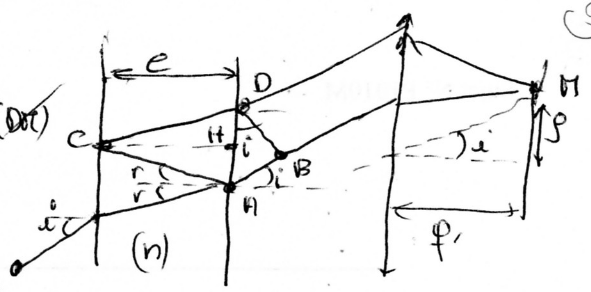
Exo 8-a p5 \ref{2611241}.

9



1°) $\delta = (ACM) - (ABM)$ avec $\begin{cases}(ACM) = (AC)+(CD)+\cancel{(DM)} = 2nAC + \cancel{(DM)} \\ (ABM) = (AB)+\cancel{(BM)}\end{cases}$

$= 2nAC - AB$.

$\begin{cases} \sin i = \frac{AB}{AD} = \frac{AB}{2AH} \\ \tan r = \frac{AH}{e} \\ \cos r = \frac{e}{AC} \end{cases} \Rightarrow AC = \frac{e}{\cos r}$ et $AB = 2AH\sin i = 2\sin i \times e\frac{\sin r}{\cos r}$ où $\sin i = n\sin r$

$= \frac{2en\sin^2 r}{\cos r}$

$\Rightarrow \delta = \frac{2ne}{\cos r} - \frac{2ne\sin^2 r}{\cos r} \Rightarrow \boxed{\delta = 2ne\cos r}$

2°) $p \simeq \frac{2ne}{\lambda_0}\left(1 - \frac{r^2}{2}\right) \Rightarrow 1 - \frac{r^2}{2} = p\frac{\lambda_0}{2ne} \Rightarrow r = \sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{p\lambda_0}{2ne}} \Rightarrow$ au centre $r = 0 \Rightarrow p_0 = \frac{2ne}{\lambda_0}$

$\begin{cases} i \simeq nr \\ \tan i = \frac{\rho}{f'} \simeq i \end{cases} \Rightarrow \rho = if' = f'nr \Rightarrow \rho = f'n\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{p}{p_0}}$

- 1er anneau $\Rightarrow p_1 = p_0 - 1$
- 2e anneau $\Rightarrow p_2 = p_1 - 1 = p_0 - 2$ $\Rightarrow \rho_N = f'n\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{p_0 - N}{p_0}} = f'n\sqrt{2}\sqrt{\frac{N}{p_0}}$

Ne anneau $\Rightarrow p_N = p_0 - N$

$= f'n\sqrt{2} \times \sqrt{N \times \frac{\lambda_0}{2ne}}$

$\Rightarrow \boxed{\rho_N = \sqrt{N}\rho_0 \text{ où } \rho_0 = f'\sqrt{\frac{n\lambda_0}{e}}}$

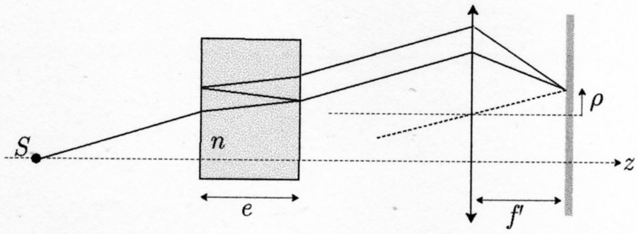
2611241

I- Mines-Ponts (2021)

8– Optique, électromagnétisme (2021)

a– Exercice 1 : Inférences par un système à division d'amplitude

On considère le montage suivant : une source ponctuelle monochromatique éclaire, à distance finie, une lame de verre à faces parallèles. Un écran est situé dans le plan focal image d'une lentille convergente.

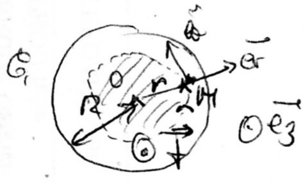


Données : f', n (indice de la lame), e (épaisseur de la lame), λ_0 (la longueur d'onde de la source).
On s'intéresse uniquement aux deux premiers rayons transmis en sortie de la lame

1. Déterminer la différence de marche.
2. On observe un anneau brillant au centre de l'écran.
   Donner les rayons des anneaux observés sur l'écran, en fonction des données du montage.

