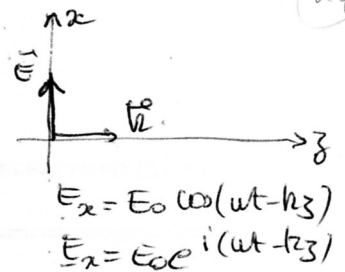


1°) cf cours:  $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow \omega = kc$



2°)  $\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}$   $\Rightarrow$   $P_{\text{rayonnée}} = \iint_{\Sigma} \vec{\Pi} \cdot d\vec{s}$

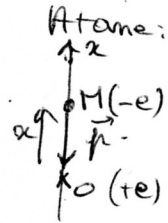
$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow -i k \wedge \vec{E} = -i \omega \vec{B} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{\omega} k \wedge \vec{E}$

$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \left[ \frac{1}{\omega} k \wedge \vec{E} \right] = \frac{1}{\mu_0 \omega} [k \wedge E^2 - \vec{E} \times (k \cdot \vec{E})] \Rightarrow \vec{\Pi} = \frac{k}{\mu_0 \omega} E_0^2 \cos^2(\omega t - k z)$

$\Rightarrow \langle \Pi \rangle = \frac{k}{\mu_0 \omega} \times \frac{E_0^2}{2} \Rightarrow \langle I_0 = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \rangle$

3°)  $\vec{F}_{\text{rayon}} = -kx \vec{e}_x$  au  $\omega_0 = \frac{k}{m} \Rightarrow \vec{F}_{\text{rayon}} / \text{electron} = -m \omega_0^2 kx \vec{e}_x$

$m \ddot{x} = -m \omega_0^2 x + (-e)E \Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e E_0}{m} \cos(\omega t - k z)$   
 $\Rightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{e E_0}{m} e^{i(\omega t - k z)}$   
 $\Rightarrow \ddot{x} x (-\omega^2 + \omega_0^2) = -\frac{e E_0}{m} e^{i(\omega t - k z)}$   
 $\Rightarrow x = \frac{-e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t - k z)$



$\vec{F} = -e \cos \omega t \vec{u}_x = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \vec{u}_x \Rightarrow$

$\Rightarrow$  puissance rayonnée:  $\left\{ \begin{array}{l} P_{\text{ray}} = \frac{\mu_0 q^2 \omega^4}{12\pi c} = \frac{\mu_0 q^4}{12\pi c} \times \frac{E_0^2}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ I = \frac{P}{2\mu_0 c} \end{array} \right.$

$\Rightarrow \sigma_T = \frac{P_{\text{rayon}}}{I} = \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi c} \frac{\mu_0^2 e^4}{6\pi m^2} \times \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2}$

## II- Centrale (2024)

### 24- Diffusion d'une onde électromagnétique par un atome H (Kasperski, 2024)

On a une onde plane progressive se propageant dans le vide, dont le champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_z$$

- Démontrer l'équation de propagation de d'Alembert et en déduire la relation de dispersion.
- Donner la définition et le sens physique du vecteur de Poynting. Le calculer et en déduire l'intensité  $I_0$  du champ électromagnétique, qui correspond à la moyenne temporelle du vecteur de Poynting.
- On considère un atome d'hydrogène, dont le noyau est fixe en  $O$ . L'électron est représenté par un point matériel de masse  $m$  et de charge  $q = -e$ . Il est lié à l'atome selon un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$ . L'onde électromagnétique précédente arrive sur l'électron. Donner  $\sigma_T$ , qui correspond au rapport entre la puissance rayonnée par l'électron et  $I_0$ .
- Il y avait une dernière question avec un graphique.

Donnée : puissance rayonnée par un dipôle oscillant :

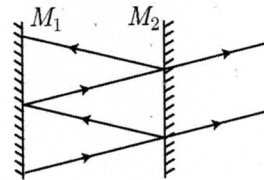
$$P = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

### 25- Modes d'une cavité laser (Le Fèvre, 2024)

Un énoncé de 4 ou 5 lignes présentait l'effet laser.

On considère une cavité formée de deux miroirs plans distants de  $d$  :

- ( $M_1$ ) est caractérisé par :
  - ▶ un coefficient de réflexion  $r_1 = r_1 e^{-j\pi}$
  - ▶ un coefficient de transmission  $t_1$
- ( $M_2$ ) est caractérisé par :
  - ▶ un coefficient de réflexion  $r_2 = r_2 e^{-j\pi}$
  - ▶ un coefficient de transmission  $t_2$



depuis l'intérieur de la cavité.

