

EXPÉRIENCE DE STERN ET GERLACH

D'après *la Mécanique Quantique* de C. Cohen-Tannoudji

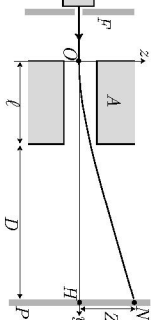
Nous allons décrire et analyser l'expérience de Stern et Gerlach qui a permis de mettre en évidence la quantification des composantes d'un moment cinétique (appelée parfois «quantification dans l'espace»).



1- Appareillage de Stern et Gerlach

L'expérience consiste à étudier la déviation d'un jet d'atomes neutres paramagnétiques (en l'occurrence des atomes d'argent) dans un champ magnétique fortement inhomogène. L'appareillage utilisé est schématisé sur la figure 1.

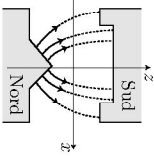
Figure 1 : Schéma de l'expérience de Stern et Gerlach. Sur cette figure, on a représenté la trajectoire d'un atome d'argent issu de l'encointre à haute température E . Cet atome est dévié par le gradient de champ magnétique créé par un électro-aimant A , et vient ensuite se condenser en N sur la plaque P .



Des atomes d'argent, contenus dans une enceinte E chauffée à haute température, s'échappent par un orifice étroit et se propagent ensuite en ligne droite dans le vide poussé qui règne à l'intérieur de tout l'appareil. Une fente collimatrice F sélectionne ceux de ces atomes dont la vitesse est parallèle à une direction déterminée, que nous prendrons pour axe Oy . Le jet atomique ainsi réalisé traverse l'entrefer d'un électro-aimant A avant de se condenser sur une plaque P .

Précisons les caractéristiques du champ magnétique \vec{B} produit par l'électro-aimant A . Ce champ magnétique admet un plan de symétrie que nous désignerons par (Oz) qui contient la direction initiale Oy du jet atomique et, dans l'entrefer, il est le même en tous les points situés sur une même parallèle à Oy (les arêtes de l'électro-aimant sont parallèles à Oy , et nous négligerons les effets de bord) : \vec{B} n'a pas de composante suivant Oy . Sa plus grande composante est suivant Oz ; elle varie fortement avec z . Sur la figure 2, les lignes de champ sont beaucoup plus resserrées près du pôle nord que près du pôle sud de l'aimant. Bien entendu, comme le champ magnétique est à flux conservatif ($\text{div } \vec{B} = 0$), il doit aussi avoir une composante suivant Ox qui varie avec la distance x au plan de symétrie.

Figure 2 : Cette figure montre une coupe de l'électro-aimant A dans le plan xOz ; les lignes de champ magnétique sont représentées en traits. On suppose B_z positif et $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ négatif. Par suite, la trajectoire de la figure 1 correspond à une composante m_z du moment magnétique négative, c'est-à-dire une composante positive de σ_z (γ est négatif pour un atome d'argent).



2- Calcul classique de la déviation

Remarquons tout d'abord que les atomes d'argent étant neutres, ils ne subissent par de force de Laplace. Par contre, ils possèdent un moment magnétique permanent \vec{m} (ce sont des atomes paramagnétiques). Les forces qui en résultent dérivent d'une énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (1)$$

Il y a deux origines à l'existence, pour un atome, d'un moment magnétique électronique \vec{m} lié à un moment cinétique $\vec{\sigma}$: le déplacement des électrons autour du noyau (la rotation de charges correspondante étant responsable de l'apparition d'un moment magnétique orbital) et le moment cinétique intrinsèque, ou de spin, des électrons.

1. Nous n'indiquerons ici que les caractéristiques les plus importantes de cet appareillage. Une description plus détaillée de la technique expérimentale pourrait être trouvée dans un traité de physique atomique.

électrons auquel est associé également un moment magnétique de spin. On peut montrer (nous l'admettrons ici sans démonstration) que dans un niveau atomique donné, \vec{m} et $\vec{\sigma}$ sont proportionnels² :

$$\vec{m} = \gamma \vec{\sigma} \quad (2)$$

La constante de proportionnalité γ est appelée *rapport gyromagnétique* du niveau considéré.

Question 1. On ne considère que le moment magnétique purement orbital de l'électron autour de son noyau. Exprimer le rapport gyromagnétique (calculé en physique classique) en fonction de e et m_e .

Question 2. Le magnéton de Bohr (μ_B) est le moment magnétique purement orbital d'un électron (en physique quantique : $\sigma \simeq \hbar$). Montrer que $\mu_B = -\frac{e\hbar}{2m_e}$ et estimer sa valeur numérique.