Exo 8b-p5 \ref{281241}

• Champ $\vec{B}_1$ créé à l'intérieur d'un cylindre $\mathcal{C}_1$:

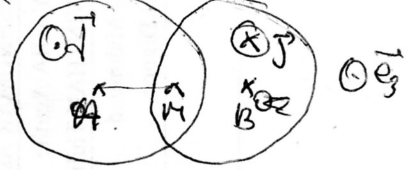


$$\mathcal{C}_1 \hat{=} \oint_{\Gamma_1} \vec{B_1}(M)\cdot d\vec{OM} = \oint_{\Gamma}[B_1(r)\vec{e_\theta}]\cdot[r\,d\theta\,\vec{e_\theta}] = 2\pi r B_1(r) = \mu_0 I_{int} \text{ avec :}$$

$$I_{int} = \iint_{S_{\Gamma_1}} \vec{j}\cdot d\vec{S} = j\times\pi r^2 \Rightarrow 2\pi r B_1(r) = \mu_0 j \pi r^2 \Rightarrow \vec{B_1}(M) = \frac{\mu_0 j}{2} r\,\vec{e_\theta} = \mu_0 \frac{j}{2} r\,\vec{e_z}\wedge\vec{e_r}$$

$$\Rightarrow \vec{B_1}(M) = \frac{\mu_0 j}{2}\vec{e_z}\wedge\vec{OM}$$

• Intersection de 2 cylindres :



$$\begin{cases} \vec{B_1}(M) = \frac{\mu_0 j}{2}\vec{e_z}\wedge\vec{AM} \\ \vec{B_2}(M) = -\frac{\mu_0 j}{2}\vec{e_z}\wedge\vec{BM} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{B}(M) = \vec{B_1}+\vec{B_2} = \frac{\mu_0 j}{2}\vec{e_z}\wedge\vec{AB}}$$

281241

I- Mines-Ponts (2021)

b– Exercice 2 : Calcul de champ magnétique

On considère deux cylindres conducteurs de rayon R et d'axes respectifs de même orientation (Az) et (Bz). Le premier cylindre est parcouru par un courant uniforme $\vec{\jmath}$ dans le sens positif de l'axe (Az) et le second cylindre est parcouru par un courant uniforme $-\vec{\jmath}$ dans le sens négatif de l'axe (Bz).
On donne $AB = a < 2R$.
Donner le champ magnétique dans une zone commune aux deux cylindres

Exo 9-a p 6 {\ref{3011241}}. (11)

$$\mathcal{E}_p = qV - mgz = q\left(ax^2+by^2+cz^2+dx+ey+fz+gxy+hyz+ixz\right) - mg_0 z \quad \text{où } \vec{P} = m\vec{g_0}.$$

$$\vec{F}_{ext} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\mathcal{E}_p = -\begin{pmatrix} \partial\mathcal{E}_p/\partial x \\ \partial\mathcal{E}_p/\partial y \\ \partial\mathcal{E}_p/\partial z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2qax + qd + qgy + izq \\ 2qby + qe + qgx + qhz \\ 2qcz + qf + qhy + qix - mg_0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}_{ext}(0) = \begin{pmatrix} qd \\ qe \\ qf - mg \end{pmatrix}.$$

Equilibre si $d=0$; $e=0$, $qf = mg$. $\Rightarrow \vec{F}_{ext} = -\underbrace{\begin{pmatrix} 2qa & qg & iq \\ qg & 2qb & qh \\ qi & qh & 2qc \end{pmatrix}}_{=\overline{\overline{F}}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overline{\overline{F}}\,\overrightarrow{On}$

$$\Rightarrow m\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \vec{F}_{ext} \Rightarrow m\frac{d^2\overrightarrow{On}}{dt^2} = -\overline{\overline{F}}\,\overrightarrow{On}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\overrightarrow{On}}{dt^2} + \frac{1}{m}\overline{\overline{F}}\,\overrightarrow{On} = \vec{0}}$$

oscillateur harmonique si $\overrightarrow{On}$ est vecteur propre de $\overline{\overline{F}}$, avec pour valeur propre ω^2

