega j I_{20} + V_{20} (\cos \varphi + j \sin \varphi) \\ \Rightarrow \begin{cases} U_0 \cos \varphi_0 = R I_{20} + V_{20} \cos \varphi \\ U_0 \sin \varphi_0 = \mathcal{L}\omega I_{20} + V_{20} \sin \varphi \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant maintenant la relation entre amplitude et grandeur efficace, ce système devient :

$$\begin{cases} V_0 \cos \varphi_0 = R I_{2n} + V_{2n} \cos \varphi \\ V_0 \sin \varphi_0 = \mathcal{L}\omega I_{2n} + V_{2n} \sin \varphi \end{cases}$$

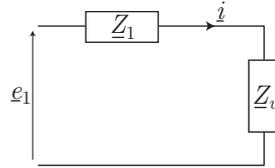
soit encore :

$$\begin{aligned} V_0^2 (\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) &= (R I_{2n} + V_{2n} \cos \varphi)^2 + (\mathcal{L}\omega I_{2n} + V_{2n} \sin \varphi)^2 \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \frac{1}{\omega I_{2n}} \left[\sqrt{V_0^2 - (R I_{2n} + V_{2n} \cos \varphi)^2} - V_{2n} \sin \varphi \right] \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \frac{1}{314 \times 17,3} \left[\sqrt{133^2 - (0,15 \times 17,3 + 127 \times 0,8)^2} - 127 \times 0,6 \right] \\ \Rightarrow \boxed{\mathcal{L} \simeq 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ H}} \end{aligned}$$

5– Applications

a– Adaptation d'impédance

Considérons un générateur de tension sinusoïdale e_1 , d'amplitude E_0 et de valeur efficace E , qui alimente deux dipôles en série d'impédances $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$ et $\underline{Z}_u = R_u + jX_u$ (R_1, R_u, X_1, X_u sont réels et positifs) :



La puissance moyenne reçue par la charge d'impédance \underline{Z}_u vaut :

$$P_u = R_u I^2$$

où le courant efficace I est lié à la tension e_1 par la loi :

$$\begin{aligned} e_1 = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_u) i &\Rightarrow i = \frac{e_1}{(R_1 + R_u) + j(X_1 + X_u)} \Rightarrow I = \frac{E}{\sqrt{(R_1 + R_u)^2 + (X_1 + X_u)^2}} \\ &\Rightarrow P_u = \frac{R_u E^2}{(R_1 + R_u)^2 + (X_1 + X_u)^2} \end{aligned}$$

La puissance reçue par la charge est donc maximum lorsque :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_u}{\partial X_u} &= -\frac{2R_u E^2}{[(R_1 + R_u)^2 + (X_1 + X_u)^2]^2} (X_1 + X_u) = 0 \text{ pour } X_u = -X_1 \\ \Rightarrow P_u &= \frac{R_u E^2}{(R_1 + R_u)^2} \end{aligned}$$

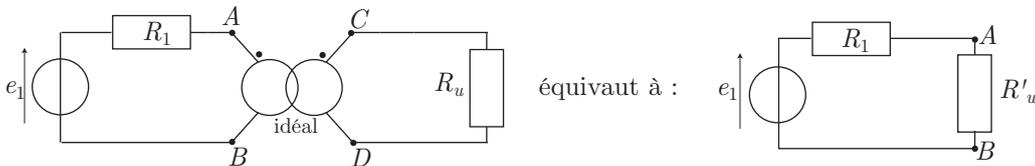
et ainsi :

$$\frac{\partial P_u}{\partial R_u} = E^2 \times \frac{(R_1 + R_u)^2 - 2R_u(R_1 + R_u)}{(R_1 + R_u)^4} = \frac{E^2 \times (R_1 - R_u)}{(R_1 + R_u)^3} = 0 \text{ pour } R_u = R_1$$

Donc P_u est maximum lorsque :

$$\underline{Z}_u = R_u + jX_u = R_1 - jX_1 = \underline{Z}_1^*$$

Notamment, considérons deux dipôles purement résistifs : $\underline{Z}_1 = R_1$ et $\underline{Z}_u = R_u$. Si $R_u \neq R_1$, le transfert de puissance vers la charge R_u n'est pas maximum. Pour y parvenir, il suffit d'intercaler un transformateur (supposé idéal) de rapport de transformation m entre R_1 et R_u :



Puisque le transformateur est idéal, la puissance P'_u qu'il reçoit entre les bornes A, B est la même que celle qu'il émet entre ses bornes C, D :

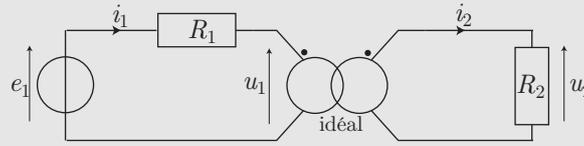
$$P_u = P'_u$$

où P'_u est la puissance reçue par $R'_u = \frac{R_u}{m^2}$ (résistance équivalente à R_u rapportée au primaire). Donc, la puissance P_u est maximale lorsque $R_1 = R'_u$, c'est-à-dire pour un rapport de transformation :

$$m = \sqrt{\frac{R_u}{R_1}}$$

EXERCICE 

On réalise le montage schématisé ci-dessous, avec un transformateur supposé idéal, dans lequel le générateur délivre une tension sinusoïdale de valeur efficace E_1 :



On note m le rapport de transformation.

1. Montrer, par un calcul direct de u_2 et i_2 que la puissance moyenne reçue par la résistance R_2 vaut :

$$P_2 = \frac{R_2 E_1^2}{\left(mR_1 + \frac{R_2}{m}\right)^2}$$

2. Retrouver ce résultat en utilisant un schéma équivalent, rapporté au primaire.
3. Représenter graphiquement la courbe $P_2 = f(m)$.
4. En déduire la relation entre R_1 et R_2 permettant de rendre P_2 maximum.

Corrigé

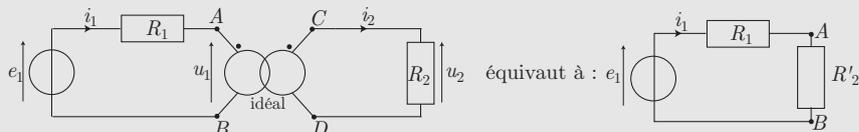
1. Si I_1 et I_2 désignent les valeurs efficaces des courants i_1 et i_2 , la puissance moyenne reçue par R_2 vaut $P_2 = R_2 I_2^2$ avec :

$$e_1 = R_1 i_1 + u_1 = R_1 i_1 + \frac{1}{m} u_2 = R_1 i_1 + \frac{1}{m} R_2 i_2 \text{ où } \begin{cases} u_1 = u_2/m \\ i_1 = m i_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow e_1 = \left(mR_1 + \frac{R_2}{m}\right) i_2 \Rightarrow I_2 = \frac{E_1}{mR_1 + \frac{R_2}{m}}$$

$$\Rightarrow P_2 = \frac{R_2 E_1^2}{\left(mR_1 + \frac{R_2}{m}\right)^2}$$

2. Ramenée au primaire, la résistance R_2 équivaut à une résistance $R'_2 = R_2/m^2$:



Le transformateur étant idéal, la puissance P_2 reçue par R_2 entre les bornes C, D est aussi celle envoyée entre les bornes A, B (cf. premier schéma), c'est-à-dire celle reçue par R'_2 (cf. deuxième schéma) :

$$P_2 = R'_2 I_1^2$$

Enfin, la loi des mailles impose :

$$e_1 = (R_1 + R'_2) i_1 = \left(R_1 + \frac{R_2}{m^2}\right) i_1 \Rightarrow I_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2}{m^2}}$$

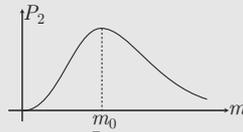
$$\Rightarrow P_2 = R'_2 \frac{E_1^2}{\left(R_1 + \frac{R_2}{m^2}\right)^2} = \frac{R_2 E_1^2}{m^2 \left(R_1 + \frac{R_2}{m^2}\right)^2} \Rightarrow P_2 = \frac{R_2 E_1^2}{\left(mR_1 + \frac{R_2}{m}\right)^2}$$

3. La fonction $P_2(m)$ admet pour limites :

$$\lim_{m \rightarrow 0} P_2(m) = 0 \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} P_2(m) = 0$$

et, puisque P_{2m} n'est pas identiquement nulle et n'admet que des valeurs positives ou nulles, elle admet au moins un maximum qui annule également sa dérivée :

$$\frac{dP_{2m}}{dm} = \frac{2R_2 E_1^2}{\left(mR_1 + \frac{R_2}{m}\right)^2} \times \left(R_1 - \frac{R_2}{m^2}\right) = 0 \text{ pour } m = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} = m_0$$



4. L'étude précédente donne directement la relation entre R_1 et R_2 qui rend P_2 maximum :

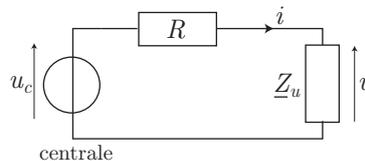
$$R_1 = \frac{R_2}{m^2}$$

Ce résultat pouvait s'obtenir plus rapidement à l'aide du schéma de la question 2. : la puissance reçue par R'_2 (et donc par R_2) est maximum lorsque $R'_2 = R_1$ (c'est l'adaptation d'impédance), c'est-à-dire :

$$\frac{R_2}{m^2} = R_1$$

b- Transport de l'énergie électrique

Entre une centrale électrique (qui délivre une tension u_c) et un utilisateur (caractérisé par une impédance $\underline{Z}_u = Z_u e^{j\varphi_u}$), l'énergie électrique est transportée par des fils conducteurs, de résistance totale R . L'utilisateur, supposé seul client de la ligne, reçoit un courant i , sous une tension u , associés aux grandeurs efficaces I_e et U_e .



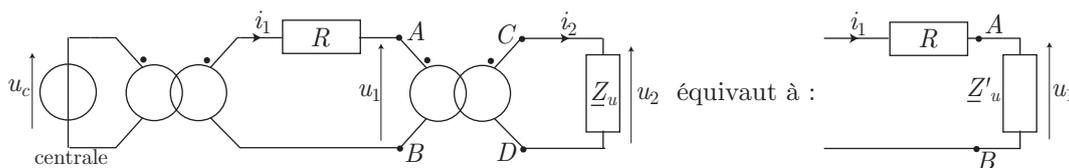
La puissance électrique moyenne reçue par l'utilisateur (qui est aussi celle payée au distributeur d'électricité) vaut :

$$P_u = U_e I_e \cos \varphi_u \Rightarrow I_e = \frac{P_u}{U_e \cos \varphi_e}$$

tandis que celle perdue par effet Joule (qui n'est pas facturée au client) vaut :

$$P_J = R I_e^2 = R \frac{P_u^2}{U_e^2 \cos^2 \varphi_u}$$

Cette expression montre que les pertes par effet Joule sont d'autant plus réduites que la tension U_e est élevée. C'est pourquoi l'énergie électrique est souvent véhiculée par des tensions élevées. Pour y parvenir, des transformateurs (qu'on supposera idéaux) réhaussent les tensions à la sortie des centrales et les abaissent avant la distribution aux particuliers :



L'utilisateur, qui reçoit un courant i_2 sous une tension u_2 , reçoit également une puissance moyenne $P_u = U_2 I_2 \cos \varphi_u$ avec :

$$\underline{Z}_u = R_u + j X_u \Rightarrow \cos \varphi_u = \frac{R_u}{Z_u} \text{ où } Z_u = |\underline{Z}_u|$$

Ramenée au primaire, l'impédance de l'utilisateur devient $Z'_u = \frac{Z_u}{m^2}$ et reçoit la même puissance P_u que celle délivrée par le secondaire (le transformateur étant supposé idéal) :

$$P_u = U_1 I_1 \cos \varphi'_u$$

où :

$$\cos \varphi'_u = \frac{R'_u}{Z'_u} = \frac{R_u/m^2}{Z_u/m^2} = \frac{R_u}{Z_u} \Rightarrow P_1 = U_1 I_1 \cos \varphi_u \Rightarrow I_1 = \frac{P_u}{U_1 \cos \varphi_u} \quad (19)$$

Les fils électriques qui acheminent l'énergie électrique perdent donc par effet Joule une puissance moyenne :

$$P_J = R \frac{P_u^2}{U_1^2 \cos^2 \varphi_u}$$

Comme cette puissance contribue à abaisser le rendement du transport de l'énergie, il convient de l'abaisser en modifiant divers paramètres :

- La puissance P_u n'est pas modifiable car elle correspond à la puissance consommée par l'utilisateur ; c'est aussi elle qui est facturée au consommateur d'énergie.
- La résistance $R = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S}$ peut être diminuée :
 - en utilisant des conducteurs de bonne conductivité électrique σ (il s'agit en fait d'un compromis entre la conductivité électrique et le prix de la matière première pour le fabriquer).
 - en augmentant la section S des câbles électriques. À nouveau, il s'agit d'un compromis entre le gain réalisé sur l'effet Joule et le surcoût de matière première qui augmente avec le volume des câbles.
 - en diminuant la longueur ℓ des câbles : ce paramètre est difficilement modifiable, sauf en construisant les centrales électriques à proximité des utilisateurs, ce que ne souhaitent pas tous les usagers !
- Le facteur de puissance doit être augmenté :
 - chez les particuliers, ce facteur de puissance n'est pas évalué.
 - chez les industriels gros consommateurs d'électricité, on distingue trois puissances moyennes :
 - puissance active $P = U_1 I_1 \cos \varphi_u$.. en kW
 - puissance réactive $Q = U_1 I_1 \sin \varphi_u$.. en kVar
 - puissance apparente $S = U_1 I_1$ en kVA

La facture tient compte simultanément de la puissance active P et de la puissance apparente $S = \frac{P}{\cos \varphi_u}$ qui est d'autant plus grande que le facteur de qualité $\cos \varphi_u$ est petit.

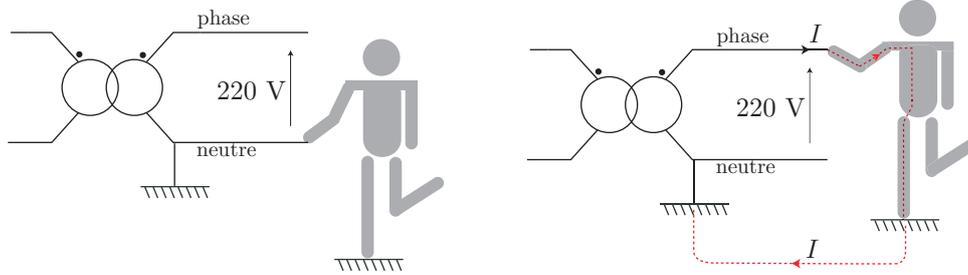
Puisque $I_1 = \frac{P_u}{U_1 \cos \varphi_u}$ augmente lorsque $\cos \varphi_u$ diminue, un mauvais facteur de puissance contraint à surdimensionner inutilement le réseau de distribution électrique. Les usagers dont le facteur de puissance est trop faible sont pénalisés. Pour éviter ces pénalisés, des batteries de condensateurs sont souvent ajoutées en début d'installation, ce qui provoque l'augmentation de $\cos \varphi_u$.

- La tension efficace U_1 doit être augmentée, d'autant plus que la longueur des câbles est importante. C'est pourquoi les distributeurs d'électricité ont choisi de produire :
 - la Haute Tension (de 63 kV à 90 kV) pour l'alimentation urbaine ou régionale ;
 - la Très Haute Tension : de 110 kV à 220 kV pour la distribution interrégionale ou de 345 kV à 500 kV pour la distribution nationale et internationale. Le Canada produit également 800 kV pour acheminer son électricité sur de grandes distances.
 - l'Ultra Haute Tension (1 500 kV) à titre expérimental par la Russie.

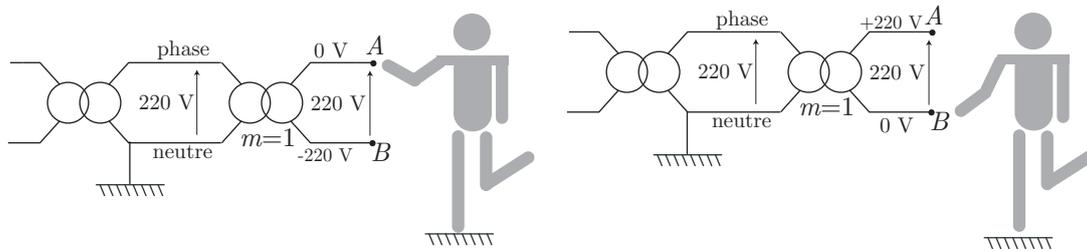
c- Transformateur d'isolement

Les deux fils d'une prise de courant domestique sont reliées aux bornes d'un transformateur (en général à l'entrée des villes) dont l'une est reliée à la terre (c'est le *neutre* (prise)) et l'autre non (c'est la *phase*). Entre la phase et le neutre règne une tension de 220 V.

Accidentellement, un usager peut toucher l'un des deux fils (en France, rien ne permet de distinguer les deux fils sur la prise de courant). Si la main touche le neutre, rien ne se produit, mais si la main touche la phase, le courant électrique traverse le corps pour rejoindre la terre ; c'est l'électrisation :



Pour éviter ce phénomène, on peut intercaler un transformateur de rapport $m = 1$ entre la prise de courant et l'utilisateur :



Les potentiels des bornes A et B de la prise électrique n'étant plus imposés par le transformateur, si l'utilisateur touche l'une d'elle, c'est lui qui impose le potentiel zéro à cette borne. En revanche, le transformateur impose la différence de potentiel $V_A - V_B$. Selon que l'usager touche B ou A , les bornes A ou B prennent respectivement les potentiels $V_A = +220$ V et $V_B = -220$ V.

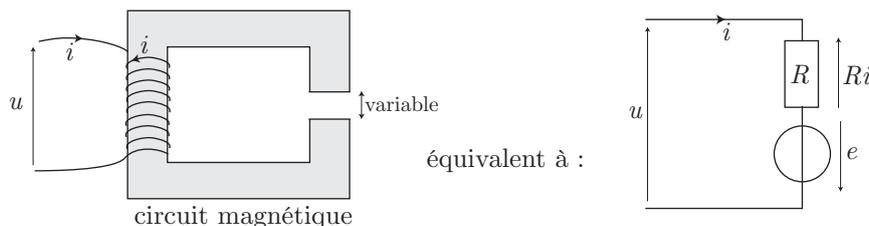
Ainsi, l'absence de différence de potentiel entre la borne touchée par l'usager et ses pieds le préserve de l'électrisation. Cette protection n'est cependant efficace que si l'usager ne touche pas simultanément les bornes A et B , auquel cas le courant électrique traverserait son cœur et ses poumons.

D3 Conversion électro-magnéto-mécanique

1- Contacteur électromagnétique en translation

a- Énergie et force électromagnétique

Considérons un enroulement enlaçant un circuit magnétique avec entrefer variable, de résistance R , traversé par un courant $i(t)$, sous une tension $u(t)$:



Le flux ϕ du champ magnétique définit la force électromotrice $e = -\frac{d\phi}{dt}$ du circuit électrique, dont la tension u vaut alors :

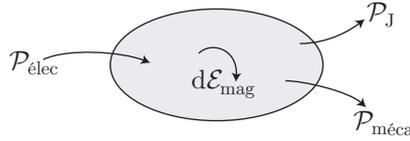
$$u = Ri - e = Ri + \frac{d\phi}{dt}$$

Ce circuit :

- reçoit une puissance électrique $\mathcal{P}_{\text{elec}} = ui = Ri^2 + i \frac{d\phi}{dt}$;
- accumule une énergie magnétique \mathcal{E}_{mag} qui varie de $d\mathcal{E}_{\text{mag}}$ pendant dt ;
- perd une puissance par effet Joule $\mathcal{P}_J = Ri^2$;
- transmet une puissance mécanique $\mathcal{P}_{\text{méca}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \frac{dx}{dt}$ sur une partie mobile en translation⁵ de $d\vec{x} = dx \vec{u}_x$ tandis que le circuit magnétique y exerce une force $\vec{F} = F \vec{u}_x$.

5. Le dispositif peut également mettre en rotation des parties mobiles, qui tournent d'un angle $d\theta$ sous l'effet d'un couple Γ produit par le circuit magnétique, auquel cas :

$$\mathcal{P}_{\text{méca}} = \Gamma \Omega = \Gamma \frac{d\theta}{dt}$$



La conservation de l'énergie (ou de la puissance) impose :

$$\mathcal{P}_{\text{élec}} = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{\text{méca}} + d\mathcal{E}_{\text{mag}} \Rightarrow Ri^2 + i \frac{d\phi}{dt} = Ri^2 + F \frac{dx}{dt} + \frac{d\mathcal{E}_{\text{mag}}}{dt} \Rightarrow d\mathcal{E}_{\text{mag}} = i d\phi - F dx$$

Cette identité montre que \mathcal{E}_{mag} est une fonction de ϕ et de x , dont la différentielle s'écrit :

$$d\mathcal{E}_{\text{mag}} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial \phi} \right)_x d\phi + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_\phi dx = i d\phi - F dx \Rightarrow F = - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_\phi$$

Si le circuit magnétique est enlacé par le seul courant i , la définition de l'auto-inductance : $\phi = Li$ conduit à :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2 \Rightarrow \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{\phi^2}{2L}$$

Ainsi :

- en choisissant de fixer ϕ : $\left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_\phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\phi^2}{2L} \right)_\phi = -\frac{\phi^2}{2L^2} \frac{dL}{dx} = -\frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx}$
- en choisissant de fixer i : $\left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_i = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Li^2}{2} \right)_i = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx} = - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_\phi$

Par conséquent :

$$F = - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_\phi = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_i \quad (20)$$

REMARQUE Si la pièce mobile du circuit magnétique effectue des mouvements de rotation, l'énergie électromagnétique lui confère un moment Γ qui vérifie :

$$\begin{aligned} d\mathcal{E}_{\text{mag}} &= i d\phi - \Gamma d\theta = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial \phi} \right)_\theta d\phi + \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial \theta} \right)_\phi d\theta \\ \Rightarrow \Gamma &= - \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial \theta} \right)_\phi = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial \theta} \right)_i \quad \text{car } \mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{Li^2}{2} = \frac{\phi^2}{2L} \end{aligned} \quad (21)$$

REMARQUE Deux stratégies sont disponibles pour calculer la force F à l'aide de la relation (20) ou Γ à l'aide de la relation (21) :

- Soit le calcul de l'auto-inductance L est aisé, auquel cas on procédera à ce calcul de $L(x)$ (ou $L(\theta)$) avant de remarquer que :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2 \Rightarrow F = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{dx} \quad \text{ou} \quad \Gamma = \frac{i^2}{2} \frac{dL}{d\theta}$$

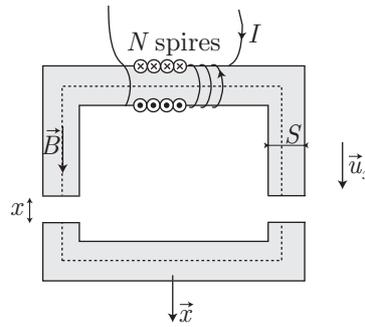
- Soit le calcul direct de l'énergie \mathcal{E}_{mag} est plus aisé :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2(M)}{2\mu} d\tau_M$$

auquel cas on appliquera simplement la relation :

$$F = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_i \quad \text{ou} \quad \Gamma = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial \theta} \right)_i$$

Considérons un enroulement de N spires parcourues par un courant i , enlaçant une branche d'un circuit magnétique de longueur ℓ , de perméabilité magnétique $\mu = \mu_0 \mu_r$ ($\mu_r \gg 1$), de section S constante, séparé en deux pièces polaires espacées d'une distance x . On notera \vec{u}_x un vecteur unitaire directeur dans la direction de déplacement $\vec{x} = x \vec{u}_x$ de la pièce mobile.



En considérant le champ magnétique \vec{B} (ou l'excitation \vec{H}) uniforme dans le matériau ferromagnétique et dans l'entrefer, le théorème d'Ampère s'écrit :

$$\oint \vec{H}(M) \cdot d\vec{OM} = I_{\text{int}} \Rightarrow H_{\text{int}} \times \ell + H_{\text{ext}} \times 2x = NI$$

où H_{int} et H_{ext} désignent respectivement l'excitation magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du matériau ferromagnétique :

$$B_{\text{int}} = \mu H_{\text{int}} = \mu_0 \mu_r H_{\text{int}}$$

Or, la continuité du champ magnétique à l'interface air-ferromagnétique de l'entrefer impose :

$$\begin{aligned} B_{\text{ext}} = B_{\text{int}} = B &\Rightarrow \begin{cases} H_{\text{ext}} = B/\mu_0 \\ H_{\text{int}} = B/\mu_0 \mu_r \end{cases} \\ &\Rightarrow \frac{B}{\mu_0} \times \left(\frac{\ell}{\mu_r} + 2x \right) = NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2x + \ell/\mu_r} \end{aligned}$$

Donc, le flux du champ magnétique à travers les N spires de l'enroulement vaut :

$$\phi = NBS = \frac{\mu_0 N^2 S}{2x + \ell/\mu_r} \times I = LI$$

où apparaît l'auto-inductance $L = L(x)$ de l'enroulement. Par conséquent, l'énergie magnétique emmagasinée par l'enroulement : $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} LI^2$ fournit l'expression de la force $\vec{F} = F \vec{u}_x$ subie par la pièce mobile :

$$F = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_I = \frac{I^2}{2} \frac{dL}{dx} = \frac{I^2}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\mu_0 N^2 S}{2x + \ell/\mu_r} \right) \Rightarrow \boxed{F = -\frac{\mu_0 N^2 S I^2}{(2x + \ell/\mu_r)^2}} \quad (22)$$

Ce résultat montre que :

- la force \vec{F} est attractive car dirigée dans le sens de $-\vec{u}_x$;
- la force F décroît avec x et admet pour intensité maximale : $F_{\text{max}} = \frac{\mu_0 N^2 S I^2 \mu_r^2}{\ell^2}$;
- son sens ne dépend pas de celui de I (la force reste attractive).

EXERCICE

On reprend le dispositif précédent, avec les mêmes hypothèses, qui ont permis d'établir l'expression du champ magnétique dans le circuit ferromagnétique et dans l'entrefer :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2x + \ell/\mu_r}$$

On supposera B nul partout ailleurs.

1. Rappeler l'expression de la densité volumique d'énergie magnétique dans un matériau de perméabilité magnétique μ .
2. En déduire l'expression de l'énergie magnétique \mathcal{E}_{mag} dans l'espace.
3. Retrouver alors l'expression de la force F .

Corrigé

1. Dans un volume $\delta\tau_M$ se trouve concentrée une énergie magnétique $\delta\mathcal{E}_{\text{mag}}$ telle que :

$$\frac{\delta\mathcal{E}_{\text{mag}}}{\delta\tau_M} = \frac{B^2(M)}{2\mu} \Rightarrow \delta\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{B^2(M)}{2\mu} \delta\tau_M$$

2. Soient $V_{\text{int}} = \ell S$ et $V_{\text{ext}} = 2xS$ le volume du matériau ferromagnétique et celui de l'entrefer, qui sont supposés contenir, seuls, le même champ magnétique uniforme $B_{\text{int}}(M) = B_{\text{ext}}(M) = B$. L'intégration de la relation précédente en tout point M où le champ magnétique est non nul fournit :

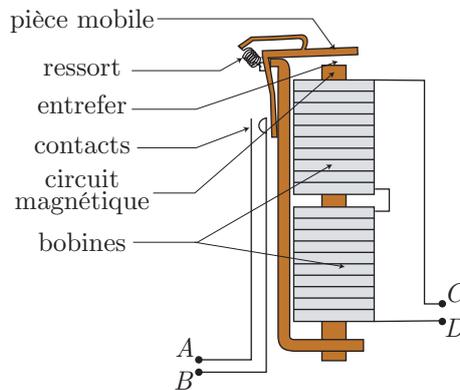
$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{mag}} &= \iiint_{\text{espace}} \frac{B^2(M)}{2\mu} \delta\tau_M = \iiint_{V_{\text{int}}} \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} \delta\tau_M + \iiint_{V_{\text{ext}}} \frac{B^2}{2\mu_0} \delta\tau_M = \frac{B^2}{2\mu_0} \left(\frac{V_{\text{int}}}{\mu_r} + V_{\text{ext}} \right) \\ &= \frac{B^2 S}{2\mu_0} \left(\frac{\ell}{\mu_r} + 2x \right) = \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{2(2x + \ell/\mu_r)} \text{ car } B = \frac{\mu_0 N I}{2x + \ell/\mu_r} \end{aligned}$$

3. On en déduit alors la force F subie par la partie mobile du dispositif :

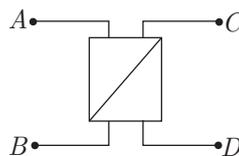
$$F = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_I = \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2x + \ell/\mu_r} \right) \Rightarrow F = - \frac{\mu_0 N^2 I^2 S}{(2x + \ell/\mu_r)^2}$$

dont l'expression est compatible avec le résultat (22).

