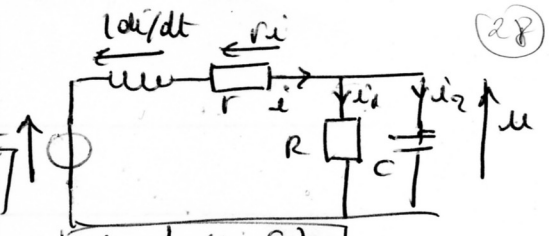


10) $E = r i + L \frac{di}{dt} + u$ où $i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt}$

$E = \frac{r}{R} u + r C \frac{du}{dt} + \frac{L}{R} \frac{du}{dt} + LC \frac{d^2 u}{dt^2} \Rightarrow \ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega^2 u = \frac{E}{LC}$



où $\omega^2 = \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{r}{R}\right)$
 $\lambda = \frac{1}{2LC} \left(rC + \frac{L}{R}\right)$

20) Équation caractéristique: $\chi^2 + 2\lambda \chi + \omega^2 = 0$
 $\Rightarrow \Delta = \lambda^2 - \omega^2 < \omega^2 \Rightarrow \chi_1 = -\lambda + i\omega$ et $\chi_2 = -\lambda - i\omega$

$\Rightarrow u = e^{-\lambda t} * (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \frac{E}{LC \omega^2}$ solution particulière

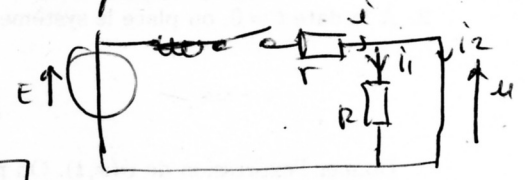
30) Conditions limites:

1^{ère} méthode: circuit équivalent à $t=0$:

continuité de $u_2 = u \Rightarrow u(0) = 0 \Rightarrow$ fil électrique

$i = i_1 + i_2$ ou $i = 0$ et $i_1 = \frac{u}{R} = 0 \Rightarrow i_2 = 0$

$\Rightarrow 0 = 0 + i_2 \Rightarrow i_2 = C \frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} \Big|_0 = 0$



2^{ème} méthode: fonction de transfert: $\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega^2 u = \frac{E}{LC} \Rightarrow u(-\omega^2 + 2\lambda j\omega + \omega^2) = \frac{E}{LC}$

$u(0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{u}{\omega} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{E/LC}{-\omega^2 + 2\lambda j\omega + \omega^2} = 0 \Rightarrow u(0) = 0$

$\dot{u}(0) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} j\omega u = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{j\omega \times E/LC}{-\omega^2 + 2\lambda j\omega + \omega^2} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dt} \Big|_0 = 0$

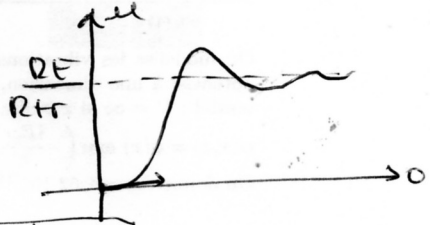
solution

$u(0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{E}{LC \omega^2}$

$\frac{du}{dt} = e^{-\lambda t} \left[-\lambda(A \cos \omega t + B \sin \omega t) + \omega(-A \sin \omega t + B \cos \omega t) \right]$

$\Rightarrow \frac{du}{dt} \Big|_0 = -\lambda A + B \omega = 0 \Rightarrow B = \frac{\lambda}{\omega} A$

$\Rightarrow u = -\frac{E}{LC \omega^2} e^{-\lambda t} \left(\cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right) + \frac{E}{LC \omega^2}$

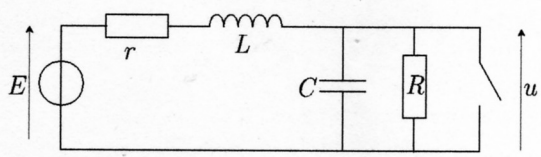


3012241

III- Concours Commun Polytechnique (2021)

1- Électrocinétique et mécanique (2021)

a- Exercice 1 : Régime transitoire



Ce circuit comporte un générateur de tension continue E , une résistance R , un condensateur de capacité C et une bobine modélisée par une inductance L en série avec une résistance r . Après avoir été fermé pendant longtemps, l'interrupteur s'ouvre à $t = 0$.