L'onde résultante dans la cavité est interprétée comme une succession d'ondes réfléchies successives issues d'une onde incidente donnée, que l'on a représentées, par souci de clarté, faiblement inclinées par rapport à l'axe.

On suppose d'abord que la cavité est vide.

1. Expliquer cette description.
2. Trouver les modes propres dans le cas où  $r_1 = r_2$ , c'est-à-dire les fréquences correspondant à des interférences constructives des ondes successives.

La cavité contient maintenant un milieu d'indice  $n(\omega)$  à la pulsation  $\omega$ , éventuellement complexe.

On posera :

$$n(\omega) = n'(\omega) - jn''(\omega)$$

On suppose que  $r_1 = 1$  et  $r_2 = \sqrt{R_2}$  est proche de 1.

On supposera, pour simplifier, que  $n'$  et  $n''$  sont indépendants de  $\omega$ .

3. On éclaire la cavité de l'extérieur de ( $M_1$ ) par une onde d'intensité  $I_0$ .

Donner la fonction  $\sigma = \frac{1}{\lambda} \mapsto I(\sigma)$  de l'intensité transmise à la sortie de ( $M_2$ ) et la caractériser.

4. À quelle condition sur  $n''$  la cavité laser peut produire un rayonnement sans onde incidente ( $I_0 = 0$ ) ?

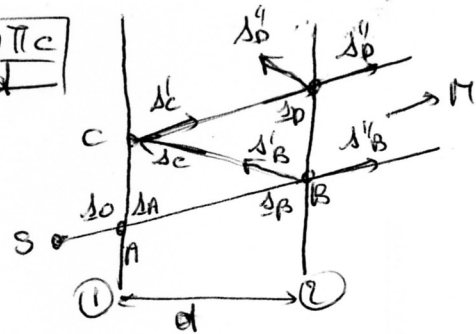
5. Voyez-vous une analogie ?

2°) Interférences constructives si  $k_n \times 2d = 2n\pi \Rightarrow \boxed{\omega_n = k_n c = \frac{n\pi c}{d}}$

3°)  $\Delta_A = t_1 \Delta_0$      $\Delta_B = \Delta_A e^{jk_1 d}$      $\Delta_B'' = t_2 \Delta_B$

$\Delta_B' = r_2 \Delta_B$      $\Delta_C = e^{jk_2 d} \Delta_B' = r_2 e^{jk_2 d} \Delta_B$

$\Delta_C' = r_1 r_2 e^{jk_1 d} \Delta_B \Rightarrow \Delta_D = r_1 r_2 e^{2jk_1 d} \Delta_B$   
 $\Rightarrow \Delta_D'' = t_2 r_1 r_2 e^{2jk_1 d} \Delta_B$



$\frac{\Delta_D''}{\Delta_B} = \boxed{r_1 r_2 e^{2jk_1 d} = \rho} \Rightarrow \Delta(\omega) = \Delta_B'' + \rho \Delta_B'' + \rho^2 \Delta_B'' + \dots = \frac{t_2 \Delta_A e^{jk_1 d}}{t_1 \Delta_0} (1 + \rho + \rho^2 + \dots)$

$S = \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m = \frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{2jk_1 d}}$  où  $k = \frac{\omega}{c} n = k_0 (n' - jn'')$  et  $k_0 = 2\pi\sigma = 2\pi\sigma (n' - jn'')$

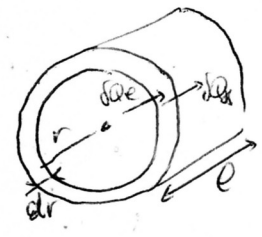
$I_0 = \frac{|\Delta_0|^2}{2}$  et  $I = |\Delta(\omega)|^2 = \frac{t_1^2 t_2^2 I_0}{|1 - r_1 r_2 e^{2jk_1 d}|^2} = \frac{t_1^2 t_2^2 I_0}{(1 - \sqrt{R_2})^2 e^{4j\pi\sigma n'' d} e^{4j\pi\sigma n' d} / (1 - \sqrt{R_2})^2 e^{-4j\pi\sigma n'' d} e^{4j\pi\sigma n' d}}$