La force électromagnétique précédemment mise en évidence est fréquemment mise en œuvre dans les contacteurs électromagnétiques (ou relais)



Un relais électrique, schématisé par :



sert d'interrupteur commandé électriquement : en l'absence de courant entre les bornes C et D , le ressort du relais maintient la pièce mobile dans une position qui crée un entrefer dans le circuit magnétique et telle que les contacts entre A et B ne se touchent pas ; la branche AB se comporte comme un interrupteur ouvert. En revanche, si un courant circule de C à D , la pièce mobile se déplace de manière à refermer le circuit magnétique, ce qui provoque un contact entre A et B qui se comportent comme les bornes d'un interrupteur fermé.

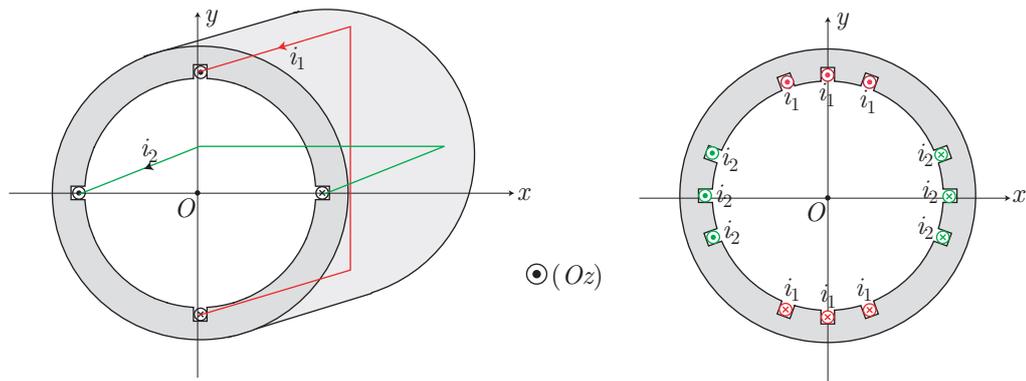
Un tel dispositif permet d'isoler un circuit de commande (CD), où circulent en général des courants relativement faibles, d'un circuit de puissance (AB) où circulent en général des courants élevés.

2- Machine synchrone

a- Structure du moteur synchrone

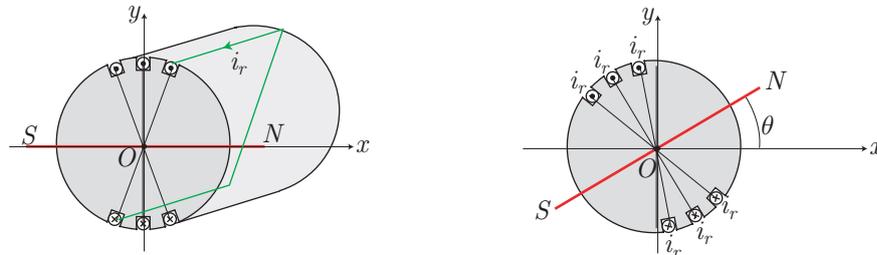
Les machines synchrones étudiées dans ce cours sont composées :

- d'un stator constitué d'un cylindre évidé ferromagnétique dans lequel ont été pratiquées des encoches axiales où viennent se loger des fils électriques (les enroulements correspondant constituent l'induit).



Dans chaque encoche se logent N spires (les schémas ne représentent qu'une seule spire) et, dans le cas d'un moteur diphasé (l'industrie emploie fréquemment des moteurs triphasés), les spires se répartissent en deux groupes : au voisinage de l'axe (Oy) sont enroulées les spires parcourues par un courant total $i_1(t) = I_{sm} \cos(\omega_s t)$ tandis qu'au voisinage de l'axe (Ox) sont enroulées les spires parcourues par un courant $i_2(t) = I_{sm} \sin(\omega_s t)$, déphasé de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à $i_1(t)$. Pour alléger la représentation, le premier schéma ne montre qu'une seule spire de chaque groupe.

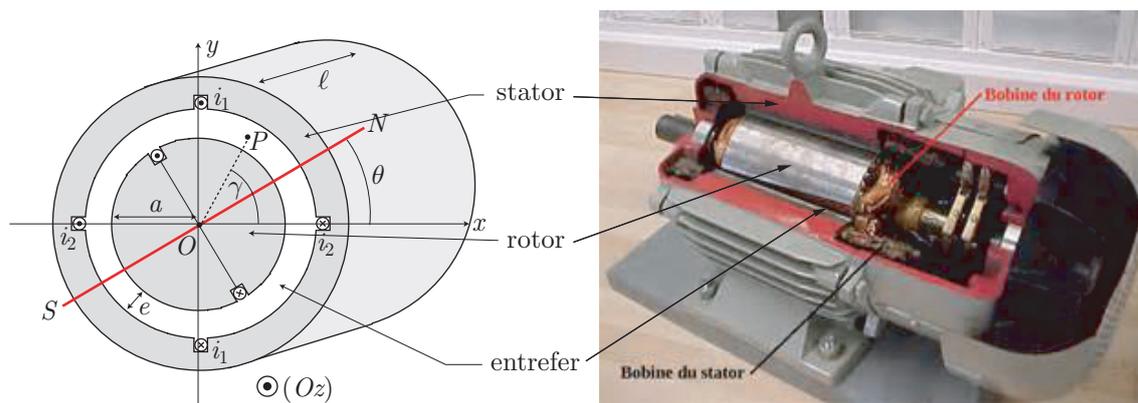
- d'un rotor constitué d'un cylindre ferromagnétique pouvant tourner autour de l'axe (Oz) et dans lequel ont été pratiquées des encoches dans lesquelles se logent N_r spires parcourues par un courant total constant $i_r = I_{rm}$. L'enroulement ainsi réalisé est appelé inducteur.



L'axe (SN) normal au plan de l'inducteur est repéré par l'angle θ de rotation par rapport à un axe immobile (par exemple (Ox)).

Dans un moteur, stator et rotor sont coaxiaux, le rotor constituant la partie mobile du moteur. L'espace entre ces cylindres, appelé entrefer (d'épaisseur e très petite par rapport aux dimensions du moteur) est occupé par de l'air.

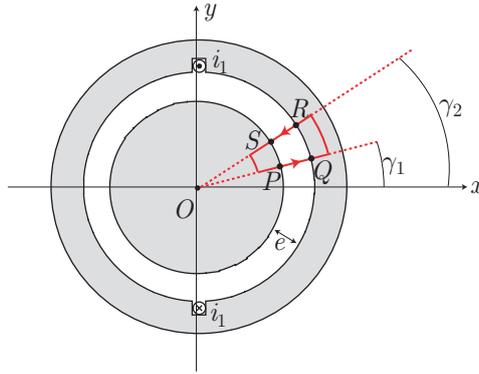
L'alimentation du rotor se fait à l'aide d'une bague collectrice. On note ℓ la longueur commune du rotor et du stator et on note a le rayon du rotor.



Enfin, un point P du moteur (situé dans le plan $z = 0$) sera repéré par ses coordonnées polaires (r, γ) associées aux vecteurs de base \vec{u}_r et \vec{u}_γ .

b- Champ magnétique dans l'entrefer

Intéressons-nous, dans un premier temps, au champ magnétique produit dans l'entrefer par une boucle de courant i_1 :



Pour calculer ce champ magnétique, appliquons le théorème d'Ampère sur un parcours fermé $\Gamma = (PQRS)$ dont les branches (PQ) , (RS) sont situées dans l'entrefer de perméabilité magnétique μ_0 et les branches (QR) , (SP) sont situées dans le ferromagnétique de perméabilité $\mu = \mu_0 \mu_r$, avec $\mu_r \gg 1$. Nous supposons également que :

- le champ magnétique \vec{B} (ou l'excitation associée $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$) est radial :

$$\vec{B} = B(r, \gamma) \vec{u}_r \text{ et } \vec{H} = H(r, \gamma) \vec{u}_r$$

- l'entrefer est assez petit pour que ces champs y soient indépendants de r :

$$\vec{B}(M) \simeq B(\gamma) \vec{u}_r \text{ et } \vec{H} = H(\gamma) \vec{u}_r \text{ pour } M \in \text{entrefer}$$

- la continuité du champ magnétique impose l'identité : $\vec{B}_{\text{int}} = \vec{B}_{\text{ext}}$ à l'intérieur et à l'extérieur du ferromagnétique.

La circulation de \vec{H} le long de Γ vaut alors :

$$\mathcal{C}_H = \oint \vec{H}(M) \cdot d\vec{OM} = \int_P^Q \vec{H}_{\text{ext}}(M) \cdot d\vec{OM} + \int_Q^R \vec{H}_{\text{int}}(M) \cdot d\vec{OM} + \int_R^S \vec{H}_{\text{ext}}(M) \cdot d\vec{OM} + \int_S^P \vec{H}_{\text{int}}(M) \cdot d\vec{OM}$$

où :

$$\begin{cases} H_{\text{int}} = \frac{B_{\text{int}}(M)}{\mu_0 \mu_r} \\ H_{\text{ext}} = \frac{B_{\text{ext}}(M)}{\mu_0} \end{cases} \Rightarrow \frac{H_{\text{int}}}{H_{\text{ext}}} = \frac{B_{\text{int}}(M)}{\mu_0 \mu_r} \times \frac{\mu_0}{B_{\text{ext}}(M)} \simeq \frac{1}{\mu_r} \ll 1 \text{ car } B_{\text{int}}(M) = B_{\text{ext}}(M)$$

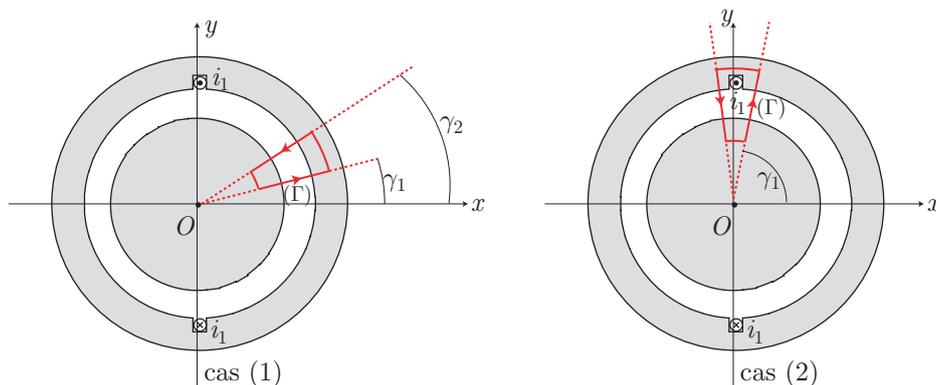
permet de simplifier l'expression de \mathcal{C}_H :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_H &\simeq \int_P^Q \vec{H}_{\text{ext}}(M) \cdot d\vec{OM} + \int_R^S \vec{H}_{\text{ext}}(M) \cdot d\vec{OM} \text{ où } d\vec{OM} = dr \vec{u}_r \text{ sur } (PQ) \text{ et sur } (RS) \\ &= \int_{r_P}^{r_Q=r_P+e} H_{\text{ext}}(\gamma_1) dr + \int_{r_R}^{r_S=r_R-e} H_{\text{ext}}(\gamma_2) dr \Rightarrow \mathcal{C}_H = [H(\gamma_1) - H(\gamma_2)] \times e \end{aligned}$$

en posant simplement $H_{\text{ext}} = H$. Ainsi, le champ magnétique dans l'entrefer vérifie :

$$\mathcal{C}_H = [B(\gamma_1) - B(\gamma_2)] \times \frac{e}{\mu_0} \text{ car } H = \frac{B}{\mu_0}$$

Étudions alors deux cas :



- **Cas 1** : Si (Γ) n'enlace aucun courant, par exemple si γ_1 et γ_2 sont simultanément compris dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le théorème d'Ampère relie \mathcal{C}_H au courant I_{int} enlacé par (Γ) :

$$\mathcal{C}_H = I_{\text{int}} \Rightarrow [B(\gamma_1) - B(\gamma_2)] \times \frac{e}{\mu_0} = 0 \Rightarrow B(\gamma_1) = B(\gamma_2) \forall (\gamma_1, \gamma_2) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

ce qui montre que dans l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $B(\gamma)$ conserve une valeur constante.

- **Cas 2** : Si (Γ) enlance le courant i_1 , par exemple avec $\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ et $\gamma_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$, le théorème d'Ampère impose :

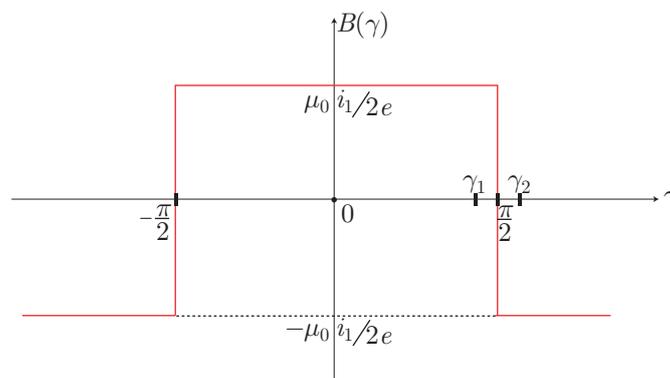
$$\mathcal{C}_H = I_{\text{int}} \Rightarrow [B(\gamma_1) - B(\gamma_2)] \times \frac{e}{\mu_0} = i_1 \Rightarrow B(\gamma_1) - B(\gamma_2) = \frac{\mu_0 i_1}{e} \quad (23)$$

Enfin, puisque le plan (Oyz) est un plan de symétrie, $|B(\gamma_1)| = |B(\gamma_2)|$ impose :

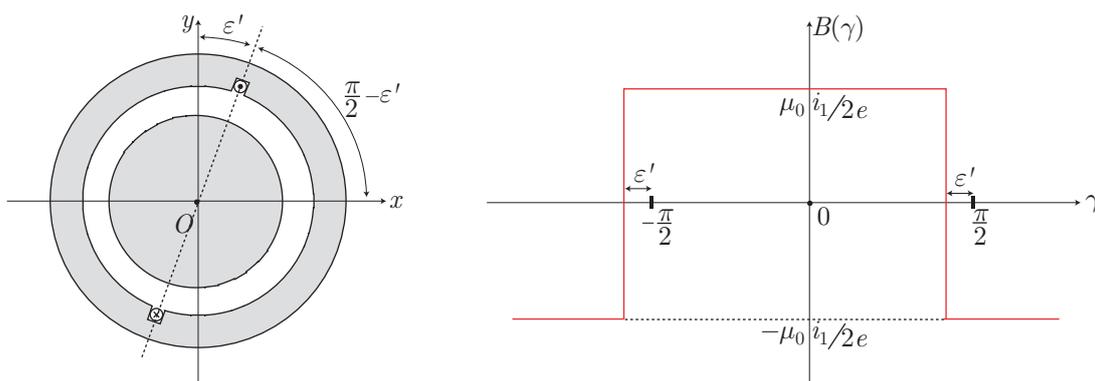
- soit $B(\gamma_2) = B(\gamma_1) \Rightarrow 0 = \frac{\mu_0 i_1}{e}$, ce qui est impossible si $i_1 \neq 0$;
- soit $B(\gamma_2) = -B(\gamma_1)$, l'équation (23) devient :

$$2B(\gamma_1) = \frac{\mu_0 i_1}{e} \Rightarrow B(\gamma_1 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon) = \frac{\mu_0 i_1}{2e} \Rightarrow B(\gamma_2 = \frac{\pi}{2} + \varepsilon) = -\frac{\mu_0 i_1}{2e}$$

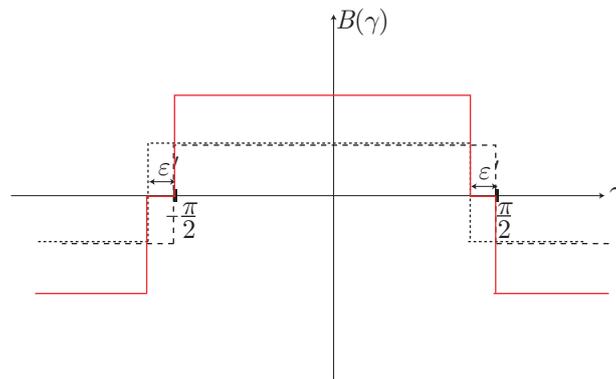
En conclusion la fonction $B(\gamma)$ est constante, sauf en $\frac{\pi}{2} (+n\pi)$, où elle subit une discontinuité :



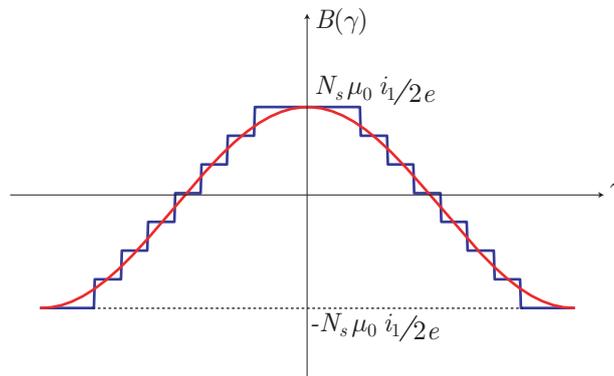
Réitérons maintenant le raisonnement pour les spires de courant i_1 localisées en $\gamma = \frac{\pi}{2} - \varepsilon'$:



La discontinuité de la courbe $B(\gamma)$ se produit maintenant en $\frac{\pi}{2} - \varepsilon' (+n\pi)$. Le champ produit par ces deux ensembles de spires est alors la somme des deux champs individuels, conformément au principe de superposition :

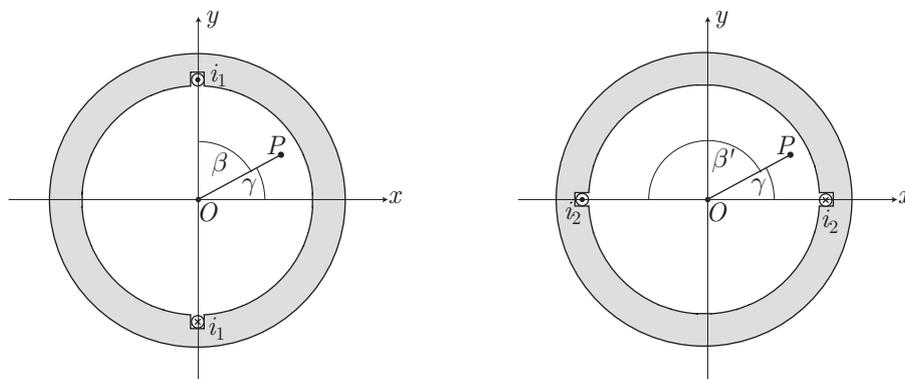


En répétant l'opération avec un plus grand nombre d'encoches N_s décalées d'un angle ε , on obtient finalement une courbe crénelée qui peut s'apparenter à une fonction $\cos \gamma$ (si l'angle ε est assez petit et si les encoches sont judicieusement disposées) :



On peut ainsi admettre que l'enroulement parcouru par le courant $i_1(t)$ produit dans l'entrefer un champ magnétique :

$$B_1(P) = \frac{N_s \mu_0}{2e} i_1(t) \times \cos \gamma = \frac{N_s \mu_0}{2e} i_1 \sin \beta \quad (24)$$



Quant aux enroulement parcourus par le courant $i_2(t)$ et logés dans les N_s encoches décalées de $\frac{\pi}{2}$ par rapport aux précédentes, ils créent de la même manière le champ magnétique :

$$B_2(P) = \frac{N_s \mu_0}{2e} i_2(t) \sin \beta' = \frac{N_s \mu_0}{2e} i_2 \sin(\pi - \gamma) \Rightarrow B_2(t) = \frac{N_s \mu_0}{2e} i_2 \sin \gamma \quad (25)$$

c- Champ glissant statorique

Puisque le stator comporte simultanément les enroulements parcourus par un courant i_1 et ceux parcourus par un courant i_2 , il crée en chaque point P de l'entrefer un champ magnétique :

$$\begin{aligned} B_s &= B_s(t) = B_1(P) + B_2(P) = \frac{\mu_0 N_s}{2e} (i_1 \cos \gamma + i_2 \sin \gamma) \\ &= \frac{\mu_0 N_s}{2e} I_{sm} [\cos(\omega_s t) \cos(\gamma) + \sin(\omega_s t) \sin(\gamma)] \end{aligned}$$

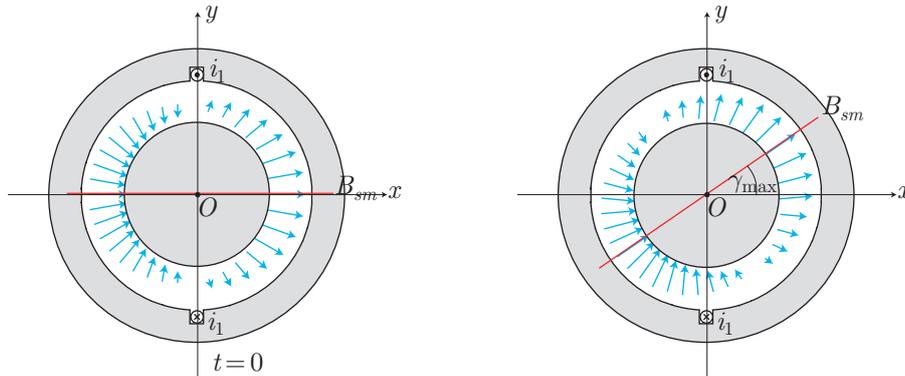
c'est-à-dire :

$$B_s = B_{sm} \cos(\gamma - \omega_s t) \text{ avec } B_{sm} = \frac{\mu_0 N_s}{2e} I_{sm}$$

À la date $t = 0$, $B_s(0) = B_{sm} \cos \gamma$ prend une valeur maximale en $\gamma = 0$, devient nul en $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ et prend la valeur $-B_{sm}$ en $\gamma = \pi$. Enfin, la position γ_{\max} du maximum de B_s vérifie :

$$B_s(\gamma_{\max}) = B_{sm} \Rightarrow \cos(\gamma_{\max} - \omega_s t) = 1 \Rightarrow \gamma_{\max} = \omega_s t \quad (26)$$

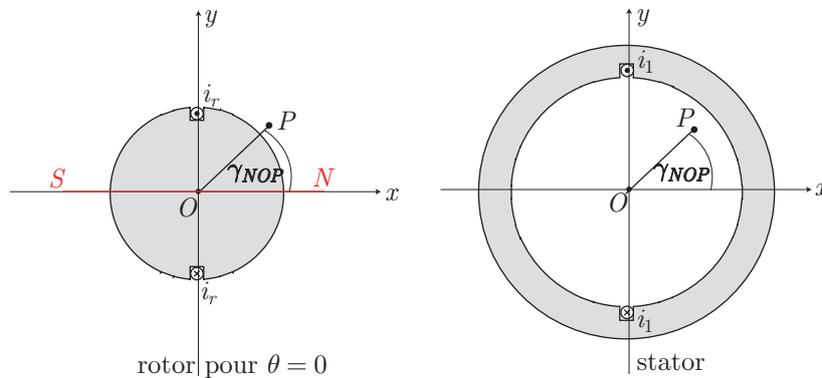
ce qui montre que cette position tourne à la vitesse angulaire ω_s :



C'est à cette faculté de tourner dans l'entrefer que le champ statorique doit son qualificatif de "glissant".

d- Champ glissant rotorique

Lorsque le rotor est repéré par son angle de rotation $\theta = 0$, ses enroulements présentent la même configuration que ceux du stator parcourus par le courant i_1 :

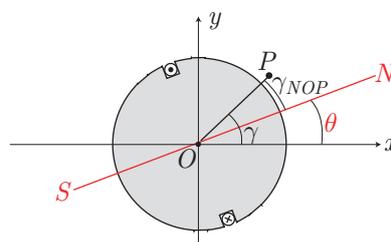


Le champ magnétique $B_{r,0}$ produit en un point P , repéré par l'angle γ_{NOP} que fait (OP) avec l'axe (SN) , présente alors une analogie formelle avec le champ $B_1(\gamma_{NOP})$ donné par la relation (24) :

$$B_1(\gamma_{NOP}) = \frac{\mu_0 N_s}{2e} i_1 \cos(\gamma_{NOP}) \Rightarrow B_{r,0} = \frac{\mu_0 N_r}{2e} i_r \cos(\gamma_{NOP}) \quad (27)$$

en tenant compte des enroulements logés dans les N_r encoches du rotor.

Lorsque le rotor tourne d'un angle θ (c'est-à-dire que l'axe SN effectue aussi cette rotation), l'analogie précédente demeure valable (le point P reste immobile).



Lorsque $\theta \neq 0$, l'angle entre l'axe (SN) et (OP) vaut $\gamma_{NOP} = \gamma - \theta$ de sorte que la relation (27) devient :

$$B_r = B_{rm} \cos(\gamma - \theta) \text{ où } B_{rm} = \frac{\mu_0 N_r i_r}{2e}$$

En notant ω_r la vitesse de rotation (supposée constante) du rotor et en notant $-\alpha$ la valeur de θ à la date $t = 0$, on pourra également utiliser l'expression :

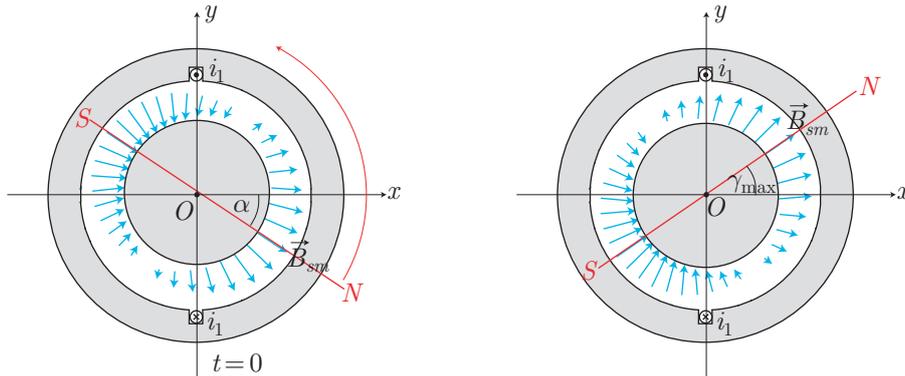
$$\theta = \omega_r t - \alpha$$

où α est appelé l'angle interne.

Ainsi, la loi :

$$B_r = B_{rm} \cos(\gamma - \omega_r t + \alpha) \Rightarrow B_{r,0} = B_{rm} \cos(\gamma + \alpha) \text{ à } t = 0$$

montre qu'à la date $t = 0$, $B_{r,0}$ prend sa valeur maximale B_{rm} en $\gamma_{\max} = -\alpha$.