1. Montrer que la tension vérifie l'équation différentielle :

$\ddot{u} + 2\lambda \dot{u} + \omega^2 u = \frac{E}{LC}$

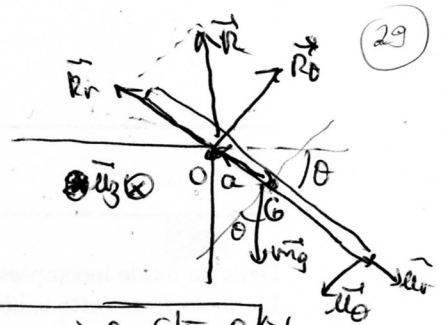
On exprimera les constantes λ et ω .

2. On suppose que l'on a : $\omega \gg \lambda$.

Exprimer u à l'aide de constantes A et B ainsi que des données de l'énoncé.

3. Déterminer les valeurs de u et i à $t = 0$. En déduire l'expression de $u(t)$.

4. Tracer l'allure de $u(t)$.



1) $\dot{c}_p = mg \sin \theta = -mg a \sin \theta \Rightarrow \left| \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right| = -mga \neq 0 \Rightarrow$ pas d'équilibre

2) Non glissement si $|R_r| < f |R_\theta|$

3) $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{C}_O(m\vec{g}) \Rightarrow J\ddot{\theta} = +mga \cos \theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{mga \cos \theta}{J} \quad (\alpha)$

4) $J\ddot{\theta} - mga \cos \theta = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mga \sin \theta \right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 - mga \sin \theta = C = 0 \quad (\text{à } t=0)$

5) $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \begin{pmatrix} mg \sin \theta \\ mg \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -R_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_r \\ 0 \end{pmatrix} = m \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \begin{pmatrix} -ma\ddot{\theta} \\ ma\dot{\theta} \end{pmatrix} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{2mga \sin \theta}{J} \quad (\beta)$

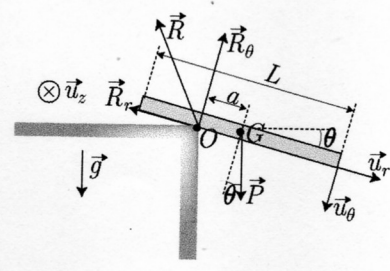
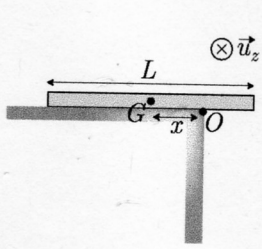
d'après (a), (b) $\Rightarrow \begin{cases} mg \sin \theta - R_r = -\frac{2m^2 a^2 g \sin \theta}{J} \\ mg \cos \theta - R_\theta = \frac{m^2 a^2 g \cos \theta}{J} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_r = mg \left(1 + \frac{2ma^2}{J} \right) \sin \theta \\ R_\theta = mg \left(1 - \frac{ma^2}{J} \right) \cos \theta \end{cases}$

6) Glissement si $|R_r| \geq f |R_\theta| \Rightarrow mg \left(1 + \frac{2ma^2}{J} \right) \sin \theta > mg \left(1 - \frac{ma^2}{J} \right) \cos \theta \Rightarrow \tan \theta > \frac{J - ma^2}{J + 2ma^2} \Rightarrow \tan \theta_c = \frac{J - ma^2}{J + 2ma^2}$

III- Concours Commun Polytechnique (2021)

3112262

b- Exercice 2 : Chute d'un téléphone depuis une table



Mon téléphone était posé sur ma table de chevet. Je dormais quand le réveil a sonné. Fatigué, je déplace mon bras pour l'éteindre et le pousse sans faire exprès. Oh non ! il va tomber !

Le téléphone entame une rotation autour de l'axe (Oz), sans glisser. Il est de longueur L, de masse m et de moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation.

Son centre de gravité est à la distance a de l'axe.

