

Optique

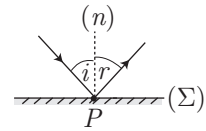
I Rappels : optique géométrique

1- Réflexion et réfraction

:

La réflexion d'un rayon sur une surface (Σ) suit la **loi de Snell-Descartes** :

- les rayons incident, réfléchi et la normale (n) sont coplanaires ;
- les angles d'incidence (i) et de réflexion (r) sont égaux (en valeur absolue).



Attention : À l'interface (Σ) des deux milieux, les angles sont mesurés par rapport à la normale de (Σ) en P .



DÉFINITION

L'**indice de réfraction** n d'un milieu transparent caractérise la vitesse v avec laquelle la lumière s'y propage :

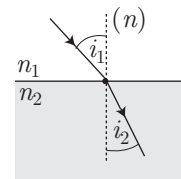
$$v \hat{=} \frac{c}{n}$$

où c désigne la célérité de la lumière dans le vide.

La lumière peut se transmettre entre deux milieux transparents d'indices de réfraction n_1 et n_2 . C'est la **réfraction**, qui obéit à la **loi de Snell-Descartes** :

- Les rayons incident, réfracté et la normale (n) sont coplanaires.
- Lorsque c'est mathématiquement possible, les angles suivent la loi :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$



DÉFINITION

Un milieu est d'autant plus **réfringent** que son indice de réfraction est important.

La loi de Snell-Descartes ($n \sin i = cte$) montre que plus un milieu est réfringent, plus les rayons se rapprochent de la normale (i diminue lorsque n augmente).

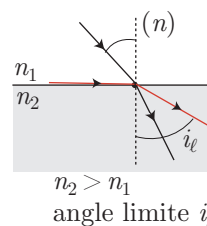
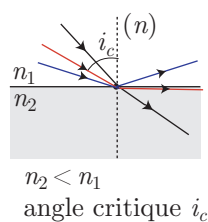
- Si $n_2 < n_1$, il existe un **angle critique** incident au-delà duquel la réfraction n'est plus possible :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \leq n_2 \Rightarrow i_1 \leq i_c \text{ où } \sin i_c = \frac{n_2}{n_1}$$

On observe alors la **réflexion totale** de la lumière.

- Si $n_2 > n_1$, il existe un **angle limite** i_ℓ qui délimité un cône dans lequel se trouvent tous les rayons réfractés :

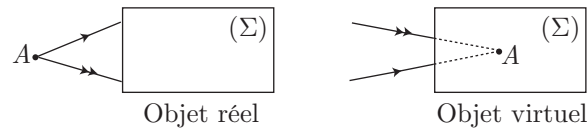
$$n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1 \leq n_1 \Rightarrow i_2 \leq i_\ell \text{ où } \sin i_\ell = \frac{n_1}{n_2}$$



2- Formation des images

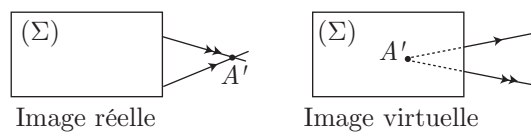
 DÉFINITION

L'**objet** A d'un système optique (Σ) est le point d'intersection des rayons incidents (l'objet est alors **réel**) ou de leurs prolongements (l'objet est alors **virtuel**).

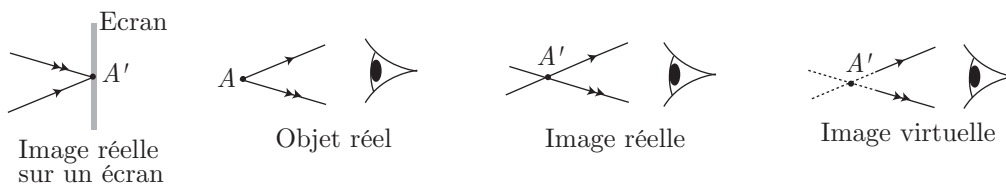


 DÉFINITION

L'**image** A' d'un système optique (Σ) est le point d'intersection des rayons qui en émergent (l'image est alors **réelle**) ou de leurs prolongements (l'image est alors **virtuelle**).



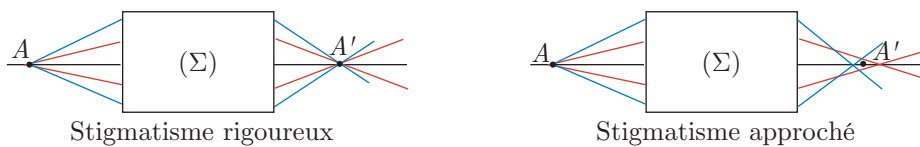
Une image réelle peut être projetée sur un écran, tandis que l'œil peut observer un objet réel, une image réelle et une image virtuelle.



 DÉFINITION

Il y a **stigmatisme** lorsque tous les rayons issus de A émergent de (Σ) en passant par A' . Les points A et A' sont alors **conjugués optiques**.

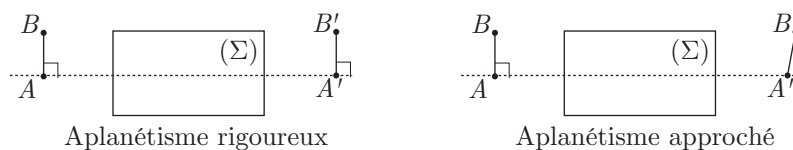
Les cas de **stigmatisme rigoureux** sont rares. Aussi se contente-t-on bien souvent d'un **stigmatisme approché** lorsque la tâche générée au voisinage de A' n'est pas perceptible par l'instrument d'observation :



 DÉFINITION

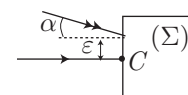
Il y a **aplanétisme** si un objet AB perpendiculaire à l'axe optique est le conjugué d'une image $A'B'$ aussi perpendiculaire à l'axe optique.

Les cas **d'aplanétisme rigoureux** étant rares, on se contente souvent d'un **aplanétisme approché**.



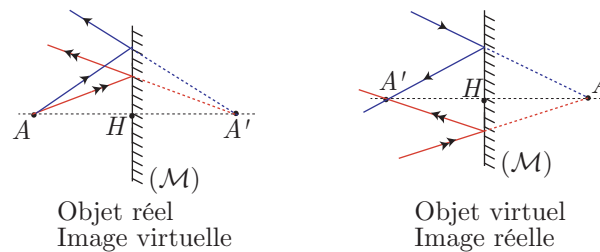
Les **conditions de Gauss** permettent souvent d'atteindre un stigmatisme approché et un aplanétisme approché, si les rayons :

- arrivent au voisinage du centre optique C de (Σ) : $\varepsilon \ll 1$;
- arrivent sous une faible incidence : $\alpha \ll 1$.



3– Miroir plan

Un objet A et son conjugué optique A' sont symétriques par rapport au plan du miroir (\mathcal{M}), ce qui permet de tracer le trajet des rayons lumineux : tout rayon passant par A (réellement ou par prolongement) se réfléchit en passant par A' (réellement ou par prolongement) :



DÉFINITION

Une **relation de conjugaison** est une relation mathématique entre la position d'un objet A et celle de son image conjuguée A' .

Soit H l'intersection de (AA') avec le plan de \mathcal{M} , la **relation de conjugaison du miroir plan** s'écrit :

$$\overline{HA} + \overline{HA'} = 0 \quad (1)$$



DÉFINITION

Soit $A'B'$ l'image d'un objet AB par un dispositif optique. Le **grandissement** de ce dispositif est défini par :

$$\gamma \hat{=} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Pour le miroir plan : $\gamma = 1$

REMARQUE

Le miroir plan est rigoureusement stigmatique et rigoureusement aplanétique.

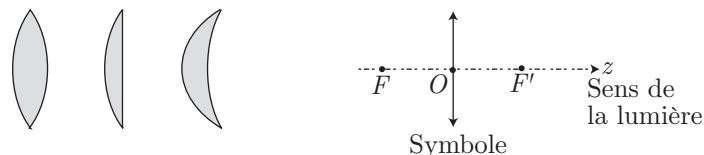
4– Lentilles minces

a– Présentation

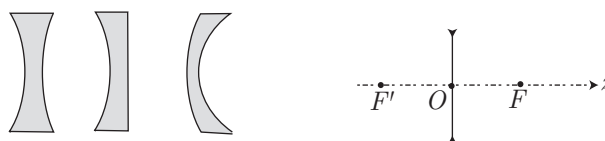
Une **lentille mince** est un objet transparent, d'indice $n \neq 1$, de faible épaisseur, caractérisé par un axe de symétrie (Oz), ou **axe optique**, un **point focal objet** F (ou **foyer objet**), un **point focal image** F' (ou **foyer image**), appartenant tous les deux à Oz et symétriques par rapport au **centre optique** O .

Elles se répartissent en deux familles :

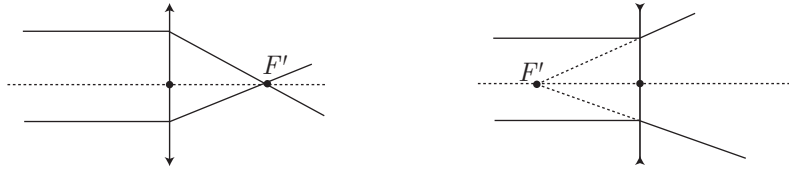
- les **lentilles convergentes**, au centre plus épais que les bords :



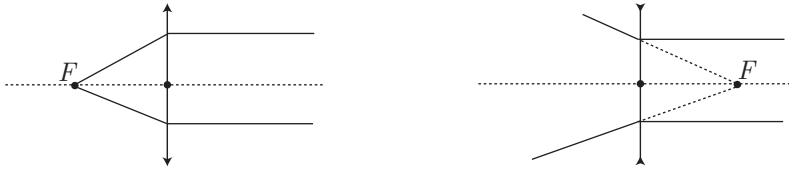
- les **lentilles divergentes** aux bords plus larges que leur centre :



Le **foyer image** F' est l'image (réelle ou virtuelle) des rayons qui arrivent sur la lentille parallèlement à l'axe optique :



Le **foyer objet** est l'objet (réel ou virtuel) qui forme son image «à l'infini», dans la direction de l'axe optique :

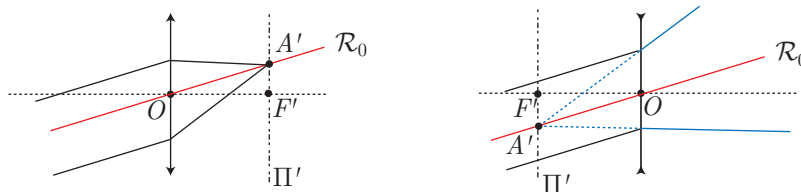


Les rayons (\mathcal{R}_0) qui arrivent sur le centre optique O de la lentille ne sont pas déviés.



DÉFINITION

Le **plan focal image** est le plan Π' perpendiculaire à l'axe optique, contenant F' .
 Tout objet situé à «l'infini» (même hors de l'axe Oz) forme son image dans ce plan.



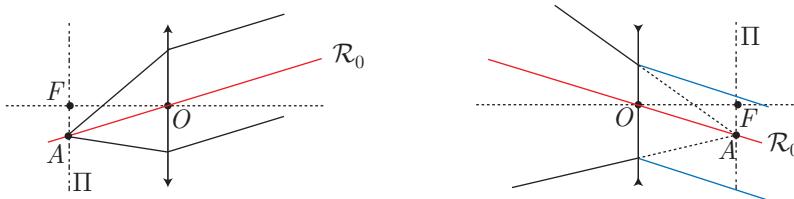
Cette définition permet :

- de localiser l'image A' : c'est le point d'intersection de \mathcal{R}_0 (pas dévié) avec Π' ;
- de tracer les rayons qui émergent de la lentille : il passent (ou leurs prolongements) par A' .



DÉFINITION

Le **plan focal objet** est le plan Π perpendiculaire à Oz , contenant F .
 Tout point A de ce plan forme son image (réelle ou virtuelle) «à l'infini» (même hors de l'axe optique).



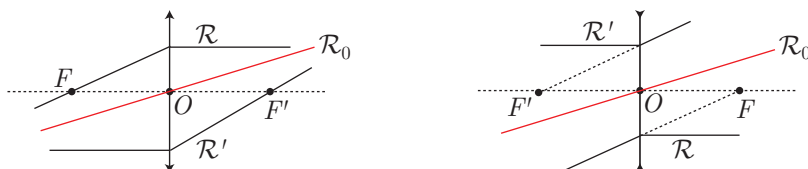
Cette définition permet :

- de localiser l'objet A : c'est le point d'intersection de \mathcal{R}_0 avec Π ;
- de tracer les rayons passant par A , qui émergent de la lentille : ils sont parallèles à \mathcal{R}_0 .

b- Constructions graphiques

Les constructions précédentes révèlent l'existence de trois **rayons remarquables** :

- le rayon \mathcal{R}_0 qui passe par O , n'est pas dévié ;
- le rayon \mathcal{R}' qui sort en passant par F' (réellement ou par prolongement) est arrivé sur la lentille parallèlement à l'axe optique ;
- le rayon incident \mathcal{R} , qui passe par F (réellement ou par prolongement), ressort parallèlement à l'axe optique.

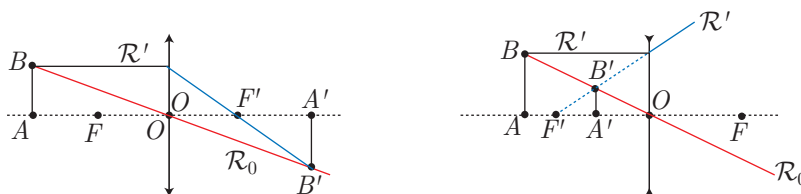


REMARQUE Il est rarement nécessaire d'utiliser simultanément ces trois rayons, sous peine de rendre les figures plus confuses. Dans la suite, nous avons fait le choix de privilégier l'emploi des rayons \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}' , quand c'est suffisant.

– Pour déterminer une image $A'B'$, dont l'objet AB est connu, il convient de :

- ▶ tracer d'abord le rayon $\mathcal{R}_0 = (BO)$; il contient nécessairement B' ;
- ▶ tracer ensuite le rayon \mathcal{R}' qui ressort de la lentille en passant par F' .

L'intersection de \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}' (ou de leurs prolongements) coïncide avec B' :

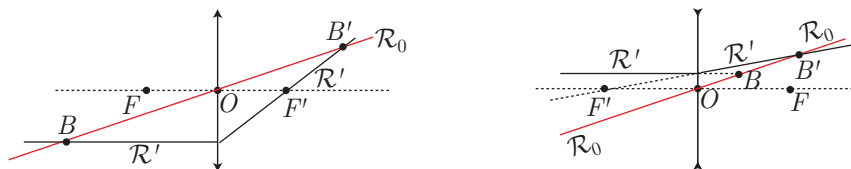


REMARQUE Si seul l'objet A de l'axe optique (Oz) est connu : il faut représenter un point B hors de (Oz), tel que $(AB) \perp (Oz)$, chercher B' par la méthode précédente et en déduire A' par projection orthogonale de B' sur (Oz) ; il coïncide avec A' par respect de l'aplanétisme.

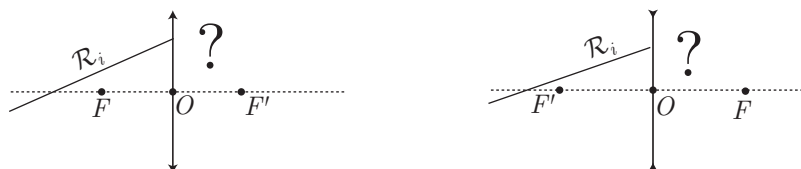
– Pour déterminer l'objet B conjugué d'une image B' connue et hors de l'axe (Oz) :

- ▶ Représenter d'abord le rayon \mathcal{R}_0 qui passe par B' ; il contient nécessairement B .
- ▶ Représenter le rayon $(B'F')$ (ou son prolongement) ; il est arrivé sur la lentille parallèlement à l'axe optique.

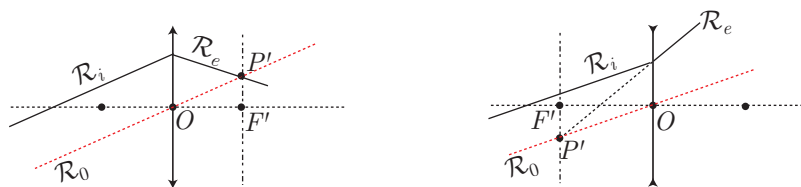
Le point B cherché correspond alors à l'intersection des rayons incidents \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}' (ou de leurs prolongements) :



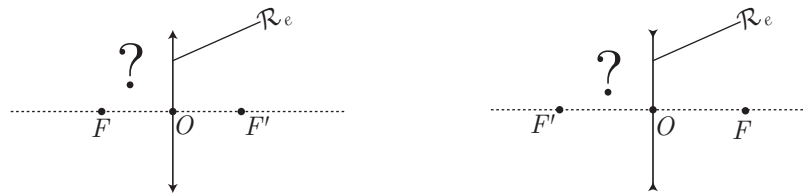
– Pour déterminer le rayon émergent \mathcal{R}_e , provenant d'un rayon incident \mathcal{R}_i connu :



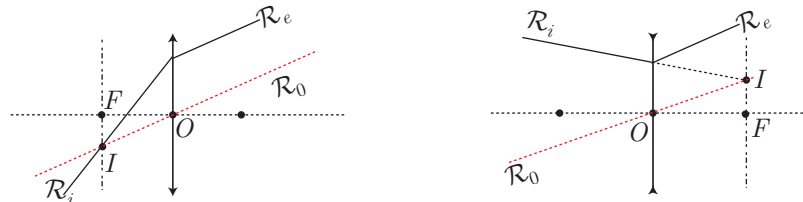
- ▶ Tracer le rayon \mathcal{R}_0 qui passe par O , parallèlement à \mathcal{R}_i .
- ▶ Représenter le point d'intersection P' de \mathcal{R}_0 avec le plan focal image.
- ▶ Faire émerger de la lentille le rayon \mathcal{R}_e qui passe par P' :



– Pour tracer le rayon incident \mathcal{R}_i , à l'origine d'un rayon émergent \mathcal{R}_e connu :



- ▶ Tracer le rayon \mathcal{R}_0 qui passe par le centre O sans être dévié, parallèlement à \mathcal{R}_e ;
- ▶ Repérer son intersection I dans le plan focal objet Π ;
- ▶ I est alors le point objet à l'origine des rayons \mathcal{R}_e et \mathcal{R}_0 ; le rayon \mathcal{R}_i (ou son prolongement) passe donc par I avant de se raccorder au rayon \mathcal{R}_e :



c- Relations de conjugaison



DÉFINITION

Le **grandissement transversal** associé à un objet AB et son image $A'B'$ est le rapport :

$$\gamma \hat{=} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

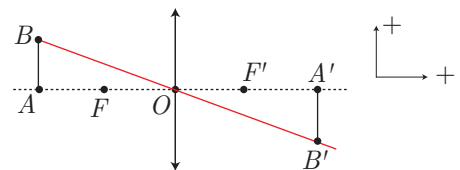
REMARQUE 1 L'utilisation des valeurs algébriques suppose une convention préalable des signes : en général $\overline{AB} > 0$ lorsque \overrightarrow{AB} est dirigé vers le haut de la figure.

REMARQUE 2 Le signe de γ indique si le dispositif optique produit des images dans le même sens que leur objet, ou dans le sens inverse.

1. Grandissement avec origine au centre

Le théorème de Thalès permet d'établir rapidement que :

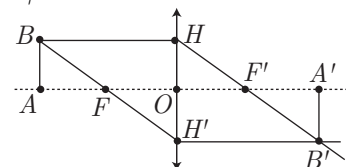
$$\gamma \hat{=} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$



2. Grandissement avec origine aux foyers

À nouveau, le théorème de Thalès¹ permet d'établir les expressions de γ :

$$\gamma \hat{=} \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$



La définition d'une **relation de conjugaison** a déjà été fournie en page 3.

1. Dans les triangles $(F'A'B')$ et $(F'HO)$:

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{F'A'}} = \frac{\overline{OH}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{F'O}} \Rightarrow \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$$

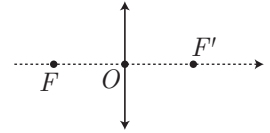
et dans les triangles (FAB) et $(FH'O)$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{OH'}}{\overline{FO}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{FO}} \Rightarrow \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$$

1. Relation de conjugaison de Descartes

Elle est démontrée en annexe 6, à la page 69 :

$$\boxed{\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}}$$



où $f' = \overline{OF'}$ est la **distance focale** de la lentille et $\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OF'}}$ sa **vergence** (en **dioptrie**).

Grâce à cette relation de conjugaison, on peut montrer qu'une image réelle ne peut être obtenue qu'à une distance minimale $D = 4f$ de son objet.

Attention : Si la lumière se propage vers la gauche (par exemple avec l'**autocollimation**), les rôles de F et F' sont permutés et la relation de conjugaison devient :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF}$$

2. Relation de conjugaison de Newton

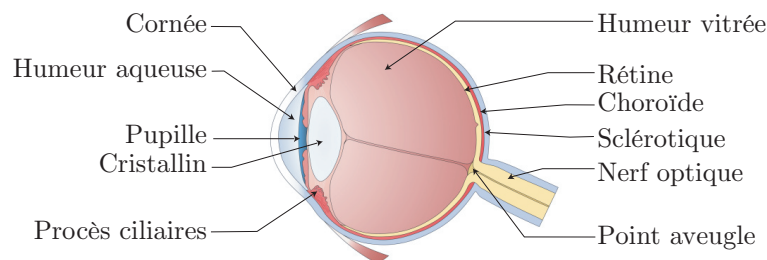
Les objets et les images sont repérées par rapport aux foyers F et F' . La relation de conjugaison est une conséquence directe des deux expressions du grandissement :

$$\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \Rightarrow \boxed{\overline{F'A'} \times \overline{FA} = \overline{F'O} \times \overline{FO}}$$

5- L'œil

a- Présentation

L'œil est séparé de l'extérieur par la **cornée** (transparente), comporte des fluides transparents (**humour aqueuse** et **humour vitrée**), ainsi que des tissus (**sclérotique** et **choroïde**) :



Pour assurer la vision, il comporte :

- une **pupille** par laquelle entre la lumière et dont le diamètre est ajusté par l'**iris** ;
- un **cristallin** qui joue le rôle d'une lentille convergente, dont la distance focale est modifiée grâce à des muscles (les **procès ciliaires**) ;
- la **rétine**, tissu composé de cellules photosensibles : les **bâtonnets** (pour la vision nocturne, ou **scotopique**) et les **cônes** (pour la vision diurne, ou **photopique**) ;
- le **nerf optique** qui transmet l'influx nerveux au cerveau et où se trouve le **point aveugle** .



DÉFINITION

L'accommodation consiste, pour les procès ciliaires, à fournir un effort musculaire afin de déformer le cristallin et le rendre plus convergent. C'est au repos que le cristallin est le moins convergent.

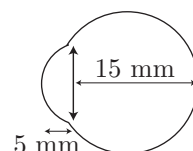
Une observation de longue durée devra ainsi s'effectuer sans accommodation.

Lors de la vision scotopique, un photon provoque la transformation de la **rhodopsine** en **opsine** et **rétilnal**. Ce phénomène de décomposition, puis recombinaison, produit des charges électriques qui sont transformées en influx nerveux. Les processus mis en jeu ont une durée non négligeable, à l'origine de la **persistance rétinienne** ; une durée d'au moins 50 ms doit séparer deux images que l'œil peut distinguer.

b- L'œil réduit

Afin de comprendre le fonctionnement de l'œil, un modèle simplifié est adopté :

- Le cristallin équivaut à une lentille convergente de distance focale variable.
- La rétine équivaut à une surface photosensible.

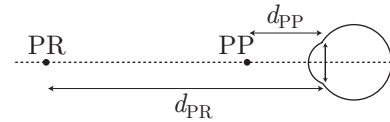


 DÉFINITION

Le **punctum proximum** (PP) est la position extrême la plus proche visible nettement par l'œil (qui est à son maximum d'accommodation).

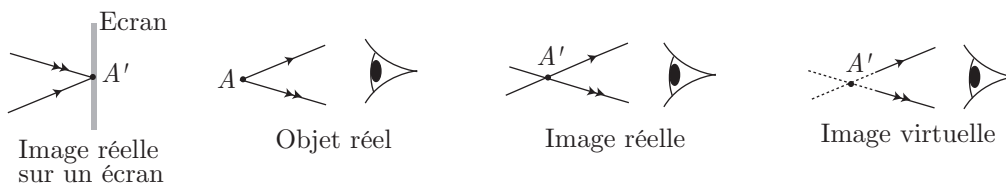
Le **punctum remotum** (PR) est la position la plus éloignée visible nettement par l'œil (qui n'accommode pas).

Le **pouvoir d'accommodation** varie non seulement d'un individu à l'autre, mais également au cours de la vie d'un même individu :

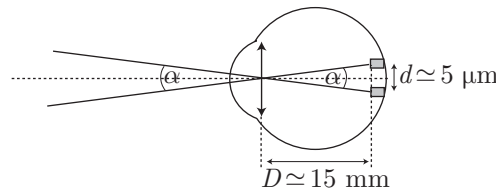


Œil juvénile	Œil adulte
$d_{PP} \simeq 15 \text{ cm}$	$d_{PP} \simeq 25 \text{ cm}$
$d_{PR} \rightarrow \infty$	$d_{PR} \rightarrow \infty$

L'œil est constitué de manière à interpréter les rayons qui divergent d'un point : il peut voir les objets réels, les images réelles (éventuellement projetées sur un écran), les images virtuelles (par exemple **la loupe**), mais pas les objets virtuels.



Sur la rétine, les cônes ont un diamètre $d \simeq 5 \mu\text{m}$. Ainsi, deux rayons lumineux doivent éclairer deux cellules différentes pour être distingués :



Le **pouvoir séparateur** (ou **pouvoir de résolution**) est l'angle minimum qui sépare deux rayons discriminés par l'œil :

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{d/2}{D} \Rightarrow \alpha \simeq \frac{5 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-3}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Enfin, ce pouvoir séparateur dépend de la longueur d'onde ; l'**efficacité lumineuse** est maximale à $\lambda \simeq 0,555 \mu\text{m}$ (jaune-verdâtre).

c- Amétropies

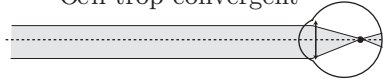
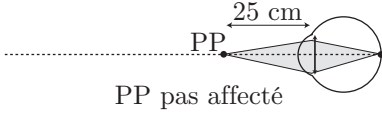
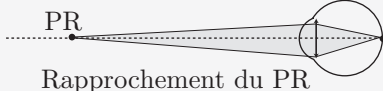


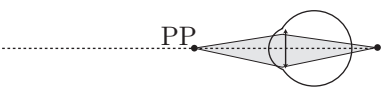

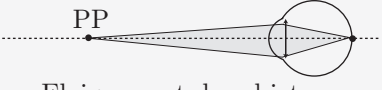

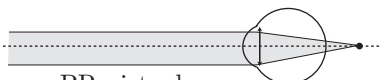
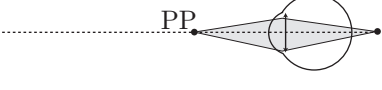
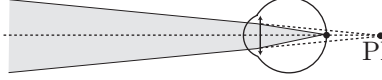



 DÉFINITION

Un œil **emmétrope** est un œil «sans défaut» ou «normal».

En revanche, une **amétropie** (**myopie, presbytie, hypermétropie,...**) est un défaut de l'œil qui affecte sa vision.

Quelques amétropies courantes (et corrections en grisé) sont recensées dans le tableau ci-dessous :

OEIL NORMAL		
----------------	--	--

OEIL MYOPE	Oeil trop convergent 	
	PR Rapprochement du PR 	
	Port de verres divergents 	
OEIL PRESBYTE	PR à l'infini PR pas affecté 	Oeil pas assez convergent PP 
	PR Eloignement des objets 	PP Eloignement des objets 
		Port de verres convergents 
OEIL HYPERMETROPE	Oeil pas assez convergent 	Oeil pas assez convergent PP 
	PR virtuel : 	PR 
	Port de verres convergents 	Port de verres convergents 

Sauf accident :

- La **myopie** est souvent acquise par un usage fréquent et prolongé de la vision de près (déformation irréversible du cristallin qui ne retrouve pas sa forme initiale au repos).
- La **presbytie** est une conséquence naturelle du vieillissement : baisse du tonus musculaire des procès ciliaires et perte d'élasticité rendent le cristallin moins convergent.
- L'**hypermétropie**, souvent innée, peut être la conséquence d'un œil trop court.
- L'**astigmatisme** peut résulter d'un défaut de sphéricité du cristallin.

6– L'appareil photo

a– Présentation

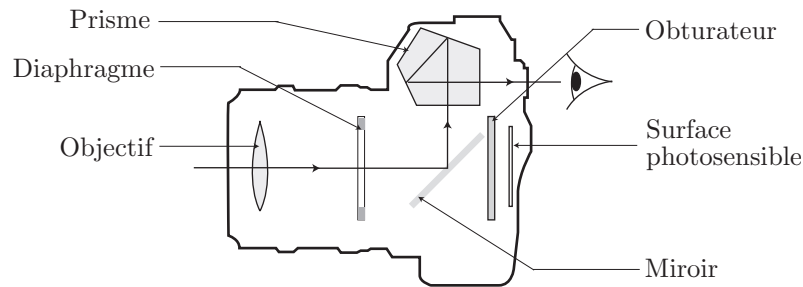
Un appareil photo comporte :

- un **objectif** : ensemble de lentilles² qui équivaut à une lentille convergente de distance focale f' ;
- un **diaphragme** dont le diamètre D détermine la **luminosité** de l'image, ainsi que la **profondeur de champ** ;
- un **obturateur** qui détermine le **temps de pose**, c'est-à-dire la durée d'exposition³ de la surface photosensible ;

2. Les lentilles sont associées de manière à corriger les **aberrations** de **sphéricité**, de **chromatisme**, d'**astigmatisme** et de **distorsion**.

3. Le temps de pose peut être très long (en astrophotographie par exemple) ou très court (objets en mouvement, par exemple).

- d'une **surface photosensible** (capteur CCD, feuille argentique,...), dont la taille des **pixels** détermine le pouvoir de résolution et la profondeur de champ.

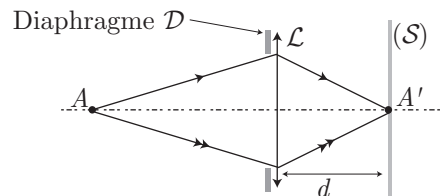


b- Caractéristiques

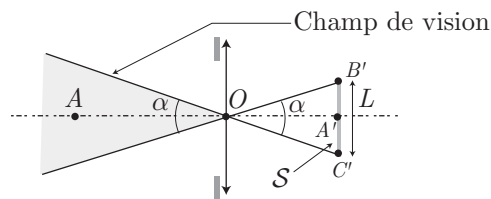
Pour plus de clarté, certaines propriétés sont simplement mentionnées ci-dessous. Leur démonstration fait l'objet de l'annexe 7.

Désormais, l'**appareil photo simplifié** comportera seulement un diaphragme, une lentille convergente (\mathcal{L}) et une surface photosensible (\mathcal{S}).

La **mise au point** sur un point A consiste à ajuster la distance d entre \mathcal{L} et \mathcal{S} , ainsi que la distance focale afin de réaliser une image ponctuelle A' de A :



Le **champ angulaire** (α) est l'angle du **champ de vision** de l'appareil photo ; tout point lumineux du champ de vision est susceptible d'impressionner la surface photosensible \mathcal{S} , de largeur L :



On montre, en annexe, que :

- plus la distance focale f' est grande, plus le champ angulaire est petit ;
- plus la mise au point est proche de l'appareil, plus le champ de vision est rétréci.



DÉFINITION

L'**ouverture** N du diaphragme est le rapport de la distance focale de l'objectif à son diamètre :

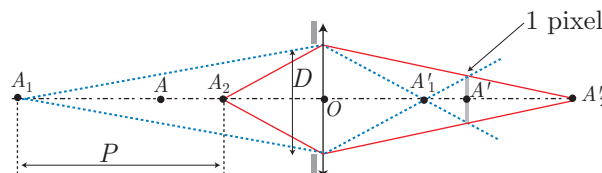
$$N \cong \frac{f'}{D}$$

L'ouverture détermine la **luminosité** de la photo, qui dépend également du temps de pose.



DÉFINITION

La **profondeur de champ** P est la distance maximale séparant deux points A_1 et A_2 qui forment sur \mathcal{S} une tâche plus petite qu'un pixel.



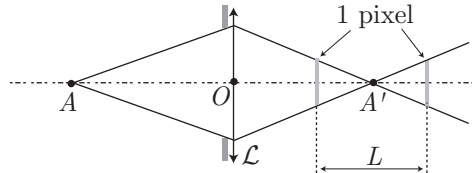
On montre, en annexe 7, que :

- plus D est grand, plus la profondeur de champ est petite ;
- plus la distance de mise au point OA est petite, plus la profondeur de champ est petite (l'environnement d'un objet paraît d'autant plus flou que l'objet est proche de l'appareil).



DÉFINITION

La **latitude de mise au point** est la distance L sur laquelle peut être déplacée \mathcal{L} pour que l'image d'un point A paraisse ponctuelle (donc plus petite qu'un pixel).



On montre, en annexe, que :

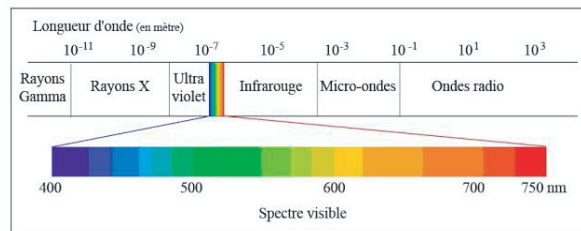
- plus l'objet est éloigné, plus la latitude de mise au point est petite ;
- plus le diamètre D est grand, plus L est petite.

II Modèle scalaire de la lumière

1– Propagation de la lumière

a– Ondes progressives

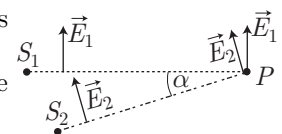
La lumière est une onde électromagnétique dont la fréquence⁴ est comprise entre environ $3,8 \cdot 10^{14}$ Hz et environ $7,5 \cdot 10^{14}$ Hz.



