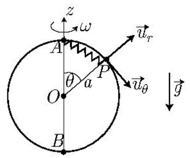
B1– Mécanique

⋆⋆ Exercice N°1–

Un point matériel P, de masse m, glisse sans frottements sur un cercle de rayon a, tournant autour de son axe vertical à une vitesse angulaire ω constante.
Il subit l'action d'un ressort de raideur k et de longueur à vide nulle, tendu de A à P.

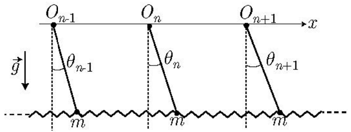


1. Déterminer une relation entre $\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$, θ et les paramètres précédents.

   On pourra introduire $p = \left(\dfrac{k}{m} - \dfrac{g}{a}\right)\dfrac{1}{\omega^2}$ où a est le rayon du cercle.
2. Discuter des positions d'équilibres, suivant p.
3. Déduire la stabilité de ces positions d'équilibre.

⋆⋆ Exercice N°2–

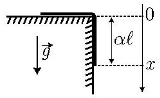
Les ressorts sont tous de raideur α et de longueur à vide ℓ_v. Les masses suspendues, de masse m, ont pour abscisses à l'équilibre $x_n = na$. Les tiges, de longueur ℓ et de masse négligeable, font un angle θ_n par rapport verticale et $\theta_n = 0$ lorsque le système est à l'équilibre.
On posera : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$.



1. En supposant les angles θ_n suffisamment petits, trouver l'équation différentielle liant θ_n, θ_{n-1} et θ_{n+1}.
2. On cherche les solutions sous la forme $\underline{\theta}_n = \theta_0\, e^{i(kna-\omega t)}$. Donner la relation de dispersion de cette onde. À quel type de filtre le mouvement peut-il être comparé ?
3. On suppose maintenant a très petit par rapport aux abscisses des points. Établir l'équation de propagation de l'onde. Commenter cette équation.
4. Quelle est alors la nouvelle relation de dispersion .

⋆⋆⋆ Exercice N°3–

Une corde homogène de longueur ℓ, de masse linéique λ et sans raideur, est maintenue par un opérateur sur le coin d'une table, de sorte qu'une longueur $\alpha\ell$ de corde pend dans le vide.
À l'instant $t = 0$, l'opérateur lâche la corde sans vitesse initiale, avec $x = \alpha\ell$.

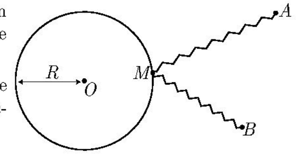


1. Dans le cas où la corde glisse sans frottement sur la table, déterminer le mouvement de son extrémité pendante. En déduire le temps au bout duquel la corde quitte la table.
2. On suppose, dans cette question, qu'il existe entre la corde et la table un coefficient de frottement f. On posera : $\alpha_0 = \dfrac{f}{1+f}$.

   À quelle condition la corde va-t-elle tomber ?
3. Lorsque c'est le cas, déterminer le mouvement de son extrémité pendante et le temps mis par la corde pour quitter la table.

⋆⋆ Exercice N°4–

Un point matériel M, de masse m, peut se déplacer sans frottements sur un cercle de centre O, de rayon R, situé dans le plan horizontal. M est relié à deux ressorts de raideurs k_1 et k_2, de longueur à vide nulle, accrochés en A et B dans le plan horizontal. On considère que le segment AB se trouve entièrement à l'extérieur du cercle.



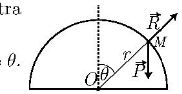
1. Montrer que l'action sur M des deux ressorts est équivalente à celle d'un ressort unique, dont on donnera la constante de raideur et accroché à un point G défini par :

$$k_1\,\overrightarrow{GA} + k_2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

2. En supposant qu'initialement O, M et G sont alignés, trouver l'expression de la pulsation des oscillations de M autour de sa position d'équilibre.

⋆⋆ Exercice N°5–

Un point matériel M, de masse m, glisse sans frottements sur une demi-boule de centre O et de rayon r. On appelle θ l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ par rapport à la verticale.
À la date $t = 0$, θ est pratiquement nul et M est lâché sans vitesse initiale. On admettra que M n'est soumis qu'à son poids $\vec{P}$ et à la réaction $\vec{R}$ de la demi-boule.



1. Par un bilan énergétique, trouver l'expression de la vitesse v de M en fonction de θ.
2. Exprimer $R = \left\|\vec{R}\right\|$ en fonction de θ.
3. En déduire la valeur de θ lorsque M quitte la demi-boule.

Réponses

Exercice N°1–

1. $\mathcal{E}_p = ma^2\omega^2\left(-\dfrac{1}{2}\sin^2\theta + \dfrac{ka^2}{ma^2\omega^2} - p\cos\theta\right) \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega^2\sin\theta\,(-\cos\theta + p) = 0$
2. $\theta_0 = 0$ ou $\theta_1 = \pi$ et $\cos\theta_2 = p$ à condition que $|p| \leqslant 1$
3. θ_0 est stable si $p > 1$; θ_1 est stable si $p < -1$; θ_2 est stable.

Exercice N°2–

1. $m\ell\dfrac{\partial^2\theta_n}{\partial t^2} = \alpha\ell\,(\theta_{n+1} + \theta_{n-1}) - (mg + 2\alpha\ell)\,\theta_n$
2. $1 + \dfrac{mg}{2\alpha\ell}\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) = \cos(ka)$ correspond à un filtre passe-bande, avec : $\omega_0 \leqslant \omega \leqslant \omega_0\sqrt{1 + \dfrac{4\alpha\ell}{mg}}$
3. $m\ell\dfrac{\partial^2\theta}{\partial t^2} - \alpha\ell a^2\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + mg\,\theta = 0$
4. $k^2 = \dfrac{m}{\alpha a^2}(\omega^2 - \omega_0^2)$; c'est un filtre passe haut, avec $\omega_c = \omega_0$.

Exercice N°3–

1. $x = \alpha\ell\cosh\left(\dfrac{t}{\tau_0}\right) \Rightarrow t_1 = \tau_0\,\mathrm{arg\,cosh}\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ avec $\tau_0 = \sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$.
2. Glissement si $\alpha \geqslant \alpha_0$.
3. $x(t) = (\alpha - \alpha_0)\,\ell\cosh\left(\dfrac{t}{\tau}\right) + \alpha_0\ell \Rightarrow t_2 = \tau\,\mathrm{arg\,cosh}\left(\dfrac{1-\alpha_0}{\alpha-\alpha_0}\right)$ avec $\tau = \sqrt{\dfrac{\ell}{g\,(1+f)}}$.

Exercice N°4–

1. $k = k_1 + k_2$
2. $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{mR}{kD}}$

Exercice N°5–

1. $v^2 = 2gr\,(1 - \cos\theta)$
2. $R = mg\,(3\cos\theta - 2)$
3. $\theta_{\max} = 48°$