

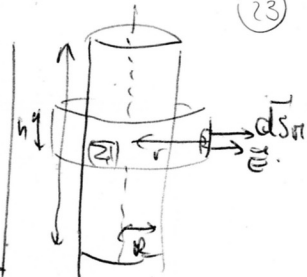
1) Gauss  $\Rightarrow \Phi_E = \oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E_x 2\pi r h$

$r < R \Rightarrow Q_{int} = \rho V = \rho \times \pi r^2 h \Rightarrow Q_{tot} = \rho \pi R^2 h \Rightarrow E(r < R) = \frac{\rho r}{2\pi \epsilon_0 R^2}$  or  $E = -\frac{dV}{dr}$

$r > R \Rightarrow Q_{int} = \rho \pi R^2 h \Rightarrow E(r > R) = \frac{\rho R^2}{2\pi \epsilon_0 r}$

$r > R \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho R^2}{2\pi \epsilon_0 r} \Rightarrow V = -\frac{\rho R^2}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$  (\*)

$r < R \Rightarrow \frac{dV}{dr} = -\frac{\rho r}{2\pi \epsilon_0 R^2} \Rightarrow V = -\frac{\rho r^2}{4\pi \epsilon_0 R^2} + Cte$  or  $V(r) = -\frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{R}{r_0}$  (par continuité)  
 $\Rightarrow V(r < R) = -\frac{\rho r^2}{4\pi \epsilon_0 R^2} + \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} - \frac{\rho}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{R}{r_0}$



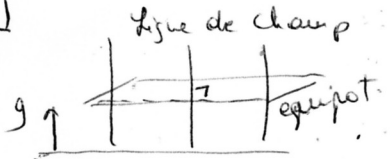
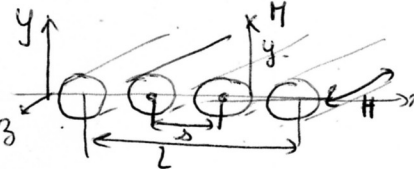
hypothèse:  $V=0$  en  $r=r_0 > R$

2) • Charge d'un fil:  $Q_l = \lambda H$

• Nombre de fils  $N \approx L/s \Rightarrow Q_{tot} = \lambda H \times L \Rightarrow \rho = \frac{Q_{tot}}{HL} = \frac{\lambda}{s}$

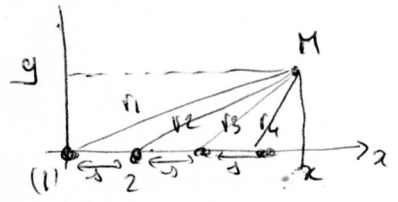
• Coeurs:  $\vec{E} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{y}{|y|} \frac{1}{|y|} = \frac{\lambda}{\epsilon_0 s} \frac{y}{|y|} \frac{1}{|y|} = \alpha \frac{\lambda}{\epsilon_0 s} \frac{y}{|y|}$  or  $\alpha = \frac{1}{s} = \frac{1}{|y|}$

$\frac{dV}{dy} = -\alpha \frac{\lambda}{\epsilon_0 s} \Rightarrow V = -\alpha \frac{\lambda}{\epsilon_0 s} y + Cte \Rightarrow V = -\frac{\lambda}{\epsilon_0 s} |y| + Cte$



3) 4) Formule A:  $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$   $r_2 = \sqrt{(x-s)^2 + y^2}$   $r_3 = \sqrt{(x-2s)^2 + y^2} \dots$

$\Rightarrow V(x,y) = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \left[ \frac{\sqrt{(x-n_1 s)^2 + y^2}}{r_0} \right]$