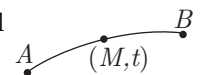
Comme telle, elle peut être décrite par la propagation de son champ électrique $\vec{E}(M, t)$ (le champ magnétique découlant des équations de Maxwell).

Considérons ainsi deux sources S_1 et S_2 éclairant un même point P avec des champs \vec{E}_1 et \vec{E}_2 .

On supposera que l'angle α entre (S_1P) et (S_2P) est suffisamment faible pour que $\vec{E}_1(P, t)$ et $\vec{E}_2(P, t)$ soient en permanence colinéaires et identiquement polarisés.



Il est alors possible d'ignorer l'aspect vectoriel de ces champs pour ne s'intéresser qu'au signal scalaire $s(M, t)$ qui se propage entre A et B .



On supposera, en outre, que ce signal est monochromatique⁵ (donc de pulsation unique et constante ω) :

$$s(M, t) = S_0(M) \cos[\omega t - \varphi(M)] = S_0(M) \cos[\phi(M, t)]$$

où $\phi(M, t)$ est la **phase** du signal en M à la date t et $\varphi(M)$ son déphasage à l'origine des dates⁶.

Enfin, on négligera les phénomènes d'atténuation qui pourraient altérer l'amplitude $S_0(M)$, qui sera ainsi considérée comme invariante. Dans ce cadre, le signal pourra également être décrit par son image complexe :

$$\underline{s}(M, t) = S_0 e^{i[\omega t - \varphi(M)]} \Rightarrow s(M, t) = \Re\{\underline{s}\} = S_0 \cos[\omega t - \varphi(M)]$$

4. Les longueurs d'onde dans le vide correspondent à 400 nm et 800 nm, c'est-à-dire $\lambda = \frac{c}{\nu}$.

5. L'étude des signaux monochromatiques est une première approche permettant une étude ultérieure de signaux plus complexes, soit par série de Fourier, soit par transformée de Fourier.

6. On remarque que $\varphi(M)$ est une fonction de M qui n'est pas nécessairement connue ; dans le cas d'une onde plane, elle s'écrirait :

$$\varphi(M) = \vec{k} \cdot \vec{OM}$$

Une onde monochromatique de pulsation ω qui se propage dans le vide possède une longueur d'onde λ_0 qui vérifie la relation de dispersion :

$$\omega = k_0 c = \frac{2\pi}{\lambda_0} c \quad (2)$$

tandis que si elle se propage avec une célérité v dans un milieu d'indice de réfraction $n = \frac{c}{v}$, sa longueur d'onde λ vérifie la relation de dispersion :

$$\omega = k v = \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{c}{n} \Rightarrow \frac{2\pi c}{\lambda_0} = \frac{2\pi c}{n\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}}$$

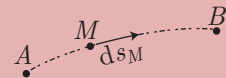
b- Chemin optique



DÉFINITION

Si un rayon lumineux parcourt la courbe \mathcal{C} entre deux points A et B , dans un milieu d'indice $n(M)$, son **chemin optique** est défini par :

$$(AB) \hat{=} \int_A^B n(M) ds_M$$

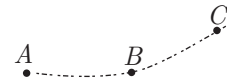


Si t_A et t_B désignent les dates auxquelles la lumière passe en A et en B respectivement, la définition de l'indice de réfraction conduit à :

$$n = \frac{c}{v} \text{ et } ds = v dt \Rightarrow (AB) = \int_{t_A}^{t_B} \frac{c}{v} \times v dt \Rightarrow \boxed{(AB) = c(t_B - t_A)} \quad (3)$$

Si le rayon passe par les points A , B et C :

$$(AC) = \int_A^B n ds + \int_B^C n ds \Rightarrow \boxed{(AC) = (AB) + (BC)}$$



Dans un milieu homogène ($n(M) = n$ indépendamment de M), la lumière se déplace en ligne droite (ce qui est démontré en annexe à la page 53), auquel cas :

$$(AB) = \int_A^B n(M) ds_M = n \times \int_A^B ds_M \Rightarrow \boxed{(AB) = n \times AB}$$

Si un même rayon passe en A et en B aux dates t_A et t_B , les phases $\phi(A, t_A)$ et $\phi(B, t_B)$ doivent s'identifier afin d'assurer l'identité du signal en A et en B :

$$\begin{aligned} \underline{s}(A, t_A) = \underline{s}(B, t_B) &\Rightarrow S_0 e^{i\phi(A, t_A)} = S_0 e^{i\phi(B, t_B)} \Rightarrow \phi(A, t_A) = \phi(B, t_B) \\ &\Rightarrow \omega t_A - \varphi(A) = \omega t_B - \varphi(B) \Rightarrow \Delta\varphi = \varphi(B) - \varphi(A) = \omega \times (t_B - t_A) \end{aligned}$$

où les identités (3) et (2) fournissent :

$$\Delta\varphi = k_0 c \times \frac{(AB)}{c} \Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = k_0 (AB)} \quad (4)$$

REMARQUE *Un déphasage supplémentaire de π peut être observé :*

- lors de la réflexion du rayon sur une surface métallique ;
- lors de la réflexion du rayon à l'interface d'un milieu plus réfringent.

Ce déphasage $\Delta\varphi = \pi$ équivaut alors à un accroissement $L_{\text{réfl.}}$ du chemin optique, tel que :

$$\pi = k_0 L_{\text{réfl.}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} L_{\text{réfl.}} \Rightarrow \boxed{L_{\text{réfl.}} = \frac{\lambda_0}{2}}$$

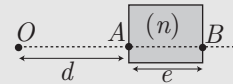
EXERCICE 

Calculer les déphasages ϕ_{BO} , ϕ_{OBO} , ϕ_{OAO} .

La lame d'épaisseur e est d'indice $n > 1$.

Les autres trajets se font dans l'air (d'indice 1).

La lumière utilisée est monochromatique, de longueur d'onde λ_0 dans le vide.


Corrigé

La relation (4) fournit :

$$\phi_{BO} = k_0 (BO) = k_0 \times [(BA) + (AO)] = k_0 \times (ne + d)$$

Sachant que la réflexion s'accompagne d'un déphasage de π , il s'ensuit que :

$$\phi_{OAO} = k_0 \times [(OA) + (AO)] + \pi = k_0 \times 2d + \pi$$

tandis que :

$$\phi_{OBO} = k_0 \times [(OA) + (AB) + (BA) + (AO)] = k_0 \times (2d + 2ne)$$

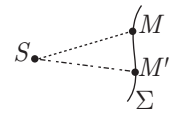
c- Théorème de Malus

DÉFINITION

Une **surface d'onde** est l'ensemble des points qui présentent la même phase à chaque instant.

D'après cette définition, les points M et M' appartiennent à une même surface d'onde Σ si :

$$\forall t, \phi(M, t) = \phi(M', t)$$



c'est-à-dire :

$$\omega t - \varphi(M) = \omega t - \varphi(M') \Rightarrow \boxed{\varphi(M) = \varphi(M') \text{ si } (M, M') \in \Sigma}$$

D'après la relation (4) :

$$\begin{cases} \varphi(M) - \varphi(S) = k_0 (SM) \\ \varphi(M') - \varphi(S) = k_0 (SM') \end{cases} \Rightarrow \boxed{(SM) = (SM')}$$

Cette identité suggère une autre définition :


DÉFINITION

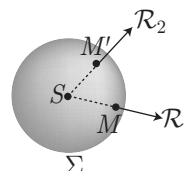
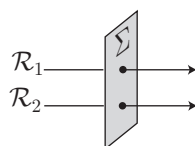
Une surface d'onde est l'ensemble des points ayant le même chemin optique depuis une source lumineuse commune.

À retenir : Le **théorème de Malus** stipule que les rayons lumineux sont orthogonaux à leurs surfaces d'onde.

La démonstration de ce théorème n'est pas exigible mais sa démonstration est donnée en annexe.

Ce théorème implique que :

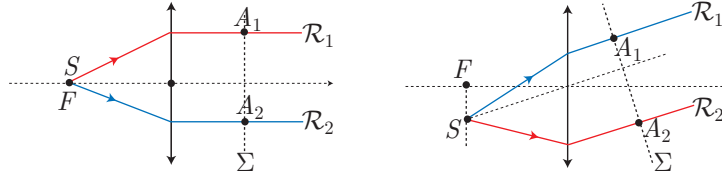
- des rayons parallèles ont des surfaces d'onde planes dans un milieu homogène ;
- des rayons issus d'une source S , dans un milieu homogène, ont des surfaces d'onde sphériques.



REMARQUE Cette dernière assertion se démontre aisément à partir de la deuxième définition donnée pour une surface d'onde :

$$\begin{aligned} (M, M') \in \Sigma &\Rightarrow (SM) = (SM') \Rightarrow n SM = n SM' \text{ en milieu homogène} \\ &\Rightarrow SM = SM' \Rightarrow (M, M') \text{ appartiennent à une sphère de centre } S \end{aligned}$$

Considérons maintenant une source S émettant deux rayons qui ressortent d'une lentille convergente, parallèlement l'un à l'autre :

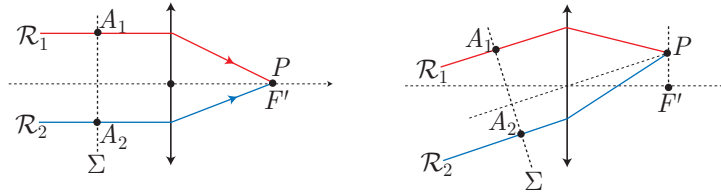


Si A_1 et A_2 appartiennent à une même surface d'onde plane (Σ), la deuxième définition de Σ implique que :

$$(SA_1) = (SA_2)$$

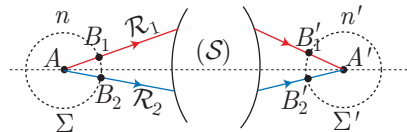
Le **principe du retour inverse** implique, quant à lui, que les rayons lumineux qui passent par deux points A_1 et A_2 appartenant à une même surface d'onde Σ plane (donc perpendiculaire à \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 simultanément), et convergeant vers un même point P , ont des chemins optiques égaux :

$$(A_1P) = (A_2P)$$



Attention : Pour valider cette assertion, il ne suffit pas que A_1 et A_2 appartiennent à un même plan perpendiculaire à \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 . Il faut également que ce plan soit une surface d'onde commune.

Enfin, considérons deux points A , A' conjugués optiques à travers un système (S) :



Soient deux rayons \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 qui relient A et A' , lesquels points se trouvent dans des milieux d'indices n et n' homogènes au voisinage de A et A' . Les surfaces d'onde des rayons qui émergent de A ou qui convergent vers A' sont des sphères Σ et Σ' centrées sur A et A' . Des égalités $AB_1 = AB_2$ et $B'_1A' = B'_2A'$ il découle alors que :

$$\begin{cases} (AA')_1 = (AB_1) + (B_1B'_1) + (B'_1A') = n AB_1 + (B_1B'_1) + n' B'_1A' \\ (AA')_2 = (AB_2) + (B_2B'_2) + (B'_2A') = n AB_2 + (B_2B'_2) + n' B'_2A' \end{cases} \Rightarrow (AA')_1 - (AA')_2 = (B_1B'_1) - (B_2B'_2)$$

L'identité (4) conduit alors à :

$$\begin{cases} \varphi(B'_1) - \varphi(B_1) = k_0 (B_1B'_1) \\ \varphi(B'_2) - \varphi(B_2) = k_0 (B_2B'_2) \end{cases} \Rightarrow (B_1B'_1) = (B_2B'_2) \Rightarrow (AA')_1 = (AA')_2$$

ce qui signifie encore que tous les rayons passant par un point et son conjugué ont le même chemin optique.

d- Intensité lumineuse



DÉFINITION

L'intensité de l'onde lumineuse produite en M par le signal $s(M, t)$ vérifie la définition donnée en annexe (cf. page 58) :

$$I(M) \hat{=} \langle s^2(M, t) \rangle \quad (5)$$

Notamment, si le signal est monochromatique :

$$s(M, t) = S_0(M) \cos[\omega t - \varphi(M)] \Rightarrow I(M) = \frac{1}{2} S_0^2(M)$$

auquel cas on remarque que :

$$\underline{s} = S_0 e^{i[\omega t - \varphi(M)]} \Rightarrow |\underline{s}|^2 = S_0^2 \Rightarrow I(M) = \frac{1}{2} |\underline{s}|^2$$

Cette dernière formulation n'est valable que pour un signal monochromatique. Ainsi, l'intensité de l'onde lumineuse produite par un signal :

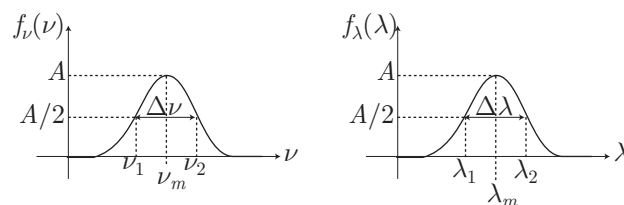
$$\underline{s} = S_{01} e^{i[\omega_1 t - \varphi(M)]} + S_{02} e^{i[\omega_2 t - \varphi(M)]}$$

ne pourra se calculer qu'à l'aide de la définition (5)

2- Émission de la lumière

a- Généralités

La lumière est émise par paquets, appelés **trains d'ondes**, dont la durée τ_c limitée est liée à l'étendue du spectre de cette lumière, lequel spectre présente une **densité spectrale** f qui dépend de la fréquence ν ou de la longueur d'onde.



Cette densité spectrale permet de déterminer l'intensité δI de l'onde pour un intervalle de fréquences $[\nu; \nu + d\nu]$ ou de longueurs d'onde $[\lambda; \lambda + d\lambda]$:

$$\delta I = f_\nu(\nu) d\nu \text{ ou } \delta I = f_\lambda(\lambda) d\lambda$$

L'intensité totale de l'onde, pour l'ensemble du spectre, s'obtient alors par intégration :

$$I = \int_0^\infty f_\nu(\nu) d\nu = \int_0^\infty f_\lambda(\lambda) d\lambda \quad (6)$$



DÉFINITION

Si A représente le maximum de la densité spectrale, à la fréquence ν_m (resp. la longueur d'onde λ_m), le **largeur à mi-hauteur** $\Delta\nu$ (resp. $\Delta\lambda$) désigne l'intervalle $[\nu_1, \nu_2]$ (resp. $[\lambda_1, \lambda_2]$) à l'intérieur duquel $f \geq \frac{A}{2}$:

$$\begin{aligned} \forall \nu \in [\nu_1, \nu_2], f_\nu(\nu) \geq \frac{A}{2} &\Rightarrow \Delta\nu \hat{=} \nu_2 - \nu_1 \\ \forall \lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], f_\lambda(\lambda) \geq \frac{A}{2} &\Rightarrow \Delta\lambda \hat{=} \lambda_2 - \lambda_1 \end{aligned}$$

En général, $\Delta\lambda \ll \lambda_m$ et $\Delta\nu \ll \nu_m$ permettent de poser :

$$\begin{cases} \lambda_1 = c/\nu_1 \\ \lambda_2 = c/\nu_2 \end{cases} \Rightarrow \Delta\lambda = c \times \left(\frac{1}{\nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \right) = c \times \frac{\Delta\nu}{\nu_1\nu_2} \text{ où } \nu_1 \simeq \nu_m \text{ et } \nu_2 \simeq \nu_m$$

$$\simeq \frac{c}{\nu_m} \times \frac{\Delta\nu}{\nu_m} = \lambda_m \times \frac{\Delta\nu}{\nu_m} \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta\lambda}{\lambda_m} \simeq \frac{\Delta\nu}{\nu_m}} \quad (7)$$

La largeur $\Delta\nu$ non nulle du spectre d'émission révèle qu'une source lumineuse émet des trains d'onde dont la durée :

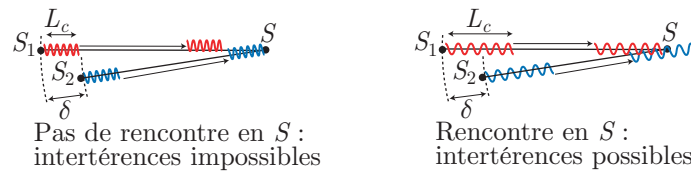
$$\boxed{\tau_c = \frac{1}{\Delta\nu}} \quad (8)$$

est aussi appelée **temps de cohérence**.

Dans un milieu où la lumière se propage à la célérité c , un train d'ondes émis pendant τ_c présente une **longueur de cohérence** :

$$\boxed{L_c \hat{=} c \times \tau_c} \quad (9)$$

Pour que des trains d'onde émis simultanément par des sources S_1 et S_2 puissent interférer en un point S , il faut que la **différence de marche** $\delta = (S_1S) - (S_2S)$ soit plus petite que L_c :



Enfin, les relations (8) et (9) :

$$\delta < L_c \text{ avec } L_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu} \quad (10)$$

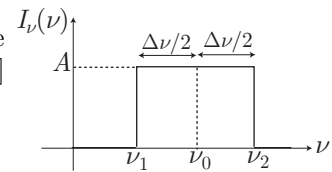
associées à la relation (7) : $\Delta\nu = \nu_m \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda_m}$ conduisent à :

$$L_c = \frac{c}{\nu_m} \times \frac{\lambda_m}{\Delta\lambda} \Rightarrow \boxed{L_c = \frac{\lambda_m^2}{\Delta\lambda}} \text{ car } \frac{c}{\nu_m} = \lambda_m$$

b- Exemple : spectre rectangulaire

Considérons deux sources cohérentes S_1 et S_2 émettant chacune une lumière dont le spectre présente une valeur constante A dans un intervalle $[\nu_1; \nu_2]$ centré sur une valeur ν_0 .

L'identité (6) montre que chaque source émet une onde d'intensité totale :



$$I_0 = \int_0^{\infty} f(\nu) d\nu = \int_{\nu_1}^{\nu_2} A d\nu = A \times \Delta\nu \Rightarrow A = \frac{I_0}{\Delta\nu} \text{ où } \Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 \ll \nu_0$$

On montre (cf. page 19) que l'intensité de l'onde arrivant en S , dans l'intervalle $d\nu$, vaut :

$$\delta I = 2 \delta I_0 \times \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu \right) \right] \text{ où } \delta I_0 = f_\nu(\nu) d\nu$$

Donc, étendue à l'ensemble du spectre, cette intensité vaut :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} 2f_\nu(\nu) \times \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu \right) \right] d\nu = \frac{2I_0}{\Delta\nu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left[1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu \right) \right] d\nu \\ &= \frac{2I_0}{\Delta\nu} \times \left\{ \Delta\nu + \frac{c}{2\pi\delta} \left[\sin \left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_2 \right) - \sin \left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_1 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

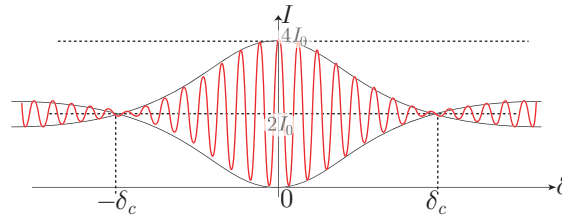
L'identité trigonométrique :

$$\begin{aligned}\sin p - \sin q &= 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \text{ avec } p = \frac{2\pi\delta}{c} \nu_2 \text{ et } q = \frac{2\pi\delta}{c} \nu_1 \\ \Rightarrow \frac{p-q}{2} &= \frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \text{ et } \frac{p+q}{2} \simeq \frac{2\pi\delta}{c} \nu_0\end{aligned}$$

conduit à :

$$I = 2I_0 \times \left[1 + \frac{c}{\pi\delta \Delta\nu} \sin\left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu\right) \times \cos\left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_0\right) \right] = 2I_0 \left[1 + \text{sin}_c\left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu\right) \cos\left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_0\right) \right]$$

où la fonction $\text{sin}_c x = \frac{\sin x}{x}$ s'annule une première fois pour $x = \pm\pi$:



Le contraste s'annule alors pour une valeur δ_c telle que :

$$\pi \delta_c \frac{\Delta\nu}{c} = \pi \Rightarrow \delta_c = \frac{c}{\Delta\nu}$$

et les interférences paraissent alors possibles lorsque :

$$|\delta| < \delta_c = \frac{c}{\Delta\nu}$$

c'est-à-dire lorsque les trains d'onde présentent une longueur $L_c > \delta$, telle que :

$$L_c = \frac{c}{\Delta\nu} = c\tau \Rightarrow \tau = \frac{1}{\Delta\nu}$$

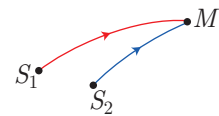
ce qui confirme les relations (10).

III Interférences de deux ondes lumineuses

1- Superposition de deux ondes

Soient S_1 et S_2 deux sources lumineuses qui éclairent un même point M avec des amplitudes respectives :

$$\begin{cases} s_1(M, t) = S_{01} \cos[\omega_1 t - \varphi_1(M, t)] = S_{01} \cos \phi_1 \\ s_2(M, t) = S_{02} \cos[\omega_2 t - \varphi_2(M, t)] = S_{02} \cos \phi_2 \end{cases}$$



auxquelles sont alors associées les intensités lumineuses :

$$I_i = \langle s_i^2 \rangle = S_{0i}^2 \langle \cos^2 \phi_i \rangle = \frac{S_{0i}^2}{2} \Rightarrow S_{01} S_{02} = 2 \sqrt{I_1 I_2}$$

et les phases :

$$\varphi_i(M, t) = \varphi(S_i, t) + k_0(S_i M) \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = \omega_1 t - \varphi(S_1, t) - k_0(S_1 M) \\ \phi_2 = \omega_2 t - \varphi(S_2, t) - k_0(S_2 M) \end{cases}$$

Le signal parvient donc en M avec l'amplitude :

$$\begin{aligned}s(M, t) &= s_1(M, t) + s_2(M, t) = S_{01} \cos \phi_1 + S_{02} \cos \phi_2 \\ \Rightarrow s^2 &= S_{01}^2 \cos^2 \phi_1 + S_{02}^2 \cos^2 \phi_2 + 2 S_{01} S_{02} \cos \phi_1 \cos \phi_2 \\ \Rightarrow s^2 &= S_{01}^2 \cos^2 \phi_1 + S_{02}^2 \cos^2 \phi_2 + S_{01} S_{02} \cos(\phi_1 + \phi_2) + S_{01} S_{02} \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ &\text{car } \cos \phi_1 \times \cos \phi_2 = \frac{1}{2} [\cos(\phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2)]\end{aligned}$$

et donc une intensité :

$$\begin{aligned} I(M) = \langle s^2 \rangle &= \frac{S_{01}^2}{2} + \frac{S_{02}^2}{2} + S_{01} S_{02} \langle \cos(\phi_1 + \phi_2) \rangle + S_{01} S_{02} \langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} [\langle \cos(\phi_1 + \phi_2) \rangle + \langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle] \end{aligned}$$

Or :

$$\phi_1 + \phi_2 = (\omega_1 + \omega_2)t - [\varphi(S_1, t) + \varphi(S_2, t)] - k_0 [(S_1 M) + (S_2 M)] \Rightarrow \langle \phi_1 + \phi_2 \rangle = 0$$

car $\phi_1 + \phi_2$ est une fonction qui dépend du temps.

De même :

$$\phi_1 - \phi_2 = (\omega_1 - \omega_2)t - [\varphi(S_1, t) - \varphi(S_2, t)] + k_0 [(S_2 M) - (S_1 M)]$$

Deux cas se présentent alors :

- Si $\omega_1 \neq \omega_2$ ou $\varphi(S_1, t) \neq \varphi(S_2, t)$, alors $\phi_1 - \phi_2$ dépend également du temps, auquel cas :

$$\langle \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{I = I_1 + I_2} \quad (11)$$

- Si $\omega_1 = \omega_2$ et $\varphi(S_1, t) = \varphi(S_2, t)$:

$$\phi_1 - \phi_2 = k_0 \delta \text{ avec } \boxed{\delta = (S_2 M) - (S_1 M)}$$

et l'intensité lumineuse est donnée par la **formule de Fresnel** :

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(k_0 \delta)} \quad (12)$$

La relation (11) montre que lorsque les deux sources ne sont pas cohérentes, leurs intensités s'additionnent simplement, sans faire apparaître le **terme d'interférence** qui module l'intensité de la relation (12).

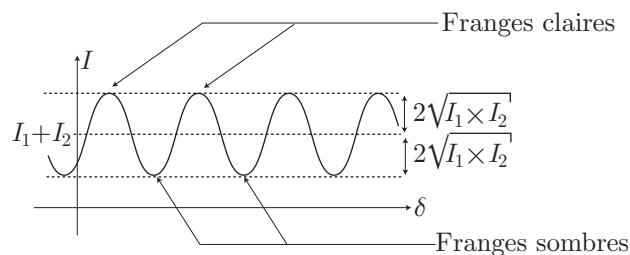


DÉFINITION

Deux sources sont dites **cohérentes** si elles sont ponctuelles, éternelles, de même pulsation ω et de déphasage $\varphi(S_1, t) - \varphi(S_2, t)$ constant.

Lorsque des interférences se produisent, apparaissent sur l'écran d'observation des franges claires et des franges plus sombres d'intensité respectives :

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \text{ et } I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$



DÉFINITION

L'**ordre d'interférence** d'une frange est un nombre défini par :

$$\boxed{p \hat{=} \frac{\delta}{\lambda_0}}$$

De cette définition, il découle que :

$$k_0 \delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 2\pi \times p \Rightarrow \boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi p)} \quad (13)$$

À retenir : Les **franges claires** sont associées à un ordre d'interférence entier et les **franges sombres** sont associées à un ordre demi-entier (1,5 ; 2,5...)



DÉFINITION

Le **contraste**, défini par :

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

est une grandeur positive ou nulle caractérisant la distinction des franges claires ou sombres.

Cette définition conduit à :

$$C = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

Or, puisque :

$$(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 \geq 0 \Rightarrow I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \geq 0 \Rightarrow I_1 + I_2 \geq 2\sqrt{I_1 I_2} \Rightarrow C \leq 1$$

le contraste prend sa valeur maximale $C = 1$ lorsque $I_1 = I_2 = I_0$. Dans ce cas, la formule de Fresnel devient :

$$I = 2I_0 \times [1 + \cos(k_0 \delta)] \tag{14}$$

REMARQUE 1 Afin de mieux discerner les franges, les expériences s'efforceront de réaliser cette condition.

REMARQUE 2 L'expression (13) de la formule de Fresnel :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(2\pi p)$$

montre que tous les points de l'espace correspondant à un même ordre d'interférence présentent la même intensité I .

Il est alors possible d'associer à chaque **frange d'interférence** (claire ou sombre) un ordre d'interférence; la frange conserve son ordre, même si elle se déforme au cours d'expériences.

Deux franges successives de même intensité (claires, par exemple) sont ainsi associées à des ordres qui diffèrent d'une unité ($\Delta p = \pm 1$).



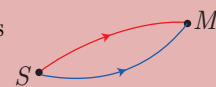
REMARQUE 3 Pour former des interférences, il ne suffit pas d'utiliser des sources cohérentes; il faut également que les trains d'onde puissent se rencontrer, c'est-à-dire que $\delta < L_c$.

2- Interférences par division du front d'onde



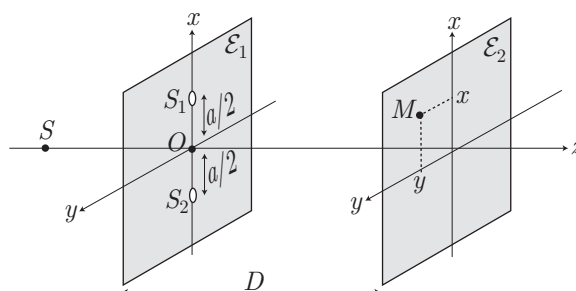
DÉFINITION

Deux rayons interfèrent en un point M par **division du front d'onde** lorsqu'ils proviennent de deux rayons différents d'une même source S .



a- Dispositif des trous d'Young

Les **trous d'Young** sont deux trous S_1 et S_2 infiniment fins, percés dans un écran opaque (\mathcal{E}_1), distants de a et éclairés par une source S . On supposera, dans un premier temps, que $SS_1 = SS_2$ et les observations sont réalisées sur un écran plan (\mathcal{E}_2), parallèle à \mathcal{E}_1 et distant de D . Un point M de cet écran est repéré par ses coordonnées (x, y) .



Dans le repère (O, x, y, z) , les vecteurs $\overrightarrow{S_1M} = \begin{pmatrix} x - a/2 \\ y \\ D \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{S_2M} = \begin{pmatrix} x + a/2 \\ y \\ D \end{pmatrix}$ conduisent à la différence de marche :

$$\delta = (SS_2M) - SS_1M = [(SS_2) + S_2M] - [(SS_1) + S_1M] = S_2M - S_1M \text{ car } (SS_1) = (SS_2)$$

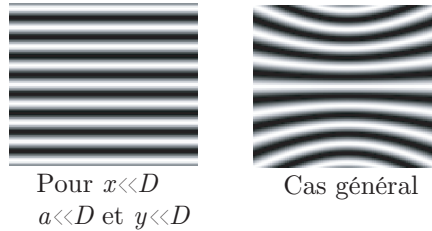
Première méthode : Ces vecteurs fournissent directement :

$$S_1M = \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 + D^2 \right]^{1/2} \text{ et } \left[\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 + D^2 \right]^{1/2} \quad (15)$$

Ainsi, une frange d'interférence d'ordre p vérifie :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} \Rightarrow \delta = p\lambda_0 = \text{cte} \Rightarrow \left[\left(x - \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 + D^2 \right]^{1/2} - \left[\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 + y^2 + D^2 \right]^{1/2} = \text{cte}$$

Les courbes correspondantes sont des hyperboloïdes de révolution, d'axe (Ox) , de foyers S_1, S_2 et dont l'intersection avec le plan \mathcal{E}_2 sont des branches d'hyperboles :



Dans la pratique, cependant, on choisira $x \ll D$, $a \ll D$ et $y \ll D$ afin de respecter la condition $\delta < L_c$. Les expressions (15) peuvent alors être développées à l'ordre 2 :

$$S_1M = D \times \left[1 + \frac{y^2}{D^2} + \frac{1}{D^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \simeq D \times \left[1 + \frac{y^2}{2D^2} + \frac{1}{2D^2} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right] = D + \frac{y^2}{2D} + \frac{1}{2D} \left(x - \frac{a}{2} \right)^2$$

et

$$S_2M = D \times \left[1 + \frac{y^2}{D^2} + \frac{1}{D^2} \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2} \simeq D + \frac{y^2}{2D} + \frac{1}{2D} \left(x + \frac{a}{2} \right)^2$$

Il s'ensuit que :

$$\delta = S_2M - S_1M \simeq \frac{1}{2D} \left[\left(x + \frac{a}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right] \Rightarrow \boxed{\delta \simeq \frac{ax}{D} \Rightarrow p = \frac{ax}{\lambda_0 D}} \quad (16)$$

Deuxième méthode : On se place à nouveau dans les conditions qui assurent $\delta \ll L_c$ et posons :

$$S_2M^2 - S_1M^2 = (S_2M - S_1M) \times (S_2M + S_1M) = (\overrightarrow{S_2M} - \overrightarrow{S_1M}) \cdot (\overrightarrow{S_2M} + \overrightarrow{S_1M})$$

où $S_2M - S_1M = \delta$ tandis que $S_2M + S_1M \simeq 2D$ (si x, a et y sont suffisamment petits). Il s'ensuit que :

$$\delta \times 2D \simeq \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2D \end{pmatrix} = 2ax \Rightarrow \boxed{\delta \simeq \frac{ax}{D}}$$

Dans ces conditions, les franges d'interférence étant un ensemble de points ayant le même ordre p :

$$p = \text{cte} \Rightarrow x = p \frac{\lambda_0 D}{a} = \text{cte}$$

Les franges sont donc des segments de droite.



DÉFINITION

La **frange centrale** est la frange qui correspond à $p = 0$; elle ne se trouve pas nécessairement au centre de la figure d'interférence !

Ici, la frange centrale se trouve à l'abscisse :

$$x_c = 0 \times \frac{\lambda_0 D}{a} = 0$$

Enfin, deux franges claires successives ont des ordres d'interférence successifs p et $p + 1$ et donc des abscisses :

$$x_p = p \frac{\lambda_0 D}{a} \text{ et } x_{p+1} = (p + 1) \frac{\lambda_0 D}{a} \quad (17)$$



DÉFINITION

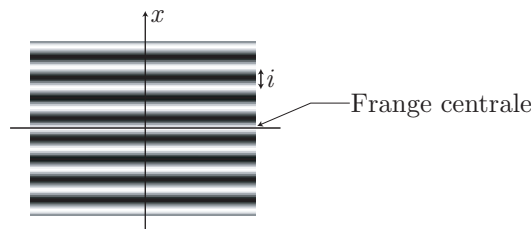
On appelle **interfrange** la distance qui sépare deux franges claires successives.

L'interfrange vaut donc ici :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda_0 D}{a}$$

On peut retrouver rapidement ce résultat à partir de la relation (16), dans laquelle l'interfrange $i = \Delta x$ correspond à $\Delta p = 1$:

$$p = \frac{ax}{\lambda_0 D} \Rightarrow 1 = \frac{ai}{\lambda_0 D} \Rightarrow i = \frac{\lambda_0 D}{a} \quad (18)$$

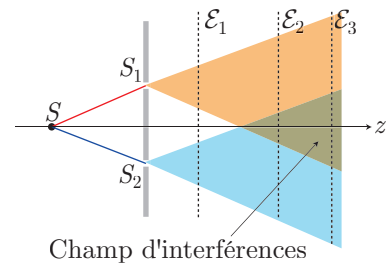


DÉFINITION

Le **champ d'interférences** est la région de l'espace où les rayons issus de S_1 et de S_2 peuvent se rencontrer pour interférer après diffraction.

Pour visualiser des interférences sur un écran, il faut le positionner dans le champ d'interférences : l'écran \mathcal{E}_1 ne convient pas, alors que les écrans \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_3 conviennent.

L'existence de plusieurs plans comme \mathcal{E}_2 et \mathcal{E}_3 montre que les franges ne sont pas localisées sur un plan unique.



