

Exo 12-a p7-1601251

• $m \frac{d^2 x}{dt^2} = i a B$ avec $e_g + Ri - e = 0 \Rightarrow Ri = e - e_g$

• $\Phi_B = B x a \Rightarrow e = - \frac{d\Phi_B}{dt} = -Ba \dot{x}$

$\Rightarrow \frac{dU}{dt} + \frac{1}{\tau} U = - \frac{E \cos(\omega t)}{Rm}$ où $\tau = \frac{Rm}{B^2 a^2}$

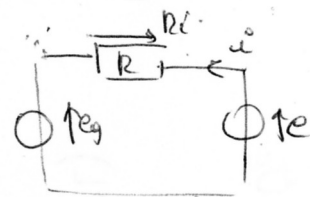
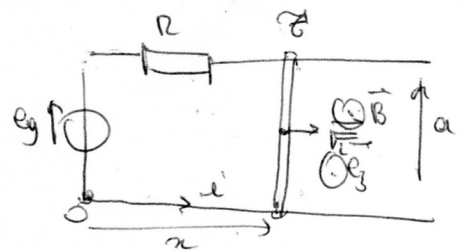
• solution homogène: $U_h = A e^{-t/\tau}$

• solution particulière: $\frac{dU_p}{dt} + \frac{1}{\tau} U_p = - \frac{E}{Rm} e^{i\omega t}$

$U_p = \frac{1}{1+i\omega\tau} \times \frac{Rm}{B^2 a^2} \times - \frac{E}{Rm} e^{i\omega t} = - \frac{V_0}{1+i\omega\tau} e^{i\omega t}$ avec $V_0 = \frac{E}{a^2 B^2}$

$\Rightarrow U(t) = - \frac{V_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \cos(\omega t - \varphi) + A e^{-t/\tau}$ où $\tan \varphi = \omega\tau$

et $U(0) = 0 \Rightarrow U(t) = \frac{V_0}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \left[\cos \varphi e^{-t/\tau} - \cos(\omega t - \varphi) \right]$



I- Mines-Ponts (2023)

12- Induction, mécanique (2023)

a- Exercice 1 : Rail de Laplace

On considère un circuit conducteur comportant :

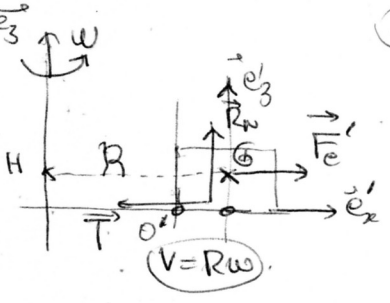
- un rail de Laplace (\mathcal{T}) de longueur a , se tradant sans frottements selon (Ox);
- une résistance R ;
- un générateur de la forme : $e_g(t) = E \cos(\omega t)$.

L'ensemble est plongé dans un champ $\vec{B} = B \vec{e}_z$ vertical, uniforme et stationnaire. Initialement, (\mathcal{T}) est de vitesse nulle.

Quel est le mouvement de la tige ?

Plusieurs situations : Dans R' : $\vec{F}_{ent} = mR\omega^2 \vec{e}'_x$

PPD : $m \begin{pmatrix} \dot{v}'_x \\ \dot{v}'_y \\ \dot{v}'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ RN \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2m\omega v'_y \\ -2m\omega v'_x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\omega^2 x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$

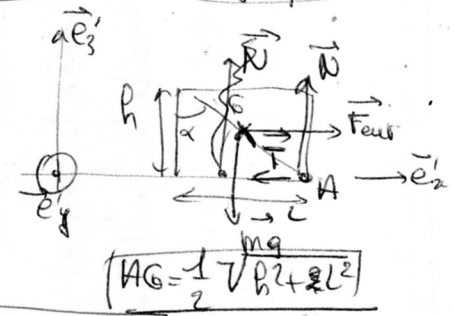


$\Rightarrow \begin{cases} m \frac{dv'_x}{dt} = mR\omega^2 + T_x + 2m\omega v'_y \\ m \frac{dv'_y}{dt} = T_y - 2m\omega v'_x \\ 0 = RN - mg \Rightarrow RN = mg \end{cases}$

si pas glissement : $\begin{cases} 0 = mR\omega^2 + T_x \\ 0 = T_y \\ RN = mg \end{cases}$
 et $\|\vec{T}\| < f_0 \|\vec{RN}\| \Rightarrow mR\omega^2 < f_0 mg \Rightarrow \omega < \sqrt{\frac{f_0 g}{R}}$

si glissement : \vec{T} colinéaire à $\vec{\sigma} \Rightarrow \vec{T} \wedge \vec{v}' = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v'_x \\ v'_y \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow T_x v'_y = T_y v'_x$ et $T_x^2 + T_y^2 = f_0^2 N^2$