La table exerce une réaction $\vec{R} = -R_r \vec{u}_r = -R_\theta \vec{u}_\theta$ sur le téléphone.

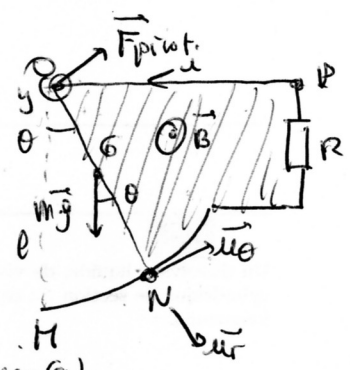
1. Expliquer pourquoi la position initiale n'est pas une position d'équilibre.
2. Rappeler la loi de frottement de Coulomb sur le non-glissement.
3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par θ
4. Déterminer une intégrale première du mouvement.
5. Exprimer les composantes R_r et R_θ .
6. Exprimer l'angle θ_c à partir duquel le téléphone commence à glisser.

1) a- $\theta \uparrow \Rightarrow \Phi \uparrow \Rightarrow i$ dans le cas \odot la jonction $\Rightarrow \Phi \uparrow$

b- $e = -\frac{d\Phi_B}{dt} = Ri$ avec $\Phi_B = \Phi_{ONR\vec{e}_y} = \Phi_{OMPO} - \Phi_{OMN}$
 $= cl\epsilon - B \times S_{OMN}$

où $S_{OMN} = \frac{\theta}{2\pi} \times \pi R^2 = \frac{\theta R^2}{2} \Rightarrow \Phi_B = cl\epsilon - \frac{BR^2}{2}\theta$

$\Rightarrow e = Ri = \frac{BR^2}{2}\dot{\theta} \Rightarrow \left[\dot{\theta} = \frac{BR^2}{2R} \dot{\theta} \right]$ cohérent avec (a)



2) a- $\vec{F}_{ext} = \vec{F}_{pivot} + mg + \vec{F}_{Laplace}$ où $\vec{F}_{Laplace} = i \vec{\ell} \wedge \vec{B} = -i \ell B \vec{e}_y$

b- $e \vec{\ell}_{Laplace} = \vec{OB} \wedge \vec{F}_{Laplace} = -\frac{l}{2} \times i \ell B \vec{e}_y = -\frac{l^2 B}{2} \times \frac{BR^2}{2R} \dot{\theta} \Rightarrow \left[\vec{\tau}_{Laplace} = -\frac{B^2 l^4}{4R} \vec{e}_y \right]$

c- $J \ddot{\omega}_y = -mg l \sin \theta \vec{e}_y - \frac{B^2 l^4}{4R} \dot{\theta} \vec{e}_y \Rightarrow \left[J \ddot{\omega} = -mg l \sin \theta - \frac{B^2 l^4}{4R} \dot{\theta} \right]$

3) a- $J \ddot{\theta} + \frac{B^2 l^4}{4R} \dot{\theta} + mg l \theta = 0 \Rightarrow \left[\ddot{\theta} + 2\lambda \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \right]$ où $\left[\omega_0^2 = \frac{mg l}{J} \right]$ et $\left[\lambda = \frac{B^2 l^4}{4RJ} \right]$

b- Équation caractéristique: $\chi^2 + 2\lambda \chi + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 \Rightarrow \chi = -\lambda \pm \Delta'^{1/2}$

• si $\lambda > \omega_0$, $\alpha = \sqrt{\Delta'}$ $\Rightarrow \theta = e^{-\alpha t} (A e^{\alpha t} + B e^{-\alpha t})$

• si $\lambda = \omega_0$, $\theta = (A + Bt) e^{-\alpha t}$

• si $\lambda < \omega_0$, $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \Rightarrow \theta = e^{-\lambda t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$

3112243

III- Concours Commun Polytechnique (2021)

2- Induction électromagnétique, mécanique quantique (2021)

a- Exercice 1 : rail de Laplace

On considère une barre en métal de moment d'inertie J et de longueur ℓ , attachée à une de ses extrémités (axe Oy) à une liaison pivot parfaite (comme un pendule) et à l'autre extrémité il est attaché à un rail en demi-cercle sur lequel il coulisse sans frottements.