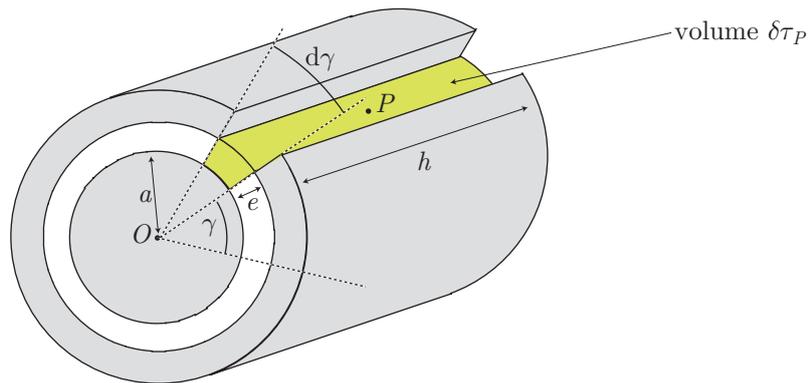
En revanche, à une date $t \neq 0$, le maximum de B_r se trouve en une direction γ_{\max} telle que :

$$B_r = B_{rm} \text{ pour } \cos(\gamma_{\max} - \omega_r t + \alpha) \Rightarrow \gamma_{\max} = \omega_r t - \alpha \quad (28)$$

ce qui montre que la position de ce maximum tourne à la vitesse ω_r , de même que l'axe SN . C'est cette rotation qui justifie que le champ magnétique produit dans l'entrefer est aussi qualifié de champ rotorique "glissant".

e- Énergie et couple

Considérons un volume élémentaire $\delta\tau_P \simeq a d\gamma \times e \times h$, au voisinage d'un point P de l'entrefer :



En P , le rotor crée un champ magnétique $\vec{B}_r(P) = B_r \vec{u}_r$ et le stator y crée un champ magnétique $B_s(P) = B_s \vec{u}_r$ tels que :

$$B_r = B_{rm} \cos(\gamma - \theta) \text{ et } B_s = B_{sm} \cos(\gamma - \omega_s t)$$

dont la résultante $\vec{B} = \vec{B}_r + \vec{B}_s = (B_r + B_s) \vec{u}_r$ produit dans $\delta\tau_P$ une énergie magnétique $\delta\mathcal{E}_{\text{mag}}$ de densité volumique :

$$\frac{\delta\mathcal{E}_{\text{mag}}}{\delta\tau_P} = \frac{B^2(P)}{2\mu} \Rightarrow \delta\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{B^2(P)}{2\mu_0} \delta\tau = \frac{1}{2\mu_0} (B_r + B_s)^2 \times aeh d\gamma$$

C'est pourquoi l'entrefer emmagasine une énergie magnétique totale :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint_{\text{entrefer}} \delta\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{aeh}{2\mu_0} \iiint_{\gamma=0}^{2\pi} (B_r^2 + B_s^2 + 2B_r B_s) d\gamma = \mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2} + \mathcal{E}_{m3}$$

où l'on pose :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{m1} &= \frac{aeh}{2\mu_0} \int_{\gamma=0}^{2\pi} B_r^2 d\gamma = \frac{aeh}{2\mu_0} \int_{\gamma=0}^{2\pi} B_{rm}^2 \cos^2(\gamma - \theta) d\gamma = \frac{\pi aeh}{2\mu_0} \text{car} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx = \pi \\ \mathcal{E}_{m2} &= \frac{aeh}{2\mu_0} \int_{\gamma=0}^{2\pi} B_s^2 d\gamma = \frac{aeh}{2\mu_0} \int_{\gamma=0}^{2\pi} B_{sm}^2 \cos^2(\gamma - \omega_s t) d\gamma = \frac{\pi aeh}{2\mu_0} B_{sm}^2\end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{m3} &= \frac{\pi aeh}{2\mu_0} \int_{\gamma=0}^{2\pi} 2B_r B_s d\gamma = \frac{aeh}{2\mu_0} B_{rm} B_{sm} \int_{\gamma=0}^{2\pi} 2 \cos(\gamma - \theta) \times \cos(\gamma - \omega_s t) d\gamma \\ &= \frac{aeh}{2\mu_0} B_{rm} B_{sm} \left[\int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos(2\gamma - \theta - \omega_s t) d\gamma + \int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos(\omega_s t - \theta) d\gamma \right] \\ &= \frac{\pi aeh}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \cos(\omega_s t - \theta) \text{car} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos(2\gamma - \varphi) d\gamma = 0 \text{ et } \int_{\gamma=0}^{2\pi} d\gamma = 2\pi\end{aligned}$$

Finalement :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2} + \frac{\pi aeh}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \cos(\omega_s t - \theta) \text{ où } \theta = \omega_r t - \alpha$$

ce qui fournit l'expression du couple Γ que la machine exerce sur l'arbre solidaire du rotor :

$$\Gamma = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial \theta} \right)_{I_{rm}, I_{sm}} = \frac{\pi aeh}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \sin(\omega_s t - \theta)$$

f- Condition de synchronisme et stabilité

Puisque $\theta = \omega_r t - \alpha$, le couple :

$$\Gamma = \frac{\pi aeh}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \sin(\omega_s t - \omega_r t + \alpha) \quad (29)$$

admet pour valeur moyenne :

$$\langle \Gamma \rangle_T = \frac{\pi aeh}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \langle \sin[(\omega_s - \omega_r)t + \alpha] \rangle_T$$

où :

$$\langle \sin(\Delta\omega t + \alpha) \rangle_T = \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta\omega \neq 0 \\ \sin \alpha & \text{si } \Delta\omega = 0 \end{cases}$$

Donc $\langle \Gamma \rangle_T$ est non nul si $\omega_r = \omega_s$, ce qui signifie aussi que le rotor tourne à une vitesse angulaire ω_r identique à la vitesse de rotation ω_s du champ glissant statorique. Il s'agit de la condition de synchronisme que l'on écrira, lorsqu'elle est vérifiée :

$$\omega_r = \omega_s = \Omega$$

Si l'on parvient, à l'aide d'un couple extérieur, à ralentir l'arbre par rapport au champ statorique, il y a décrochage du moteur : celui-ci n'exerce plus de couple sur l'arbre.

Considérons maintenant que la condition de synchronisme soit respectée, l'expression (29) montre que :

$$\Gamma = \frac{\pi aeh}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \sin \alpha \text{ avec } B_{rm} = \frac{\mu_0 N_r}{2e} I_{rm} \text{ et } B_{sm} = \frac{\mu_0 N_s}{2e} I_{sm} \quad (30)$$

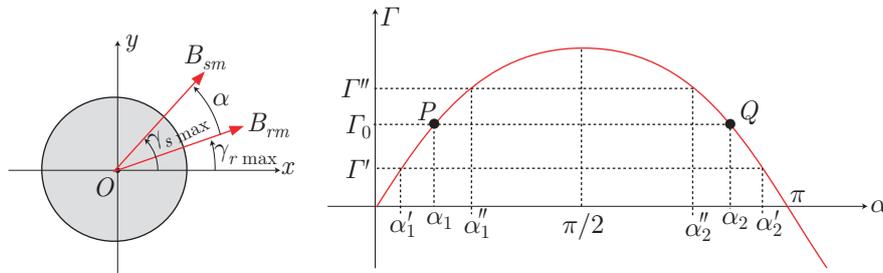
Intéressons-nous au fonctionnement de la machine lorsque $\alpha > 0$ et rappelons que la rotation des champs statorique et rotorique peut-être étudiée en suivant la rotation des maxima B_{sm} et B_{rm} de B_s et B_r respectivement repérés par les angles exprimés par les relations (26) et (28) :

$$\gamma_{s \max} = \omega_s t \text{ et } \gamma_{r \max} = \omega_r t - \alpha \text{ où } \omega_s = \omega_r = \Omega$$

ce qui montre que :

$$\gamma_{r \max} = \gamma_{s \max} - \alpha \Rightarrow \gamma_{s \max} = \gamma_{r \max} + \alpha$$

ce qui signifie aussi sur le stator tourne en avance sur le rotor :



La relation (30) :

$$\Gamma = \Gamma_m \sin \alpha \text{ avec } \Gamma_m = \frac{\pi a e h}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \quad (31)$$

montre que la valeur de α détermine le fonctionnement de la machine.

- Supposons que la machine fonctionne pour la valeur α_1 de α telle que $\alpha_1 < \frac{\pi}{2}$ et $\Gamma = \Gamma_0$ (point P de la courbe $\Gamma = f(\alpha)$). Si le rotor prend du retard par rapport au stator, α augmente et prend une valeur $\alpha'_1 > \alpha_1$ qui donne à Γ une valeur $\Gamma'' > \Gamma_0$ et accélère ainsi le rotor, qui rattrape alors son retard.

Si le rotor prend de l'avance par rapport au stator, α diminue et prend une valeur $\alpha'_1 < \alpha_1$ qui donne à Γ une valeur $\Gamma' < \Gamma_0$: le rotor ralentit et perd alors son avance.

Donc, au voisinage de $\alpha = \alpha_1$, la machine fonctionne de manière stable.

- Supposons maintenant que la machine fonctionne avec la valeur $\alpha = \alpha_2 \in \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ pour laquelle Γ prend la valeur Γ_0 (point Q de la courbe $\Gamma(\alpha)$).

Si le rotor prend du retard par rapport au stator, α augmente jusqu'à une valeur α'_2 pour laquelle $\Gamma' < \Gamma_0$: le rotor ralentit et augmente alors son retard.

Si le rotor prend de l'avance par rapport au stator, α diminue jusqu'à une valeur α''_2 pour laquelle $\Gamma'' > \Gamma_0$: le rotor accélère et augmente alors son avance.

Donc, au voisinage de $\alpha = \alpha_2$, la machine fonctionne de manière instable.

En conclusion, on pourra admettre que :

la machine fonctionne de manière stable pour des valeur de α telle que $\frac{d\Gamma}{d\alpha} > 0$

EXERCICE

On s'intéresse à une machine synchrone, qui fournit à l'arbre en rotation un couple $\Gamma(\alpha)$ qui dépend de α . Cet arbre est également soumis à un couple extérieur Γ_{ext} supposé constant et sa rotation est repérée par un angle $\theta = \omega_r t - \alpha$, où ω_r est aussi supposé constant.

1. On note J le moment d'inertie de l'arbre. En lui appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer une équation différentielle reliant $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$, $\Gamma(\alpha)$ et Γ_{ext} .
2. On note α_1 la valeur de α pour laquelle la machine synchrone atteint son régime permanent. Quelle relation peut-on établir entre $\Gamma(\alpha_1)$ et Γ_{ext} ?
3. À l'aide d'un développement limité de $\Gamma(\alpha)$ au voisinage de α_1 et de l'équation différentielle de la question 1, montrer que la stabilité de la machine est obtenue lorsque $\Gamma(\alpha)$ est une fonction croissante de α .

Corrigé

1. Le théorème du moment cinétique appliqué à l'arbre, qui reçoit un couple $\Gamma(\alpha)$ du moteur et un couple Γ_{ext} de l'extérieur, s'écrit :

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Gamma(\alpha) + \Gamma_{\text{ext}}$$

où :

$$\theta = \omega_r t - \alpha \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \Gamma(\alpha) + \Gamma_{\text{ext}} \Rightarrow J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\Gamma(\alpha) - \Gamma_{\text{ext}}$$

2. Lorsque le régime permanent est atteint, pour $\alpha = \alpha_1$, l'équation précédente devient :

$$-\Gamma(\alpha_1) - \Gamma_{\text{ext}} = 0 \Rightarrow \boxed{-\Gamma_{\text{ext}} = \Gamma(\alpha_1)}$$

3. Des deux équations précédentes il découle que :

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\Gamma(\alpha) + \Gamma(\alpha_1)$$

Donc, au voisinage de α_1 , en posant $\alpha = \alpha_1 + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll \alpha_1$:

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha) &= \Gamma(\alpha_1 + \varepsilon) \simeq \Gamma(\alpha_1) + \varepsilon \left. \frac{d\Gamma}{d\alpha} \right|_{\alpha_1} \quad \text{et} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} \\ \Rightarrow J \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} &= -\varepsilon \left. \frac{d\Gamma}{d\alpha} \right|_{\alpha_1} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + k\varepsilon = 0} \quad \text{où} \quad k = \frac{1}{J} \left. \frac{d\Gamma}{d\alpha} \right|_{\alpha_1} \end{aligned}$$

Plusieurs cas peuvent alors se présenter :

- Si $k < 0$, la solution de l'équation différentielle : $\varepsilon = A \cosh(\sqrt{k}t) + B \sinh(\sqrt{k}t)$ diverge, ce qui montre que $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha = \pm\infty$, c'est-à-dire que α diverge aussi dans le temps. Ce fonctionnement n'est pas stable.
- Si $k > 0$, la solution de l'équation différentielle :

$$\varepsilon(t) = A \cos(\sqrt{k}t) + B \sin(\sqrt{k}t)$$

montre que $\alpha(t) = \alpha_1 + \varepsilon(t)$ oscille autour de α_1 , ce qui est caractéristique d'un fonctionnement stable. Or,

$\left. \frac{d\Gamma}{d\alpha} \right|_{\alpha_1} > 0$ signifie aussi que Γ est une fonction croissante de α .

- si $k = 0$, la solution de l'équation :

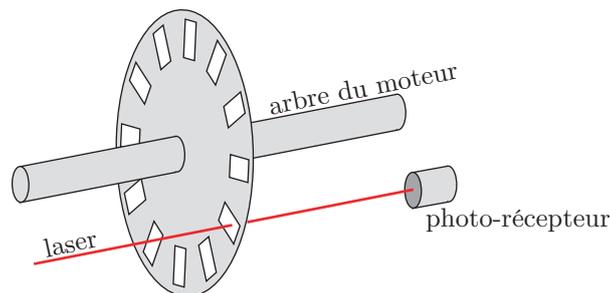
$$\varepsilon(t) = At + B \Rightarrow \alpha(t) = \alpha_1 + \varepsilon(t)$$

peut générer un fonctionnement stable si $A = 0$ ou un fonctionnement instable si $A \neq 0$.

g- Démarrage et autopilotage

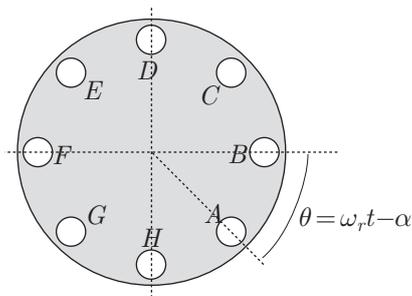
L'étude précédente montre que le moteur ne peut produire un couple moyen que si sa vitesse de rotation $\Omega = \omega_r$ a la même valeur que la pulsation ω_s des courants statoriques i_1 et i_2 . Cette contrainte impose plusieurs limites de fonctionnement : au démarrage ($\Omega = 0$), le moteur synchrone (M.S.) ne peut être mis en route qu'avec des courants d'induit de fréquence presque nulle. Dans ce cas, il n'est pas possible d'alimenter directement le moteur avec la tension du secteur (50 Hz). Une des solutions consiste à employer un moteur auxiliaire (moteur à courant continu ou machine asynchrone) qui lance le M.S. avec une vitesse angulaire à peu supérieure à 50 tr.s^{-1} ; en ralentissant, le M.S. «accroche» sur les 50 Hz du secteur.

En outre, il devrait être impossible d'augmenter la vitesse de rotation du M.S. sans déroger à la contrainte du synchronisme. Pour y parvenir malgré tout, plusieurs solutions technologiques ont été développées, dont l'autopilotage qui consiste à recueillir sur l'arbre du moteur des informations sur la position de cet arbre. Une roue percée et éclairée par un laser peut alors servir de capteur :

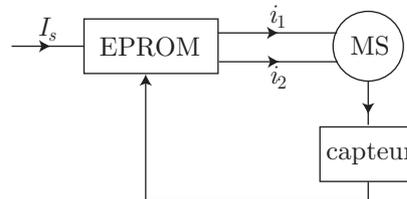


Les informations ainsi recueillies servent de consigne pour ajuster la fréquence des courants d'induit (i_1 et i_2) sur la vitesse de rotation de l'arbre. Citons par exemple :

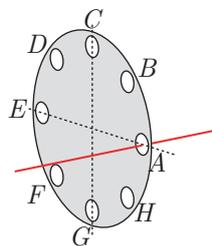
- L'utilisation d'un circuit numérique (EPROM) programmé pour délivrer des courants i_1 et i_2 selon une séquence déterminée par l'éclairement de chaque trou. Prenons l'exemple simplifié d'une roue possédant huit trous (de A à H) dont l'éclairement produit les courants i_1 et i_2 prédéterminés suivants :



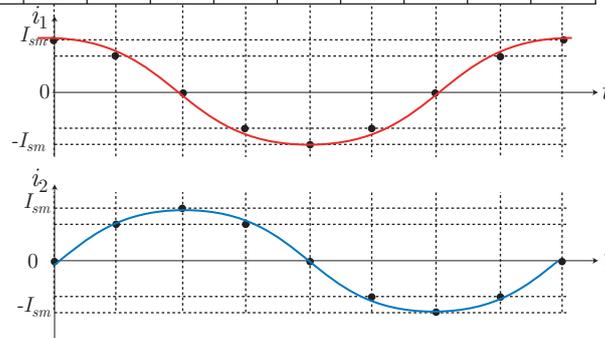
trou	A	B	C	D	E	F	G	H	A
i_1	I_{sm}	$0,7 I_{sm}$	0	$-0,7 I_{sm}$	$-I_{sm}$	$-0,7 I_{sm}$	0	$0,7 I_{sm}$	I_{sm}
i_2	0	$0,7 I_{sm}$	I_{sm}	$0,7 I_{sm}$	0	$-0,7 I_{sm}$	$-I_{sm}$	$-0,7 I_{sm}$	0



Une telle séquence produit des courants i_1 et i_2 d'autant plus proches des sinusôides $I_{sm} \cos(\omega_r t)$ et $I_{sm} \sin(\omega_r t)$ que le nombre de trous est important.

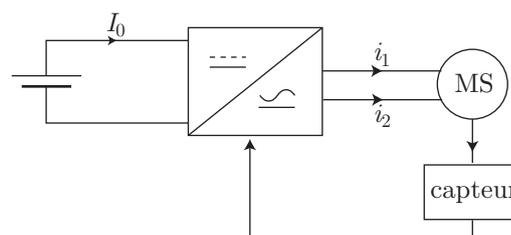


trou	A	B	C	D	E	F	G	H	A
i_1	I_{sm}	$0,7 I_{sm}$	0	$-0,7 I_{sm}$	$-I_{sm}$	$-0,7 I_{sm}$	0	$0,7 I_{sm}$	I_{sm}
i_2	0	$0,7 I_{sm}$	I_{sm}	$0,7 I_{sm}$	0	$-0,7 I_{sm}$	$-I_{sm}$	$-0,7 I_{sm}$	0

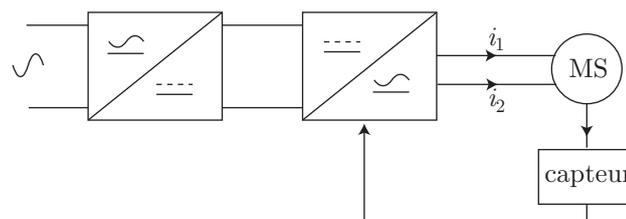


Ce dispositif assure la rotation synchrone du moteur avec la fréquence des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

- L'autopilotage peut également être réalisé à l'aide d'un onduleur dont les tensions de commande sont des créneaux pilotés à partir d'un capteur situé sur l'arbre du moteur :



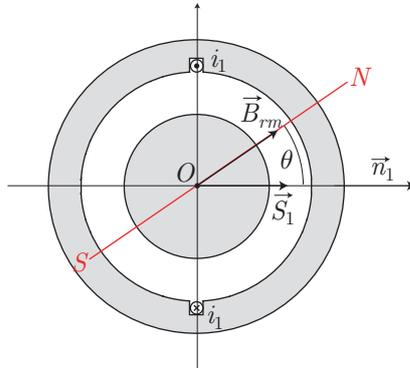
L'amplitude des courants i_1 et i_2 peut être commandée par un générateur de courant continu I_0 , tandis que c'est le capteur qui commande leur fréquence. Il est également possible d'alimenter le moteur synchrone sur le secteur, auquel cas il convient de lui adjoindre un étage redresseur :



h- Modèle électrique de l'induit

L'objectif de cette étude est l'obtention d'un modèle électrique des enroulements composant l'induit. Pour cela, étudions séparément les enroulements parcourus par les courants i_1 et i_2 .

- Le courant i_1 circule dans les enroulements (\mathcal{E}_1) disposés selon un plan moyen (Oyz), de normale \vec{n}_1 dirigée selon (Ox) tandis que l'axe du rotor (SN), support du maximum B_{rm} de B_r , fait un angle $\theta = \omega_r t - \alpha$ avec \vec{n}_1 .



La surface \vec{S}_1 circonscrite dans les enroulements (\mathcal{E}_1) est donc le siège d'un champ magnétique issu de trois origines :

- le courant i_1 crée un champ à l'origine d'un flux $\phi_{11} = L_1 i_1$.
- le courant $i_r = I_{rm}$ crée un champ \vec{B}_r à l'origine d'un flux ϕ_{1r} qu'on supposera proportionnel à $\vec{B}_{rm} \cdot \vec{n}_1$ et dont on supposera qu'il s'écrit :

$$\phi_{1r} \propto \vec{B}_{rm} \cdot \vec{n}_1 \Rightarrow \phi_{1r} = M_{r1} I_{rm}$$

où $M_{r1} = M_0 \cos \theta$ est le coefficient d'induction mutuelle entre I_{rm} et i_1 .

- le courant i_2 qui circule dans les enroulements (\mathcal{E}_2) de plan moyen caractérisé par une normale \vec{n}_2 perpendiculaire à \vec{n}_1 . C'est pourquoi on pourra admettre que le coefficient d'induction mutuelle M_{12} entre \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 est nul.

Finalement, le flux du champ magnétique à travers (\mathcal{E}_1) :

$$\phi_1 = L_1 i_1 + M_{r1} I_{rm} + M_{12} i_2 = L_1 i_1 + M_{r1}(t) I_{rm} \text{ où } M_{r1}(t) = M_0 \cos \theta(t)$$

produit une force électromotrice dans (\mathcal{E}_1) qui vérifie la loi de Faraday :

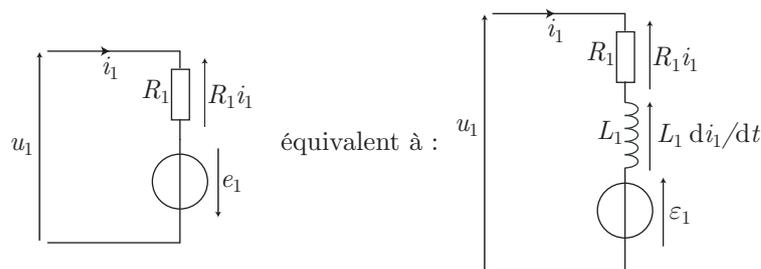
$$e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - I_{rm} \frac{dM_{r1}}{dt}$$

C'est pourquoi, en rendant compte des pertes cuivre à l'aide d'une résistance R_1 , la tension aux bornes de l'induit s'écrit :

$$u_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + I_{rm} \frac{dM_{r1}}{dt} = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + \varepsilon_1 \quad (32)$$

Cette équation montre que l'induit se comporte comme une association en série d'une résistance R_1 , d'une bobine d'auto-inductance L_1 et d'une force contre-électromotrice⁶ :

$$\varepsilon_1 = I_{rm} \frac{dM_{r1}}{dt} \text{ avec } M_{r1} = M_0 \cos \theta = M_0 \cos(\omega_r t - \alpha)$$



Quant à la représentation de Fresnel associée à la relation (32), elle s'obtient de la manière habituelle :

6. Par abus de langage, ε_1 est souvent appelé «force électromotrice».

- la référence des phases doit être définie. Par exemple, on peut convenir qu'il s'agit du courant i_1 qui fixe cette référence, auquel cas il s'écrit :

$$i_1(t) = I_{sm} \cos(\Omega t) \Rightarrow i_1 = \underline{I}_1 e^{j\Omega t} \text{ où } \underline{I}_1 = I_{sm} \text{ et } \Omega = \omega_s$$

- Les amplitudes complexes des tensions doivent être clairement identifiées :

$$\underline{u}_{R_1} = R_1 i_1 = \underline{U}_{R_1} e^{j\Omega t} \text{ avec } \underline{U}_{R_1} = R_1 I_{sm} \in \mathbb{R}$$

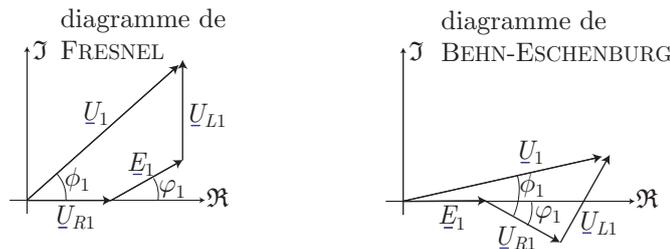
$$\underline{u}_{L_1} = L_1 j\omega i_1 = \underline{U}_{L_1} e^{j\Omega t} \text{ avec } \underline{U}_{L_1} = L_1 \omega j I_{sm} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

et l'on note φ_1 et ϕ_1 les déphasages respectifs de ε_1 et de u_1 par rapport à i_1 :

$$\underline{\varepsilon}_1 = E_{01} e^{j(\Omega t + \varphi_1)} = \underline{E}_1 e^{j\Omega t} \text{ avec } \underline{E}_1 = E_{01} e^{j\varphi_1} \text{ et où } \omega_r = \Omega$$

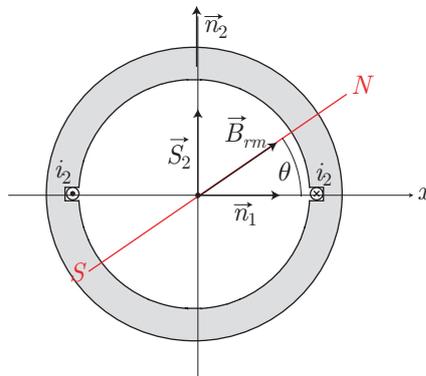
$$\underline{u}_1 = U_{01} e^{j(\Omega t + \phi_1)} = \underline{U}_1 e^{j\Omega t} \text{ avec } \underline{U}_1 = U_{01} e^{j\phi_1}$$

Ces amplitudes complexes sont alors représentées dans le plan complexe comme des vecteurs qui rendent compte de la loi des mailles : $\underline{U}_1 = \underline{U}_{R_1} + \underline{E}_1 + \underline{U}_{L_1}$.



Les traités sur les moteurs utilisent également le diagramme de BEHN-ESCHENBURG, qui peut être mentionné ici, bien que n'étant pas exigible en PSI : il s'agit d'un diagramme de FRESNEL dans lequel la référence des phases est la f.c.é.m. $\underline{\varepsilon}_1 = \underline{E}_1 e^{j\Omega t}$ (les autres amplitudes complexes s'adaptent alors à cette nouvelle convention).

- Le courant i_2 circule dans les enroulement \mathcal{E}_2 disposés sur un plan moyen (Oxz), de normale \vec{n}_2 dirigée selon (Oy).



La surface (\vec{S}_2) circonscrite dans les enroulements (\mathcal{E}_2) est donc le siège d'un champ magnétique qui provient :

- du courant i_2 , qui produit en S_2 un flux magnétique $\phi_{22} = L_2 i_2$;
- du rotor, qui produit un flux magnétique ϕ_{r2} proportionnel à $\vec{B}_{rm} \cdot \vec{S}_2$, c'est-à-dire à $B_{rm} S_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

C'est pourquoi on notera :

$$\phi_{r2} = M_{r2} I_{rm}$$

où l'on supposera que le coefficient d'induction mutuelle s'écrit :

$$M_{r2} = M_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = M_0 \sin \theta \text{ où } \theta = \omega_r t - \alpha$$

- du courant i_1 qui circule dans les enroulements (\mathcal{E}_1). Puisque (\mathcal{E}_1) et (\mathcal{E}_2) sont orthogonaux, on admettra que leur coefficient d'induction mutuelle M_{21} est nul.