- rotation autour de A (bascullement) : $\vec{C}_{BA}(m\vec{g}) = \vec{AG} \wedge m\vec{g} = AG \times mg \sin \alpha (-\vec{e}'_y) = \frac{L}{2} mg (-\vec{e}'_y)$
 - $\vec{C}_{BA}(\vec{F}_{ent}) = \vec{AG} \wedge \vec{F}_{ent} = AG \times mR\omega^2 \cos \alpha (\vec{e}'_y) = mR\omega^2 \frac{h}{2} \vec{e}'_y$
- $\Rightarrow \vec{C}_{BA}(\vec{F}_{ent}) = \frac{m}{2} \vec{e}'_y (-gL + \omega^2 h)$



\Rightarrow basculement de la caisse si $cb > 0$, c'est si $\omega > \sqrt{\frac{gL}{h}}$

I- Mines-Ponts (2023)

b- Exercice 2 : Mécanique en référentiel non galiléen

Soit une caisse de masse m , de base carrée, de dimension L et de hauteur h , située au bord d'un camion roulant en ligne droite à une vitesse constante V . Le camion fait un dérapage circulaire de rayon R . On note f_0 le coefficient de frottement solide. Discuter du mouvement de la caisse lors du dérapage.

1) Equipotentielle: plans passant par O, d'équation $V = Ue$.

2) Courbes: $V = V(\theta) \Rightarrow \Delta V = \frac{d^2V}{d\theta^2} = 0 \Rightarrow V(\theta) = a\theta + b$

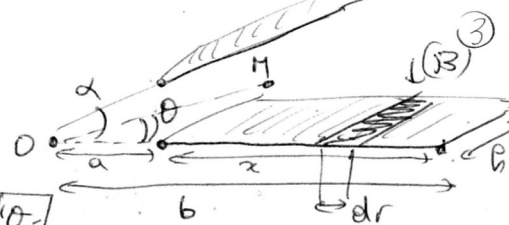
$$\vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \boxed{E_\theta = \frac{1}{r} \frac{V_2 - V_1}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(\theta) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\alpha} \theta}$$

3) Sur la bande B: $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{-V_2 + V_1}{r\alpha} \Rightarrow \sigma = \frac{-V_2 + V_1}{r\alpha} \epsilon_0 = \delta q$ sur $ds = h dr$.

$$Q = CU \Rightarrow \boxed{C = \frac{\epsilon_0 h}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

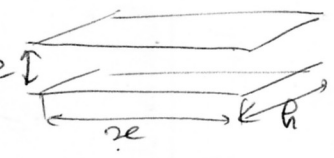
$$\Rightarrow Q = \int_{r=a}^b \frac{-V_2 + V_1}{r\alpha} \epsilon_0 h dr = \frac{\mu \epsilon_0 h}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \text{ avec } \mu = V_2 - V_1$$



4) Cas limite plan: $\begin{cases} a \rightarrow \infty \\ b \text{ fini} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b - a = x \Rightarrow b = a + x \\ e = \alpha a \text{ avec } \alpha \ll 1 \end{cases}$

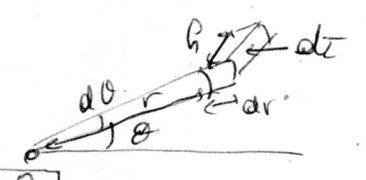
$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{a}\right) \approx \frac{x}{a}$$

$$\boxed{C \approx \frac{\epsilon_0 h}{\alpha} \times \frac{x}{a} = \epsilon_0 \times \frac{S}{e}}$$



5) 1^{er} façon: énergie: $\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} \Rightarrow \mathcal{E} = \iint \frac{\epsilon_0 E^2}{2} h dr d\theta$

$$\mathcal{E} = \int_{\theta=0}^{\alpha} \int_{r=a}^b \frac{\epsilon_0}{2} \times \frac{\mu^2}{r^2 \alpha^2} \times r dr d\theta \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu^2 \times \frac{\epsilon_0 h}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$



2^e méthode: $\mathcal{E} = \frac{1}{2} CU^2 = \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon_0 h}{\alpha} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \times \mu^2$

I- Mines-Ponts (2023)

13- Condensateur diédrique (2023)

On étudie un condensateur constitué de deux plaques (1) et (2) aux potentiels V_1 et V_2 formant un angle α . Les plans contenant chaque plaque se coupent en une droite D située à une distance a du début des plaques et b de la fin des plaques, qui sont donc de même longueur $(b - a)$. Pour finir, les plaques sont de largeur h .