L'extrémité du rail et le point O sont reliés entre eux par un fil électrique de résistance R .

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique et un champ de gravitation uniformes :

$\vec{B} = B \vec{e}_y \quad \vec{g} = -g \vec{e}_z$

1. a- Sens du courant par la loi de Lenz ?
- b- Utilisation de la loi de Faraday pour déterminer i .
- c- Vérifier la cohérence du résultat au regard de la question a.
2. a- Faire un bilan des forces.
- b- Donner le moment de la force de Laplace s'appliquant sur la tige.
- c- Utiliser le théorème du moment cinétique.
3. a- Donner l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ de la tige, supposé petit.
- b- Je ne me souviens plus trop ; il me semble qu'il y avait une question sur le type de solution en fonction des valeurs de i , B , ℓ (longueur de la tige), R .

1) a) cf cours (b) = B₂ = 0 car pas d'onde réfléchie dans le milieu (1).

$$c = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} - V_0\psi = -E\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)\psi = 0 \Rightarrow k_1 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)}$$

d- Région (2) = $\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = -E\psi \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} + k_2^2\psi = 0$ avec $k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ et

Conditions de continuité: en $x=0$ $\psi_1 = \psi_2$; $\frac{d\psi_1}{dx} = \frac{d\psi_2}{dx}$
 $B_1 = A_2 + B_2$
 $B_1 k_1 = -k_2 A_2 + B_2 k_2$

$$\Rightarrow B_2 = \frac{k_1 + k_2}{2k_2} B_1 \Rightarrow B_1 = \frac{2k_2}{k_1 + k_2} B_2 \Rightarrow A_2 = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} B_2$$

ondes incidente, réfléchie, transmise:

$$\begin{cases} \psi_i = B_2 e^{i(k_2 x - \omega t)} \\ \psi_r = A_2 e^{i(-k_2 x - \omega t)} \\ \psi_t = B_1 e^{i(k_1 x - \omega t)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{A_2}{B_2} = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \\ R = \left| \frac{A_2}{B_2} \right|^2 = \left(\frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} \right)^2 < 1 \end{cases}$$

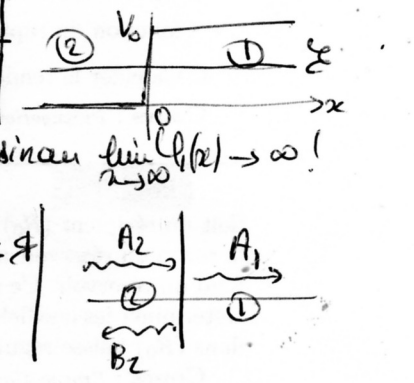
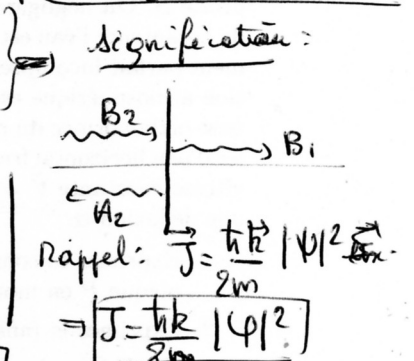
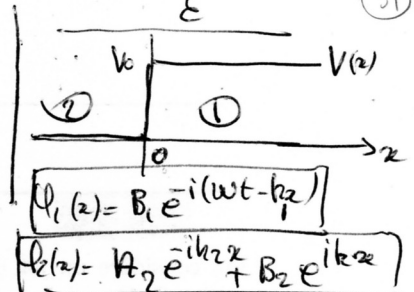
2) Région (2) = $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = -E\psi \Rightarrow \psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}$ $k_2 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

Région (1): $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_0)\psi = 0 \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2} - q^2\psi = 0$ $q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}$
 $\Rightarrow \psi_1(x) = A_1 e^{-qx} + B_1 e^{qx}$ \rightarrow si on veut $\psi_1(x) \rightarrow 0$!