3011241

I- Mines-Ponts (2021)

9– Électromagnétisme, optique (2021)

a– Exercice 1 : Stabilité d'une particule chargée

Soit une particule de masse m et de charge q, dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ dirigé selon la verticale descendante.
La particule est soumise à un potentiel électrostatique $(x, y, z) \mapsto V(x, y, z)$.
Déterminer si le point O est une position d'équilibre stable pour la particule, sachant que le potentiel est pris *a priori* de la forme :

$$V(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dx + ey + fz + gxy + hyz + ixz$$

, où $a, \cdots, i$ sont des constantes.

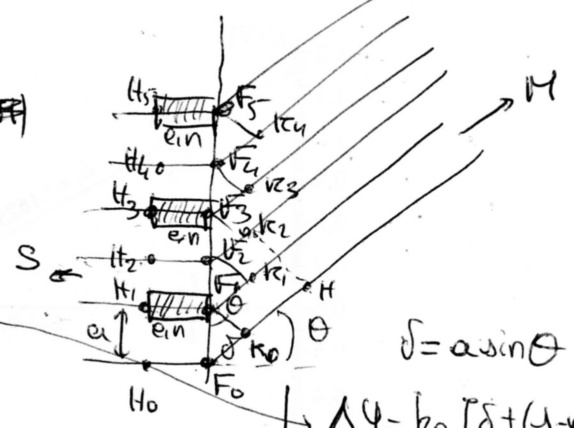
Exo 9-b p 6 (ref : 3011247)

(12)

$$\begin{cases} s_0(M) = S_0 e^{i[\omega t - k_0 (SM)_0]} \;/\; (SM)_0 = (SH_0) + e + \delta + (K_0M) \\ s_1(M) = S_0 e^{i[\omega t - k_0 (SM)_1]} \;/\; (SM)_1 = (SH_1) + ne + (F_1M) \end{cases}$$

$$\begin{cases} s_2(M) = S_0 e^{i[\omega t - k_0 (SM)_2]} \;/\; (SM)_2 = (SH_2) + e + \delta + (K_2M) \\ s_3(M) = S_0 e^{i[\omega t - k_0 (SM)_3]} \;/\; (SM)_3 = (SH_3) + ne + (F_3M) \end{cases}$$

$\vdots$



$$\frac{s_1}{s_0} = e^{-ik_0[(n-1)e - \delta]} = e^{ik_0[\delta + (1-n)e]} = e^{i\Delta\varphi}$$

$$\frac{s_3}{s_2} = e^{-ik_0[(n-1)e - \delta]} \Rightarrow s_3 = s_2 e^{i\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi = k_0[\delta + (1-n)e].$$

$$\varphi_0 = 2k_0\delta.$$

$$s_{2p+1} = s_{2p}\, e^{i\Delta\varphi}$$

$$\frac{s_2}{s_0} = e^{-ik_0[(K_2M) - (K_0M)]} \text{ avec } (K_0M) = K_0H + (HM) = \underbrace{K_0H}_{2\delta} + (K_2M)$$

$$\Rightarrow s_2 = s_0 \times e^{-i\varphi_0} \Rightarrow s_{2(p+1)} = s_{2p} \times e^{-i\varphi_0} = s_{2p} = s_0 e^{-i\varphi_0 p}.$$

$$\Rightarrow s(M) = [s_0 + s_1] + [s_2 + s_3] + \dots + [s_{2p} + s_{2p+1}] + \dots$$

$$= \sum_{p=0}^{\infty} s_{2p} + \sum_{p=0}^{\infty} s_{2p+1} = \sum_{p=0}^{\infty} s_{2p}(1 + e^{i\Delta\varphi}) = (1 + e^{i\Delta\varphi}) \sum_{p=0}^{\infty} s_0 e^{-i\varphi_0 p}.$$