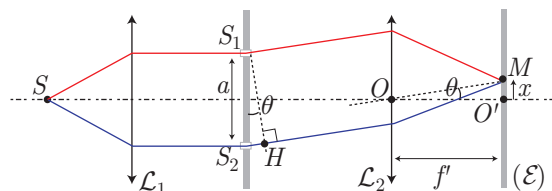
REMARQUE

En remplaçant les trous d'Young par des **fentes d'Young** parallèles à (Oy) et distantes de a , on observe la même figure d'interférence.

On trouvera en annexe 3 (page 59) des montages interférométriques qui s'inspirent des trous d'Young.

b- Montage de Fraunhofer

Dans un montage de Fraunhofer, la source S est placée au foyer objet d'une lentille convergente (\mathcal{L}_1) et l'écran d'observation (\mathcal{E}) est confondu avec le plan focal image d'une autre lentille convergente (\mathcal{L}_2) de distance focale f' :



Soit H le projeté de S_1 sur le rayon diffracté par S_2 , qui arrive en M . La différence de marche entre les deux rayons qui interfèrent en M vaut, dans l'air assimilé à un milieu d'indice $n = 1$:

$$\delta = (SS_2M) - (SS_1M)$$

où :

$$(SS_2M) = (SS_2) + (S_2H) + (HM) = (SS_2) + n S_2H + (HM) \text{ où } n = 1$$

et

$$(SS_1M) = (SS_1) + (S_1M)$$

Or :

- S_1 et S_2 sont sur une même surface d'onde de rayons issus d'une même source S , auquel cas $(SS_1) = (SS_2)$.
 - S_1 et H seraient sur la même surface d'onde de rayons qui seraient émis depuis M , auquel cas $(MS_1) = (MH)$.
- Or, en vertu du principe du retour inverse de la lumière, cette égalité demeure valable pour des rayons qui se dirigent vers M .

Par suite, $\delta = S_2H$, c'est-à-dire dans le triangle (S_1S_2H) :

$$\sin \theta = \frac{S_2H}{S_1S_2} = \frac{\delta}{a} \Rightarrow \delta = a \sin \theta \quad (19)$$

tandis que dans le triangle $(OO'M)$:

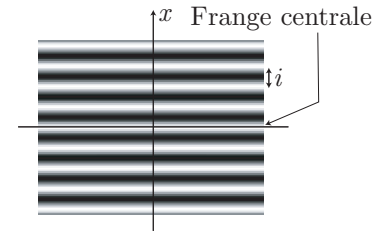
$$\tan \theta = \frac{x}{f'} \quad (20)$$

Enfin, la lentille \mathcal{L}_2 étant utilisée dans les conditions de Gauss, l'angle θ est suffisamment petit pour permettre de linéariser les relations (19) et (20) :

$$\begin{cases} \delta \simeq a \theta \\ \theta \simeq x/f' \end{cases} \Rightarrow \boxed{\delta \simeq \frac{ax}{f'}} \text{ et } \boxed{p \hat{=} \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{ax}{\lambda_0 f'}} \quad (21)$$

Les franges d'interférence, caractérisées par $p = \text{cte}$, sont donc des segments de droite d'équation $x = \text{cte}$ et espacées d'une interfrange i telle que :

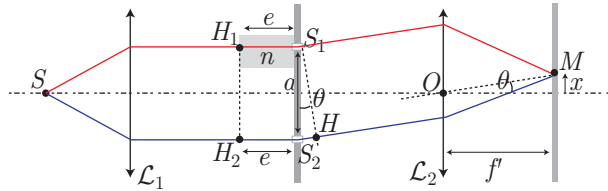
$$\begin{cases} \Delta p = 1 \\ \Delta x = i \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{ai}{\lambda_0 f'} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\lambda_0 f'}{a}}$$



Enfin, la frange centrale d'ordre $p = 0$ est localisée en $x = 0$.

c- Introduction d'une lame transparente

Introduisons dans le montage de Fraunhofer, devant S_1 , une lame à faces parallèles transparente, d'épaisseur e et d'indice n :



La différence de marche entre deux rayons qui parviennent en M après avoir été diffractés par S_1 et S_2 vaut :

$$\delta' = (SS_2M) - (SS_1M)$$

avec :

$$(SS_2M) = (SH_2) + (H_2S_2) + (S_2H) + (HM) = (S_2H) + e + S_2H + (HM)$$

et :

$$(SS_1M) = (SH_1) + (H_1S_1) + (S_1M) = (S_1H) + ne + (S_1M)$$

c'est-à-dire :

$$\delta' = (1 - n)e + S_2H$$

où l'on peut utiliser l'expression (21) :

$$S_2H = \frac{ax}{f'} \Rightarrow \delta' = (1-n)e + \frac{ax}{f'} \Rightarrow p \hat{=} \frac{\delta'}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0} \left[(1-n)e + \frac{ax}{f'} \right]$$

L'ordre d'interférence variant de $\Delta p = 1$ lorsque x varie de $\Delta x = i$, l'interfrange n'est pas modifié :

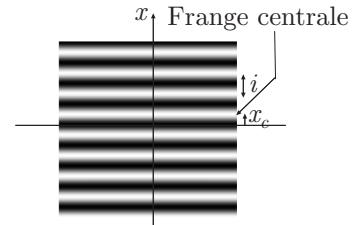
$$1 = \frac{1}{\lambda_0} \left[\frac{ai}{f'} \right] \Rightarrow i = \frac{\lambda_0 f'}{a}$$

tandis que les franges ($p = \text{cte}$) demeurent des segments de droite ($x = \text{cte}$).

En revanche, la frange centrale ($p = 0$) est située à une abscisse x_c telle que :

$$0 = \frac{1}{\lambda_0} \left[(1-n)e + \frac{ax_c}{f'} \right] \Rightarrow x_c = \frac{f'e}{a} (n-1)$$

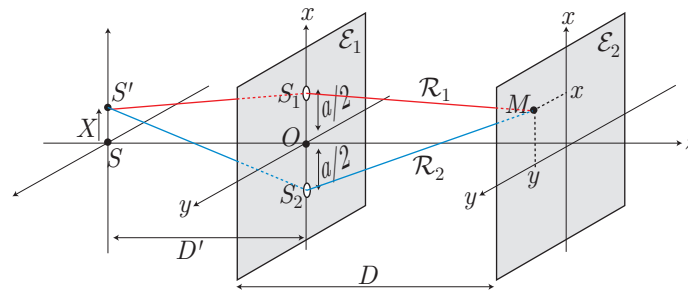
ce qui traduit une translation de la totalité de la figure d'interférence vers le haut.



3- Influence de la source

a- Translation verticale de la source

Reprenons le dispositif de base des trous d'Young présenté à la page 19, dans lequel la source est tradlatée verticalement d'une hauteur X vers le point S' :



La différence de marche entre les rayons \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , issus de S' et diffractés par S_1 ou S_2 vers M est donnée dans un milieu homogène d'indice $n = 1$ par :

$$\delta' = (S'S_2M) - (S'S_1M) = [S'S_2 + S_2M] - [S'S_1 + S_1M] = (S'S_2 - S'S_1) + (S_2M - S_1M)$$

où le calcul (16) de la page 20 a déjà donné :

$$S_2M - S_1M \simeq \frac{ax}{D}$$

si $x \ll D$, $y \ll D$ et $a \ll D$. Dans le cas de ces hypothèses paraxiales ($X \ll D$, $a \ll D$) on peut poser :

$$(S'S_2)^2 - (S'S_1)^2 = (S'S_2 - S'S_1) \times (S'S_2 + S'S_1) = (\overrightarrow{S'S_2} - \overrightarrow{S'S_1}) \cdot (\overrightarrow{S'S_2} + \overrightarrow{S'S_1})$$

où $\overrightarrow{S'S_1} = \begin{pmatrix} a/2 - X \\ 0 \\ D' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{S'S_2} = \begin{pmatrix} -a/2 - X \\ 0 \\ D' \end{pmatrix}$ tandis que $S'S_2 + S'S_1 \simeq 2D'$. Ainsi :

$$(S'S_2 - S'S_1) \times 2D' \simeq \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2X \\ 0 \\ -2D' \end{pmatrix} = 2aX \Rightarrow S'S_2 - S'S_1 \simeq \frac{aX}{D'}$$

$$\Rightarrow \delta' \simeq \frac{ax}{D} + \frac{aX}{D'} \Rightarrow p = \frac{1}{\lambda_0} \left[\frac{ax}{D} + \frac{aX}{D'} \right] \quad (22)$$

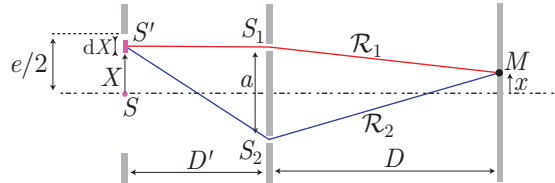
Dans le champ d'interférences apparaissent alors :

- des franges ($p = \text{cte}$) rectilignes et horizontales ($x = 0$);
- une frange centrale ($p = 0$) en $x_c = -\frac{D'}{D} X$;
- un interfange ($\Delta x = 1$ pour $\Delta p = 1$) : $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$.

La figure d'interférence est donc translatée vers le bas, de $\frac{DX}{D'}$, par rapport à celle de la figure en page 21.

b- Élargissement de la source

Remplaçons, dans le montage de la page 19, la source infiniment fine S par une fente de largeur e , centrée sur S :



La source est supposée émettre une intensité totale I_0 de sorte qu'un élément dX de la source émet une fraction d'intensité :

$$\delta I_0 = \alpha dX \Rightarrow I_0 = \int_{-e/2}^{e/2} \alpha dX = \alpha e \Rightarrow \alpha = \frac{I_0}{e} \Rightarrow \delta I_0 = \frac{I_0}{e} dX$$

Au voisinage de S' , d'abscisse X , cet élément de source produit alors en M une intensité donnée par la formule de Fresnel :

$$\delta I(M) = \delta I_0 \times [1 + \cos(k_0 \delta')]$$

où δ' est donné par la relation (22) :

$$\delta' = \frac{ax}{D} + \frac{aX}{D'} \Rightarrow \delta I(M) = \frac{I_0}{e} dX \left[1 + \cos \left(\frac{k_0 ax}{D} + \frac{k_0 aX}{D'} \right) \right]$$

L'intensité reçue par le point M vaut alors :

$$\begin{aligned} I(M) &= \int_{-e/2}^{e/2} \frac{I_0}{e} dX \left[1 + \cos \left(\frac{k_0 ax}{D} + \frac{k_0 aX}{D'} \right) \right] = \frac{I_0}{e} \left[e + \frac{D'}{k_0 a} (\sin p - \sin q) \right] \\ &= I_0 \left[1 + \frac{2D'}{k_0 a e} \sin \left(\frac{p-q}{2} \right) \sin \left(\frac{p+q}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{cases} p = \frac{k_0 ax}{D} + \frac{k_0 a e}{2D'} \\ q = \frac{k_0 ax}{D} - \frac{k_0 a e}{2D'} \end{cases} \Rightarrow \frac{p-q}{2} = \frac{k_0 a e}{2D'} \text{ et } \frac{p+q}{2} = \frac{k_0 ax}{D}$$

Il s'ensuit que :

$$I(M) = I_0 \left[1 + \sin_c \left(\frac{k_0 a e}{2D'} \right) \cos \left(\frac{k_0 ax}{D} \right) \right] \Rightarrow \begin{cases} I_{\max} = I_0 \left[1 + \sin_c \left(\frac{k_0 a e}{2D'} \right) \right] \\ I_{\min} = I_0 \left[1 - \sin_c \left(\frac{k_0 a e}{2D'} \right) \right] \end{cases}$$

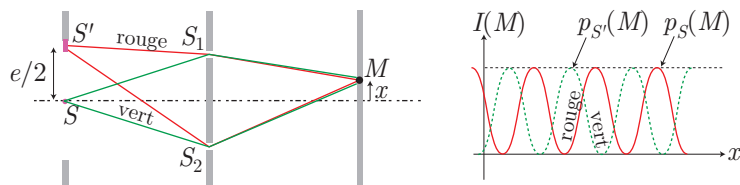
Ainsi, le contraste de la figure d'interférence :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \sin_c \left(\frac{k_0 a e}{2D'} \right)$$

devient nul lorsque $\frac{k_0 a e}{2D'} = \pi$, c'est-à-dire :

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \times \frac{ae}{2D'} = \pi \Rightarrow \boxed{e = \frac{\lambda_0 D'}{a}}$$

Ce **brouillage** de la figure d'interférence peut également s'interpréter en terme d'ordre d'interférence :



Le point $M(x)$ reçoit des sources S et S' des franges d'interférence d'ordres respectifs :

$$p_S(x) = \frac{1}{\lambda_0} \times \frac{ax}{D} \text{ et } p_{S'}(x) = \frac{1}{\lambda_0} \times \left(\frac{ax}{D} + \frac{ae}{2D'} \right)$$

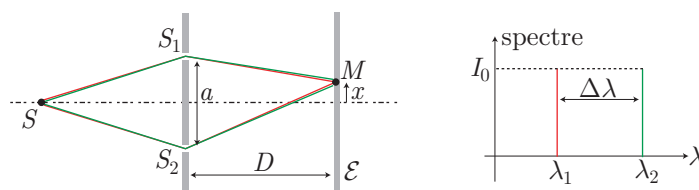
Si le maximum d'intensité d'une figure d'interférence coïncide en chaque point M , avec le minimum d'intensité de l'autre figure d'interférence, il y a brouillage, ce qui se produit lorsque $p_{S'}(x) = p_S(x) + \frac{1}{2}$, c'est-à-dire :

$$p_{S'} - p_S = \frac{1}{\lambda_0} \frac{ae}{2D'} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{e = \frac{\lambda_0 D'}{a}}$$

4- Influence du spectre

a- Cas d'un doublet spectral

Considérons une source S dont le spectre contient deux composantes aux longueurs d'onde λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ (avec $\Delta\lambda \ll \lambda_1$), de même intensité I_0 :



Chacune de ces composantes apporte sur l'écran \mathcal{E} sa propre intensité :

$$I_1 = 2I_0 [1 + \cos(k_1\delta)] \quad I_2 = 2I_0 [1 + \cos(k_2\delta)] \quad \text{avec } k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i} \text{ et } \delta = \frac{ax}{D}$$

Ces composantes n'étant pas mutuellement cohérentes, on observe la somme de ces intensités en chaque point M :

$$I(M) = I_1 + I_2 = 2I_0 [2 + \cos p + \cos q] = 2I_0 \left[2 + 2 \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \right]$$

avec :

$$\begin{cases} p = k_1\delta = \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \\ q = k_2\delta = \frac{2\pi\delta}{\lambda_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{p-q}{2} = \frac{2\pi\delta}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1 + \Delta\lambda} \right) = \pi\delta \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1(\lambda_1 + \Delta\lambda)} \simeq \pi\delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2} \\ \frac{p+q}{2} = \frac{2\pi\delta}{2} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1 + \Delta\lambda} \right) = \pi\delta \times \frac{2\lambda_1 + \Delta\lambda}{\lambda_1(\lambda_1 + \Delta\lambda)} \simeq \frac{2\pi\delta}{\lambda_1} \end{cases}$$

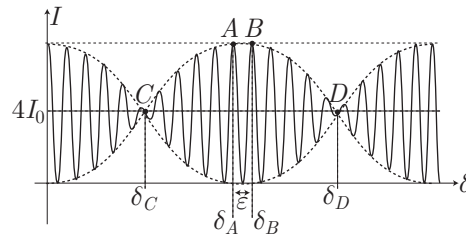
Il s'ensuit que :

$$I(M) = 4I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_1^2} \delta \right) \times \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta \right) \right] = 4I_0 \left[1 + \mathcal{V}(\delta) \times \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta \right) \right]$$

où le **facteur de visibilité** $\mathcal{V}(\delta) = \cos \left(\frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_1^2} \delta \right)$ varie beaucoup plus lentement que $\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta \right)$ car :

$$\frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_1^2} \delta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} \times \frac{\pi}{\lambda_1} \delta \ll \frac{\pi\delta}{\lambda_1}$$

Il peut alors servir d'enveloppe à la fonction harmonique :



Aux points C et D , l'annulation de $\mathcal{V}(\delta)$ se manifeste par un brouillage local de la figure d'interférence : les franges claires ne se distinguent plus des franges sombres. Les deux premiers brouillages se produisent pour $\mathcal{V}(\delta_C) = 0$ et $\mathcal{V}(\delta_D) = 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda_1^2} \delta_C = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi \Delta \lambda}{\lambda_1^2} \delta_D = \frac{\pi}{2} + \pi$$

d'où il découle que :

$$\pi \frac{\Delta \lambda}{\lambda_1^2} (\delta_D - \delta_C) = \pi \Rightarrow \delta_D - \delta_C = \frac{\lambda_1^2}{\Delta \lambda} \quad (23)$$

Entre deux brouillages, des franges claires apparaissent aux maxima d'intensité, tels que les points A et B pour lesquels :

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta_A\right) = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_1} \delta_A = p \times 2\pi \text{ et } \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta_B\right) = 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_1} \delta_B = p \times 2\pi + 2\pi$$

Ainsi :

$$\frac{2\pi}{\lambda_1} (\delta_B - \delta_A) = 2\pi \Rightarrow \varepsilon = \delta_B - \delta_A = \lambda_1 \quad (24)$$

Par conséquent, entre deux brouillages successifs (C et D) se trouvent N franges claires (par exemple A et B) vérifiant :

$$\delta_D - \delta_C = N \times \varepsilon \Rightarrow \frac{\lambda_1^2}{\Delta \lambda} = N \times \lambda_1 \Rightarrow \boxed{N = \frac{\lambda_1}{\Delta \lambda} \text{ franges claires}}$$

Le brouillage de la figure d'interférence peut également s'interpréter en termes d'ordre d'interférence : en un point M de l'écran d'observation, caractérisé par une différence de marche $\delta(M)$, les rayonnements de longueur d'onde λ_1 et λ_2 arrivent avec des ordres d'interférence :

$$p_1 = \frac{1}{\lambda_1} \delta(M) \text{ et } p_2 = \frac{1}{\lambda_2} \delta(M)$$

Ces rayonnements brouillent leurs figures d'interférence si le maximum d'intensité de l'un coïncide avec le minimum de l'autre, c'est-à-dire en un point C tel que :

$$\begin{aligned} p_1 - p_2 &= \frac{1}{2} + n \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \delta_C = \frac{1}{2} + n \text{ où } n \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \frac{\Delta \lambda}{\lambda_1 \lambda_2} \delta_C = \frac{1}{2} + n \text{ avec } \lambda_1 \lambda_2 \simeq \lambda_1^2 \\ &\Rightarrow \delta_C = \left(\frac{1}{2} + n\right) \times \frac{\lambda_1^2}{\Delta \lambda} \end{aligned}$$

Au point D , le même phénomène se produit pour un entier $n+1$: $\delta_D = \left(\frac{1}{2} + n + 1\right) \frac{\lambda_1^2}{\Delta \lambda}$, si bien que l'identité (23) est confirmée :

$$\delta_D - \delta_C = \frac{\lambda_1^2}{\Delta \lambda}$$

Quant aux maxima d'intensité observés en A et B , ils correspondent aux ordres d'interférence entiers successifs m et $m+1$:

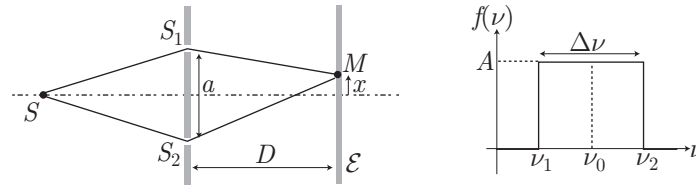
$$p_A = \frac{\delta_A}{\lambda_1} = m \text{ et } p_B = \frac{\delta_B}{\lambda_1} = m + 1 \text{ où } m \in \mathbb{Z}$$

ce qui confirme maintenant l'identité (24) :

$$p_B - p_A = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_1} (\delta_B - \delta_A) = 1 \Rightarrow \varepsilon = \delta_B - \delta_A = \lambda_1$$

b- Cas d'une bande spectrale

Considérons à nouveau le dispositif des trous d'Young dans lesquels la source émet une lumière dont le spectre présente une bande spectrale en fréquence de largeur $\Delta\nu$, centrée autour de la fréquence $\nu_0 \gg \Delta\nu$:



La **densité spectrale** $f(\nu)$ permet non seulement d'exprimer l'intensité lumineuse δI_0 contenue dans la bande spectrale $d\nu$:

$$\delta I_0 \hat{=} f(\nu) d\nu$$

mais également l'intensité totale I_0 véhiculée par la totalité du spectre :

$$I_0 \hat{=} \int_0^\infty f(\nu) d\nu = \int_{\nu_1}^{\nu_2} A d\nu = A \Delta\nu \Rightarrow A = \frac{I_0}{\Delta\nu}$$

Par suite, un point M de l'écran d'observation reçoit, dans la bande spectrale $d\nu$, une intensité s'inspirant de la formule de Fresnel :

$$\begin{aligned} \delta I &= 2 \delta I_0 \times [1 + \cos(k_0 \delta)] \text{ où } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi\nu}{c} \\ &= 2 f(\nu) d\nu \times \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{c} \nu \delta\right) \right] \end{aligned}$$

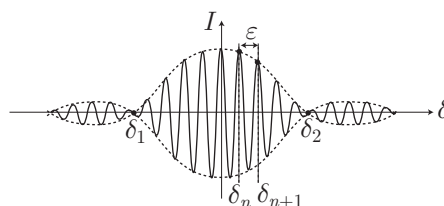
La totalité de la bande spectrale véhicule donc une intensité :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty 2 f(\nu) d\nu \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu\right) \right] = \frac{2I_0}{\Delta\nu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu\right) \right] d\nu \text{ où } \begin{cases} \nu_1 = \nu_0 - \Delta\nu/2 \\ \nu_2 = \nu_0 + \Delta\nu/2 \end{cases} \\ &= \frac{2I_0}{\Delta\nu} \left[\Delta\nu + \frac{c}{2\pi\delta} [\sin p - \sin q] \right] = \frac{2I_0}{\Delta\nu} \left\{ \Delta\nu + \frac{c}{2\pi\delta} \times 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \right\} \end{aligned}$$

en posant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} p = \frac{2\pi\delta}{c} \nu_2 \\ q = \frac{2\pi\delta}{c} \nu_1 \end{cases} &\Rightarrow \frac{p-q}{2} = \frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu \text{ et } \frac{p+q}{2} = \frac{2\pi\delta}{c} \nu_0 \\ &\Rightarrow I = 2I_0 \left[1 + \frac{c}{\pi\delta \Delta\nu} \sin\left(\frac{\pi\delta}{c} \Delta\nu\right) \times \sin\left(\frac{2\pi\delta}{c} \nu_0\right) \right] \\ &\Rightarrow \boxed{I = 2I_0 \left[1 + \text{sin}_c\left(\frac{\pi \Delta\nu}{c} \delta\right) \sin\left(\frac{2\pi\nu_0}{c} \delta\right) \right]} \end{aligned}$$

En rappelant que $\Delta\nu \ll \nu_0$, la fonction $\mathcal{V}(\delta) = \text{sin}_c\left(\frac{\pi \Delta\nu}{c} \delta\right)$ sert d'enveloppe (fonction aussi appelée **visibilité**) à la fonction $\sin\left(\frac{2\pi\nu_0}{c} \delta\right)$:



Puisque $\sin_c(u)$ s'annule une première fois lorsque $u = \pi$, il s'ensuit que le contraste disparaît lorsque $\left| \frac{\pi \Delta\nu}{c} \delta \right| \geq \pi$, c'est-à-dire :

$$|\delta| \geq \frac{c}{\Delta\nu} \Rightarrow \boxed{|\delta| \geq L_c}$$

où l'on reconnaît la définition de la **longueur de cohérence** :

$$L_c = c \times \tau = c \times \frac{1}{\Delta\nu}$$

De fait, le contraste disparaît lorsque les trains d'onde ne peuvent pas se rencontrer.

Le contraste s'annule pour $\delta_2 = \frac{c}{\Delta\nu}$ et $\delta_1 = -\frac{c}{\Delta\nu}$, tandis que les franges claires sont observables dès que $\sin\left(\frac{2\pi\nu_0}{c} \delta\right)$ devient maximum, c'est-à-dire :

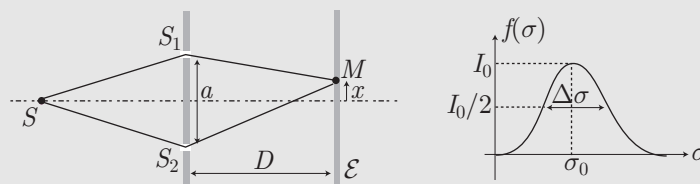
$$\begin{aligned} \frac{2\pi\nu_0}{c} \delta_n = n 2\pi &\Rightarrow \delta_n = n \times \frac{c}{\nu_0} \text{ et } \delta_{n+1} = (n+1) \frac{c}{\nu_0} \text{ pour } n \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \varepsilon = \delta_{n+1} - \delta_n = \frac{c}{\nu_0} \end{aligned}$$

Donc, entre deux annulations de contraste se trouvent N franges claires qui vérifient :

$$\delta_2 - \delta_1 = N\varepsilon \Rightarrow \frac{2c}{\Delta\nu} = N \times \frac{c}{\nu_0} \Rightarrow \boxed{N = \frac{2\nu_0}{\Delta\nu} \text{ franges claires.}}$$

EXERCICE

On considère un dispositif interférentiel d'Young, dans lequel les observations sont réalisées sur un écran \mathcal{E} situé à une distance $D \gg a$ des fentes S_1 et S_2 :



Le flux énergétique émis par la source est réparti continûment dans un intervalle de nombres d'ondes σ centrés autour de la valeur σ_0 . La densité spectrale correspondante vaut :

$$\begin{cases} f(\sigma) = I_0 \exp\left[-\left(\frac{\sigma - \sigma_0}{a}\right)^2\right] & \text{pour } \sigma \geq 0 \\ f(\sigma) = 0 & \text{pour } \sigma < 0 \end{cases} \quad \text{où } \sigma = \frac{1}{\lambda} \text{ et } a \ll \sigma_0$$

1. Calculer l'intensité I produite au point M .

On sera amené à évaluer des intégrales entre les bornes 0 et $+\infty$. On admettra que la fonction $f(\sigma)$ décroît de façon suffisamment rapide pour que l'on puisse les assimiler aux intégrales analogues entre les bornes $-\infty$ et $+\infty$.

On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos(\alpha x) dx = \sqrt{\pi} e^{-\alpha^2/4} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin(\alpha x) dx = 0$$

2. Représenter graphiquement l'allure de la courbe $I(\delta)$.
3. La finesse de la raie est définie par le rapport de σ_0 et de la largeur de la raie à mi-hauteur $\Delta\sigma$:

$$F \hat{=} \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} \quad \text{où } \sigma_0 = 2.10^6 \text{ m}^{-1}$$

Quelle doit être la finesse de la raie pour qu'on puisse observer 10 franges de part et d'autre de la raie centrale, avec un contraste égal à 1, à 10^{-4} près ?

Corrigé

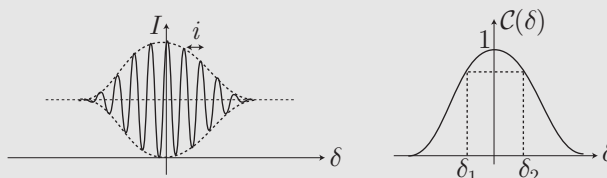
1. La formule de Fresnel permet le calcul de l'intensité :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\infty} 2f(\sigma) d\sigma \times [1 + \cos(2\pi\delta\sigma)] \text{ car } k_0\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = 2\pi\sigma\delta \\
 &\simeq \int_{-\infty}^{+\infty} 2I_0 [1 + \cos(2\pi\delta\sigma)] e^{-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2} d\sigma \text{ en posant } x = \frac{\sigma-\sigma_0}{a} \Rightarrow d\sigma = a dx \\
 &= 2I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} a \cos(2\pi\delta\sigma_0 + 2\pi\delta ax) e^{-x^2} dx \\
 &= 2I_0 \int_{-\infty}^{+\infty} a e^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} a [\cos(2\pi\delta\sigma_0) \cos(2\pi\delta ax) - \sin(2\pi\delta\sigma_0) \sin(2\pi\delta ax)] e^{-x^2} dx
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte des intégrales fournies par l'énoncé :

$$I = 2I_0 \left[a\sqrt{\pi} + a\sqrt{\pi} \cos(2\pi\delta\sigma_0) e^{-\pi^2 a^2 \delta^2} \right] \Rightarrow I(\delta) = 2I_0 a\sqrt{\pi} \left[1 + e^{-\pi^2 a^2 \delta^2} \cos(2\pi\sigma_0\delta) \right]$$

2. La condition $a \ll \sigma_0$ impose à la fonction $\mathcal{E}(\delta)e^{-\pi^2 a^2 \delta^2}$ une évolution beaucoup plus lente que $\cos(2\pi\sigma_0\delta)$; elle sert donc d'enveloppe à la fonction harmonique :



3. La largeur $\Delta\sigma = \sigma_2 - \sigma_1$ est liée aux nombres σ_1 et σ_2 qui affecte à f sa valeur $\frac{I_0}{2}$, c'est-à-dire qui vérifient :

$$\begin{aligned}
 f(\sigma) = \frac{I_0}{2} &\Rightarrow I_0 \exp \left[-\left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2 \right] = \frac{I_0}{2} \Rightarrow \left(\frac{\sigma-\sigma_0}{a}\right)^2 = \ln 2 \Rightarrow \frac{\sigma-\sigma_0}{a} = \pm\sqrt{\ln 2} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \sigma_2 = \sigma_0 + a\sqrt{\ln 2} \\ \sigma_1 = \sigma_0 - a\sqrt{\ln 2} \end{cases} \Rightarrow \Delta\sigma = 2a\sqrt{\ln 2}
 \end{aligned}$$

Le contraste de la figure d'interférence : $\mathcal{C}(\delta) = e^{-\pi^2 a^2 \delta^2}$ vaut 1 à 10^{-4} près dans un intervalle $[\delta_1; \delta_2]$ tel que :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}(\delta) = 1 - 10^{-4} &\Rightarrow e^{-\pi^2 a^2 \delta^2} = 1 - 10^{-4} \Rightarrow 1 - \pi^2 a^2 \delta^2 \simeq 1 - 10^{-4} \text{ si } \pi^2 a^2 \delta^2 \ll 1 \\
 &\Rightarrow \delta = \pm \frac{10^{-2}}{a\pi} \Rightarrow \Delta\delta = \delta_2 - \delta_1 = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{\pi a}
 \end{aligned}$$

Dans cet intervalle, les franges claires sont celles qui correspondent à $I(\delta)$ maximum, c'est-à-dire aux valeurs de δ qui affectent à $\cos(2\pi\sigma_0\delta)$ une valeur 1. Deux de ces valeurs successives sont alors séparées d'un interfrange i tel que :

$$2\pi\sigma_0 i = 2\pi \Rightarrow i = \frac{1}{\sigma_0}$$

L'observation de 10 franges claires est alors possible lorsque $\Delta\delta = 10i$, soit encore :

$$\frac{2 \cdot 10^{-2}}{\pi a} = \frac{10}{\sigma_0} \Rightarrow \frac{\sigma_0}{a} = \frac{5\pi}{10^{-2}} = 500\pi$$

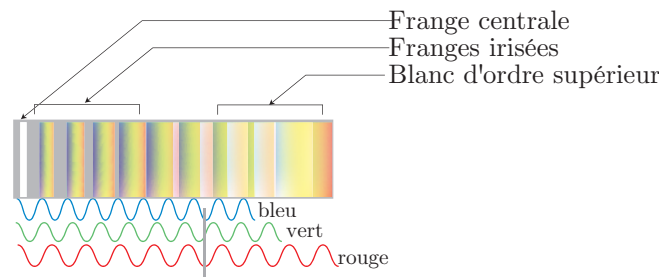
Dans ce cas, la finesse vaut :

$$F = \frac{\sigma_0}{\Delta\sigma} = \frac{\sigma_0}{2a\sqrt{\ln 2}} = \frac{500\pi}{2\sqrt{\ln 2}} \Rightarrow F = \frac{250\pi}{\sqrt{\ln 2}} = 943$$

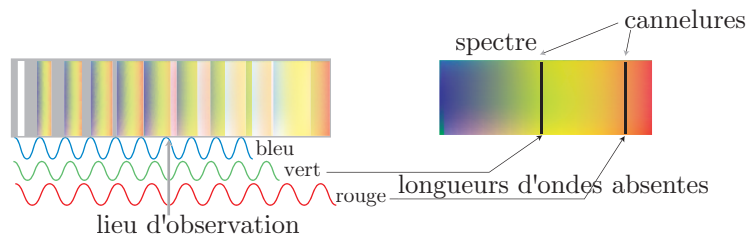
c- Source de lumière blanche

Considérons un dispositif de trous d'Young éclairé en lumière blanche. Pour chaque longueur d'onde λ_0 , l'écran reçoit une intensité donnée par la formule de Fresnel (14) de la page 19, à l'origine d'une succession de franges rectilignes espacées d'un interfrange $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$, qui dépend donc de la longueur d'onde, de même que leurs positions (cf. relations 16 de la page 20) : $x_p = p \frac{\lambda_0 D}{a}$. Ainsi, quel que soit λ_0 , $x = 0$ (pour $p = 0$) correspond à une frange claire ; elle apparaît blanche.

- Les premières franges au voisinage de la frange centrale apparaissent irisées.
- Plus loin encore, un grand nombre de franges de diverses couleurs se superposent ; un **blanc d'ordre supérieur** apparaît.

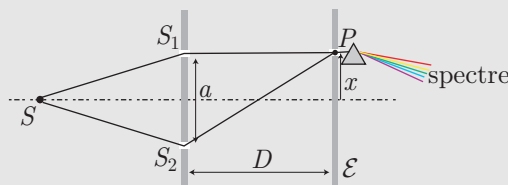


En un point M de la figure d'interférence apparaissent alors des longueurs d'onde manquantes ; le spectre montre alors, pour ces longueurs d'onde, des bandes sombres appelées **cannelures**



EXERCICE

On réalise le montage des fentes d'Young en lumière blanche. À une distance $x = 6,2$ cm de la frange centrale est disposé en P un prisme permettant l'observation du spectre de la figure d'interférence.