Continuité:

$$\begin{cases} \psi_2(0) = \psi_1(0) \\ \frac{d\psi_2}{dx} \Big|_0 = \frac{d\psi_1}{dx} \Big|_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 + B_2 = A_1 \\ ik_2 A_2 - ik_2 B_2 = -q A_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ik_2 A_2 + ik_2 B_2 = ik_2 A_1 \\ ik_2 A_2 - ik_2 B_2 = -q A_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{2ik_2}{ik_2 - q} A_2 \\ B_2 = \frac{ik_2 + q}{ik_2 - q} A_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi_i = A_2 e^{ik_2 x} e^{-i\omega t} \\ \psi_r = B_2 e^{-ik_2 x} e^{-i\omega t} \end{cases} \Rightarrow r = \frac{\psi_r}{\psi_i} = \frac{B_2}{A_2} \Rightarrow r = \frac{ik_2 + q}{ik_2 - q} \text{ et } R = \frac{J_r}{J_i} = \left| \frac{\psi_r}{\psi_i} \right|^2 = |r|^2 = 1$$



III- Concours Commun Polytechnique (2021)

b- Exercice 2 : mécanique quantique

Une particule quantique, de masse m , se déplace selon (Ox) dans un milieu dont le potentiel s'écrit :

$$\begin{cases} V(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ V(x) = V_0 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

On rappelle l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi + V\psi = i\hbar \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

On cherche un état stationnaire de la forme : $\psi(x, t) = \varphi(x) e^{-i\omega t}$.

1. D'abord on suppose que la particule est de masse m et d'énergie $E > V_0$, la particule étant préparée pour arriver depuis le domaine $x < 0$.

a- Expliquer la forme prise pour ψ et donner l'expression de $\varphi(x)$.
 Montrer que la densité linéaire de probabilité est indépendante du temps.

b- On donne, pour $x > 0$:

$$\psi(x, t) = B_1 e^{-i(\omega t - kx)} + B_2 e^{-i(\omega t + kx)}$$

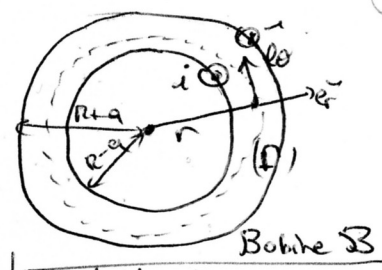
L'un des coefficients B_1 ou B_2 est nul. Lequel? Expliquer pourquoi.

c- Donner une relation déterminant le coefficient k (pour $x > 0$).

d- Définir et calculer le coefficient de réflexion r en amplitude et R en flux. Commenter.

2. On suppose maintenant que $0 < E < V_0$. Mêmes questions.

10) Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B}_B \cdot d\vec{\omega} = B(r) \times 2\pi r = \mu_0 N I$
 Champ produit par B $\Rightarrow \boxed{B_B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$

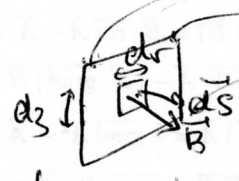


Rappel : $\Phi = \Phi_{B/B} + \Phi_{F/B}$
 $= L I + M I$

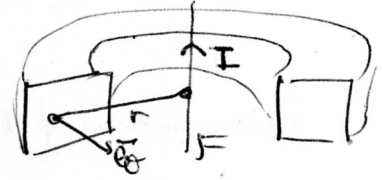
20) Φ_1 à travers une spire :

$$\Phi_1 = \int_{z=-a}^{+a} \int_{r=R-a}^{R+a} \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} dr dz$$

$$= \frac{\mu_0 N i}{2\pi} \times 2a \times \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right) \Rightarrow \Phi_{B/B} = N \Phi_1 = \frac{\mu_0 N^2 i a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right) = L i \Rightarrow \boxed{L = \frac{\mu_0 N^2 a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right)}$$



30) Théorème d'Ampère : $\oint \vec{B}_F \cdot d\vec{\omega} = B_F(r) \times 2\pi r = \mu_0 I$
 Champ produit par le fil $\Rightarrow \boxed{B_F = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta}$



Φ_1 à travers une spire :