$$\Rightarrow s(M) = s_0(1 + e^{i\Delta\varphi}) \times \lim_{N \to \infty} \frac{1 - e^{i\varphi_0(N+1)}}{1 - e^{i\varphi_0}} = s_0(1 + e^{i\Delta\varphi}) \times \frac{1}{1 - e^{i\varphi_0}}.$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}|s|^2 = I_0 \frac{(1 + e^{i\Delta\varphi})(1 + e^{-i\Delta\varphi})}{(1 - e^{i\varphi_0})(1 - e^{-i\varphi_0})} = I_0 \times \frac{2 + 2\cos\Delta\varphi}{2 - 2\cos\varphi_0} = \boxed{I_0 \times \frac{\cos^2(\Delta\varphi/2)}{\sin^2(\varphi_0/2)}} \text{ avec}$$

$$\text{où : } \begin{cases} \Delta\varphi = k_0[a\sin\theta + (1-n)e]. \\ \varphi_0 = 2k_0 a \sin\theta \end{cases}$$

3011242

I- Mines-Ponts (2021)

b– Exercice 2 : Réseau de fentes modifié

Soit N un entier pair.

On considère un réseau de N fentes de grande longueur selon Oy, de pas a selon Ox, éclairé sous une incidence normale.

On observe dans la direction $\vec{u}$ dans le plan (Oxz) et faisant un angle θ avec Oz.

On accole devant une fente sur deux des lames d'épaisseur e et d'indice n_0.

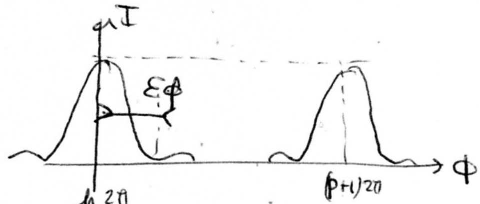
1. Exprimer l'intensité à l'infini (on supposera que θ est faible).
2. Pour quelle épaisseur e retrouve-t-on la même figure de diffraction que s'il n'y avait pas de lame ?

Exo 10-a p 6 - \ref{3011243}

- $I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N\phi}{2}\right)}{\sin^2\phi/2}$ avec $\phi = k_0 a(\sin\theta - \sin\theta_0)$

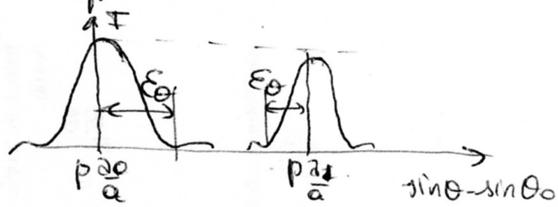
Imax pour $\phi = p2\pi \Rightarrow \boxed{\sin\theta - \sin\theta_0 = p\frac{\lambda_0}{a}}$

- $\mathcal{E}_\phi = \frac{2\pi}{N}$



- $\phi = k_0 a(\sin\theta - \sin\theta_0) \Rightarrow \mathcal{E}_\phi = k_0 a\, \mathcal{E}_\theta$

$\Rightarrow \mathcal{E}_\theta = \frac{1}{k_0 a} \times \frac{2\pi}{N} = \frac{\lambda_0}{aN}$



- Critère de Rayleigh : $p\frac{\lambda_1}{a} - p\frac{\lambda_0}{a} \geq \mathcal{E}_\theta \Rightarrow \Delta\lambda \geq \frac{\cancel{a}}{p} \times \frac{\lambda_0}{\cancel{a}N}$

$\Rightarrow \boxed{N \geq \frac{\lambda_0}{p\Delta\lambda}} \Rightarrow \boxed{N_{min} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} = \frac{586}{0{,}6} \simeq 1000}$

3011243

I- Mines-Ponts (2021)

10– Optique, mécanique (2021)

a– Exercice 1 : Application des réseaux

On considère un réseau à N fentes de pas a et on rappelle la formule de l'intensité :

$$I(M) = I_0 \frac{\sin^2 \dfrac{N\phi}{2}}{\sin^2 \dfrac{\phi}{2}}$$

Quel est le nombre de fentes minimal pour pouvoir distinguer le doubler du sodium (on a $\lambda_0 = 589,0$ nm et $\lambda_1 = 589,6$ nm).