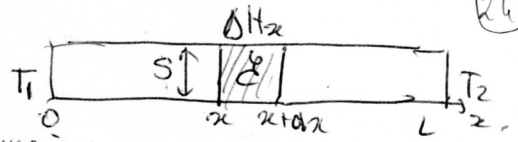


**II- Centrale (2023)**

**18- Association de fils infinis chargés (2023)**

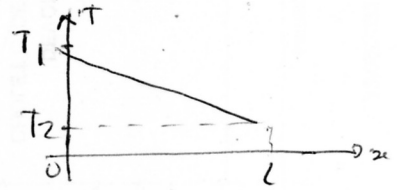
1. On considère un fil infini de rayon  $R$ , de densité linéique de charge  $\lambda$ .  
Trouver le champ et le potentiel créés par le fil en tout point de l'espace.
2. On considère maintenant un ensemble de fils infinis de rayons  $R$  espacés d'une longueur  $s$ , contenus dans le plan  $(Oxz)$ .  
À grande distance, à quoi peut-on assimiler ce dispositif?  
En déduire l'expression du champ électrique à grande distance, ainsi que le potentiel.
3. Tracer rapidement les lignes de champ et les équipotentielles d'un tel dispositif, en justifiant.
4. Trouver le potentiel  $V(x,y)$  en n'importe quel point de l'espace.

1°) cf cours:  $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Rightarrow T = ax + b$  en régime stationnaire.



2°)  $T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x$  ou haut d'un temp, très long (régime stationnaire atteint).

3°) Élément  $\delta$  entre  $x$  et  $x+dx$ :  
 { Température ini:  $T(x)$   
 { Température finale  $T_f$ .



Variation d'enthalpie:  $\Delta H_{\delta} = \delta C [T_f - T(x)]$   
 $= \mu c S \delta x [T_f - T(x)]$ .

• barreau isolé  $\Rightarrow Q_p = \Delta H = 0 \Rightarrow \mu c S \int_0^L dx [T_f - T(x)] = 0$

$\Rightarrow \int_0^L T_f dx = \int_0^L T(x) dx = \int_0^L (T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x) dx$

$\Rightarrow T_f \times L = T_1 \times L + \frac{T_2 - T_1}{2L} \times L^2 = L \times \frac{T_1 + T_2}{2} \Rightarrow T_f = \frac{T_1 + T_2}{2}$

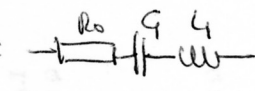
## II- Centrale (2023)

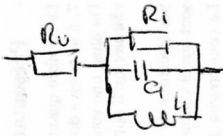
### 19- Barreau calorifugé (2023)

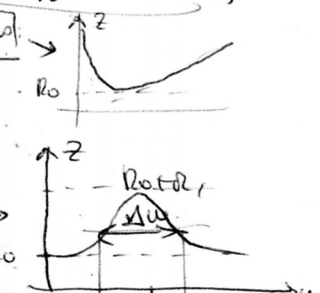
On considère un barreau calorifugé unidimensionnel de longueur  $L$ .  
 On le met en contact, à partir de  $t = 0$ , avec deux thermostats :  $T_1$  et  $T_2$ .

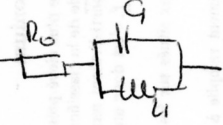
1. Retrouver l'équation de diffusion thermique.
2. Tracer la courbe de la température en fonction de  $x$ , après un certain temps.
3. Après un temps très long, on retire les thermostats et on laisse le barreau évoluer. Exprimer la température finale.

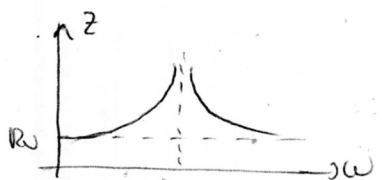
Calcul de  $Z_0 = Z(\omega \rightarrow 0)$ ;  $Z_{\infty} = \lim_{\omega \rightarrow \infty} Z$  et  $Z_m$  extremum

