

- 2°) • Pression sur  $d\sigma$ :  $\delta \vec{F}_p = -\text{grad } P \delta \sigma$   
 • Lorentz:  $\delta \vec{F}_e = \delta q \vec{E}$  et  $\vec{E} = E \vec{e}_z$   
 •  $\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$

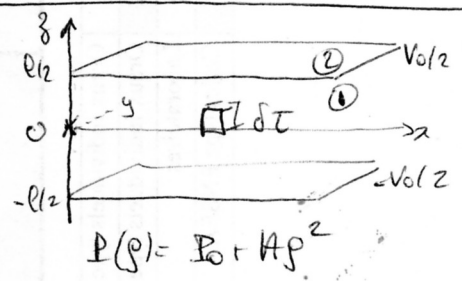
• Equilibre  $\Rightarrow \frac{\delta q}{\delta \sigma} \vec{E} = -\text{grad } P \Rightarrow \rho E = -\frac{\partial P}{\partial z} = -2A\rho \frac{dz}{dz}$   
 $\Rightarrow E = -2A \frac{dz}{dz}$

$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \frac{dE}{dz} = -2A\epsilon_0 \Rightarrow E = -2A\epsilon_0 \frac{dz}{dz} \Rightarrow \left[ \frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 E = 0 \right]$  avec  $\left[ k = \frac{1}{\sqrt{2A\epsilon_0}} \right]$   
 $\Rightarrow E = a \cos(kz) + b \sin(kz)$  car  $E$  symétrique par rapport à  $(Oxy)$

• Relation de passage en  $z = l/2$ :  $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} \Rightarrow b \sin\left(\frac{kl}{2}\right) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow b = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \sin(kl/2)}$

•  $\vec{E} = -\text{grad } V \Rightarrow -\frac{dV}{dz} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \sin(kl/2)} \sin kz \Rightarrow dV$

- 2°) • Pression sur  $d\sigma$ :  $\delta \vec{F}_p = -\text{grad } P \delta \sigma$   
 • Lorentz:  $\delta \vec{F}_e = \delta q \vec{E}$  et  $\vec{E} = E \vec{e}_z$   
 •  $\text{div } \vec{E} = \rho / \epsilon_0$



• Equilibre  $\Rightarrow \frac{\delta q}{\delta \sigma} \vec{E} = -\text{grad } P \Rightarrow \rho E = -\frac{\partial P}{\partial z} = -2A\rho \frac{dz}{dz}$   
 $\Rightarrow \rho E = -2A \frac{dz}{dz}$

•  $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \rho = \epsilon_0 \frac{dE}{dz} \Rightarrow E = -2A\epsilon_0 \frac{dz}{dz} \Rightarrow \left[ \frac{d^2 E}{dz^2} + k^2 E = 0 \right]$  avec  $\left[ k = \frac{1}{\sqrt{2A\epsilon_0}} \right]$

•  $Q_{\text{tot}} = 0 \Rightarrow \rho(z)$  impaire  $\Rightarrow E$  paire  
 $\Rightarrow E = a \cos(kz)$

• Relation de passage en  $\frac{l}{2}$ :  $\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} = E_1 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow a \cos\left(\frac{kl}{2}\right) = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$

•  $\vec{E} = -\text{grad } V \Rightarrow \frac{\sigma \cos(kz)}{\epsilon_0 \cos(kl/2)} = \frac{dV}{dz} \Rightarrow \int_{-V_0=V_1}^{V_0=V_2} dV = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cos(kl/2)} \int_{-l/2}^{l/2} \cos(kz) dz$   
 $\Rightarrow V_2 - V_1 = \frac{2\sigma \tan(kl/2)}{\epsilon_0 k} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \left[ C = \frac{S k \epsilon_0 \tan(kl/2)}{2} \right]$

1109261

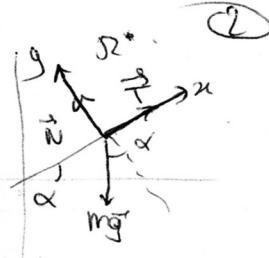
I- Mines-Ponts (2021)

1- Condensateur plan (2021)

On considère un condensateur plan dont les armatures sont portées aux potentiels  $\frac{V_0}{2}$  et  $-\frac{V_0}{2}$ . Elles sont de surface  $S$  et sont distantes de  $l$ , avec  $l \ll S$ .