$\Rightarrow I(\sigma) = \frac{t_1^2 t_2^2 I_0}{1 + R_2 e^{8\pi\sigma n'' d} - 2\sqrt{R_2} e^{4\pi\sigma n'' d} \cos(4\pi\sigma n' d)}$

On pose  $X = e^{4\pi\sigma n'' d}$

4°)

1°)  $dU = \frac{\delta Q_e}{dt} - \frac{\delta Q_s}{dt} + \frac{dW_J}{dt} \quad \left| \begin{aligned} \frac{\delta Q_e}{dt} &= \phi_e = j(r,t) 2\pi r l = 2\pi l \times j(r,t) \\ \frac{\delta Q_s}{dt} &= \phi_s = 2\pi r \times j(r+dr,t) \end{aligned} \right.$



•  $\frac{dU}{dt} = 0$  en régime stationnaire

•  $\phi_e - \phi_s = 2\pi l [j(r,t) - j(r+dr,t)] = 2\pi l \frac{dj}{dr} dr = -2\pi l dr \frac{\partial}{\partial r} [r j(r,t)]$

Faivre  $\Rightarrow j(r,t) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Rightarrow \phi_e - \phi_s = 2\pi l dr \lambda \frac{d}{dr} (r \frac{dT}{dr})$

•  $\frac{dW_J}{dt} = P_J = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau = \vec{j} \cdot \left(\frac{\vec{j}}{\sigma}\right) dz = \frac{j^2}{\sigma} \times 2\pi r dr l$

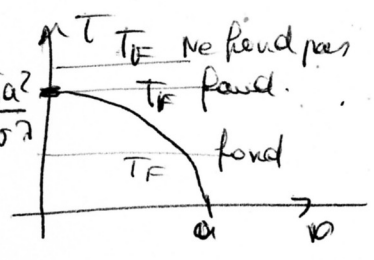
2°)  $\Rightarrow 2\pi l dr \lambda \frac{d}{dr} (r \frac{dT}{dr}) + \frac{j^2}{\sigma} 2\pi r dr l = 0 \Rightarrow \left[ \frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dT}{dr}) + \frac{j^2}{\sigma} = 0 \right]$

$\frac{d}{dr} (r \frac{dT}{dr}) = -\frac{j^2}{2\sigma} r \Rightarrow r \frac{dT}{dr} = -\frac{j^2}{22\sigma} r^2 + C \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 = 0 + C$

$\Rightarrow \frac{dT}{dr} = -\frac{j^2 r}{22\sigma} \Rightarrow T(r) = A - \frac{j^2 r^2}{42\sigma}$  où  $A = \frac{C_0}{T_0} + \frac{j^2 a^2}{4\sigma}$

3°)  $T(r=a) = T_0 \Rightarrow T_0 = A - \frac{j^2 a^2}{4\sigma} \Rightarrow T(r) = T_0 + \frac{j^2}{4\sigma} (a^2 - r^2)$

4°) Faut de fusible si  $T_0 + \frac{j^2 a^2}{4\sigma} \geq T_F \Rightarrow a \geq \sqrt{\frac{4\sigma a^2}{j^2} (T_F - T_0)}$



II- Centrale (2024)

26- Bilan thermique dans un fusible (Levy, 2024)

On considère un fusible cylindrique de longueur  $L$  et de rayon  $a$ , de conductivité électrique  $\sigma$  et de conductivité thermique  $\lambda$ . On suppose qu'il est parcouru par une densité de courant uniforme  $\vec{j} = j \vec{u}_z$ . On se place en régime stationnaire et on suppose que  $T = T(r)$ .

1. En faisant un bilan énergétique entre deux portions de rayons  $r$  et  $r+dr$ , montrer que  $\frac{\lambda}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{dT}{dr}) + \frac{j^2}{\sigma} = 0$ .
2. En déduire  $T(r)$ .
3. On suppose que la température atmosphérique extérieure impose  $T(r=a) = T_0$ . Déterminer complètement  $T(r)$ .
4. On suppose que la température de fusion du matériau est  $T_F = 660^\circ\text{C}$  et que l'intensité  $I$  vérifie  $I > I_0 = 10 \text{ A}$ . Déterminer la valeur minimale de  $a$  pour laquelle le fusible fond.