Par suite, le flux du champ magnétique à travers les enroulements (\mathcal{E}_2) :

$$\phi_1 = L_2 i_2 + M_{r2} I_{rm} + M_{21} i_1 = L_2 i_2 + M_{r2}(t) I_{rm} \text{ où } M_{r2}(t) = M_0 \sin \theta(t)$$

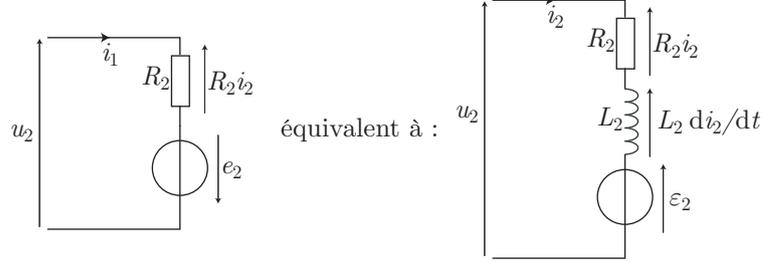
produit dans (\mathcal{E}_2) une force électromotrice :

$$e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - I_{rm} \frac{dM_{r2}}{dt}$$

Ainsi, en ne tenant compte que des pertes cuivre, la tension aux bornes de l'enroulement (\mathcal{E}_2) s'écrit :

$$u_2 = R_2 i_2 - e_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + I_{rm} \frac{dM_{r2}}{dt} \Rightarrow \boxed{u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + \varepsilon_2} \quad (33)$$

où $\boxed{\varepsilon_2 = I_{rm} \frac{dM_{r2}}{dt}}$ représente une force contre-électromotrice associée en série avec une résistance R_2 et une bobine d'auto-inductance L_2 :



i- Bilan de puissance

Puisque l'induit reçoit les courants $i_1 = I_{sm} \cos(\omega_s t)$ et $i_2 = I_{sm} \sin(\omega_s t)$, sous les tensions respectives u_1 et u_2 données par les résultats (32) et (33), il reçoit la puissance électrique instantanée :

$$\mathcal{P}_s(t) = u_1 i_1 + u_2 i_2 = \mathcal{P}_1(t) + \mathcal{P}_2(t)$$

où :

$$\mathcal{P}_1(t) = u_1 i_1 = R_1 i_1^2 + L_1 i_1 \frac{di_1}{dt} + i_2 \times I_{rm} \frac{dM_{r1}}{dt} = R_1 i_1^2 + L_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{i_1^2}{2} \right) + \mathcal{P}_{m1}(t)$$

et :

$$\mathcal{P}_2(t) = u_2 i_2 = R_2 i_2^2 + L_2 i_2 \frac{di_2}{dt} + i_2 \times I_{rm} \frac{dM_{r2}}{dt} = R_2 i_2^2 + L_2 \frac{d}{dt} \left(\frac{i_2^2}{2} \right) + \mathcal{P}_{m2}(t)$$

de sorte que :

$$\mathcal{P}_s(t) = \mathcal{P}_{Js} + \mathcal{P}_L(t) + \mathcal{P}_m(t)$$

où l'on définit :

- la puissance dissipée par effet Joule dans les enroulements du stator :

$$\mathcal{P}_{Js}(t) = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$$

- la puissance : $\mathcal{P}_L(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \right)$. Or, puisque les enroulements (\mathcal{E}_1) et (\mathcal{E}_2) sont identiques, leurs auto-inductances sont égales à une valeur commune L , de sorte que :

$$\mathcal{P}_L(t) = \frac{L}{2} \frac{d}{dt} (i_1^2 + i_2^2) = \frac{L}{2} \frac{d}{dt} [I_{sm}^2 \cos^2(\omega_s t) + I_{sm}^2 \sin^2(\omega_s t)] = \frac{L}{2} \frac{dI_{sm}^2}{dt} = 0$$

- la puissance cédée aux forces contre-électromotrices :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m(t) &= \mathcal{P}_{m1}(t) + \mathcal{P}_{m2}(t) = i_1 \times I_{rm} \frac{dM_{r1}}{dt} + i_2 \times I_{rm} \frac{dM_{r2}}{dt} \\ &= I_{sm} \cos(\omega_s t) \times I_{rm} \frac{d}{dt} [M_0 \cos(\omega_r t - \alpha)] + I_{sm} \sin(\omega_s t) \times I_{rm} \frac{d}{dt} [M_0 \sin(\omega_r t - \alpha)] \\ &= I_{sm} I_{rm} M_0 \omega_r [\sin(\omega_s t) \cos(\omega_r t - \alpha) - \cos(\omega_s t) \sin(\omega_r t - \alpha)] \\ &= I_{sm} I_{rm} M_0 \omega_r \sin(\Delta\omega t + \alpha) \text{ où } \Delta\omega = \omega_s - \omega_r \end{aligned}$$

dont la valeur moyenne vaut :

$$P_m = \langle \mathcal{P}_m(t) \rangle_T = I_{sm} I_{rm} M_0 \omega_r \langle \sin(\Delta\omega t + \alpha) \rangle_T$$

avec :

$$\langle \sin(\Delta\omega t + \alpha) \rangle_T = \begin{cases} 0 & \text{si } \Delta\omega \neq 0 \\ \sin \alpha & \text{si } \Delta\omega = 0 \end{cases}$$

À nouveau, la condition de synchronisme s'impose : P_m est non nul seulement si $\omega_r = \omega_s$; on notera Ω la valeur commune, qui permet d'écrire :

$$P_m(t) = I_{sm} I_{rm} M_0 \Omega \sin \alpha$$

EXERCICE 

Le rotor (inducteur), tournant à la vitesse ω_r , est alimenté par un courant constant $i_r = I_{rm}$ tandis que les enroulements de l'induit (\mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2) reçoivent les courants respectifs :

$$i_1(t) = I_{sm} \cos(\omega_s t) \quad i_2(t) = I_{sm} \sin(\omega_s t)$$

On note L_r l'auto-inductance (supposée constante) du rotor et les inductances mutuelles du rotor avec (\mathcal{E}_1) et (\mathcal{E}_2) sont supposées valoir :

$$M_{r1} = M_0 \cos \theta \quad M_{r2} = M_0 \sin \theta$$

où M_0 est une constante et $\theta = \omega_r t - \alpha$ désigne la position angulaire du rotor.

Enfin, on supposera que le fil dont est composé l'inducteur présente une résistance totale R_r .

- Exprimer la tension $u_r(t)$ aux bornes de l'inducteur en fonction de L_r , I_{rm} , I_{sm} , M_0 , $\Delta\omega = \omega_s - \omega_r$, α et t .
En déduire le schéma électrique équivalent de l'inducteur.
- Exprimer la puissance électrique instantanée $\mathcal{P}_r(t)$ reçue par l'inducteur et montrer que sa valeur moyenne P_r se limite à une perte par effet Joule.

Corrigé

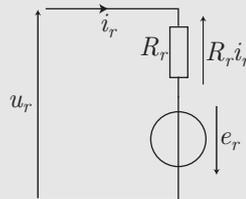
- Les enroulement (\mathcal{E}_r) qui composent l'inducteur sont soumis aux influences magnétiques des courants $i_r = I_{rm}$, $i_1(t)$ et $i_2(t)$, qui créent alors un flux magnétique à travers (\mathcal{E}_r) :

$$\begin{aligned} \phi_r &= L_r i_r + M_{r1} i_1 + M_{r2} i_2 \\ &= L_r I_{rm} + M_0 \cos(\omega_r t - \alpha) \times I_{sm} \cos(\omega_s t) + M_0 \sin(\omega_r t - \alpha) \times I_{sm} \sin(\omega_s t) \\ &= L_r I_{rm} + M_0 I_{sm} \cos(\omega_s t - \omega_r t + \alpha) = L_r I_{rm} + M_0 I_{sm} \cos(\Delta\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

à l'origine d'une force électromotrice :

$$e_r = -\frac{d\phi_r}{dt} = M_0 I_{sm} \times \Delta\omega \sin(\Delta\omega t + \alpha)$$

D'un point de vue électrique, l'inducteur équivaut donc à une association en série de la résistance R_r et de e_r :



aux bornes de laquelle s'établit une tension : $u_r = R_r I_{rm} - e_r$

- La puissance électrique instantanée reçue par le rotor vaut alors :

$$\mathcal{P}_r(t) = i_r u_r = I_{rm} u_r = R_r I_{rm}^2 - I_{rm} e_r = R_r I_{rm}^2 - \mathcal{P}_{rm}(t) \text{ où } \mathcal{P}_{rm}(t) = M_0 I_{rm} I_{sm} \times \Delta\omega \sin(\Delta\omega t + \alpha)$$

et a donc pour valeur moyenne : $P_r = R_r I_{rm}^2 - \langle \mathcal{P}_{rm}(t) \rangle_T$, avec :

$$\langle \mathcal{P}_{rm}(t) \rangle_T = M_0 I_{sm} I_{rm} \times \Delta\omega \langle \sin(\Delta\omega t + \alpha) \rangle_T$$

et :

$$\Delta\omega \times \langle \sin(\Delta\omega t + \alpha) \rangle_T = \begin{cases} 0 \times \alpha = 0 & \text{si } \Delta\omega = 0 \\ \Delta\omega \times 0 = 0 & \text{si } \Delta\omega \neq 0 \end{cases}$$

Donc, quelle que soit la valeur de $\Delta\omega$: $P_r = R_r I_{rm}^2$

Finalement, lorsque $\omega_r = \omega_s = \Omega$ (et $\Delta\omega = 0$), la machine synchrone reçoit une puissance électrique instantanée :

$$\mathcal{P}_{\text{elec}}(t) = \mathcal{P}_m(t) + R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_r I_{rm}^2$$

qu'elle peut redistribuer sous forme de pertes par effet Joule ou sous forme mécanique :



En remarquant que les pertes par effet Joule valent :

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + R_r I_{rm}^2$$

et que la puissance mécanique cédée par la machine à son arbre produit un couple $\Gamma_{m/a}$ tel que $\mathcal{P}_{\text{méca}} = \Gamma_{m/a} \Omega$, un bilan d'énergie montre que :

$$\mathcal{P}_{\text{élec}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \mathcal{P}_{\text{méca}} \Rightarrow I_{sm} I_{rm} M_0 \Omega \sin \alpha = \Gamma_{m/a} \Omega \Rightarrow \boxed{\Gamma_{m/a} = M_0 I_{sm} I_{rm} \sin \alpha}$$

résultat compatible avec celui de la relation (31) (page 38) :

$$\Gamma = \Gamma_m \sin \alpha = \frac{\pi a e h}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \sin \alpha$$

associé aux expressions (30) :

$$\begin{cases} B_{rm} = \frac{\mu_0 N_r}{2e} I_{rm} \\ B_{sm} = \frac{\mu_0 N_s}{2e} I_{sm} \end{cases} \Rightarrow \Gamma = \frac{\mu_0 \pi a h N_r N_s}{4e} I_{sm} I_{rm} \sin \alpha$$

REMARQUE Dans l'expression de $\Gamma_{m/a}$, le produit $M_0 I_{rm}$ a la dimension d'un flux. C'est pourquoi on trouve également cette expression sous la forme :

$$\boxed{\Gamma_{m/a} = \phi_0 I_{sm} \sin \alpha}$$

qui rappelle que l'inducteur de la machine synchrone peut être :

- un aimant permanent, auquel cas ϕ_0 désigne le flux magnétique que cet aimant crée dans l'induit (d'où son nom) ;
- un bobinage parcouru par un courant I_{rm} , auquel cas la machine est dite à excitation séparée et ϕ_0 est proportionnel au courant d'excitation : $\phi_0 = M_0 I_{rm}$.

j- Réversibilité

L'étude précédente a montré que la machine synchrone reçoit une puissance électrique $\mathcal{P}_{\text{élec, reçue}}$ et fournit à l'arbre une puissance mécanique $\mathcal{P}_{\text{méca, fournie}}$:

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{élec, reçue}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \Omega I_{rm} I_{sm} M_0 \sin \alpha = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \mathcal{P}_{\text{utile}} \quad \mathcal{P}_{\text{méca, fournie}} = \Omega I_{rm} I_{sm} M_0 \sin \alpha}$$

Il est ainsi possible de distinguer deux types de fonctionnement pour la machine synchrone :

- Si $\alpha > 0$: la machine agit comme un moteur synchrone car $\mathcal{P}_{\text{méca, fournie}} > 0$ montre qu'elle fournit une énergie mécanique, tandis que :

$$\mathcal{P}_{\text{utile}} = \Omega I_{sm} I_{rm} M_0 \sin \alpha$$

montre qu'elle reçoit une énergie électrique utile positive.

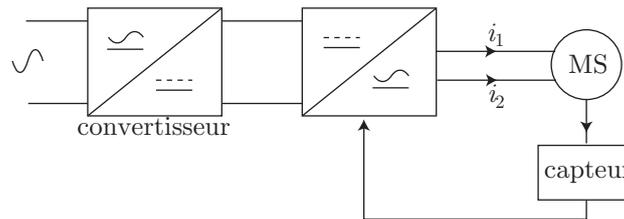
- Si $\alpha < 0$: la machine reçoit une énergie électrique utile $\mathcal{P}_{\text{utile}}(t)$ négative, ce qui signifie qu'elle délivre une énergie électrique, tandis que :

$$\mathcal{P}_{\text{méca, fournie}} = \Omega I_{rm} I_{sm} M_0 \sin \alpha < 0$$

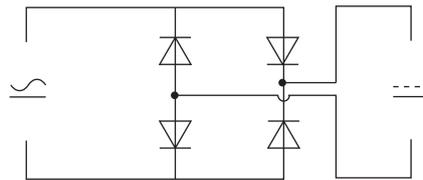
signifie qu'elle reçoit une puissance mécanique. Finalement, lorsque $\alpha < 0$, la machine synchrone convertit une puissance mécanique en puissance électrique. Il s'agit alors :

- d'un alternateur si sa vitesse de rotation Ω (et donc la pulsation des signaux électriques délivrés) est constante ;
- d'une génératrice synchrone si Ω est variable.

REMARQUE L'étude qui précède révèle la réversibilité de la machine synchrone. Cependant cette réversibilité peut être compromise par l'étage d'auto-pilotage qui comporte souvent des circuits électroniques non réversibles. Par exemple, la conversion d'une tension alternative en tension continue :



est souvent réalisée par un pont de Graetz :



dont le fonctionnement ne peut être inversé (il ne peut produire une tension sinusoïdale à partir d'une tension continue).

k- Applications

Les machines synchrones alimentent aujourd'hui trois grandes filières industrielles :

- **Les alternateurs synchrones**, d'une puissance de quelques MW, produisent la quasi-totalité de l'électricité en France.
- **Les moteurs** dont l'inducteur peut être :
 - un aimant permanent. Ces moteurs, qui sont couplés à une alimentation électronique, peuvent délivrer des puissances modestes (jusqu'à quelques dizaines de kW) requises par les machines-outils, les robots, les prototypes de véhicules électriques, ...
 - un rotor bobiné. Ces moteurs, capables de distribuer de fortes puissances, peuvent être directement branchés sur le secteur, par exemple pour la traction ferroviaire⁷ ou alimentés par un générateur, par exemple dans de nombreux paquebots⁸
- **Les compensateurs synchrones**, dont la rotation à vide, et le fonctionnement inductif, consomme ou produit de la puissance réactive au réseau.

3- Machines à courant continu

a- Structure du moteur à courant continu

Un moteur à courant continu est composé :

- d'un stator cylindrique de longueur ℓ qui produit, en tout point M de l'entrefer un champ magnétique radial :

$$\vec{B}_s(M) = B_s(\gamma) \vec{u}_r \text{ avec } B_s(\gamma) = B_{sm} \cos \gamma$$

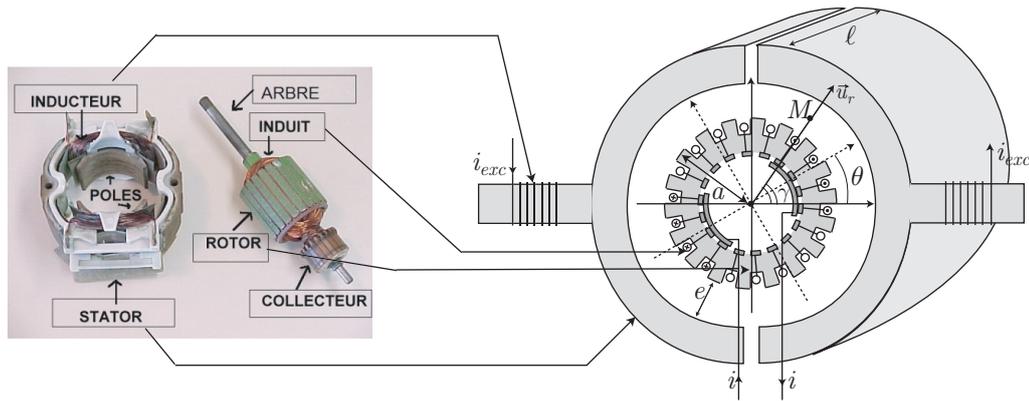
Ce champ peut être produit par un aimant permanent ou par un enroulement (l'inducteur) parcouru par un courant i_{exc} , auquel cas B_{sm} est proportionnel à i_{exc} : $B_{sm} = k_s i_{exc}$.

- d'un rotor cylindrique de même longueur ℓ , composé de spires (l'induit) enroulées dans des encoches pratiquées dans un matériau ferromagnétique. Ces fils, parcourus par un courant i , produisent en tout point M de l'entrefer un champ magnétique radial :

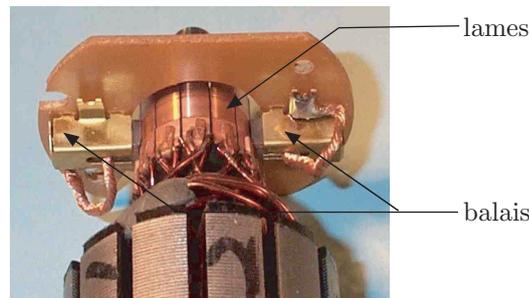
$$\vec{B}_r(M) = B_r(\gamma) \vec{u}_r \text{ avec } B_r(\gamma) = B_{rm} \cos(\gamma - \theta) \text{ où } \theta = \text{cte et où } B_{rm} = k_r i$$

7. La motrice d'un TGV Atlantique possède huit moteurs de 1100 kW chacun.

8. Le *Normandie* utilisait quatre moteurs synchrones de 29 MW chacun, le *Marie-Dufresne* un moteur de 6 MW, le *Queen Marie 2* deux moteurs de 86 MW.



- d'un collecteur dont la structure assure au champ $\vec{B}_r(M)$ de posséder une direction constante en dépit de la rotation du rotor : des balais apportent le courant d'alimentation de l'induit par contact avec des lames :



b- Couple moteur

Le moteur à courant continu (MCC) peut être comparé au moteur synchrone :

	Moteur à courant continu	Moteur synchrone
champ statorique	$B_s(\gamma) = B_{sm} \cos \gamma$ avec $B_{sm} = k_s i_{exc}$ ou $B_{sm} = cte$	$B_s(\gamma) = B_{sm} \cos(\gamma - \omega_s t)$ avec $B_{sm} = \frac{\mu_0 N_s}{2e} I_{sm}$ ou $B_{sm} = cte$
champ rotorique	$B_r(\gamma) = B_{rm} \cos(\gamma - \theta)$ où $B_{rm} = k_r i$ et $\theta = cte$	$B_r(\gamma) = B_{rm} \cos(\gamma - \theta)$ avec $B_{rm} = \frac{\mu_0 N_r}{2e} i_r$ et $\theta = \omega_r t - \alpha$
couple	$\Gamma_{m/a} = \frac{\pi a e h}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \sin(-\theta)$	$\Gamma_{m/a} = \frac{\pi a e h}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \sin(\omega_s t - \theta)$

Cette comparaison montre que le collecteur assure le synchronisme des champs statorique et rotorique du MCC : les vitesses de rotation ω_r et ω_s de ces champs est nulle (alors que la vitesse angulaire Ω de l'arbre ne l'est pas). Ainsi, le couple généré par le MCC sur son arbre s'obtient également par analogie avec celui généré par le moteur synchrone :

$$\Gamma_{m/a} = \frac{\pi a e h}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \sin(-\theta) = \frac{\pi a e h}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \sin \alpha = \frac{\pi a e h}{\mu_0} k_r i B_{sm} \sin \alpha$$

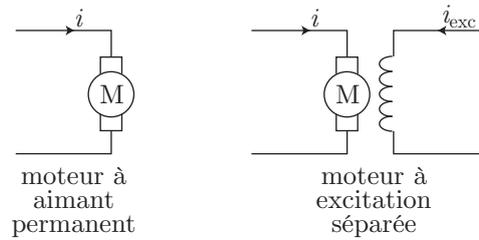
c'est-à-dire :

$$\Gamma_{m/a} = \phi i \quad (34)$$

où ϕ est une grandeur constante proportionnelle à $\sin \alpha$ et à B_{sm} (pour un moteur à aimant permanent) ou à i_{exc} (pour un moteur à excitation séparée) :

$$\phi = \phi_0 \sin \alpha \text{ avec } \phi_0 \propto B_{sm} \text{ ou } \phi_0 \propto i_{exc} \quad (35)$$

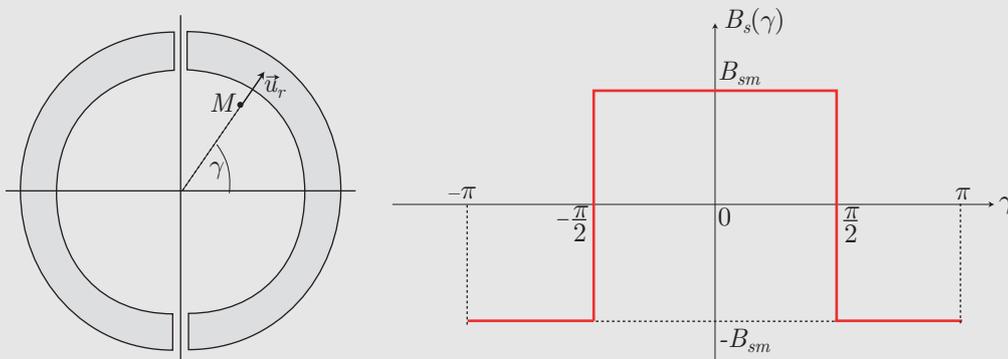
REMARQUE Il est parfois souhaitable, dans un énoncé, de faire apparaître sur un schéma l'excitation séparée du moteur. Dans ce cas, l'inducteur est symbolisé par une bobine :


EXERCICE

Un moteur à courant continu comporte :

- un stator composé de pôles magnétiques semi-cylindriques de longueur ℓ , qui créent dans l'entrefer, d'épaisseur e , un champ magnétique radial, uniforme par morceaux :

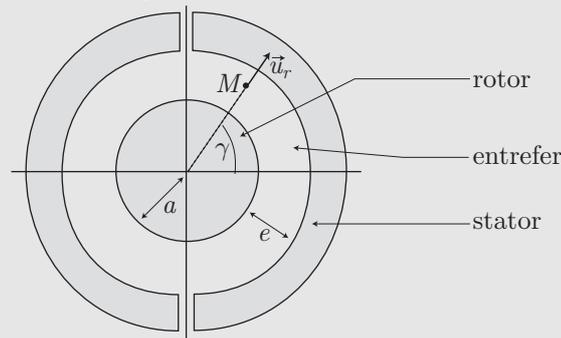
$$\vec{B}_s(M) = B_s(\gamma) \vec{u}_r \text{ où } B_s(\gamma) = \pm B_{sm}$$



- un rotor cylindrique de longueur ℓ , de rayon a , composé d'un enroulement électrique (induit) logé dans des encoches pratiquées dans un matériau ferromagnétique. Le courant électrique i qui alimente cet induit produit dans l'entrefer un champ magnétique radial :

$$\vec{B}_r(M) = B_r(\gamma) \vec{u}_r \text{ avec } B_r(\gamma) = B_{rm} \cos(\gamma + \theta) \text{ où } \theta = \text{cte}$$

et où B_{rm} est proportionnel à i : $B_{rm} = k_r i$.



Un collecteur permet de maintenir le champ magnétique $\vec{B}_r(M)$ constant en dépit de la rotation du rotor.

1. Montrer que l'énergie magnétique emmagasinée dans l'entrefer s'écrit :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2} + \mathcal{E}_{m3}(\theta)$$

où l'on exprimera les termes constants \mathcal{E}_{m1} , \mathcal{E}_{m2} ainsi que la fonction $\mathcal{E}_{m3}(\theta)$.

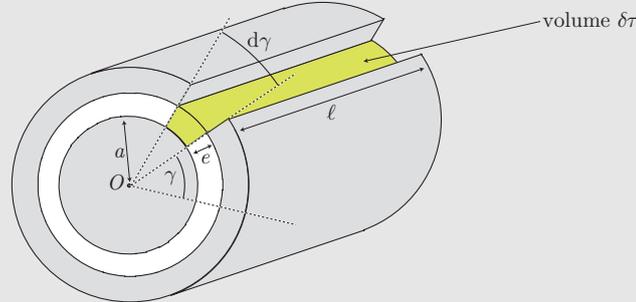
2. En déduire que le couple $\Gamma = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial \theta} \right)_i$ est proportionnel à i : $\Gamma = \phi_0 i$ et exprimer la constante ϕ_0 .

Corrigé

1. Dans l'entrefer règne le champ magnétique :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_s(M) + \vec{B}_r(M) = [B_s(\gamma) + B_r(\gamma)] \vec{u}_r$$

à l'origine d'une densité volumique d'énergie $\frac{\delta \mathcal{E}_m}{\delta \tau} = \frac{B^2(M)}{2\mu_0}$. Un élément de volume d'entrefer $\delta \tau = a \, d\gamma \, \ell$:



contient donc une énergie $\delta \mathcal{E}_m = \frac{B^2(M)}{2\mu_0} \delta \tau = \frac{B^2(M)}{2\mu_0} \times a \ell \, d\gamma$ de sorte que l'entrefer enmagasine l'énergie :

$$\mathcal{E}_m = \frac{a \ell}{2\mu_0} \int_{\gamma=-\pi}^{\pi} (B_s + B_r)^2 \, d\gamma = \frac{a \ell}{2\mu_0} \int_{\gamma=-\pi}^{\pi} (B_s^2 + B_r^2 + 2 B_r B_s) \, d\gamma = \mathcal{E}_{m1} + \mathcal{E}_{m2} + \mathcal{E}_{m3}$$

où :

$$\mathcal{E}_{m1} = \frac{a \ell}{2\mu_0} \int_{\gamma=-\pi}^{\pi} B_s^2(\gamma) \, d\gamma = \frac{a \ell}{2\mu_0} B_{sm}^2 \int_{\gamma=-\pi}^{\pi} \, d\gamma \Rightarrow \mathcal{E}_{m1} = \frac{\pi a \ell}{\mu_0} B_{sm}^2$$

$$\mathcal{E}_{m2} = \frac{a \ell}{2\mu_0} \int_{\gamma=-\pi}^{\pi} B_r^2(\gamma) \, d\gamma = \frac{a \ell}{2\mu_0} B_{rm}^2 \int_{\gamma=-\pi}^{\pi} \cos^2(\gamma + \theta) \, d\gamma \Rightarrow \mathcal{E}_{m2} = \frac{\pi a \ell}{2\mu_0} B_{rm}^2$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m3} &= \frac{a \ell}{2\mu_0} \int_{\gamma=-\pi}^{\pi} 2 B_r B_s \, d\gamma = \frac{a \ell}{\mu_0} B_{rm} \int_{\gamma=-\pi}^{\pi} B_s(\gamma) \cos(\gamma + \theta) \, d\gamma \\ &= \frac{a \ell}{\mu_0} B_{rm} \left(\cos \theta \int_{-\pi}^{\pi} \cos \gamma B_s(\gamma) \, d\gamma - \sin \theta \int_{-\pi}^{\pi} \sin \gamma B_s(\gamma) \, d\gamma \right) \\ &\text{car } \cos(\gamma + \theta) = \cos \theta \cos \gamma - \sin \theta \sin \gamma \end{aligned}$$

Or, puisque $B_s(\gamma)$ est une fonction paire, $\sin \gamma B_s(\gamma)$ est une fonction impaire de γ , en conséquence de quoi :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin \gamma B_s(\gamma) \, d\gamma = 0$$

tandis que $\cos \gamma B_s(\gamma)$ est une fonction paire de γ , ce qui entraîne :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \gamma B_s(\gamma) \, d\gamma &= 2 \int_0^{\pi} \cos \gamma B_s(\gamma) \, d\gamma \\ &= 2 B_{sm} \left(\int_0^{\pi/2} \cos \gamma \, d\gamma - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos \gamma \, d\gamma \right) = 2 B_{sm} \left([\sin \gamma]_0^{\pi/2} - [\sin \gamma]_{\pi/2}^{\pi} \right) = 4 B_{sm} \end{aligned}$$

Par suite :

$$\mathcal{E}_{m3} = \frac{4 a \ell}{\mu_0} B_{rm} B_{sm} \cos \theta = \frac{4 a \ell}{\mu_0} k_r B_{sm} i \cos \theta$$

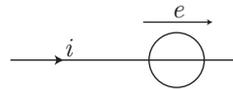
2. Ainsi, le couple que le moteur exerce sur son arbre vaut :

$$\Gamma = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial \theta} \right)_i = -\frac{4 a \ell}{\mu_0} k_r B_{sm} \sin \theta \times i \Rightarrow \Gamma = \phi_0 i \text{ avec } \phi_0 = -\frac{4 a \ell}{\mu_0} k_r B_{sm} \sin \theta$$

c- Moteur et génératrice

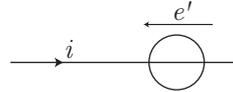
Avant d'étudier le comportement de la machine à courant continu, voici quelques rappels :

- la force électromotrice (f.é.m.) d'un système est toujours définie dans le même sens que le courant qui le traverse :

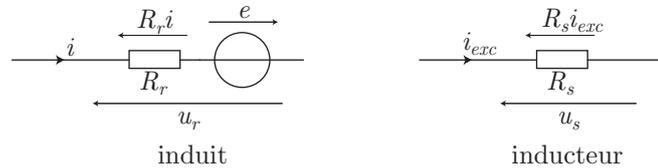


Si $e \times i > 0$ le système est un générateur électrique tandis que $e \times i < 0$ indique que le système consomme de l'énergie électrique.