1. Calculer la capacité  $C_0$  du condensateur quand l'espace inter-armatures est vide.
2. On remplit maintenant l'espace inter-armatures d'un gaz globalement neutre dont la pression  $P$  dépend de la charge volumique  $\rho$ , selon la loi :  $P(\rho) = P_0 + A\rho^2$ , où  $A$  est une constante positive. Calculer la capacité du condensateur.

Exercice 2 pt Dans  $\mathcal{R}^*$  : Force d'inertie :  $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = m\omega^2 z^2 \vec{e}_z$   
 et 10/11/2017  
 • Coriolis :  $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}^*} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$



• PFD dans  $\mathcal{R}'$  :  $m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2 z^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2m\omega \dot{y} \\ 2m\omega \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}$

1) Pour  $t \in [0, t_1]$ ,  $\dot{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} T = mg \sin(\omega t) - m\omega^2 z^2 \\ N = mg \cos(\omega t) \end{cases}$

2) À  $t = t_1$  : glissement  $\Rightarrow T = RN$

3)  $\begin{cases} m\ddot{x} = -mg \sin \alpha + m\omega^2 z^2 + 2m\omega \dot{y} + T \\ 0 = N - mg \cos(\omega t) - 2m\omega \dot{x} \\ T = kN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} + 2k\omega \dot{x} - \omega^2 z = k g \cos(\omega t) - g \sin(\omega t) \end{cases}$

4)  $k g \cos(\omega t) - g \sin(\omega t) = g \sqrt{1+k^2} \left[ \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \cos(\omega t) - \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \sin(\omega t) \right] = g \sqrt{1+k^2} \cos(\omega t + \theta)$   
 où  $\tan \theta = 1/k$

• Solution homogène :  $\ddot{x} + 2k\omega \dot{x} - \omega^2 z = 0 \Rightarrow \Delta' = k^2 \omega^2 + \omega^2 = \omega^2(1+k^2)$

$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = -k + \omega \sqrt{1+k^2} \\ X_2 = -k - \omega \sqrt{1+k^2} \end{cases}$

• Solution particulière :  $\ddot{x} + 2k\omega \dot{x} - \omega^2 z = g \sqrt{1+k^2} \cos(\omega t + \theta)$

$\rightarrow$  notations complexes  $x(-\omega^2 + 2k\omega i - \omega^2) = g \sqrt{1+k^2} e^{i(\omega t + \theta)}$

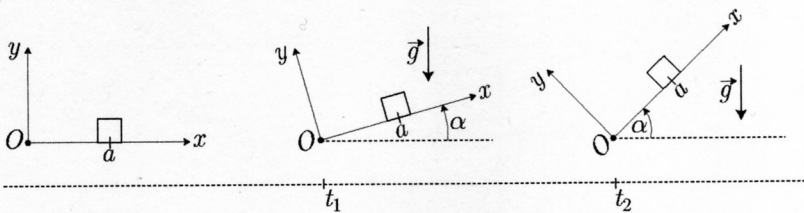
$\Rightarrow x_p = \frac{g \sqrt{1+k^2}}{2\omega^2(ki - i)} e^{i(\omega t + \theta)} = \frac{g \sqrt{1+k^2}}{2\omega^2 \sqrt{1+k^2}} e^{i(\omega t + \theta)} \text{ où } \tan \phi = -k$

$\Rightarrow x_p = \frac{g}{2\omega^2} \cos(\omega t + \theta - \phi) \Rightarrow x = \frac{g}{2\omega^2} \cos(\omega t + \theta - \phi) + [ \alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} ]$

10/11/2017

**I- Mines-Ponts (2021)**

**2- Référentiel non galiléen - Frottements solides (2021)**



Soit le repère non galiléen  $(Oxyz)$ , qui fait un angle  $\alpha$  avec le référentiel terrestre du laboratoire. On suppose que celui-ci tourne à la vitesse angulaire  $\dot{\alpha} = \Omega$  autour de l'axe  $Oz$ . On considère un solide  $S$  dans ce référentiel initialement posé en  $A(a, 0, 0)$ . On considère ensuite deux instants distincts  $t_1$  et  $t_2$  tels que :

- jusqu'à  $t_1$ , le solide  $S$  ne glisse pas ;
- à  $t = t_1$ , le solide commence à glisser jusqu'à  $t = t_2$ , où le solide s'arrête finalement en  $O$ .