Les moments magnétiques des atomes d'argent constituant le jet atomique sont, avant la traversée de l'électro-aimant, orientés au hasard (le faisceau isotrope). Étudions l'action du champ magnétique sur l'un de ces atomes, dont le moment magnétique \vec{m} a une direction déterminée à l'entrée de l'entrefer. De l'expression (1) de l'énergie potentielle, on déduit facilement que les forces qui s'exercent sur l'atome admettent pour résultante³ :

$$\vec{F} = (\vec{m} \cdot \vec{\text{grad}}) \vec{B} \quad (3)$$

et pour moment total par rapport à la position de l'atome :

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} \quad (4)$$

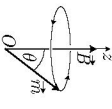
Le théorème du moment cinétique s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\Gamma} \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \gamma \vec{\sigma} \wedge \vec{B} \quad (5)$$

L'atome se comporte donc comme un gyroscope (cf. figure 3).

Question 3. Montrer d'abord que σ fait avec \vec{B} un angle constant dans le temps, puis que $\vec{\sigma} \perp \frac{d\vec{\sigma}}{dt}$.

Figure 3 : L'atome d'argent possède un moment magnétique \vec{m} et un moment cinétique $\vec{\sigma}$ proportionnels. Par suite, l'effet d'un champ magnétique uniforme \vec{B} est de faire tourner \vec{m} autour de \vec{B} avec une vitesse angulaire constante (précession de Larmor).



Question 4. Montrer que la vitesse de rotation est égale au produit du rapport gyromagnétique γ par le module du champ magnétique.

Les composantes de \vec{m} perpendiculaires au champ magnétique oscillent donc autour de zéro, la composante parallèle à \vec{B} restant constante.

Pour le calcul de la force \vec{F} (formule 3) on peut, à une très bonne approximation, négliger les termes proportionnels à m_x et m_y et prendre m_z constant. En effet, la fréquence d'oscillation due à la rotation de \vec{m} est trop grande pour que m_x et m_y puissent intervenir autrement que par leur valeur moyenne dans le temps, qui est nulle. Par conséquent, tout se passe pratiquement comme si l'atome était soumis à la seule force :

$$\vec{F}^{\parallel} = m_z \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \quad (6)$$

Question 5. Montrer que $\vec{F}^{\perp} \simeq F_z \vec{e}_z$ où $F_z = m_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$.

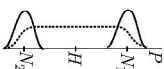
La force subie par l'atome est donc parallèle à Oz et proportionnelle à m_z , ou encore à σ_z ; par suite, mesurer H_N revient en fait à mesurer m_z ou σ_z .

2. Dans le cas d'atomes d'argent dans l'état fondamental (comme ceux du jet), le moment cinétique $\vec{\sigma}$ est simplement égal au spin de l'électron externe, qui est donc seul responsable de l'existence du moment magnétique \vec{m} . En effet, cet électron externe a un moment cinétique orbital nul. De plus, les moments cinétiques orbital et de spin de l'ensemble des électrons internes sont également nuls : enfin les conditions expérimentales réalisées en pratique sont telles que les effets liés au spin du noyau sont négligeables. C'est pourquoi, comme l'électron, l'atome d'argent, dans l'état fondamental, a un spin 1/2.

3. Cette résultante serait nulle si le champ \vec{B} était uniforme.

Comme, à l'entrefer de l'entrefer les moments des différents atomes du jet sont répartis de façon isotrope (toutes les valeurs de m_z comprises entre $\|\vec{m}\|$ et $-\|\vec{m}\|$ sont réalisées), on s'attend à ce que le jet vienne former sur la plaque P une seule tache symétrique par rapport à H . Les limites N_1 et N_2 de cette tache correspondent en principe aux valeurs maximale $\|\vec{m}\|$ et minimale $-\|\vec{m}\|$ de m_z . En fait, la dispersion des vitesses et la largeur finie de la fente font que les atomes ayant une valeur de m_z donnée ne se condensent pas au même point, mais donnent naissance à une tache centrée autour de la déviation correspondant à la vitesse moyenne.