À l'inverse, une force contre-électromotrice (f.c.é.m.) est toujours définie dans le sens contraire du courant i :



- Soit $\vec{\Gamma}_{m/a} = \Gamma_{m/a} \vec{u}_z$ le couple mécanique que la machine exerce sur son arbre, en tournant à une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$. La grandeur $\mathcal{P}_{m/a} = \Gamma_{m/a} \times \Omega$, qui définit aussi la puissance que la machine distribue à son arbre, détermine la nature de la machine : si $\mathcal{P}_{m/a} > 0$ la machine produit une puissance mécanique (c'est un moteur) alors que lorsque $\mathcal{P}_{m/a} < 0$ la machine consomme une puissance mécanique (c'est une génératrice).
- On notera désormais R_r la résistance électrique de l'induit, R_s celle de l'inducteur (en cas d'excitation séparée), i le courant qui circule dans l'induit et i_{exc} l'éventuel courant qui circule dans l'inducteur. Puisque i_{exc} est constant, l'inducteur se comporte électriquement comme une seule résistance R_s , tandis que l'induit se comporte comme une association de R_r avec une force électromotrice e :

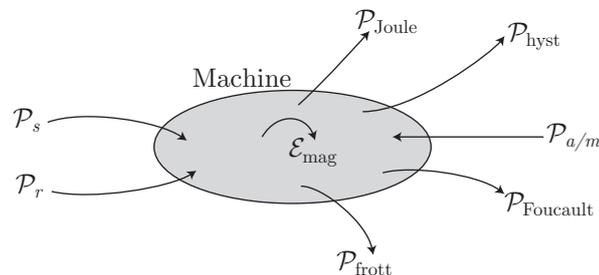


En adoptant la convention récepteur présentée dans ces schémas (u et i en sens inverse), il apparaît que la machine thermique :

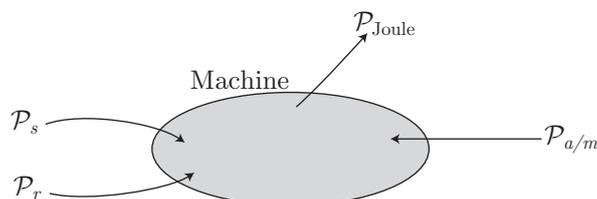
- reçoit à l'inducteur une puissance électrique $\mathcal{P}_s = u_s i_{exc} = R_s i_{exc}^2$;
- reçoit à l'induit une puissance électrique $\mathcal{P}_r = u_r i = R_r i^2 - ei$;
- reçoit une puissance mécanique de la part de l'arbre : $\mathcal{P}_{a/m} = \Gamma_{a/m} \Omega$ où $\Gamma_{a/m} = -\Gamma_{m/a}$ désigne le couple mécanique que l'arbre fournit à la machine ;
- dissipe, par effet Joule, une puissance : $\mathcal{P}_{Joule} = R_s i_{exc}^2 + R_r i^2$, aussi appelée pertes cuivre : $\mathcal{P}_{cuivre} = \mathcal{P}_{Joule}$;
- dissipe une puissance mécanique par frottements : $\mathcal{P}_{frott.}$;
- dissipe, par hystérésis une puissance $\mathcal{P}_{hyst.}$ (dissipée par la mise en mouvement des dipôles magnétiques constituant le matériau ferromagnétique) ;
- dissipe une puissance $\mathcal{P}_{Foucault}$ par les éventuels courants de Foucault qui se développent dans le matériaux ferromagnétique ; on appelle *perte fer* l'ensemble :

$$\mathcal{P}_{fer} = \mathcal{P}_{hyst.} + \mathcal{P}_{Foucault}$$

- emmagasine une énergie magnétique \mathcal{E}_{mag} .



Dans la suite de l'étude, on ne tiendra plus compte des pertes fer, des pertes mécaniques et de l'énergie magnétique emmagasinée, auquel cas le bilan se simplifie :



c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_s + \mathcal{P}_r + \mathcal{P}_{a/m} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} &\Rightarrow (R_s i_{\text{exc}}^2) + (R_r i^2 - ei) + (\Gamma_{a/m} \Omega) = R_s i_{\text{exc}}^2 + R_r i^2 \\ &\Rightarrow \boxed{ei = \Gamma_{a/m} \Omega} \end{aligned} \quad (36)$$

avec :

$$\boxed{\Gamma_{a/m} = -\Gamma_{m/a} = -\phi i} \Rightarrow ei = -\phi i \Omega \Rightarrow \boxed{e = -\phi \Omega} \quad (37)$$

où, conformément aux relations (35) :

$$\phi = \phi_0 \sin \alpha \text{ et } \phi_0 \propto B_{sm} \text{ ou } \phi_0 \propto i_{\text{exc}}$$

La machine à courant continu peut alors manifester deux comportements réversibles. On supposera $i > 0$ et $\Omega > 0$ (i et Ω définissent ainsi la f.é.m. et la nature motrice du couple) :

LA GÉNÉRATRICE

La machine se comporte en génératrice lorsque $e \times i > 0$, c'est-à-dire lorsque :

$$\boxed{\mathcal{P}_{a/m} = \Gamma_{a/m} \Omega > 0} \Rightarrow \mathcal{P}_{m/a} = -\Gamma_{a/m} \Omega < 0$$

ce qui confirme qu'elle consomme une puissance mécanique. Dans ce cas, $\Gamma_{a/m} > 0$ implique que :

$$-\phi i > 0 \Rightarrow \phi < 0 \Rightarrow \phi = -|\phi| \Rightarrow \boxed{e = |\phi| \Omega = e_g}$$

ce qui indique également que la génératrice possède une f.é.m. positive, qui la rend productrice d'une énergie électrique, tandis que l'arbre exerce sur elle un couple mécanique :

$$\boxed{\Gamma_{a/m} = -\phi i = |\phi| i}$$

LE MOTEUR

La machine se comporte comme un moteur lorsqu'elle fournit une puissance mécanique à son arbre :

$$\mathcal{P}_{m/a} = \Gamma_{m/a} \Omega = \phi i \Omega > 0 \Rightarrow \boxed{\phi > 0 \Rightarrow \phi = |\phi|} \text{ car } i > 0 \text{ et } \Omega > 0$$

La relation (37) montre alors que la force électromotrice :

$$e = -\phi \Omega = -|\phi| \Omega$$

est négative. C'est pour éviter ce signe que l'on préfère utiliser la f.c.é.m. pour caractériser un moteur :

$$\boxed{e_m = -e = |\phi| \Omega} \text{ avec } \boxed{\Gamma_{m/a} = \phi i = |\phi| i}$$

CONCLUSION

Finalement, selon l'usage qui en est fait, le schéma électrique de la machine à courant continu adopte préférentiellement la convention récepteur pour le moteur ou la convention générateur pour la génératrice :

MOTEUR	GENERATRICE
$\phi > 0$ $e_m = \phi \Omega$ (f.c.é.m) $\Gamma_{m/a} = \phi i$ $u = e_m + Ri$	$\phi < 0$ $e_g = \phi \Omega$ (f.é.m) $\Gamma_{a/m} = \phi i$ $u = e_g - Ri$

REMARQUE Cette étude montre que c'est le signe de $\phi = \phi_0 \sin \alpha$ (cf. page 47) qui détermine le fonctionnement de la machine synchrone : moteur si $\alpha > 0$ ou génératrice si $\alpha < 0$. On retrouve finalement les mêmes comportements que ceux observés avec la machine synchrone.

REMARQUE Afin de simplifier les notations, beaucoup d'énoncés omettent le signe de ϕ et le supposent positif dans le cas d'une génératrice. C'est ainsi que le fonctionnement du moteur est caractérisé par :

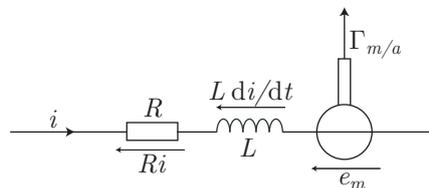
$$\Gamma_{m/a} = \phi i \text{ et } e_m = \phi \Omega$$

De même avec la génératrice :

$$\Gamma_{a/m} = \phi i \text{ et } e_g = \phi \Omega$$

Cette dernière simplification n'est justifiée qu'accompagnée du schéma précédent de la génératrice.

REMARQUE Tous les calculs réalisés jusqu'ici ont omis l'existence d'une auto-inductance L dans l'induit. Le schéma électrique complet du moteur devrait alors être :



Cependant, lorsque le courant i est continu, cette simplification est pleinement justifiée.

EXERCICE

On considère une machine à courant continu et à aimantation permanente, dont les caractéristiques sont les suivantes :

tension d'induit	$U = 110 \text{ V}$
résistance d'induit	$R = 0,5 \Omega$
inductance d'induit	$L = 75 \text{ mH}$
moment d'inertie du bloc rotor + arbre	$J = 1 \text{ kg.m}^2$
couple de pertes mécaniques	$\Gamma_p = 1,23 \text{ N.m}$

1. La machine tournant à vide, on mesure le courant absorbé par la machine : $I_0 = 1,8 \text{ A}$. En déduire le coefficient ϕ vérifiant la relation : $\Gamma_{m/a} = \phi i$.
2. En déduire la vitesse de rotation à vide de la machine.
3. La machine tournant à vide depuis longtemps, on accouple brutalement (à la date $t = 0$) la charge mécanique représentant un couple résistant $\Gamma_r = 13 \text{ N.m}$. Écrire l'équation différentielle reliant les différents couples à la vitesse de rotation Ω de la machine.
4. Écrire également la loi des mailles électrique de la machine en régime transitoire.
5. Former alors une équation globale reliant la vitesse angulaire Ω , sa dérivée et la dérivée du courant.
6. Qu'est-il possible de faire comme hypothèse permettant de simplifier cette équation. Utiliser la nouvelle équation trouvée pour résoudre l'équation de la question 3 portant sur Ω . Représenter l'évolution transitoire de $\Omega(t)$.
7. Quelle est approximativement la durée du régime transitoire de la vitesse de la machine lors d'un changement de charge?

Corrigé

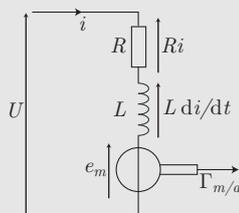
1. Lorsque la machine tourne à vide, son arbre n'est soumis qu'au couple du moteur $\Gamma_{m/a}$ et à celui des pertes mécaniques ; le théorème du moment cinétique impose alors :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_{m/a} - \Gamma_p = 0 \text{ en régime transitoire}$$

c'est-à-dire :

$$\Gamma_{m/a} = \Gamma_p \Rightarrow \phi I_0 = \Gamma_p \Rightarrow \phi = \frac{\Gamma_p}{I_0} = \frac{1,23}{1,8} \simeq 0,68 \text{ T.m}^{-2}$$

2. Le schéma électrique équivalent du moteur étant :



il apparaît que $U = Ri + L \frac{di}{dt} + e_m$, où :

$$i = I_0 \Rightarrow L \frac{di}{dt} = 0 \text{ et } e_m = \phi \Omega_0$$

Donc, la vitesse angulaire Ω_0 du moteur à vide vérifie :

$$U = RI_0 + \phi \Omega_0 \Rightarrow \Omega_0 = \frac{U - RI_0}{\phi} = \frac{110 - 0,5 \times 1,8}{0,68} \Rightarrow \Omega_0 \simeq 160 \text{ rad.s}^{-1}$$

3. Lorsque la machine est de surcroît associée à une charge de couple résistant Γ_r , le théorème du moment cinétique devient :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_{m/a} - \Gamma_p - \Gamma_r = \phi i - \Gamma_p - \Gamma_r \quad (38)$$

4. L'équation électrique de la machine émane, quant à elle, du schéma précédent :

$$U = Ri + L \frac{di}{dt} + \phi \Omega \Rightarrow i = \frac{U}{R} - \frac{L}{R} \frac{di}{dt} - \frac{\phi}{R} \Omega \quad (39)$$

5. L'expression précédente de i peut être injectée dans l'équation (38) qui devient alors :

$$\begin{aligned} J \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\phi U}{R} - \frac{\phi L}{R} \frac{di}{dt} - \frac{\phi^2}{R} \Omega - \Gamma_p - \Gamma_r \\ \Rightarrow J \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\phi^2}{R} \Omega &= \frac{\phi U}{R} - \frac{\phi L}{R} \frac{di}{dt} - \Gamma_p - \Gamma_r \end{aligned} \quad (40)$$

6. L'équation (39) :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \phi \Omega = U \Rightarrow \frac{L}{R} \frac{di}{dt} + i = \frac{U}{R} - \frac{\phi \Omega}{R}$$

suggère que l'évolution du courant se fait avec un temps caractéristique :

$$\tau_i = \frac{L}{R} = \frac{75 \cdot 10^{-3}}{0,5} = 0,15 \text{ s}$$

tandis que l'équation (40) :

$$\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\phi^2}{JR} \Omega = \frac{1}{J} \left(\frac{\phi U}{R} - \frac{\phi L}{R} \frac{di}{dt} - \Gamma_p - \Gamma_r \right)$$

suggère que l'évolution mécanique de la machine se fait avec un temps caractéristique :

$$\tau_m = \frac{JR}{\phi^2} = \frac{1 \times 0,5}{(0,68)^2} \simeq 1,1 \text{ s}$$

L'inégalité : $\tau_i \ll \tau_m$ montre que le courant quitte son régime transitoire beaucoup plus vite que la vitesse angulaire, ce qui amène à considérer que le courant i est quasi constant dans l'équation (40) :

$$J \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\phi^2}{R} \Omega = \Gamma_{\text{tot}}$$

où :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{tot}} &\simeq \frac{\phi U}{R} - \Gamma_p - \Gamma_r = \frac{0,68 \times 110}{0,5} - 1,23 - 13 \Rightarrow \Gamma_{\text{tot}} \simeq 135 \text{ N.m} \\ \Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{\tau_m} \Omega &= \frac{\Gamma_{\text{tot}}}{J} = \frac{\Omega_\infty}{\tau_m}\end{aligned}\quad (41)$$

avec $\tau_m = \frac{JR}{\phi^2} \simeq 1,1 \text{ s}$ et :

$$\Omega_\infty = \tau_m \frac{\Gamma_{\text{tot}}}{J} = \frac{JR}{\phi^2} \times \frac{\Gamma_{\text{tot}}}{J} = \frac{R\Gamma_{\text{tot}}}{\phi^2} = \frac{0,5 \times 135}{(0,68)^2} \simeq 146 \text{ rad.s}^{-1}$$

L'équation (41) admet alors :

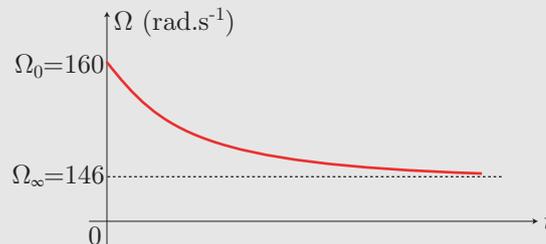
- une solution homogène : $\Omega_h = A e^{-t/\tau}$ de l'équation sans second membre ;
- une solution particulière : $\Omega_p = \Omega_\infty$ analogue au second membre.

Ainsi, la solution générale : $\Omega = \Omega_\infty + A e^{-t/\tau}$ présente une constante qui doit s'adapter à la condition initiale :

$$\Omega(t=0) = \Omega_0 = 160 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow \Omega_0 = \Omega_\infty + A \Rightarrow A = \Omega_0 - \Omega_\infty = 160 - 146 = 14 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega(t) = 146 + 14 e^{-t/\tau_m} \text{ (en rad.s}^{-1}\text{)}}$$

tandis que $\Omega(t)$ présente l'allure suivante :

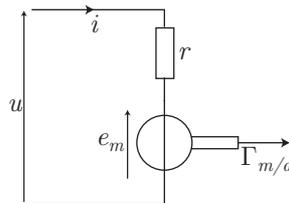


7. Cette étude montre que le régime transitoire de Ω est caractérisé par une durée :

$$\boxed{T = 3 \tau_m \simeq 3,3 \text{ s}}$$

d- Point de fonctionnement

Considérons un moteur à courant continu dont l'induit est caractérisé par une résistance r et une f.c.é.m. $e_m = \phi \Omega$:



Supposons, de surcroît, que ce moteur soit associé à une charge qui exerce sur son arbre un couple résistant $\Gamma_{\text{ext}} = -|\Gamma_{\text{ext}}| < 0$.

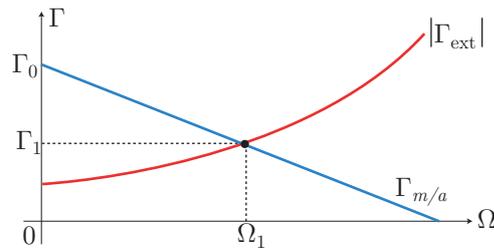
Connaissant les paramètres du moteur (ϕ, r), sa tension d'alimentation et $\Gamma_{\text{ext}}(\Omega)$, qui dépend éventuellement de Ω , est-il possible de trouver la valeur du couple $\Gamma_{m/a} = \Gamma_1$ et la vitesse angulaire Ω_1 de rotation de l'arbre dans ces conditions ? La réponse admet en fait une solution graphique qui consiste à représenter :

- la courbe $\Gamma_{m/a} = f(\Omega) = \phi i$, à l'aide de l'équation électrique :

$$U = ri + e_m = ri + \phi \Omega \Rightarrow i = \frac{U}{r} - \frac{\phi}{r} \Omega \Rightarrow \Gamma_{m/a} = \frac{\phi U}{r} - \frac{\phi^2}{r} \Omega$$

Cette courbe est donc une droite décroissante d'ordonnée à l'origine $\Gamma_0 = \frac{\phi U}{r}$ et de pente $-\frac{\phi^2}{r}$.

- la courbe $|\Gamma_{\text{ext}}(\Omega)|$ donnée par un constructeur ou obtenue par une expérience :



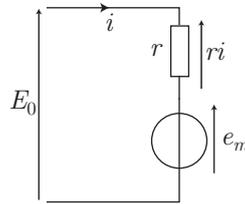
En régime stationnaire, le théorème du moment cinétique :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma_{m/a} + \Gamma_{\text{ext}} \Rightarrow 0 = \Gamma_{m/a} - |\Gamma_{\text{ext}}| \Rightarrow \Gamma_{m/a} = |\Gamma_{\text{ext}}|$$

montre que le point d'intersection des courbes $\Gamma_{m/a}(\Omega)$ et $|\Gamma_{\text{ext}}(\Omega)|$ donne une lecture du couple moteur Γ_1 ainsi que la vitesse angulaire Ω_1 (point de fonctionnement).

e- Démarrage du moteur

Considérons un moteur, dont l'induit présente une résistance r , alimenté sous une tension E_0 constante :



L'équation électrique de ce moteur :

$$E_0 = ri + e_m = ri + \phi\Omega \Rightarrow i = \frac{E_0 - \phi\Omega}{r}$$

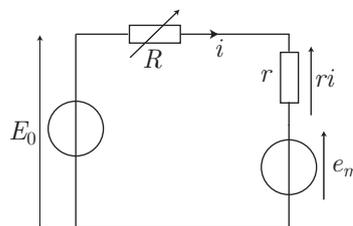
montre qu'au démarrage le courant qui traverse le moteur vaut : $i = \frac{E_0}{r}$. Or, r est en général choisi le plus petit possible de manière à limiter les pertes par effet Joule, en conséquence de quoi i peut atteindre des grandes valeurs susceptibles de détériorer le moteur. Deux solutions permettent d'éviter cette échéance :

- La tension d'alimentation U du moteur peut être élevée progressivement de 0 V à E_0 :

$$i = \frac{U - \phi\Omega}{r} \quad (42)$$

Au démarrage : $i = \frac{U}{r}$ peut alors être assez faible pour préserver l'induit et entraîner l'arbre qui reçoit un couple $\Gamma_{m/a} = \phi i$, Ω augmente alors, ce qui maintient le numérateur de l'expression (42) à une valeur assez faible, en dépit de l'augmentation progressive de U jusqu'à E_0

- L'emploi d'une résistance variable R :



permet à nouveau de limiter le courant $i = \frac{E_0 - \phi\Omega}{r + R}$: au démarrage, lorsque $i = \frac{E_0}{r + R}$, la valeur de R est choisie assez grande afin de minimiser i . Puis, au fur et à mesure que le moteur tourne, le numérateur $E_0 - \phi\Omega$ diminue en même temps que le numérateur $r + R$, à condition de diminuer également progressivement R .

Étudions le régime transitoire de cette deuxième option, avec un moteur dont l'arbre, de moment d'inertie J , est soumis au couple moteur $\Gamma_{m/a}$ ainsi qu'au couple résistant $\Gamma_{\text{ext}} = -f\Omega$ (f étant constant) exercé par une

charge extérieure. Le théorème du moment cinétique s'écrit alors :

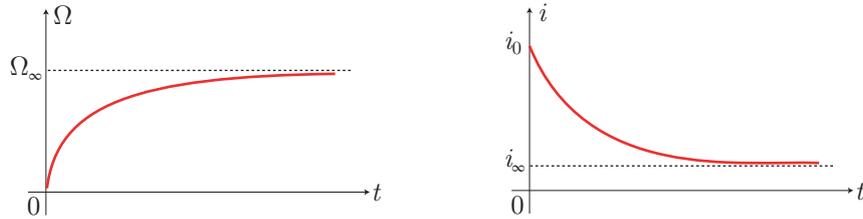
$$\begin{aligned} J \frac{d\Omega}{dt} &= \Gamma_{m/a} - f\Omega = \phi i - f\Omega = \frac{\phi E_0}{r+R} - \frac{\phi^2}{r+R} \Omega - f\Omega \\ \Rightarrow J \frac{d\Omega}{dt} + \frac{\phi^2 + f(r+R)}{r+R} \Omega &= \frac{\phi E_0}{r+R} \\ \Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} + \frac{1}{\tau} \Omega &= \frac{\Omega_\infty}{\tau} \text{ où } \tau = \frac{J(r+R)}{\phi^2 + f(r+R)} \text{ et } \Omega_\infty = \frac{\phi E_0}{\phi^2 + f(r+R)} \end{aligned}$$

Cette équation différentielle admet une solution générale :

$$\Omega = \Omega_\infty + A e^{-t/\tau}$$

où A est adapté à la vitesse angulaire initiale, supposée nulle, de l'arbre :

$$0 = \Omega_\infty + A \Rightarrow A = -\Omega_\infty \Rightarrow \boxed{\Omega = \Omega_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$



Quant au courant i , il est donné par la relation :

$$i = \frac{E_0 - \phi\Omega}{r+R} = \frac{E_0}{r+R} \left[1 - \frac{\phi^2}{\phi^2 + f(r+R)} \left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right]$$

qui montre que $i(t=0) = i_0 = \frac{E_0}{r+R}$ et que :

$$i_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = \frac{E_0}{r+R} \times \frac{f(r+R)}{\phi^2 + f(r+R)} = \frac{E_0 f}{\phi^2 + f(r+R)} = \frac{E_0}{r+R + \phi^2/f} < i_0$$

De cette étude, il ressort que :

- plus R est grand, plus Ω_∞ est petit (il ne convient donc pas de conserver une grande valeur de R en régime stationnaire).
- plus R est grand, plus i_∞ est petit et plus $\Gamma_\infty = \phi i_\infty$ l'est aussi (la même conclusion s'impose).
- le temps caractéristique du régime transitoire vaut :

$$\tau = \frac{J(r+R)}{\phi^2 + f(r+R)} = \frac{J}{f + \phi^2/(r+R)}$$

et est donc d'autant plus grand que R est grand. Donc, si l'on souhaite que le régime transitoire soit le plus court possible, il convient de choisir R le plus petit possible.

f- Applications

Les moteurs à courant continu sont parfois préférés aux moteurs synchrones à cause de leur simplicité de commande. Cependant, les inconvénients demeurent nombreux :

- Le frottement des balais impose une maintenance importante et provoque des pertes d'énergie.
- Des arcs électriques peuvent se produire au collecteur, à l'origine de parasites susceptibles d'altérer l'électronique de commande.
- L'induit est enroulé sur le rotor, entouré du stator ; cette configuration limite les échanges thermiques avec l'extérieur et peut être source d'un échauffement excessif.

En dépit de ces inconvénients, ces moteurs sont encore utilisés :

- dans l'industrie (levage, pompe), où l'excitation séparée permet de réguler la puissance, voire inverser le fonctionnement de la machine en frein.
- en traction ferroviaire : les moteurs à excitation série ($i_{\text{exc}} = i$) fournissent un couple proportionnel à i^2 et peuvent donc être utilisés en courant alternatif.
- dans les jouets, accessoires automobiles,... où des moteurs à aimant permanent suffisent à fournir des couples modérés.

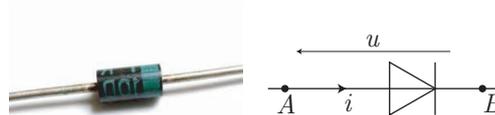
D4 Conversion électronique statique

1- Le hacheur

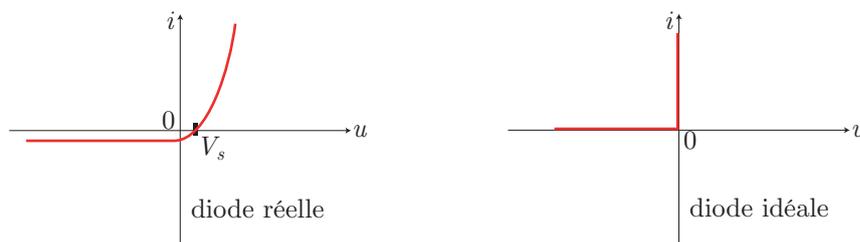
a- Fonction de commutation

Un moteur électrique requiert souvent une puissance électrique (quelques kilowatt) que ne peut fournir l'électronique qui régule le fonctionnement de ce moteur. C'est pourquoi une cellule de commutation élémentaire doit servir d'interface entre la commande électronique et la source de puissance alimentant le moteur. Une telle cellule utilisera deux types d'interrupteurs commandés électriquement :

- LA DIODE



Il s'agit d'un dipôle non symétrique dont la caractéristique courant-tension présente l'allure suivante :

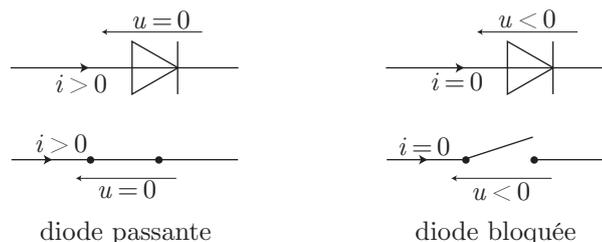


La diode réelle présente une caractéristique complexe, non linéaire à partir d'une tension seuil $V_s \simeq 0,6 \text{ V}$. Pour simplifier son étude on utilisera désormais le modèle de diode *idéale* :

- sa tension de seuil est nulle ($V_s \simeq 0$).
- lorsqu'elle est passante, elle possède une conductivité infinie (pente infinie de la courbe dans sa partie verticale).
- elle ne laisse passer aucun courant de saturation (la partie horizontale de la courbe est confondue avec l'axe des abscisses).

