

1) $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \omega_T^2 x + e E_0 \cos(\omega t - kz)$

$\Rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_T^2 x = \frac{e E_0}{m} \cos(\omega t - kz)$

2) $\frac{dx}{dt} = i \omega x \Rightarrow x = \frac{e E_0}{m(\omega_T^2 - \omega^2)} e^{i(\omega t - kz)} = \frac{e}{m(\omega_T^2 - \omega^2)} \vec{E} = \alpha \vec{E}$ où $\alpha = \frac{e}{m(\omega_T^2 - \omega^2)}$

3) $\vec{j} = Ne \vec{v} \Rightarrow \vec{j} = Ne \dot{x} \vec{e}_x \Rightarrow \vec{j} = \frac{Ne^2 i \omega E_0}{m(\omega_T^2 - \omega^2)} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$

4) $\vec{P}_{ind} = e x \vec{u}_x \Rightarrow \vec{j}_{ind} = \frac{\partial \vec{P}_{ind}}{\partial t} = e i \omega x \vec{e}_x \Rightarrow \vec{j}_{ind} = Ne^2 i \omega \alpha \vec{E}$

$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{tot} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_{ind} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$
 $\Rightarrow \text{rot } \vec{B} = \mu_0 (N+1) e i \omega \alpha \vec{E} + \epsilon_0 i \omega \vec{E}$

0212241

II- Centrale (2021)

1- Onde électromagnétique dans un conducteur (2021)

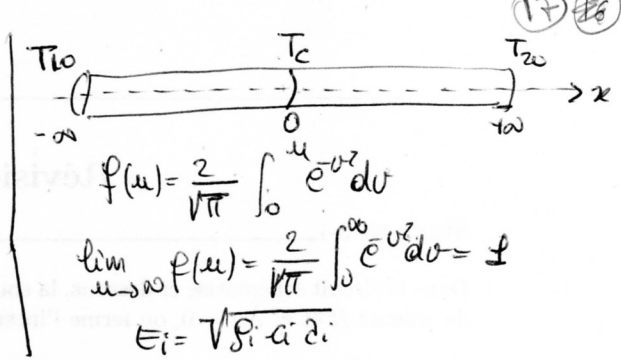
On soumet un cristal de NaCl à une onde électromagnétique de champ électrique :

$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x$

On note $x(z, t)$ le déplacement relatif des cations par rapport aux anions à la cote z et à l'instant t .
 On modélise une paire cation/anion par un objet ponctuel de masse m (appelée masse réduite), de charge e située à l'abscisse $x(z, t)$ et soumis à la force $-m \omega_T^2 x \vec{e}_x$.
 On suppose que la vitesse relative des cations par rapport aux anions est très inférieure à la vitesse de la lumière.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(z, t)$.
2. Donner la solution X en régime sinusoïdal forcé.
3. Exprimer la densité volumique de courant en introduisant le nombre N de paires par unité de volume.
4. Au sein de chaque ion apparaît un moment dipolaire induit \vec{p}_{ind} proportionnel à \vec{E} . Dans le cristal apparaît alors une densité volumique de courant $\vec{j}_{ind} = \frac{\partial \vec{p}_{ind}}{\partial t}$. Donner l'expression du champ \vec{B} .

1°) cf cours: $\left[\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right]$ avec $\left[D = \frac{\lambda}{\rho c} \right]$



2°) $\lim_{x \rightarrow \infty} T(x,t) = a_1 + b_1 = T_{10}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} T(x,t) = a_1 = T_c$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} T(x,t) = a_2 + b_2 = T_{20}$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} T(x,t) = a_2 = T_c$

$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = T_c \\ b_1 = T_{10} - T_c \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} a_2 = T_c \\ b_2 = T_c - T_{20} \end{cases}$

$f(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv$
 $\lim_{u \rightarrow \infty} f(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = 1$
 $E_i = \sqrt{\rho_i c_i \lambda_i}$

3°) Continuité de ϕ en $x=0 \Rightarrow \phi(0^-) = \phi(0^+) = j_{\text{re}}(0^-) = j_{\text{re}}(0^+)$ avec $j_{\text{re}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$