On suppose que cela arrive pour un angle  $\alpha < \frac{\pi}{2}$ .

1. Pour  $t \in [0, t_1]$ , déterminer l'expression des composantes  $T$  et  $N$  de la réaction du support.
2. En déduire une équation vérifiée par  $t_1$  (on ne demande pas de la résoudre).
3. Montrer que, pour  $t \in [0, t_2]$ ,  $x$  vérifie l'équation :

$\ddot{x} + 2Q\Omega \dot{x} - \Omega^2 x = A \cos(\Omega t) - B \sin(\Omega t)$

On donnera l'expression de  $Q$ ,  $A$  et  $B$ .

4. On pose  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$  et on pose également :

$\cos \theta = \frac{A}{C} \quad \sin \theta = \frac{B}{C}$

Remplacer dans l'équation précédente et la résoudre.

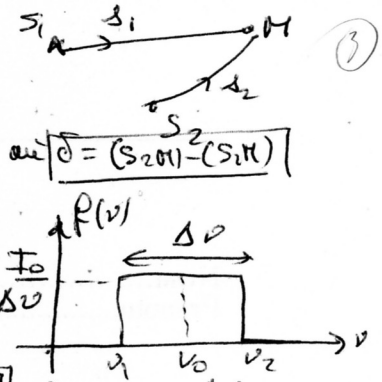
10) 
$$\vec{d}_1 = a_1 e^{i(\omega t - k_0(z_1 \pi))}$$

$$\vec{d}_2 = a_2 e^{i(\omega t - k_0(z_2 \pi))} \Rightarrow \vec{d} = e^{i(\omega t - k_0(z_1 \pi))} [a_1 + a_2 e^{-i k_0 \delta}]$$

$$I = |\vec{d}|^2 = (a_1 + a_2 e^{-i k_0 \delta})(a_1 + a_2 e^{i k_0 \delta}) \Rightarrow \boxed{I = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(k_0 \delta)}$$

$$I_{\max} = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \Rightarrow \mathcal{C} = \frac{4a_1 a_2}{2(a_1^2 + a_2^2)} \Rightarrow \boxed{\mathcal{C} = \frac{2a_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}}$$

$$I_{\min} = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2$$



20) Intégrante de la cohérence:  $I_0 = \int_0^\infty f(v) dv = \int_{\nu_1}^{\nu_2} I_0 \mu(v) dv = I_0 \Delta \nu$

$$\delta I = f(v) dv [1 + \cos(k\delta)]$$
 avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{c} \nu$   

$$\Rightarrow I = \frac{I_0}{\Delta \nu} \int_{\nu_1}^{\nu_2} [1 + \cos(\frac{2\pi \delta}{c} \nu)] d\nu = \frac{I_0}{\Delta \nu} \left[ \Delta \nu + \frac{c}{2\pi \delta} \left( \sin \frac{2\pi \nu_2 \delta}{c} - \sin \frac{2\pi \nu_1 \delta}{c} \right) \right]$$

$$\cdot \frac{p \cdot q}{2} = \frac{2\pi \delta}{2c} (\nu_2 - \nu_1) = \frac{\pi \delta}{c} \Delta \nu$$
  

$$\cdot \frac{p+q}{2} = \frac{2\pi \delta}{2c} (\nu_2 + \nu_1) = \frac{2\pi \delta}{c} \nu_0$$
  