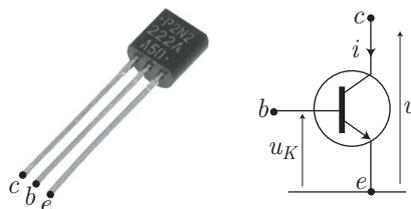
La diode idéale est ainsi caractérisée par deux types de fonctionnement :

- La diode est bloquée lorsque $V_B > V_A$ (ou $u < 0$) : elle se comporte alors comme un interrupteur ouvert ($i = 0$).
- La diode est passante lorsque $V_A = V_B$ (ou $i > 0$) : elle se comporte alors comme un interrupteur fermé.



Le basculement de la diode d'un état à l'autre se fait automatiquement (les signes de u ou de i le déterminent). Dans ce cas, la diode est considérée comme un interrupteur à commutation spontanée.

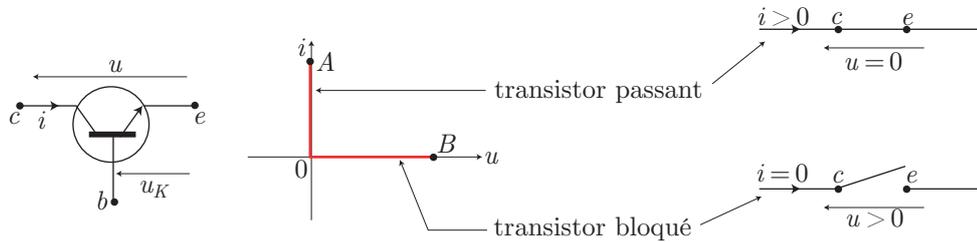
- LE TRANSISTOR



À nouveau, il s'agit d'un composant électronique non symétrique, présentant trois bornes : le collecteur (c), la base (b) et l'émetteur (e). Son fonctionnement idéalisé (qui est le seul retenu en PSI) en fait un interrupteur à commutation contrôlée par la tension u_K entre la base et l'émetteur. Dans la pratique, le modèle présenté ci-dessus (npn) est toujours utilisé avec $u \geq 0$ et $i \geq 0$ (sinon, il faut employer un transistor pnp). Dans le cas contraire ($u \leq 0$), i demeure nul et le transistor se comporte comme un interrupteur

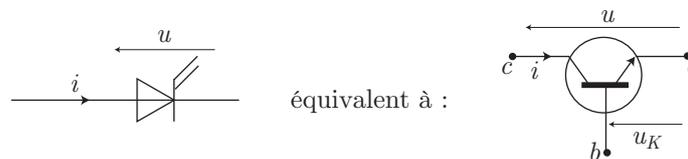
ouvert, quelle que soit la valeur de u_K . En revanche, si $u > 0$, c'est la valeur de u_K qui détermine l'état du transistor :

- Lorsque $u_K > 0$, le transistor est passant et se comporte comme un interrupteur fermé (branche OA de la caractéristique ci-dessous), c'est-à-dire que $i > 0$ et $u = 0$.
- Lorsque $u_K \leq 0$, le transistor est bloqué et se comporte comme un interrupteur ouvert (branche OB de la caractéristique ci-dessous), c'est-à-dire que $i = 0 \forall u > 0$.



- Quelle que soit la valeur de u_K , lorsque $u < 0$ le transistor est bloqué, tandis que i ne peut pas être négatif.

Afin de simplifier les schémas, lorsque le transistor est utilisé en interrupteur à commutation contrôlée, il est souvent schématisé par le symbole :



où la représentation de la tension de commande est volontairement omise ; dans ce cas, l'état du transistor sera explicité par l'énoncé.

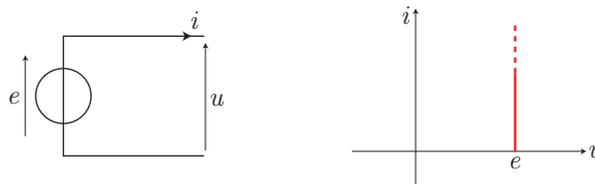
REMARQUE Dans les bilans d'énergie, la puissance consommée par la commande du transistor est généralement négligée. Cette approximation se justifie par le fonctionnement du composant : lorsque le transistor est convenablement polarisé, le courant de commande qui arrive à sa base est entre 100 à 300 fois plus faible que celui qui circule entre l'émetteur et le collecteur.

b- Sources de courant et de tension



DÉFINITION

Une source de tension est un dipôle aux bornes duquel la tension u prend une valeur e (appelée alors f.é.m. de la source) indépendante du courant i qu'il débite.



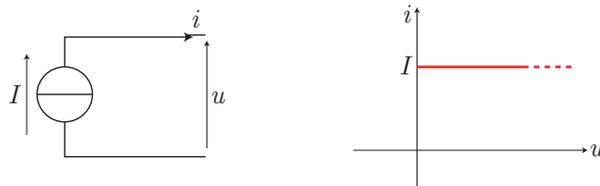
En convention générateur (u et i orientés dans le même sens), une telle source délivre au circuit une puissance électrique :

$$\mathcal{P}_{\text{elec}} = u \times i = e \times i \quad (43)$$



DÉFINITION

Une source de courant est un dipôle qui délivre un courant dont l'intensité i prend une valeur I (appelée courant électromoteur de la source) indépendante de la tension u à ses bornes.

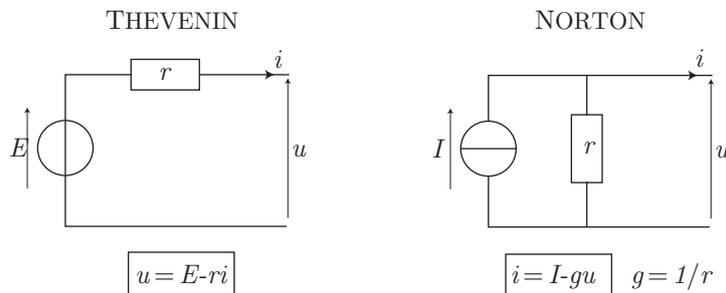


En convention générateur, une telle source délivre au circuit une puissance électrique également donnée par la loi (43).

Ces sources peuvent être :

- non réversibles (comme les piles, les générateurs électroniques,...) lorsqu'elles ne peuvent transformer l'énergie électrique en une autre forme d'énergie utile (mécanique, chimique,...)
- réversible lorsqu'elles peuvent transformer l'énergie électrique qu'elles reçoivent en une autre forme d'énergie utile ; c'est le cas de la machine à courant continu (qui fournit alors un travail mécanique), de l'accumulateur (qui fournit une énergie chimique) ; la puissance utile transformée par la source de tension ou de courant vaut alors $e \times i$ (ou $u \times I$ respectivement).

Les générateurs de tension ou de courant utilisés dans la réalité n'ont pas le comportement idéal des sources : l'énergie qu'ils procurent ne peut être infinie, ce dont on rend compte à l'aide des modèles de THÉVENIN et de NORTON :

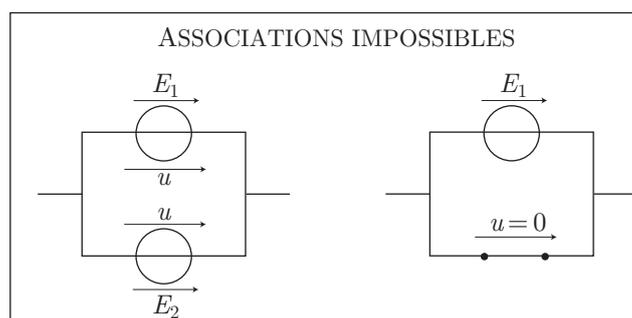


Ces deux modèles sont équivalents à condition de poser : $E = r \times I$, où r et $g = \frac{1}{r}$ s'appelle alors respectivement la résistance ou la conductance interne.

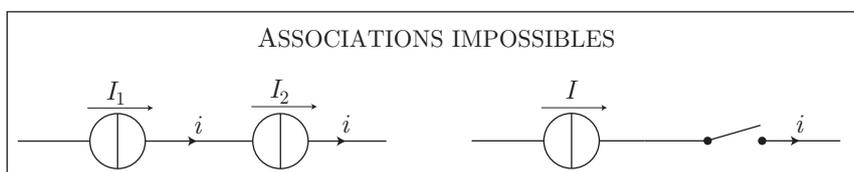
Enfin, une source est dite continue lorsque E ou I est une constante dans le temps.

c- Interconnexion des sources

La définition des sources de tension interdit l'association en parallèle de deux sources de f.é.m. E_1 et E_2 différentes, car une telle association violerait l'identité de la tension u :

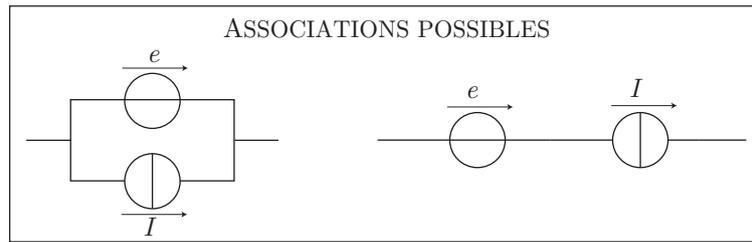


C'est pour cette raison qu'il n'est pas souhaitable d'associer en parallèle une source de tension $E_1 \neq 0$ avec un interrupteur fermé, qui imposerait $u = 0$. Une telle association (appelée *court-circuit*) provoquerait une détérioration rapide de la source ou du circuit par échauffement. Pour des raisons similaires, l'association en série de deux sources de courant I_1 et $I_2 \neq I_1$ est à proscrire, car une telle association violerait l'unicité du courant i :



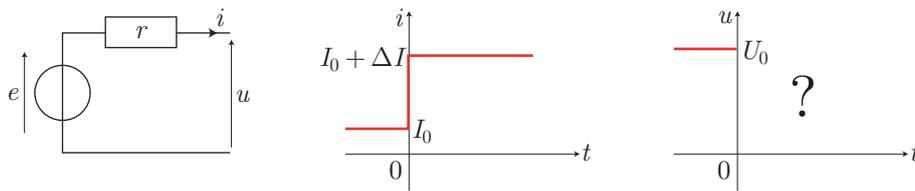
C'est pourquoi il est déconseillé d'associer en série une source de courant $I \neq 0$ avec un interrupteur ouvert qui imposerait $i = 0$.

En revanche, des associations en série ou en parallèle de sources de nature différente sont autorisées :



d- Lissage de la tension d'un générateur

Intéressons-nous à un générateur de tension, de f.é.m. e constante, de résistance interne r , contraint de délivrer un courant dont l'intensité i passe de la valeur I_0 à $I_0 + \Delta I$ à la date $t = 0$:

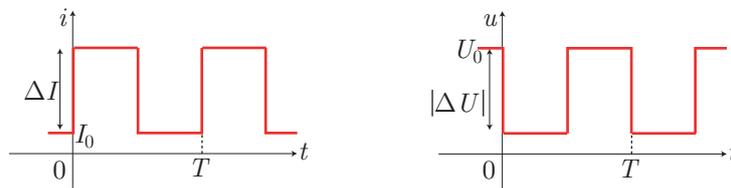


Notons alors U_0 la valeur de la tension u à ses bornes, pour $t < 0$ et évaluons la tension u pour $t \geq 0$.

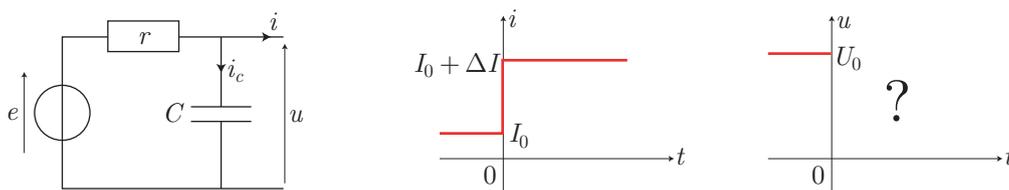
La loi des mailles fournit directement la relation : $u = e - ri$ qui peut être exprimée :

- pour $t < 0$: $U_0 = e - r I_0$
- pour $t \geq 0$: $u = e - r (I_0 + \Delta I) = U_0 - r \Delta I$

ce qui montre que la tension u varie alors d'une quantité $|\Delta u| = |r \Delta I|$, même lorsque $i(t)$ est un signal en créneaux de période T :



Cet exemple montre que le comportement de ce générateur de tension s'éloigne de celui d'une source, qui délivrerait une tension $u = e$ indépendamment de i . Pour améliorer ce comportement, il convient d'adjoindre en parallèle un condensateur qui interdit la discontinuité de $u(t)$. Étudions alors $u(t)$ dans les mêmes conditions :



Désormais, la loi des mailles se traduit par :

$$e = r(i + i_c) + u = ri + ri_c + u \text{ où } i_c = C \frac{du}{dt}$$

$$\Rightarrow u + \tau \frac{du}{dt} = e - ri \text{ avec } \tau = RC$$

Écrivons alors cette loi :

- pour $t < 0$, où l'on admet que $u(t)$ atteint sa valeur stationnaire $U_0 = e - r I_0$;
- pour $t \geq 0$: $u + \tau \frac{du}{dt} = e - r (I_0 + \Delta I) = U_0 - r \Delta I$.

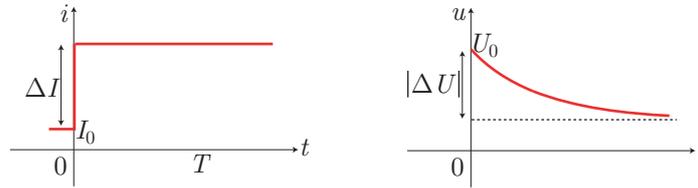
Cette équation admet pour solution générale :

$$u(t) = U_0 - r \Delta I + A e^{-t/\tau}$$

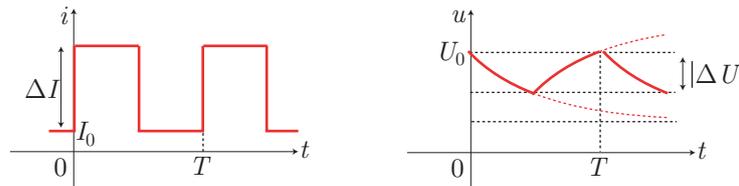
dans laquelle la constante A rend compte de la continuité de $u(t)$ à $t = 0$:

$$\begin{aligned} u(t=0) = u(t < 0) &\Rightarrow U_0 - r \Delta I + A = U_0 \Rightarrow A = r \Delta I \\ &\Rightarrow u(t) = U_0 + r \Delta I \left(e^{-t/\tau} - 1 \right) \end{aligned}$$

La représentation graphique des signaux $i(t)$ et $u(t)$:



peut être généralisée au cas où $i(t)$ présente une forme de créneaux d'amplitude ΔI et de période T :

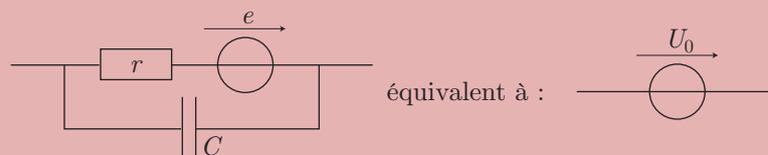


et montre que l'amplitude des variations de $u(t)$ vaut :

$$\begin{aligned} |\Delta U| &= \left| U_0 - u\left(\frac{T}{2}\right) \right| = r \Delta I \left(1 - e^{-T/2\tau} \right) \text{ où } e^{-T/2\tau} \simeq 1 - \frac{T}{2\tau} \text{ si } T \ll \tau \\ &\simeq r \Delta I \times \frac{T}{2\tau} \ll r \Delta I \text{ si } T \ll \tau \end{aligned}$$

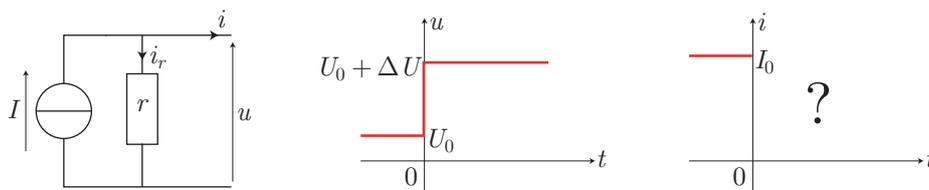
Donc, en choisissant $\tau = RC \gg T$, la tension $u(t)$ devient presque stabilisée autour de la valeur U_0 , ce qui signifie également que :

- le condensateur assure le lissage de la tension $u(t)$ à ses bornes en restituant au circuit l'énergie électrique qu'il a emmagasiné pendant sa charge ;
- le générateur de tension associé en parallèle à son condensateur se comporte comme une source de tension dont $u = U_0$ est indépendant de $i(t)$:



e- Lissage du courant d'un générateur

Considérons un générateur de courant, de courant électromoteur I , de résistance interne r , qui délivre à $t < 0$ un courant d'intensité constante I_0 sous une tension $u = U_0$.



À la date $t = 0$, la valeur de u passe subitement à $U_0 + \Delta U$ et nous cherchons la variation de i correspondante. Pour cela, la loi des nœuds impose :

$$\begin{cases} i = I - i_r \\ u = r i_r \end{cases} \Rightarrow i = I - \frac{u}{R}$$

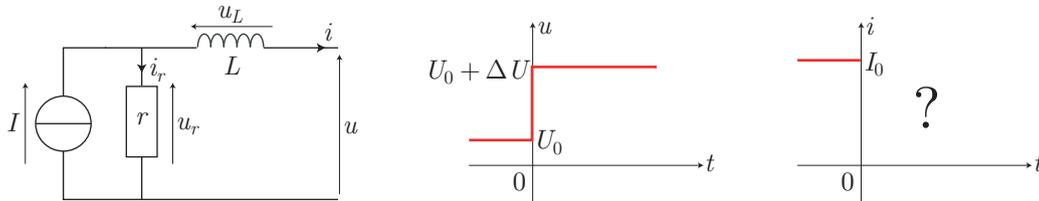
c'est-à-dire :

- pour $t < 0$: $u = U_0 \Rightarrow I_0 = I - \frac{U_0}{r}$.
- pour $t \geq 0$:

$$i = I - \frac{U_0 + \Delta U}{r} = I - \frac{U_0}{r} - \frac{\Delta U}{r} = I_0 - \frac{\Delta U}{r}$$

La variation $\Delta i = i - I_0 = -\frac{\Delta U}{r}$ est alors assez importante pour que le générateur ne soit pas assimilable à une source de courant (pour laquelle i serait indépendant de u).

Afin de modifier ce comportement, adjoignons en série une bobine idéale d'auto-inductance L , dans les mêmes conditions (u passe de U_0 à $U_0 + \Delta U$ à la date $t = 0$) :



La loi des nœuds impose : $i = I - i_r$ tandis que la loi des mailles fournit :

$$\begin{aligned} u + u_L - u_r &= 0 \Rightarrow u + L \frac{di}{dt} - r i_r = 0 \Rightarrow i_r = \frac{u}{r} + \tau \frac{di}{dt} \text{ avec } \tau = \frac{L}{r} \\ \Rightarrow i &= I - \frac{u}{r} - \tau \frac{di}{dt} \Rightarrow i + \tau \frac{di}{dt} = I - \frac{u}{r} \end{aligned}$$

- Pour $t < 0$ le courant i a atteint sa valeur stationnaire I_0 alors que $u = U_0$: $I_0 = I - \frac{U_0}{r}$.
- Pour $t \geq 0$ la tension vaut $u = U_0 + \Delta U$ de sorte que l'équation différentielle s'écrit :

$$i + \tau \frac{di}{dt} = I - \frac{U_0 + \Delta U}{r} = I_0 - \frac{\Delta U}{r}$$

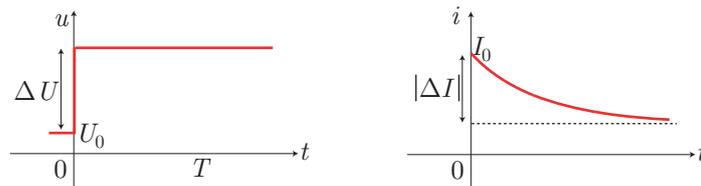
et admet une solution générale :

$$i(t) = I_0 - \frac{\Delta U}{r} + B e^{-t/\tau}$$

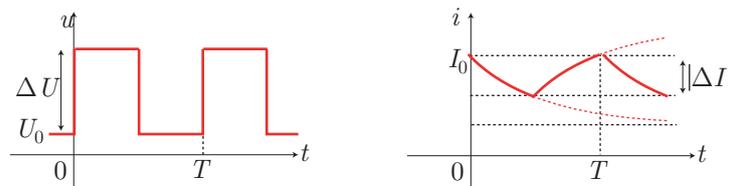
dans laquelle la constante B rend compte de la continuité de i à la date $t = 0$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} i(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^-} i(t) \Rightarrow I_0 - \frac{\Delta U}{r} + B = I_0 \Rightarrow B = \frac{\Delta U}{r} \\ \Rightarrow i(t \geq 0) &= I_0 - \frac{\Delta U}{r} (1 - e^{-t/\tau}) \end{aligned}$$

La représentation graphique des signaux $u(t)$ et $i(t)$:



peut être généralisée au cas où $u(t)$ sont des créneaux de tension d'amplitude ΔU et de période T :

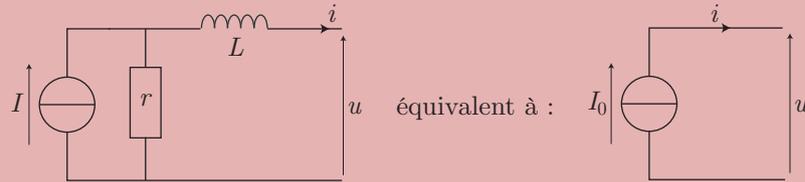


Cette étude montre que l'amplitude des variations de $i(t)$ vaut :

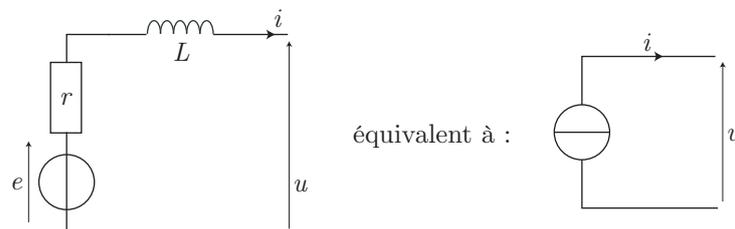
$$\begin{aligned} |\Delta I| &= \left| I_0 - i\left(\frac{T}{2}\right) \right| = \frac{\Delta U}{r} \left| 1 - e^{-T/2\tau} \right| \text{ où } e^{-T/2\tau} \simeq 1 - \frac{T}{2\tau} \text{ si } T \ll \tau \\ &\simeq \frac{\Delta U}{r} \times \frac{T}{2\tau} \ll \frac{\Delta U}{r} \text{ si } T \ll \tau \end{aligned}$$

Donc, en choisissant une fréquence $f = \frac{1}{T}$ assez grande ($f \gg \frac{1}{\tau}$), le courant $i(t)$ est presque stabilisé au voisinage de la valeur I_0 , ce qui signifie que :

- la bobine permet le lissage du courant $i(t)$ en restituant au circuit l'énergie magnétique qu'elle a emmagasinée ;
- le générateur de courant associé en série avec une bobine peut se comporter comme une source de courant dont $i \simeq I_0$ est indépendant de $u(t)$.



REMARQUE Puisque les modèles de générateur de tension (THÉVENIN) et de courant (NORTON) sont équivalents, la conclusion précédente peut aussi s'écrire :



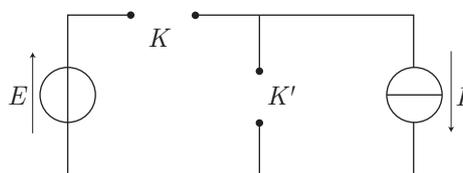
f– Cellule élémentaire de commutation

Une telle cellule contient en général un transistor (interrupteur à commutation commandée) et une diode (interrupteur à commutation spontanée), l'état du transistor étant périodiquement modifié selon une séquence qui sera indiquée par l'énoncé ; par exemple :

$$\text{le transistor est } \begin{cases} \text{passant pour } t \in \left[0; \frac{T}{2} \right[\\ \text{bloqué pour } t \in \left[\frac{T}{2}; T \right[\end{cases}$$

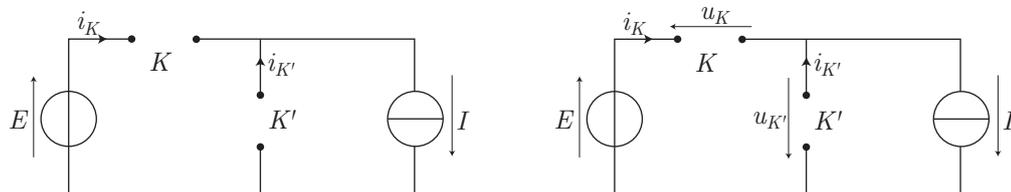
où T est la période et α le rapport cyclique.

Étudions, par exemple, le circuit ci-dessous comportant une source de tension $E > 0$, une source de courant $I > 0$, deux interrupteurs K et K' :

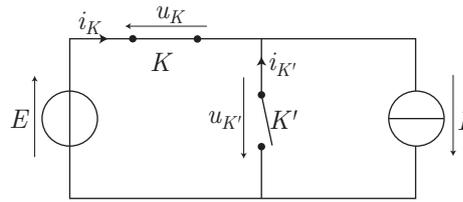


Pour déterminer la nature et l'orientation des interrupteurs K et K' , il suffit d'appliquer l'algorithme suivant :

- Orienter les courants i_K et $i_{K'}$ traversant K et K' dans le même sens que I , lorsque K et K' sont fermés séparément. Orienter ensuite les tensions u_K et $u_{K'}$ en convention récepteur (dans le sens opposé à celui de i_K et $i_{K'}$) :



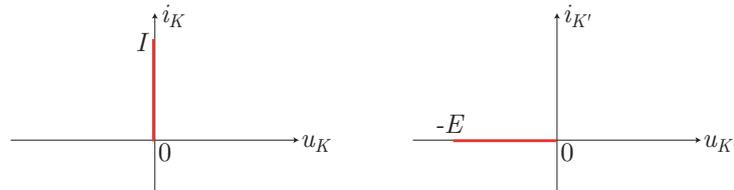
- Étudier le comportement possible de K et K' : lorsque K est fermé, K' ne peut l'être aussi, sans quoi la source de tension serait court-circuitée. Lorsque K est ouvert, K' doit être fermé sans quoi la source de courant débiterait dans un circuit ouvert. Donc K et K' ont des fonctionnements complémentaires.
- Fermer K en maintenant K' ouvert et déterminer les signes de i_K , $i_{K'}$, u_K , $u_{K'}$:



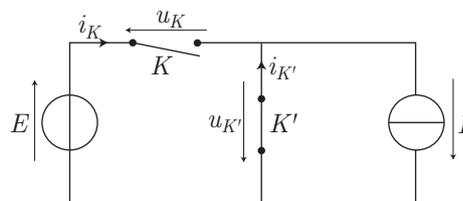
$$i_K = I > 0 \quad i_{K'} = 0 \text{ (} K' \text{ ouvert)} \quad u_K = 0 \text{ (} K \text{ fermé)}$$

et la loi des mailles impose : $u_{K'} + E = 0 \Rightarrow u_{K'} = -E < 0$.