100	100	100	100
200	200	200	200
300	300	300	300
400	400	400	400
500	500	500	500

2)  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$  (indépendant de  $m$ )

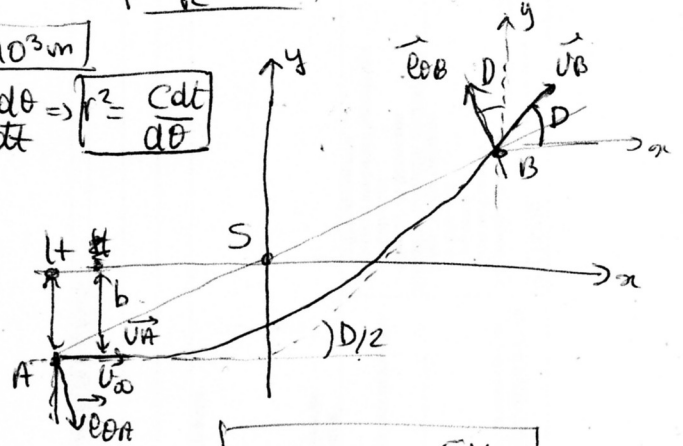
• Libération si  $E_m \geq 0$ , car  $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{R} \geq 0 \Rightarrow v \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}} = v_e$  vitesse de libération

• Trou noir si  $v_e = c \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} = 1,48 \cdot 10^3 m$

3)  $\vec{C} = \vec{OM} \wedge \vec{\omega} = (r\vec{e}_r) \wedge (r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\omega\vec{e}_\theta) \Rightarrow r^2\omega = r^2\dot{\theta} \Rightarrow r^2 = \frac{Cdt}{d\theta}$

• (d)  $\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GM}{C} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_r$ , avec  $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$

$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{GM}{C} \vec{e}_\theta \right) \Rightarrow \vec{k} = \vec{v} - \frac{GM}{C} \vec{e}_\theta = \vec{C} \vec{e}_\theta$



On pose  $v_0 = \frac{GM}{C}$

6) Dans  $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y\}$ :

• En A:  $\vec{v}_A = \begin{pmatrix} v_\infty \\ 0 \end{pmatrix}$   $\vec{e}_{\theta A} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

• En B:  $\vec{v}_B = \begin{pmatrix} v_\infty \cos D \\ v_\infty \sin D \end{pmatrix}$   $\vec{e}_{\theta B} = \begin{pmatrix} -\sin D \\ \cos D \end{pmatrix}$

•  $\vec{k} = \vec{C} \vec{e}_\theta \Rightarrow \begin{pmatrix} v_\infty \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{GM}{C} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_\infty \cos D \\ v_\infty \sin D \end{pmatrix} - \frac{GM}{C} \begin{pmatrix} -\sin D \\ \cos D \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_\infty = v_\infty \cos D + v_0 \sin D \\ 0 = -v_0 \cos D + v_\infty \sin D \end{cases}$

$\Rightarrow v_0 v_\infty = v_0 v_\infty \cos D + v_0^2 \sin D$   
 $v_0 v_\infty = -v_0 v_\infty \cos D + v_\infty^2 \sin D$

$\Rightarrow 2v_0 v_\infty = (v_0^2 + v_\infty^2) \sin D$

$\Rightarrow \sin D = \frac{2v_0 v_\infty}{v_0^2 + v_\infty^2}$  car  $\begin{cases} v_0 = \frac{GM}{C} \\ v_0 = \frac{GM}{b v_\infty} \end{cases}$

car  $\vec{C} = d\vec{e} = \vec{SA} \wedge \vec{v}_A = (\vec{SH} + \vec{HA}) \wedge \vec{v}_A = \vec{HA} \wedge \vec{v}_A \Rightarrow C = b v_\infty$

II- Centrale (2024)

27- Astres et lumière (Sarfati, 2024)

On considère une planète en mouvement autour du Soleil.

1. Étudier le mouvement (planéité, constantes du mouvement...)

Donner une condition pour que la planète échappe à l'attraction gravitationnelle du Soleil.

2. On considère un point dans un champ de gravitation.

Montrer que la trajectoire ne dépend pas de la masse du point ; uniquement des conditions initiales.

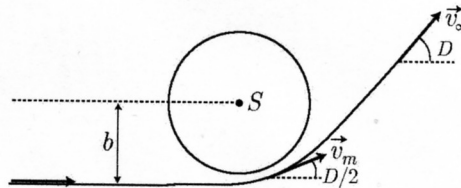
On considère une étoile qui émet des photons et on applique de modèle aux photons. Si les photons ne peuvent pas échapper à l'attraction, l'étoile est un trou noir.

