FILIÈRE MP

PHYSIQUE QUANTIQUE

Oscillateur harmonique

L'exercice propose de déterminer la quantification de l'énergie d'un oscillateur quantique à une dimension. Deux approches vont être proposées.

I- Opérateurs "Création" et "Annihilation"

L'énergie potentielle d'une particule de masse m est donnée par : $\mathcal{E}_p = \dfrac{1}{2}kx^2$ où x représente, pour la particule, l'écart à sa position d'équilibre

1. Écrire l'équation de Schrödinger pour les états stationnaires d'énergie E.
2. a- Vérifier que la fonction $\psi_0(x) = A\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$ correspond à un état stationnaire possible. On déterminera α en fonction de m, $\hbar$ et $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$
   En déduire l'énergie E_0 correspondant à cet état.

   b- Calculer la constante A pour que la fonction $\psi_0(x)$ soit normée.
   On rappelle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$

   c- Comparer résultat quantique et résultat classique.
3. On définit les opérateurs *Création* et *Annihilation* :

$$\hat{a} \mathrel{\hat{=}} \sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega_0 x + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad \hat{a}^\dagger \mathrel{\hat{=}} \sqrt{\frac{m}{2}}\,\omega_0 x - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

   a- Montrer que :

$$\hat{a}^\dagger(\hat{a}\psi) = H\psi - \frac{1}{2}\hbar\omega_0\psi \quad \text{et} \quad \hat{a}(\hat{a}^\dagger\psi) = H\psi + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\psi$$

   où H est le Hamiltonien.

   b- On considère la fonction $\psi_1 = \hat{a}^\dagger\psi_0$. Calculer $\hat{a}\psi_1$ en fonction de E_0 et ψ_0.
   En déduire $\hat{a}^\dagger(\hat{a}\psi_1)$ en fonction de E_0 et ψ_1.

   c- Montrer que ψ_1 est un nouvel état stationnaire possible et exprimer son énergie E_1 en fonction de E_0.

   d- En déduire l'expression générale E_n de l'énerige des états stationnaires possibles.

II- Solution de l'équation de Schrödinger

La fonction d'onde d'un état stationnaire d'énergie E sera écrite sous la forme :

$$\psi(x,t) = \phi(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}$$

1. Remplacer, dans l'équation de Schrödinger vérifiée par $\phi(x)$, le paramètre x par un paramètre adimensionné $u = \beta x$ et $\phi(x)$ par la fonction $\tilde{\phi}(u)$, solution de l'équation :

$$-\frac{\mathrm{d}^2\tilde{\phi}}{\mathrm{d}u^2} + u^2\,\tilde{\phi} = \varepsilon\,\tilde{\phi} \tag{1}$$

   Donner les expressions de β et ε en fonction de $\hbar$, k, m, E.
2. Lorsque u tend vers $\pm\infty$, l'équation précédente se simplifie ; soit $\tilde{\phi}_\infty(u)$ sa solution.
   En effectuant le changement de variable $X = u^2$, chercher $\tilde{\phi}_\infty(u)$ qui respecte les conditions :

$$\lim_{u\to\pm\infty}\phi_\infty(u) \neq \infty \quad \text{et} \quad \lim_{u\to 0}\phi_\infty(u) = 1$$

3. On cherche maintenant les solutions de l'équation (1) sous la forme :

$$\tilde{\phi}(u) = f(u) \times \mathrm{e}^{-u^2/2}$$

   a- Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $f(u)$.

   b- La solution de cette équation est cherchée sous forme de série :

$$f(u) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p\,u^p$$

   Trouver la relation de récurrence entre a_{p+2} et a_p.

   c- Pour assurer la convergence de $\tilde{\phi}(u)$, la série précédente ne peut être infinie. Il existe donc un entier $p = n$ pour lequel $a_n \neq 0$ et $a_{n+2} = 0$.
   En déduire l'expression de E en fonction de $\hbar$, ω_0 et n.

Réponses

I- Opérateurs "Création" et "Annihilation"

1. $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} + \dfrac{1}{2}kx^2\psi = E\psi$
2. a- $\alpha = \dfrac{\sqrt{km}}{2\hbar}$ et $E_0 = \dfrac{\hbar\omega_0}{2}$

   b- $A = \left(\dfrac{km}{\pi^2\hbar^2}\right)^{1/8}$
3. b- $\hat{a}\psi_1 = \left(E_0 + \dfrac{\hbar\omega_0}{2}\right)\psi_0 = 2E_0\,\psi_0$ et $\hat{a}^\dagger(\hat{a}\psi_1) = \left(E_0 + \dfrac{\hbar\omega_0}{2}\right)\psi_1$

   c- $H\psi_1 = E_1\,\psi_1$ avec $E_1 = \hbar\omega_0\left(\dfrac{1}{2}+1\right)$

   d- $E_n = \hbar\omega_0\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$

II- Solution de l'équation de Schrödinger

1. $\beta = \left(\dfrac{km}{\hbar^2}\right)^{1/4}$ et $\varepsilon = \left(\dfrac{4mE^2}{\hbar^2 k}\right)^{1/2}$
2. $\phi_\infty(u) = \mathrm{e}^{-u^2/2}$
3. a- $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}u^2} - 2u\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} + (\varepsilon - 1)\,f = 0$

   b- $a_{p+2} = \dfrac{2p+1-\varepsilon}{(p+2)(p+1)}\,a_p$

   c- $E_n = \hbar\omega_0\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$