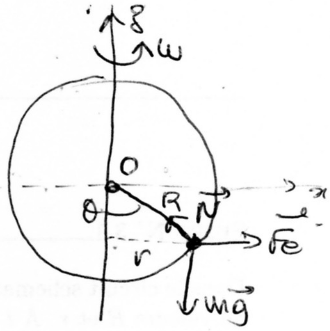
Exo 10-b-p6 {\ref|30-12244}.

13

Énergies potentielle :

- Pesanteur : $\mathcal{E}_{pp} = mgz = -mgR\cos\theta$
- Force d'entraînement : $F_e : \mathcal{E}_{pent} = -\frac{1}{2} m r^2 \omega^2 = -\frac{1}{2} m$

$= -\frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2\theta$.



$\boxed{\mathcal{E}_p = -mgR\cos\theta - \frac{1}{2} m R^2\omega^2 \sin^2\theta}$

$\Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta} = mgR\sin\theta - mR^2\omega^2\sin\theta\cos\theta = \boxed{mgR\sin\theta \times \left[1 - \frac{R\omega^2}{g}\cos\theta\right] = \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}}$

$\Rightarrow$ position d'équilibre en $\boxed{\theta_1 = 0}$ $\boxed{\theta_2 = \pi}$ et $\boxed{\cos\theta_3 = \frac{g}{R\omega^2}}$ (si $\frac{g}{R\omega^2} < 1$).

$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2} = mgR\cos\theta \times \left[1 - \frac{R\omega^2}{g}\cos\theta\right] + mgR\sin\theta \times \frac{R\omega^2}{g}\sin\theta$

- $\left.\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}\right|_{\theta_1=0} = mgR \times \left(1 - \frac{R\omega^2}{g}\right) < 0$ ~~si~~ $\Rightarrow$ $\boxed{\theta_1 = 0 \text{ instable si } \frac{g}{R\omega^2} < 1}$
- $\left.\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}\right|_{\theta_2=\pi} = -mgR \times \left(1 + \frac{R\omega^2}{g}\right) < 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\theta_2 = \pi \text{ toujours instable}}$
- $\left.\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\theta^2}\right|_{\theta_3} = \cancel{mgR}\, mR^2\omega^2\sin^2\theta > 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\theta_3 \text{ ~~toujo~~ stable si } \frac{g}{R\omega^2} < 1}$

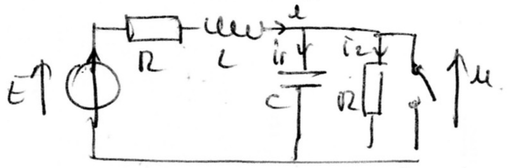
3011244

b– Exercice 2 : Masse glissant sur un anneau

On a un anneau qui tourne à la vitesse ω autour d'un axe Oy vertical.
Sur cet anneau se trouve une bague pouvant glisser sans frottements.
Quelles sont les positions d'équilibre de la bague ?
Discuter leur stabilité.

Exo 11-a-p6-ref {0112241}

(14)



1°) $E = Ri + L\frac{di}{dt} + u = R\left(\frac{u}{R} + C\frac{du}{dt}\right) + L\frac{d}{dt}\left(\frac{u}{R} + C\frac{du}{dt}\right) + u$

$\Rightarrow \boxed{E = LC\frac{d^2u}{dt^2} + \left(RC + \frac{L}{R}\right)\frac{du}{dt} + 2u}$

$u = Ri_2$ et $i_1 = C\frac{du}{dt}$

$\Rightarrow i = \frac{u}{R} + C\frac{du}{dt}$.

2°) $\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 E}$ où $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}}$ et $\boxed{\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} + \frac{R}{L}}$

3°) $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$ pour le régime pseudo-périodique

4°) Solution de l'équation caractéristique :

$X = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -\alpha + i\Omega \\ X_2 = -\alpha - i\Omega \end{cases}$ avec $\boxed{\alpha = \frac{\omega_0}{2Q}}$ et $\boxed{\Omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}}$

$\Rightarrow \boxed{u = e^{-\alpha t}\left[A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right]}$ et $u(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow \cancel{u = e^{-\alpha t} A\cos\Omega t}$ $u = e^{-\alpha t} B\sin(\Omega t)$.