Déterminer un rayon limite pour que le Soleil ne soit pas un trou noir.

Application numérique. L'examineur m'a donné  $10^{30} kg$  comme ordre de grandeur de la masse du Soleil.

3. Un photon effectue une trajectoire rasante près du Soleil et est dévié d'un angle  $D$  (voir schéma).

On reprend le modèle précédent. On introduit  $C$  la constante des aires.



a- Montrer que :  $\vec{k} = \vec{v} - \frac{GM_S}{C} \vec{u}_\theta$  est un vecteur constant.

b- Déterminer  $D$  en fonction de la masse  $M_S$  du Soleil,  $b$ ,  $v_\infty$  (et peut-être d'autres paramètres que j'ai oubliés).

20) Formule de Fresnel:  $I(\Delta) = 2I_0 [1 + \cos(k_0 \Delta)]$  où  $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ .

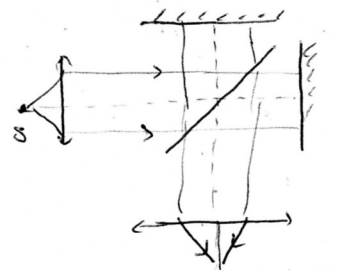
$$\Rightarrow F(\omega) = \int_0^{\Delta_{\max}} 2I_0 [1 + \cos(k_0 \Delta)] \times \cos(k\Delta) d\Delta$$

$$= 2I_0 \int_0^{\Delta_{\max}} (\cos k\Delta + \frac{1}{2} [\cos(k+k_0)\Delta + \cos(k-k_0)\Delta]) d\Delta$$

$$= 2I_0 \left\{ \frac{1}{k} [\sin k\Delta]_0^{\Delta_{\max}} + \frac{1}{2(k+k_0)} [\sin(k+k_0)\Delta]_0^{\Delta_{\max}} + \frac{1}{2(k-k_0)} [\sin(k-k_0)\Delta]_0^{\Delta_{\max}} \right\}$$

$$= 2I_0 \Delta_m \left\{ \frac{\sin k \Delta_{\max}}{k \Delta_{\max}} + \frac{1}{2(k+k_0) \Delta_{\max}} \sin(k+k_0) \Delta_{\max} + \frac{\sin(k-k_0) \Delta_{\max}}{2(k-k_0) \Delta_{\max}} \right\}$$

$$\Rightarrow F(\omega) = 2I_0 \Delta_m \left\{ \text{sinc}(k \Delta_m) + \frac{\text{sinc}(k+k_0) \Delta_{\max}}{2} + \frac{1}{2} \text{sinc}(k-k_0) \Delta_{\max} \right\} \text{ où } k = \frac{\omega}{c}$$

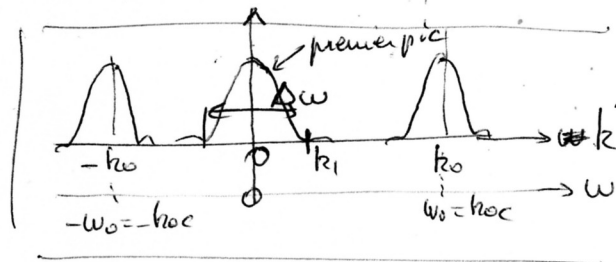


• largeur du 1<sup>er</sup> pic :

$$\sin(k+k_0) \Delta_{\max} = 0 \Rightarrow k+k_0$$

$$\text{sinc}(k_1 \Delta_m) = 0 \Rightarrow k_1 \Delta_m = \pi \Rightarrow \frac{\omega_1}{c} \Delta_{\max} = \pi$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{\pi c}{\Delta_{\max}} \Rightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi c}{\Delta_{\max}}$$



## II- Centrale (2024)

### 29- Interférogramme donné par un interféromètre de Michelson (Yang, 2024)

1. On étudie le dispositif de l'interféromètre de Michelson en lame d'air, éclairé par un faisceau de lumière parallèle, équipé d'un détecteur de lumière et d'une lentille convergente.

Faire un schéma du dispositif.

Pourquoi éclaire-t-on en lumière parallèle ? Où est placé le détecteur et pourquoi ?