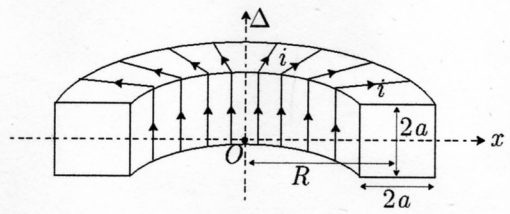
$$\Phi_1 = \int_{z=-a}^{+a} \int_{r=R-a}^{R+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr dz = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \times 2a \times \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right) \Rightarrow \Phi_{F/B} = \frac{\mu_0 N I a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right) = M I$$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{\mu_0 N a}{\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R-a}\right)}$$

0101251

III- Concours Commun Polytechnique (2021)

- 3- Induction magnétique, mécanique céleste (2021)
- a- Exercice 1 : Bobine torique

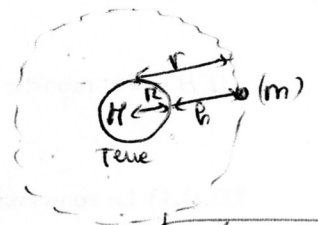


1. Donner l'expression du champ magnétique (le tore possède N spires).
2. Déterminer l'inductance L de la bobine.
3. À présent, on met un fil parcouru par un courant I sur l'axe Δ de la figure (vers le haut). Déterminer l'induction mutuelle M entre le fil et la bobine.

Exo 3b-p 15 (ref: 01012523)

1°) PFD: $m \times (-\frac{v^2}{r} \vec{e}_r) = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow mv^2 = \frac{GMm}{r}$

$$\begin{cases} \mathcal{E}_p = -\frac{GMm}{r} \\ \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{E}_c = -\frac{1}{2}\mathcal{E}_p \Rightarrow \mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = -\frac{GMm}{2r}$$



~~$T_0 = 2\pi \times 3600$~~
 ~~$= 86400 \text{ s}$~~

2°/a. $\frac{d\mathcal{E}_{tot}}{dt} = P_{frottement} \Rightarrow \frac{GMm}{2r^2} \frac{dr}{dt} = -m \alpha \vec{v} \cdot \vec{v} = -m \alpha v^2 = -\alpha \frac{GMm}{r}$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{dr}{dr} = -\alpha \Rightarrow \frac{dr}{dt} + 2\alpha r = 0 \Rightarrow r = r_0 e^{-2\alpha t}$ ou $r_0 = R+h$

Après la 1ère révolution: $\Delta r = 1\text{m} = r_0 - r(T_0) = r_0 \times [1 - e^{-2\alpha T_0}] \approx r_0 \times 2\alpha T_0$ si $2\alpha T_0 \ll 1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\Delta r}{r_0 \times 2T_0}$ ou $2\alpha T_0 = \frac{\Delta r}{r_0} = \frac{1}{R+h} = \frac{1}{6500 \times 10^3} \ll 1$

avec la 3e loi de Kepler: $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \Rightarrow T_0 = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_0^3}{GM}}$

b. $r(t) = r_0 e^{-2\alpha t} = r_0 e^{-\frac{\Delta r}{r_0} \times \frac{t}{T_0}}$

$r(t) = r(t) - R = (R+h) e^{-\frac{\Delta r}{r_0} \times \frac{t}{T_0}} - R$ ou $t = 2$ années
 $= 2 \times 365 \times 24 \times 3600 \text{ s}$

III- Concours Commun Polytechnique (2021)

b- Exercice 2 : Mouvement d'un satellite

Un satellite de masse m et d'altitude $h = 100 \text{ km}$ de la Terre ($R = 6400 \text{ km}$) décrit une trajectoire circulaire.

- Donner un lien entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.
Dire que $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_m$ et que, dans le cas d'un système conservatif $d\mathcal{E}_p + d\mathcal{E}_c = 0$ n'était manifestement pas la réponse attendue.
- On suppose qu'à chaque révolution, le satellite subit une diminution d'altitude de 1 mètre.
On suppose également qu'il est soumis à une force de frottement $\vec{f} = -m\alpha \vec{v}$.
 - Déterminer le coefficient α .
 - Donner l'altitude h au bout de x années.