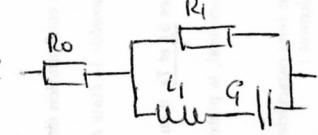
2°) Dipôle 1 :   $\Rightarrow Z_1 = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{C_1\omega} + j\omega L_1} \Rightarrow \boxed{Z_{10} \rightarrow \infty} \quad \boxed{Z_{1\infty} \rightarrow \infty} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \boxed{Z_m = R_0}$

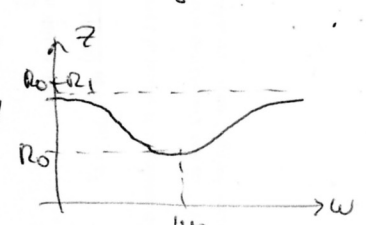
Dipôle 2 :   $Z_2 = R_0 + Z_{11} = R_0 + \frac{R_1}{1 + R_1(\frac{1}{C_1\omega} - \frac{1}{L_1\omega})j}$   
 $\downarrow$   
 Ne couvient pas.  
 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} \Rightarrow \boxed{Z_{max} = R_0 + R_1}$



Dipôle 3 :   $Z_3 = R_0 + Z_{12} = R_0 + \frac{1}{j(C_1\omega - \frac{1}{L_1\omega})}$   
 $\downarrow$   
 Ne couvient pas.  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} \Rightarrow \boxed{Z_{max} \rightarrow \infty}$



Dipôle 4 :   $Z_4 = R_0 + Z_{13} = R_0 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{L_1\omega} + \frac{1}{C_1\omega}j}$   
 $\downarrow$   
 Ne couvient pas.  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_1}} \Rightarrow \boxed{Z_m = R_0}$



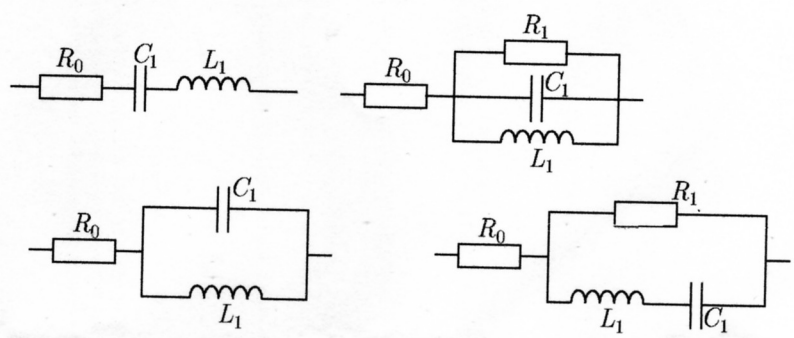
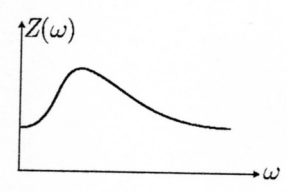
3°)  $\boxed{R_0 = Z(0)}$   $\text{et } \omega_0 \boxed{R_1 = Z(\omega_0) - Z(0)}$   $\left\{ LC = \frac{1}{\omega_0^2} \right\}$   $\left\{ Q = \frac{L_1\omega_0}{R_1} \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q} \right\}$

## II- Centrale (2023)

### 20- Modèle électrique de haut-parleur (2023)

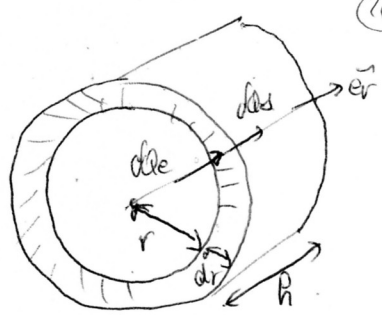
Un haut-parleur est assimilé à un dipôle passif, dont l'impédance dépend de la fréquence selon le graphe qualitatif ci-contre.

1. Proposer un protocole pour obtenir cette courbe.
2. Parmi les quatre dipôles qui suivent, lequel correspond ?
3. Déterminer alors les valeurs des résistances, des capacités et des bobines.