$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{dT}{du} \times \frac{\partial u}{\partial x} = b \times \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} \times \frac{1}{\sqrt{4Dt}} = \frac{2b}{\sqrt{\pi Dt}} e^{-(x^2/4Dt)}$

avec $T(u) = a + b f(u)$
 $f(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv$
 $u(x,t) = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$

$j_{\text{re}}(0^-) = j_{\text{re}}(0^+) \Rightarrow -\lambda_2 \times \frac{2b_2}{\sqrt{\pi D_2 t}} = -\lambda_1 \times \frac{2b_1}{\sqrt{\pi D_1 t}}$

$\Rightarrow \frac{\lambda_2 b_2}{\sqrt{D_2}} = \frac{\lambda_1 b_1}{\sqrt{D_1}} \Rightarrow (T_c - T_{20}) \sqrt{\lambda_2 \rho_2 c_2} = (T_{10} - T_c) \sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1}$

$\Rightarrow E_2 T_c - E_2 T_{20} = E_1 T_{10} - E_1 T_c \Rightarrow \boxed{T_c = \frac{E_1 T_{10} + E_2 T_{20}}{E_1 + E_2}}$

0312941

II- Centrale (2021)

2- Diffusion thermique (2021)

- On considère un cylindre de longueur l , de section S , de masse volumique ρ et de conductivité thermique c .
Établir l'équation de diffusion thermique.
- On colle deux cylindres semi-infinis de même section S en $x = 0$, le long de l'axe (Ox) . En $-\infty$, la température du premier cylindre est T_{10} et en $+\infty$, la température du deuxième cylindre est T_{20} .
On admet que la température est donnée par :

$$T(x,t) = \begin{cases} a_1 + b_1 f\left(\frac{x}{\sqrt{D_1 t}}\right) \\ a_2 + b_2 f\left(\frac{x}{\sqrt{D_2 t}}\right) \end{cases} \quad \text{où } f : u \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv$$

On précise : $\int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On note T_c la température de contact. Exprimer a_1, b_1, a_2, b_2 en fonction de T_{10}, T_{20} et T_c .

- Déterminer T_c en fonction des effusivités $E_1 = \sqrt{\rho_1 c_1 \lambda_1}$ et $E_2 = \sqrt{\rho_2 c_2 \lambda_2}$.

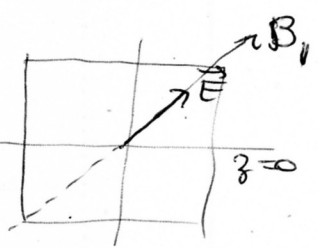
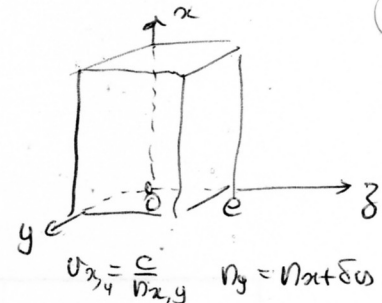
1°) $z < 0 \Rightarrow \vec{E}_z = E_{0z} e^{i(k_0 z - \omega t)}$ avec $\omega = k_0 c$ et $k_x v_x = k_z = k_0 n_x c$

2°) a - Pour $z \in [0; e]$: $\vec{E}_x = E_{0x} e^{i(k_x z - \omega t)} \Rightarrow \vec{E}_x(z=e) = E_{0x} e^{i(k_0 n_x e - \omega t)}$

Pour $z > e$: $\vec{E}_x = E'_{0x} e^{i(k_0 z - \omega t)}$

Continuité en $z=e \Rightarrow E'_{0x} e^{i k_0 e} = E_{0x} e^{i(k_0 n_x e - \omega t)}$

$\Rightarrow \vec{E}'_x(z > e) = E_{0x} e^{i k_0 (n_x - 1) e} e^{i(k_0 z - \omega t)}$



b- $z < 0 \Rightarrow \vec{E}_z = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(k_0 z - \omega t)}$ or $\vec{E}_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(k_0 z - \omega t)}$

c- $z=e \Rightarrow \vec{E}'_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(n_x k_0 e - \omega t)} \Rightarrow \vec{E}'_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t')$ où $\omega t' = \omega t - n_x k_0 e$