La fente S_1 est espacée d'une distance $S_1S_2 = a = 0,1$ mm tandis que l'observation se fait à une distance $D = 1$ m du plan contenant S_1 et S_2 .

1. Rappeler l'expression de l'ordre d'interférence d'une frange située en P .
2. En déduire le nombre de cannelures observables dans ce spectre.

Corrigé

1. En x la différence de marche δ des rayons est donnée par la relation (16) (de la page 20), ainsi que l'ordre d'interférence p associé à la longueur d'onde λ_0 :

$$\delta = \frac{ax}{D} \Rightarrow p = \frac{ax}{\lambda_0 D}$$

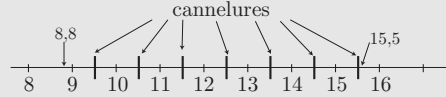
2. Le spectre de la lumière blanche étant compris entre $\lambda_{0b} = 400$ nm et $\lambda_{0r} = 700$ nm, l'ordre d'interférence p doit vérifier :

$$\lambda_0 \leq \lambda_{0r} \Rightarrow \frac{ax}{pD} \leq \lambda_{0r} \Rightarrow p \geq \frac{ax}{\lambda_{0r}D} = \frac{10^{-4} \times 6,2 \cdot 10^{-2}}{700 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow p \geq 8,8$$

et

$$\lambda_0 \geq \lambda_{0b} \Rightarrow \frac{ax}{pD} \geq \lambda_{0b} \Rightarrow p \leq \frac{ax}{\lambda_{0b}D} = \frac{10^{-4} \times 6,2 \cdot 10^{-2}}{400 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow p \leq 15,5$$

Sur cet intervalle, les cannelures correspondent à des franges sombres, donc aux ordres p demi-entiers :



On peut ainsi observer :

$$7 \text{ cannelures aux ordres } p \in \{9,5 - 10,5 - 11,5 - 12,5 - 13,5 - 14,5 - 15,5\}$$

IV Superposition de N ondes

1- Interférences par transmission

a- Intensité lumineuse



DÉFINITION

Un **réseau par transmission** est un plan opaque contenant un grand nombre N de fentes rectilignes transparentes, parallèles, régulièrement espacées d'un **pas** a .

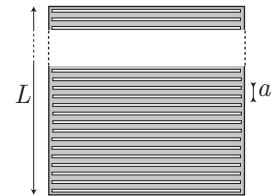
On supposera les fentes du réseau infiniment fines.

Sur une largeur L , le réseau comporte N fentes distantes de a :

$$L = (N - 1)a \simeq Na \text{ car } N \gg 1$$

Il est alors fréquemment caractérisé par sa densité linéique de fentes :

$$n \hat{=} \frac{N}{L} = \frac{1}{a}$$



Le réseau sera supposé éclairé en lumière parallèle par une source S monochromatique de longueur d'onde λ_0 , située à une distance "infinie".

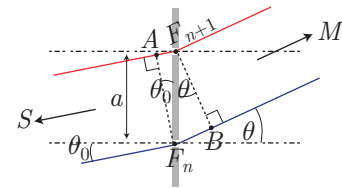
L'observation sera faite en un point M situé également à une distance "infinie".

Soient F_n et F_{n+1} deux fentes successives qui renvoient vers M , par diffraction, des amplitudes respectives $\underline{s}_n(M, t)$ et $\underline{s}_{n+1}(M, t)$:

$$\underline{s}_n(M, t) = S_0 e^{i[\omega t - \varphi_n(M)]} \text{ où } \varphi_n(M) = \varphi(S) + k_0(SF_n M)$$

et

$$\underline{s}_{n+1}(M, t) = S_0 e^{i[\omega t - \varphi_{n+1}(M)]} \text{ où } \varphi_{n+1}(M) = \varphi(S) + k_0(SF_{n+1} M)$$



Il s'ensuit que :

$$\frac{\underline{s}_{n+1}}{\underline{s}_n} = e^{i[\varphi_n(M) - \varphi_{n+1}(M)]} = e^{ik_0 \delta} \text{ où } \delta = (SF_n M) - (SF_{n+1} M)$$

avec :

$$\begin{cases} (SF_n M) = (SF_n) + F_n B + (BM) \\ (SF_{n+1} M) = (SA) + AF_{n+1} + (F_{n+1} M) \end{cases} \Rightarrow \delta = F_n B - AF_{n+1} = a \times (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{s}_{n+1}}{\underline{s}_n} = e^{ik_0 a (\sin \theta - \sin \theta_0)} = e^{i\varphi} \text{ où } \varphi = k_0 a (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

$$\Rightarrow \underline{s}_n = \underline{s}_0 e^{in\varphi} \tag{25}$$

Le point M reçoit ainsi un signal total :

$$\begin{aligned} \underline{s}(M, t) &= \underline{s}_0 + \underline{s}_1 + \dots + \underline{s}_{N-1} = \underline{s}_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{in\varphi} = \underline{s}_0 \times \frac{1 - e^{iN\varphi}}{1 - e^{i\varphi}} \\ &= \underline{s}_0 \times \frac{e^{iN\varphi/2}}{e^{i\varphi/2}} \times \frac{e^{-iN\varphi/2} - e^{iN\varphi/2}}{e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}} = \underline{s}_0 e^{i(N-1)\varphi/2} \times \frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \end{aligned}$$

auquel est associée une intensité :

$$I(M) = |\underline{s}(M, t)|^2 = I_0 \times \left[\frac{\sin(N\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} \right]^2 = I_0 \times [f(\varphi)]^2$$

b- Formule du réseau

La localisation des franges claires passe par la recherche des extrema de $I(M)$. Étudions deux cas extrêmes :

- Le dénominateur de $f(\varphi)$ s'annule pour :

$$\begin{aligned} \sin(\varphi/2) = 0 &\Rightarrow \frac{\varphi}{2} = p\pi \text{ où } p \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow \sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = \sin(Np\pi) = 0 \end{aligned}$$

La forme indéterminée qui apparaît exige donc une étude au voisinage des valeurs $\varphi_p = p \times 2\pi$. Posons ainsi $\frac{\varphi}{2} = p\pi + \varepsilon$ où $\varepsilon \ll p\pi$:

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin(p\pi + \varepsilon) \simeq \sin(p\pi) + \varepsilon \cos(p\pi) = \varepsilon \times (-1)^p$$

et :

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = \sin(Np\pi + N\varepsilon) \simeq \sin(Np\pi) + N\varepsilon \cos(Np\pi) = N\varepsilon \times (-1)^{Np}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \varphi_p} f(\varphi) &\Rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(Np\pi + N\varepsilon)}{\sin(p\pi + \varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{N\varepsilon \times (-1)^{Np}}{\varepsilon \times (-1)^p} = N \times (-1)^{(N-1)p} \\ &\Rightarrow \boxed{\lim_{\varphi \rightarrow 2p\pi} I = N^2 I_0} \end{aligned} \quad (26)$$

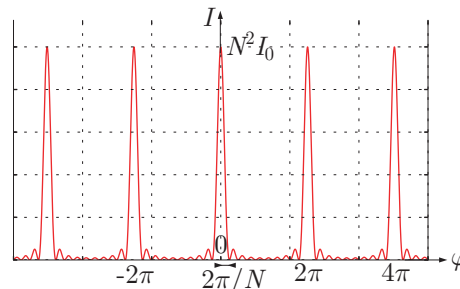
- La fonction $f(\varphi)$ s'annule si son numérateur s'annule :

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{N\varphi}{2} = p\pi \Rightarrow \varphi = p \times \frac{2\pi}{N}$$

mais pas son dénominateur :

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sin\left(\frac{p}{N}\pi\right) \neq 0 \Rightarrow \frac{p}{N} \notin \mathbb{Z}$$

c'est-à-dire pour $\varphi \in \left\{ 1 \times \frac{2\pi}{N}, 2 \times \frac{2\pi}{N}, 3 \times \frac{2\pi}{N}, 4 \times \frac{2\pi}{N}, \dots, (N-1) \frac{2\pi}{N}, (N+1) \frac{2\pi}{N}, \dots \right\}$



En conclusion, des franges claires apparaissent dans les directions vérifiant la **formule du réseau** :

$$\varphi = p \times 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0} a (\sin \theta - \sin \theta_0) = p \times 2\pi \Rightarrow \boxed{\sin \theta - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda_0}{a}} \quad (27)$$

avec, pour largeur :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}} \quad (28)$$

- Une deuxième méthode permet de retrouver les résultats (26), (27), (28) : la relation de récurrence (25) : $\underline{s}_{n+1} = \underline{s}_n \times e^{i\varphi}$ montre que deux ondes successives interfèrent de manière constructive si $\underline{s}_{n+1} = \underline{s}_n$, c'est-à-dire s'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$\varphi = p \times 2\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_0} a (\sin \theta - \sin \theta_0) = p \times 2\pi \Rightarrow \boxed{\sin \theta - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda_0}{a} \text{ avec } p \in \mathbb{Z}}$$

Dans ce cas, $\underline{s}_n = \underline{s}_0 \forall n \in \{1, \dots, N-1\}$, de sorte que le signal complet parvenant en M vaut :

$$\underline{s}(M, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{s}_n = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{s}_0 = N \underline{s}_0 \Rightarrow \boxed{I(M) = N^2 \times I_0}$$

Enfin, dans l'espace complexe où sont représentées en abscisses et en ordonnées les parties réelles et imaginaires des nombres complexes \underline{s}_{n+1} et \underline{s}_n , la relation de récurrence (25) : $\underline{s}_{n+1} = \underline{s}_n e^{i\varphi}$ signifie que \underline{s}_{n+1} est obtenu depuis \underline{s}_n par une rotation d'angle φ . Donc la somme :

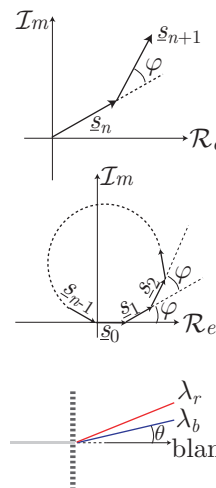
$$\underline{s}(M, t) = \sum_{n=0}^{N-1} \underline{s}_n$$

s'annule si $N\varphi = 2\pi$ ou encore :

$$\boxed{N\varphi = p \times 2\pi \text{ avec } p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}}$$

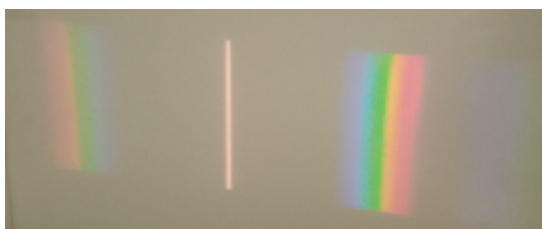
En incidence normale ($\theta_0 = 0$), la formule du réseau éclairé en lumière blanche :

$$\sin \theta = p \frac{\lambda_0}{a}$$



montre que :

- ▶ pour toutes les longueurs d'onde du spectre, l'ordre $p = 0$ correspond à un maximum d'intensité dans la direction incidente ($\theta = 0$). Dans cette direction apparaît alors une frange centrale blanche.
- ▶ la déviation de la lumière est d'autant plus grande que la longueur d'onde est grande, ce qui produit une décomposition spectrale, la frange rouge étant plus éloignée du centre que la bleue. C'est cette propriété qui est exploitée dans un spectroscopie à réseau.
- ▶ loin de la frange centrale, les franges de différentes couleurs se superposent afin de composer un **blanc d'ordre supérieur**.

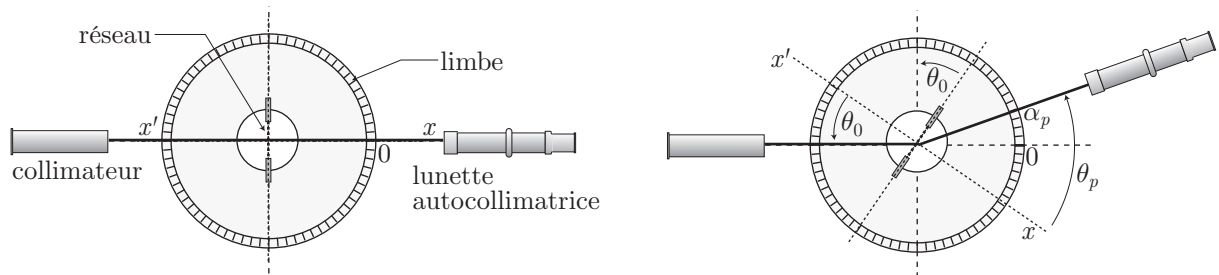


2– Spectroscopie à réseau

a– Présentation

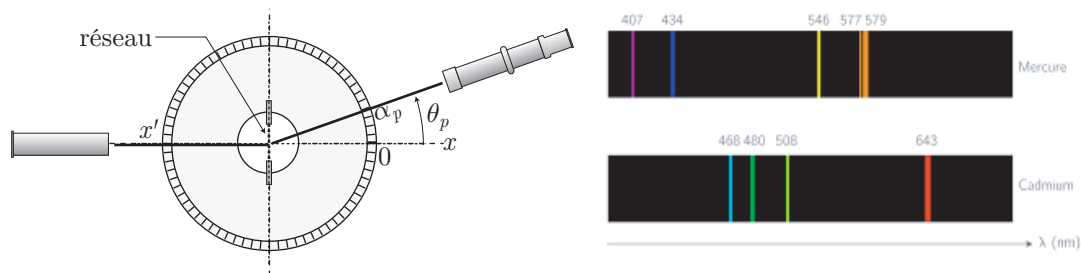
Un **spectroscopie** est composé :

- ▶ d'un **collimateur** éclairé par une source lumineuse dont on cherche le spectre ; ce collimateur est réglé "à l'infini" : les rayons qui en émergent sont parallèles ;
- ▶ d'une **lunette autocollimatrice**, dans laquelle se font les observations, réglée de manière afocale (elle reçoit des rayons parallèles et restitue des rayons également parallèles), de sorte que l'observation se fasse sans accommodation ;
- ▶ un système dispersif (prisme ou réseau de pas a connu), pouvant tourner sur un plateau de manière à présenter un angle d'incidence θ_0 variable ;
- ▶ de graduations, ou **limbe** permettant de repérer la position de la lunette, elle-même équipée d'un vernier



Le **spectrogoniomètre** peut être utilisé en **incidence normale**, c'est-à-dire telle que $\theta_0 = 0$. Pour cela :

- la lunette est préalablement alignée avec le collimateur : l'image de la fente source doit coïncider avec le centre du **réticule** dont la lunette est équipée.
- le plan du réseau est positionné perpendiculairement à l'axe commun du collimateur et de la lunette (ce qui assure $\theta_0 = 0$). Pour y parvenir, une autocollimation est réalisée avec la lunette et un miroir plan substitué au réseau, qui réfléchit la lumière émise par le miroir semi-réfléchissant de la lunette ; le réticule et son image nette doit se superposer.



La rotation de la lunette permet alors d'observer des raies spectrales dans des directions θ_p repérables par lecture directe de α_p sur le limbe. La relation (27), utilisée pour $\theta_0 = 0$, fournit alors les longueurs d'onde λ_0 correspondant aux valeurs mesurées de θ_p :

$$\sin \theta_p = p \frac{\lambda_0}{a} \Rightarrow \lambda_0 = \frac{a}{p} \times \sin \theta_p \text{ à l'ordre } p$$

EXERCICE

La cavité d'un laser est formée de deux miroirs partiellement réfléchissants, parallèles, séparés d'une distance $L = 1$ m.

1. Quelles sont les pulsations ω_p des ondes lumineuses stationnaires qui peuvent, en principe, s'établir dans cette cavité ?
2. En fait, le phénomène laser ne se produit que pour un intervalle de pulsations très étroit, déterminé par la substance dont est remplie la cavité. Soit :

$$\omega_0 - \Gamma \leq \omega_p \leq \omega_0 + \Gamma$$

On prendra $\omega_0 = 3.10^{15} \text{ rad.s}^{-1}$ et $\Gamma = 10^{10} \text{ rad.s}^{-1}$.

Déterminer le nombre $2J + 1$ de pulsations donnant lieu au phénomène laser (*modes laser*).

3. On suppose que tous les modes ont même amplitude et qu'ils peuvent être synchronisés de façon à sortir du laser en phase entre eux.
 - a- Montrer que les pulsations des modes peuvent s'écrire :

$$\omega_p = \omega_0 + p\delta$$

- b- Établir que le signal de sortie apparaît comme une succession d'impulsions lumineuses de pulsation ω_0 .
 - c- Quelle est la durée des impulsions ?

Corrigé

1. Nous supposons le problème unidimensionnel, de directions (Ox) .
Ainsi, tout point de cette cavité est soumis à une onde $\underline{s}^{(+)}(x, t) = S_0 e^{i(\omega t - kx)}$ et une onde réfléchie $\underline{s}^{(-)}(x, t) = r S_0 e^{i(\omega t + kx)}$. Il reçoit donc un signal :

$$\underline{s}(x, t) = \underline{s}^{(+)}(x, t) + \underline{s}^{(-)}(x, t) = S_0 e^{i\omega t} [e^{-ikx} + r e^{ikx}]$$



Or, par continuité, ce signal s'annule en $x = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{s}(0, t) &= 0 \Rightarrow 1 + r = 0 \Rightarrow r = -1 \\ \Rightarrow \underline{s}(x, t) &= S_0 e^{i\omega t} [e^{-ikx} - e^{ikx}] = A_0 e^{i\omega t} \sin(kx) \end{aligned}$$

et en $x = L$:

$$\underline{s}(L, t) = A_0 e^{i\omega t} \sin(kL) = 0 \Rightarrow \exists p \in \mathbb{Z} / kL = p\pi \Rightarrow k = p \frac{\pi}{L}$$

Les pulsations $\omega_p = kc$ sont donc quantifiées :

$$\omega_p = p \times \frac{\pi c}{L} = p \times \omega_1 \text{ où } \omega_1 = \frac{\pi c}{L} \text{ et } p \in \mathbb{N}^*$$

2. L'intervalle de variation de ω_p impose une contrainte sur les valeurs possibles de p :

$$\begin{aligned} \omega_0 - \Gamma \leq \omega_p \leq \omega_0 + \Gamma &\Rightarrow \omega_0 - \Gamma \leq p \times \frac{\pi c}{L} \leq \omega_0 + \Gamma \\ \Rightarrow \frac{L\omega_0}{\pi c} - \frac{L\Gamma}{\pi c} \leq p \leq \frac{L\omega_0}{\pi c} + \frac{L\Gamma}{\pi c} &\Rightarrow 3,2 \cdot 10^6 - 10,6 \leq p \leq 3,2 \cdot 10^6 + 10,6 \end{aligned}$$

Dans cet intervalle, p peut prendre : $2J + 1 = 21$ valeurs.

3. a- En choisissant ω_p sous la forme $\omega_p = \omega_0 + p\delta$, il s'ensuit que :

$$\omega_0 - \Gamma \leq \omega_0 + p\delta \leq \omega_0 + \Gamma \Rightarrow -\frac{\Gamma}{\delta} \leq p \leq \frac{\Gamma}{\delta}$$

Les $2J + 1$ valeurs de p sont donc comprises dans l'intervalle :

$$p \in \left\{ -\frac{\Gamma}{\delta}, \dots, \frac{\Gamma}{\delta} \right\} = \{-J, \dots, J\}$$

ce qui permet également de poser : $J = \frac{\Gamma}{\delta} \Rightarrow \delta = \frac{\Gamma}{J}$

- b- Le signal de sortie est alors la superposition des modes précédents :

$$\begin{aligned} \underline{s} &= \sum_{p=-J}^J \underline{s}_p \text{ où } \underline{s}_p = S_0 e^{i\omega_p t} = S_0 e^{i\omega_0 t} \times e^{ip\delta t} \\ &= S_0 e^{i\omega_0 t} \sum_{p=-J}^J e^{ip\delta t} = S_0 e^{i\omega_0 t} e^{-iJ\delta t} \sum_{p=0}^{2J} e^{ip\delta t} \\ &= S_0 e^{i\omega_0 t} e^{-iJ\delta t} \times \frac{1 - e^{i(2J+1)\delta t}}{1 - e^{i\delta t}} \\ &= S_0 e^{i\omega_0 t} e^{-iJ\delta t} \times \frac{e^{i(J+1/2)\delta t}}{e^{i\delta t/2}} \times \frac{e^{-i(J+1/2)\delta t} - e^{i(J+1/2)\delta t}}{e^{-i\delta t/2} - e^{i\delta t/2}} \\ &= S_0 e^{i\omega_0 t} \times \frac{\sin([(J+1/2)\delta t])}{\sin(\delta t/2)} \\ \Rightarrow &\boxed{s(t) = \mathcal{E}(t) \times \cos(\omega_0 t) \text{ où } \mathcal{E}(t) = S_0 \times \frac{\sin[(J+1/2)\delta t]}{\sin(\delta t/2)}} \quad (29) \end{aligned}$$

Puisque $J\delta \ll \omega_0$, la fonction $s(t)$ est une sinusoïde de pulsation ω_0 , comprise dans une enveloppe $\mathcal{E}(t)$ qu'il convient maintenant d'étudier :

- Le dénominateur de $\mathcal{E}(t)$ s'annule aux dates t_p telles que :

$$\frac{\delta t_p}{2} = p\pi \Rightarrow t_p = p \times \frac{2\pi}{\delta}$$

Dans ce cas :

$$\left(J + \frac{1}{2}\right) \delta t_p = \left(J + \frac{1}{2}\right) \times 2p\pi = (2J+1)p\pi \Rightarrow \sin \left[\left(J + \frac{1}{2}\right) \delta t_p \right] = 0 \text{ car } (2J+1)p \in \mathbb{Z}$$

Une forme indéterminée contraint alors au calcul de $\mathcal{E}(t)$ seulement au voisinage de t_p . À cette fin, on introduit la grandeur ε infiniment petite permettant de calculer :

$$\frac{\delta t}{2} = \frac{\delta t_p}{2} + \varepsilon = p\pi + \varepsilon \Rightarrow \sin\left(\frac{\delta t}{2} + \varepsilon\right) = \sin(p\pi + \varepsilon) \simeq \sin(p\pi) + \varepsilon \cos(p\pi) = \varepsilon \times (-1)^p$$

et :

$$\begin{aligned} \left(J + \frac{1}{2}\right) \delta t &= \left(J + \frac{1}{2}\right) (\delta t_p + 2\varepsilon) = \left(J + \frac{1}{2}\right) (2p\pi + 2\varepsilon) = (2J + 1) (p\pi + \varepsilon) \\ \Rightarrow \sin\left[\left(J + \frac{1}{2}\right) \delta t\right] &= \sin[(2J + 1) (p\pi + \varepsilon)] \simeq \sin[(2J + 1) p\pi] + ((2J + 1) \varepsilon \cos[(2J + 1) p\pi]) \\ &\simeq (2J + 1) \varepsilon \times (-1)^{(2J+1)p} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{t \rightarrow t_p} \mathcal{E}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{E}(\delta t_p + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_0 \frac{(2J + 1) \varepsilon \times (-1)^{(2J+1)p}}{\varepsilon \times (-1)^p} \Rightarrow \boxed{\lim_{t \rightarrow t_p} \mathcal{E}(t) = (2J + 1) S_0 \text{ en } t_p = p \times \frac{2\pi J}{\Gamma}}$$

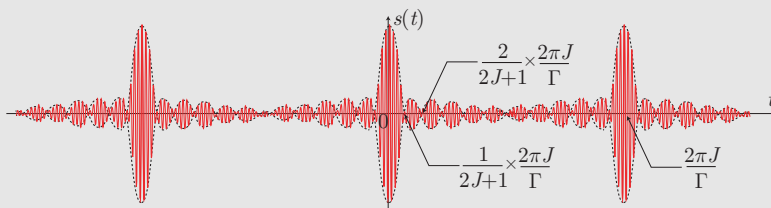
– La fonction $\mathcal{E}(t)$ s'annule lorsque le numérateur s'annule :

$$\left(J + \frac{1}{2}\right) \delta t_m = m\pi \Rightarrow (2J + 1) \delta t_m = 2m\pi \Rightarrow \frac{\delta t_m}{2} = \frac{m}{2J + 1} \pi \text{ avec } m \in \mathbb{Z}$$

sans annuler le dénominateur, c'est-à-dire pour $\frac{m}{2J + 1} \notin \mathbb{Z}$. Donc $\mathcal{E}(t)$ s'annule aux dates :

$$\boxed{t_m = \frac{m}{2J + 1} \times \frac{2\pi J}{\Gamma} \text{ avec } \frac{m}{2J + 1} \notin \mathbb{Z}}$$

On peut ainsi représenter graphiquement la courbe correspondant à l'expression (29) :



Cette étude confirme que le signal de sortie apparaît comme une succession d'impulsions lumineuses de pulsation ω_0 , qui se produisent aux dates $t_p = p \times \frac{2\pi J}{\Gamma}$, $p \in \mathbb{Z}$.

3. La figure précédente fournit également la durée des impulsions :

$$\boxed{\Delta t = 2 \times \frac{2\pi J}{(2J + 1) \Gamma}}$$

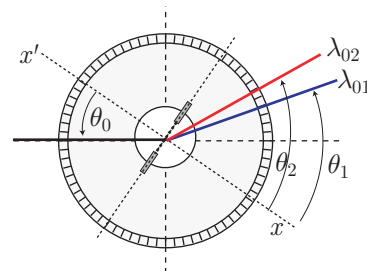
b– Résolution du spectroscopie

La formule du réseau :

$$\varphi = \sin \theta_i - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda_{0i}}{a}$$

montre qu'à chaque longueur d'onde λ_{0i} d'une lumière monochromatique correspond, pour chaque ordre p , un angle θ_i où s'observe la raie spectrale. Cependant, les angles θ_1 et $\theta_2 = \theta_1 + \delta\theta$, correspondant à deux longueurs d'onde λ_{01} et $\lambda_{02} = \lambda_{01} + \delta\lambda$ très voisines, peuvent être trop proches pour que ces raies spectrales paraissent distinctes.

C'est pourquoi certains critères caractérisent les performances du spectroscopie.



DÉFINITION

Le **pouvoir dispersif** du réseau :

$$\boxed{D \hat{=} \frac{\delta\theta}{\delta\lambda}}$$

indique si le réseau sépare efficacement deux composantes spectrales.

La formule du réseau, appliquée aux longueurs d'onde λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \delta\lambda$:

$$\sin \theta_1 = p \frac{\lambda_{01}}{a} + \sin \theta_0$$

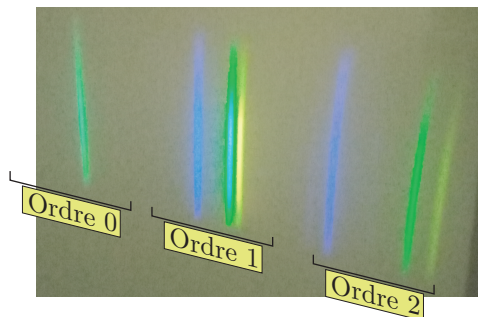
et :

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 = p \frac{\lambda_{02}}{a} + \sin \theta_0 &\Rightarrow \sin(\theta_1 + \delta\theta) = p \frac{\lambda_{01} + \delta\lambda}{a} + \sin \theta_0 \\ &\Rightarrow \sin \theta_1 + \delta\theta \cos \theta_1 \simeq p \frac{\lambda_{01} + \delta\lambda}{a} + \sin \theta_0 \end{aligned}$$

montre que pouvoir dispersif :

$$D = \frac{p}{a \cos \theta_1} = \frac{np}{\cos \theta_1}$$

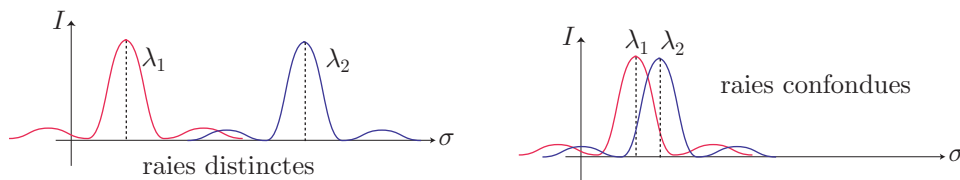
augmente avec l'ordre d'interférence p et avec la densité de fentes n . Cependant, cette grandeur dépend également de θ_1 .



DÉFINITION

Le **pouvoir séparateur** est le plus petit écart de longueurs d'ondes $\Delta\lambda_{\min}$ qu'un spectroscopie permet de distinguer.

On convient que deux raies de longueurs d'ondes λ_1 et λ_2 peuvent être distinguées si elles sont espacées d'une distance supérieure à leur demi-largeur ; il s'agit du **critère de Rayleigh** :



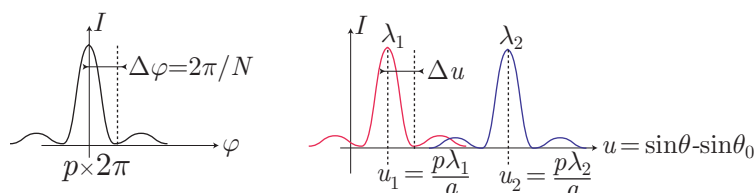
DÉFINITION

Le **pouvoir de résolution** d'un spectroscopie, au voisinage d'une longueur d'onde λ_1 , est une grandeur sans dimension :

$$R \hat{=} \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda_{\min}}$$

qui caractérise l'efficacité avec laquelle un appareil dispersif peut séparer deux raies spectrales.

L'intensité diffractée par un réseau présente des pics aux phases $\varphi = p \times 2\pi$, où $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (\sin \theta - \sin \theta_0)$, conformément à la courbe de la page (32) :



Un tel pic présente une demi-largeur en phase : $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$.

En revanche, dans l'espace, ces rayons correspondent à deux longueurs d'onde λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ qui sont envoyées dans des directions données par la formule du réseau :

$$u_1 = \sin \theta_1 - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda_1}{a} \text{ et } u_2 = \sin \theta_2 - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda_2}{a}$$

Dans l'espace, un tel pic présente alors une demi-largeur Δu directement accessible à partir de la définition :

$$\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_1} (\sin \theta - \sin \theta_0) = \frac{2\pi a}{\lambda_1} u \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda_1} \Delta u \Rightarrow \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi a}{\lambda_1} \Delta u \Rightarrow \Delta u = \frac{\lambda_1}{Na}$$

Or, selon le critère de Rayleigh, ces deux raies peuvent être distinguées à condition que :

$$\Delta u > u_2 - u_1 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{Na} > p \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{a} = p \frac{\Delta\lambda}{a} \Rightarrow \Delta\lambda < \frac{\lambda_1}{Np} \Rightarrow \Delta\lambda_{\min} = \frac{\lambda_1}{Np}$$

Le pouvoir de résolution vaut alors :

$$R = \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda_{\min}} = Np$$

c- Minimum de déviation

Le réseau étant éclairé sous une incidence θ_0 quelconque (angle mesuré par rapport à la normale et orienté positivement au sens de la trigonométrie), la raie lumineuse d'ordre p correspondant à λ_0 est observée dans une direction θ (avec la même convention). Elle subit donc une déviation $D = \theta - \theta_0$. En modifiant θ_0 (par rotation du réseau) on observe que, pour une longueur d'onde donnée, D passe par un minimum D_m non nul ; θ et θ_0 prennent alors les valeurs θ_m et θ_{0m} .

La définition de D entraîne, quant à elle :

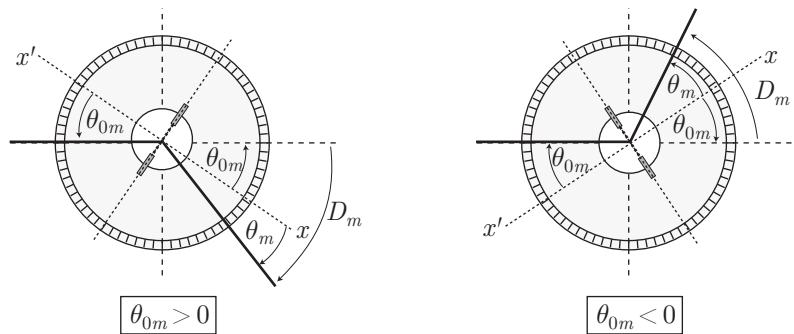
$$\text{au minimum de } D : \frac{dD}{d\theta_0} = \frac{d\theta}{d\theta_0} - 1 = 0 \Rightarrow \left. \frac{d\theta}{d\theta_0} \right|_{\theta_{0m}} = 1$$

En outre, la dérivation de la formule du réseau fournit :

$$\sin \theta - \sin \theta_0 = p \frac{\lambda_0}{a} \Rightarrow \left. \frac{d\theta}{d\theta_0} \right|_{\theta_m} \times \cos \theta_m - \cos \theta_{0m} = 0 \Rightarrow \cos \theta_m = \cos \theta_{0m} \Rightarrow \theta_0 = \theta_{0m} \text{ ou } \theta_m = -\theta_{0m}$$

La première solution doit être écartée, car elle conduirait à une déviation minimale nulle (qui n'est pas observée).

Par suite : $\theta_m = -\theta_{0m}$.



La déviation minimum vaut ainsi :

$$D_m = \theta_m - \theta_{0m} = 2\theta_m \Rightarrow \theta_m = \frac{D_m}{2} = -\theta_{0m}$$

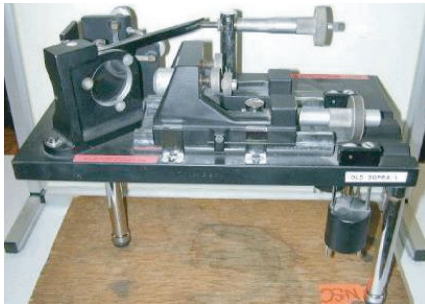
tandis que la formule du réseau devient :

$$\sin \theta_m - \sin \theta_{0m} = p \frac{\lambda_0}{a} \Rightarrow 2 \sin \left(\frac{D_m}{2} \right) = p \frac{\lambda_0}{a}$$

Ainsi, la longueur d'onde λ_0 est accessible à partir de la simple mesure de D_m . On s'affranchit de l'autocollimation visant à orienter préalablement le réseau perpendiculairement au faisceau incident.