1)  $\vec{j}_{th} = -\lambda \text{grad } T = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r$

2)  $\frac{dU}{dt} = \frac{dQ_e}{dt} - \frac{dQ_s}{dt} + \frac{dQ_{prod}}{dt}$  avec  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_e}{dt} = \Phi_e = j_{th}(r,t) \times 2\pi r h = 2\pi h \times r \times f(r,t) \\ \frac{dQ_s}{dt} = \Phi_s = 2\pi h f(r+dr,t) = 2\pi h \left[ \frac{df}{dr} dr + f \right] \end{array} \right.$   
 $\Rightarrow \Phi_e - \Phi_s = -2\pi h \frac{d}{dr} (r j_{th}) dr$



$\frac{dU}{dt} = \mu c \delta r \frac{\partial T}{\partial t}$

$\frac{dQ_{prod}}{dt} = f \times \delta r = f \times 2\pi r dr h$

$\Rightarrow \mu c \delta r \frac{\partial T}{\partial t} = -2\pi h dr \frac{d}{dr} (r j_{th}) + 2\pi r h dr f = 0$  en régime stationnaire

$\Rightarrow \frac{d}{dr} (r j_{th}) = r f$

Dans l'uranium :  $r j_{th1} = \frac{r^2 f}{2} + Cte \Rightarrow Cte = 0 \Rightarrow \boxed{j_{th1} = \frac{r f}{2}}$

Dans l'eau :  $r j_{th2} = Cte = k \Rightarrow j_{th2} = \frac{k}{r}$

Continuité en  $r=a \Rightarrow \frac{k}{a} = \frac{a f}{2} \Rightarrow k = \frac{f a^2}{2} \Rightarrow \boxed{j_{th2} = \frac{f a^2}{2r}}$

**II- Centrale (2023)**

**21- Diffusion thermique avec source, en géométrie cylindrique (2023)**

On dispose :

- d'un cylindre (1) de rayon  $a$ , constitué d'un matériau radioactif :
  - ▶ émettant une puissance volumique  $p$ ;
  - ▶ de conductivité thermique  $\lambda_1$
- situé à l'intérieur d'un cylindre (2) de rayon  $b > a$  rempli d'eau :
  - ▶ de conductivité thermique  $\lambda_2$ ;
  - ▶ à une pression de 105 bar;
  - ▶ dont la température loin du cylindre est supposée constante égale à  $t_E = 303^\circ\text{C}$ .

On suppose un régime stationnaire (du moins pour les questions que j'ai traitées.)

1. Rappeler la loi de Fourier.

Expliquer la signification physique de chacun de ses termes et leurs dimensions.

À quelle condition peut-on supposer que le flux thermique est radial ?

Quelle est alors la forme de la loi de Fourier ?

2. On note  $\vec{j}_{th,1}$  la densité de flux thermique dans le cylindre (1) et  $\vec{j}_{th,2}$  celle dans le cylindre (2).

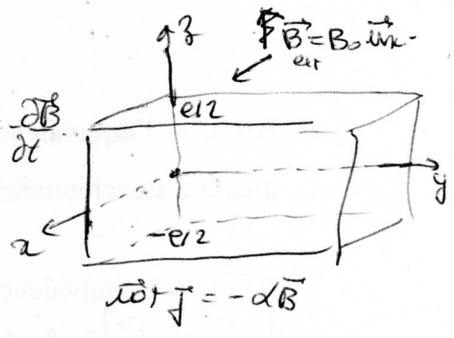
À l'aide d'un bilan énergétique appliqué à un volume bien choisi, exprimer les fonctions  $r \mapsto j_{th,1}(r)$  et  $r \mapsto j_{th,2}(r)$  en supposant le flux radial.

D'autres questions non traités.