$$\Rightarrow I = I_0 \left[ 1 + \frac{2c}{2\pi \delta \Delta \nu} \times \sin \left( \frac{\pi \delta \Delta \nu}{c} \right) \cos \left( \frac{2\pi \delta \nu_0}{c} \right) \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{I = I_0 \left[ 1 + \text{sinc} \left( \frac{\pi \delta \Delta \nu}{c} \right) \cos \left( \frac{2\pi \delta \nu_0}{c} \right) \right]}$$
  

$$\left. \begin{aligned} I_{\max} &= I_0 \left[ 1 + \text{sinc} \left( \frac{\pi \delta \Delta \nu}{c} \right) \right] \\ I_{\min} &= I_0 \left[ 1 - \text{sinc} \left( \frac{\pi \delta \Delta \nu}{c} \right) \right] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\mathcal{C} = \text{sinc} \left( \frac{\pi \delta \Delta \nu}{c} \right)}$$

30) Laser:  $\Delta \nu = 0 \Rightarrow \mathcal{C} = 1!$

1011242

I- Mines-Ponts (2021)

3- Interférences à 2 ondes (2021)

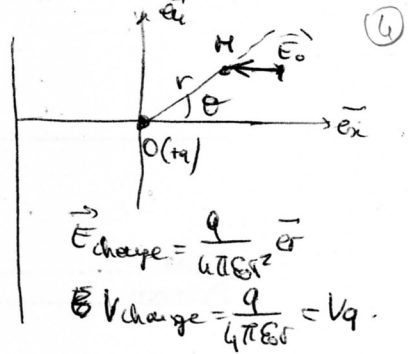
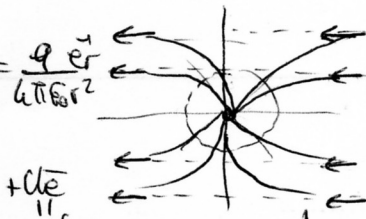
On considère un Michelson réglé en lame d'air.

1. On considère deux ondes cohérentes d'amplitudes  $a_1$  et  $a_2$  légèrement différentes. Calculer  $I(\delta)$  et déterminer l'expression du contraste.
2. On éclaire avec une source polychromatique continue, de bande passante  $\Delta \nu = 109$  Hz centrée sur  $\nu_0 \gg \Delta \nu$  donnée. On considère, cette fois, des rayons de même amplitude  $a_0$ . Calculer  $I(\delta)$  et déterminer l'expression du contraste.
3. Même question avec un laser. Quelles différences ?

$$\vec{E} = \vec{E}_{charge} + \vec{E}_0$$

1) Tracé asymptotique:

$$\left. \begin{aligned} r \rightarrow 0 &\Rightarrow \vec{E} \sim \vec{E}_{charge} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \\ r \rightarrow \infty &\Rightarrow \vec{E} \sim \vec{E}_0 \end{aligned} \right\}$$



2)  $\vec{E}_0 = -\text{grad } V_0 \Rightarrow -E_0 \vec{e}_x = -\frac{dV_0}{dx} \vec{e}_x \Rightarrow V_0 = E_0 x + C$   
 $\vec{E}_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \Rightarrow V_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$  (par convention!)  
 $\Rightarrow V_0 = E_0 r \cos\theta$

$$V = V_0 + V_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + r E_0 \cos\theta \approx \text{grande adimensionnée: } u \text{ telle que:}$$

$$\left. \begin{aligned} r E_0 \cos\theta = Q u \cos\theta &\Rightarrow Q^2 = \frac{E_0 q}{4\pi\epsilon_0} \Rightarrow \left[ Q = \sqrt{\frac{E_0 q}{4\pi\epsilon_0}} \text{ (si } q > 0) \right] \text{ et } \left[ u = r \frac{E_0}{Q} \right] \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{u} & \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow V(u) = Q \left( \frac{1}{u} + u \cos\theta \right)$$

Equipotentielles pour  $\theta$  fixé:  $dV = 0 \Rightarrow -\frac{1}{u^2} + u \cos\theta = 0$

• Pour  $\theta = 0$ :  $-\frac{1}{u^2} + u = 0 \Rightarrow u = 1 \Rightarrow \boxed{r = \frac{Q}{E_0}}$

• Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ :  $-\frac{1}{u^2} = 0 \Rightarrow u \rightarrow \infty \Rightarrow \boxed{r \rightarrow \infty}$

• Pour  $\theta = \pi$ :  $-\frac{1}{u^2} - u = 0 \rightarrow \boxed{\text{impossible}}$

I- Mines-Ponts (2021)

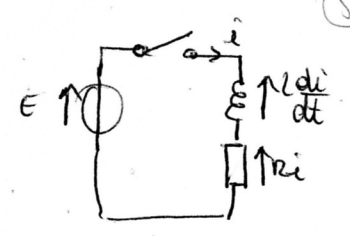
4- Électrostatique (2021)

- On considère un champ uniforme  $\vec{E}_0 = -E_0 \vec{u}_x$  et on place une charge ponctuelle fixe. Tracer les lignes de champ puis les équipotentielles.
- Déterminer le potentiel dans tout l'espace puis donner le potentiel en fonction de variables adimensionnées. Calculer le rayon des équipotentielles pour  $\theta = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  et  $\theta = \pi$  ( $\theta$  correspondant à l'angle des coordonnées polaires).

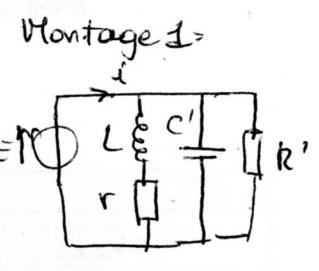
Exo 5b p3 (11112427)

(5)

1)  $E = L \frac{di}{dt} + Ri \Rightarrow \tau \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R}$  avec  $\tau = \frac{L}{R}$   
 $\Rightarrow i = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$  car  $i(0) = 0$ .



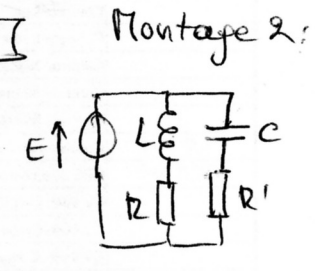
2)  $\frac{1}{Z} = \frac{1}{L\omega j + R} + C' \omega j + \frac{1}{R'} = \frac{i}{E} \Rightarrow i = E \times \left( \frac{1}{R + L\omega j} + C' \omega j + \frac{1}{R'} \right)$



continuité de  $i \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} i(t) = 0$  cad:  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} i = 0$ .  
 $\Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \infty} E \times C' \omega j = 0$   
 $\Rightarrow C' = 0$  (impossible)

Montage 2:

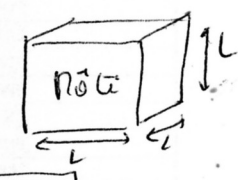
$\frac{1}{Z} = \frac{1}{L\omega j + R} + \frac{1}{R' + \frac{1}{C' \omega j}} \Rightarrow i = E \times \left( \frac{1}{L\omega j + R} + \frac{C' \omega j}{1 + R' C' \omega j} \right)$   
 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} i = \frac{E}{R'} = 0 \Rightarrow R' \rightarrow \infty$



Exo 5-1 p3 (11112413)

And par analyse dimensionnelle :

$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \Rightarrow \mu c = \frac{\lambda}{L^2} \Rightarrow \tau = \frac{\mu c L^2}{\lambda}$



max du rôle:  $M = \mu L^3 \Rightarrow L = \left( \frac{M}{\mu} \right)^{1/3} \Rightarrow \tau = \frac{\mu c}{\lambda} \times \frac{1}{\mu^{1/3}} \times M^{2/3}$   
 $\tau$  n'est pas proportionnel à  $\lambda$ !