V Interféromètre de Michelson

1- Présentation



Michelson SOPRA



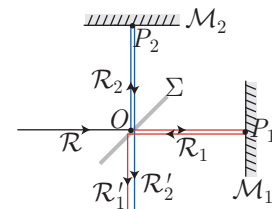
Michelson DIDALAB

a- Principe de l'interféromètre

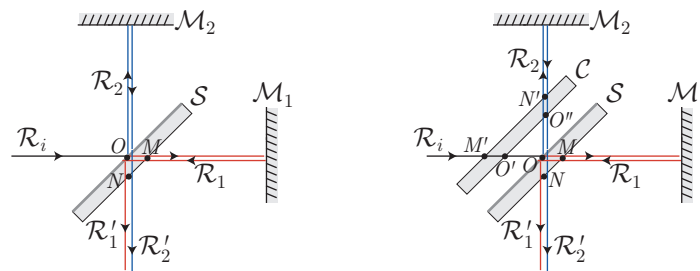
Un rayon lumineux \mathcal{R} est séparé en deux rayons (\mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2) de même intensité, par un système séparateur (Σ). Les figures d'interférence ainsi obtenues sont issues d'une **division d'amplitude**.

Deux miroirs (\mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2), presque perpendiculaires, renvoient la lumière vers Σ , d'où elle se réfléchit en rayons \mathcal{R}'_1 et \mathcal{R}'_2 , dont on observera les interférences. Le miroir \mathcal{M}_1 est monté sur un chariot dont le déplacement modifie la distance OP_1 . L'action s'appelle le **chariotage**.

Lorsque les miroirs \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont équidistants de Σ , l'instrument est réglé au **contact optique** ($OP_1 = OP_2$)



Le système Σ comporte une lame semi-transparente (S), appelée **lame séparatrice**, qui sépare un faisceau incident en deux faisceaux d'égale intensité. Seule la face d'entrée de S est revêtue d'une couche semi-réfléchissante.



Si la lame S était seule sur le trajet de la lumière, le rayon \mathcal{R}_1 devrait la traverser trois fois ($OM + MO + ON$) avant d'émerger en rayon \mathcal{R}'_1 , tandis que le rayon \mathcal{R}_2 ne devrait la traverser qu'une seule fois (ON) avant d'émerger en rayon \mathcal{R}'_2 . Cette différence introduirait alors une différence de marche supplémentaire dans les calculs.

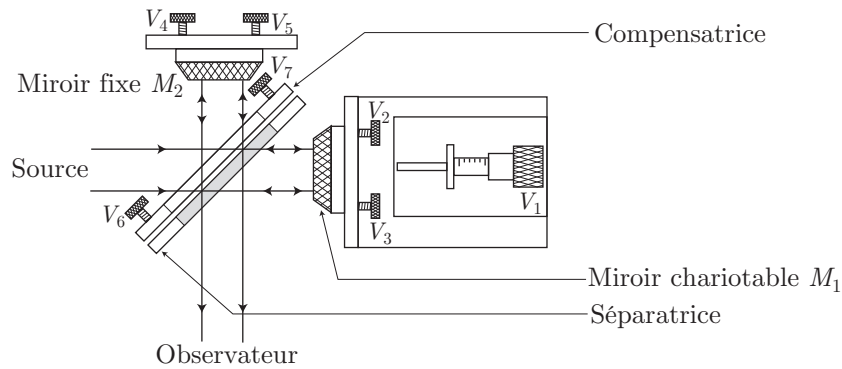
Pour éviter ce phénomène, le dispositif Σ est équipé d'une lame transparente (totalement), identique et parallèle à S ; il s'agit de la **lame compensatrice** (C). Le rayon \mathcal{R}_1 émerge alors après avoir traversé quatre fois les lames ($M'O' + OM + MO + ON$) de même que le rayon \mathcal{R}_2 ($M'O' + O''N' + N'O'' + ON$). Ainsi, quelle que soit l'incidence du rayon incident \mathcal{R}_i , la traversée des lames n'induit pas de différence de marche supplémentaire⁷. Désormais, on représentera S et C comme une unique lame semi-réfléchissante dans les schémas.

b- Constitution et réglages de l'appareil

L'interféromètre possède plusieurs vis de réglage :

- (V_2) et (V_3) : réglage rapide de l'orientation du miroir \mathcal{M}_1 ;
- (V_1) : translation du miroir \mathcal{M}_1 le long de son axe ;
- (V_4) et (V_5) : réglage fin de l'orientation du miroir \mathcal{M}_2 ;
- (V_6) et (V_7) : réglage de l'orientation de la compensatrice.

7. Un déphasage de π est cependant observé; il s'agit du déphasage que subit tout rayon qui se réfléchit partiellement sur un milieu plus réfringent (ici au cours de la réflexion $MO - ON$ du rayon \mathcal{R}_1).



La compensatrice est réglable à l'aide de deux vis de rotation V_6 et V_7 autour de l'axe vertical (OZ) et d'un axe horizontal (bissectrice de (OX) et (OY)).

Chaque miroir possède deux vis de rotation. Pour M_1 , V_2 et V_3 permettent de faire tourner le miroir autour de l'axe (OZ); ce sont les vis de rotation rapide. Pour M_2 , V_4 et V_5 sont des vis de rotation lente autour de l'axe OZ .

Seul le miroir M_1 est translatable grâce à une vis dite de *chariotage* (V_1). Son tambour est gradué en 50 graduations. La marge de déplacement du miroir M_1 est de quelques centimètres pour les interféromètres utilisés en TP.

Le Michelson réel possède parfois à l'entrée un verre anti-calorique pour éviter l'échauffement et la déformation des miroirs sous l'action des infra-rouges.

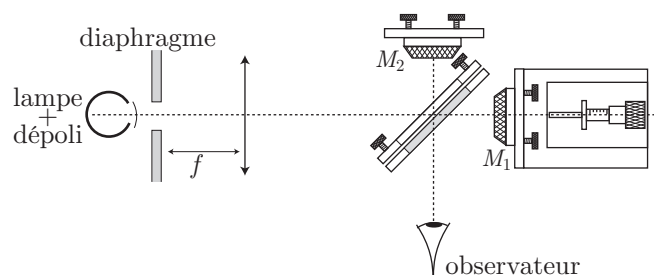
1. Réglage géométrique de la compensatrice

Le but de cette partie est de rendre la séparatrice et la compensatrice parallèles.

Ce réglage peut être fait à l'aide de n'importe quelle lampe, lampe de bureau par exemple, mais l'utilisation de la lampe Hg sera plus confortable. Un dépoli sera placé devant la source afin de rendre l'éclaircissement plus homogène et moins éblouissant.

Un faisceau lumineux parallèle sera réalisé, par autocollimation, avec un diaphragme circulaire presque totalement fermé placé au foyer d'une lentille convergente (distance focale 10 cm ou 15 cm).

Placer le système diaphragme-lentille dans l'axe de M_1 , de sorte que le faisceau de rayons parallèles, issus du dispositif collimateur, arrive à peu près normalement sur M_1 . Placer une lampe au mercure derrière le diaphragme. Observer à l'œil nu, sans accommoder, à la sortie des lames. Le cristallin est la lentille d'observation et la rétine le plan d'observation.



Le faisceau incident traverse la compensatrice, arrive sur la séparatrice. Une moitié du faisceau la traverse et arrive sur l'œil qui voit l'image principale du trou source, assez brillante. L'autre moitié de ce faisceau retourne vers la compensatrice qui en réfléchit une faible partie vers la séparatrice. Une moitié de ce faisceau traverse la séparatrice et arrive sur l'œil, qui voit une première image parasite du trou source, beaucoup plus faible que l'image principale. L'autre moitié de ce faisceau retourne vers la compensatrice et contribue à donner une seconde image parasite, etc.

On règle les vis V_6 et V_7 de sorte que les images parasites se confondent avec l'image principale. La précision de ce réglage est limitée par l'ouverture du trou source dont le diamètre n'est pas négligeable.

2. Réglage géométrique des miroirs

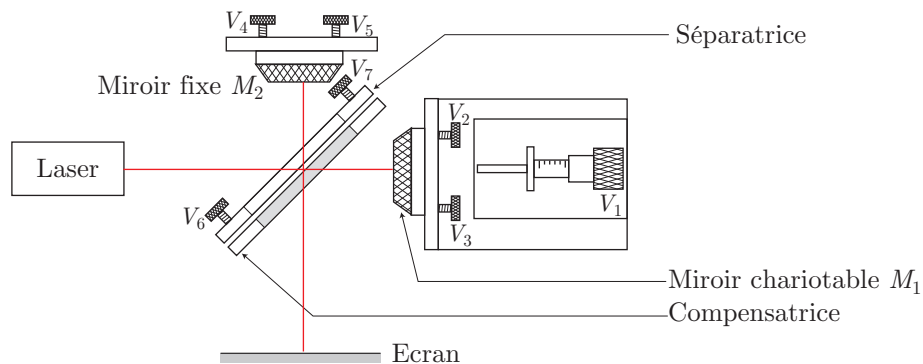
Le but de ce réglage est de faire en sorte que M_1 et M_2 soient parallèles. Afin d'y parvenir, ce premier réglage (dit géométrique) sera suivi d'un réglage interférométrique.

Positionner les vis de réglage fin V_4 et V_5 à mi-course afin de ne pas se trouver en butée par la suite. Maintenir le système diaphragme-lentille dans l'axe du miroir M_1 et observer dans l'axe du miroir M_2 . On observe une

image principale du trou source du collimateur et quelques images parasites comme lors du réglage précédent. On les fait coïncider en agissant sur l'orientation du miroir M_1 (V_2 et V_3). Lorsque les images du trou source coïncident, on peut dire alors que M_1 et M_2 font un angle inférieur à $3'$.

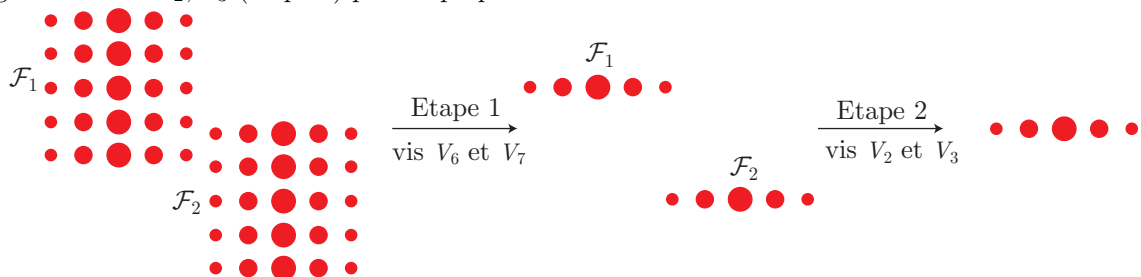
Il est également possible de procéder à un **réglage au laser** de l'appareil :

- Éclairer les miroirs de l'interféromètre avec un faisceau laser et observer la figure obtenue sur un écran :

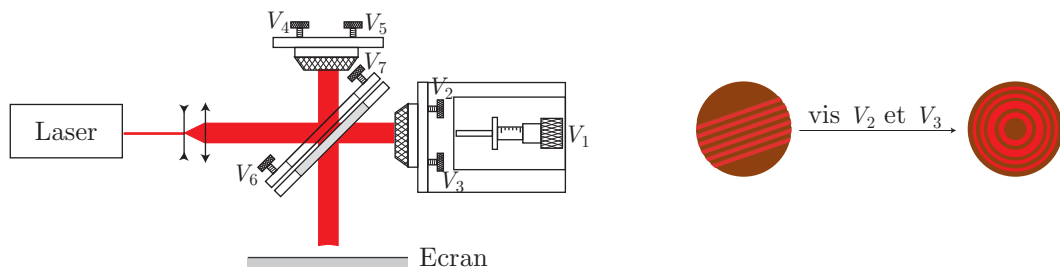


Deux familles de tâches (\mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2) peuvent apparaître sur l'écran.

- Agir d'abord (étape 1) sur les vis V_6 et V_7 pour regrouper les tâches de chacune de ces familles, puis agir sur les vis V_2, V_3 (étape 2) pour superposer les deux familles :



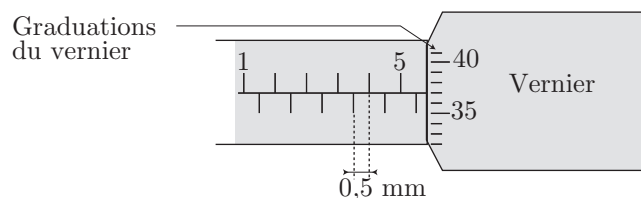
- Intercaler un élargisseur de faisceau sur le faisceau laser incident :



Si la figure d'interférence présente quelques franges rectilignes, agir sur les vis V_2 et V_3 pour obtenir des anneaux.

Si les franges sont trop nombreuses pour être distinguées, agir sur la vis de chariotage V_1 pour se rapprocher du contact optique, jusqu'à isoler quelques franges.

Enfin, le déplacement du chariot peut être contrôlé grâce à un **vernier** :



$$\text{lecture : } 5,5 \text{ mm} + 0,37 \text{ mm} = 5,87 \text{ mm}$$

Un déplacement de 0,5 mm est obtenu à chaque tour complet du vernier, qui comprend 50 graduations. Donc, une rotation entre deux graduations correspond à un déplacement de :

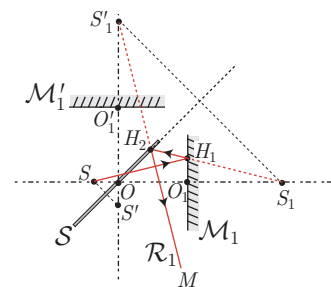
$$0,5 \cdot 10^{-3} \times \frac{1}{50} = 10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$$

c- Montage équivalent

Soit \mathcal{S} l'ensemble {séparatrice-compensatrice}, \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 les miroirs de l'interféromètre et S une source lumineuse ponctuelle qui émet un rayon \mathcal{R} , dont une partie (\mathcal{R}_1) traverse \mathcal{S} et se réfléchit sur \mathcal{M}_1 en H_1 , puis sur \mathcal{S} en H_2 avant d'émerger de l'instrument. :

On note :

- S' l'image de S par \mathcal{S} , symétrique de S par rapport au plan de \mathcal{S} ;
- S_1 l'image de S par \mathcal{M}_1 (symétrique de S par rapport au plan de \mathcal{M}_1); le rayon se réfléchit en H_1 comme s'il était émis par S_1 ;
- S'_1 l'image de S_1 par \mathcal{S} (symétrique de S_1 par rapport au plan de \mathcal{S}); le rayon se réfléchit sur \mathcal{S} en H_2 comme s'il était émis par S'_1 ;
- \mathcal{M}'_1 l'image de \mathcal{M}_1 par \mathcal{S} (symétrique de \mathcal{M}_1 par rapport au plan de \mathcal{S}).



Dans cette configuration, les relations :

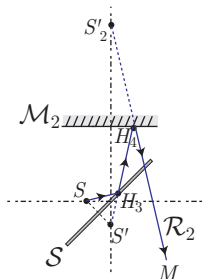
$$(SM) = (SH_1) + (H_1H_2) + (H_2M) = (S_1H_1) + (H_1H_2) + (H_2M) = (S_1H_2) + (H_2M) = (S'_1H_2) + (H_2M) = (S'_1M)$$

montrent que S'_1 se comporte comme une source secondaire qui émet le rayon \mathcal{R}_1 vers M , tandis que :

$$SS_1 = SO + OS_1 = S'O + OS'_1 = S'S'_1$$

montre que S'_1 est également l'image de S' par \mathcal{M}'_1 .

Considérons maintenant le rayon qui se réfléchit sur \mathcal{S} en H_3 , avant de se réfléchir sur \mathcal{M}_2 en H_4 :



Dans cette configuration, il apparaît que :

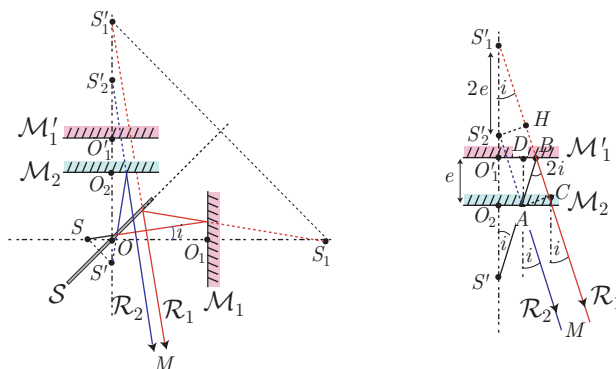
$$(SM) = (SH_3) + (H_3H_4) + (H_4M) = (S'H_3) + (H_3H_4) + (H_4M) = (S'H_4) + (H_4M) = (S'_2H_4) + (H_4M) = (S'_2M)$$

c'est-à-dire que le rayon \mathcal{R}_2 émerge de l'interféromètre comme s'il était émis par S'_2 , image de S' par \mathcal{M}_2 .

2- Configuration lame d'air

a- Différence de marche

Considérons l'interféromètre éclairé par une source ponctuelle S , dans un milieu homogène d'indice n . Les miroirs \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 sont perpendiculaires et séparés de S de distances OO_1 et OO_2 telles que $OO_1 - OO_2 = e = OO'_1 - OO_2$. D'après ce qui précède, le dispositif équivaut à deux miroirs \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}'_1 séparés d'une distance e et parallèles (l'espace entre ces miroirs constitue alors une **lame d'air**).



Ainsi, les rayons \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 qui convergent en un point M infiniment éloigné (car ces rayons sont parallèles) semblent provenir de S' et se réfléchir aux points A et B de \mathcal{M}_2 et \mathcal{M}'_1 respectivement. La différence de marche $\delta = (S'M)_1 - (S'M)_2$ peut s'obtenir de deux façons :

- \mathcal{R}_2 se réfléchit en A tandis que \mathcal{R}_1 semble se réfléchir en B . On note C le projeté orthogonal de A sur \mathcal{R}_1 , de sorte que $(AM) = (CM)$. Les chemins optiques, dans le milieu d'indice n , valent alors :

$$\begin{aligned} (S'M)_1 &= (S'A) + (AB) + (BC) + (CM) \text{ et } (S'M)_2 = (S'A) + (AM) \\ \Rightarrow \delta &= (AB) + (BC) = n \times (AB + BC) \end{aligned}$$

où, dans le triangle (ADB) : $\cos i = \frac{e}{AB} \Rightarrow AB = \frac{e}{\cos i}$ et dans le triangle (ACB) :

$$\begin{aligned} \cos(2i) = \frac{BC}{AB} &\Rightarrow BC = AB \cos(2i) \Rightarrow AB + BC = AB \times (1 + \cos 2i) = 2 AB \cos^2 i \\ \Rightarrow \delta = 2n AB \cos^2 i &\Rightarrow \boxed{\delta = 2ne \cos i} \end{aligned}$$

- Les rayons semblent provenir de S'_1 et S'_2 et H est le projeté orthogonal de S'_2 sur \mathcal{R}_1 . La différence de marche vaut alors :

$$\delta = (S'_1M) - (S'_2M) = (S'_1H) + (HM) - (S'_2M) = n \times S'_1H$$

avec :

$$\cos i = \frac{S'_1H}{S'_1S'_2} \Rightarrow \delta = n S'_1S'_2 \cos i$$

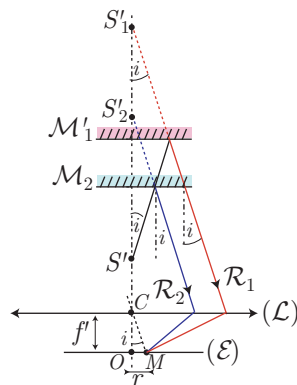
Or, S'_1 et S'_2 étant symétriques de S' par rapport à \mathcal{M}'_1 et \mathcal{M}'_2 respectivement :

$$\begin{cases} S'S'_1 = 2 S'O'_1 \\ S'S'_2 = 2 S'O'_2 \end{cases} \Rightarrow S'_1S'_2 = S'S'_1 - S'S'_2 = 2(S'O'_1 - S'O'_2) = 2e$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = 2ne \cos i}$$

b- Figure d'interférence

Les rayons \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 émergeant de l'interféromètre parallèlement l'un à l'autre, leur intersection s'observera à l'infini ou en un point M du plan focal image d'une lentille convergente (\mathcal{L}), de centre C et de distance focale f'



On note $r = OM$, de sorte que $\tan i = \frac{r}{f'}$.

C'est à partir de l'ordre d'interférence en M :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2ne}{\lambda_0} \cos i \quad (30)$$

que certaines observations peuvent être interprétées :

- Une frange d'interférence étant caractérisée par $p = \text{cte}$, elle correspond à $i = \text{cte}$, c'est-à-dire à $r = \text{cte}$. Il s'agit donc d'un anneau de centre O et de rayon r . C'est pourquoi la configuration « lame d'air » génère des franges appelée **anneaux d'égale inclinaison**.
- Lorsqu'on se rapproche du contact optique (e diminue), la relation (30) montre que, pour une frange déterminée ($p = \text{cte}$) :

$$e \searrow \Rightarrow \cos i \nearrow \Rightarrow i \searrow \Rightarrow r \searrow$$

Les anneaux semblent alors rentrer vers le centre O .

- Pour e fixé, p diminue lorsque r augmente :

$$r \nearrow \Rightarrow i \nearrow \Rightarrow \cos i \searrow \Rightarrow p \searrow$$

C'est pourquoi les anneaux brillants (p entiers) successifs d'ordres p , $p-1$, $p-2...$ sont observés de plus en plus loin de O .

- Au centre de la figure d'interférence, l'ordre vaut $p_0 = \frac{2ne}{\lambda_0}$, tandis qu'à sa périphérie, il prend une valeur p_{\min} correspondant à une valeur r_{\max} de r fixée par la taille de l'écran d'observation.

À cette valeur est alors associée une valeur i_{\max} de i telle que :

$$p_{\min} = \frac{2ne}{\lambda_0} \cos i_{\max}$$

Les franges brillantes alors visibles sur l'écran correspondent aux valeurs entières séparant p_{\min} de p_0 ; leur nombre est alors la partie entière de $p_0 - p_{\min}$:

$$N = E(p_0 - p_{\min}) = E\left[\frac{2ne}{\lambda_0} (1 - \cos i_{\max})\right]$$

Pour un écran fixé (donc i_{\max} fixé), plus on se rapproche du contact optique, plus e diminue et plus N diminue aussi; le nombre de franges diminue alors.

- La lentille \mathcal{L} étant utilisée dans les conditions de Gauss, i est suffisamment petit pour justifier que :

$$\cos i \simeq 1 - \frac{i^2}{2} \Rightarrow 1 - \frac{i^2}{2} = p \frac{\lambda_0}{2ne} \Rightarrow i \simeq \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{p\lambda_0}{2ne}}$$

et :

$$\tan i = \frac{r}{f'} \Rightarrow r \simeq f' \times i = f' \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{p\lambda_0}{2ne}} \quad (31)$$

Cette relation confirme d'une part que r est une fonction décroissante de p et s'autre part qu'une diminution de e provoque une diminution de r , pour p fixé :

$$e \searrow \Rightarrow \frac{p\lambda_0}{2ne} \nearrow \Rightarrow -\frac{p\lambda_0}{2ne} \searrow \Rightarrow r \searrow$$

Donc, le rapprochement du contact optique se visualise par une diminution du rayon des anneaux.

- Au centre de la figure, p prend la valeur p_0 qui annule l'expression (31) de i :

$$p_0 = \frac{2ne}{\lambda_0} \Rightarrow r = f' \sqrt{2} \sqrt{1 - \frac{p}{p_0}} \quad (32)$$

Si p_0 est un nombre entier, le centre de la figure est brillant.

Le premier anneau brillant apparaît alors à une distance r_1 correspondant à $p_1 = p_0 - 1$; le deuxième à une distance r_2 correspondant à l'ordre $p_2 = p_1 - 1 = p_0 - 2...$ et celui de rayon r_N à l'ordre $p_N = p_0 - N$. La relation (31) donne alors le rayon r_N du $N^{\text{ième}}$ anneau brillant :

$$1 - \frac{p_N}{p_0} = 1 - \frac{(p_0 - N)}{p_0} = \frac{N}{p_0} \Rightarrow r_N = f' \sqrt{\frac{2}{p_0}} \sqrt{N} \text{ pour } p_0 \in \mathbb{Z}^*$$

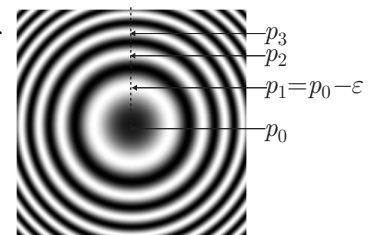
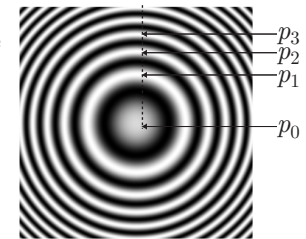
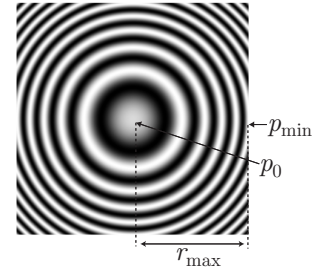
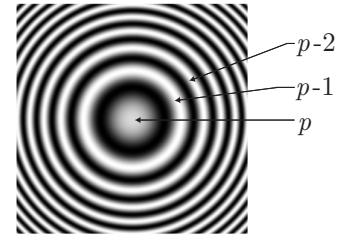
Si p_0 n'est pas un entier, il existe un nombre $\varepsilon \in]0; 1[$ qui affecte un premier anneau brillant l'ordre $p_1 = p_0 - \varepsilon \in \mathbb{Z}$ (car $p_1 < p_0$).

Le deuxième anneau brillant est donc associé à l'ordre :

$$p_2 = p_1 - 1 = p_0 - \varepsilon - 1$$

et le $N^{\text{ième}}$ anneau brillant est associé à l'ordre :

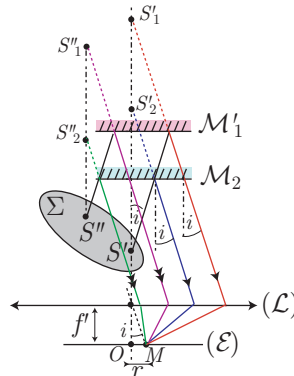
$$p_N = p_1 - (N - 1) = p_0 - \varepsilon - N + 1 \Rightarrow 1 - \frac{p_N}{p_0} = \frac{\varepsilon + N - 1}{p_0}$$



Son rayon vaut alors :

$$r_N = f' \sqrt{\frac{2}{p_0}} \times \sqrt{N + \varepsilon - 1}$$

- Les sources virtuelles S'_1 et S'_2 se comportent comme deux trous d'Young ponctuels si la source S est ponctuelle. Comme dans le cas des trous d'Young, un tel dispositif produit des interférences non localisées. Comme expliqué en page ??, un élargissement de la source S devrait altérer le contraste. Or, sur le schéma de la page ??, à chaque angle i correspond un unique point M , quelle que soit la position de la source (S' ou S'') :



Il est donc possible d'utiliser une source étendue (Σ) ; l'éclairement en M sera d'autant plus intense. Les franges sont alors **localisées** «à l'infini» ou dans le plan focal image de \mathcal{L} .

En conclusion :

À retenir :

- Les franges sont des anneaux d'égale inclinaison.
- Elles sont localisées à l'infini avec une source étendue.
- Elles sont non localisées avec une source ponctuelle.
- L'ordre p diminue avec la distance r au centre.
- Les anneaux convergent vers le centre lorsque e diminue.
- Plus on se rapproche du contact optique, moins les anneaux sont nombreux.
- Si l'ordre au centre p_0 est entier, r_N varie comme \sqrt{N} .

c– Source polychromatique

Considérons un interféromètre réglé en lame d'air et éclairé avec une source étendue comportant deux longueurs d'onde λ_1 et $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$, avec $\Delta\lambda \ll \lambda_1$.

L'observation se fait au foyer image d'une lentille convergente (c'est-à-dire sous l'incidence $i = 0$). Une photodiode y reçoit l'intensité lumineuse I et la transmet à un ordinateur susceptible de la tracer dans le temps.

Au centre des anneaux d'égale inclinaison, la différence de marche vaut (dans l'air, où $n = 1$) :

$$\delta = 2e \cos i = 2e$$

et à chaque longueur d'onde correspond une intensité donnée par la formule de Fresnel :

$$I_1 = I_0 [1 + \cos(k_1\delta)] \text{ et } I_2 = I_0 [1 + \cos(k_2\delta)] \text{ où } k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \text{ et } k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

Les rayonnements correspondants n'étant pas mutuellement cohérents, leurs intensités s'additionnent pour donner l'intensité résultante :

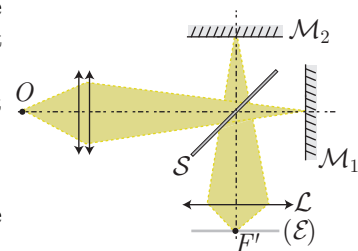
$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 = I_0 \times [2 + \cos p + \cos q] \text{ où } p = k_1\delta \text{ et } q = k_2\delta \\ &= I_0 \times \left[2 + 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \times \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

avec :

$$p - q = 2\pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_1 + \Delta\lambda} \right) = 2\pi\delta \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1(\lambda_1 + \Delta\lambda)} \simeq 2\pi\delta \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2} \text{ car } \lambda_1 \gg \Delta\lambda$$

et :

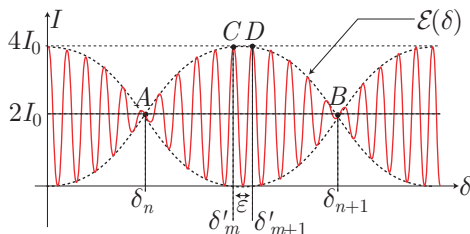
$$p + q = 2\pi\delta \times \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_1 + \Delta\lambda} \right) = 2\pi\delta \times \frac{2\lambda_1 + \Delta\lambda}{\lambda_1(\lambda_1 + \Delta\lambda)} \simeq 2\pi\delta \times \frac{2}{\lambda_1}$$



Par suite :

$$I = 2I_0 \left[1 + \cos \left(\frac{\pi \Delta\lambda}{\lambda_1^2} \delta \right) \times \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta \right) \right] = 2I_0 \left[1 + \mathcal{E}(\delta) \times \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta \right) \right]$$

Or, la condition $\Delta\lambda \ll \lambda_1$ impose à la fonction $\mathcal{E}(\delta) = \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1} \times \frac{\delta}{\lambda_1} \right)$ de varier beaucoup plus lentement que la fonction $\cos \left(2\pi \frac{\delta}{\lambda_1} \right)$; elle lui sert alors d'enveloppe :



Lors du **chariotage** (souvent effectué à l'aide d'un moteur), la variation de e entraîne celle de $\delta = 2e$ et donc de l'intensité I (alors enregistrée avec un ordinateur). Pour certaines valeurs de δ le contraste s'annule (en A, B, \dots) ; un **brouillage** se produit donc pour des valeurs de δ qui annulent $\mathcal{E}(\delta)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\delta) = 0 &\Rightarrow \cos \left(\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2} \delta \right) = 0 \text{ pour } \pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2} \delta_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \text{ et } \pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2} \delta_{n+1} = \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi \dots \\ &\Rightarrow \pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_1^2} (\delta_{n+1} - \delta_n) = \pi \Rightarrow \delta_{n+1} - \delta_n = \frac{\lambda_1^2}{\Delta\lambda} \end{aligned}$$

En revanche, le maximum d'intensité (points C et D) correspond aux valeurs de δ qui affectent à $\cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta \right)$ sa valeur maximale, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{2\pi}{\lambda_1} \delta'_m = m \times 2\pi, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{2\pi}{\lambda_1} \delta'_{m+1} \times (m+1) \times 2\pi \end{cases} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda_1} \underbrace{(\delta'_{m+1} - \delta'_m)}_{\varepsilon} = 2\pi \Rightarrow \varepsilon = \lambda_1$$

Par conséquent, entre deux annulations successives du contraste se trouvent N maxima de I vérifiant :

$$\delta_{n+1} - \delta_n = N \times \varepsilon \Rightarrow N = \frac{\lambda_1^2}{\Delta\lambda} \times \frac{1}{\lambda_1} \Rightarrow \boxed{N = \frac{\lambda_1}{\Delta\lambda}}$$

Dans la pratique, la valeur de N est extraite de l'enregistrement de $I(\delta)$ (ou $I(t)$), tandis que la valeur de λ_1 peut être issue d'une autre mesure (par exemple à l'aide d'un spectrogoniomètre). La valeur de $\Delta\lambda = \frac{\lambda_1}{N}$ s'en déduit alors.

EXERCICE

Un interféromètre de Michelson est réglé en lame d'air. L'abscisse du chariot au contact optique est notée x_0 et on pose $x = x_0 + X$. On éclaire le Michelson avec une source **bichromatique** de longueurs d'onde très proches et de couleurs indiscernables à l'œil.

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_0 - \frac{\Delta\lambda}{2} \\ \lambda_2 = \lambda_0 + \frac{\Delta\lambda}{2} \end{cases} \text{ où } \begin{cases} \lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \\ \Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \end{cases} \text{ où } \Delta\lambda \ll \lambda_0$$

On fait l'observation à l'infini en plaçant un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente de distance focale f' .

1. Lorsque l'épaisseur de la lame d'air vaut e , donner l'expression de l'intensité lumineuse au centre de l'écran $I_1(e)$ créée par la radiation de longueur d'onde λ_1 et $I_2(e)$ créée par la radiation de longueur d'onde λ_2 .
2. En déduire l'intensité résultante $I(e)$.
3. Pour e fixé, on observe des franges pour $i \in [0, i_{\max}]$, avec $i_{\max} \ll 1$. Déterminer l'expression du contraste $\mathcal{C}(e)$ de la figure.
4. Pour le doublet jaune du sodium, on donne $\lambda_0 = 589,3$ nm. On observe un brouillage périodique des franges pour les valeurs suivantes de X , exprimées en millimètres :

0,145 0,436 0,727 1,017 1,308 1,599 1,889 2,180

En déduire $\Delta\lambda$.