$\vec{E}'_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(n_y k_0 e - \omega t)}$ avec $n_y \Rightarrow \vec{E}'_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - n_y k_0 e)$

où $\omega t - n_y k_0 e = \omega t' + n_x k_0 e - n_y k_0 e \Rightarrow \vec{E}'_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t' + \varphi)$ où $\varphi = (n_x - n_y) k_0 e$

Onde polarisée rectilignement si $\varphi = p\pi, p \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow \varphi = -\delta n k_0 e$

d. $e \times \delta n = p \lambda_0 \Rightarrow \varphi = -p \lambda_0 \frac{2\pi}{\lambda_0} = -p \times 2\pi \Rightarrow \vec{E}'_y = E'_x = 1$ polarisée comme \vec{E}

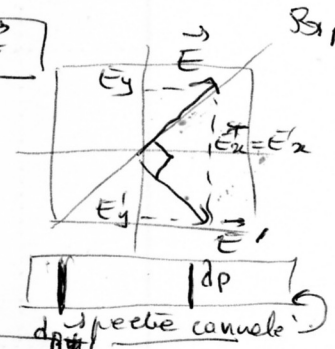
Après 8 morceaux de scotch: $\vec{E}'_x = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t')$ | $\vec{E}'_y = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos(\omega t' + \delta \varphi)$

extinction si l'onde $\vec{E}' \perp B_1$, c'est-à-dire: $\vec{E}'_y = -E'_x$, soit:

$|\delta \varphi| = p(2p+1)\pi \Rightarrow \delta n e \frac{2\pi}{\lambda_0} = (2p+1)\pi \Rightarrow \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial (-\delta n k_0 e)}{\partial p} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial (-\delta n e)}{\partial p}$

Même de 2 longueurs d'onde successives λ_p et λ_{p+1}

$\Rightarrow 2(p+1)\lambda - 2p\lambda = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial (-\delta n e)}{\partial p} \Rightarrow \delta n = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial \varphi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial p} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial \varphi}{\partial p}$



II- Centrale (2021)

4- OPP traversant un morceau de scotch biréfringent (2021)

On considère un morceau de scotch biréfringent, placé orthogonalement à l'axe (Oz) et d'épaisseur e. Son extrémité gauche est placée en z = 0.

On néglige toute réflexion sur les faces du scotch.

Une onde plane progressive de longueur d'onde λ_0 se propage suivant \vec{e}_z .

Deux cas se présentent :

- lorsque l'onde incidente est polarisée rectilignement suivant l'axe (Ox), alors l'onde traversant est telle que sa vitesse est $v_x = \frac{c}{n_x}$ et l'onde reste polarisée de manière identique.
- lorsque l'onde incidente est polarisée rectilignement suivant l'axe (Oy), alors l'onde traversant est telle que sa vitesse est $v_y = \frac{c}{n_y}$, avec $n_y = n_x + \delta n$ et l'onde reste polarisée de manière identique.

- Déterminer l'expression du champ \vec{E} pour $z < 0$, dans le cas où l'onde est polarisée rectilignement suivant \vec{e}_x .
- a- Déterminer \vec{E} en $z = e$, puis pour tout point $z > e$.
 - On suppose maintenant que l'onde est polarisée suivant la première bissectrice (B_1) entre les axes (Ox) et (Oy). Déterminer le champ \vec{E} pour $z < 0$, sachant qu'il est de norme E_0 .
 - Déterminer le champ \vec{E} pour $z > e$. L'onde est-elle toujours polarisée rectilignement ?
 - On suppose $e \times \delta n = p \lambda_0$ où p est un entier. Que dire de l'onde ?

On place maintenant 8 morceaux de scotch en série et on suppose qu'ils sont parfaitement alignés

On place un analyseur à la suite de ces scotch, qui est réglé dans la direction de (B_1).