1. Proposer la forme des surfaces équipotentielles.
2. Déterminer le champ électrique dans le condensateur.
3. En déduire la capacité de ce condensateur.
4. Retrouver le cas limite du condensateur plan.
5. Déterminer l'énergie contenue dans le condensateur de deux façons.

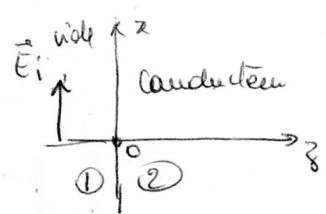
Données :

1. le champ électrique à l'intérieur d'un condensateur plan de charge surfacique σ est normal et vaut :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$

2. Laplacien en coordonnées cylindriques : $\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right)$

1) $\begin{cases} E_x = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \\ E_z = E_0 e^{i(\omega t + kz)} \end{cases} \Rightarrow E_x(z=0) = (E_0 + E_0) e^{i\omega t} = 0 \forall t \Rightarrow E_b = -E_0$
 $\Rightarrow \begin{cases} E_{rx} = -E_0 e^{i(\omega t + kz)} \\ E_{tz} = 0 \end{cases}$



$\vec{B}_i = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_{ix} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ k E_{ix} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{iy} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - kz)}$
 $\vec{B}_r = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_{rx} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ -k E_{rx} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{ry} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t + kz)}$

$\vec{\Pi}_i = \frac{E_0 \times E_0}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z \Rightarrow \langle \Pi \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \Rightarrow P = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2\mu_0 c P}{S}}$

2) $\vec{B}_z - \vec{B}_i = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12} \Rightarrow -\vec{B}_i(z=0) = \mu_0 \begin{pmatrix} j_{sz} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 \\ -j_{sz} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B_{iy}(z=0) = \mu_0 j_{sz}$
 or $B_{iy} = B_{iy} + B_{ry} = \frac{2E_0}{c} e^{i\omega t} \left(\frac{e^{ikz} + e^{-ikz}}{2} \right) \Rightarrow B_{iy} = \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \cos(kz) \Rightarrow \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) = \mu_0 j_{sz}$

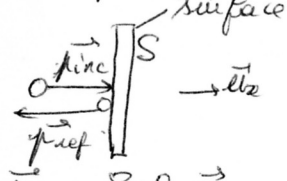
$\delta \vec{F} = \delta q (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \delta q \vec{v} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$
 $\delta q = j_s \times b \Rightarrow \delta q = j_s \times b dt$
 $\Rightarrow \frac{\delta F}{ds} = \vec{j}_s \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} j_{sz} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j_{sz} B_y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \frac{\delta F}{ds} = j_s B_y = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \times \frac{2E_0}{c} \cos(\omega t) \Rightarrow \text{pression} : P = \frac{\delta F}{ds} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c^2} \cos^2(\omega t)$

$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c^2} \rightarrow \text{Application : voile solaire}$

3) Energie d'un photon : $\epsilon = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow P = \frac{\delta \epsilon}{dt} = \frac{\delta N}{dt} \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow \left(\frac{\delta N}{dt} = \frac{P \lambda}{hc} \right)$: nombre de photons par surface

Impulsion du photon : $\vec{p} = \frac{h\vec{k}}{\lambda}$
 Force exercée par 1 photon : $\vec{F}_i = \frac{\delta \vec{p}}{dt} = \frac{2h\vec{k}}{dt}$
 Force exercée par δN photons : $\vec{F}_N = \frac{P \lambda}{hc} \times \frac{2h\vec{k}}{\lambda} = \frac{P \lambda}{hc} \times \frac{2hc}{\lambda} \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}_x = S \times \frac{2}{c} \vec{u}_x$



Définition du vecteur de Poynting : $\langle \Pi \rangle \times S = \vec{P} \Rightarrow \langle P \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S$
 $\Rightarrow \vec{F}_N = \frac{2}{c} \times \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} S \vec{u}_x = P S \vec{u}_x \Rightarrow \left(P = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \right)$: pression des photons

I- Mines-Ponts (2023)

14- Électromagnétisme (2023)

a- Exercice 1 : Laser sur un conducteur parfait fixe

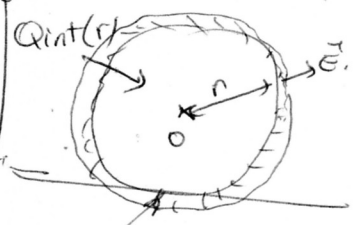
Un laser envoie un « rayon » de longueur d'onde $\lambda = 10 \mu\text{m}$ avec une puissance moyenne $P = 1 \text{ W}$ et une surface $S = 1 \text{ mm}^2$, sur la surface d'un conducteur parfait. Ce rayon est assimilé à une onde monochromatique plane progressive.