TOP	BOURBON	MOJEL	CHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS
BOURBON	RECHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS
RECHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS
RECHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS	RECHASSIS

Exo 22 p13 (ref 1801252).

$$\begin{aligned}
 1) \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \text{rot}(\text{rot } \vec{B}) = \mu_0 \text{rot } \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{E}) \\
 &= -\Delta \vec{B} = -\mu_0 \alpha \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \text{ car } \text{div } \vec{B} = 0, \text{rot } \vec{j} = -\alpha \vec{B}, \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
 \Rightarrow \Delta \vec{B} &= \frac{1}{L^2} \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \text{ car } \boxed{L^2 = \frac{1}{\mu_0 \alpha}} \text{ et } \vec{B} = B_x \vec{u}_x \\
 &\Rightarrow \boxed{\frac{d^2 B_x}{dz^2} = \frac{1}{L^2} B_x} \Rightarrow B_x = a \cosh(z/L) + b \sinh(z/L)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 2) \left. \begin{aligned} B_x(e/2) &= a \cosh(e/2L) + b \sinh(e/2L) = B_0 \\ B_x(-e/2) &= a \cosh(e/2L) - b \sinh(e/2L) = B_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = 0 \text{ et } a = \frac{B_0}{\cosh(e/2L)} \\
 \Rightarrow B_x(z) &= B_0 \frac{\cosh(z/L)}{\cosh(e/2L)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \text{rot } \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} = \begin{pmatrix} 0/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x(z) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ +dB_x/dz \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow j_y = \frac{B_0}{\mu_0 L} \frac{\sinh(z/L)}{\cosh(e/2L)} \text{ car } \mu_0 L = \frac{1}{\alpha} \\
 a - & \\
 b - & \\
 4) \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} &= \vec{j} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ j_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -j_y B_x \end{pmatrix} = -j_y B_x \vec{u}_z \rightarrow \text{Ne permet pas la lévitation}
 \end{aligned}$$

**II- Centrale (2023)**

**22- Matériau supraconducteur (2023)**

On s'intéresse à la lévitation d'un aimant au dessus d'un supraconducteur.

On considère un supraconducteur infini selon les axes  $(Ox)$  et  $(Oy)$ , et occupant le domaine  $-\frac{e}{2} \leq z \leq \frac{e}{2}$ .

On se place en régime stationnaire.

À l'extérieur du supraconducteur se trouve un champ magnétique stationnaire :  $\vec{B} = B_0 \vec{u}_x$ .

On admet que les courants à l'intérieur du supraconducteur vérifient l'équation :

$$\text{rot } \vec{j} = -\alpha \vec{B}$$

- À l'aide des équations de Maxwell, établir une équation sur le champ  $\vec{B}$ ; on introduira une distance caractéristique  $L$ .
- Montrer que l'on a alors, à l'intérieur du supraconducteur :

$$\vec{B} = B_0 \frac{\cosh(z/L)}{\cosh(e/2L)} \vec{u}_x$$

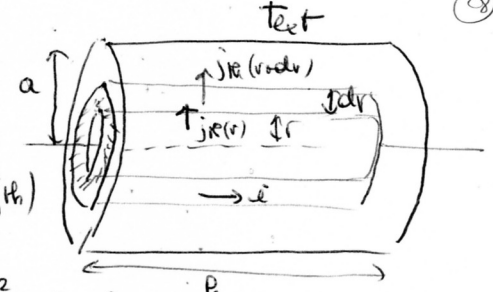
- On admet que :

$$\vec{j} = B_0 L \alpha \frac{\sinh(z/L)}{\cosh(e/2L)} \vec{u}_y$$

Questions de l'examinateur :

- Démontrer cette expression de  $\vec{j}$ .
  - Tracer  $\|\vec{j}\|$  en fonction de  $z$ , pour plusieurs valeurs de  $L$ . Commenter.
4. Ceci explique-t-il la lévitation de l'aimant ? Que pensez-vous du modèle utilisé ?