Réponses

1. Dans l'air d'indice $n = 1$, la différence de marche $\delta = 2e \cos i$ vaut $\delta_0 = 2e$ au centre de l'écran ($i = 0$). L'intensité lumineuse créée par les radiations de longueurs d'onde λ_1 et λ_2 sont données par la formule de Fresnel :

$$I_1(e) = I_0 [1 + \cos(k_1\delta)] \text{ et } I_2 = I_0 [1 + \cos(k_2\delta)] \text{ où } k_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \text{ et } k_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2}$$

2. En posant $p = k_1\delta = \frac{2\pi\delta}{\lambda_1}$ et $q = \frac{2\pi\delta}{\lambda_2}$, l'intensité résultante vaut la somme des intensités (les ondes lumineuses ne sont pas mutuellement cohérentes lorsque $\lambda_1 \neq \lambda_2$) :

$$I(e) = I_0 [2 + \cos p + \cos q] = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \right]$$

où :

$$\frac{p-q}{2} = \pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \pi\delta \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2} \simeq \pi\delta \times \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

et :

$$\frac{p+q}{2} = \pi\delta \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) = \pi\delta \times \frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_1\lambda_2} \simeq \pi\delta \times \frac{2}{\lambda_0}$$

$$\Rightarrow I(e) = 2I_0 \left[1 + \cos\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right) \right] \text{ où } \delta = 2e$$

3. En dehors du centre de l'écran, l'angle i prenant diverses valeurs, $\delta = 2e \cos i$ varie assez vite pour que $\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta\right)$ varie entre -1 et $+1$, tandis que $\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \ll 1$ suggère que :

$$\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \delta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \times \frac{\pi}{\lambda_0} \times 2e \cos i \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \times \frac{\pi}{\lambda_0} \times 2e \times \left(1 - \frac{i^2}{2} \right) \simeq 2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} e$$

L'intensité I varie donc entre :

$$I_{\max} = 2I_0 \times \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} e\right) \right] \text{ et } I_{\min} = 2I_0 \times \left[1 - \cos\left(2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} e\right) \right]$$

La figure d'interférence présente alors un contraste :

$$\mathcal{C}(e) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \cos\left(2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} e\right)$$

4. Les franges se brouillent lorsque leur contraste est nul, donc pour des valeurs de e telles que :

$$\cos\left(2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} e\right) = 0 \Rightarrow 2\pi \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} e = \frac{\pi}{2} + n\pi \Rightarrow e = \frac{\lambda_0^2}{4\Delta\lambda} + n \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda} \text{ où } n \in \mathbb{Z}$$

et où l'épaisseur e de la lame d'air s'identifie à l'écart X du miroir par rapport au contact optique.

	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_n (mm)	0,145	0,436	0,727	1,017	1,308	1,599	1,889	2,180
$\Delta X_n = X_{n+1} - X_n$	0,291	0,291	0,290	0,291	0,291	0,290	0,291	

Plusieurs exploitations des données précédentes conduisent à la valeur de $\Delta\lambda$:

– La première valeur de X qui annule le contraste depuis le contact optique vaut :

$$X_0 = \frac{\lambda_0^2}{4\Delta\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{4X_0} = \frac{(589,3 \cdot 10^{-9})^2}{4 \times 0,145 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \Delta\lambda \simeq 0,6 \text{ nm}$$

– Deux annulations successives de contraste s'observent pour un chariotage :

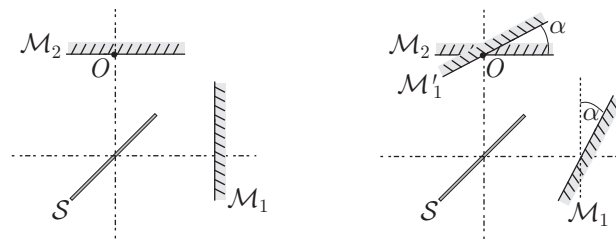
$$\Delta X_n = X_{n+1} - X_n = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta\lambda} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2\Delta X_n} \simeq \frac{(589,3 \cdot 10^{-9})^2}{2 \times 0,291 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \Delta\lambda \simeq 0,6 \text{ nm}$$

– Le tracé de $X_n = f(n)$ aurait produit une droite dont la pente ΔX aurait été obtenue par régression linéaire.

3– Configuration coin d'air

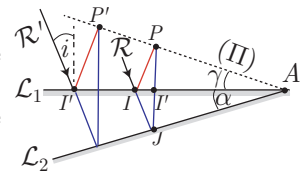
a– Figure d'interférence

Considérons l'interféromètre de Michelson réglé au contact optique, dont le miroir \mathcal{M}_1 est incliné d'un petit angle α par rapport à la configuration en lame d'air :



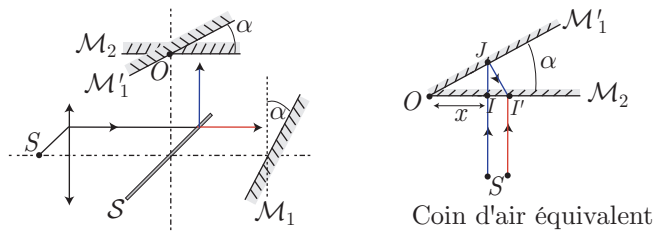
Son image \mathcal{M}'_1 par rapport à la séparatrice est donc aussi inclinée d'un angle α par rapport à \mathcal{M}_2 ; le dièdre $(O, \mathcal{M}'_1, \mathcal{M}_2)$ constitue un **coin d'air**. Or, de l'annexe 4 (page 63), il ressort que :

– deux rayons parallèles \mathcal{R} et \mathcal{R}' produisent des interférences en des points P et P' d'un plan Π faisant un angle $\gamma = i - \alpha$ par rapport à \mathcal{L}_1 . C'est pourquoi le Michelson réglé en coin d'air sera éclairé par une source quasi-ponctuelle située au foyer objet d'une lentille convergente \mathcal{L} ; on la supposera monochromatique (λ_0) dans un premier temps.



– les angles i et α seront toujours très petits, de sorte que $\gamma = i - \alpha \simeq 0$; les interférences seront ainsi localisées au voisinage de \mathcal{L}_1 ; on notera $I' \in \mathcal{L}_1$ le point où elles se forment.
 – la différence de marche $\delta = (IJP) - (IP) \simeq (IJI')$ est donnée par le résultat (51) de la page 64 :

$$\delta = 2AP \sin \alpha \simeq 2x\alpha \quad \text{car } AP \simeq OI = x \quad (33)$$

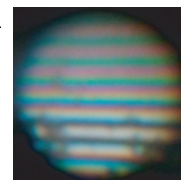


Une frange d'interférence est caractérisée par son ordre p constant :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2\alpha x}{\lambda_0} \Rightarrow x = p \frac{\lambda_0}{2\alpha} = \text{cte}$$

Les franges d'interférence sont donc des segments de droite.
 Deux franges claires successives (correspondant à $\Delta p = 1$) sont donc séparées d'un interfrange :

$$i = \Delta x = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$



En diminuant α , on écarte donc les franges d'interférence.

b- Effet du chariotage

Depuis la position précédente (contact optique), envisageons un déplacement du miroir \mathcal{M}_2 d'une distance e .

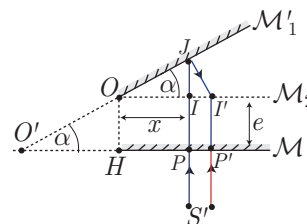
Première méthode La translation du miroir \mathcal{M}_2 vers sa nouvelle position \mathcal{M}'_2 produit un nouveau coin d'air de sommet O' et d'angle α :

Les interférences issues d'un même rayon incident se produisent alors au voisinage du plan de \mathcal{M}'_2 (en P'), conformément à la formule (33) :

$$\delta = 2O'P'\alpha$$

où :

$$O'P' = O'H + HP' = O'H + x \text{ car } P = P'$$



et :

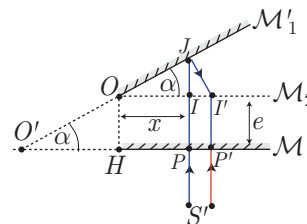
$$\tan \alpha = \frac{e}{O'H} \Rightarrow O'H = \frac{e}{\tan \alpha} \simeq \frac{e}{\alpha} \Rightarrow \delta = 2\alpha \times \left(\frac{e}{\alpha} + x\right) = 2e + 2\alpha x$$

Deuxième méthode Comme précédemment, la translation de \mathcal{M}_2 a produit un nouveau coin d'air, de sommet O' . C'est pourquoi les interférences se produisent au voisinage de \mathcal{M}'_2 .

Une fraction du rayon lumineux qui arrive en P doit alors se réfléchir en J avant de revenir en $P' = P$ pour interférer avec l'autre fraction qui arrive en P . La **différence de marche** vaut ainsi $\delta = (S'JP') - (S'P)$,

où :

$$(S'JP') = (S'P) + (PI) + (IJI') + (I'P') = (S'P) + e + 2\alpha x + e \Rightarrow \delta = 2e + 2\alpha x$$



Ce résultat étant le même que précédemment, c'est désormais cette approche qui sera adoptée dans la suite.

L'ordre d'interférence $p = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{2}{\lambda_0} (e + \alpha x)$ permet de conclure que :

- l'interfrange ($\Delta x = i$ pour $\Delta p = 1$) n'est pas modifié par le chariotage :

$$1 = \frac{2}{\lambda_0} (\alpha i) \Rightarrow i = \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

- la frange centrale (qui correspond à $p = 0$) occupe une abscisse x_c qui dépend linéairement de e :

$$0 = \frac{2}{\lambda_0} (e + \alpha x_c) \Rightarrow x_c = -\frac{e}{\alpha}$$

Elle est donc tradatée (à l'instar de toute la figure d'interférence).

c- Introduction d'une lame transparente

Dans le Michelson réglé en coin d'air, au contact optique, une lame transparente (\mathcal{L}) à faces parallèles est introduite devant le miroir \mathcal{M}_2 ; son épaisseur vaut ℓ et son indice vaut $n > 1$.

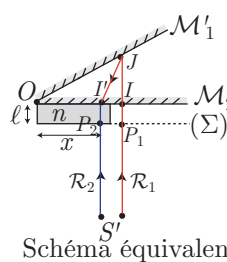
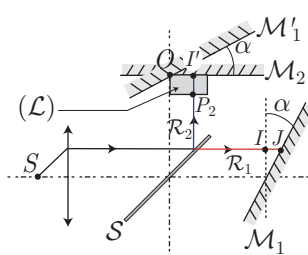


Schéma équivalent

Ce montage équivaut à un coin d'air :

- Une fraction (\mathcal{R}_1) de la lumière se dirige directement sur \mathcal{M}_1 (ou \mathcal{M}'_1) et devra parcourir le chemin optique $IJI' = 2\alpha x$ pour interférer à la surface du miroir \mathcal{M}_2 .
- L'autre fraction de lumière (\mathcal{R}_2) se réfléchit sur la séparatrice (\mathcal{S}) vers le miroir \mathcal{M}_2 qu'elle atteint en I' après avoir traversé la lame \mathcal{L} en P_2 ; on note P_1 le projeté de P_2 sur \mathcal{R}_1 (les points P_1 et P_2 appartiennent ainsi à une même surface d'onde Σ)

La différence de marche $\delta = (S'IJ') - (S'I')$ se calcule en évaluant :

$$(S'IJ') = (S'P_1) + (P_1I) + (IJI') = (S'P_1) + \ell + 2\alpha x$$

et :

$$(S'I') = (S'P_2) + (P_2I') = (S'P_1) + n\ell \Rightarrow \delta = 2\alpha x + \ell(1 - n) \Rightarrow p = \frac{1}{\lambda_0} [2\alpha x + \ell(1 - n)]$$

En l'absence de lame, une frange d'ordre p se trouve alors à l'abscisse x_p telle que :

$$p = \frac{1}{\lambda_0} \times 2\alpha x_p \Rightarrow x_p = p \frac{\lambda_0}{2\alpha}$$

tandis que l'introduction de la lame translate cette frange vers une abscisse x'_p telle que :

$$p = \frac{1}{\lambda_0} [2\alpha x'_p + \ell(1 - n)] \Rightarrow x'_p = \frac{1}{2\alpha} [p\lambda_0 + \ell(n - 1)]$$

Ainsi, la figure d'interférence (segments rectilignes) est globalement traduite de :

$$\Delta x = x'_p - x_p = \frac{\ell(n - 1)}{2\alpha}$$

d- Éclairage en lumière blanche

Considérons le Michelson configuré en coin d'air, au contact optique, éclairé en lumière blanche (dont les longueurs d'onde visibles sont comprises entre $\lambda_b \simeq 400$ nm pour le bleu et $\lambda_r \simeq 700$ nm pour le rouge). La différence de marche ($2\alpha x$) conduit à l'ordre d'interférence des **franges d'égale épaisseur** :

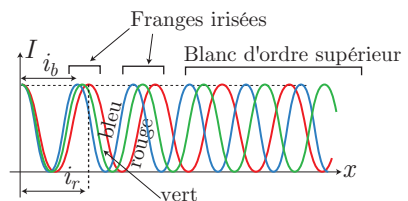
$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{2\alpha x}{\lambda} \Rightarrow \Delta p = \frac{2\alpha}{\lambda} \Delta x \Rightarrow 1 = \frac{2\alpha}{\lambda} i \Rightarrow i = \frac{\lambda}{2\alpha}$$

Ces relations révèlent que :

- la frange centrale ($p = 0$) se trouve en $x = \frac{\lambda}{2\alpha} p = 0$ pour toutes les longueurs d'onde. Toutes les couleurs y présentent alors un maximum d'intensité ($p = 0$ est un entier) et se recomposent pour y produire une frange blanche.
- l'interfrange i dépend de la longueur d'onde λ ; il est d'autant plus grand que λ est grande :

$$i_{\text{bleu}} = \frac{\lambda_b}{2\alpha} < \frac{\lambda_r}{2\alpha} = i_{\text{rouge}}$$

En s'écartant du centre de la figure, des franges irisées apparaissent, qui fusionnent encore plus loin pour former un **blanc d'ordre supérieur**.



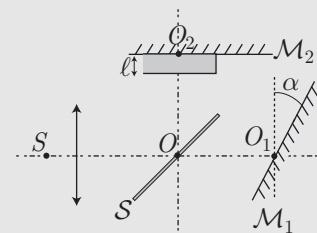
EXERCICE

Un interféromètre de Michelson, réglé en coin d'air (pas nécessairement au contact optique), est éclairé en lumière blanche.

Les franges du coin d'air sont observées sur le miroir \mathcal{M}_2 , où la frange centrale est repérée par sa couleur blanche.

Une lame (\mathcal{L}) à faces parallèles, transparente, d'indice $n = 1,5$ et d'épaisseur ℓ , est alors introduite devant le miroir \mathcal{M}_2 .

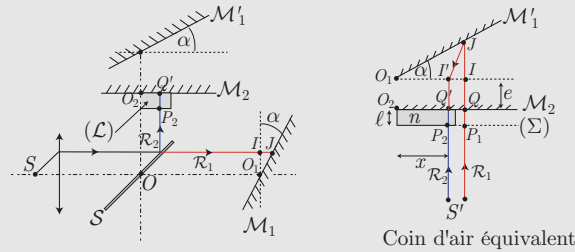
On constate qu'il faut effectuer un chariotage de $50 \mu\text{m}$ pour ramener la frange centrale à sa position initiale.



1. Exprimer δ en fonction de $e = OO_1 - OO_2$, α , n , ℓ et x .
2. En déduire la valeur de ℓ .

Réponses

1. La lame séparatrice (S) transmet une partie (\mathcal{R}_1) du rayon incident sur le point J de \mathcal{M}_1 et réfléchit l'autre partie (\mathcal{R}_2) vers le point Q' de \mathcal{M}_2 , après avoir traversé la lame (\mathcal{L}) en P_2 :



La différence de marche $\delta = (S'JQ') - (S'Q')$ se détermine aisément à l'aide du montage équivalent :

$$(S'JQ') = (S'P_1) + (P_1Q) + (QI) + (IJI') + (I'Q') = (S'P_1) + \ell + e + 2\alpha x + e$$

et :

$$(S'Q') = (S'P_2) + (P_2Q') = (S'P_2) + n\ell \text{ où } (S'P_2) = (S'P_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta = \ell(1 - n) + 2e + 2\alpha x}$$

2. Pour toute longueur d'onde λ_0 , l'ordre d'interférence ($p = \frac{\delta}{\lambda_0}$) de la frange centrale (située en x_c) est nul, ce qui se traduit par :

$$0 = \frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_0} [\ell(1 - n) + 2e + 2\alpha x]$$

En l'absence de lame ($\ell = 0$) : $2e = -2\alpha x_c$ alors qu'en présence de la lame, l'épaisseur $e' = e + \Delta e$ est établie de manière à ramener la frange centrale à son abscisse initiale x_c :

$$\frac{1}{\lambda_0} [\ell(1 - n) + 2e' + 2\alpha x_c] = 0 \Rightarrow \ell(1 - n) + 2e + 2\Delta e = -2\alpha x_c = 2e$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = \frac{2\Delta e}{n - 1}} = \frac{2 \times 50 \cdot 10^{-6}}{0,5} = 100 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 0,2 \text{ mm}$$

Annexe 1 : Chemin optique

1- Équation des rayons lumineux



DÉFINITION

Le **chemin optique** entre deux points A et B s'identifie à la variation d'une fonction (\mathcal{L}) appelée **eïkonale** :

$$(AB) \hat{=} \int_A^B n(M) ds_M \hat{=} \mathcal{L}(B) - \mathcal{L}(A)$$

Soit $d\vec{s}_M$ un déplacement élémentaire au voisinage d'un point M du rayon lumineux \mathcal{R} passant par A et B et \vec{u} un vecteur unitaire tangent à \mathcal{R} en M :

$$d\vec{s}_M = ds_M \vec{u} \Rightarrow ds_M = \vec{u} \cdot d\vec{s}_M \Rightarrow \mathcal{L}(B) - \mathcal{L}(A) = \int_A^B [n(M) \vec{u}] \cdot d\vec{s}_M$$



La définition du gradient d'une fonction scalaire fournit alors :

$$d\mathcal{L} = \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{L} \cdot d\vec{s}_M \Rightarrow \mathcal{L}(B) - \mathcal{L}(A) = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{L} \cdot d\vec{s}_M$$

Par identification :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{L} = n \vec{u} \quad (34)$$

Puisque \vec{u} est un vecteur tangent à \mathcal{R} au point M , il s'ensuit que :

$$\text{un rayon lumineux est une ligne de champ de } \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{L}$$

De la loi générale :

$$\overrightarrow{\text{grad}} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{A}$$

il ressort que :

- Si $\vec{A} = \vec{B} = \vec{u}$:

$$\vec{u} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{u} = \vec{0} \text{ car } u^2 = 1 \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} (u^2) = 0 \quad (35)$$

- Si $\vec{A} = n \vec{u}$ et $\vec{B} = \vec{u}$, compte tenu des relations (35) et (34) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}} (nu^2) &= n\vec{u} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} + \vec{u} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} (n\vec{u}) + (n\vec{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}) (n\vec{u}) \\ &= n \underbrace{[\vec{u} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{u}]}_{\vec{0}} + \vec{u} \wedge \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{L})}_{\vec{0}} + (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}) (n\vec{u}) \\ &\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} (n) = (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}) (n\vec{u}) \end{aligned} \quad (36)$$

Or, quel que soit un vecteur \vec{A} dépendant de l'espace :

$$\frac{d\vec{A}}{ds} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

où la définition de $d\vec{s}$ et de \vec{u} fournissent :

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= ds \vec{u} \Rightarrow \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = ds \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{dx_i}{ds} = u_{x_i} \\ &\Rightarrow \frac{d\vec{A}}{ds} = u_x \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \Rightarrow \frac{d\vec{A}}{ds} = (\vec{u} \cdot \overrightarrow{\nabla}) \vec{A} \end{aligned}$$

Finalement, l'identité (36) conduit à l'**équation des rayons lumineux** :

$$\overrightarrow{\text{grad}} n = \frac{d}{ds} (n\vec{u}) \quad (37)$$

2– Applications

a– Propagation en milieu homogène

En milieu homogène, n est indépendant de l'espace, ce qui simplifie l'équation (37) :

$$\overrightarrow{\text{grad}} n = \vec{0} \Rightarrow n \frac{d\vec{u}}{ds} = \vec{0} \Rightarrow d\vec{u} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{\text{cte}}$$

et qui suffit à prouver que :

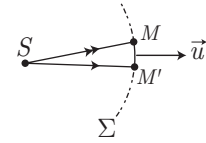
la lumière se propage en ligne droite en milieu homogène.

 (38)

b– Théorème de Malus

Soient M et M' deux points d'une même surface d'onde Σ , infiniment proches, éclairés par une même source S . La définition de Σ impose l'identité des chemins optiques :

$$\begin{aligned} (SM) = (SM') &\Rightarrow \mathcal{L}(M) - \mathcal{L}(S) = \mathcal{L}(M') - \mathcal{L}(S) \\ &\Rightarrow \mathcal{L}(M') - \mathcal{L}(M) = 0 \Rightarrow d\mathcal{L} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{L} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \\ &\Rightarrow n\vec{u} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{u} \perp \overrightarrow{MM'}} \end{aligned}$$



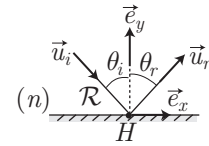
Or, puisqu'en M (ou M') le rayon lumineux est une ligne de champ du vecteur \vec{u} , cette relation signifie également que :

localement, le rayon lumineux est perpendiculaire à la surface d'onde.

c– Lois de Snell-Descartes

Soit \mathcal{R} un rayon lumineux se propageant dans un milieu homogène d'indice n et se réfléchissant en un point H .

Les rayons incident et réfléchi, inclinés respectivement de θ_i et de θ_r par rapport à la normale (H, \vec{e}_y) , ont des vecteurs unitaires :



$$\vec{u}_i = \begin{pmatrix} \sin \theta_i \\ -\cos \theta_i \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta_r \\ \cos \theta_r \end{pmatrix} \text{ dans la base } \{H, \vec{e}_x, \vec{e}_y\}$$

Afin d'ignorer l'éventuelle discontinuité de n dans la direction de \vec{e}_y , l'équation (37) peut être projetée sur (H, \vec{e}_x) , direction dans laquelle n ne varie pas :

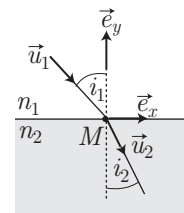
$$\vec{e}_x \cdot \overrightarrow{\text{grad}} n = \vec{e}_x \cdot \frac{d}{ds} (n\vec{u}) \Rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{ds} (n\vec{u} \cdot \vec{e}_x) = 0 \Rightarrow \boxed{n\vec{u} \cdot \vec{e}_x = \overrightarrow{\text{cte}}} \quad (39)$$

Il s'ensuit que :

$$n \begin{pmatrix} \sin \theta_i \\ -\cos \theta_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} \sin \theta_r \\ \cos \theta_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sin \theta_i = \sin \theta_r \Rightarrow \boxed{\theta_i = \theta_r}$$

Considérons maintenant un rayon lumineux subissant en H une réfraction entre deux milieux d'indices n_1 et n_2 . Le résultats (39) devient alors, au voisinage de H :

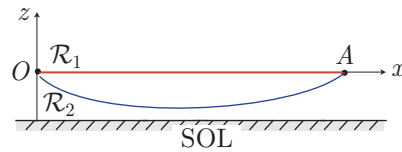
$$\begin{aligned} n_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{e}_x = n_2 \vec{u}_2 \cdot \vec{e}_x &\Rightarrow n_1 \begin{pmatrix} \sin i_1 \\ -\cos i_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = n_2 \begin{pmatrix} \sin i_2 \\ -\cos i_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2} \end{aligned}$$



ce qui confirme les lois de Snell-Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction.

d- Mirage optique

Considérons une source lumineuse située en un point $O(0,0)$ plongée dans une atmosphère inhomogène, où l'indice de réfraction dépend de la hauteur z depuis le point de départ : $n(z) = n_0 \times (1 + \alpha z)$, avec $\alpha > 0$.

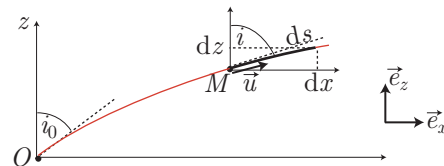


Un rayon lumineux (\mathcal{R}_1) se propage en ligne droite directement vers un observateur A , tandis qu'un autre rayon (\mathcal{R}_2) peut se propager selon une courbe gauche avant d'atteindre A . Lorsqu'un tel phénomène se produit, l'observateur reçoit alors deux rayons lumineux depuis une même source, comme si une surface réfléchissante se trouvait au sol (d'où l'illusion d'une étendue liquide).

Ces phénomènes s'interprètent à l'aide de l'équation des rayons lumineux : en un point M atteint par la lumière :

$$\overrightarrow{\text{grad}} n = \frac{d}{ds}(n\vec{u}) \Rightarrow \vec{e}_x \cdot (\overrightarrow{\text{grad}} n) = \frac{d}{ds}(n\vec{u} \cdot \vec{e}_x)$$

où le vecteur unitaire \vec{u} possède une composante $u_x = \vec{u} \cdot \vec{e}_x$ telle que :



$$d\vec{s} = ds \vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \frac{d\vec{s}}{ds} = \begin{pmatrix} dx/ds \\ dz/ds \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{e}_x = \frac{dx}{ds}$$

tandis que :

$$\sin i = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dz^2}}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{ds}(n \sin i) = 0 &\Rightarrow n \sin i = \text{cte} = n_0 \sin i_0 \\ \Rightarrow n_0(1 + \alpha z) = n_0 \sin i_0 \times \frac{1}{\sin i} &= n_0 \sin i_0 \times \frac{\sqrt{dx^2 + dz^2}}{dx} \\ \Rightarrow 1 + \alpha z = \sin i_0 \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} &\quad (40) \end{aligned}$$

Le rayon \mathcal{R}_1 étant caractérisé par $i_0 = \frac{\pi}{2}$, son équation :

$$1 + \alpha z = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

admet pour solution triviale : $z = 0 = \text{cte}$, qui correspond au segment linéaire OA .

Quant au rayon \mathcal{R}_2 , il est décrit par l'équation générale (40) :

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{(1 + \alpha z)^2}{\sin^2 i_0} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \pm \sqrt{\frac{(1 + \alpha z)^2 - \sin^2 i_0}{\sin^2 i_0}}$$

c'est-à-dire, en tenant compte du passage par le point $O(0,0)$:

$$\pm \int_0^x dx = \int_0^z \sqrt{\frac{\sin^2 i_0}{(1 + \alpha z)^2 - \sin^2 i_0}} dz$$

En effectuant le changement de variable :

$$1 + \alpha z = \sin i_0 \cosh u \Rightarrow dz = \frac{\sin i_0}{\alpha} \sinh u du$$

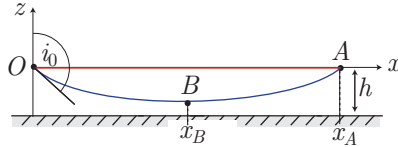
avec :

$$z = 0 \Rightarrow \cosh u_0 = \frac{1}{\sin i_0} \text{ et } u = \text{argch} \left(\frac{1 + \alpha z}{\sin i_0} \right)$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \pm x &= \int_{u_0}^u \sqrt{\frac{\sin^2 i_0}{\sin^2 i_0 \times (\cosh^2 u - 1)}} \frac{\sin i_0}{\alpha} \sinh u \, du = \frac{\sin i_0}{\alpha} \times (u - u_0) \\ \Rightarrow u &= u_0 \pm \frac{\alpha x}{\sin i_0} \Rightarrow \frac{1 + \alpha z}{\sin i_0} = \cosh \left(u_0 \pm \frac{\alpha x}{\sin i_0} \right) \\ \Rightarrow z_{\pm} &= \frac{1}{\alpha} \left[\sin i_0 \cosh \left(u_0 \pm \frac{\alpha x}{\sin i_0} \right) - 1 \right] \end{aligned}$$

Choisissons la solution z_- , avec $\alpha > 0$, qui rend compte du rayon \mathcal{R}_2 :



Cette solution est nulle lorsque :

$$\cosh \left(u_0 - \frac{\alpha x}{\sin i_0} \right) = \frac{1}{\sin i_0} = \cosh u_0$$

c'est-à-dire :

$$u_0 - \frac{\alpha x}{\sin i_0} = u_0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } u_0 - \frac{\alpha x}{\sin i_0} = -u_0 \Rightarrow \frac{\alpha x}{\sin i_0} = 2u_0$$

ce qui montre que le rayon passe par les points $O(x_O = 0, y_O = 0)$ et $A \left(x_A = \frac{2u_0 \sin i_0}{\alpha}, y_A = 0 \right)$.

En outre, le point B le plus bas du rayon se trouve à une abscisse x_B qui annule $\frac{dz}{dx}$:

$$\frac{dz}{dx} = -\sinh \left(u_0 - \frac{\alpha x}{\sin i_0} \right) = 0 \text{ pour } x_B = \frac{u_0 \sin i_0}{\alpha} = \frac{x_A}{2}$$

et à l'ordonnée :

$$z_B = \frac{1}{\alpha} (\sin i_0 - 1) < 0$$

Pour que ce rayon soit visible par l'observateur situé en A , il faut donc que cet observateur se trouve à une hauteur h minimale :

$$h_{\min} = \frac{1 - \sin i_0}{\alpha}$$

Annexe 2 : Intensité lumineuse

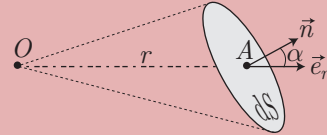
1- Éléments de photométrie



DÉFINITION

Soit dS un élément de surface centré sur A et dirigé selon un vecteur unitaire \vec{n} . L'angle solide sous lequel il est perçu depuis un point O situé à une distance r est défini par :

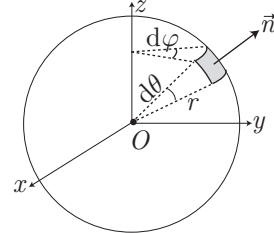
$$d\Omega \hat{=} \frac{d\vec{S} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \frac{dS \times \cos \alpha}{r^2} \text{ où } \vec{OA} = r \vec{e}_r$$



Si r et dS s'expriment respectivement en mètre et en m^2 , $d\Omega$ s'exprime en **steradian** (Sr).

En coordonnées sphériques, un élément d'aire dS à la surface d'une sphère de rayon r , centrée sur O , vaut $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ de sorte que :

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi \text{ car } \vec{n} = \vec{e}_r$$



et l'angle solide sous lequel est perçu l'espace vaut alors :

$$\Omega = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta = 2\pi \times [-\cos \theta]_0^{\pi} \Rightarrow \Omega = 4\pi$$



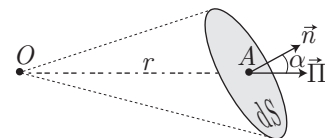
DÉFINITION

Le **flux lumineux** qui traverse une surface dS s'identifie à la puissance moyenne de l'onde électromagnétique qui traverse dS .

À ce titre, il pourrait s'exprimer en Watt, mais on lui préfère le **lumen** en photométrie.

La puissance électromagnétique qui traverse la surface dS est également donnée par le **vecteur de Poynting** :

$$\delta\phi = \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot (\vec{n} dS) = \langle \Pi \rangle \cos \alpha dS$$



DÉFINITION

L'**éclairage** reçu par dS est défini par :

$$\mathcal{E} \hat{=} \frac{\delta\phi}{dS} = \langle \Pi \rangle \cos \alpha \quad (41)$$

et il s'exprime en **lux**.



DÉFINITION

Si la puissance $\delta\phi$ à travers dS est émise par une source ponctuelle située en O , l'**intensité émise** par la source vaut :

$$\mathcal{I}_e \hat{=} \frac{\delta\phi}{d\Omega} \text{ où } d\Omega = \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \quad (42)$$

Son unité est alors le **candela**

L'éclairement reçu par dS et l'intensité émise par la source ponctuelle sont alors reliées :

$$\delta\phi = \mathcal{E} dS = \mathcal{I}_e d\Omega = \mathcal{I}_e \frac{dS \cos \alpha}{r^2} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{\mathcal{I}_e \cos \alpha}{r^2}}$$

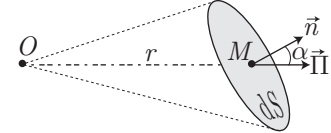
Cette relation permet de comparer les intensités de deux sources ponctuelles produisant le même éclairement (avec $\alpha = 0$) :

$$\boxed{\frac{\mathcal{I}_{e1}}{r_1^2} = \frac{\mathcal{I}_{e2}}{r_2^2}}$$

2- Flux lumineux

Considérons une source ponctuelle O produisant une onde électromagnétique qui transmet en M une onde électromagnétique de champ électrique :

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 e^{i[\omega t - \varphi(M)]}$$



où \vec{E}_0 est constant et uniforme.