En régime sinusoïdal : $\frac{d\underline{u}}{dt} = i\omega\underline{u}$.

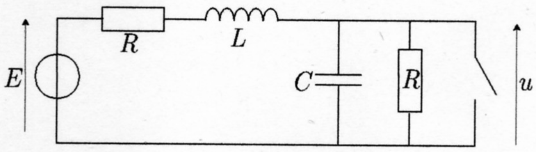
$\Rightarrow \omega_0^2\underline{e} = \left(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)\underline{u} \Rightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}}}$

0112241

I- Mines-Ponts (2021)

11– Électronique, thermodynamique (2021)

a– Exercice 1 : Régime transitoire d'un circuit RLC

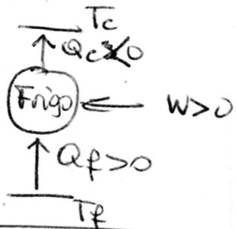


L'interrupteur a été fermé pendant longtemps et il est ouvert à $t = 0$. E est une tension constante.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par u.
   Question de l'examinateur : Vérifier l'homogénéité de la formule. Après avoir utilisé la grandeur RC, il m'a demandé de la prouver.
2. Mettre l'équation différentielle sous forme canonique : déterminer les expression de Q et ω_0.
   Question de l'examinateur : Vérifier l'homogénéité des formules. Calculer la valeur numérique de la fréquence propre du circuit.
3. Quel est le type de régime ?
   On avait les valeurs numériques des composants du circuit (mais je ne m'en souviens plus. La réponse était "régime pseudo-périodique").
4. Tracer l'allure de $t \mapsto u(t)$.
   Question de l'examinateur : Et si l'on se place en régime sinusoïdal, comment obtenir l'expression de la fonction de transfert (la réponse attendue n'était pas d'utiliser un pont diviseur de tension ou un théorème de Millman ; il voulait une réponse rapide).

Exo 11-b-p 7 (ref) 0112242 ?

(15)

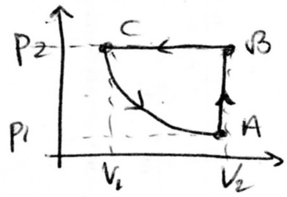


1°) $e \triangleq \frac{|Q_f|}{|W|} = \frac{Q_f}{W}$ avec $\oint dU = 0 = W + Q_f + Q_c \Rightarrow W = -Q_f - Q_c$

$\Rightarrow e = -\frac{Q_f}{Q_f+Q_c} = -\frac{1}{1+\frac{Q_c}{Q_f}}$

• Relation de Clausius : $\oint \frac{\delta Q_{rev}}{T} = 0 \Rightarrow \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0 \Rightarrow \frac{Q_c}{Q_f} = -\frac{T_c}{T_f} \Rightarrow \boxed{e = \frac{T_f}{T_c - T_f}}$ si réversible

2°) $\boxed{\text{Sens anti-horaire}}$



3°) $e = -\frac{Q_f}{Q_f+Q_c}$ avec :

• $Q_{AB} = \Delta U_{AB} = C_v(T_B - T_A) > 0 \Rightarrow \boxed{Q_f = C_v(T_B - T_A)}$

• $Q_{BC} = \Delta H_{BC} = C_p(T_C - T_B) < 0 \Rightarrow \boxed{Q_c = C_p(T_C - T_B)}$

$\Rightarrow \boxed{e = \frac{-1}{1+\frac{Q_c}{Q_f}} = -\frac{1}{1+\gamma\frac{T_C-T_B}{T_B-T_A}}}$

0112242

I- Mines-Ponts (2021)

b– Exercice 2 : Machine frigorifique

1. Donner le schéma sur les échanges thermiques d'une machine frigorifique (et leur signe).
   Donner l'expression de l'efficacité (et la justifier).
   On étudie maintenant un cycle réversible constitué d'une isobare, d'une isochore et d'une adiabatique.
2. Tracer l'allure du cycle dans un diagramme (P,V). Donner le sens de parcours du cycle.
   Question de l'examinateur : Après avoir justifié le sens du cycle avec son aire, il m'a demandé d'expliquer pourquoi dans un sens l'aire était positive et négative dans l'autre.
3. Calculer l'efficacité.