On observe le spectre de l'onde en sortie, connaissant celui en entrée. Certaines raies ne sont plus présentes.

Expliquer pourquoi. Comment peut-on en déduire δn ?

Exo 5 p 9 lef 10712 2413.

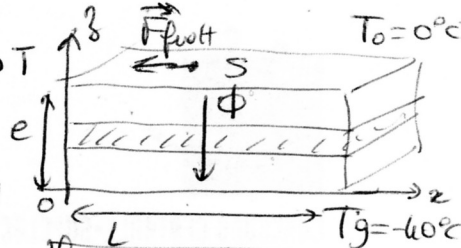
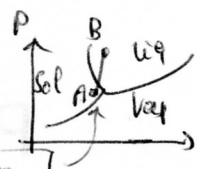
1°) Première hypothèse = compression isotherme A → B

⇒ liquéfaction (fusion de la glace)

Deuxième hypothèse dH. En z=0 : H₂O sol → H₂O vap.

$$dH = \delta m L_{fus} + dW_{ext} = 0 \text{ (régime stationnaire)}$$

$$\Rightarrow \delta m L_{fus} = -dW_{ext} = |F_{frott} \times dx| \Rightarrow \delta m > 0 \Rightarrow \text{fusion de la glace}$$



2°) L_patin = L ≈ 0,3 m ⇒ v = L / τ ⇒ τ = L / v ≈ 0,3 s

• P_surf = F_frott × v = τ_c × v

• 1^{ère} méthode: Diffusion thermique: $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Rightarrow \frac{\rho c}{\tau} = \frac{\lambda}{(L_{diff})^2} \Rightarrow L_{diff} = \sqrt{\frac{\lambda \tau}{\rho c}}$
(Analyse dimensionnelle).

• 2^e méthode: Étant donnée l'énergie de frottement: |F_frott × dx| + ~~se~~ diffuse sans perte de chaleur.

$$| \frac{F_{frott} \times dx}{dt} | = \frac{\delta Q}{dt} \Rightarrow P_{surf} \times S = |j_{th}| S \Rightarrow P_{surf} = |j_{th}|$$

Dans la glace, régime stationnaire ⇒ T = az + b ⇒ $\begin{cases} T_0 = ae + b \\ T_g = b \end{cases} \Rightarrow a = \frac{T_0 - T_g}{e}$

$$j_{th} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \frac{T_g - T_0}{e} \Rightarrow P_{surf} = \frac{\lambda}{e} (T_0 - T_g) \Rightarrow e = \frac{\lambda (T_0 - T_g)}{P_{surf}}$$

0712241

II- Centrale (2021)

5- Patineur (2021)

Un solide ne peut pas se déplacer sur de la glace à -40°C à cause de la résistance énorme qui est assimilable à celle d'un solide dans le sable. On considère un patineur de 75 kg, évoluant sur une piste de glace à une vitesse de 1 m.s⁻¹.

La glace est à -40°C, le passage du patineur sur la glace crée une fine couche de glace en fusion (glace+eau liquide) sur e = 10⁻⁷ m.

Il y a une force de frottements entre le patin et la glace.

1. On formule deux hypothèses permettant d'expliquer que le patineur puisse se déplacer :

- la surpression exercée par le patin sur la glace ;
- le dégagement de chaleur lors du contact patin-glace.

Expliquer qualitativement ces deux hypothèses.

2. Calculer le temps τ de contact entre le patin et la glace.

On donne τ_c la force surfacique liée aux frottements (homogène à une pression, avec τ_c = 10⁷ Pa).

Calculer la puissance surfacique liée aux frottements.

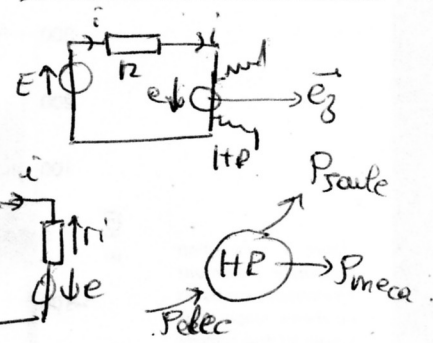
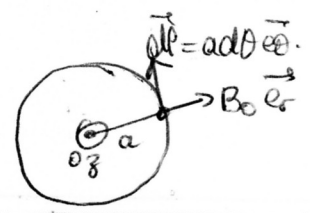
Déterminer l'épaisseur (la profondeur) sur laquelle l'énergie se «diffuse». Commenter.