- Établir les expressions des champs incident/réfléchi/transmis et en particulier la valeur de E_0 .
- En déduire la densité de courant surfacique sur le conducteur (les conditions de passage sont données). Quelle force exerce alors le laser sur le supraconducteur ? Donner des exemples d'application.
- On considère, cette fois, les photons comme des particules. Donner le nombre de photons émis par seconde par le laser. En déduire la force exercée par le laser sur le conducteur.

1) $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + a\right) e^{-2ar} \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{-2ar} \left[-2a\left(\frac{1}{r} + a\right) - \frac{1}{r^2}\right] \Rightarrow E_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} e^{-2ar} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2a}{r} + 2a^2\right)$

• Théorème de Gauss: $\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_r \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}(r)}{\epsilon_0}$

\Rightarrow Charge dans une sphère de rayon r : $Q_{int} = 4\pi r^2 \epsilon_0 \times \frac{q e^{-2ar}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2a}{r} + 2a^2\right)$
 $\Rightarrow Q_{int}(r) = q e^{-2ar} (1 + 2ar + 2a^2 r^2)$



• En $r=0$, existence de $q_0 = \lim_{r \rightarrow 0} Q_{int}(r) = q$

• Atome globalement neutre car $\lim_{r \rightarrow \infty} Q_{int}(r) = 0$

• Charge dans une couche de rayon r et d'épaisseur dr (δ)

$\delta q = Q_{int}(r+dr) - Q_{int}(r) = dQ_{int} = q e^{-2ar} dr [-2a(1 + 2ar + 2a^2 r^2) + (2a + 4ar)]$

$\Rightarrow \delta q = -4a^3 r^2 q e^{-2ar} dr$ (potentielle)

2) Energie de liaison: énergie des charges contenues contenues dans l'atome

• Energie potentielle de la charge δq dans $\mathcal{E} = \delta \Phi = \delta q V(r)$ où $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + a\right) e^{-2ar}$

$\Rightarrow -W = \int_{r=0}^{\infty} +4a^3 r^2 q e^{-2ar} dr \times \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + a\right) e^{-2ar} = \frac{q^2 a^3}{\pi\epsilon_0} \int_{r=0}^{\infty} (r + ar^2) e^{-4ar} dr$

• Intégration par parties:

$I_n = \int_0^{\infty} r^n e^{-kar} dr = \left[-\frac{1}{ka} e^{-kar} \times r^n\right]_0^{\infty} + \frac{n}{ka} \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-kar} dr \Rightarrow I_n = \frac{n}{ka} I_{n-1}$

$\Rightarrow \left[I_n = \frac{n!}{(ka)^n} I_0 \right]$ et $E_{liaison} = \frac{q^2 a^3}{\pi\epsilon_0} [I_1 + a I_2] = \frac{q^2 a^3}{\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(ka)^2} + \frac{2a}{(ka)^3} \right]$
 où $I_0 = \frac{1}{ka} = \frac{1}{4a}$ et $I_n = \frac{n!}{(ka)^{n+1}}$
 $= \frac{q^2 a^3}{\pi\epsilon_0} \times \frac{1}{16a^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow E_{liaison} = \frac{3q^2 a}{32\pi\epsilon_0}$

I- Mines-Ponts (2023)

b- Exercice 2 : Modèle d'atome d'hydrogène

On considère le potentiel à symétrie sphérique suivant :

$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} (1 + ar) e^{-2ar}$

1. De quelle distribution provient ce potentiel ?

Montrer qu'il y a une charge ponctuelle en $r = 0$ et donner une condition que ce potentiel doit vérifier pour que ce soit bien celui d'un atome, puis en donner une expression.