- Reporter ces informations sur la caractéristique courant-tension de K et K' :



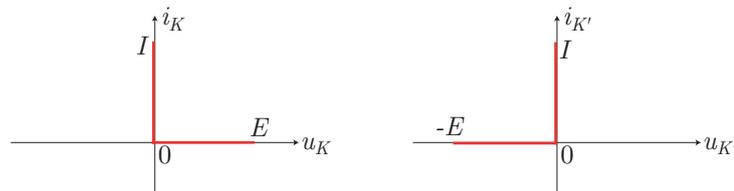
- Fermer K' en maintenant K ouvert et déterminer les signes de i_K , $i_{K'}$, u_K , $u_{K'}$:



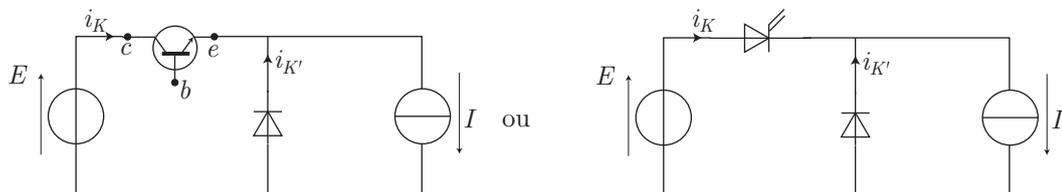
$$i_K = 0 \text{ (} K \text{ ouvert)} \quad i_{K'} = I > 0 \quad u_{K'} = 0 \text{ (} K' \text{ fermé)}$$

et la loi des mailles impose : $E - u_K + u_{K'} = 0 \Rightarrow u_K = E > 0$.

- Utiliser ces informations pour compléter les caractéristiques $i(u)$ de K et K' :

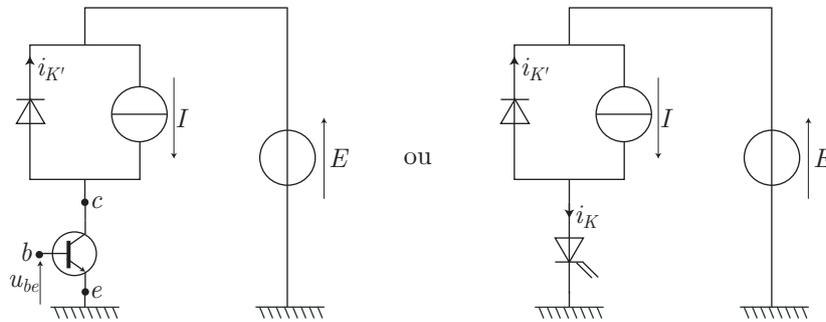


- Identifier les interrupteurs à partir de leurs caractéristiques : K est un transistor et K' est une diode que l'on peut désormais représenter sur le schéma (attention à l'orientation des composants : ils doivent permettre le passage de i_K et $i_{K'}$) :



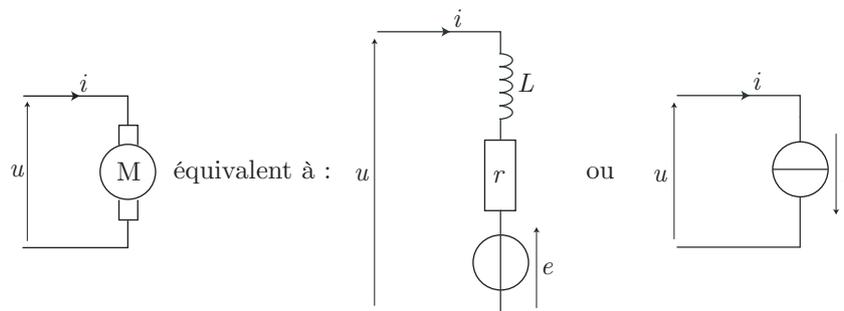
La deuxième représentation remplace souvent la première lorsque le repérage des bornes (collecteur, émetteur, base) du transistor n'est pas indispensable.

REMARQUE Dans la pratique, la tension $u_{be} = V_b - V_e$ est difficile à contrôler car V_e ne prend pas une valeur constante ou connue d'avance. C'est pourquoi on lui préfère le montage équivalent ci-dessous, dans lequel on impose $V_e = 0$ de manière à contrôler u_{be} plus facilement :

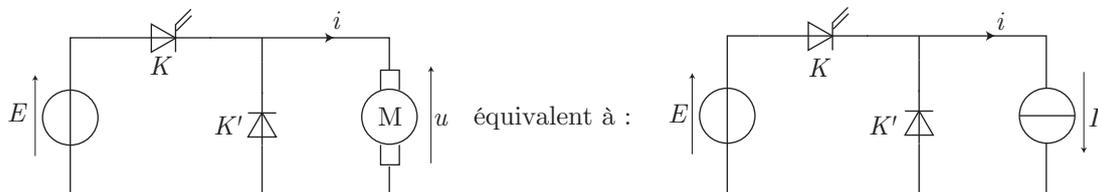


g- Alimentation d'un moteur

Le modèle électrique du moteur consiste en une association en série d'une f.c.é.m. e (proportionnelle à la vitesse angulaire de l'arbre : $e = \phi \Omega$), d'une résistance r (qui rend compte des pertes par effet Joule) et d'une auto-inductance L (souvent omise compte tenu de sa contribution nulle au bilan d'énergie moyen). Or, compte tenu de l'étude précédente, cette association équivaut aussi à une source de courant I (le couple du moteur $\Gamma_{m/a} = \phi i$ est alors constant).



Le montage d'alimentation du moteur :



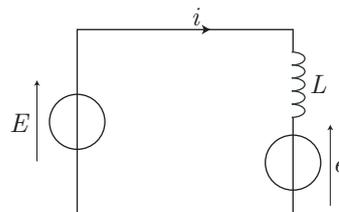
impose alors les rôles des composants K et K' : K' est une *diode de roue libre* (celle qui assure le retour du courant i lorsque K est ouvert) et K est un transistor dont on suppose que pendant une période T :

$$K \text{ est } \begin{cases} \text{fermé si } t \in]0; \alpha T[\\ \text{ouvert si } t \in]\alpha T; T[\end{cases}$$

où α est le rapport cyclique du fonctionnement de K .

En négligeant la résistance r , le schéma du circuit équivaut à :

- pour $t \in]0; \alpha T[$ à :



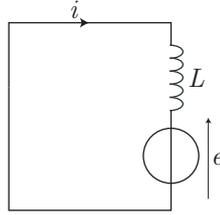
La loi des mailles impose alors :

$$E = L \frac{di}{dt} + e \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{E - e}{L} \Rightarrow di = \frac{E - e}{L} dt$$

En posant $i(t=0) = I_m$, on obtient ainsi :

$$\int_{I_m}^{i_1(t)} di = \frac{E-e}{L} \int_0^t dt \Rightarrow i_1(t) = I_m + \frac{E-e}{L} t \quad (44)$$

– pour $t \in]\alpha T; T[$ à :



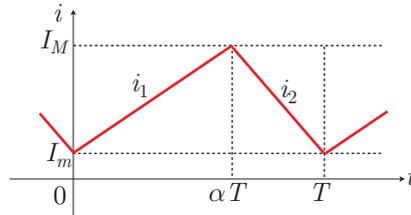
auquel cas :

$$0 = L \frac{di}{dt} + e \Rightarrow di = -\frac{e}{L} dt$$

Aussi, en posant $I_M = i(t = \alpha T)$:

$$\int_{I_M}^{i_2(t)} di = -\frac{e}{L} \int_{\alpha T}^t dt \Rightarrow i_2(t) = I_M - \frac{e}{L} (t - \alpha T) \quad (45)$$

En tenant compte de la continuité du courant $i(t)$ (imposée par la bobine) en $t = 0, t = \alpha T, t = T, \dots$ et en supposant $E > e$, le courant $i(t)$ admet pour représentation graphique :



La continuité de $i(t)$ se traduit alors par :

$$\lim_{t \rightarrow \alpha T} i_1(t) = \lim_{t \rightarrow \alpha T} i_2(t) \Rightarrow I_m + \frac{E-e}{L} \alpha T = I_M$$

et :

$$\lim_{t \rightarrow T} i_2(t) = I_m \Rightarrow I_M - \frac{e}{L} (1 - \alpha) T = I_m$$

Ces deux résultats fournissent alors deux expressions de l'ondulation du courant :

$$\delta = I_M - I_m = \frac{E-e}{L} \alpha T \text{ et } \delta = \frac{e}{L} (1 - \alpha) T$$

qui doivent s'identifier :

$$\frac{E-e}{L} \alpha T = \frac{e}{L} (1 - \alpha) T \Rightarrow \alpha E - \alpha e = e - \alpha e \Rightarrow \boxed{e = \alpha E} \quad (46)$$

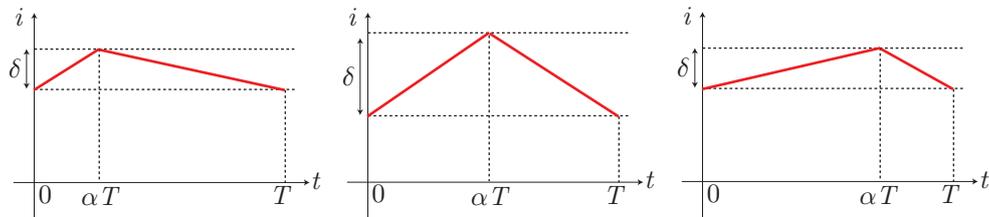
Puisque la f.c.é.m. e est proportionnelle à la vitesse angulaire Ω de l'arbre du moteur ($e = \phi \Omega$), le résultat (46) montre que Ω peut être commandé par E ou par le rapport cyclique α .

Quant à l'ondulation δ , elle vaut alors :

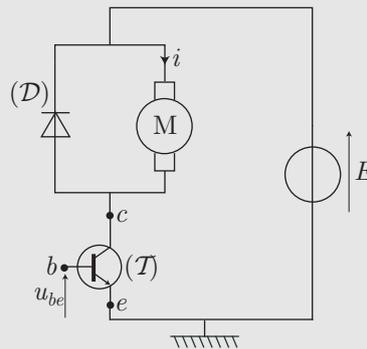
$$\delta = \frac{E-e}{L} \alpha T \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{ET}{L} \alpha (1 - \alpha)}$$

On remarque que δ devient maximum pour la valeur α_m qui annule la dérivée de δ :

$$\left. \frac{d\delta}{d\alpha} \right|_{\alpha_m} = \frac{ET}{L} (1 - 2\alpha_m) = 0 \Rightarrow \alpha_m = \frac{1}{2} \Rightarrow \delta_m = \delta(\alpha_m) = \frac{ET}{4L}$$

EXERCICE 

Un moteur (M) de f.c.é.m. e constante, de résistance interne r et d'auto-inductance L , est alimenté par un hacheur, dans lequel la source de puissance est une source de tension, de f.é.m. $E > e$:



On admettra que le courant i qui traverse le moteur est toujours positif et que la diode \mathcal{D} est idéale. Le transistor (\mathcal{T}), également idéal, est soumis pendant chaque période à la séquence suivante :

- pour $t \in]0; \alpha T[$, $\alpha \leq 1$, la tension u_{be} atteint la valeur seuil qui le rend passant ;
- pour $t \in]\alpha T; T[$, la tension u_{be} est nulle, de sorte que (\mathcal{T}) est bloqué.

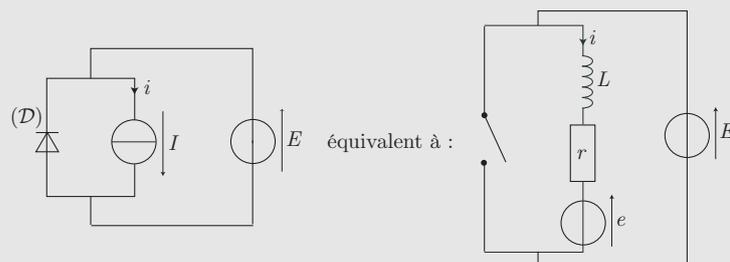
1. Pour chacun des deux régimes du transistor, représenter le schéma équivalent du montage et établir l'équation différentielle relative à $i(t)$.
2. Représenter l'allure de $i(t)$ pendant une période T ; on notera $I_m = i(0)$ et $I_M = i(\alpha T) > I_m$.
3. On suppose simultanément que r tend vers zéro et que $T \ll \tau = \frac{L}{r}$. Montrer que, dans ces conditions :

$$\delta = I_M - I_m \simeq \frac{eT(1-\alpha)}{L} \text{ et } \delta \simeq (E-e) \frac{\alpha T}{L}$$

4. En déduire l'expression de e en fonction de α et E .

Corrigé

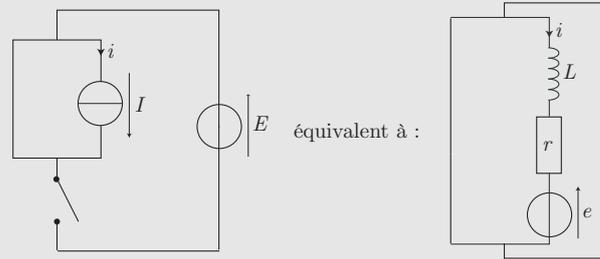
1. Pour $t \in]0; \alpha T[$, le transistor (passant) se comporte comme un interrupteur fermé, tandis que le moteur (association en série de r , L , e) se comporte comme une source de courant. La diode (\mathcal{D}) doit être bloquée pour ne pas mettre la source E en court-circuit :



La loi des mailles fournit alors :

$$E = L \frac{di}{dt} + ri + e \Rightarrow \tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E - e}{r} \text{ où } \tau = \frac{L}{r} \quad (47)$$

Pour $t \in]\alpha T; T[$, le transistor (bloqué) se comporte comme un interrupteur ouvert, auquel cas la diode (de roue libre) se comporte comme un interrupteur fermé afin de permettre à la source de courant de débiter un courant non nul :



La loi des mailles impose :

$$0 = L \frac{di}{dt} + ri + e \Rightarrow \tau \frac{di}{dt} + i = -\frac{e}{r} \text{ où } \tau = \frac{L}{r} \quad (48)$$

2. Chaque portion de période T est caractérisée par une équation différentielle :
- Pour $t \in]0; \alpha T[$, l'équation différentielle (47) a pour solution :

$$i_1(t) = \frac{E - e}{r} + A e^{-t/\tau}$$

où la constante A est ajustée de manière à respecter la condition limite :

$$i_1(t=0) = I_m \Rightarrow \frac{E - e}{r} + A = I_m \Rightarrow i_1(t) = \frac{E - e}{r} + \left(I_m - \frac{E - e}{r} \right) e^{-t/\tau}$$

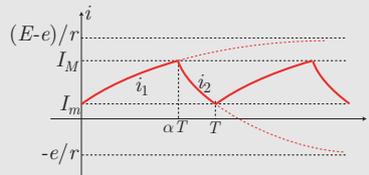
- Pour $t \in]\alpha T; T[$, l'équation différentielle (48) admet quant à elle la solution :

$$i_2(t) = -\frac{e}{r} + B e^{-t/\tau}$$

où la constante B est ajustée à la condition limite :

$$i_2(t = \alpha T) = I_M \Rightarrow I_M = -\frac{e}{r} + B e^{-\alpha T/\tau} \Rightarrow i_2(t) = -\frac{e}{r} + \left(I_M + \frac{e}{r} \right) e^{(\alpha T - t)/\tau}$$

Par conséquent, le courant i présente l'allure suivante :



3. - La continuité du courant $i(t)$ en $t = \alpha T$ se traduit par :

$$i_1(\alpha T) = I_M \Rightarrow I_M = I_m e^{-\alpha T/\tau} + \frac{E - e}{r} (1 - e^{-\alpha T/\tau}) \quad (49)$$

En supposant $\alpha T \ll \tau$ tandis que r tend vers zéro, on suppose également que $e^{-\alpha T/\tau} \simeq 1$ tandis que $\frac{E - e}{r} (1 - e^{-\alpha T/\tau})$ est une forme indéterminée qu'il convient de linéariser :

$$e^{-\alpha T/\tau} \simeq 1 - \frac{\alpha T}{\tau} \Rightarrow \frac{E - e}{r} (1 - e^{-\alpha T/\tau}) \simeq \frac{E - e}{r} \times \frac{\alpha T}{\tau} = \frac{(E - e)}{r} \times \frac{\alpha T r}{L} = (E - e) \frac{\alpha T}{L}$$

L'équation (49) se simplifie alors :

$$I_M \simeq I_m + (E - e) \frac{\alpha T}{L} \Rightarrow \delta \hat{=} I_M - I_m \simeq (E - e) \frac{\alpha T}{L}$$

- La continuité du courant $i(t)$ en $t = T$ impose, quant à elle :

$$i_2(T) = I_m \Rightarrow I_m = -\frac{e}{r} + \left(I_M + \frac{e}{r} \right) e^{(\alpha - 1)T/\tau} = I_M e^{(\alpha - 1)T/\tau} + \frac{e}{r} [-1 + e^{(\alpha - 1)T/\tau}]$$

À nouveau, l'hypothèse selon laquelle $\frac{T}{\tau} \ll 1$ et $r \rightarrow 0$ permet de poser : $e^{(\alpha-1)T/\tau} \simeq 1$ tandis que $\frac{e}{r} [-1 + e^{(\alpha-1)T/\tau}]$ est une forme indéterminée à linéariser :

$$\begin{aligned} \frac{e}{r} [-1 + e^{(\alpha-1)T/\tau}] &\simeq \frac{e}{r} \times (\alpha - 1) \frac{T}{\tau} = \frac{e}{r} \times (\alpha - 1) \frac{Tr}{L} = e(\alpha - 1) \frac{T}{L} \\ \Rightarrow I_m = I_M + \frac{e(\alpha - 1)T}{L} &\Rightarrow \boxed{\delta \hat{=} I_M - I_m = \frac{eT}{L} (1 - \alpha)} \end{aligned}$$

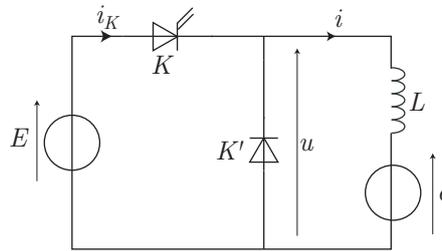
4. Les deux expressions précédentes donnant δ conduisent à :

$$\alpha(E - e) = (1 - \alpha)e \Rightarrow \alpha E - \alpha e = e - \alpha e \Rightarrow \boxed{e = \alpha E}$$

ce qui montre que la vitesse angulaire Ω de l'arbre du moteur peut être directement contrôlée par le rapport cyclique. Cette méthode est désignée dans l'industrie par MLI (Modulation par Largeur d'Impulsion) ou PWM (*Pulse Width Modulation*).

h- Valeurs moyennes et bilan de puissance

Considérons un moteur (f.c.é.m. e , auto-inductance L et résistance interne $r \simeq 0$ négligeable) alimenté par une source de tension E , par l'intermédiaire d'un hacheur série décrit par le schéma de la page 65 :



La loi des nœuds impose :

$$u = L \frac{di}{dt} + e \quad (50)$$

où la valeur de u varie avec l'état (passant ou bloqué) du transistor (K).

On admettra que i est toujours positif et que e est une grandeur constante.

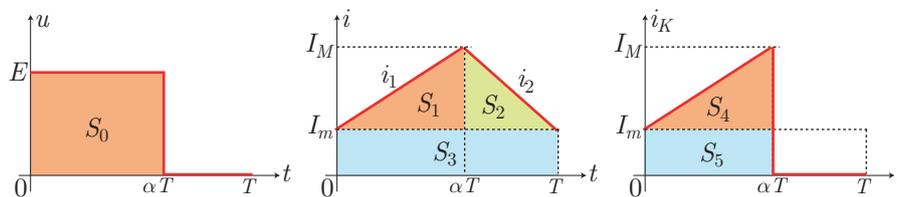
- Pour $t \in]0; \alpha T[$, K est fermé tandis que K' est ouvert, ce qui signifie que $u = E$ tandis que i est donné par le résultat (44) de la page 66 :

$$i_1(t) = I_m + \frac{E - e}{L} t \text{ et } i_K(t) = i_1(t)$$

- Pour $t \in]\alpha T; T[$, K est ouvert tandis que K' est fermé, de sorte que $u = 0$, i est donnée par le résultat (45) de la page 66 :

$$i_2(t) = I_M - \frac{e}{L} (t - \alpha T) \text{ et } i_K(t) = 0$$

Ces résultats se résument à l'aide des courbes suivantes :



à partir desquelles peuvent se calculer les valeurs moyennes :

- de $u(t)$:

$$\langle u \rangle_T \hat{=} \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = \frac{1}{T} S_0$$

où $S_0 = \int_0^T u(t) dt$ désigne la surface comprise entre la courbe de $u(t)$ et l'axe des abscisses pendant une période T , c'est-à-dire :

$$S_0 = E \times \alpha T \Rightarrow \langle u \rangle_T = \alpha E$$

Quant à la loi (50) elle impose, quand e est constant :

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle_T = 0 \Rightarrow \langle u \rangle_T = L \left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle_T + \langle e \rangle_T = e \Rightarrow \boxed{\alpha E = e}$$

Ce résultat confirme que la force contre-électromotrice e , c'est-à-dire aussi la vitesse angulaire de rotation Ω de l'arbre du moteur, est contrôlable à l'aide du rapport cyclique α .

– de $i(t)$:

$$\langle i \rangle_T \hat{=} \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt$$

où l'intégrale s'identifie à la surface comprise entre la courbe $i(t)$ et l'axe des abscisses pendant une période T :

$$\begin{aligned} \langle i \rangle_T &= \frac{1}{T} (S_1 + S_2 + S_3) = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2} (I_M - I_m) \alpha T + \frac{1}{2} (I_M - I_m) (T - \alpha T) + I_m T \right] \\ &= \frac{(I_M - I_m)}{2} \alpha + (1 - \alpha) \frac{(I_M - I_m)}{2} + I_m = \frac{I_M - I_m}{2} + I_m \Rightarrow \boxed{\langle i \rangle_T = \frac{I_M + I_m}{2}} \end{aligned}$$

– de $i_K(t)$:

$$\langle i_K \rangle_T \hat{=} \frac{1}{T} \int_0^T i_K(t) dt$$

où, pour les mêmes raisons que précédemment :

$$\begin{aligned} \langle i_K \rangle_T &= \frac{1}{T} [S_4 + S_5] = \frac{1}{T} \left[\frac{1}{2} (I_M - I_m) \alpha T + I_m \alpha T \right] = \left(\frac{I_M - I_m}{2} + I_m \right) \alpha \\ &\Rightarrow \boxed{\langle i_K \rangle = \alpha \frac{I_M + I_m}{2} = \alpha \langle i \rangle_T} \end{aligned}$$

REMARQUE

Pour calculer les intégrales précédentes, le remplacement de $i_1(t)$ et de $i_2(t)$ par leurs expressions n'est pas recommandé (sauf demande explicite d'un énoncé) ; les calculs correspondants sont fastidieux.

Les expressions précédentes permettent alors un bilan de puissance dans le circuit :

– L'inductance consomme une puissance $\mathcal{P}_L = u_L i = L \frac{di}{dt} \times i$, à laquelle est associée la valeur moyenne :

$$P_L = \left\langle L i \frac{di}{dt} \right\rangle_T = \frac{L}{2} \left\langle \frac{d(i^2)}{dt} \right\rangle_T = \frac{L}{2} \times 0 \Rightarrow \boxed{P_L = 0}$$

– La f.c.é.m. reçoit une puissance électrique $\mathcal{P}_e = e \times i$ à laquelle est associée la valeur moyenne :

$$\boxed{P_e = \langle ei \rangle_T = e \langle i \rangle_T = \frac{e}{2} \times (I_M + I_m)} \quad (51)$$

REMARQUE

La puissance moyenne reçue par le moteur pendant une période T :

$$P_{\text{moteur}} = P_L + P_e = P_e$$

occulte la présence de l'auto-inductance L . C'est pourquoi cette inductance est souvent omise dans les schémas électriques équivalents du moteur.

– la source de tension délivre une puissance électrique $\mathcal{P}_g = E i_K$ à laquelle est associée la valeur moyenne :

$$\boxed{P_g = \langle E i_K \rangle = E \langle i_K \rangle = E \alpha \frac{I_M + I_m}{2}} \quad (52)$$

En notant $P_{\text{moteur}} = P_L + P_e$ la puissance électrique moyenne reçue par le moteur et en remarquant que l'égalité : $e = \alpha E$ permet d'identifier les expressions (51) et (52), on remarque que :

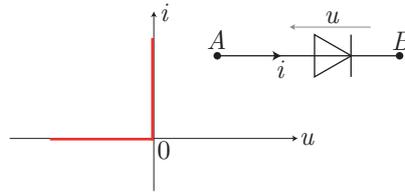
$$\boxed{P_{\text{moteur}} = P_g}$$

c'est-à-dire que le transfert de puissance du générateur au moteur se fait avec un rendement de 100%. Évidemment, cette situation est idéalisée car elle ne tient compte ni de la résistance des fils, ni de l'énergie (au demeurant faible) utile au pilotage du transistor.

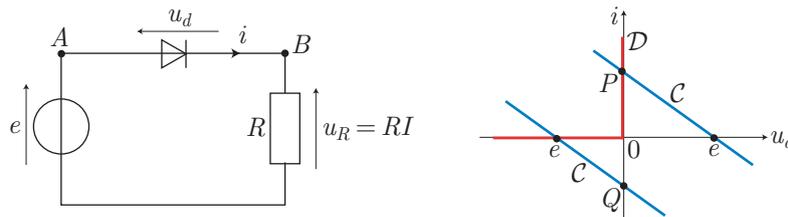
2- Redressement par pont de diodes

a- Redressement monoalternance

Considérons une diode idéale sans tension de seuil et sans résistance interne.



associée en série avec une résistance R , l'ensemble étant alimenté par une source de tension de f.é.m. sinusoïdale $e(t) = E_0 \sin(\omega t)$:



La loi des mailles impose :

$$e - u_d - Ri = 0 \Rightarrow u_d = e - Ri$$

ce qui montre que le point de fonctionnement du circuit correspond à l'intersection des caractéristiques \mathcal{D} de la diode ($u_d = f(i)$) et \mathcal{C} du générateur ($u_d = e - Ri$). Ces caractéristiques révèlent que :

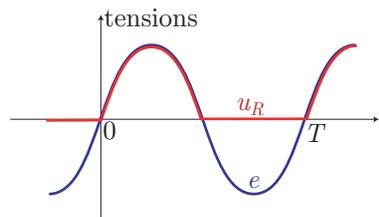
- lorsque $e > 0$, le point de fonctionnement (intersection P) a pour abscisse $u_d = 0$, de sorte qu'aux bornes de la résistance règne une tension :

$$u_R = Ri = e \text{ si } e > 0$$

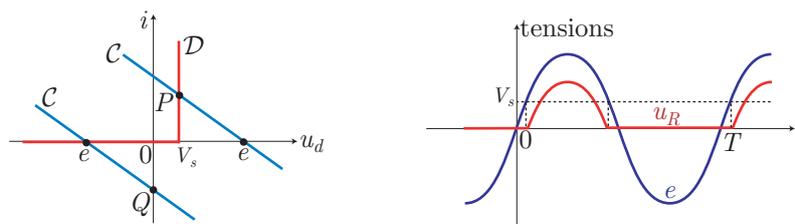
- lorsque $e < 0$, le point de fonctionnement (intersection Q) a pour ordonnée $i = 0$, de sorte que :

$$u_R = Ri = 0 \text{ pour } e < 0$$

Il ressort de cette étude que le montage proposé réalise le redressement de la tension e sur une demi-période :

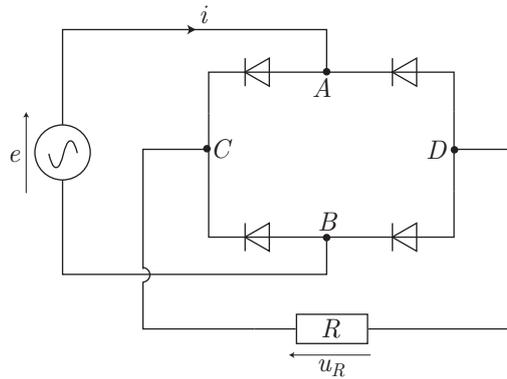


REMARQUE La diode réelle présente une tension de seuil ($V_s \simeq 0,6 \text{ V}$) qui translate la tension $u_R(t)$:



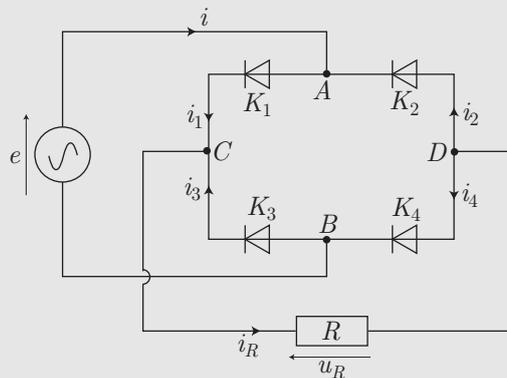
b- Redressement double alternance

Afin de réaliser le redressement de la tension u_R sur la totalité de la période T , on utilise un pont de diodes (ou pont de Graetz)



EXERCICE

Un pont de Graetz, constitué de quatre diodes idéales, est alimenté par une source de tension sinusoïdale de f.é.m. $e = E_0 \cos(\omega t)$. Une résistance R relie les bornes C et D de sortie du pont :



1. Montrer que $i_R \geq 0$
2. Est-il possible qu'une seule diode soit passante ?
3. On suppose, dans un premier temps, que $e > 0$.
 - a- Quel est l'état des diodes K_1 et K_2 ? établir soigneusement ce résultat.
 - b- Étudier soigneusement l'état des diodes K_2 et K_4 .
 - c- En déduire que $u_R = e$.
4. On suppose maintenant que $e < 0$.
 - a- Quel est l'état des diodes K_2 et K_4 ?
 - b- En déduire l'état des diodes K_1, K_3 .
 - c- Montrer que $u_R = -e$.
5. Tracer, sur un même graphe, l'allure des courbes $e(t)$ et $u_R(t)$ sur une période T .