1111242

I- Mines-Ponts (2021)

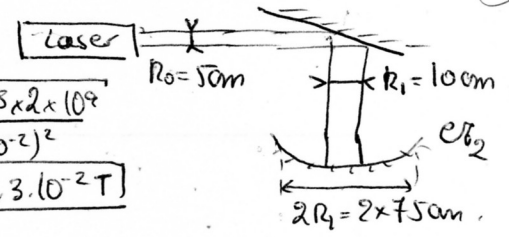
b- Exercice 2 : Circuit électronique

On considère un circuit électrique constitué d'un générateur de tension (notée  $E$ ) et d'une bobine, modélisée comme une bobine parfaite d'inductance  $L$  en série avec une résistance interne  $R$ .  
 On ajoute au circuit un interrupteur ouvert, que l'on ferme à  $t = 0$ . [Aucun schéma n'était donné]

1. Exprimer le courant circulant dans le circuit après la fermeture du circuit.
2. On ajoute, en parallèle de la bobine réelle, un condensateur modélisé par l'association d'une résistance  $R'$  et d'un condensateur idéal de capacité  $C'$ , initialement déchargé.  
 Trouver  $C'$  et  $R'$  pour assurer la continuité du courant délivré par le générateur.

$$1) \vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} \Rightarrow P_0 = \frac{E_0^2 S}{2\mu_0 c} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c P_0}{\pi R_0^2}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 2 \times 10^9}{\pi \times (5 \cdot 10^{-2})^2}}$$

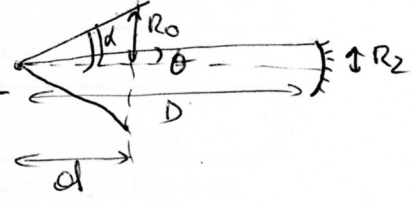
$$\Rightarrow E_0 = 9,8 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1} \Rightarrow B_0 = \frac{E_0}{c} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$



2)  $E_0$  est trop élevé pour un laser

$$\tan \theta = \frac{R_2}{D} = \frac{0,75}{384 \cdot 10^6} = 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ rad} \Rightarrow \alpha = 3 \cdot 10^{-6} \text{ rad} > 1,9 \cdot 10^{-9} \text{ rad}$$

= pour éviter la diffraction



$$\frac{P}{P_0} = \frac{S}{S_0} = \frac{\pi R_2^2}{\pi R_0^2} = \left(\frac{R_2}{R_0}\right)^2 \text{ avec } \tan \alpha = \frac{R_0}{d} \Rightarrow P = \left(\frac{R_2}{\alpha}\right)^2 P_0$$

$$\tan \theta = \frac{R_2}{d} \Rightarrow P = \left(\frac{1,9 \cdot 10^{-9}}{3 \cdot 10^{-6}}\right)^2 \times 10^9 \Rightarrow P = 400 \text{ W}$$

3) Énergie d'un photon:  $E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{633 \cdot 10^{-9}} \Rightarrow E = 3,13 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

N photons  $\Rightarrow P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{N E}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{N E}{P} = \frac{5 \cdot 3,13 \cdot 10^{-19}}{400} \Rightarrow \tau = 4 \cdot 10^{-21} \text{ s}$

Incertitude: 1 photon  $P = \frac{E_{\text{photons}}}{\tau} = \frac{E}{\tau} \Rightarrow P_0 \times \left(\frac{R_2}{\alpha}\right)^2 = \frac{E}{\tau} \Rightarrow P_0 \times \left(\frac{R_2}{D \alpha}\right)^2 = \frac{E}{\tau}$

$$\Rightarrow \left| 2 \frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta \tau}{\tau} = \frac{1 \text{ photon}}{5 \text{ photons}} = \frac{1}{5} \right|$$

2111261

I- Mines-Ponts (2021)

6- Optique, électronique (2021)

a- Exercice 1 : Réflecteur sur la Lune

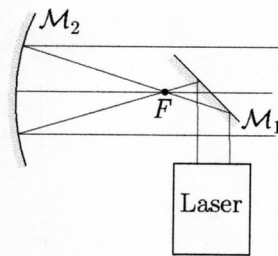
Soit une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement, progressant suivant l'axe (Ox), telle que  $\vec{E}(O, t=0) = E_0 \vec{e}_y$ .

1. Pour obtenir la distance Terre-Lune  $D = 384\,000 \text{ km}$ , on a placé un réflecteur d'une largeur  $\ell$  sur la Lune afin d'envoyer un rayon et de calculer le temps qu'il met à faire l'aller-retour.