$$3^{\circ) \frac{du}{dt} = \frac{dQ_e}{dt} - \frac{dQ_p}{dt} + \frac{dQ_p}{dt} \text{ avec } \left. \begin{aligned} \Phi_e &= \frac{dQ_e}{dt} = j_{th}(r) \times 2\pi r h = 2\pi h \times j(r) \\ \Phi_s &= \int_V 2\pi h \times j(r+dr) \\ \Rightarrow \Phi_e - \Phi_s &= -2\pi h \frac{dj}{dr} dr = -2\pi h dr \frac{d(j_{th})}{dr} \end{aligned} \right\}$$



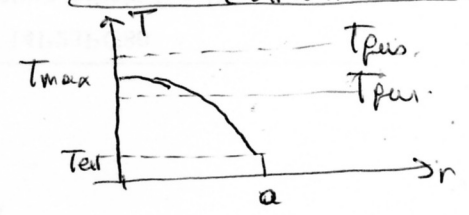
$$\frac{dQ_p}{dt} = \delta R i^2 \text{ avec } \delta R = \frac{1}{\gamma} \frac{h}{\delta S} \text{ avec } \delta S = 2\pi r dr$$

$$i = j \times \delta S \Rightarrow j = \frac{dS}{\pi a^2} I \Rightarrow \frac{dQ_p}{dt} = \frac{h}{\gamma \delta S} \times \frac{(dS)^2}{\pi^2 a^4} I^2 = \frac{h I^2}{\gamma \pi^2 a^4} \times 2\pi r dr$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \Rightarrow -2\pi h dr \frac{d(j_{th})}{dr} + \frac{h I^2}{\gamma \pi^2 a^4} \times 2\pi r dr = 0 \Rightarrow \left[ \frac{d}{dr} (r j_{th}) = \frac{I^2}{2\gamma \pi a^4} r \right]$$

$$\Rightarrow r j_{th} = \frac{I^2 r^2}{2\gamma \pi a^4} + Cte \Rightarrow j_{th} = \frac{I^2}{2\gamma \pi a^4} r = -\lambda \frac{dT}{dr} \Rightarrow \left[ T = T_{ext} + \frac{I^2}{2\gamma \pi a^4 \lambda} (a^2 - r^2) \right]$$

$$4^{\circ) \text{ Fusion si } T_{max} \geq T_{fus} \Rightarrow \left[ T_{ext} + \frac{I^2}{2\gamma \pi a^4 \lambda} \geq T_{fus} \right]$$



## II- Centrale (2023)

### 23- Principe d'un fusible (2023)

On rappelle qu'un fusible est constitué d'un fil cylindrique conducteur rectiligne d'axe (Ox), de rayon a et de grande hauteur, qui fond au delà d'une intensité critique I\_c.

On note :

1.  $\gamma = 5,9.10^7 \text{ S.m}^{-1}$  sa conductivité électrique ;
2.  $\lambda = 380 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  sa conductivité thermique ;
3.  $t_F = 1085^\circ\text{C}$  sa température de fusion.

supposées indépendantes de la température.

On se place en régime stationnaire et on admettra que le courant électrique d'intensité I circule de façon uniforme sur toute la section du fil.

1. Justifier qualitativement ce comportement.
2. Expliquer pourquoi on peut supposer que la répartition de température est de la forme :  $T(M) = T(r)$ , où  $r = HM$  est la distance à l'axe.  
En déduire que le vecteur densité de flux thermique  $\vec{j}_{th}$  est radial avec une composante ne dépendant que de r.
3. Par un bilan énergétique bien choisi, déterminer  $j_{th}(r)$  puis  $T(r)$ , à une constante additive près, en fonction de I,  $\gamma$ ,  $\lambda$  et r.
4. Donner  $T(r)$  en admettant que le fil est en contact parfait avec l'extérieur, de température constante  $T_{ext}$ .
5. Quel rayon  $a = a_1$  doit-on donner au fil pour qu'il fonde pour  $I = I_M$  donné? Commenter.