L'équation de **Maxwell-Faraday**⁸ permet alors d'exprimer l'image complexe du champ magnétique associé :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B} \text{ où } \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\phi} \text{ avec } \phi = \omega t - \varphi(M) \\ \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}(e^{i\phi}) \wedge \vec{E}_0 + e^{i\phi} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_0 &= -i\omega \vec{B} \end{aligned}$$

où $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_0 = \vec{0}$ (car \vec{E}_0 est uniforme) et :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(e^{i\phi}) = i \overrightarrow{\text{grad}} \phi \times e^{i\phi} = -i \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \times e^{i\phi} = -i \vec{k} \times e^{i\phi} \text{ en posant } \vec{k} \hat{=} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

Il s'ensuit que :

$$-i\omega \vec{B} = -i \vec{k} e^{i\phi} \wedge \vec{E}_0 = -i \vec{k} \wedge (\vec{E}_0 e^{i\phi}) = -i \vec{k} \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \quad (43)$$

De même, la divergence peut se calculer en notation complexe⁹ :

$$\text{div} \vec{E} = \text{div}(\vec{E}_0 e^{i\phi}) = e^{i\phi} \text{div} \vec{E}_0 + \overrightarrow{\text{grad}}(e^{i\phi}) \cdot \vec{E}_0$$

où $\text{div} \vec{E}_0 = 0$ (car \vec{E}_0 est uniforme) et :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}}(e^{i\phi}) &= i \overrightarrow{\text{grad}} \phi \times e^{i\phi} = -i \overrightarrow{\text{grad}} \varphi \times e^{i\phi} = -i \vec{k} e^{i\phi} \\ \Rightarrow \text{div} \vec{E} &= -i \vec{k} \cdot (\vec{E}_0 e^{i\phi}) \Rightarrow \text{div} \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

Or, dans un milieu vide de charge, l'équation de **Maxwell-Gauss** indique que :

$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \Rightarrow -i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{k} \cdot \vec{E} = 0$$

Ainsi, le **vecteur de Poynting** se simplifie :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \right) = \frac{1}{\mu_0 \omega} [\vec{k} \times E^2 - \vec{E} \times (\vec{k} \cdot \vec{E})]$$

et son flux moyen à travers une surface dS vaut :

$$\delta\phi = \frac{\langle E^2 \rangle}{\mu_0 \omega} \vec{k} \cdot \vec{n} \times dS \quad (44)$$

8. On rappelle que $\overrightarrow{\text{rot}}(\alpha \vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}} \alpha \wedge \vec{v} + \alpha \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$

9. On rappelle que $\text{div}(\alpha \vec{u}) = \alpha \text{div} \vec{u} + \overrightarrow{\text{grad}} \alpha \cdot \vec{u}$

3– Éclairement et intensité lumineuse

L'éclairement reçu par dS vérifie la définition (41) :

$$\mathcal{E} \hat{=} \frac{\delta\phi}{dS} = \frac{\vec{k} \cdot \vec{n}}{\mu_0\omega} \langle E^2 \rangle = K \langle E^2 \rangle$$

tandis que **l'intensité de l'onde lumineuse** n'est pas définie comme l'intensité émise (42) :

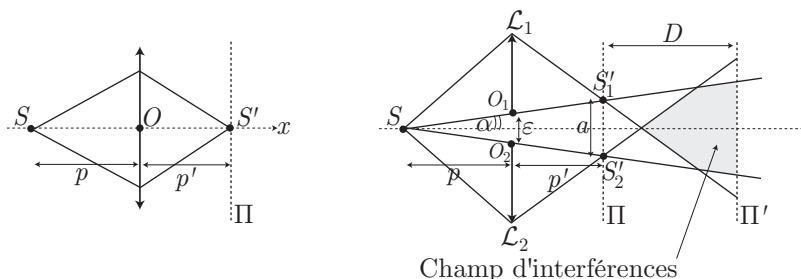
$$\mathcal{E} = KI \Rightarrow I \hat{=} \langle E^2 \rangle \quad (45)$$

Annexe 3 : Interférences par division du front d'onde

Les dispositifs interférentiels par **division du front d'onde** dérivent souvent de celui des trous d'Young. Cette annexe présente cinq de ces dispositifs.

1– Bientilles de Billet

Une lentille mince, de distance focale image f' , forme d'un objet ponctuel S de l'axe optique (Ox) une image S' sur l'axe optique, coupé par un plan $\Pi \perp (Ox)$:



La relation de conjugaison de Descartes indique alors que :

$$\frac{1}{OS'} - \frac{1}{OS} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{p} \Rightarrow p' = \frac{pf'}{p - f'}$$

Cette lentille est coupée en deux demi-lentilles \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 (bientilles de Billet) qui sont ensuite écartées verticalement d'une petite distance ε . On admet que :

- le rayon (SOS') qui n'était pas dévié en passant par O ne l'est toujours pas en passant par les points O_1 et O_2 issus du même point O ;
- les images S'_1 et S'_2 de S par \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 se forment dans le même plan Π que l'image S' .

Ainsi, les images S'_1 et S'_2 se comportent comme des sources secondaires mutuellement cohérentes, analogues à deux trous d'Young espacés de $a = S'_1S'_2$. Une figure d'interférences s'observe donc sur un plan Π' placé dans le champ d'interférences, avec :

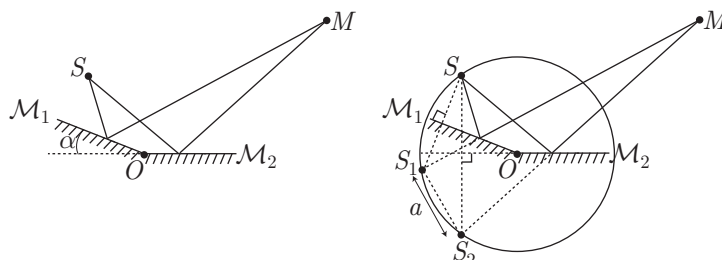
$$\delta = \frac{ax}{D} \Rightarrow p = \frac{ax}{\lambda_0 D} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\lambda_0 D}{a}}$$

L'interfrange i de cette figure se calcule alors aisément à partir de a , car :

$$\tan \alpha = \frac{\varepsilon/2}{p} = \frac{a/2}{p + p'} \Rightarrow a = \varepsilon \times \left(1 + \frac{p'}{p}\right) \Rightarrow \boxed{a = \frac{\varepsilon p}{p - f'}}$$

2– Miroirs de Fresnel

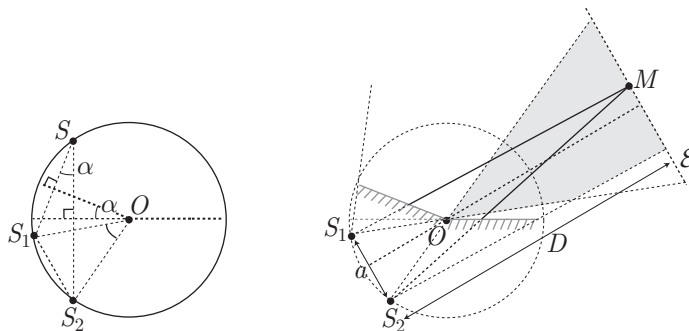
Deux miroirs \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 ont une arête commune (de trace O sur le schéma), où ils forment un angle α petit.



Un point M du champ d'interférences reçoit des rayons qui se réfléchissent comme s'ils provenaient des images S_1 et S_2 de S par \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 .

On retrouve la configuration des trous d'Young que l'on peut à nouveau exploiter à condition de savoir exprimer $a = S_1S_2$.

Puisque S_1 et S_2 sont symétriques par rapport à \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 , il s'ensuit que $OS = OS_1 = OS_2$ suffit à montrer que S , S_1 et S_2 appartiennent à un même cercle de centre O et de rayon $R = OS$:



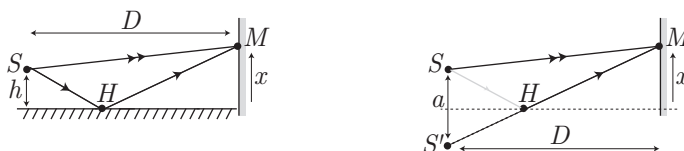
L'angle (S_1SS_2) valant α , le théorème de l'angle au centre permet d'affirmer que l'angle (S_1OS_2) vaut 2α . Ainsi :

$$\tan \alpha = \frac{a/2}{R} \Rightarrow \boxed{a = 2R \tan \alpha \simeq 2R\alpha}$$

et il se forme des interférences sur tout écran \mathcal{E} situé dans le champ d'interférences, distant de D : franges rectilignes d'interfrange $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$.

3– Miroir de Lloyd

Une source ponctuelle, située à une hauteur h d'un miroir plan, éclaire un point M d'un écran, soit directement, soit après réflexion sur le miroir :



Le rayon qui se réfléchit en H semble provenir de l'image S' de S par le miroir, c'est-à-dire telle que $SS' = a = 2h$. S et S' se comportent alors comme des trous d'Young pour lesquels $S'M - SM = \frac{ax}{D}$. Aussi, en tenant compte du déphasage de π subi par le rayon réfléchi en H (qui augmente le chemin optique de $\frac{\lambda_0}{2}$) :

$$(SHM) = (SH) + \frac{\lambda_0}{2} + (HM) = (S'H) + \frac{\lambda_0}{2} + (HM) = S'M + \frac{\lambda_0}{2}$$

et :

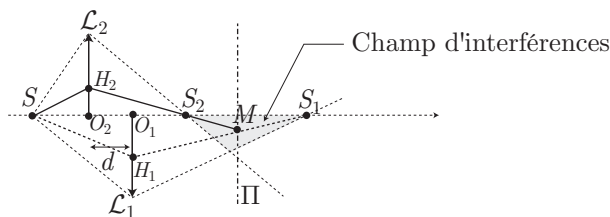
$$\delta = (S'HM) - (SM) = S'M - SM + \frac{\lambda_0}{2} = \frac{ax}{D} + \frac{\lambda_0}{2} \Rightarrow \boxed{p = \frac{ax}{\lambda_0 D} + \frac{1}{2}}$$

La figure d'interférence est donc composée :

- de franges rectilignes correspondant à $x = \frac{\lambda_0 D}{a} \left(p - \frac{1}{2} \right)$;
- d'interfrange $\Delta x = i$ telle que : $1 = \frac{ai}{\lambda_0 D} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\lambda_0 D}{a} = \frac{\lambda_0 D}{2h}}$
- d'une frange sombre au centre de la figure, car p y vaut $\frac{1}{2}$.

4- Bilentilles de Meslin

Une lentille convergente est coupée en deux demi-lentilles (\mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2) séparées d'une distance $d = O_2O_1$ selon la direction de l'axe optique (Sx) :



Les images S_1 et S_2 de S par \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 sont alors localisées sur (Sx) grâce aux relations de conjugaison. Un point M du champ d'interférences est atteint par les rayons SH_2M et SH_1M qui traversent respectivement \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_1 . Leurs chemins optiques correspondants vérifient alors, dans un milieu homogène d'indice 1 :

$$(SH_2M) = (SH_2S_2) + (S_2M) = (SS_2) + S_2M$$

et

$$(SS_1) = (SH_1M) + S_1M \Rightarrow (SH_1M) = (SS_1) - S_1M$$

Par suite, la différence de marche entre les deux rayons vaut :

$$\delta = (SH_2M) - (SH_1M) = (SS_2) - (SS_1) + S_2M + S_1M \Rightarrow \boxed{\delta = (SS_2) - (SS_1) + S_2M + S_1M}$$

à laquelle est associé l'ordre d'interférence :

$$p = \frac{\delta}{\lambda_0} \Rightarrow (SS_2) - (SS_1) + S_2M + S_1M = p\lambda_0 \Rightarrow S_2M + S_1M = p\lambda_0 + (SS_2) - (SS_1)$$

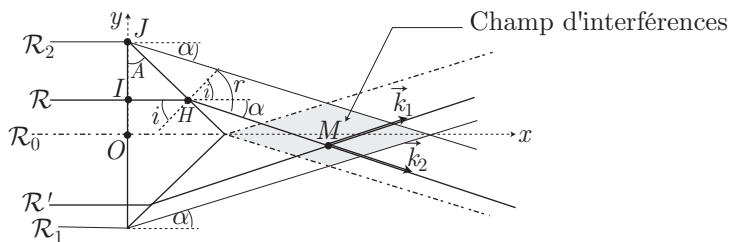
Une frange d'interférence est alors caractérisée par une valeur unique de p et vérifie ainsi l'équation :

$$\boxed{S_1M + S_2M = \text{cte}}$$

qui définit un ellipsoïde d'axe (Sx) et de foyers S_1 et S_2 ; son intersection avec un plan $\Pi \perp (Sx)$ dessinera alors un cercle.

5- Biprisme de Fresnel

Un prisme d'angle A très petit et d'indice de réfraction n est éclairé par un faisceau de lumière parallèle, monochromatique de longueur d'onde $\lambda_0 = \frac{2\pi}{k}$:



Un rayon \mathcal{R} qui arrive en H sous une incidence i subit une réfraction telle que :

$$n \sin i = \sin r$$

Or, dans le triangle (HIJ) :

$$A + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - i = \pi \Rightarrow A = i \ll 1 \Rightarrow r \simeq n \times i$$

Ce rayon subit alors une déviation α vérifiant :

$$r = i + \alpha \Rightarrow \alpha = r - i \simeq (n - 1)i \Rightarrow \boxed{\alpha \simeq (n - 1)A}$$

Un point M du champ d'interférences reçoit donc deux rayons de vecteurs d'onde :

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \cos \alpha \\ k \sin \alpha \end{pmatrix} \text{ et } \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} k_x \\ -k_y \end{pmatrix} \text{ où } k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Les rayons qui émergent du biprisme créent donc, en un point $M(x, y)$ du champ d'interférences, des signaux d'images complexes :

$$\begin{aligned} \underline{s}_1(M, t) &= S_0 e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{OM} - \omega t)} = S_0 e^{i(x k_x + y k_y - \omega t)} \\ \underline{s}_2(M, t) &= S_0 e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{OM} - \omega t)} = S_0 e^{i(x k_x - y k_y - \omega t)} \end{aligned}$$

s'additionnant pour produire le signal résultant :

$$\begin{aligned} \underline{s}(M, t) &= \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t) = S_0 e^{i(x k_x - \omega t)} \times (e^{iy k_y} + e^{-iy k_y}) \\ &= 2S_0 e^{i(x k_x - \omega t)} \times \cos(y k_y) \end{aligned}$$

associé à l'intensité :

$$I = \frac{1}{2} |\underline{s}|^2 = 2S_0^2 \cos^2(y k_y) = S_0^2 [1 + \cos(2y k_y)]$$

En notant I_0 l'intensité de chaque rayon qui parvient en M :

$$I_0 = \frac{1}{2} |\underline{s}_i|^2 = \frac{S_0^2}{2} \Rightarrow \boxed{I = 2I_0 [1 + \cos(2k_y y)]}$$

on obtient une formule de Fresnel qui permet de définir un ordre d'interférence p :

$$2k_y y = p \times 2\pi \Rightarrow 2 \times \frac{2\pi}{\lambda_0} \sin \alpha \times y = p \times 2\pi \Rightarrow \boxed{p = \frac{2 \sin \alpha}{\lambda_0} y}$$

Par conséquent, des franges d'interférence rectilignes et horizontales ($y = \text{cte}$) se forment dans le champ d'interférences, avec un interfrange i tel que :

$$\begin{cases} \Delta p = 1 \\ \Delta y = i \end{cases} \Rightarrow 1 = \frac{2 \sin \alpha}{\lambda_0} \Rightarrow \boxed{i = \frac{\lambda_0}{2 \sin \alpha}}$$

Annexe 4 : Coin d'air

1- Localisation des interférences

Un **Coin d'air** est constitué de deux lames de verre à faces parallèles (\mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2), planes, formant un dièdre d'arête Δ et d'angle α , plongées dans l'air d'indice $n = 1$.

Le dispositif est d'abord éclairé par une source ponctuelle S , monochromatique de longueur d'onde λ_0 .

Un rayon émis par S tombe sur \mathcal{L}_1 sous l'incidence i .

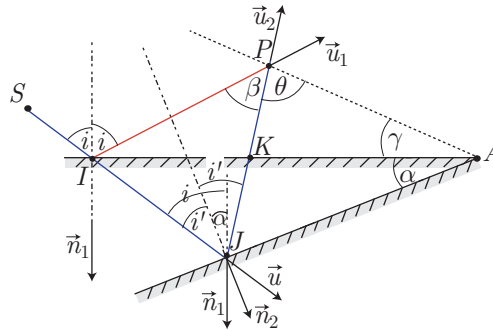
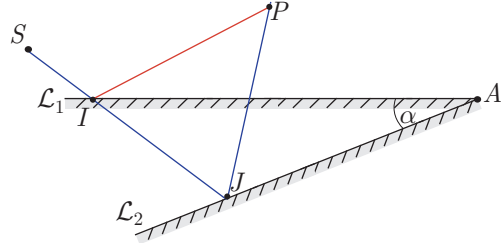
On ne s'intéresse qu'aux réflexions des rayons sur les faces de \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 éclairées par S ; on admettra qu'un rayon ne subit qu'une réflexion sur chaque lame.

Un rayon issu de S se réfléchit partiellement en I sur \mathcal{L}_1 . Le rayon transmis en I se réfléchit en J sur \mathcal{L}_2 . Les deux rayons réfléchis se retrouvent en P .

On note A la projection sur la page de l'intersection de \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 .

Enfin, on ignorera l'éventuel déphasage de π lors de la réflexion du rayon sur la surface d'un milieu plus réfringent.

Soient \vec{n}_1, \vec{n}_2 les vecteurs unitaires normaux à \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 en I et J . Le rayon SI arrive en I sous une incidence i et en J sous une incidence i' . Les rayons IP et JP sont ainsi réfléchis sous les angles i et i' , puis se coupent en P .



Évaluons, dans un premier temps, quelques angles :

– En J , on peut lire que :

$$i = i' + \alpha \Rightarrow i' = i - \alpha \quad (46)$$

– Dans le triangle (IJP) :

$$\beta + (\pi - 2i) + 2i' = \pi \Rightarrow \beta = 2(i - i') \Rightarrow \beta = 2\alpha \quad (47)$$

tandis que la relation des angles dans le triangle fournit :

– pour le triangle (API) :

$$\frac{AP}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right)} = \frac{PI}{\sin\gamma} \Rightarrow AP = PI \times \frac{\cos i}{\sin\gamma}$$

– pour le triangle (APJ) :

$$\frac{AP}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - i'\right)} = \frac{PJ}{\sin(\alpha + \gamma)} \Rightarrow AP = PJ \times \frac{\cos i'}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

– pour le triangle (PIJ) :

$$\frac{PI}{\sin(2i')} = \frac{PJ}{\sin(\pi - 2i)} = \frac{PJ}{\sin(2i)} \Rightarrow PJ = \frac{\sin(2i)}{\sin(2i')} PI$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} AP &= PI \frac{\cos i}{\sin\gamma} = PJ \frac{\cos i'}{\sin(\alpha + \gamma)} = \frac{\cos i'}{\sin(\alpha + \gamma)} \times \frac{\sin(2i)}{\sin(2i')} PI \\ &\Rightarrow \frac{\cos i}{\sin\gamma} = \frac{\cos i'}{\sin(\alpha + \gamma)} \times \frac{\sin i \cos i}{\sin i' \cos i'} \Rightarrow \frac{\sin i'}{\sin\gamma} = \frac{\sin i}{\sin(\alpha + \gamma)} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en tenant compte de la relation (46) :

$$i' = i - \alpha \Rightarrow \frac{\sin(i - \alpha)}{\sin i} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \alpha)}$$

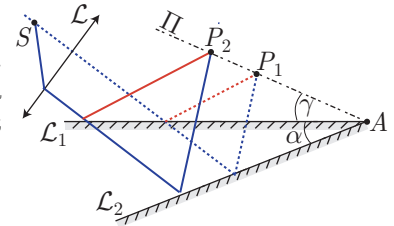
soit encore, en posant $\phi = i - \alpha$:

$$\frac{\sin \phi}{\sin(\phi + \alpha)} = \frac{\sin \gamma}{\sin(\gamma + \alpha)}$$

Une solution triviale apparaît alors :

$$\phi = \gamma \Rightarrow \boxed{i - \alpha = \gamma} \quad (48)$$

Ce résultat montre que deux rayons parallèles vont interférer en des points P_1 et P_2 situés dans un même plan Π faisant un angle $\gamma = i - \alpha$ par rapport à \mathcal{L}_1 . Dans la pratique, i et α seront très petits. Ainsi, la figure d'interférence sera localisée dans le plan Π très proche de \mathcal{L}_1 . Pour y parvenir, il faut cependant placer la source S dans le plan focal objet d'une lentille convergente (\mathcal{L}). Enfin, dans le triangle (APJ) :



$$\theta + \left(\frac{\pi}{2} - i'\right) + (\alpha + \gamma) = \pi \Rightarrow \theta + \frac{\pi}{2} - (i - \alpha) + \alpha + (i - \alpha) = \pi \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha} \quad (49)$$

2- Différence de marche

Évaluons maintenant la différence de marche $\delta = (SJP) - (SIP)$ entre les rayons qui se réfléchissent en I et J :

$$\begin{cases} (SIP) = (SI) + (IP) = SI + IP \\ (SJP) = (SI) + (IJ) + (JP) = SI + IJ + JP \end{cases} \Rightarrow \delta = (IJ + JP) - IP$$

La définition des vecteurs unitaires permet d'écrire :

$$\begin{cases} IJ = \vec{IJ} \cdot \vec{u} \\ JP = \vec{JP} \cdot \vec{u}_2 \\ IP = \vec{IP} \cdot \vec{u}_1 \end{cases} \Rightarrow \delta = \vec{IJ} \cdot \vec{u} + \vec{JP} \cdot \vec{u}_2 - \vec{IP} \cdot \vec{u}_1$$

$$= (\vec{IA} + \vec{AJ}) \cdot \vec{u} + (\vec{JA}) \cdot \vec{u}_2 - (\vec{IA} + \vec{AP}) \cdot \vec{u}_1$$

$$= \vec{IA} \cdot (\vec{u} - \vec{u}_1) + \vec{JA} \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}) + \vec{AP} \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}_1) \quad (50)$$

Or :

- \vec{u} et $-\vec{u}_1$ sont symétriques par rapport à (I, \vec{n}_1) . $\vec{u} - \vec{u}_1$ est alors colinéaire à \vec{n}_1 et donc perpendiculaire à \vec{IA} :

$$\vec{IA} \cdot (\vec{u} - \vec{u}_1) = 0$$

- \vec{u}_2 et $-\vec{u}$ sont symétriques par rapport à (J, \vec{n}_2) . $\vec{u}_2 - \vec{u}$ est alors colinéaire à \vec{n}_2 et donc perpendiculaire à \vec{JA} :

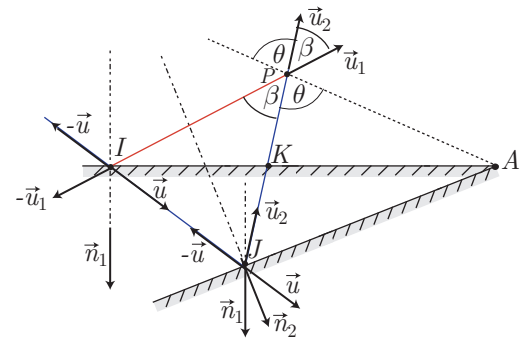
$$\vec{JA} \cdot (\vec{u}_2 - \vec{u}) = 0$$

- D'après les identités (47) et (49) : $\beta = 2\alpha$ et $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, il vient :

$$\vec{AP} \cdot \vec{u}_1 = AP \cos(\theta + \beta) = AP \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -AP \sin \alpha \text{ et } \vec{AP} \cdot \vec{u}_2 = AP \cos \theta = AP \sin \alpha$$

Finalement, l'expression (50) de δ devient :

$$\boxed{\delta = 2AP \sin \alpha} \quad (51)$$



Annexe 5 : Principe de Fermat

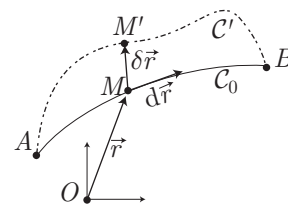


DÉFINITION

Le **principe de Fermat** stipule que, pour passer d'un point A à un point B , la lumière emprunte la trajectoire dont le chemin optique L est stationnaire.

Ce principe signifie qu'il existe une infinité de chemins possibles (C_0, C', \dots) qui relient deux points A et B . Parmi eux, il en existe peut-être un (C_0) sur lequel le chemin optique $L = \int_A^B n(M) ds_M$ est maximum ou minimum ou simplement stationnaire^a.

Si ce chemin existe, c'est celui que suivra la lumière.



a. Une fonction L est stationnaire si tout écart $\delta L = L - L_0$ est nul au premier ordre

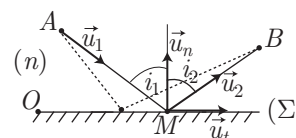
1- Exemples

a- Loi de la réflexion

Considérons un rayon lumineux émis en A et arrivant en B après s'être réfléchi en un point M d'une surface réfléchissante (Σ). Les points A et B étant fixés, cherchons quel point M de Σ assure le respect du principe de Fermat.

On note :

- n l'indice de réfraction du milieu (supposé homogène) dans lequel se propage la lumière.
- \vec{u}_1 et \vec{u}_2 les vecteurs unitaires de \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{MB} :



$$\overrightarrow{AM} = AM \vec{u}_1 \text{ et } \overrightarrow{MB} = MB \vec{u}_2$$

- \vec{u}_n et \vec{u}_t les vecteurs unitaires normal et tangentiel en M .

Le chemin optique entre A et B est alors défini par :

$$(AB) = \int_A^B n(M) ds_M = (AM) + (MB) = n AM + n MB = n (\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_1 + \overrightarrow{MB} \cdot \vec{u}_2)$$

Ainsi, un déplacement $d\overrightarrow{OM}$ de M sur Σ se traduit par une variation :

$$d(AB) = n (d\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_1 + \overrightarrow{AM} \cdot d\vec{u}_1 + d\overrightarrow{MB} \cdot \vec{u}_2 + \overrightarrow{MB} \cdot d\vec{u}_2)$$

où :

$$\overrightarrow{AM} \cdot d\vec{u}_1 = AM \vec{u}_1 \cdot d\vec{u}_1 = 0 \text{ car } \vec{u}_1 \perp d\vec{u}_1$$

et, pour les mêmes raisons :

$$\overrightarrow{MB} \cdot d\vec{u}_2 = 0 \Rightarrow d(AB) = n (d\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_1 + d\overrightarrow{MB} \cdot \vec{u}_2)$$

Enfin, puisque A et O sont des points fixes :

$$\begin{cases} d\overrightarrow{AM} = d\overrightarrow{AO} + d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM} \\ d\overrightarrow{MB} = d\overrightarrow{MO} + d\overrightarrow{OB} = -d\overrightarrow{OM} \end{cases} \Rightarrow d(AB) = n (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot d\overrightarrow{OM} = 0 \forall M \in \Sigma$$

$$\Rightarrow n (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_t = 0 \text{ car } d\overrightarrow{OM} = dOM \vec{u}_t$$

Le principe de Fermat permet ainsi de retrouver la **loi de Snell-Descartes** relative à la réflexion :

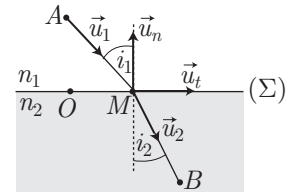
$$0 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_t - \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_t = \sin i_1 - \sin i_2 \Rightarrow \boxed{\sin i_1 = \sin i_2}$$

b- Loi de la réfraction

Considérons maintenant un rayon lumineux se propageant entre les points A à B , situés dans des milieux transparents homogènes d'indices respectifs n_1 et n_2 .

En adoptant les mêmes notations que précédemment, on définit le chemin optique entre A et B par :

$$\begin{aligned} (AB) &= (AM) + (MB) = n_1 AM + n_2 MB = n_1 \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_1 + n_2 \overrightarrow{MB} \cdot \vec{u}_2 \\ \Rightarrow d(AB) &= n_1 (d\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_1 + \overrightarrow{AM} \cdot d\vec{u}_1) + n_2 (d\overrightarrow{MB} \cdot \vec{u}_2 + \overrightarrow{MB} \cdot d\vec{u}_2) \end{aligned}$$



avec :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot d\vec{u}_1 = AM \vec{u}_1 \cdot d\vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot d\vec{u}_2 = MB \vec{u}_2 \cdot d\vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow n_1 d\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_1 + n_2 d\overrightarrow{MB} \cdot \vec{u}_2$$

et :

$$\begin{aligned} \begin{cases} d\overrightarrow{AM} = d\overrightarrow{AO} + d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM} \\ d\overrightarrow{BM} = d\overrightarrow{MO} + d\overrightarrow{OB} = d\overrightarrow{MO} \end{cases} &\Rightarrow d(AB) = (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot d\overrightarrow{OM} \forall M \in \Sigma \\ &\Rightarrow (n_1 \vec{u}_1 - n_2 \vec{u}_2) \cdot \vec{u}_t = 0 \text{ car } d\overrightarrow{OM} = dOM \vec{u}_t \end{aligned}$$

Le principe de Fermat permet également de retrouver la loi de Snell-Descartes relative à la réfraction :

$$n_1 \sin i_1 - n_2 \sin i_2 = 0 \Rightarrow \boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

2- Généralisation

Considérons un chemin \mathcal{C}_0 reliant A et B , L_0 son chemin optique dans un milieu où l'indice $n(M)$ dépend du point M de l'espace, repéré par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$.

Le long de \mathcal{C}_0 , un déplacement élémentaire sera noté $d\vec{r} = ds \vec{u}$ où s représente l'**abscisse curviligne** de M depuis A et \vec{u} un vecteur unitaire tangent à \mathcal{C}_0 en M .

Considérons un autre chemin (\mathcal{C}'), infiniment proche de \mathcal{C}_0 , dont les points M' se déduisent de M par des déplacements $\delta\vec{r} = \overrightarrow{MM'}$ perpendiculaires à \mathcal{C}_0 .

Enfin, on supposera que L_0 est stationnaire, ce qui signifie que :

$$L = \int_A^B n(M) ds_M \Rightarrow \delta L = 0 \text{ au voisinage de } \mathcal{C}_0$$

où :

$$ds_M = \vec{u} \cdot d\vec{r} \Rightarrow L = \int_A^B (n\vec{u}) \cdot d\vec{r} \Rightarrow \delta L = \int_A^B \delta(n\vec{u}) \cdot d\vec{r} + \int_A^B n\vec{u} \cdot \delta(d\vec{r}) = \delta L_1 + \delta L_2$$

avec :

$$\delta L_1 \hat{=} \int_A^B \delta(n\vec{u}) \cdot d\vec{r} = \int_A^B \delta n \times \vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_A^B n \times \delta\vec{u} \cdot d\vec{r}$$

Or :

$$\delta\vec{u} \cdot \delta\vec{r} = \delta\vec{u} \cdot (ds \vec{u}) = ds \times \delta\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \delta L_1 = \int_A^B \delta n \times ds$$

tandis que la définition d'un gradient : $\delta n \hat{=} \overrightarrow{\text{grad}} n \cdot \delta\vec{r}$ conduit à :

$$\delta L_1 = \int_A^B (\overrightarrow{\text{grad}} n \cdot \delta\vec{r}) ds = \int_A^B (\overrightarrow{\text{grad}} n ds) \cdot \delta\vec{r}$$

Quant à la grandeur δL_2 , elle peut se calculer par parties si l'on remarque que :

$$d\vec{r} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow \delta(d\vec{r}) = \delta(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) = \delta\vec{r}' - \delta\vec{r} = d(\delta\vec{r})$$

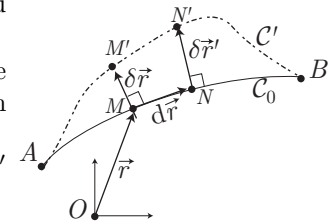
d'où :

$$\delta L_2 \hat{=} \int_A^B (n\vec{u}) \cdot \delta(d\vec{r}) = \int_A^B (n\vec{u}) \cdot d(\delta\vec{r}) = [n\vec{u} \cdot \delta\vec{r}]_A^B - \int_A^B d(n\vec{u}) \cdot \delta\vec{r} = - \int_A^B d(n\vec{u}) \cdot \delta\vec{r}$$

car en A et B , $\delta\vec{r} = \vec{0}$.

Il s'ensuit que, pour tout chemin voisin de \mathcal{C}_0 :

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 = \int_A^B \left[\overrightarrow{\text{grad}} n ds - d(n\vec{u}) \right] \delta\vec{r}$$

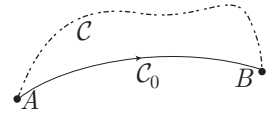


ce qui n'est possible que si :

$$\overrightarrow{\text{grad}} n ds = d(n \vec{u}) \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\text{grad}} n = \frac{d(n \vec{u})}{ds}}$$

ce qui confirme **l'équation des rayons lumineux** (37) de la page (52).

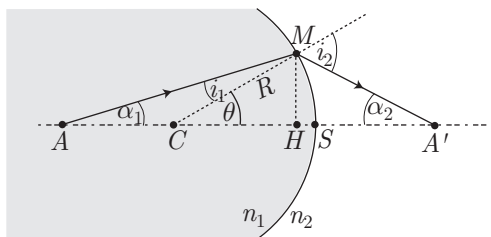
Enfin, remarquons que le principe de Fermat confirme le **principe du retour inverse** de la lumière : si la lumière emprunte le chemin C_0 pour se propager de A vers B , c'est que le chemin optique L_0 y est stationnaire. Donc, pour se propager de B vers A , la lumière empruntera le même chemin C_0 (à condition, toutefois qu'il n'existe pas d'autre chemin optique stationnaire).



Annexe 6 : Lentilles minces

1– Dioptre sphérique

Considérons un **dioptre sphérique** séparant deux milieux transparents homogènes d'indices n_1, n_2 , de centre C , de rayon R et de sommet S . On suppose que les points A et A' de l'axe optique sont conjugués par ce dioptre. Un des rayons passant par A et A' intercepte la surface du dioptre en un point M , qui se projette sur (AA') en un point H :



Les triangles ainsi obtenus définissent des angles α_1, α_2 et θ tels que :

$$\tan \alpha_1 = \frac{HM}{AH} \quad \tan \alpha_2 = \frac{HM}{HA'} \quad \sin \theta = \frac{HM}{R}$$

En se plaçant dans les conditions de Gauss¹⁰ : $\alpha_1 \simeq \frac{HM}{AH}$, $\alpha_2 \simeq \frac{HM}{HA'}$ et $\theta \simeq \frac{HM}{R}$.