Corrigé

1. Le schéma montre que $i_R = i_1 + i_3$, où les courants i_1 et i_3 traversent les diodes K_1 et K_3 , en conséquence de quoi :

$$\begin{cases} i_1 \geq 0 \\ i_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow i_R \geq 0$$

2. La loi des nœuds impose :

$$i_R = i_1 + i_3 = i_4 + i_2$$

Si une seule diode était passante, un de ces courants serait strictement positif et les autres seraient nuls, ce qui se traduirait par l'inégalité : $0 > 0$! Donc, au moins deux diodes sont passantes simultanément.

3. a- Si K_1 est bloqué, $i_R = i_1 + i_3 > 0$ avec $i_1 = 0$ implique que $i_3 > 0$, c'est-à-dire que K_3 est passante, c'est-à-dire : $V_B = V_C$. Il s'ensuit que :

$$V_A - V_C = V_A - V_B = e > 0$$

Or, cette inégalité impose à K_1 d'être passante. Donc, K_1 est passante : $V_A = V_C$, de sorte que :

$$V_C - V_B = V_A - V_B = e > 0 \Rightarrow V_C > V_B \Rightarrow K_3 \text{ est bloquée}$$

b- La contrainte $i_R > 0$ se traduit par :

$$V_C - V_D = R i_R > 0 \Rightarrow V_C > V_D$$

et, comme K_1 est passante :

$$V_A = V_C \Rightarrow V_A > V_D \Rightarrow K_2 \text{ est bloquée}$$

Enfin, puisque au moins deux diodes doivent être simultanément passantes : K_4 est passante

c- Les diodes K_1 et K_4 étant passantes, il s'ensuit que :

$$\begin{cases} V_A = V_C \\ V_B = V_D \end{cases} \Rightarrow u_R = V_C - V_D = V_A - V_B \Rightarrow u_R = e \quad (53)$$

4. a- Si K_2 était bloquée ($i_2 = 0$), l'inégalité : $i_R > 0 \Rightarrow i_2 + i_4 > 0 \Rightarrow i_4 > 0$ imposerait que K_4 soit passante, auquel cas $V_B = V_D$ de sorte que :

$$V_A - V_D = V_A - V_B = e < 0 \Rightarrow V_A < V_D$$

Donc K_2 serait passante, ce qui est contradictoire. Finalement : K_2 est passante ce qui impose $V_A = V_D$ et :

$$e = V_A - V_B = V_D - V_B < 0 \Rightarrow V_B > V_D \Rightarrow K_4 \text{ est bloquée}$$

b- En supposant $i_R > 0$, on suppose également :

$$u_R = R i_R > 0 \Rightarrow V_C - V_D > 0 \Rightarrow V_C > V_D \Rightarrow V_C > V_A \text{ car } V_A = V_D \text{ (} K_2 \text{ passante)}$$

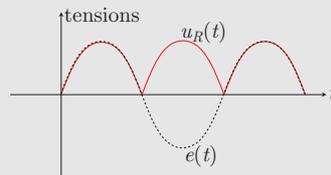
Donc K_1 est bloquée et, puisque au moins deux diodes sont simultanément passantes, il s'ensuit que

K_3 est passante

c- Les diodes K_2 et K_3 étant passantes, on observe que :

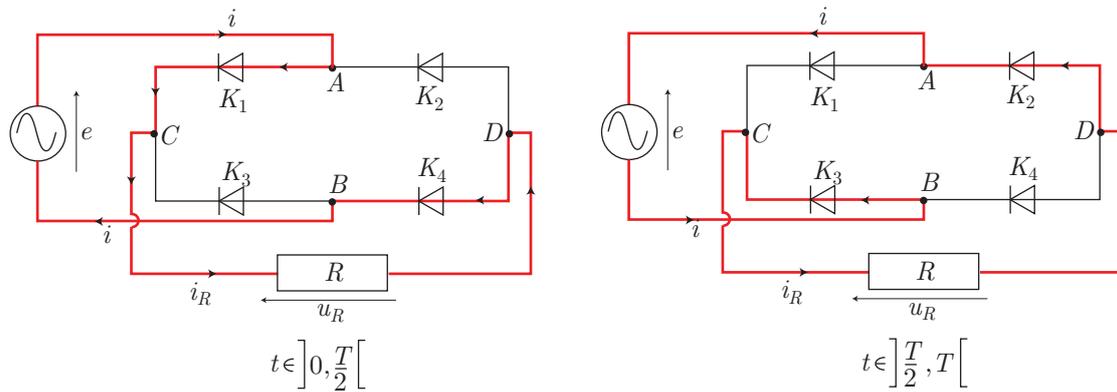
$$\begin{cases} V_A = V_D \\ V_B = V_C \end{cases} \Rightarrow u_R = V_C - V_D = V_B - V_A \Rightarrow u_R = -e \quad (54)$$

5. Les résultats (53) et (54) conduisent à la représentation suivante des tensions $e(t)$ et $u_R(t)$, qui montre le redressement double alternance.



En pratique, l'état des diodes s'obtient plus rapidement en considérant que la source de tension génère un courant i dont le sens est déterminé par celui de e (e et i sont dans le même sens) :

- pour $t \in \left] 0; \frac{T}{2} \right[$, $e > 0$ et seules les diodes K_1 et K_4 peuvent assurer le passage du courant. Ainsi $V_A = V_C$ et $V_B = V_D$ conduisent à $u_R = V_C - V_D = V_A - V_B = e$.
- pour $t \in \left] \frac{T}{2}; T \right[$, le sens de i s'inverse, ce que permettent uniquement les diodes K_3 et K_2 . Ainsi $V_A = V_D$ et $V_C = V_B$ conduisent à $u_R = V_C - V_D = V_B - V_A = -e$.

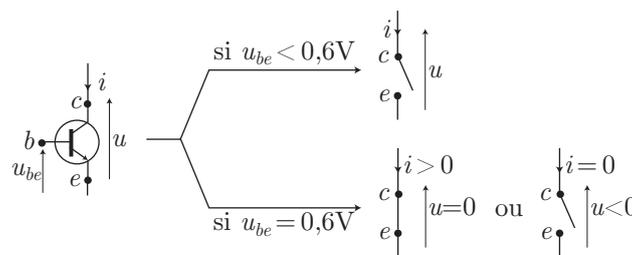


REMARQUE Les résultats obtenus précédemment demeurent valables si la résistance R est remplacée par une source de courant électromoteur $i_R > 0$.

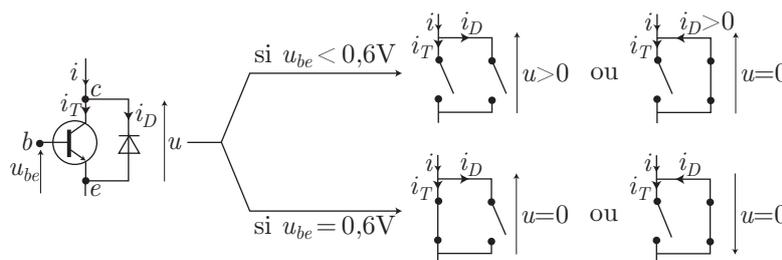
3- Onduleur

a- Interrupteur commandé

Un transistor seul peut servir d'interrupteur commandé par une tension u_{be} , à condition que le courant i demeure positif; dans le cas contraire, il demeure bloqué et se comporte comme un interrupteur ouvert :

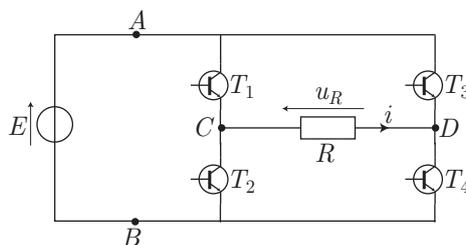


Un tel dispositif ne peut donc pas être utilisé comme un interrupteur : il ne laisserait passer le courant entre le collecteur c et l'émetteur e dans un seul sens. Pour compenser cette restriction, on adjoint au transistor une diode (appelée diode de récupération) :



b- Fonctionnement sur charge résistive

Le rôle du hacheur est la transformation d'une tension continue (E) en tension alternative dont la forme et la période T dépendent de la séquence imposée à quatre transistors (T_1, T_2, T_3, T_4) par un signal de commande.



Considérons, par exemple, la séquence suivante :

$$t \in \left] 0; \frac{T}{2} \right[\Rightarrow \begin{cases} T_1, T_4 \text{ passants} \\ T_2, T_3 \text{ bloqués} \end{cases} \quad \text{et } t \in \left] \frac{T}{2}; T \right[\Rightarrow \begin{cases} T_1, T_4 \text{ bloqués} \\ T_2, T_3 \text{ passants} \end{cases}$$

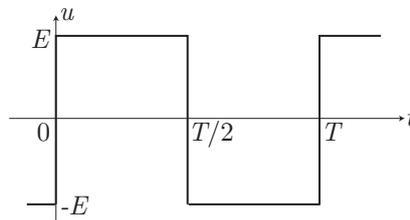
Dans ce cas :

$$\text{-- pour } t \in \left] 0; \frac{T}{2} \right[:$$

$$\begin{cases} V_A = V_C \\ V_D = V_B \end{cases} \Rightarrow u_R = V_C - V_D = V_A - V_B \Rightarrow \boxed{u_R = E}$$

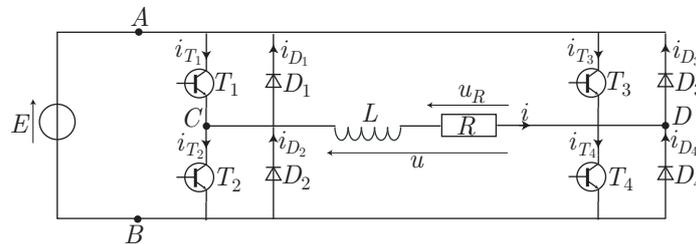
$$\text{-- pour } t \in \left] \frac{T}{2}; T \right[:$$

$$\begin{cases} V_A = V_D \\ V_C = V_B \end{cases} \Rightarrow u_R = V_C - V_D = V_B - V_A \Rightarrow \boxed{u_R = -E}$$



c- Fonctionnement sur charge inductive

Remplaçons, dans le montage précédent, les transistors par les « interrupteurs » TD_i constitués de l'association en parallèle d'une diode D_i et d'un transistor T_i puis associons une bobine en série avec la résistance :



Les tensions de commande imposent aux transistors la même séquence que précédemment :

$$t \in \left] 0; \frac{T}{2} \right[\Rightarrow \begin{cases} TD_1, TD_2 \text{ fermés} \\ TD_2, TD_3 \text{ ouverts} \end{cases} \quad \text{et } t \in \left] \frac{T}{2}; T \right[\Rightarrow \begin{cases} TD_1, TD_4 \text{ ouverts} \\ TD_2, TD_3 \text{ fermés} \end{cases}$$

de sorte que la tension $u(t)$ s'identifie au créneau précédent, fonction T -périodique impaire qui admet donc pour série de Fourier :

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad \text{où } n = \frac{2\pi}{T} \text{ et } b_n = \begin{cases} 4E/n\pi \text{ pour } n \text{ impair} \\ 0 \text{ pour } n \text{ pair} \end{cases} \\ &= b_1 \sin(\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \dots \\ &\Rightarrow \underline{u} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{j(n\omega t - \pi/2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \underline{u}_n \quad \text{avec } u(t) = \Re\{\underline{u}\} \end{aligned}$$

En outre, l'association R, L constitue un filtre passe-bas, de fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) \hat{=} \frac{\underline{u}_R}{\underline{u}} = \frac{R}{R + Lj\omega} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} \quad \text{où } \omega_0 = \frac{L}{R}$$

Donc, chaque harmonique $\underline{u}_n = b_n e^{j(n\omega t - \pi/2)}$ est associé à une image complexe :

$$\underline{u}_{R_n} = \underline{H}(jn\omega) \underline{u}_n = \frac{1}{1 + jn\omega/\omega_0} b_n e^{j(n\omega t - \pi/2)}$$

ω_0 est alors dimensionné de telle manière que :

$$\begin{aligned} \omega \gg \omega_0 &\Rightarrow \underline{u}_{R_n} \simeq \frac{1}{jn\omega/\omega_0} b_n e^{j(n\omega t - \pi/2)} = \frac{b_n}{n\omega/\omega_0} e^{j(n\omega t - \pi)} \\ &\Rightarrow u_{R_n} = \Re\{\underline{u}_n\} \simeq -\frac{b_n \omega_0}{n\omega} \cos(n\omega t) \end{aligned}$$

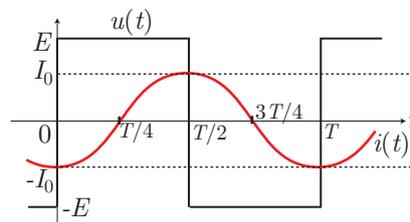
L'amplitude des harmoniques de u_R décroissant avec n , il est alors légitime de ne conserver que celui de rang 1 :

$$u_R = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-b_n \omega_0}{n\omega} \cos(n\omega t) \simeq -\frac{b_1 \omega_0}{\omega} \cos(\omega t)$$

qui est également proportionnel au courant i :

$$i(t) = \frac{u_R}{R} = -I_0 \cos(\omega t) \text{ avec } I_0 = \frac{b_1 \omega_0}{R\omega}$$

Ainsi, la représentation de $u(t)$ et $i(t)$ sur un même graphe :



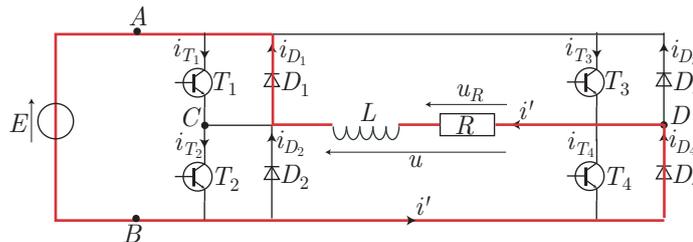
montre qu'au cours d'une période se distinguent quatre régime de fonctionnement :

- Pour $t \in \left] 0; \frac{T}{4} \right[$:

$$u(t) > 0 \Rightarrow TD_1, TD_4 \text{ fermés et } TD_2, TD_3 \text{ ouverts} \Rightarrow i_{T_2} = i_{D_2} = i_{T_3} = i_{D_3} = 0$$

et :

$$i < 0 \Rightarrow i' = -i > 0 \Rightarrow i_{D_1} = i_{D_4} = i' \text{ et } i_{T_1} = i_{T_4} = 0$$

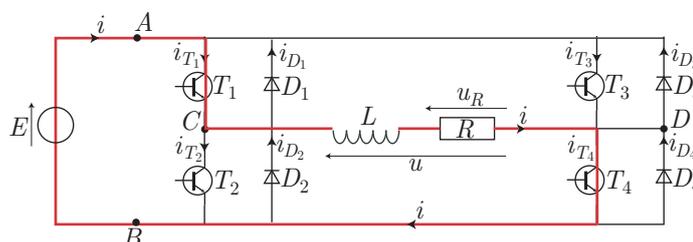


- Pour $t \in \left] \frac{T}{4}; \frac{T}{2} \right[$:

$$u(t) > 0 \Rightarrow TD_1, TD_4 \text{ fermés et } TD_2, TD_3 \text{ ouverts} \Rightarrow i_{T_2} = i_{D_2} = i_{T_3} = i_{D_3} = 0$$

et :

$$i > 0 \Rightarrow i_{T_1} = i_{T_4} = i \text{ et } i_{D_1} = i_{D_4} = 0$$

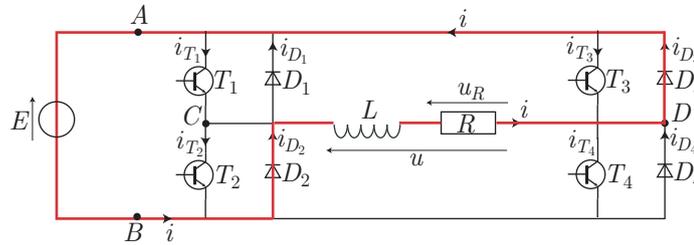


- Pour $t \in \left] \frac{T}{2}; \frac{3T}{4} \right[$:

$$u(t) < 0 \Rightarrow TD_2, TD_3 \text{ fermés et } TD_1, TD_4 \text{ ouverts} \Rightarrow i_{T_1} = i_{D_1} = i_{T_4} = i_{D_4} = 0$$

et :

$$i > 0 \Rightarrow i_{D_2} = i_{D_3} = i \text{ et } i_{T_2} = i_{T_3} = 0$$

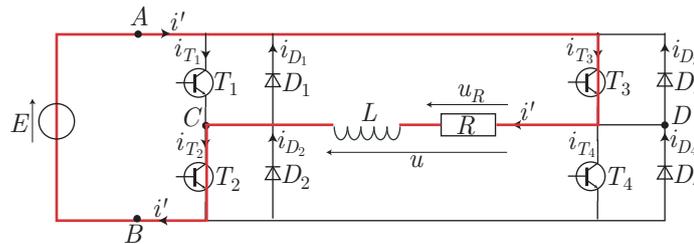


- Pour $t \in \left] \frac{3T}{4}; T \right[$:

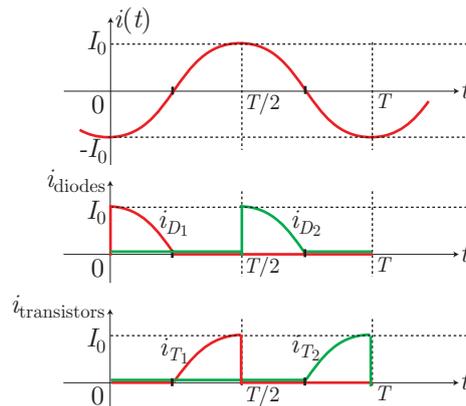
$$u(t) < 0 \Rightarrow TD_2, TD_3 \text{ fermés et } TD_1, TD_4 \text{ ouverts} \Rightarrow i_{T_1} = i_{D_1} = i_{T_4} = i_{D_4} = 0$$

et :

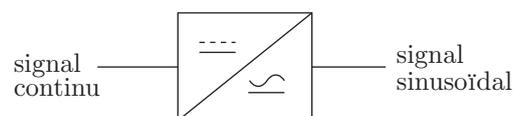
$$i < 0 \Rightarrow i' = -i > 0 \Rightarrow i_{T_2} = i_{T_3} = i' \text{ et } i_{D_2} = i_{D_3} = 0$$



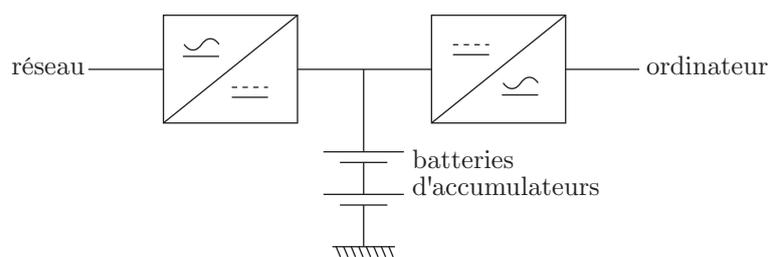
En conclusion, la variation des courants traversant les diodes et transistors peut être représentée graphiquement (puisque'à chaque instant $i_{D_1} = i_{D_4}$, $i_{T_1} = i_{T_4}$, $i_{D_2} = i_{D_3}$ et $i_{T_2} = i_{T_3}$, il suffira de ne représenter que i_{D_1} , i_{D_2} , i_{T_1} , i_{T_2}) :



L'étude précédente montre que l'onduleur, associé à un filtre passe-bas, permet de reproduire un signal quasi sinusoïdal à partir d'une tension continue :



Ce dispositif est fréquemment utilisé en informatique pour prévenir les coupures d'alimentation électrique :



Lorsque le réseau domestique est pourvoyeur d'énergie électrique, il alimente une batterie d'accumulateurs qui se chargent sous une tension continue, tandis qu'un onduleur transforme cette tension en tension sinusoïdale directement exploitable par un ordinateur. Si le réseau ne distribue plus d'énergie, provisoirement les batteries peuvent fournir l'énergie nécessaire au fonctionnement des ordinateurs.

Index

Symbols

électrification, 26
émetteur (transistor), 57
à vide (transformateur), 10
BEHN-ESCHENBURG, 42
FRESNEL (représentation de), 42

A

adaptation d'impédance, 23 ; 25
alternateur, 45
alternateur synchrone, 46
Ampère (théorème d'), 9
amplitude complexe, 5
angle interne, 36
autopilotage, 39
autopilotage (moteur), 39

B

balais, 47
base (transistor), 57
bloqué (transistor), 58
bloquée (diode), 57
bornes homologues, 8

C

caractéristique (diode), 57
Cellule de commutation, 63
cellule de commutation, 57
collecteur, 47
collecteur (transistor), 57
commutation (cellule de), 57
commutation contrôlée, 57
commutation spontanée, 57
compensateur synchrone, 46
condition de synchronisme, 37
conductance interne, 59
contacteur électromagnétique, 30
courant électromoteur, 58
courant continu moteur à), 47
courants de Foucault, 9 ; 11 ; 12 ; 14 ; 18
court-circuit, 59
cycle d'hystérésis, 15
cycle d'hystérésis, 14

D

décrochage d'un moteur, 37
démarrage (moteur), 39
diagramme de BEHN-ESCHENBURG, 42
diode, 57
diode de récupération, 74
diode de roue libre, 65
double alternance (redressement), 73

E

effet Joule, 11 ; 12
entrefer, 27 ; 31
excitation magnétique, 8
excitation séparée (machine), 45

F

facteur de puissance, 2 ; 6
Faraday (loi de), 9
feuilletage, 12 ; 14
force électromotrice, 9
force contre-électromotrice, 41
Fresnel (représentation de), 5

G

génératrice, 51
génératrice synchrone, 45
Graetz (pont de), 46 ; 72

H

hacheur, 57
haute tension, 26
hystérésis, 11

I

idéal (transformateur), 12
image complexe, 4
impédance rapportée, 19
inductance mutuelle, 9
inducteur, 31 ; 46
induit, 30 ; 46

J

Joule (effet), 11

K

Kapp (modèle de), 16

L

lames, 47
loi de Faraday, 9 ; 41

M

méthode des 3 voltmètres, 2
machine à excitation séparée, 45
machine synchrone, 30
MLI, 69
modèle de Kapp, 16
monoalternance (redressement), 71
moteur à courant continu, 46 ; 47
moteur auxiliaire, 39
moteur diphasé, 31
moteur synchrone, 30 ; 45

N

neutre, 26
Norton (modèle de), 59
npn (transistor), 57

O

ondulation, 66
onduleur, 40 ; 74

P

paquebots, 46
passant (transistor), 58

passante (diode), 57
perte cuivre, 50
pertes énergétiques, 12
pertes cuivre, 14
pertes fer, 14
phase (prise), 26
pnp (transistor), 57
pont de diodes, 72
pont de Graetz, 46 ; 72
primaire (enroulement), 8
puissance active, 2 ; 26
puissance apparente, 2 ; 26
puissance moyenne, 2
puissance réactive, 2 ; 26
PWM, 69

R

récupération (diode), 74
résistance interne, 59
rapport cyclique, 63
rapport de transformation, 9
redressement double alternance, 72
redressement monoalternance, 71
redresseur, 40
relais, 30
rotor, 31 ; 46
rotor bobiné, 46
roue libre (diode), 65

S

secondaire (enroulement), 8
source continue, 59
source de courant, 58
source de tension, 58
stabilité (machine synchrone), 38
stator, 30 ; 46
synchronisme, 37 ; 43

T

théorème d'Ampère, 9 ; 12
Thévenin (modèle de), 59
très haute tension, 26
traction ferroviaire, 46
transformateur, 8
transformateur d'isolement, 26
transistor, 57

U

ultra haute tension, 26

V

valeur efficace, 1
valeur moyenne, 1
voltampère, 2

Table des matières

D1	Puissance électrique en régime sinusoïdal	1
1-	Définitions	1
a-	Grandeurs moyennes et efficaces	1
b-	Puissances moyennes	2
2-	Notations complexes	3
a-	Utilisation des impédances	3
b-	Représentation de Fresnel	4
D2	Transformateur	8
1-	Introduction	8
a-	Présentation et modélisation	8
b-	Transfert de puissance	11
2-	Transformateur idéal	12
3-	Les pertes	14
a-	Pertes fer et pertes cuivre	14
b-	Énergie magnétique emmagasinée	15
c-	Modèle de Kapp	16
4-	Transfert d'impédance	19
5-	Applications	23
a-	Adaptation d'impédance	23
b-	Transport de l'énergie électrique	25
c-	Transformateur d'isolement	26
D3	Conversion électro-magnéto-mécanique	27
1-	Contacteur électromagnétique en translation	27
a-	Énergie et force électromagnétique	27
2-	Machine synchrone	30
a-	Structure du moteur synchrone	30
b-	Champ magnétique dans l'entrefer	31
c-	Champ glissant statorique	34
d-	Champ glissant rotorique	35
e-	Énergie et couple	36
f-	Condition de synchronisme et stabilité	37
g-	Démarrage et autopilotage	39
h-	Modèle électrique de l'induit	41
i-	Bilan de puissance	43
j-	Réversibilité	45
k-	Applications	46
3-	Machines à courant continu	46
a-	Structure du moteur à courant continu	46
b-	Couple moteur	47
c-	Moteur et génératrice	49
d-	Point de fonctionnement	54
e-	Démarrage du moteur	55
f-	Applications	56
D4	Conversion électronique statique	57
1-	Le hacheur	57
a-	Fonction de commutation	57
b-	Sources de courant et de tension	58
c-	Interconnexion des sources	59
d-	Lissage de la tension d'un générateur	60
e-	Lissage du courant d'un générateur	61
f-	Cellule élémentaire de commutation	63
g-	Alimentation d'un moteur	65
h-	Valeurs moyennes et bilan de puissance	69
2-	Redressement par pont de diodes	71
a-	Redressement monoalternance	71
b-	Redressement double alternance	72

- 3- Onduleur 74
 - a- Interrupteur commandé 74
 - b- Fonctionnement sur charge résistive 74
 - c- Fonctionnement sur charge inductive 75