2. Définir et établir l'énergie de liaison.

1°) Orbite circulaire (r_0): PFD: $m[(\ddot{r}-r\dot{\omega}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\omega}+r\ddot{\omega})\vec{e}_\theta] = -\frac{k}{r^n}\vec{e}_r$ et $\vec{v} = r\dot{\omega}\vec{e}_\theta$
 $\Rightarrow m\frac{v_0^2}{r_0} = -\frac{k}{r_0^n} \Rightarrow \left[v_0^2 = \frac{k}{m r_0^{n-1}} \right]$ et $\mathcal{E}_p = \vec{F} \cdot \vec{r} = -\text{quad } \mathcal{E}_p \Rightarrow -\frac{k}{r^n} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} \Rightarrow \left[\mathcal{E}_p = \frac{k}{(n-1)r^{n-1}} \right]$

• $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} \frac{k}{r_0^{n-1}} + \frac{k}{(n-1)r_0^{n-1}} \Rightarrow \left[\mathcal{E}_m = \frac{k}{r_0^{n-1}} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} \right) = \frac{k}{r_0^{n-1}} \times \frac{n-3}{2(n-1)} \right]$

• $\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = (r_0\vec{e}_r) \wedge m(r_0\dot{\omega}\vec{e}_\theta) = mr_0^2\dot{\omega}\vec{e}_z \Rightarrow \left[L = r_0^2\dot{\omega} = v_0 r_0 \right]$
 2°) PFD = $m(\ddot{r}-r\dot{\omega}^2) = -\frac{k}{r^n}$ avec $G = r^2\dot{\omega} = L = \frac{C}{r}$
 $\Rightarrow \left[m\ddot{r} + \frac{k}{r^n} - \frac{mC^2}{r^3} = 0 \right]$ recherche d'une perturbation ε autour de r_0 :
 ($r = r_0 + \varepsilon$, $\varepsilon \ll r_0$)

$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{k}{r^n} &= k(r_0 + \varepsilon)^{-n} = \frac{k}{r_0^n} \left(1 + \frac{\varepsilon}{r_0} \right)^{-n} \approx \frac{k}{r_0^n} \left(1 - \frac{n\varepsilon}{r_0} \right) \\ \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{(r_0 + \varepsilon)^3} \approx \frac{1}{r_0^3} \left(1 - \frac{3\varepsilon}{r_0} \right) \end{aligned} \right. \Rightarrow m\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{r_0^n} \left(1 - \frac{n\varepsilon}{r_0} \right) - \frac{mC^2}{r_0^3} \left(1 - \frac{3\varepsilon}{r_0} \right) = 0$

$\Rightarrow \left[m\ddot{\varepsilon} + \varepsilon \times \left(\frac{3mC^2}{r_0^4} - \frac{kn}{r_0^{n+1}} \right) = \frac{mC^2}{r_0^3} - \frac{k}{r_0^n} = 0 \right]$ stable
 stable si $\frac{3mC^2}{r_0^4} > \frac{kn}{r_0^{n+1}} \Rightarrow \frac{3mC^2}{r_0^3} > \frac{kn}{r_0^n} \Rightarrow \frac{3k}{r_0^n} > \frac{kn}{r_0^n} \Rightarrow \boxed{3 > n}$

3°) $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + \mathcal{E}_p$ avec $v = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\omega}\vec{e}_\theta = \dot{r}\vec{e}_r + \frac{C}{r}\vec{e}_\theta \Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$
 $\Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}\right) - \frac{k}{(n-1)r^{n-1}} \Rightarrow \left[\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \left(\frac{mC^2}{2r^2} - \frac{k}{(n-1)r^{n-1}} \right) \right]$

• Orbite stable circulaire pour: $\frac{d^2\mathcal{E}_{p,eff}}{dr^2} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{k}{r^n} = 0$ pour $\left[\frac{mC^2}{r^3} = \frac{k}{r^n} \right]$

• Orbite stable si $\frac{d^2\mathcal{E}_{p,eff}}{dr^2} > 0$, c'est: $\frac{3mC^2}{r^4} - \frac{nk}{r^{n+1}} > 0 \Rightarrow \frac{3mC^2}{r^3} > \frac{nk}{r^n} \Rightarrow \boxed{3 > n}$

I- Mines-Ponts (2023)

15- Force en $\frac{1}{r^n}$ (2023)

On considère un point matériel en orbite, soumis à une force de la forme :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^n}\vec{e}_r$$

avec K une constante strictement positive et un entier n supérieur ou égal à 2.

1. On suppose d'abord une orbite circulaire.
Déterminer la vitesse v_0 , l'énergie mécanique E_0 et la constante des aires C .
2. Déterminer une condition sur n pour avoir une orbite stable.
Questions supplémentaires : Comparer, dans le cas d'une orbite stable, la pulsation du mouvement avec celle du mouvement circulaire de la question 1.
Tracer la trajectoire du mouvement perturbé et celle de l'orbite circulaire.
3. Retrouver la même condition en utilisant un raisonnement sur la fonction énergie potentielle effective $r \mapsto E_{p,eff}(r)$.