2. On donne la fonction  $F$  définie par :

$$F(\omega) = \int_0^{\Delta_{\max}} I(\Delta) \cos\left(\frac{\omega \Delta}{c}\right) d\Delta$$

où  $\Delta$  est la différence de marche, qui varie de 0 à une valeur maximale  $\Delta_{\max}$ .

On éclaire le Michelson par une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ .

Donner l'expression de  $F(\omega)$  puis tracer la courbe correspondante.

Donner la largeur du premier pic observé.

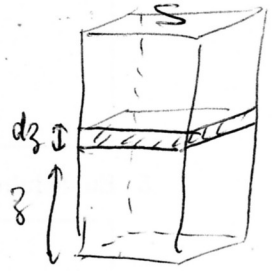
•  $\frac{dp}{dz} = -\rho g$  avec  $pV = nRT = \frac{mRT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT} \Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{pM}{RT}g \Rightarrow \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^z \frac{Mg}{RT} dz$   
 $\Rightarrow p(z) = p_0 e^{-Mgz/RT}$

• Nombre de molécules dans une tranche d'atmosphère d'épaisseur dz:

$pV = nRT \Rightarrow \delta n(z, dz) = \frac{p}{RT} \delta V = \frac{p_0}{RT} e^{-Mgz/RT} \times S dz$

$\Rightarrow$  nbre totale de molécules dans l'atmosphère de hauteur  $H = \infty$ :

$$N_{tot} = \int_0^{\infty} \delta n(z, dz) = \frac{p_0 S}{RT} \times \frac{RT}{Mg} \left[ -e^{-Mgz/RT} \right]_0^{\infty} \quad (eq 1)$$
  
 $= \frac{p_0 S}{Mg}$



• probabilité qu'une particule se trouve dans cette tranche, étant soumise à leur poids et à l'agitation thermique:

$$\frac{\delta p(z, dz)}{N_{tot}} = \frac{\delta n(z, dz)}{N_{tot}} = \frac{Mg}{RT} e^{-Mgz/RT}$$

• particule sous l'agitation thermique disparaît à  $T = 0$ :

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left[ \frac{Mg}{RT} e^{-Mgz/RT} \right] = \delta(z) \text{ car } \begin{cases} \delta(z) = \infty \text{ en } z = 0 \\ \delta(z) = 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

• Le poids disparaît pour  $g \rightarrow 0$ :

$$\delta p(z, dz) \frac{dh}{dz} = 0 \Rightarrow p = cte = p_0 \text{ et } \delta n(z, dz) = \frac{p_0 S dz}{RT} \Rightarrow N_{tot} = \frac{p_0 S}{RT} \int_0^H dz = \frac{p_0 S H}{RT}$$
  
 $\Rightarrow \delta p(z, dz) = \frac{p_0 S dz}{RT} \times \frac{RT}{p_0 S H} = \frac{dz}{H}$

2° Hypothèse:  $H \approx 100 \text{ km}$ .

• (eq 1)  $\Rightarrow N_{tot} = \frac{p_0 S}{Mg} \left[ -e^{-Mgz/RT} \right]_0^H = \frac{p_0 S}{Mg} (1 - e^{-\alpha H})$  où  $\alpha = \frac{Mg}{RT} = \frac{29 \cdot 10^{-3} \times 9,8}{8,31 \times 298} = 1,19 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$

$$M_{tot} = M \times N_{tot} = \frac{p_0 S}{g} (1 - e^{-\alpha H}) = \frac{p_0 \times (4\pi R_T^2)}{g} (1 - e^{-\alpha H})$$
  
 $= \frac{10^5 \times 4\pi (6400 \cdot 10^3)^2}{9,8} (1 - e^{-1,19 \cdot 10^{-4} \times 100 \cdot 10^3}) \Rightarrow M_{tot} \approx 5,24 \cdot 10^{18} \text{ kg}$

II- Centrale (2024)

28- Atmosphère de la Terre (Toquet, 2024)

On s'intéresse à l'atmosphère de la Terre.

1. Donner la répartition des particules de l'atmosphère dans les trois cas suivants :
  - les particules sont uniquement soumises à leur poids ;
  - les particules sont soumises à l'agitation thermique ;
  - les particules sont soumises à leur poids et à l'agitation thermique.
2. Donner la valeur de la masse de l'atmosphère.
3. Deux autres questions que je n'ai pas pu traiter.