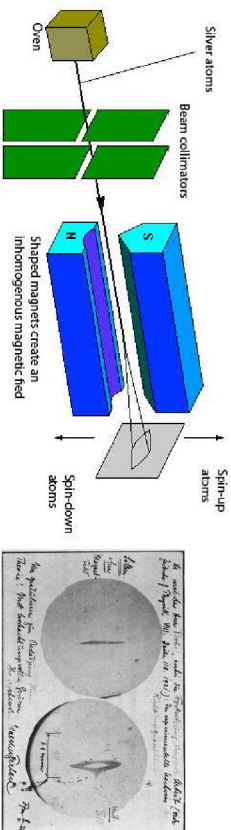
Figure 4 : Taches observées sur la plaque P dans l'expérience de Stern et Gerlach. Les moments magnétiques \vec{m} des atomes issus de l'enceinte E étant répartis au hasard dans toutes les directions de l'espace, la mécanique classique prévoit qu'une mesure de m_z peut donner avec une égale probabilité toutes les valeurs comprises entre $+\|\vec{m}\|$ et $-\|\vec{m}\|$; on devrait donc observer une seule tache (traits tiretés de la figure). En réalité, le résultat de l'expérience est tout autre : on observe deux taches centrées en N_1 et N_2 , ce qui signifie qu'une mesure de m_z ne peut donner que deux résultats possibles (quantification du résultat de mesure).



3- Résultats et conclusion

Les résultats de l'expérience de Stern et Gerlach (réalisée pour la première fois en 1922 par Stern et Gerlach) sont en contradiction complète avec les prévisions précédentes.

On n'observe pas une tache unique en H , mais deux taches (*cf* figure 4) centrées aux points N_1 et N_2 ; symétriques par rapport à H (la largeur de ces deux taches correspond à l'effet de la dispersion des vitesses et de la largeur des fentes). Les prédictions de la mécanique classique sont donc infirmées par l'expérience.



Question 6. Soit v_0 la vitesse moyenne des atomes qui pénètrent en O dans le champ magnétique \vec{B} créé par l'électro-aimant A . On suppose que la force F_z subie par les atomes ne s'exerce que sur la longueur $\ell = 2l_0$ de l'entrefer de A . Montrer que l'atome atteint N à une distance $Z = \frac{F_z \ell^2}{m_e v_0^2}$ de H .

On suppose désormais que la vitesse v_0 s'apparente à la vitesse quadratique moyenne d'agitation thermique d'un atome de masse m : $v_0 \simeq \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}$.

Question 7. Exprimer alors Z en fonction de m_z , $\frac{dB_z}{dz}$, T , ℓ et k_B .

Question 8. Compte tenu des valeurs numériques associées à l'expérience, donner une estimation de m_z ; comparer avec le magnéton de Bohr.

Les résultats de l'expérience nous conduisent à la conclusion suivante : si l'on mesure la composante σ_z du moment cinétique intrinsèque d'un atome d'argent dans son état fondamental, on ne peut trouver que l'une ou l'autre des deux valeurs correspondant aux déviations HN_1 et HN_2 . Nous sommes donc obligés de rejeter l'image classique d'un vecteur $\vec{\sigma}$ dont l'angle θ avec le champ magnétique peut prendre n'importe quelle valeur : σ_z est une grandeur physique quantifiée dont le spectre discret comporte seulement deux valeurs propres. Lorsque nous étudierons la théorie quantique du moment cinétique, nous verrons que ces valeurs propres sont $+\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$. Nous dirons que le spin de l'atome d'argent dans son état fondamental est $1/2$.

Données numériques

Constantes universelles	Données de l'expérience
Masse du proton..... $1,27 \cdot 10^{-27}$ kg	Numero atomique de Ag..... $Z_{Ag} = 47$
Magnéton de Bohr..... $\mu_B = -9,27 \cdot 10^{-24}$ J.T ⁻¹	Longueur de l'aimant..... $\ell = 3,5$ cm
Constante de Boltzmann..... $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J.K ⁻¹	Distance de l'écran..... $D = \ell/2$
Conversion..... 1 Gauss = 10^{-4} T	Gradient du champ..... $\frac{dB_z}{dz} = 10^5$ gauss/cm
Charge de l'électron..... $q_e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C	Masse molaire de l'argent..... $M = 107$ g.mol ⁻¹
Constante d'Avogadro..... $N = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹	Intensité du champ..... $B_z \simeq 10^4$ Gauss
Masse de l'électron..... $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg	Déviations du faisceau..... $Z \simeq 0,15$ mm
Constante de Planck..... $\hbar \simeq 1,05 \cdot 10^{-34}$ J.s	Température du four..... $T = 1\,000$ K

Réponses

- Question 1.** $\gamma = -\frac{e}{m_e}$
- Question 2.** $|\mu_B| = 9,27 \cdot 10^{-24}$ J.T⁻¹
- Question 4.** $\frac{d^2 x}{dz^2} + (\gamma B)^2 x = 0$
- Question 5.** \vec{B} symétrique $\Rightarrow B_z(x, z) = B_z(-x, z) \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0$
- Question 7.** $Z = m_z \frac{dB_z}{dz} \times \frac{\ell^2}{3k_B T}$
- Question 8.** $m_z = 5,1 \cdot 10^{-24}$ J.T⁻¹ = $0,55 \mu_B$