On utilise un laser et un télescope.

On note  $R_0 = 5 \text{ cm}$  le rayon du faisceau à la sortie du laser,  $R_1 = 10 \text{ cm}$  après la réflexion par le miroir  $M_2$  et  $R_2 = 75 \text{ cm}$  la largeur du miroir du télescope. Le laser émet un rayon d'une puissance  $P = 1 \text{ GW}$ .

Calculer l'amplitude de  $\vec{E}$  et de  $\vec{B}$ .



2. On ne prend plus un rayon laser, mais un rayon ayant un angle  $\alpha = 3 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$ .

Pourquoi cette valeur? Pourquoi ne pas prendre un rayon laser?

Calculer la puissance reçue après réflexion sur la Lune, en négligeant l'absorption.

3. Calculer  $\tau_{\text{moyen}}$  temps moyen pour que 5 photons reviennent sur Terre. Estimer l'incertitude sur la mesure de  $D$ .

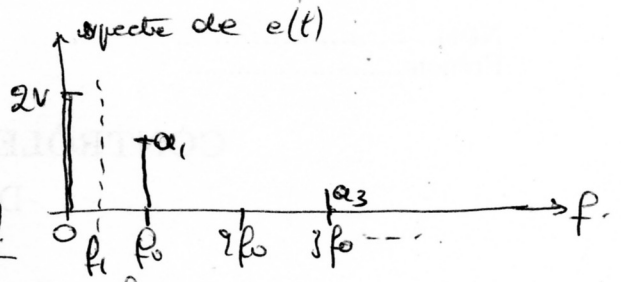
Données numériques :

- Constante de Planck :  $h = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
- Perméabilité magnétique du vide :  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
- Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
- Longueur d'onde du faisceau laser :  $\lambda = 633 \text{ nm}$

1) Circuit passe bande:  $\begin{matrix} \uparrow \\ e \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} \text{---} \\ C \\ \text{---} \\ L \\ \text{---} \\ R \end{matrix} \uparrow$   $H = \frac{1}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega})}$  avec  $\begin{cases} \omega_c = 2\pi f_c = \frac{1}{LC} \\ Q = \frac{L}{R} \end{cases}$

spectre:  $e(t)$ : un train d'amplitude  $E_0 = 2V$ .

spectre:  $a_0 = \frac{E_0}{2} = 2V$   
 $a_n = \frac{2E_0}{n\pi} \sin(n\frac{\pi}{2}) \Rightarrow a_1 = \frac{4}{\pi}, a_2 = 0, a_3 = -\frac{4}{3\pi} \dots$



lecture:  $T_0 = 6 \times 50 \mu s \Rightarrow f_0 = \frac{1}{200 \times 10^{-6}} = 5000 \text{ Hz}$

lecture oscilloscope: ~~passer~~ sélection de fréquence  $f_0$   
 $\Rightarrow f_c = f_0 \Rightarrow \omega_0 = 2\pi f_0 \Rightarrow C = \frac{1}{L(2\pi f_0)^2} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ F}$

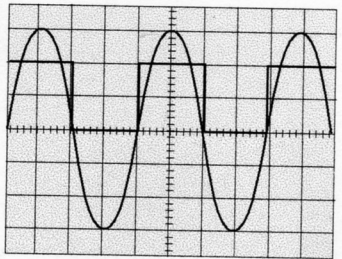
2)  $f = 200 \text{ Hz}$   
 $f_c = 5000 \text{ Hz}$   
 $\Rightarrow \frac{\omega_c}{\omega} = 25 \text{ et } \frac{\omega}{\omega_c} \approx \frac{1}{25} \ll 1 \Rightarrow H = \frac{1}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_c} - \frac{\omega_c}{\omega})} \approx \frac{1}{-jQ\frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{j\omega}{Q\omega_c} = \frac{d}{e}$   
 $\Rightarrow d = \frac{1}{Q\omega_c} j\omega e = \frac{1}{Q\omega_c} \frac{de}{dt} \Rightarrow$  le signal triangulaire  $\times$  transformé en un train.