En outre, ces angles vérifient les relations :

$$\alpha_1 + (\pi - \theta) + i_1 = \pi \Rightarrow i_1 = \theta - \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 + \theta + (\pi - i_2) = \pi \Rightarrow i_2 = \alpha_2 + \theta$$

tandis que la loi de Snell-Descartes se linéarise :

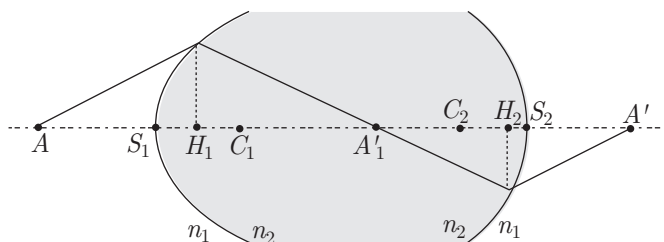
$$\begin{aligned} n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 &\Rightarrow n_1 i_1 \simeq n_2 i_2 \Rightarrow n_1 \theta - n_1 \alpha_1 \simeq n_2 \alpha_2 + n_2 \theta \\ &\Rightarrow n_2 \alpha_2 + n_1 \alpha_1 \simeq (n_1 - n_2) \theta \Rightarrow n_2 \frac{HM}{HA'} + n_1 \frac{HM}{AH} \simeq (n_1 - n_2) \frac{HM}{R} \end{aligned}$$

c'est-à-dire, en notation algébrique :

$$\frac{n_2}{HA'} - \frac{n_1}{HA} \simeq \frac{n_1 - n_2}{CS} \text{ où } n_2 < n_1 \text{ si } i_2 > i_1 \quad (52)$$

2– Lentille mince

Considérons maintenant une lentille d'indice n_2 , plongée dans un milieu d'indice n_1 et composée de deux dioptres sphériques ; le premier forme de A une image A'_1 , conjuguée optique de A' par le second dioptre :



L'application de la relation (52) à ces deux dioptres :

$$\frac{n_2}{H_1 A'_1} - \frac{n_1}{H_1 A} = \frac{n_2 - n_1}{S_1 C_1} \text{ et } \frac{n_1}{H_2 A'} - \frac{n_2}{H_2 A'_1} = \frac{n_1 - n_2}{S_2 C_2}$$

se simplifie dans le cas d'une lentille *mince*, où se confondent H_1, H_2 avec un même point O :

$$\begin{cases} \frac{n_2}{OA'_1} - \frac{n_1}{OA} = \frac{n_2 - n_1}{S_1 C_1} \\ \frac{n_1}{OA'} - \frac{n_2}{OA'_1} = \frac{n_1 - n_2}{S_2 C_2} \end{cases} \Rightarrow \frac{n_1}{OA'} - \frac{n_1}{OA} = (n_2 - n_1) \left(\frac{1}{S_1 C_1} - \frac{1}{S_2 C_2} \right)$$

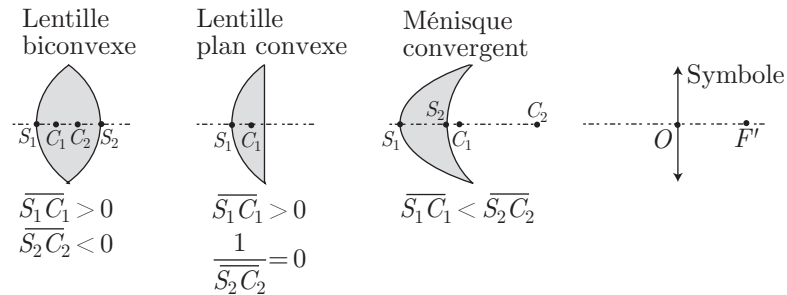
10. Les angles $\alpha_1, \alpha_2, \theta$ sont petits, ainsi que HM .

Cette identité fournit une relation de conjugaison pour une lentille mince d'indice $n_2 = n$ immergée dans l'air d'indice $n_1 = 1 < n_2$:

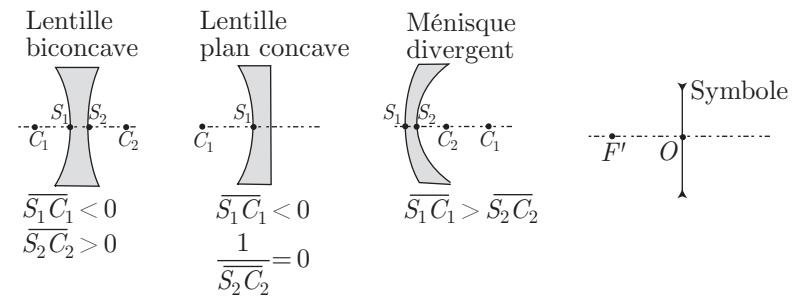
$$\boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \text{ où } \frac{1}{\overline{OF'}} = (n - 1) \times \left(\frac{1}{\overline{S_1 C_1}} - \frac{1}{\overline{S_2 C_2}} \right)} \quad (53)$$

Les deux familles de lentilles sont ainsi décrites :

– Les lentilles convergentes, pour lesquelles $\overline{OF'} > 0$:



– Les lentilles divergentes, pour lesquelles $\overline{OF'} < 0$:

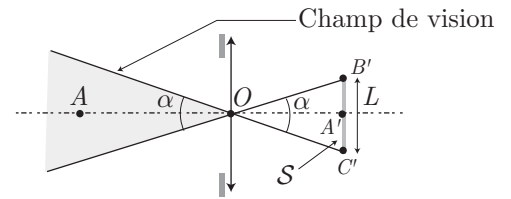


Annexe 7 : Compléments sur l'appareil photo

1- Champ angulaire

Supposons la mise au point faite sur un objet A : la distance OA étant ainsi fixée, la distance OA' se déduit de la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{OA'} + \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{OA'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{OA}$$



Le champ angulaire α est alors déterminé par la longueur $L = 2 A'B'$:

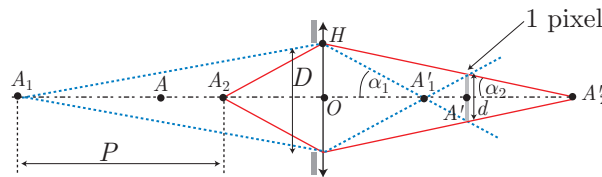
$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{A'B'}{OA'} = \frac{L/2}{OA'} \Rightarrow \alpha \simeq \frac{L}{OA'} = L \times \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{OA}\right)$$

De cette relation, on déduit que :

- le champ angulaire est d'autant plus petit que f' est grand ;
- le champ angulaire est d'autant plus petit que la mise au point est proche de l'appareil (α diminue lorsque OA diminue).

2- Profondeur de champ

La **profondeur de champ** (P) est la distance séparant deux points A_1 et A_2 qui forment sur la surface photosensible S une tâche plus petite qu'un pixel, de diamètre d .



Soit A le point sur lequel est réalisée la mise au point et A' son conjugué optique, où est disposée S . Le triangle $(OA_1'H)$ montre que :

$$\begin{aligned} \tan \alpha_1 &= \frac{D/2}{OA_1'} = \frac{d/2}{A_1'A'} = \frac{d/2}{OA' - OA_1'} \Rightarrow D \times OA' - D \times OA_1' = d \times OA_1' \\ \Rightarrow OA_1' &= \frac{D}{D+d} OA' \Rightarrow \frac{1}{OA_1'} = \frac{D+d}{D} \times \frac{1}{OA'} = \frac{(1+\varepsilon)}{OA'} \text{ où } \varepsilon = \frac{d}{D} \ll 1 \end{aligned} \quad (54)$$

tandis que le triangle $(OA_2'H)$ montre que :

$$\begin{aligned} \tan \alpha_2 &= \frac{D/2}{OA_2'} = \frac{d/2}{A'A_2'} = \frac{d/2}{OA_2' - OA'} \\ \Rightarrow D \times OA_2' - D \times OA' &= d \times OA_2' \Rightarrow OA_2' = \frac{D}{D-d} OA' \Rightarrow \frac{1}{OA_2'} = (1-\varepsilon) \frac{1}{OA'} \end{aligned} \quad (55)$$

En notant $\overline{OA'} = p' > 0$ et $\overline{OA} = -p < 0$, les objets A_1 et A_2 vérifient la relation de conjugaison de Descartes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{OA_1'} - \frac{1}{OA_1} &= \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{OA_1'} + \frac{1}{OA_1} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{OA_1} = \frac{1}{f'} - \frac{1+\varepsilon}{p'} \\ \Rightarrow OA_1 &= \frac{f'p'}{p' - f' - \varepsilon f'} = \frac{f'p'}{(p' - f') \left(1 - \frac{\varepsilon f'}{p' - f'}\right)} \end{aligned}$$

où ε est assez petit pour justifier un développement limité :

$$OA_1 \simeq \frac{f'p'}{p' - f'} \left(1 + \frac{\varepsilon f'}{p' - f'}\right)$$

La comparaison des expressions (54) et (55) montre que OA_2 s'obtient par substitution de ε en $-\varepsilon$ dans l'expression de OA_1 :

$$OA_2 \simeq \frac{f'p'}{p' - f'} \left(1 - \frac{\varepsilon f'}{p' - f'} \right)$$

La profondeur de champ vaut alors :

$$P = OA_1 - OA_2 \simeq \frac{f'p'}{p' - f'} \times \frac{2\varepsilon f'}{p' - f'} \quad (56)$$

Or, la relation de Descartes s'applique aux points conjugués A et A' :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{p'} = \frac{p' - f'}{p'f'} \Rightarrow \frac{f'p'}{p' - f'} = p \quad (57)$$

L'identité (57) peut dès lors être utilisée dans la relation (56) :

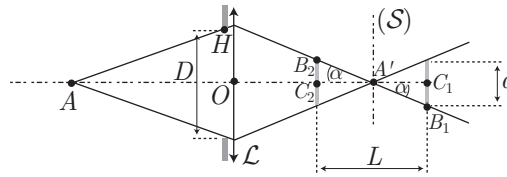
$$P = p \times 2\varepsilon \times \frac{p}{p'} = p \times 2\varepsilon \times p \times \left(\frac{1}{f'} - \frac{1}{p} \right) \Rightarrow P = p \times 2\varepsilon \times \left(\frac{p}{f'} - 1 \right) \text{ où } \varepsilon = \frac{d}{D}$$

Il apparaît ainsi que :

- plus le diamètre D est grand, plus P est petit ;
- plus p est petit, plus P est petit également (l'environnement d'un objet A est d'autant plus flou que l'objet est proche de l'appareil).

3- Latitude de mise au point

Soient A et A' deux points conjugués par l'objectif \mathcal{L} , C_1 et C_2 les positions extrêmes où la surface photosensible peut recevoir des tâches issues de A , de diamètre inférieur ou égal à la taille d d'un pixel :



- Dans les triangles $(A'C_1B_1)$ et $(A'C_2B_2)$:

$$\tan \alpha = \frac{B_1C_1}{A'C_1} = \frac{B_2C_2}{A'C_2} \Rightarrow A'C_1 = A'C_2 \Rightarrow L = 2 A'C_1$$

- Dans les triangles $(A'C_1B_1)$ et $(A'HO)$:

$$\tan \alpha = \frac{d/2}{A'C_1} = \frac{D/2}{OA'} \Rightarrow A'C_1 = OA' \frac{d}{D} \Rightarrow L = 2p' \frac{d}{D}$$

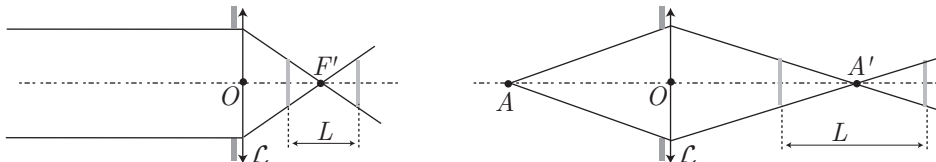
Or, la relation de conjugaison de Descartes fournit directement p' :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{p} \Rightarrow p' = \frac{pf'}{p - f'} = \frac{f'}{1 - f'/p}$$

$$\Rightarrow L = \frac{2d}{D} \times \frac{f'}{1 - f'/p}$$

et l'expression de L montre que :

- plus l'objet est éloigné, plus la latitude de mise au point est petite :



- plus le diamètre D est grand, plus la latitude de mise au point est petite.







Annexe 8 : Focométrie

La **focométrie** rassemble les techniques permettant de déterminer expérimentalement la distance focale des lentilles.

Après avoir présenté comment distinguer les lentilles convergentes et divergentes, cette annexe proposera des approches expérimentales spécifiques à chaque lentille, ainsi que leur justification.

1– Distinction entre lentilles convergentes et divergentes

Une première méthode pour distinguer le type de lentille consiste à évaluer l'épaisseur des lentilles avec les doigts :

lentilles convergentes	lentilles divergentes
 lentille biconvexe	 lentille biconcave
 lentille plan-convexe	 lentille plan-concave
 ménisque convergent	 ménisque divergent

Une autre méthode consiste à exploiter les caractéristiques des lentilles convergentes :

Si une lentille peut servir de loupe, alors elle est convergente.

Justification

Une **loupe** est une lentille qui forme d'un objet réel AB une image virtuelle $A'B'$ plus grande et dans le même sens.

Considérons une lentille \mathcal{L} de centre O , de distance focale f , qui forme de AB une image $A'B'$ virtuelle, avec un grandissement $\gamma \hat{=} \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$.

La relation de conjugaisons de Descartes fournit :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{OA}{OA'} - 1 = \frac{OA}{f'} \text{ où } OA = -OA' \text{ (car } A \text{ est réel)}$$

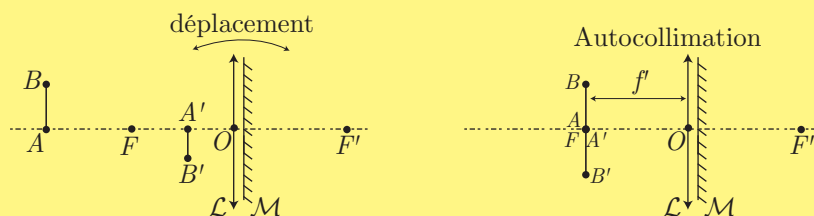
$$\Rightarrow \frac{1}{\gamma} = 1 + \frac{OA}{f'} = 1 - \frac{OA}{f'} < 1 \Rightarrow \gamma > 1 \text{ si } f' > 0$$

2– Lentilles convergentes

a– Autocollimation

Un objet AB éclaire la lentille \mathcal{L} , à laquelle est accolé un miroir plan \mathcal{M} . On déplace $\{\mathcal{M} + \mathcal{L}\}$ jusqu'à former une image nette dans le plan de AB ; la distance OA donne alors directement la valeur de f' :

$$f' = OA$$



Justification

Notons :

- A_1 l'image de A par \mathcal{L} : $\frac{1}{OA_1} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF}$
- A_2 l'image de A_1 par \mathcal{M} : $OA_1 + OA_2 = 0$
- A' l'image de A_2 par \mathcal{L} : $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA_2} = \frac{1}{OF} = -\frac{1}{OF'}$ car la lumière se propage vers la gauche (les rôles de F et F' sont permutés).

Lorsque l'autocollimation est réalisée, A et A' coïncident, de sorte que l'addition des deux relations de Descartes se simplifie :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA_2}} = 0$$

tandis que la relation de conjugaison du miroir impose :

$$\overline{OA_2} = -\overline{OA_1} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA_2}} = -\frac{1}{\overline{OA_1}} \Rightarrow \frac{2}{\overline{OA_1}} = 0$$

La première relation de Descartes fournit finalement :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \Rightarrow \boxed{\overline{OA} = -\overline{OF'} = \overline{OF}}$$

Donc, dès que l'autocollimation est réalisée : $\boxed{OA = f'}$

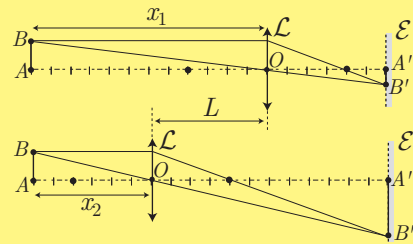
b- Méthode de Bessel

L'image nette $A'B'$ d'un objet lumineux AB est formée sur un écran (\mathcal{E}).

La distance $D = AA'$ est mesurée.

En maintenant A et \mathcal{E} à leurs positions, la lentille (\mathcal{L}) est déplacée sur une distance L de manière à obtenir une nouvelle image nette sur \mathcal{E} .

La distance focale vaut alors : $\boxed{f' = \frac{D^2 - L^2}{4D}}$



Par exemple, avec $D = 180$ cm et $L = 60$ cm :

$$f' = \frac{(180)^2 - (60)^2}{4 \times 180} = 40 \text{ cm}$$

Justification

Soit x la distance OA : $\overline{OA} = -x$ et D la distance entre A et A' :

$$\overline{AA'} = D = \overline{AO} + \overline{OA'} = x + \overline{OA'} \Rightarrow \overline{OA'} = D - x$$

La relation de conjugaison de Descartes fournit :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{D-x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{D}{Dx-x^2} = \frac{1}{f'} \Rightarrow x^2 - Dx + Df' = 0$$

Si le discriminant de cette équation : $\Delta = D^2 - 4Df'$ est positif, deux solutions réelles apparaissent :

$$x_1 = \frac{D + \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{D - \sqrt{\Delta}}{2}$$

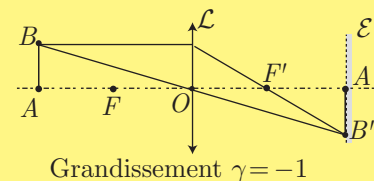
dont la différence fournit :

$$L = x_1 - x_2 = \sqrt{\Delta} \Rightarrow L^2 = D^2 - 4Df' \Rightarrow \boxed{f' = \frac{D^2 - L^2}{4D}}$$

c- Méthode de Silbermann

L'objet AB étant fixé, on déplace la lentille \mathcal{L} et l'écran jusqu'à y former une image nette $A'B'$ de grandissement -1 .

La mesure de $\overline{OA'}$ donne directement : $\boxed{f' = \frac{\overline{OA'}}{2}}$



Grandissement $\gamma = -1$

Justification

Lorsque le grandissement vaut -1 : $\overline{OA'} = -\overline{OA}$ et la relation de conjugaison de Descartes devient :

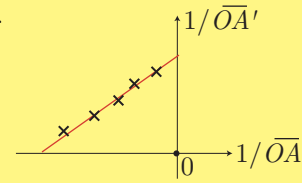
$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \Rightarrow \frac{2}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OF'}} \Rightarrow \boxed{f' = \frac{\overline{OA'}}{2}}$$

d- Relation de conjugaison

L'objet AB étant fixé, on déplace la lentille \mathcal{L} et l'écran \mathcal{E} afin de former l'image nette $A'B'$.

Pour chaque valeur de \overline{OA} retenue, on recueille la valeur de $\overline{OA'}$.

On représente alors graphiquement $\frac{1}{\overline{OA'}}$ en fonction de $\frac{1}{\overline{OA}}$.



La courbe obtenue doit être une droite de pente 1 et d'ordonnée à l'origine $\frac{1}{f'}$.

Justification

La relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'}}$$

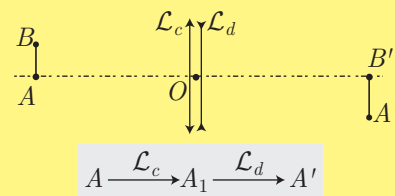
confirme directement cette méthode.

3- Lentilles divergentes

a- Méthode des lunetiers

- Accoler, à la lentille divergente (\mathcal{L}_d) de distance focale inconnue f'_d , une lentille convergente (\mathcal{L}_c), de distance focale f'_c connue.
- Mesurer la distance focale f' de la lentille $\mathcal{L}_{\text{éq}}$ ainsi constituée ; une des méthodes précédentes (autocollimation, Silbermann...) sera employée.
- Si $\mathcal{L}_{\text{éq}}$ est convergente, la distance focale inconnue vérifie :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_c} + \frac{1}{f'_d} \Rightarrow \boxed{f'_d = \frac{f' \times f'_c}{f'_c - f'}}$$



Justification

La lentille \mathcal{L}_c forme de A une image A_1 qui sert d'objet à \mathcal{L}_d , pour en former une image A' . La relation de conjugaison de Descartes devient, dans ces deux cas :

$$\begin{cases} \frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_c} \\ \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'_d} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'_c} + \frac{1}{f'_d} = \frac{1}{f'}$$

Cette relation montre que l'association $\{\mathcal{L}_c + \mathcal{L}_d\}$ équivaut à une lentille \mathcal{L} , de centre O et de distance focale f' telle que :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_c} + \frac{1}{f'_d} \Rightarrow \boxed{f'_d = \frac{f' \times f'_c}{f'_c - f'}}$$

REMARQUE L'ordre dans lequel on accole \mathcal{L}_c et \mathcal{L}_d importe peu.

Attention : La méthode n'est justifiée que si \mathcal{L}_c et \mathcal{L}_d sont accolées. S'il subsiste une distance e entre les deux lentilles, il convient d'utiliser la **formule de Gullstrand** :

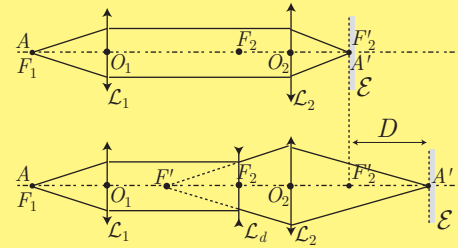
$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_c} + \frac{1}{f'_d} - \frac{e}{f'_c f'_d}$$

b- Méthode de Badal

- Un objet AB est placé dans le plan focal objet d'une lentille convergente \mathcal{L}_1 (par autocollimation).
- Une lentille convergente (\mathcal{L}_2), de distance focale f'_2 connue, intercepte les rayons parallèles et forme l'image $A'B'$ de AB sur un écran (\mathcal{E}).
- La lentille divergente \mathcal{L}_d , de distance focale f'_d inconnue, est intercalée entre \mathcal{L}_1 et \mathcal{L}_2 , dans la plan focal objet de \mathcal{L}_2 .
- Il faut alors reculer l'écran \mathcal{E} d'une distance D pour retrouver l'image nette $A'B'$ de AB .

La distance focale ainsi cherchée vaut :

$$f'_d = -\frac{(f'_2)^2}{D}$$


Justification

Les rayons qui arrivent sur \mathcal{L}_d parallèlement à l'axe optique émergent comme s'ils provenaient du foyer image F' de \mathcal{L}_d , de sorte que $\overline{F_2F'} = f'_d$.

La relation de conjugaison de Newton associée à \mathcal{L}_2 fournit alors :

$$\overline{F'_2A'} \times \overline{F_2F'} = -(f'_2)^2 \Rightarrow D \times f'_d = -(f'_2)^2 \Rightarrow f'_d = -\frac{(f'_2)^2}{D}$$

Index

- Éclairement, 56
Égale inclinaison (anneaux), 43
Équation des rayons lumineux, 52, 67
Œil, 7
Œil réduit, 7
- Aberration, 9
Abscisse curviligne, 66
Accommodation, 7
Accommodation (pouvoir), 8
Afocal, 33
Amétropie, 8
Amplitude (division), 39
Angle au centre (théorème), 60
Angle critique, 1
Angle d'incidence, 1
Angle de réflexion, 1
Angle limite, 1
Angle solide, 56
Anneaux d'égal inclinaison, 43
Aplanétisme, 2
Aplanétisme approché, 2
Aplanétisme rigoureux, 2
Appareil photo, 9
Appareil photo simplifié, 10
Argentique (feuille), 10
Astigmatisme, 9
Astigmatisme (aberration), 9
Autocollimation, 7, 72
Aveugle (point), 7
Axe optique, 3
- Bâtonnets, 7
Badal (méthode de), 75
Bessel (méthode de), 73
Bichromatique (source), 46
Bilentilles de Billet, 59
Bilentilles de Meslin, 61
Billet (bilentilles de), 59
Biprisme de Fresnel, 61
Blanc d'ordre supérieur, 33
Blanc d'ordre supérieur, 30, 50
Brouillage, 24, 26, 46
- Cônes, 7
Candela, 56
Cannelures, 30
Capteur CCD, 10
CCD (capteur), 10
Centrale (frange), 20
Centre optique, 3
Champ (profondeur de), 9
Champ angulaire, 10, 70
Champ d'interférences, 21
Champ de vision, 10
Chariotage, 39, 46
Chemin optique, 12, 52
Choroïde, 7
Chromatisme (aberration), 9
Cohérence (longueur de), 16, 28
Cohérence (sources), 18
Cohérence (temps de), 16
Coin d'air, 48, 63
Collimateur, 33
Compensatrice (lame), 39
Conditions de Gauss, 2
Conjugaison (relation de), 3, 6
Conjugués (optiques), 2
Constructions graphiques, 4
Contact optique, 39
Contraste, 19
Convergente (lentille), 3
Cornée, 7
Cristallin, 7
Critère de Rayleigh, 37
Critique (angle), 1
Curviligne (abscisse), 66
- Densité spectrale, 15, 27
Descartes (relation de conjugaison), 7
Diaphragme, 9
Différence de marche, 16, 49
Dioptre sphérique, 68
Dioptrie, 7
Dispersif (pouvoir), 36
Dispersif (système), 33
Distance focale, 7
Distorsion (aberration), 9
Divergente (lentille), 3
Division d'amplitude, 39
Division du front d'onde, 19, 59
- Eikonale (fonction), 52
Efficacité lumineuse, 8
Emmétrope, 8
- Facteur de visibilité, 25
Fentes d'Young, 21
Fermat (principe de), 65
Flux lumineux, 56
Focale (distance), 7
Focométrie, 72
Formule de Fresnel, 18
Formule de Gullstrand, 74
Formule du réseau, 32
Fourier (série de), 11
Fourier (transformée de), 11
Foyer image, 3
Foyer objet, 3, 4
Frange centrale, 20
Frange d'interférence, 19
Franges claires, 18
Franges d'égal épaisseur, 50
Franges irisées, 30
Franges localisées, 45
Franges non localisées, 21

- Franges sombres, 18
 Fraunhofer (montage de), 21
 Fresnel (Biprisme de), 61
 Fresnel (formule de), 18
 Fresnel (miroir de), 59
 Front d'onde (division du), 19, 59

 Gauss (conditions de), 2
 Grandissement, 3
 Grandissement transversal, 6
 Gullstrand (formule de), 74

 Humeur aqueuse, 7
 Humeur vitrée, 7
 Hypermétropie, 8, 9

 Image, 2
 Image (foyer), 3
 Incidence normale, 34
 Incident (rayon), 1
 Indice de réfraction, 1
 Intensité émise, 56
 Intensité d'une onde lumineuse, 15
 Intensité de l'onde lumineuse, 58
 Interférence (terme de), 18
 Interférences (champ de), 21
 Interférences non localisées, 45
 Interféromètre de Michelson, 39
 Interfrange, 21
 Iris, 7

 Lame à faces parallèles, 22
 Lame compensatrice, 39
 Lame d'air (Michelson), 42
 Lame séparatrice, 39
 Largeur à mi-hauteur, 15
 Latitude de mise au point, 11
 Lentille convergente, 3
 Lentille divergente, 3
 Lentille mince, 3
 Limbe, 33
 Limite (angle), 1
 Lloyd (miroirs de), 60
 Loi de Snell Descartes, 65
 Loi de Snell-Descartes, 1
 Longueur de cohérence, 16, 28
 Loupe, 8, 72
 Lumen, 56
 Lumière, 11
 Luminosité, 9, 10
 Lunetiers (méthode des), 74
 Lunette autocollimatrice, 33
 Lux, 56

 Méthode de Badal, 75
 Méthode de Bessel, 73
 Méthode de Silbermann, 73
 Méthode des lunetiers, 74
 Malus (théorème de), 13, 53
 Maxwell-Faraday (équation de), 57
 Maxwell-Gauss (équation de), 57
 Meslin (Bilentilles de), 61

 Michelson (interféromètre de), 39
 Michelson en lame d'air, 42
 Milieu réfringent, 1
 Mirage optique, 54
 Miroir (relation de conjugaison), 3
 Miroir plan, 3
 Miroirs de Fresnel, 59
 Miroirs de Lloyd, 60
 Mise au point, 10
 Modes laser, 34
 Myopie, 8, 9

 Nerf optique, 7
 Newton (relation de conjugaison), 7
 Normale, 1
 Normale (incidence), 34

 Objectif, 9
 Objet, 2
 Objet (foyer), 3
 Obturateur, 9
 Opsine, 7
 Optique (chemin), 12
 Ordre d'interférence, 18
 Ouverture, 10

 Pas du réseau, 31
 Persistance rétinienne, 7
 Phase, 11
 Photo (appareil), 9
 Photométrie, 56
 Photopique (vision), 7
 Photosensible (surface), 10
 Pixel, 10
 Plan (miroir), 3
 Plan focal image, 4
 Plan focal objet, 4
 Point aveugle, 7
 Point focal, 3
 Points conjugués, 2
 Pouvoir d'accommodation, 8
 Pouvoir de résolution, 8, 37
 Pouvoir dispersif, 36
 Pouvoir séparateur, 8, 37
 Poynting (vecteur de), 56, 57
 Presbytie, 8, 9
 Principe de Fermat, 65
 Principe du retour inverse, 14, 22, 67
 Procès ciliaires, 7
 Profondeur de champ, 9, 10, 70
 Punctum proximum, 8
 Punctum remotum, 8
 Pupille, 7

 Réel (objet), 2
 Réelle (image), 2
 Réfléchi (rayon), 1
 Réflexion, 1
 Réflexion totale, 1
 Réfraction, 1
 Réfraction (indice de), 1
 Réfringent (milieu), 1

- Réglage du Michelson au laser, 41
Réseau (formule de), 32
Réseau (par transmission), 31
Réseau (pas de), 31
Résolution (pouvoir de), 8, 37
Réticule, 34
Rétinal, 7
Rétine, 7
Rétinienne (persistance), 7
Rayleigh (critère de), 37
Rayon incident, 1
Rayon réfléchi, 1
Rayons lumineux (équation de), 52
Rayons remarquables, 4
Relation de conjugaison, 3, 6
Relation de conjugaison de Descartes, 7
Relation de conjugaison de Newton, 7
Relation de dispersion, 12
Remarquables (rayons), 4
Retour inverse (principe), 14, 67
Retour inverse de la lumière, 22
Rhodopsine, 7
- Séparateur (pouvoir), 8, 37
Séparatrice (lame), 39
Série de Fourier, 11
Sclérotique, 7
Scotopique (vision), 7
Silbermann (méthode de), 73
Snell-Descartes (loi de), 53, 65
Snell-Descartes (lois de), 1
Solide (angle), 56
Source bichromatique, 46
Sources cohérentes, 18
Spectrale (densité), 15, 27
Spectrogoniomètre, 34
Spectroscope, 33
Sphéricité (aberration), 9
Steradian, 56
Stigmatisme approché, 2
Stigmatisme rigoureux, 2
Surface d'onde, 13
Surface photosensible, 10
Système dispersif, 33
- Temps de cohérence, 16
Temps de pose, 9
Terme d'interférence, 18
Théorème de Malus, 13, 53
Train d'onde, 16
Train d'ondes, 15
Transformée de Fourier, 11
Trous d'Young, 19, 59
- Vecteur de Poynting, 56, 57
Vergence, 7
Vernier, 33, 41
Virtuel (objet), 2
Virtuelle (image), 2
Visibilité, 27
Visibilité (facteur de), 25
- Vision photopique, 7
Vision scotopique, 7
Young (fentes de), 21
Young (trous de), 19, 59

Table des matières

I	Rappels : optique géométrique	1
1-	Réflexion et réfraction	1
2-	Formation des images	2
3-	Miroir plan	3
4-	Lentilles minces	3
a-	Présentation	3
b-	Constructions graphiques	4
c-	Relations de conjugaison	6
5-	L'œil	7
a-	Présentation	7
b-	L'œil réduit	7
c-	Amétropies	8
6-	L'appareil photo	9
a-	Présentation	9
b-	Caractéristiques	10
II	Modèle scalaire de la lumière	11
1-	Propagation de la lumière	11
a-	Ondes progressives	11
b-	Chemin optique	12
c-	Théorème de Malus	13
d-	Intensité lumineuse	15
2-	Émission de la lumière	15
a-	Généralités	15
b-	Exemple : spectre rectangulaire	16
III	Interférences de deux ondes lumineuses	17
1-	Superposition de deux ondes	17
2-	Interférences par division du front d'onde	19
a-	Dispositif des trous d'Young	19
b-	Montage de Fraunhofer	21
c-	Introduction d'une lame transparente	22
3-	Influence de la source	23
a-	Translation verticale de la source	23
b-	Élargissement de la source	24
4-	Influence du spectre	25
a-	Cas d'un doublet spectral	25
b-	Cas d'une bande spectrale	27
c-	Source de lumière blanche	29
IV	Superposition de N ondes	31
1-	Interférences par transmission	31
a-	Intensité lumineuse	31
b-	Formule du réseau	32
2-	Spectroscopie à réseau	33
a-	Présentation	33
b-	Résolution du spectroscopie	36
c-	Minimum de déviation	38
V	Interféromètre de Michelson	39
1-	Présentation	39
a-	Principe de l'interféromètre	39
b-	Constitution et réglages de l'appareil	39
c-	Montage équivalent	42
2-	Configuration lame d'air	42
a-	Différence de marche	42
b-	Figure d'interférence	43
c-	Source polychromatique	45
3-	Configuration coin d'air	48
a-	Figure d'interférence	48
b-	Effet du chariotage	49
c-	Introduction d'une lame transparente	49
d-	Éclairage en lumière blanche	50
	Annexe 1 : Chemin optique	52
1-	Équation des rayons lumineux	52
2-	Applications	53
a-	Propagation en milieu homogène	53
b-	Théorème de Malus	53
c-	Lois de Snell-Descartes	53
d-	Mirage optique	54

Annexe 2 : Intensité lumineuse	56
1- Éléments de photométrie	56
2- Flux lumineux	57
3- Éclairage et intensité lumineuse	58
Annexe 3 : Interférences par division du front d'onde	59
1- Bilentilles de Billet	59
2- Miroirs de Fresnel	59
3- Miroir de Lloyd	60
4- Bilentilles de Meslin	61
5- Biprisme de Fresnel	61
Annexe 4 : Coin d'air	63
1- Localisation des interférences	63
2- Différence de marche	64
Annexe 5 : Principe de Fermat	65
1- Exemples	65
a- Loi de la réflexion	65
b- Loi de la réfraction	65
2- Généralisation	66
Annexe 6 : Lentilles minces	68
1- Dipotre sphérique	68
2- Lentille mince	68
Annexe 7 : Compléments sur l'appareil photo	70
1- Champ angulaire	70
2- Profondeur de champ	70
3- Latitude de mise au point	71
Annexe 8 : Focométrie	72
1- Distinction entre lentilles convergentes et divergentes	72
2- Lentilles convergentes	72
a- Autocollimation	72
b- Méthode de Bessel	73
c- Méthode de Silbermann	73
d- Relation de conjugaison	74
3- Lentilles divergentes	74
a- Méthode des lunetiers	74
b- Méthode de Badal	75