Données :

- masse volumique de la glace μ_g ;
- conductivité thermique de la glace : λ_g ;
- capacité thermique massique (c_g) + diagramme (p, T) de la glace, eau liquide et vapeur d'eau, avec la valeur du point triple.

1°) $d\vec{F}_L = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = i (d\vec{l} \cdot \vec{e}_\theta) \wedge (B_0 \vec{e}_r) = -i dl B_0 \vec{e}_z$
 $\Rightarrow \vec{F}_L = -i l B_0 \vec{e}_z$ avec $l = N \times 2\pi a \Rightarrow \vec{F}_L = -i 2\pi a N B_0 \vec{e}_z$

2°) $m\ddot{z} = -kz - \lambda\dot{z} + F_L \Rightarrow m\ddot{z} + k z + \lambda\dot{z} = -2\pi i N a B_0 \quad (EM)$



3°) Première méthode: $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = \dot{z} B_0 \vec{e}_\theta$
 $e = \int \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int (\dot{z} B_0 \vec{e}_\theta) \cdot (dl \vec{e}_\theta) = \dot{z} B_0 \times 2\pi a N$

Deuxième méthode: Bilan d'énergie: $P_{elec} = P_{Joule} + P_{meca}$ avec $P_{elec} = u \dot{i} = (Ri - e) \dot{i} = Ri^2 - e \dot{i}$
 $P_{Joule} = Ri^2$
 $P_{meca} = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -i 2\pi a N B_0 \dot{z}$
 $\Rightarrow Ri^2 - e \dot{i} = Ri^2 + (-i 2\pi a N B_0 \dot{z}) \Rightarrow e = 2\pi a N B_0 \dot{z}$

4°) $E = Ri + e = Ri - \dot{z} B_0 2\pi a N \quad (EE)$

5°) (EM) x \dot{z} : $m\dot{z}\ddot{z} + k z \dot{z} + \lambda \dot{z}^2 = -2\pi i N a B_0 \dot{z} \Rightarrow E \dot{i} = Ri^2 + m \dot{z}\ddot{z} + k z \dot{z} + \lambda \dot{z}^2$
 (EE) x \dot{i} : $e \dot{i} - Ri^2 = E \dot{i} = Ri^2 - \dot{z} B_0 2\pi a N \Rightarrow E \dot{i} = Ri^2 + \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} m \dot{z}^2 + \frac{1}{2} k z^2) + \lambda \dot{z}^2$
 $\Rightarrow P_{elec} = P_{Joule} + \frac{d}{dt} (E_{meca} + P_{frot})$
 toute l'énergie électrique fournie se répartit en énergie mécanique et en pertes (Joule et frottement).

0812241

II- Centrale (2021)

6- Haut-parleur (2021)

On modélise un haut-parleur de manière simplifiée avec un aimant circulaire entourant une bobine de N spires, de rayon a , autour d'une membrane qui se déplace selon un axe Oz , soumise à une force de rappel $\vec{f}_r = -kz \vec{u}_z$ et une force de frottement $\vec{f}_f = -\lambda \dot{z} \vec{u}_z$. L'aimant crée un champ magnétique localement radial uniforme, de norme B_0 . Un générateur délivre une tension E et on note R la résistance du système.

- Déterminer l'expression de la force de Laplace appliquée à la membrane.
- Établir l'équation mécanique du système membrane + bobine.
On suppose à présent qu'il existe un champ électrique électromoteur d'expression :

$$\vec{E}_m(M, t) = \vec{v}(M) \wedge \vec{B}(M, t)$$

en un point M .

- Montrer que la f.é.m. induite a pour expression $e(r) = 2\pi N a B_0 \dot{z}$.
- Établir l'équation électrique du système.
- Faire un bilan énergétique.