I- Mines-Ponts (2021)

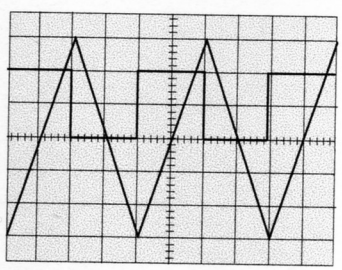
21112k2

b- Exercice 2 : Filtre passe-bande

On teste un filtre passe-bande avec un signal carré.  
 On obtient ces deux figures sur un oscilloscope ( $s$  : sensibilité) :



50  $\mu s$ /div, 2 V/div,  $s=0.5$  V



5  $\mu s$ /div, 2 V/div,  $s=0.2$  V

- On se donne une bobine d'inductance  $L = 50 \text{ mH}$ .  
 Fixer  $C$  pour obtenir un filtre donnant les mêmes figures.
- Pour un signal triangulaire entrant de fréquence  $f = 200 \text{ Hz}$ , décrire le signal de sortie.

1°)  $\rho = n_0 \times (-e) e^{\frac{eV}{kT}} + n_0 \times (e) e^{-\frac{eV}{kT}}$  avec  $\mathcal{E}_p(\vec{e}) = qV = -eV$  et  $\mathcal{E}_p(\text{ions}) = eV$

$\Rightarrow \rho = -2n_0 e \sinh\left(\frac{eV}{kT}\right) \approx -2n_0 e^2 V / kT$

2°)  $\Delta V = \frac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2}(rV) = \frac{2n_0 e^2}{\epsilon kT} V \Rightarrow \frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{1}{\rho_D^2} f = 0$  où  $\left(\frac{\rho_D^2}{\epsilon} = \frac{\epsilon kT}{2n_0 e^2}\right)$  et  $f = rV$ .

$\Rightarrow rV = f = A e^{r/\rho_D} + B e^{-r/\rho_D} \Rightarrow V = \frac{A}{r} e^{r/\rho_D} + \frac{B}{r} e^{-r/\rho_D}$  or  $\lim_{r \rightarrow \infty} V \neq \infty \Rightarrow A = 0$   
 $\Rightarrow V(r) = \frac{B}{r} e^{-r/\rho_D}$

• lorsque  $r \rightarrow 0$ ,  $V$  ressemble à celui produit par la charge  $q_0$ :  $V_0 = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$

$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} V(r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow V(r) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/\rho_D}$

$\vec{E} = -\text{grad} V \Rightarrow \vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r\rho_D}\right) e^{-r/\rho_D} \vec{e}_r$

3°)  $\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \times 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon} \Rightarrow Q(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 \times \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r\rho_D}\right) e^{-r/\rho_D}$   
 $\Rightarrow Q(r) = q_0 \left(1 + \frac{r}{\rho_D}\right) e^{-r/\rho_D}$

24/11/241

I- Mines-Ponts (2021)

7- Électrostatique dans un plasma (2021)

On considère un plasma globalement neutre constitué d'ions et d'électrons de densité volumique  $n_0$ . Une particule de charge  $q_0$  est placée au point  $O$ . On suppose que le nombre de particules chargées par unité de volume, soumis à l'énergie potentielle  $E_p$ , suit la loi de Boltzmann :

$n(M) = n_0 e^{-\frac{E_p(M)}{k_B T}}$

On suppose que le potentiel électrique  $V$  est à symétrie sphérique.

- Déterminer la densité volumique de charge  $\rho(r)$  pour des températures élevées.
- Calculer le potentiel  $V(r)$ .  
Faire apparaître une longueur caractéristique  $\ell_D$ .  
Déterminer le champ  $\vec{E}$ .
- Calculer la quantité de charge  $Q(r)$  contenue dans une sphère de rayon  $r$ .

Données : opérateurs en coordonnées sphériques :

- Gradient :

$\vec{\text{grad}} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

- Divergence :

$\text{div} \vec{E} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta E_\theta) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r)$

- Laplacien :

$\Delta V = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV)$